- дефиниция : Случаен експеримент

  ↳ елементарно събитие и мн·ост ел.събития

  ↳ събитие

  ↳ "или", "и", "допълнение"

  ↳ закон на де Морган

  ↳ σ-Алгебра

  ↳ следствия + доказателства за лечение

  ↳ борелова алгебра

  ↳ атом

  ↳ вероятност

- Лекция 2:

  ↳ свойства на вероятността + доказателство

  ↳ дискретна вероятност

  ↳ равномерна вероятност

  * Произошъл на случай, в който нямаме никаква априорна информация за модела и не искаме да придаваме на нито един от възможните изходи по-голяма или по-малка възможност за сбъдване от тези на останалите. $P(A) = \frac{|A|}{N}$

  ? Върху крайни

  ↳ геометрична вероятност

  * Пример за вероятностно разпределение върху ~~неравно~~ равномерно множество. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ →обем

  ↳ идея на Монте Карло алгоритмите

  ↳ вероятностно пространство

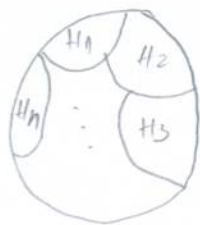 ↳ условна вероятност + промяна на вер. прост

  ↳ независимост, условна вер. при XIУ

  ↳ независимост в съвкупност

  * A₁, ... Aₙ - независими в съвкупност

  ⟹ и допълненията им са независими в съвкупност

- лекция 3 :

↳ формула за пълната вероятност → th. + д-во
↳ пълна група от събития
  * Групата от множества $H = H_1, H_2, ..., H_n$ се нарича пълна група от събития, ако за всеки различни $i \geq 1$ и $j \leq n$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ и $\bigcup_{i=1}^{n} = \Omega$
↳ казваме, че това още е и разбиване на Ω,

↳ формула на Бейс + доказателство
      ↓
   H_i е тоя и да е което от H

↳ деф. за случайна величина
↳ следствие от деф. за сл.вел.
↳ свойства на случайни величини + доказателство

- лекция 4 :

↳ индикаторна функция
↳ лема за индикаторна ф-я + доказателство
? ↳ дискретна сл.вел
↳ равенство по разпределение, $X \stackrel{d}{=} Y$
↳ разпределение на дискретна сл.величина
! ↳ независимост в съвкупност на дискретни сл.вел
↳ независимост на дискретни сл.вел.
↳ функция на разпределение на случайна величина
   * $\lim_{n \to \infty} F_X = 1$, $\lim_{n \to -\infty} F_X = 0$

↳ математическо очакване EX
↳ средно аритметично
↳ сходящ / абсолютно сходящ ред
↳ свойство на MO + доказателство
→ дисперсия DX
→ стандартно отклонение $\sqrt{DX}$
→ твърдение: $DX \stackrel{(1)}{=} E(X - EX)^2 \stackrel{(2)}{=} EX^2 - (EX)^2$ + доказателства

-2-

↳ свойство на дисперсията

↳ следствие : $EX^2 \geq (EX)^2$

↳ пораждаща функция $g_X(s)$

↳ свойства + доказателства

↳ теорема: $g_{X+Y}(s) = g_X(s) g_Y(s)$ + доказателство

- Лекция 5:

↳ разпределение на Бернули / схема на Бернули

↳ свойства: EX, DX, $g_X(s)$

↳ биномно разпределение

↳ свойства

↳ геометрично разпределение

↳ свойства

↳ безпаметност $P(X \geq n+m \mid X \geq m)$, $P(X \geq r) = ?$

↳ отрицателно биномно разпределение

↳ свойства

↳ твърдение те ако $X = \sum_{i=1}^{r} Y_i$, $Y_i \sim Ge(p)$
   + доказателство

↳ Поасоново разпределение → те е схема на Бернули

$$1 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)$$

↳ Твърдение за $\lim\limits_{n \to \infty} P(X_n = k) = P(X = k)$

↳ свойства и доказателства

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ ← ↳ Теорема на Поасон + доказателство

↳ хипергеометрично разпределение:

↳ свойства + доказателства

↳ $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \not\sim Bin(n, \frac{M}{N})$ → понеже не са независими

заедно взето в едно вероятностно пространство

↳ съвместни дискретни разпределения

↳ маргинални разпределения

↳ функция на разпределение на случайни величини

↳ независимост на съвместно разпределение

↳ $F_{X,Y}(x, \infty)$, $F_{X,Y}(\infty, y)$, $F_{X,Y}(\infty, \infty)$ $P(X \leq \infty) = 1$

-3-

↳ ковариация → зависи от мащаб
↳ линейна зависимост
↳ твърдение: $Cov(X,Y) = EXY - EX \cdot EY$ + доказателство
↳ $X ⊥ Y \Rightarrow Cov(X,Y) = 0$

↳ корелация → не зависи от мащаба
↳ твърдение за $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ + доказателство

#TODO ❓ ↳ твърдение за $|\rho(X,Y)| \le 1$, $|\rho(X,Y)| = 1$

❓ Виж що представя ← ↳ УМО
за него !!!

↳ свойства

❓ $E f(x) g(Y) = E f(x) E g(Y)$ → пада се на изпит ❓❗

$E(f(X|Y)) = EX$! вярно

-4-

НЕПРЕКЪСНАТИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ

д. ↳ непрекъсната сл. Величина

д. ↳ абсолютно непрекъсната сл. Вел

↳ проверка дали функция на разпределение
е добре дефинирана, дали се интегрира до 1

тв. ↳ твърдение, че $P(X=x)=0$ + доказателство

д. ↳ функция на разпределение

↳ th. за смяна на променливите

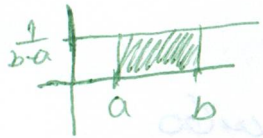↳ необходимо и достатъчно условие за непрекъснатост

+ доказателство на th.

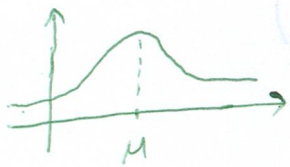↳ математическо очакване

↳ свойства за $g(x)$

↳ дисперсия

↳ свойства на EX и DX

↳ равномерно разпределение
$f_X(x)$, $F_X(x)$, EX, EX^2, DX

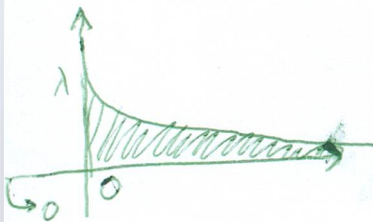

↳ пример с $Y = \frac{x-a}{b-a}$

↳ твърдение $Y \in U(0,1)$, $Y = \frac{x-a}{b-a}$

↳ Нормално разпределение
↳ EX, DX, $f_X(x)$, $F_X(x)$

↳ $Z = \frac{x-M}{\sigma}$, $Z \sim N(0,1)$ → да докажем

↳ Експоненциално разпределение
↳ EX, DX, $f_X(x)$, $F_X(x)$

↳ непрекъснат аналог на геометричното
→ безпаметност + доказателство

д. ↳ непрекъснат вектор от сл. вел.

д. ↳ носител на случайна величина

д. ↳ маргинална плътност

↳ маргинално разпределение

↳ условна плътност

↳ съвместна ф-я на разпределение на вектор

↳ независимост на две непрекъснати сл. вел

↳ независимост в съвкупност

↳ $E g(x)$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $Y = g(x)$

↳ Т $E g(x) = E(x_1 + x_2) = E x_1 + E x_2$ + доказателство

#TODO § ↳ Т $x_1 \perp\!\!\!\perp x_2 \Rightarrow D(x_1 + x_2) = D x_1 + D x_2$ + доказателство

↳ Тб. $x_1 \perp\!\!\!\perp x_2 \Rightarrow E x_1 x_2 = E x_1 E x_2$ и $D x_1 + x_2 = D x_1 + D x_2$

#TODO P ↳ СМЯНА НА ПРОМЕНЛИВИТЕ + доказателство

g. ↳ Гама разпределение, Γ

↳ твърдение: $x_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta) \Rightarrow x = \overset{n}{\underset{i=1}{\sum}} x_i \sim \Gamma\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\sum}} \alpha_i, \beta\right)$

#TODO + доказателство с (3)

↳ специфике за експоненциалните + доказателство

↳ $E X, D X$

g. ↳ хи-квадрат

↳ теорема $z \sim N(0,1)$ + доказателство

g. ↳ t-разпределение

g. ↳ сходимост почти сигурно (п.с.)

g. ↳ сходимост по вероятност

g. ↳ сходимост по разпределение

↳ твърдение за $P(A) = \underset{n \to \infty}{\lim} P(A_i)$

↳ Теорема за п.с. $\Rightarrow P \Rightarrow d$

↳ Твърдение: $x_n \overset{d}{\to} C \Rightarrow x_n \overset{P}{\to} C$

↳ Неравенство на Марков + доказателство

↳ следствие от неравенството на Марков

↳ неравенство на Чебишев

↳ закон за големите числа (ЗГЧ)

↳ теорема за ЗГЧ + доказателство

-6-

Статистика

    ↳ генерална съвкупност

    ↳ случайна извадка

    ↳ статистика (точкова оценка)

Точкови оценки

    ↳ $\Theta(\vec{X})$ vs $\Theta(\vec{x})$

    ↳ максимално правдоподобие

    ↳ оценка по метода на МП

    ↳ метод на моментите и оценка

    ↳ свойство на оценките: неизместеност

    ↳ свойство: сила $\Theta(\vec{x})$

    ↳ централна статистика

Доверителни
интервали

    ↳ оптимална критична област

    ↳ лема Нейман - Пирсон