2023/24

$\boxed{1.}$ M – мн. с n елемента, по колко начина можем да изберем:

а) k различни елемента от M

$\binom{n}{k}$ → не не интересува наредбата (комбинация)

n · n−1 ... n−k+1

$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ → всички начини по които избираме = k-ти елемент

~~n начина~~ да изберем първия

n−1 за втория

↓ разделяме на k! заради възможните пермутации в наредбата

$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$

б) k-орка от различни елементи на M,

→ редът има значение → вариации

$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = V_n^k$

в) k-орка от елементи на M

$\underbrace{M \times M \times M \dots \times M}_{k} = |M^k| = n^k$

$\boxed{2.}$ Колко решения има $x_1 + \dots + x_k = n$

а) $x_1, \dots, x_k$ са естествени числа

$\binom{n-1}{k-1}$

б) $x_1, \dots, x_k$ са неотрицателни цели числа

$\binom{n+k-1}{k-1}$

**3.** $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

**4.** k различни частици в n различни клетки

а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow \text{неразличими } \binom{n}{k}$$

б) клетките могат да съдържат произволен брой частици

$$n^k \Rightarrow \text{неразличими } \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

в) няма празна клетка

k частици, n клетки

$A_i = \{$ i-тата клетка е празна $\}$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{$ поне една клетка е празна $\}$

$$\Rightarrow \left| \text{брой на всички конфигурации} \right| - \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = n^k - \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} (n-m)^k (-1)^{m+1} \Rightarrow \text{неразличими } \binom{k-1}{n-1}$$

**5.** 4 цифрено число с цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 $= n=5$

а) не се допуска повторение на цифрите

$n(n-1)(n-2)(n-3) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ или $5!$

б) допуска се повторение

$\Rightarrow n^k = 5^4 = 625$

в) не се допускат повторения и числото е нечетно

от (1, 3, 5) избираме едно, и за останалите 3 места избираме от 4

$\Rightarrow 3 \cdot 4!_3 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$

6. 4 членна делегация от 12 кандидати

а) няма ограничение за участие

$$\binom{n}{k} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{(12-4)!\,4!} = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot \overset{5}{\cancel{10}}\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2}} = 11\cdot 9\cdot 5 = 495$$

б) A и B не трябва да участват заедно

A и B и 10 други

i) $\binom{12}{4} - \binom{10}{2}$ → от всички вадим точно тогава, когато сме ги избрали заедно

ii) {A, 4 → $\binom{10}{3}$ → изключваме A и B, остават 10
{B, 4 → $\binom{10}{3}$
4 → $\binom{10}{4}$ → само A, + само B + без A и B

$$\Rightarrow 2\cdot\binom{10}{3} + \binom{10}{4}$$

в) C и D могат да участват само заедно

$\binom{12}{4} - 2\binom{10}{3}$ → от всички изваждаме тези в които C и D не са заедно

II $\binom{10}{2} + \binom{10}{4}$

$\binom{10}{2}$ → C и D

$\binom{10}{4}$ → нито C нито D

7. 5 различни топки в 3 различни кутии A, B и C

а) кутията A е празна

$2^5$ → имаме 2 избора за да разпределим 5 топки, B или C също може да е празна

б) само кутия A е празна

$2^5$ → всичко е в B или в C (2 комбинации)

$$2^5 - 2$$

в) точно една кутия е празна

само A или само B или само C

$3 \cdot (2^5 - 2)$

г) поне една кутия е празна

поне → точно 1 + точно 2 + 3 → всички са на едно място

$\downarrow$ или 1 $\quad\quad$ $\downarrow$ или 2

$\Rightarrow \quad 3 \cdot (2^5-2) + 3$

д) няма празна кутия

$3^5 - (3 \cdot (2^5-2)+3)$

$3^5$ ↓ всички

$(3 \cdot (2^5-2)+3)$ ↓ поне 1 празна

$\boxed{8.}$ думи с дължина n съдържащи само a, b и c

а) започват с a

$3^{n-1}$ → фиксираме a-то и за всяка следваща избираме

б) съдържат точно k-пъти символа a

$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$ → за останалите имаме да бираме между b и c още n-k пъти

$\binom{n}{k}$ ↓ имаме k a-та, избираме къде да ги сложим

в) точно k пъти a, първият и последният символ е a

↳ a $\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_}_{n \text{ позиции}}$ a $\quad$ k-2 a-та $\quad$ $\binom{n-2}{k-2} \cdot 2^{n-k}$

$\binom{n-2}{k-2}$ ↓ къде да са a-тата

г) к1, к2 и к3 пъти, $k_1+k_2+k_3=n$

$$\binom{n}{k_1}\cdot\binom{n-k_1}{k_2}\cdot\binom{n-k_1-k_2}{k_3} = \frac{n!}{\cancel{(n-k_1)!}\cdot k_1!}\cdot\frac{\cancel{(n-k_1)!}}{\cancel{(n-k_1-k_2)!}\cdot k_2!}\cdot\frac{\cancel{(n-k_1-k_2)!}}{\underbrace{(n-k_1-k_2-k_3)!}_{=0}\, k_3!}$$

къде да са a-тата; къде да са b-тата; къде да са c-тата

$$= \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!}$$

**11.** номерата на колите са равномерно разпределени

а) да іх съдър на еднакви цифри?

цифри: 0-9 → 10 на брой

номерата са 4

$$\Rightarrow P = \frac{\#\text{ благоприятни}}{\#\text{ всички}} \Rightarrow \frac{10\times 9\times 8\times 7}{10^4}$$

б) да има точно две еднакви цифри

$$\frac{\binom{4}{2}\cdot 10\cdot \underline{9\cdot 8}}{10^4}$$

кои са

възможностите за останалите две

къде са повтарящите се две

в) да има 3 еднакви цифри

$$\frac{\binom{4}{3}\cdot 10\cdot 9}{10^4}$$

г) да има две двойки еднакви цифри

$$\frac{\binom{10}{2}\binom{4}{2,2}}{10^4}$$

g) има една и съща сума от първите две и последните две цифри

I II III IV

I + II = III + IV

| суми | 0 | 1 | 2 | 3 | ... | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # начина | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | 2 | 1 |

→ # начини които ни вършат работа са ~~# начина~~$^2$

$$\Rightarrow \frac{2\left(1^2+2^2+3^2+\dots+9^2\right)+10^2}{10^4} \quad \text{или} \quad \frac{2\cdot\sum_{k=0}^{9} k^2+10^2}{10^4}$$

идва от това, че половинката са еднакви

13 A - 7 спатия

B - 2 ~~[illegible]~~ аса

⇒ Б.О.О. може да считаме, че тестето се състои от

7, A, A, A, A ⇒ имаме 5 наредби

→ P( A да спечели)

$\boxed{\begin{array}{l}7, A, A, A, A \\ A, 7, A, A, A\end{array}}$

→ интуитивно $\frac{2}{5}$

A, A, 7, A, A

A, A, A, 7, A

A, A, A, A, 7

→ $\frac{\binom{52}{5}\cdot 47!\cdot 2\cdot \boxed{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{52!}$ =

останалите 47 ги пермутираме

къде да сложим асата

избираме позициите на тези 5 карти

7-цата трябва да е или на първа или на втора позиция

$$= \frac{\binom{52}{5}\cdot 47!\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{52!} = \frac{\frac{\cancel{52!}}{\cancel{47!}\cdot 5!}\cdot\cancel{47!}\cdot 2\cdot 4!}{\cancel{52!}} = \frac{2\cdot 4!}{5!} = \frac{2\cdot \cancel{4!}}{5\cdot \cancel{4!}} = \frac{2}{5}$$

**15.** 10 различни зара, $\mathbb{P}$(да се паднат равен брой единици и шестици) = ?

$$\mathbb{P}(\#\text{единици} = \#\text{шестици} = k) = \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}(\#\text{единици} = \#\text{шестици} = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{5} \underbrace{\binom{10}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k}_{\text{вероятност за 1ца}} \cdot \underbrace{\binom{10-k}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k}_{\text{вероятност за 6ца}} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{10-2k} \longrightarrow \text{вероятността за } 2,3,4,5$$

**16.** В силни посещават поне веднъж годишно лекар

$A \to 60\%$ повече от веднъж годишно $\to \mathbb{P}(A) = 60\%$, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 40\%$

$B \to 17\%$ посещават хирург $\to \mathbb{P}(B) = 17\%$, ~~[illegible]~~

$\mathbb{P}(B \mid A) = 15\%$.

$\to \mathbb{P}(\bar{B} \mid \bar{A}) = ?$

$$\mathbb{P}(\bar{B} \mid \bar{A}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{B} \cap \bar{A})}{\mathbb{P}(\bar{A})} = \frac{\mathbb{P}(\overline{A \cup B})}{\mathbb{P}(\bar{A})} = \frac{1 - \mathbb{P}(A \cup B)}{\mathbb{P}(\bar{A})} =$$

$$= \frac{1 - [\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)]}{\mathbb{P}(\bar{A})} = \frac{100\% - (60\% + 17\% - 9\%)}{40\%} =$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A) = 15\% \cdot 60\% = \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{100}_{5}} \cdot \frac{\cancel{60}^{3}}{\cancel{100}_{20}} = \frac{9}{100} = \underline{\underline{9\%}}$$

$$= \frac{100 - 68}{40} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5} = \underline{\underline{80\%}}$$

17 P(сумата от падналите се числа да е < 8 | сумата е нечетна) = ?

хвърлят се два зара

| сума | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # начина | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

$$P(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

$$P(B) = \frac{2+4+6+4+2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}} = \frac{P(\text{сумата е } < 8 \text{ и е нечетна})}{P(\text{сумата е нечетна})} =$$

$$= \frac{P(\text{сумата е } 3, 5 \text{ или } 7)}{P(\text{сумата е } 3,5,7,9 \text{ или } 11)} = \frac{\frac{2+4+6}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{12}\cdot 2}{\cancel{36}\cdot 1 \atop 3} = \frac{2}{3}$$

→ Независими ли са A и B ?

$$P(A)\cdot P(B) = \frac{7}{12}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{24} \neq \frac{1}{3} \to P(A\cap B)$$

↳ не са независими

$\boxed{P(A\cap B) = P(A)\,P(B) \to \text{деф за } \perp\!\!\!\perp}$

$\boxed{20.}$ двама последователно хвърлят монета печели този който първи хвърли ези

$P(\text{I да спечели}) = ?$

$P(\text{II да спечели}) = ? \rightarrow 1 - P(\text{I да спечели})$

↳ E
T T E
T T T T E
⋮

$P(\text{I да спечели}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \dots + =$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, за $|x| < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2}$

$\boxed{21.}$ n писма запечатани в пликове

$P(\text{никой да не е получил своето писмо}) = ? \rightarrow N$

Нека $A_i = \{$i-тия адресат получава предназначеното за него писмо$\}$

$P(A_i) = \frac{1}{n}$

$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}$

$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$

⋮

$P(Y) = \frac{1}{n!}$

↓

Y - всеки получава неговото писмо

$P(N) = 1 - P(\overline{N}) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n) =$

$= 1 - \left(n\cdot\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots\right) =$

$= 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{n!} + \dots\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots$

↳ $P(N) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$

**4.** $\Omega = \{\{B,G\}, \{G,B\}, \{B,B\}, \{G,G\}\}$

→ Ако по-старото е момиче, $\Omega$ намалява на половина

$\Omega_{new} = \{\{G,B\}, \{G,G\}\}$

$\mathbb{P}$(и двете да са момичета | по-старото е момиче) $= \frac{1}{2}$

→ Ако поне едно е момче ⇒ $\Omega_{new} = \{\{G,B\}, \{B,G\}, \{B,B\}\}$

$\mathbb{P}$(и двете да са момчета | поне едно е момче) $= \frac{1}{3}$

**27.** две партиди от 12 и 10 изделия, във всяко по едно дефектно

→ избираме от първата прехвърляме във втората и избираме от втората

$\mathbb{P}$(избраното от втората да е дефектно) = ?

$H_1$ = {изтеглили сме дефектно от първата партида}

$H_2$ = {не сме изтеглили дефектно от първата партида} $= \overline{H_1}$

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{12}$

$\mathbb{P}(H_2) = \frac{11}{12}$

A = {изтеглили сме дефектно от втората партида} ⇒ $\mathbb{P}(A) = ?$

$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(A|H_i)\,\mathbb{P}(H_i)$ $\qquad \mathbb{P}(A|H_1) = \frac{2}{11}$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\,\mathbb{P}(H_2) =$ $\qquad \mathbb{P}(A|H_2) = \frac{1}{11}$

$= \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{\underset{6}{12}} + \frac{1}{11} \cdot \frac{11}{12} = \frac{1}{66} + \frac{1}{12} = \frac{2+11}{132} = \frac{13}{132}$

28. 3 стандартни зара и 1 само със шестици
ги избираме 3 и ги хвърляме

а) $\mathbb{P}$(да се паднат 3 шестици) = ?

$H_1$ = {избрали сме 2 стандартни и 1 нестандартен зар} $= \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$

$H_2$ = {избрали сме 3 стандартни зара} $= \overline{H_1} = \dfrac{1}{4}$

A = {паднали са се 3 шестици}

$\mathbb{P}(A|H_1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$

$\mathbb{P}(A|H_2) = \left(\frac{1}{6}\right)^3$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) =$

$= \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{4}}$

б) различни цифри

$A_2$ = {хвърлили сме различни цифри}

$\mathbb{P}(A_2|H_1) = \dfrac{5 \cdot 4}{36} = \dfrac{\cancel{20}^{\,5}}{\cancel{36}_{\,9}} = \dfrac{5}{9}$

$\mathbb{P}(A_2|H_2) = \dfrac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{6^{\cancel{3}}} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$

$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A_2|H_2)\mathbb{P}(H_2) =$

$= \boxed{\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{4}}$

в) последователни цифри

$A_3$ = {паднали са се последователни цифри}

$\mathbb{P}(A_3|H_1) = \dfrac{2}{6^2}$ // 5, 4; 4, 5

$\mathbb{P}(A_3|H_2) = \dfrac{4 \cdot 3!}{6^3}$ // 1, 2, 3; 2, 3, 4; 3, 4, 5; 4, 5, 6

$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A_3|H_2)\mathbb{P}(H_2) =$

$= \boxed{\frac{2}{6^2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4 \cdot 3!}{6^3} \cdot \frac{1}{4}}$

**30.** 7 топки за тенис, от които 4 са нови
→ изтеглим 3, играме и ги връщаме
P(на второто теглене да изберем 3 нови топки) = ?

→ $H_i$ = {изтеглили сме $i$ нови топки на първото теглене}, $i = 0, 1, 2, 3$

A = {3-те изтеглени топки за втората игра са нови}

$P(A) = ?$

→ $P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)$

$P(H_0) =$

$P(H_1) =$

$P(H_2) =$

$P(H_3) =$

**31.** 15 изпитни билета съдържат по два въпроса и покриват целия конспект от 30 въпроса
- студент може да отговори на 25

→ за да положи трябва да отговори и на двата въпроса, на един от първия и на един от втория билет.

P(да положи) = ? → A

$H_i$ = {на първия билет има $i$ познати въпроса}, $i = 0, 1, 2$

$$P(H_0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{\frac{5!}{3!\cdot 2!}}{\frac{30!}{28!\cdot 2!}} = \frac{20}{30\cdot 29} = \frac{20}{870}$$

$$P(H_1) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{30\cdot 29}{2\cdot 1}} = \frac{10}{870}$$

$$P(H_2) = \frac{\binom{25}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{25\cdot 24}{870} = \frac{600}{870}$$

$P(A|H_0) = 0$

$P(A|H_1) = \frac{24}{28}$

$P(A|H_2) = 1$

$$P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) =$$
$$= 0\cdot\frac{20}{870} + \frac{24}{28}\cdot\frac{10}{870} + 1\cdot\frac{600}{870} = \frac{24}{28}\cdot\frac{10}{870} + \frac{600}{870}$$

32.

- 85% са зелени, 15% са сини
- свидетел казва че е било синьо
- свидетеля определя правилно в 80% от случайте и греши в 2[illegible]

P(колата наистина да е била синя) = ?

$H_1$ = { катастрофиралата е синя кола } = 15%
$H_2$ = { катастрофиралата е зелена кола } = 85%

A = { свидетел казва синьо }

$\mathbb{P}(H_1 | A) = ?$

$\mathbb{P}(A | H_1) = 80\%$ $\quad \mathbb{P}(H_1) = 15\%$
$\mathbb{P}(A | H_2) = 20\%$ $\quad \mathbb{P}(H_2) = 85\%$

$$\mathbb{P}(H_1 | A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\,\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1)\,\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\,\mathbb{P}(H_2)} = \frac{80\% \cdot 15\%}{80\% \cdot 15\% + 20\% \cdot 85\%} =$$

$$= \frac{8 \cdot 15}{8 \cdot 15 + 2 \cdot 85} = \frac{120}{120 + 170} = \frac{120}{290} = \frac{12}{29} < \frac{1}{2}$$

33.

тестът е точен 99%.
0,5% от населението е заразено
99,5% не е заразено

P(случайно избран човек с положителен тест да е болен) = ?

A = { тестът е положителен } →
$H_1$ = { болен }
$H_2$ = { здрав }

$\mathbb{P}(A | H_1) = 99\%$
$\mathbb{P}(A | H_2) = 1\%$

$$\mathbb{P}(H_1 | A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\,\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1)\,\mathbb{P}(H_1)\,\mathbb{P}(A|H_2)\,\mathbb{P}(H_2)} = \frac{99\% \cdot 0,5\%}{99\% \cdot 0,5\% + 1\% \cdot 99,5\%} = \frac{0,5}{0,5+1} = \frac{1}{3}$$

**34.** 100 студенти, 55 момчета, 45 момичета

момичета $\to$ 0,7
момчета $\to$ 0,4

се избират 3 резултата, 2 VV и 1 X, P и трите резултати да са на момичета?

$H_i = \{$ избрали сме $i$ момичета от всичко 3 човека $\}$, $i = 0, 1, 2, 3$
$A = \{$ отговорите са два верни и един грешен $\}$
$P(H_3 \mid VVX) = ?$

$$P(H_0) = \frac{\binom{55}{3}}{\binom{100}{3}}$$

$$P(A \mid H_0) = 3 \cdot (0,4)^2 + 0,6$$

$$P(A \mid H_1) = (0,4)^2 \cdot 0,3 + (0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,7) \cdot 2$$

$$P(H_1) = \frac{\binom{55}{2}\binom{45}{1}}{\binom{100}{3}}$$

$$P(A \mid H_2) = (0,7)^2 \cdot 0,6 + (0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,4) \cdot 2$$

$$P(A \mid H_3) = 3 \cdot (0,7)^2 \cdot 0,3$$

$$P(H_2) = \frac{\binom{55}{1}\binom{45}{2}}{\binom{100}{3}}$$

$$\Rightarrow P(H_3 \mid A) = \frac{P(A \mid H_3)\, P(H_3)}{\sum_{i=0}^{3} P(A \mid H_i)\, P(H_i)}$$

$$P(H_3) = \frac{\binom{45}{3}}{\binom{100}{3}}$$

**35.** 3 принтера A, Б и В

да бъде изпратена заявка
към A – 0,6 $\to$ провал 0,01
към Б – 0,3 $\to$ провал 0,05
към В – 0,1 $\to$ провал 0,04

$E = \{$ настъпила е грешка $\}$

$P(A \mid E) = ?$

$$\Rightarrow P(A \mid E) = \frac{P(E \mid A)\, P(A)}{P(E \mid A) P(A) + P(E \mid Б) P(Б) + P(E \mid В) P(В)}$$

$P(A) = 0,6$
$P(Б) = 0,3$
$P(В) = 0,1$

$$= \frac{0,01 \cdot 0,6}{0,01 \cdot 0,6 + 0,05 \cdot 0,3 + 0,04 \cdot 0,1}$$

$P(E \mid A) = 0,01$
$P(E \mid Б) = 0,05$
$P(E \mid В) = 0,04$

**36.** 3 жетона

Б, Б
Ч, Ч
Б, Ч

$H_i = \{$избрали сме жетон с $i$ бели страни$\}$, $i = 0, 1, 2$

$A = \{$хвърлили сме бяло$\}$

$\mathbb{P}(H_2 \mid A) = ?$

$\mathbb{P}(H_0) = \frac{1}{3}$ $\quad \mathbb{P}(A \mid H_0) = 0$

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{3}$ $\quad \mathbb{P}(A \mid H_1) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(H_2) = \frac{1}{3}$ $\quad \mathbb{P}(A \mid H_2) = 1$

$$\to \mathbb{P}(H_2 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_2)\,\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A \mid H_2)\,\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A \mid H_1)\,\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A \mid H_0)\,\mathbb{P}(H_0)}$$

**37.** Въпрос с 4 отговора, 1/4

$H$ = студента знае – 90%, $\bar{H} = 10\%$

$\mathbb{P}(\bar{H} \mid \underbrace{\text{отговорът е верен}}_{A}) = ?$

$\mathbb{P}(A \mid H) = 100\%$ $\quad \mathbb{P}(H) = 90\%$

$\mathbb{P}(A \mid \bar{H}) = 25\%$ $\quad \mathbb{P}(\bar{H}) = 10\%$

$$\mathbb{P}(\bar{H} \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid \bar{H})\,\mathbb{P}(\bar{H})}{\mathbb{P}(A \mid \bar{H})\,\mathbb{P}(\bar{H}) + \mathbb{P}(A \mid H)\,\mathbb{P}(H)} = \frac{25\% \cdot 10\%}{25\% \cdot 10\% + 100\% \cdot 90\%}$$

Дискретни вероятности 2

**40.** Залага 5 лв. и има право да хвърли два зара

2 шестици → 100 лв. печели → 95

1 шестица → 5 лв. печели → 0

→ $P(2 \text{ шестици}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

$P(1 \text{ шестица}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36}$

$P(0 \text{ шестици}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

→ $\frac{1}{36} \cdot 95 + \cancel{\frac{10}{36} \cdot 0} + \frac{25}{36} \cdot (-5) = \frac{95}{36} - \frac{125}{36} = -\frac{30}{36} = -\frac{5}{6}$ ⇒ играта не е справедлива

**41.** ези →

тура ←

P(след 10 хвърляния да се намира) = ?

а) от където е тръгнал

↳ $P(X=0) = P(5 \text{ езита и } 5 \text{ тури}) =$

$= \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$

б) на 2 крачки от началната

$P(X = 2 \text{ или } X = -2) = P\left(\begin{matrix} 6 \rightarrow \text{ и } 4 \leftarrow \\ 6 \leftarrow \text{ и } 4 \rightarrow \end{matrix}\right) =$

$= 2 \cdot \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$

в) на 5 крачки пред началната си позиция

↳ не може след четен брой стъпки да сме на нечетна позиция!

**4.2** 2 зара се хвърлят 5 пъти последователно

X = „# хвърляния, при които сумата от резултатите е 6"

$\mathbb{P}(X=2) = ?$

$X \sim Bin(5, \frac{5}{36}) \to$ 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1 $\} \frac{5}{36}$

$\hookrightarrow \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{5}{2} \underbrace{\left(\frac{5}{36}\right)^2}_{\text{успех}} \underbrace{\left(\frac{31}{36}\right)^3}_{\text{неуспех}}$

$\mathbb{P}(X=2) = \binom{5}{2} \left(\frac{5}{36}\right)^2 \left(\frac{31}{36}\right)^3$

**4.4** A хвърля 3 монети

B хвърля 2 монети

- печели този който хвърли повече ези и взима всички 5
- ако са равен брой печели B

$\hookrightarrow \mathbb{P}(A$ да спечели$) = ?$

X = „# ези на A" $\to Bin(3, \frac{1}{2})$

Y = „# ези на B" $\to Bin(2, \frac{1}{2})$

$\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=2, Y=0) + \mathbb{P}(X=2, Y=1) + \mathbb{P}(X=3, Y=0) + \mathbb{P}(X=3, Y=1) + \mathbb{P}(X=3, Y=2)$

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

| Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

$\mathbb{P}(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\mathbb{P}(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X>Y) = \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} =$

$= \frac{7 + 8 + 1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \to$ A да спечели

$P(Y=1 \mid A \text{ е спечелил}) = ?$

$$P(Y=1 \mid X>Y) = \frac{P(Y=1 \cap X>Y)}{P(X>Y)} = \frac{P(X=2, Y=1) + P(X=3, Y=1)}{P(X>Y)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{16}+\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{16}\ \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$E\, I = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}(-3) = -\frac{1}{2}$$

$$E\, II = \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot(-2) = \frac{1}{2}$$

**47)** подводница стреля $n$ пъти последователно по кораб
корабът има $m$ отсека

$P(\text{да потопим кораба, ако трябва да наводним поне 2 отсека}) = ?$

$m$ отсека

$X =$ "# наводнени отсеци"

$P(X \geq 2) = 1 - P(\text{да не е потопен})$

$P(\text{да не е потопен}) = P(X=0 \text{ или } X=1) =$

$$= (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}\cdot p^k (1-p)^{n-k}}_{k \text{ улучвания}} \underbrace{\left(\frac{1}{m}\right)^k}_{\text{винаги в един фиксиран отсек}} \cdot\, m$$

кой отсек сме фиксирали

**48**

$H_0: p_0 = 1/2$

$H_1: p_1 = 2/3$

Коя от двете хипотези има по-голяма апостериорна вероятност, ако от 200 опита са настъпили 120 успеха?

↳ A = събитието от 200 бернулиева опита (с вероятност за успех p) да имаме 120 успеха

↳ $\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(H_0 \mid A) = ? \\ \mathbb{P}(H_1 \mid A) = ? \end{array}\right\}$ → това са двете апостериорни вероятности, които трябва да сметнем и по-голямото число е това, което търсим

$$\mathbb{P}(H_0 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H_0 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_0)\,\mathbb{P}(H_0)}{\mathbb{P}(A \mid H_0)\,\mathbb{P}(H_0) + \mathbb{P}(A \mid H_1)\,\mathbb{P}(H_1)} =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(A|H_0) + \mathbb{P}(A|H_1)} \cdot \binom{200}{120} \cdot \frac{1^{120}}{2^{200}}$$

$$\mathbb{P}(H_1 \mid A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A|H_0)\ \mathbb{P}(A|H_1)} \cdot \binom{200}{120} \cdot \frac{2^{120}}{3^{200}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(H_1 \mid A) > \mathbb{P}(H_0 \mid A)$$

**49** Хвърлят се два зара

X – „сумата от паднатите се точки"

| X | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

$$\mathbb{E}X = (2+12)\cdot\frac{1}{36} + (3+11)\cdot\frac{2}{36} + (4+10)\cdot\frac{3}{36} + (5+9)\cdot\frac{4}{36} + (6+8)\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{5}{36} = 7$$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 \Rightarrow \mathbb{E}X_1 = 3{,}5 \quad \mathbb{E}X_2 = 3{,}5$$

∵ понеже $X_1$ и $X_2$ са независими и тяхната дисперсия е иста

$$DX_1 = DX_2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} i^2}{6} - 3{,}5^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$DX = DX_1 + DX_2 = 2\cdot\frac{35}{12} = \frac{35}{6}$$

**50.** Урна съдържаща 5 бели и 3 черни топки, последователно се изваждат, докато се появи бяла.

- разпределение, очакване и дисперсия = ?

X = „брой на изтеглените черни топки"

↳ брой неуспехи до първия успех $\quad \mathbb{P}(X=k) = p \cdot q^k$

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$ | $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ | $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}$ |

$\longrightarrow$ ???

$$\mathbb{E}X = 1\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} + 2\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} + 3\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

$$\mathbb{E}X^2 = 1\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} + 4\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} + 9\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{44}{56}$$

$$DX = \frac{44}{56} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{44}{56} - \frac{1}{4} = \frac{44-14}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

б) с връщане ?

$$\mathbb{E}X = \frac{q}{p} = \frac{1-\frac{5}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{8-5}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$$

$$DX = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{3}{8}}{\left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{25}{64}} = \frac{3\cdot 64}{8\cdot 25} = \frac{24}{25}$$

↳ Нека $X_1, \dots, X_{1000}$ са случайни величини, брой изтеглени черни топки при 100 независими опита

$$\mathbb{E}X = 1000\,\mathbb{E}X_1 = \begin{cases} 1000\cdot\frac{1}{2} = 500 & \text{за а)} \\ 1000\cdot\frac{3}{5} = \frac{3000}{5} = 600 & \text{за б)} \end{cases}$$

$$DX = 1000\cdot DX_1 = \begin{cases} 1000\cdot\frac{15}{28} = 535{,}7 & \text{за а)} \\ 1000\cdot\frac{24}{25} = 960 & \text{за б)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X>900) \le \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X| \ge 400) \le \frac{DX}{400^2} = \frac{535{,}7}{400^2} = 0{,}003 \text{ за а)}$$

$$\mathbb{P}(X>900) \le \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X| \ge 300) \le \frac{DX}{300^2} = \frac{960}{300^2} = 0{,}01 \text{ за б)}$$

↳ от неравенството на Чебишев

$\boxed{51.}$ $p = 0{,}001$

за поразяване са нужни поне 2 попадения

$\mathbb{P}$(за поразяване при направени 5000 изстрела) = ?

$X =$ „# попадения" $\sim Bin(5000, 0{,}001)$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) =$$

$$= 1 - \binom{5000}{0} p^0 (1-p)^{5000} - \binom{5000}{1} p^1 (1-p)^{4999} =$$

за малки $x$: $(1+x)^{\frac{1}{x}} \approx e \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx \frac{1}{e}$

$$(1-x)^{\frac{1}{x}} \approx \frac{1}{e}$$

$$= 1 - e^{-5} - 5000 \cdot \frac{1}{1000} \cdot e^{-5} = 1 - 6e^{-5}$$

$\boxed{52.}$ 7 лампи от които 3 дефектни

избират се 4 лампи за проверка

$X =$ „# изпробвани дефектни лампи", $\mathbb{E}X$ и разпределението

$X \sim HG(7, 3, 4)$ и тегловна ф-я $\Rightarrow P(X=k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}X = n \cdot \frac{M}{N} = 4 \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{7}$$

$X \sim HG(N, M, n)$

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**53.** на месец средно 2 слаби земетресения

$\mathbb{P}$( за 3 месеца < от 4 ) = ?

$X_1$ = "# земетресения на 1 месец"

$\mathbb{E}X = 2$ , $\lambda = 2$

$\mathbb{P}(X_1+X_2+X_3 < 4) = ?$

*Твърдение

$X_1 \sim Poi(\lambda)$

$X_2 \sim Poi(\mu)$

$\Rightarrow X_1+X_2 \sim Poi(\lambda+\mu)$

$\Rightarrow (X_1+X_2+X_3<4) = \mathbb{P}(Poi(6)<4) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$

$= \sum_{k=0}^{3} \frac{6^k}{k!} e^{-6}$

**54.** 80% от принтерите работят добре, без допълнителни настройки

10 принтера на седмица се продават

$\mathbb{P}$( поне 9 да работят без нужда от настройки ) = ?

$X$ = "# принтери работещи без допълнителни настройки"

$X \sim Bin(10, 80\%)$

$\mathbb{P}(X \geq 9) = \mathbb{P}(X=9) + \mathbb{P}(X=10) = \binom{10}{9}\left(\frac{4}{5}\right)^9\left(\frac{1}{5}\right)^1 + \binom{10}{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^0 =$

$= 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$

$\rightarrow$ за 5 поредни месеца

$\hookrightarrow$ Ако приемем, че Месец = 4 седмици $\Rightarrow 5 \cdot 4 = 20$ седмици

$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{20} A_i\right) = \prod_{i=1}^{20} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_i)^{20}$

$\hookrightarrow$ за неуспех да се случи на 21-ва

$p^{20} \cdot (1-p)$

$p^{20}$: 20 пъти поред успех

$(1-p)$: $\hookrightarrow$ 21 вече неуспех

$\boxed{55}$ A и B стрелят едновременно по мишена

A с $p=0,2$

B с $p=0,3$

$\mathbb{P}$(A да уцели, а B не) = ? среден брой изстрели за улучване?

→ Нека $A_k$, $k=1,2,\dots$ са съответно събитията, в които A успява (за първи път) на $k$-ия ход, а B не успява във всичките $k$ хода. Считаме, че всички опити преди $k$ са неуспешни.

→ Нека $X \sim Ge(0,2)$, $Y_k = \{\#$ неуспехи на B за $k$ хода$\}$

$$A_k = \{X=k-1, Y=k\} = \{X=k-1\} \cap \{Y=k\}$$

↳ Вероятността A да оцелее, а B не е:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k-1) \cdot \mathbb{P}(Y_k=k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{0,2}_{\substack{\text{успех}\\\text{на A}}} \cdot \underbrace{(0,8)^{k-1}}_{\substack{\text{след } k-1\\\text{неуспехи}}} \cdot \underbrace{(0,7)^{k}}_{\substack{k \text{ неуспехи}\\\text{на B}}}$$

→ Вероятността за неуспех при един опит (два хода - един за A и един за B) ⇒ $0,8 \cdot 0,7 = 0,56$

Нека $Z \sim Ge(0,44) \Rightarrow \mathbb{E}Z = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,44} = 2,27$

$$\mathbb{E}2Z = 2 \cdot \mathbb{E}Z = 2 \cdot 2,27 \approx 4,54$$

56. A печели с 2/3
B печели с 1/3
ще печели се на две последователни партии

$X =$ „# изиграни партии", разпределение и очакване = ?

ще A печели ABAB…AA (или BABA…BB) $\sim Ge(\frac{2}{3})$

$$P(X=2k) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^{k-1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = \left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}\cdot\frac{5}{9}$$

$$P(X=2k+1) = P\begin{pmatrix}ABAB\ldots ABAA\\ BABA\ldots BABB\end{pmatrix} = \left(\frac{2}{9}\right)^{\cancel{k+1-1}\,k}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{9}\right)^k$$

$$EX = \sum k P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2k P(X=2k) + (2k+1)P(X=2k+1) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}\cdot\frac{5}{9} + 2\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^k$$

58. В урна има 3 бели и 2 черни топки
$X =$ „номерът на тегленето на първата бяла топка"
$Y =$ „номерът на опита на тегленето на първата черна след първата бяла топка"
$Y = 6$, ако няма такава

а) съвместното разпределение

| $Y \backslash X$ | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $\frac{3}{10}$ | 0 | 0 | 3/10 |
| 3 | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 0 | 3/10 |
| 4 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 0 | 2/10 |
| 5 | 0 | $\frac{1}{10}$ | 0 | 1/10 |
| 6 | 0 | 0 | $\frac{1}{10}$ | 1/10 |
| | 6/10 | 3/10 | 1/10 | |

$P(X=1, Y=2) = P(б, ч) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P(X=1, Y=3) = P(ббч) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{10}$

$P(X=1, Y=4) = P(бббч) = \frac{1}{10}$

б) $\mathbb{P}(Y>2 \mid X=1)$ и $\mathbb{P}(Y=3 \mid X<3)$

$$\mathbb{P}(Y>2 \mid X=1) = \frac{\mathbb{P}(Y>2, X=1)}{\mathbb{P}(X=1)} = \frac{\mathbb{P}(Y=3, X=1) + \mathbb{P}(Y=4, X=1)}{\mathbb{P}(X=1)} =$$

$$= \frac{2/10 + 1/10}{6/10} = \frac{3/10}{6/10} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(Y=3 \mid X<3) = \frac{\mathbb{P}(Y=3, X<3)}{\mathbb{P}(X<3)} = \frac{\mathbb{P}(Y=3, X=1) + \mathbb{P}(Y=3, X=2)}{\mathbb{P}(X<3)} =$$

$$= \frac{2/10 + 1/10}{9/10} = \frac{3/10}{9/10} = \frac{1}{3}$$

60.

$X$ = „средното по големина от избраните три"

$Y$ = „най-малкото от избраните числа"  1, 2, 3, 4, 5

а) съвместното разпределение на $X$ и $Y$

| $Y \backslash X$ | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 6/10 |
| 2 | 0 | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 3/10 |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{1}{10}$ | 1/10 |
| | 3/10 | 4/10 | 3/10 | |

1 2 3
1 2 4
1 2 5
1 3 4
1 3 5
2 3 4
2 3 5
1 4 5
2 4 5

б) маргиналното разпределение

| $X$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| | 3/10 | 4/10 | 3/10 |

| $Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| | 6/10 | 3/10 | 1/10 |

в) дали $X$ и $Y$ са независими

$\mathbb{P}(X=2, Y=2) = 0 \neq \mathbb{P}(X=2)\,\mathbb{P}(Y=2)$ → не са независими

1) коваријација и корелација

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$$

$$\mathbb{E}XY = \sum_{m,n} \mathbb{P}(X=m, Y=n) =$$

$$= 1\cdot 2\cdot \frac{3}{10} + 1\cdot 3\cdot \frac{2}{10} + 1\cdot 4\cdot \frac{1}{10} + 2\cdot 3\cdot \frac{2}{10} + 2\cdot 4\cdot \frac{1}{10} + 3\cdot 4\cdot \frac{1}{10} = \frac{24}{5}$$

$$\mathbb{E}X = 2\cdot \frac{3}{10} + 3\cdot \frac{4}{10} + 4\cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{5} + \frac{6}{5} + \frac{6}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\mathbb{E}Y = 1\cdot \frac{6}{10} + 2\cdot \frac{3}{10} + 3\cdot \frac{1}{10} = \frac{6}{10} + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{15}{10}$$

$$Cov(X,Y) = \frac{24}{5} - \left(3\cdot \frac{15}{10}\right) = \frac{24}{5} - \frac{45}{10} = \frac{48-45}{10} = \frac{3}{10}$$

$$Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

$$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{48}{5} - 9 = \frac{48}{5} - \frac{45}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{E}X^2 = 4\cdot \frac{3}{10} + 9\cdot \frac{4}{10} + 16\cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{5} + \frac{18}{5} + \frac{24}{5} = \frac{48}{5}$$

$$DY = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \frac{27}{10} - \left(\frac{15}{10}\right)^2 = \frac{27}{10} - \frac{225}{100} = \frac{270-225}{100} = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$$

$$\mathbb{E}Y^2 = 1\cdot \frac{6}{10} + 4\cdot \frac{3}{10} + 9\cdot \frac{1}{10} = \frac{6}{10} + \frac{12}{10} + \frac{9}{10} = \frac{27}{10}$$

$$\rightarrow Cor(X,Y) = \frac{\frac{3}{10}}{\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{9}{20}}}$$

$\boxed{74.}$ а) разпределението и очакваната печалба при едно пускане?

$Y = N^\circ$ [illegible] $\sim Bin(4, \frac{1}{2})$

$X =$ „печалба"

| X | 1000 | 100 | 700 | 250 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

$$EX = 1000 \cdot \frac{1}{16} + 100 \cdot \frac{4}{16} + 700 \cdot \frac{6}{16} + 250 \cdot \frac{4}{16} + 500 \cdot \frac{1}{16} =$$

$$= \frac{1000}{16} + \frac{400}{16} + \frac{4200}{16} + \frac{1000}{16} + \frac{500}{16} = \frac{7100}{16} = \underline{\underline{443,75}}$$

б) пускаме, докато някое попадне при печалба 1000лв. Колко средно жетона? очаквано печалба?

$X_1 =$ „# жетона до първо 1000лв"

$X_1 \sim Ge(\frac{1}{16}) \Rightarrow EX_1 = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = \underline{\underline{16}}$

$X_2 =$ „обща печалба до първо 1000лв"

$\hookrightarrow$ $1000 + 15 \cdot E[$печалба | не сме в 1000лв$] =$

| $X \mid X \neq 1000$ | 100 | 700 | 250 | 500 |
|---|---|---|---|---|
| | $\frac{4}{15}$ | $\frac{6}{15}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

$$\Rightarrow E[X \mid X \neq 1000] = 100 \cdot \frac{4}{15} + 700 \cdot \frac{6}{15} + 250 \cdot \frac{4}{15} + 500 \cdot \frac{1}{15} =$$

$$= \frac{400}{15} + \frac{4200}{15} + \frac{1000}{15} + \frac{500}{15} = \underline{\underline{\frac{6100}{15}}}$$

$$\Rightarrow 1000 + 15 \cdot \frac{6100}{15} = \underline{\underline{7100}}$$

3) бихте ли се съгласили на пермутиране на печалбите или бихте останали с началното разпределение?

Нека $z_i$ = сума билетка $i$ ~ $Unit(\{1000, 100, 700, 250, 500\})$

$$\Rightarrow E z_i = \frac{2550}{5} = \underline{\underline{510}}$$

$$\Rightarrow E\,\text{печалба} = E \sum z_i \cdot \binom{4}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{4-i} = E z_i = 510,\ \text{т.к.}$$

$$E z_i = E z_1 \text{ и } \sum \binom{4}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1,$$

$\Rightarrow$ печалбите $\rightarrow$ 100 700 1000 500 2500

4) пускаме 3 шоколада и очакваме при печалба 100лв, кое е това $p$, за което това е най-вероятно?

$P$(да попадне 3 пъти в 100) =

$$= \left(4p \cdot (1-p)^3\right)^3 = 64p^3 \cdot (1-p)^9 =: f(p)$$

$$f'(p) = 192p^2(1-p)^9 - 576p^3(1-p)^8 \qquad \text{??? как}$$

$$f'(p) = 0 \iff 192(1-p) = 576p$$

$$\iff 192 = 768p$$

$$\underline{\underline{p = \frac{1}{4}}}$$

5) $$\frac{\left(\frac{3}{8}\right)^2}{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{8}{27}\right)^2} \approx 62\% \qquad ???$$

$\boxed{72}$ Нека $Y_1 = X_1 + X_2$ и $Y_2 = X_1 X_2$ с параметри индексирани 1/2

1. За $X_i \sim Ber(p)$

$X_1 + X_2 \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow Y_1 \nsim Ber(p_1)$

$\mathbb{P}(X_1 X_2 = 1) = p \cdot p = 1 - \mathbb{P}(X_1 X_2 = 0) \Rightarrow Y_2 \sim Ber(p^2)$

2. За $X_i \sim Bin(n, p)$

$X_1 + X_2$ = сума на $n$ iid $Ber(p)$
+ сума на $n$ iid $Ber(p) \sim Ber(2n, p)$

Ако $X_1 X_2 \sim Bin(n_2, p_2)$, то т.к. $X_1 X_2 \in \{0, 1, \dots, n_1^2\}$, т.е.

$n_2 = n^2$

... не разбирам смисъла

$\boxed{73.}$ $X_1, X_2$ и $X_3$ са независими и еднакво разпределени сл. вел. с очакване $\mu$ и дисперсия $\sigma^2$.

1.) $f(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3$

$\mathbb{E}f = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 + \mathbb{E}X_3 = \mu + \mu + \mu = 3\mu$

$Df = DX_1 + DX_2 + DX_3 = 3\sigma^2$

Нека $f_\sigma := \frac{1}{4}\left[f(X_1, X_2, X_3) + f(X_2, X_1, X_3) + f(X_3, X_2, X_1) + f(X_1, X_3, X_2)\right]$

$f_\sigma = \frac{1}{4}\left[4(X_1 + X_2 + X_3)\right] = f$

$\Rightarrow \mathbb{E}f_\sigma = \mathbb{E}f$ и $Df_\sigma = Df$

2, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3$

$$T_{Б} = \frac{1}{4}\left(x_1 + x_2 - x_3 + x_3 + x_2 - x_1 + x_2 + x_1 - x_3 + x_1 + x_3 - x_2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2x_1 + 2x_2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ET_{Б} = ET = \mu$$

$$DT = D(x_1 + x_2 - x_3) = 3\sigma^2$$

$$DT_{Б} = D\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(Dx_1 + Dx_2\right) = \frac{\sigma^2}{2} \Rightarrow$$ има ефект, оценката е с по-малка дисперсия

$\boxed{75.}$ 2 кутии топки

първата има 4 бели и 6 черни топки

втората има 7 бели и 3 черни топки

от от всяка случайно се избира по 1 топка

от към изведените 2 се прибавя едно бяло и се добавят в трета кутия

а) P(случайно избрана топка от третата да е бяла) = ?

A = „изтеглили сме бяла от третата кутия"

$B_{xy}$ = „изтеглили сме x от първата и y от втората кутия, като $x, y \in \{w, B\}$ за бяла (w) и за черно (B)

$\Rightarrow$ От формулата за пълната вероятност имаме

$$P(A) = P(A|B_{ww})P(B_{ww}) + P(A|B_{Bw})\left(P(B_{Bw}) + P(B_{wB})\right) + P(A|B_{BB})P(B_{BB})$$

$P(B_{ww}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{28}{100}$ $\qquad P(A|B_{ww}) = 1$

$P(B_{BB}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{18}{100}$ $\qquad P(A|B_{BB}) = \frac{1}{3}$

$P(B_{Bw}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{42}{100}$ $\qquad P(A|B_{wB}) = \frac{2}{3}$

$P(B_{wB}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100}$ $\qquad P(A|B_{Bw}) = \frac{2}{3}$

$$P(A) = 1 \cdot \frac{28}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{42+12}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{18}{100} =$$

$$= \frac{28}{100} + \frac{36}{100} + \frac{6}{100} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$$

б) Теглим от третата кутия по 1 топка с връщане, докато изтеглим бяла

$X =$ „# изтеглени топки от третата кутия"

очакване $= ?$

→ Ако имаме 3 бели, в третата кутия, теглим бяла на първи ход

↳ Ако имаме 2 бели и черна, то броят изтеглени топки следва $Ge(2/3)$ и следователно $\mathbb{E}X = \frac{3}{2}$.

Аналогично и за бяла и две черни, броят изтеглени топки следва $Ge(1/3) \Rightarrow \mathbb{E}X = 3$

$$\Rightarrow \mathbb{E}X = \mathbb{E}(X \mid Bww)P(Bww) + \mathbb{E}(X \mid BBw)(P(BwB) + P(BBw)) + \mathbb{E}(X \mid BBB)P(BBB)$$

$$= 1 \cdot \frac{28}{100} + \frac{3}{2} \cdot \frac{42+12}{100} + 3 \cdot \frac{18}{100} =$$

$$= \frac{28}{100} + \frac{81}{100} + \frac{54}{100} = \frac{163}{100}$$

→ Ако $X$ беше геометрично разпределено то очакването му щеше да е $\frac{10}{7}$, което видяхме, че не е така.

70.

1. Играч хвърля 3 честни монети и 3 стандартни зара за всяко ези получава 1 лв. всяка 6ца → 3лв. Очакваната печалба = ?

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{3} \mathbb{1}_{\{\text{монетата } i = \text{ези}\}} + 3\cdot \mathbb{1}_{\{\text{зар } i = 6\}}\right] =$$

$$= 3\cdot \mathbb{P}(\text{монета } 1 = \text{ези}) + 3\cdot 3\cdot \mathbb{P}(\text{зар } 1 = 6) =$$

$$= 3\cdot \frac{1}{2} + 3\cdot 3\cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{2} + \frac{9}{6} = \frac{9}{6} + \frac{9}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

2. Играч хвърля зар, докато сумата от падналите се числа се дели на 6. Ако това се случи на $k$-ия ход, печели $k$ лв. Очаквана печалба = ?

↳ Независимо от сумата до рунд $i$, точно 1 стойност на зара би я направила $\equiv 0 \pmod 6$ след този рунд

$\Rightarrow$ # рундове $\sim Ge(1/6)$, Нека $p = 1/6$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\text{печалба}] = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p\cdot (1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p}\sum k\cdot(1-p)^k = \frac{p}{1-p}\cdot\frac{1-p}{p^2} =$$

$$= 1/p = 6$$

↳ То реално е $\mathbb{E}[Ge(1/6)] = 6$

3. $k = 1, 2, 3, \ldots$ $\quad \dfrac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=k-1)} = \dfrac{3}{k}$, очакване и дисперсия = ?

$\dfrac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=k-1)} = \dfrac{3}{k}$, т.е. $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{3}{k}\mathbb{P}(X=k-1)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \frac{3}{k}\cdot\frac{3}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{1}\,\mathbb{P}(X=0) = \frac{3^k}{k!}\mathbb{P}(X=0)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) = 1, \text{ то } \mathbb{P}(X=0)\underbrace{\left(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \ldots\right)}_{=e^3} = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=0) = e^{-3} \text{ и } \mathbb{P}(X=k) = e^{-3}\cdot\frac{3^k}{k!} \Rightarrow X \sim Poi(3)$$

$\Rightarrow \mathbb{E}X = 3$, $DX = 3$

4. „брой посетители на стадион" $= Y \sim Poi(\lambda)$ стадионът има 10 входа, с равна вероятност за всеки разпределение, очаквате и дисперсия на посетителите, влезли през вход $E1 = ?$

Ще да пресметнем пораждащата ф-я на $X =$ „# посетители от вход 1".

Нека $Y =$ общ # посетители $\sim Poi(\lambda)$

$$\mathbb{E} s^X = \sum_k \mathbb{E}[s^X \mid Y=k] \cdot \mathbb{P}(Y=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{k} 1\{\text{посетител } i \text{ е избрал вход } 1\}}\right] \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\overset{\text{нез}}{\Rightarrow} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbb{E} s^{1\{\text{пос. 1 е избрал вход 1}\}}\right)^k \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10} s^0 + \frac{1}{10} s^1\right)^k \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\left(\frac{9}{10} + \frac{s}{10}\right)\lambda} =$$

$$= e^{\frac{\lambda}{10}(s-1)}$$

Тъй като за $Z \sim Poi(\lambda)$

$$\mathbb{E} s^Z = \sum s^k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}, \text{ то}$$

от $\mathbb{E} s^X = e^{\frac{\lambda}{10} \cdot (s-1)} \Rightarrow X \sim Poi\left(\frac{\lambda}{10}\right)$

$\Rightarrow \mathbb{E}X = DX = \frac{\lambda}{10}$

Всъщност доказахме, че $Bin(Poi(\lambda), p) \sim Poi(\lambda p)$

**69.** $n > 2$ човека хвърлят честна монета
победител е този който хвърли обратно на всички други
X = "# кръгове до излъчването на победител", $\mathbb{E}X$, $DX$ = ?

$\mathbb{P}$(да има победител) =

$\mathbb{P}$(1 хвърля ези и всички други тура) + $\mathbb{P}$(1 хвърля тура и всички др. ези) =

$$= 2 \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}, \quad \text{за } n \geq 3$$

$$X \sim Ge\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right) \Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{2^{n-1}}{n} = \frac{1}{p}$$

$$DX = \frac{1-p}{p^2}$$

б) след първия победител играта продължава докато останат двама. Броят на оставащите ходове = ?

→ всички разходени пари са $100((n-1)+\dots+2) =$

$$= 100 \cdot \left(\frac{(n-1)n}{2} - 1\right) =: S$$

по симетрия, $\mathbb{E}$[печалба на играч $i$] не зависи от $i$ ⇒

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\text{печалба на играч } i] = S$$

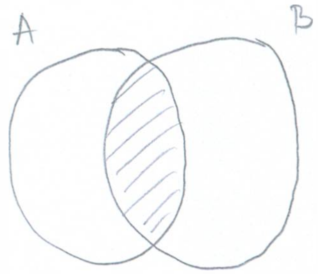
$= n\,\mathbb{E}$[печалба на играч 1] ⇒ $\mathbb{E}$[печалба на играч] $= \frac{1}{n} S$

и това е честната цена

→ За $\mathbb{E}$ # ходове, т.к. от 1) при $n$ играча ще са $\frac{2^{n-1}}{n}$ ⇒

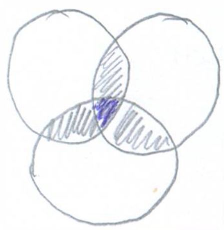
$$\text{от. е.} \quad \frac{2^{n-1}}{n} + \frac{2^{n-2}}{n-1} + \dots + \frac{2^2}{3} = \sum_{k=3}^{n} \frac{2^{k-1}}{k}$$

## 1. Принцип за включване и изключване




$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

→ толко елементи има в обединението



$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| \dots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|}$$

→ обща формула

## 2. $|M| = n$

а) $k$ различни елемента от $M$

$\underset{\square}{n} \quad \underset{\square}{n-1} \quad \dots \quad \underset{\square}{n-k+1}$

$n$ начина да избера първия елемент

→ когато не не интересува наредбата = комбинация

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\begin{array}{l}\text{по всички начини}\\ \text{по които избирам}\\ \text{k-ия елемент}\end{array}\right) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

разделяме на $k!$ заради възможните пермутации в наредбата

комбинации кого ще може да изберем $k$ предмета от $n$

б) к-орка от различни елементи на M

→ т.е. редът има значение (вариация)

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = V_n^k$$

в) к-орка от елементи на M

→ повторенията са позволени

$\underset{n}{\sqcup} \cdot \underset{n}{\sqcup} \cdot \underset{n}{\sqcup} \dots \underset{n}{\sqcup}$ → к елементи $= n^k$ - възможности

→ възможности

→ вариации с повторение

**3.** $x_1 + \dots + x_k = n$

а) $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$, т.е. са естествени числа

$k \leq n$

→ stars & bars

☆ ☆ ☆ ... ☆ → n звездички → n−1 позиции за преградите

→ $x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$\underbrace{☆}_{x_1} | \underbrace{☆}_{x_2} | \underbrace{☆ ☆}_{x_3}$

$1 + 1 + 2 = 4$

→ $x_1 + x_2 + x_3 = 5$

☆ ☆ | ☆ ☆ | ☆

4 места → за преградите

2 прегради

$\Rightarrow \binom{4}{2}$

⇒ n звезди → n−1 позиции за преградите

k−1 → прегради

$\binom{n-1}{k-1}$ → решения

б) $x_1, \dots, x_k = n$, $x_i \in \mathbb{N}_0$ → неотрицателни цели числа

$|\star||\star \ \star \ \star \ \star \ \star \ \star \ \star|$ → може да има прегради от страни, но може и да има две прегради на едно място

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

$(x_1+1) + \dots + (x_k+1) = n+k$ →

на всяко $x$ му добавяме единичка за да няма нули

$\Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}$ → вместо $n$ от а) имаме $n+k$, а преградите си остават $k-1$

начина

$\boxed{4.}$ $k$ различни частици в $n$ различни клетки

| | различими | неразличими |
|---|---|---|
| а) всяка клетка има една частица най-много | $\binom{n}{k} \cdot k!$ $\Rightarrow \frac{n!}{(n-k)!}$ | $\binom{n}{k}$ |
| б) произволен брой частици | $n^k$ | $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ |
| в) няма празна клетка | $\left\lvert\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\rvert = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} (n-m)^k (-1)^{m+1}$ | $x_1 + \dots + x_n = k$, $x_i \in \mathbb{N}_0$ $\binom{k-1}{n-1}$ |

а) → като избираме за първата клетка имаме $n$ възможности, за втората $n-1$ … за $k$-тата → $n-k+1$

$\Rightarrow n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = V_n^k$

б) за първата имаме $n$ възможности, за втората също

$\Rightarrow n^k$

б) $A_i$ = {i-тата клетка е празна}

$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ = {поне една клетка е празна}

⇒ |броят на всички конфигурации| − $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right|$

$n^k - \left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right|$ → от принципа за включване и изключване

⇒ $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right| = |A_1| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_{n-1} \cap A_n| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$

$|A_1| = (n-1)^k$ – първата кутия е забранена

$|A_1 \cap A_2| = (n-2)^k$ – и първата и втората са забранени и т.н.

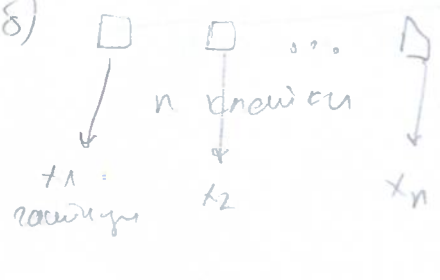
⇒ $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum\limits_{m=1}^{n} \binom{n}{m} (n-m)^k (-1)^{m+1}$

⇒ Ако топчетата са неразличими

k неразличими

n клетки

а) $\binom{n}{k}$ → избираме в кои клетки да сложим топчетата

б) 


? колко слагаме във всяко

$x_1 + \dots + x_n = k$ в $N_0$

$x_1' + \dots + x_n' = n + k$ в $N$

n+k звезди

n−1 прегради ⇒ $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$

$\boxed{5.}$ Колко 4 цифрени числа могат да бъдат написани от цифрите 1, 2, 3, 4 и 5

а) не се допуска повторение на цифри

→ за първото число имаме 5 опции, за второто $5-1=4$ итн.

$\Rightarrow 5\times4\times3\times2 = |V_5^4| = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = 120$

↳ вариации без повторение

б) допуска се повторение

→ за всяка позиция имаме $n$ възможности, от които да изберем

$\Rightarrow 5\times5\times5\times5 = 5^4 \Rightarrow n^k$ → вариации с повторение

в) не се допускат повторения и числото е нечетно

→ за да е нечетно на последната позиция трябва да е едно от числата $(1,3,5) = 3$ на брой

⇒ за другите 3 позиции остават 4 числа

$\Rightarrow V_4^3 \cdot 3 = 4\cdot3\cdot2\cdot3 = 72$

$\boxed{6.}$ 4 членна делегация от 12 кандидати

а) няма ограничение за участие

⇒ $12\times11\times10\times9$ → възможности

→ комбинации без повторение

$\binom{12}{4} = \frac{12!}{(12-4)!\,4!} = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{\cancel{12}\cdot11\cdot\cancel{10}\cdot9\cdot\cancel{8!}}{\cancel{8!}\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2}} = \underline{\underline{495}}$

б) А и В не трябва да участват заедно

→ от всички възможности изваждаме възможностите в които А и В са заедно

$\binom{12}{4} - \binom{10}{2} = 495 - 45 = \underline{\underline{450}}$

→ $\binom{10}{4} \cdot 2\binom{10}{3}$

б) C и D могат да угасват само заедно

→ от всички изваждаме тези в които C и D не са заедно

$\binom{12}{4} - 2\binom{10}{3}$

→ може и $\binom{10}{4} + \binom{10}{2} = \underline{\underline{255}}$

**7.** 5 различни топки в 3 различни кутии A, B и C

а) кутията A е празна

→ или ще отиде в B или в C

→ $2^5 = 32$

б) само кутията A е празна

$2^5 - 2 = \underline{\underline{30}}$

в) точно една кутия е празна

$3 \cdot (2^5 - 2) = 3 \cdot 30 = \underline{\underline{90}}$

→ или A или B или C е празна

г) поне една кутия е празна

поне 1 = точно 1 + точно 2 + 3 → всички са в една кутия

$\downarrow$ или 1 $\qquad \downarrow$ или 2

$\Rightarrow 3 \cdot (2^5 - 2) + |2 \text{ празни}| = 90 + \binom{3}{2} = 93$

от 3 избираме 2

д) няма празна кутия

$3^5 - |г)| = 3^5 - 93 = 243 - 93 = \underline{\underline{150}}$

**8.** Брой на думите с дължина $n$ и съдържащи $a, b, c$

а) започват с $a$

↳ имаме $n-1$ позиции на които можем да разпределим 3 букви, тъй като на първата позиция имаме $a$.

за втората позиция пак са 3 възможности и т.н.

↳ $3^{n-1}$ → вариации с повторение

б) съдържат точно $k$ пъти символа $a$

↳ остават $n-k$ позиции за останалите две букви, (разпределена) тъй като $a$ вече е използвана $k$ пъти

$\binom{n}{k} 2^{n-k}$ → за останалите $n-k$ позиции избираме помежду $b$ и $c$

↓

началните (от $n$ позиции избираме $k$ на които да поставим $a$)

в) точно $k$ пъти символа $a$, при което и първия и последния е $a$

↳ остават ни $n-2$ позиции къде да поставим останалите $a$-та. $n-k$ позициите които остават са за $b$ и $c$

$\binom{n-2}{k-2} \cdot 2^{n-k}$ → останалите $b$ и $c$

↓

от $n-2$ избираме останалите $k-2$ позиции за $a$-тата

г) съдържат $k_1, k_2$ и $k_3$ пъти, $k_1+k_2+k_3=n$ от символите $a, b, c$

$\binom{n}{k_1}$ - за $a$

$\binom{n-k_1}{k_2}$ - за $b$

$\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ - за $c$

$$\rightarrow \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,\cancel{(n-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\,\cancel{(n-k_1-k_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1-k_2)!}}{k_3!\,\underbrace{(n-k_1-k_2-k_3)!}_{=0}} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}$$

9. $A = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k\}$, # подмножествата, които съдържат поне един елемент $a_i$ и поне един елемент $b_j$

↳ $|P(A)| = 2^{n+k}$ → брой на всички подмножества на $A$

$AB$ = съдържа и $a$ и $b$
$\bar{A}B$ – не съдържа $a$
$A\bar{B}$ – не съдържа $b$
$\overline{AB}$ – не съдържа нито $a$ нито $b$

→ тъй като множествата са непресичащи се и обединението им прави цялото множество, то

↳ $AB = P(A) \setminus (\bar{A}B \vee A\bar{B})$ → и следователно от принципа на изваждането и включване и изключване

$$|AB| = |P(A)| - |\bar{A}B \vee A\bar{B}| =$$
$$= 2^{n+k} - |\bar{A}B| - |A\bar{B}| + |\bar{A}B \wedge A\bar{B}| =$$ → $2^0 = 1$
$$= 2^{n+k} - 2^n - 2^k + 1$$

12. $P$ номер на случаен лека кола = ?

а) да не съдържа еднакви цифри

↳ цифрите с които разполагаме са 10 на брой, т.е. от 0 до 9, т.е. всички възможности са $10^4$ (за всяка от 4-те позиции имаме 10 възможности)

а) за първата позиция 10 възможности, за втората 9 и т.н.

$$\rightarrow \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4} = \frac{|V_{10}^4|}{10^4}$$

б) да има точно 2 еднакви цифри

→ избираме 2 позиции за еднаквите цифри → $C_4^2 \; \binom{4}{2}$
→ от 10-те цифри избираме тази дето ще се повтаря → $C_{10}^1 \; \binom{10}{1}$
→ на останалите 2 позиции разпределяме от останалите 9 цифри

$$\Rightarrow \frac{\binom{4}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{10^4}$$

повтарящата (над 10); → останалите 2 (след 9·8)

къде да са повтарящите се (под $\binom{4}{2}$)

в) да има 3 еднакви цифри

$$\frac{\binom{4}{3}\cdot 10\cdot 9}{10^4}$$

г) да има две двойки еднакви цифри

→ избиране 2те цифри които ще участват в записа

$\binom{10}{2}$ → пермутации на цифрите $\frac{4!}{2!\,2!}$

↳ $\binom{10}{2}\cdot\frac{4!}{2!\,2!} = \frac{10\cdot 9}{2}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2}{\cancel{2\cdot 2}} = \frac{10\cdot 9}{\cancel{2}}\cdot 3\cdot 2 = \underline{\underline{270}}$

д) да има едно и също сума от първите две и вторите две цифри

сумата на първите две, както и на вторите две цифри може да е от 0 до 18

| сбор | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # начина | 1 | 2 | 3 | 4 | | | 2 | 1 |
| | 0+0 | 0+1<br>1+0 | 1+1<br>2+0<br>0+2 | 1+2<br>2+1<br>3+0<br>0+3 | | | 8+9<br>9+8 | 9+9 |

↳ броят начини които ни вършат работа са # начини$^2$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot\sum_{k=0}^{9}k^2+10^2}{10^4}$$

→ за тези 2 позиции имаме да изберем от 10 числа

понеже половината са еднакви (симетрични)

**14.** A печели ако се обърне 7 спатия
B печели ако се обърнат общо две аса

$P$( A да спечели ) = ?

б.о.о може да считаме че тестето се състои от 5 карти т.е. 7, A, A, A, A ⇒ в този случай имаме 5 възможни наредби

| |
|---|
| 7, A, A, A, A |
| A, 7, A, A, A |

A, A, 7, A, A
A, A, A, 7, A
A, A, A, A, 7

→ $P$( A да спечели ) = $\frac{2}{5}$ → защото 2 са наредбите, които ни вършат работа (преди да се паднат 2 аса)

* Ако след като изтеглим картата я върнем обратно

$\frac{1}{5}$ → за 7 и $\frac{4}{5}$ за ас

$P$( B да спечели ) = $P$( 2 поредни аса ) = $\left(\frac{4}{5}\right)^2$

⇒ $P$( A да спечели ) = $P$( 7 преди 2 поредни аса ) =

$= \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{7 на първи ход}} + \underbrace{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}_{\text{7 на втори ход}}$

**15.** Урна съдържа топки с номера от 1 до n
к пъти последователно се вади по една топка
$P$( номерата на извадените топки да образуват растяща редица ) = ?

а) извадка без връщане

→ разделяме пространството от множеството топки, тъй като вероятността да изваждим топка от урната е 1.
Нека $\{a_1, \dots, a_k\}$ са извадените топки от урната, тогава има точно една наредба от всичките $k!$, която е в нарастващ ред

$$\mathbb{P}(a) = \frac{1}{k!} \to \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k}}{V_n^k} = \frac{1}{k!}$$

б) с връщане

→ имаме $n^k$ възможни изхода (т.е. всяко вадене е независимо от другото)

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\varepsilon) = \frac{n+k-1}{n}$$

$\boxed{18.}$ $\Omega = \{$ходещи на лекар$\}$

A = {посещават повече от веднъж годишно лекар}

$\mathbb{P}(A) = 60\% \to \mathbb{P}(\bar{A}) = 40\%$

$\mathbb{P}(B) = \{$посещават хирург$\} = 17\%$

$\mathbb{P}(B \mid A) = 15\%$

$\mathbb{P}(\bar{B} \mid \bar{A}) = ?$

$$\mathbb{P}(\bar{B} \mid \bar{A}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{B} \cap \bar{A})}{\mathbb{P}(\bar{A})} = \frac{\mathbb{P}(\overline{A \cup B})}{40\%} = \frac{1 - \mathbb{P}(A \cup B)}{40\%} =$$

$$= \frac{1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B))}{40\%} = \frac{100\% - (60\% + 17\%) - 9\%}{40\%} = \frac{100-68}{40} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5} = 80\%$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid A) = 60\% \cdot 15\% = \frac{\cancel{60}^{3}}{\cancel{100}_{20}} \cdot \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{100}_{5}} = \frac{9}{100} = 9\%$$

$* \ \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

25.11.2023

$\boxed{17}$ Хвърлят се два зара

$\mathbb{P}$(сума от падналите се числа да е < 8 | сумата е нечетна) = ?

независими ли са събитията?

$A = \{$сумата е $< 8\}$

$B = \{$сумата е нечетна$\}$

$\mathbb{P}(A|B) = ?$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\text{сумата е} < 8 \text{ и е нечетна})}{\mathbb{P}(\text{сумата е нечетна})} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\text{сумата е } 3, 5 \text{ или } 7)}{\mathbb{P}(\text{сумата е } 3, 5, 7, 9, 11)} =$$

| сума | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| начини | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2+4+6+4+2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2+4+6}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$\hookrightarrow$ $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{24} \neq \frac{1}{3}$ → не са независими

**5.** Хвърлят се 10 различни зара

P(да се паднат равен брой единици и шестици) = ?

P(# единици = # шестици) =

$$= \sum_{k=0}^{5} \frac{\binom{10}{k}\binom{10-k}{k}\cdot 4^{10-2k}}{6^{10}}$$

$4^{10-2k}$ → за останалите 2, 3, 4, 5

$\binom{10}{k}$ → позиции за 1ци

$\binom{10-k}{k}$ → позиции за 6-ци

опция 2:

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{10}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\binom{10-k}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^{10-2k}$$

$\binom{10-k}{k}$ → за 6ци

$\left(\frac{1}{6}\right)^k$ → вероятността да се падне 6ца

$\left(\frac{4}{6}\right)^{10-2k}$ → вероятността за 2, 3, 4, 5

$\binom{10}{k}$ → за 1ци

$\left(\frac{1}{6}\right)^k$ → вероятността да се падне 1ца

**18.** Около маса седят 10 мъже и 10 жени.

P(лица от еднакъв пол да не седят едно до друго) = ?

↳ Б.О.О., нека фиксираме една жена на масата. Останалите жени разполагат с 9 места и може да ги пермутираме по 9! начина. За мъжете имаме 10 места, следователно 10! начина, общо 19! начина за всички останали хора

↳ $\frac{9!\cdot 10!}{19!}$

20. двама играчи последователно хвърлят монета печели който първи хвърли ези

A = {първият който хвърля монетата печели}
B = {вторият който хвърля монетата печели}

↳ очевидно все някога един ще спечели

$$\Rightarrow P(A) = P(E) + P(TTE) + P(TTTTE) + \dots + P(\underbrace{TT\dots TT}_{2n}E) = $$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{2n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

$$* P(A) = P(A|E)P(E) + P(A|TE)P(TE) + P(A|TT)P(TT) =$$

$$= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4}P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3} \;???$$

$$↳ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}P(A) = 0$$

$$\frac{1}{4}P(A) = -\frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -\frac{4}{2}$$

→ Ако печели този, който хвърли същото като падналото се непосредствено преди това?

$$P(A) = P(TEE) + P(ETT) + P(TETEE) + P(ETETT) + \dots +$$

$$P(\underbrace{ET\dots ET}_{2n}T) + P(\underbrace{TE\dots TE}_{2n}E) = 2\cdot\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{2n+1}}\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{4^k} \overset{n\to\infty}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}$$

↳ при втория регламент на играта, вероятностите се разменят, т.е. по-голям шанс да спечели има вторият играч, понеже винаги пред него ще има хвърлено ези или тура, тоі винаги ще е със стъпка напред

**21.** $n$ писма, сложени в пликове и запечатени

$\mathbb{P}$(никой да не е получил своето писмо) $= ?$

↳ Нека $A = \{$никой не е получил своето писмо$\}$

Търси се $\mathbb{P}(A)$

* $B$ е множеството от събития в което всеки получава правилното писмо. Очевидно $|B| = 1$ и $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{n!}$

→ Отрицанието на $A$, т.е. $\bar{A}$ е множеството от събития, в които поне един адресат получава предназначеното за него писмо

→ Нека $X_i = \{i$-тия адресат получава предназначеното за него писмо$\}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}(X_i) = \frac{1}{n}$

$\mathbb{P}(X_i \cap X_j) = \frac{1}{n(n-1)}$, $i<j$

$\mathbb{P}(X_i \cap X_j \cap X_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$, $i<j<k$

...

$\mathbb{P}(X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}) = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)}$

...

$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{n!}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(X_1 \cup X_2 \cup X_3 \dots \cup X_n) =$$

$$= 1 - \left(n \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$↳ \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \frac{1}{(i+1)!}$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, избираме $x = -1 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = e^{-1} \approx \frac{1}{2,7182\dots}$

PO

* $B_i := \{(a_1, \dots, a_{i-1}, i, a_{i+1}, \dots, a_n) : 1 \le a_j \le n, a_j \ne a_i\}$. Тогава $A = \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)^c$, $|B_i| = (n-1)!$

$|B_i \cap B_j| = (n-2)!$, $i \ne j$ и т.н. $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{\left|\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right|}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

**22.** 5 бели, 8 зелени и 7 червени топки $= 20$

$\mathbb{P}$(бяла топка да бъде извадена преди зелена) $= ?$

а) с връщане

б) без връщане

а) Когато вадим червена топка нищо не се променя и затова интуитивно може да предположим, че отговорът е:

$\frac{5}{5+8} = \frac{5}{13}$ → но това не е формално решение

→ $A = \{$вадим бяла топка$\}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(w) + \mathbb{P}(rw) + \mathbb{P}(rrw) + \dots = \frac{5}{20} + \frac{7}{20}\cdot\frac{5}{20} + \frac{7}{20}\cdot\frac{7}{20}\cdot\frac{5}{20} + \dots =$$

$$= \frac{5}{20}\left(1 + \frac{7}{20} + \left(\frac{7}{20}\right)^2 + \dots\right) = \frac{5}{20}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{7}{20}\right)^i \xrightarrow{n\to\infty} \frac{5}{20}\left(\frac{1}{1-\frac{7}{20}}\right) =$$

$$= \frac{5}{20}\left(\frac{1}{\frac{20-7}{20}}\right) = \frac{5}{20}\left(\frac{1}{\frac{13}{20}}\right) = \frac{5}{\cancel{20}}\cdot\frac{\cancel{20}}{13} = \frac{5}{13}$$

б) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(w) + \mathbb{P}(rw) + \mathbb{P}(rrw) + \dots + \mathbb{P}(\underbrace{r\dots r}_{7}w) =$

$$= \frac{5}{20} + \frac{7}{20}\cdot\frac{5}{19} + \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18} + \dots + \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{17}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{14}\cdot\frac{5}{13} =$$

$$= \frac{5}{20}\underbrace{\left(1 + \frac{7}{19} + \frac{7\cdot 6}{19\cdot 18} + \dots\right)}_{X} = \frac{5}{20}X$$

За да пресметнем тази сума ще се доверим на следния риск:

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(g) + \mathbb{P}(rg) + \dots + \mathbb{P}(\underbrace{r\dots r}_{7}g) =$$

$$= \frac{8}{20} + \frac{7}{20}\cdot\frac{8}{19} + \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{8}{18} + \dots + \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{14}\cdot\frac{8}{13} =$$

$$= \frac{8}{20}\underbrace{\left(1 + \frac{7}{19} + \frac{7\cdot 6}{18\cdot 17} + \dots\right)}_{X} = \frac{8}{20}X$$

→ $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 \to \frac{5}{20}X + \frac{8}{20}X = 1 \to X = \frac{20}{13}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{13}$

4.3. Вход A лева

a) – ако хвърли ези на n-ти път печели $2^n$ лева

$\Rightarrow$

| X | 2 | $2^2$ | $2^3$ | ... | $2^n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | | $\frac{1}{n}$ |

$\to$ да се падне ези на ход 1, 2, ...

X = "печалбата"

$$EX = 2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{2^2} + \dots + 2^n\cdot\frac{1}{2^n} = 1+1+1+\dots+1+\dots = \infty$$

$\Rightarrow$ очакването не е винаги

б)

залог A $\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ ези (2A); $\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ тура (0)

1 $\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ 2 (тоест $2-1=1$); $\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ $-1$ $\to$ залага 2 $\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ $(4-1-2=1)$; $\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ $-3$ $\to$ залага 4 $\to$ $8-1-2-4=1$; залага 8

X = "ходът на който печели"

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | ... |

$$EX = \frac{1}{2}\cdot(2-1) + \frac{1}{4}\cdot(4-1-2) + \frac{1}{8}\cdot(8-1-2-4) + \dots =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \dots = \sum \frac{1}{2^n} = \underline{\underline{1}}$$ $\to$ винаги печалбата ще е едно

$\to$ $E\begin{bmatrix}\text{чиста}\\ \text{печалба}\end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} P(\text{да опечели на ход } k)\cdot(\text{чиста печалба} - \text{залози}) =$

др. начин

$$= \frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{4}(4-1-2) + \frac{1}{8}(8-1-2-4) + \dots =$$

$$= \sum_k \frac{1}{2^k}\left(2\cdot 2^k - (1+2+\dots+2^{k-1})\right) =$$

$$= \sum_k \frac{1}{2^k}(2^k - (2^k-1)) = \sum_k \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 2 = \underline{\underline{1}}$$

**44.** A - 3 монети → печели този който хвърли повече езита
B - 2 монети   и взима всичките 5 монети

→ в случай на равен брой печели B

а) $\mathbb{P}$(A да спечели) = ?

б) $\mathbb{P}$( B да е хвърлил точно едно ези | A е спечелил) = ?

в) средната печалба на играчите = ?

а) $X$ = # езита на първия от 3 хвърляния $\to Bin(3, \frac{1}{2})$

$Y$ = # езита на втория от 2 хвърляния $\to Bin(2, \frac{1}{2})$

$\mathbb{P}(X > Y) = ?$

$$\mathbb{P}(X>Y) = \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=2, Y=0) + \mathbb{P}(X=3, Y=0) + \mathbb{P}((X,Y) \in \{(2,1),(3,1),(3,2)\})$$

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

| Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

$$\mathbb{P}(X>Y) = \left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} =$$

$$= \frac{7}{32} + \frac{8}{32} + \frac{1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

б) $$\mathbb{P}(Y=1 \mid X>Y) = \frac{\mathbb{P}(Y=1 \cap X>Y)}{\mathbb{P}(X>Y)} = \frac{\mathbb{P}\{(2,1),(3,1)\}}{\mathbb{P}(X>Y)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{6}{32}+\frac{2}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{8}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

в) средната печалба на A

↳ $2\cdot\frac{1}{2} + (-3)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

средната печалба на B

↳ $3\cdot\frac{1}{2} + (-2)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

**47.** n - пъти от реда последователно

p - вероятност да ~~улучи~~ улучи

- вероятността за улучване на всеки отсек е една и съща
- $\mathbb{P}$( да се наводнят поне 2 отсека, корабът да потъне ) = ?

m - отсека

→ При улучване торпедото попада в някой от n-те отсеци

- ако няколко пъти уцели в един и същи отсек, не променя условието за корабът да потъне

X = "наводнени отсеци"

$$\mathbb{P}(X=0 \text{ или } X=1) = \underbrace{(1-p)^n}_{\text{броят неуспехи или } x=0 \text{ или } x=1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{\text{улучванията}} \left(\frac{1}{m}\right)^k \cdot m$$

+ кой отсек сме фиксирали

може да не потъне само в тези два случая

$\left(\frac{1}{m}\right)^k$ – винаги когато уцели попада в един отсек

$$\mathbb{P}(\text{да потъне}) = m \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^k - (1-p)^n =$$

→ минус случаите в които има неуспех

$$= m\left(\frac{p}{m} + 1-p\right)^n - m(1-p)^n$$

→ $\mathbb{P}$( да потъне ) = 1 − $\mathbb{P}$( да не е потънал ) =

= 1 − $\mathbb{P}$( 0 точни изстрели ) + $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}$( k точно изстрела и всичките да са в един отсек ) =

$$= 1 - (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{m}_{\text{в кой отсек}} \cdot \frac{1}{m^k} \cdot \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{кои са точни}} \underbrace{p^k}_{\text{точни}} \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{неуспех}} \to \mathbb{P}(X=k)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X=0) - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) \cdot m \cdot \frac{1}{m^k}$$

48.

$H_0: p_0 = \frac{1}{2}$

$H_1: p_1 = 2/3$

Коя хипотеза има по-голяма апостериорна вероятност?

↳ A е събитието от 200 бернулиеви опита (с вероятност за успех в единичен опит p) да имаме 120 успеха

По условие $\mathbb{P}(H_0) = \mathbb{P}(H_1)$. Трябва да определим кое от числата $\mathbb{P}(H_0 | A)$ и $\mathbb{P}(H_1 | A)$ е по-голямо

→ Нека $X_i \in Bin(200, p_i)$, $i = 0, 1$, $p_0 = \frac{1}{2}$, $p_1 = \frac{2}{3}$

$$\mathbb{P}(H_0 | A) = \frac{\mathbb{P}(H_0 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_0)\,\mathbb{P}(H_0)}{\mathbb{P}(A|H_0)\,\mathbb{P}(H_0) + \mathbb{P}(A|H_1)\,\mathbb{P}(H_1)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A|H_0)}{\mathbb{P}(A|H_0) + \mathbb{P}(A|H_1)} = \frac{\mathbb{P}(X_0 = 120)}{\mathbb{P}(A|H_0) + \mathbb{P}(A|H_1)} = \frac{1}{\mathbb{P}(A|H_0) + \mathbb{P}(A|H_1)} \cdot \binom{200}{120} \cdot \frac{1^{120}}{2^{200}}$$

$$\mathbb{P}(H_1 | A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A|H_0) + \mathbb{P}(A|H_1)} \cdot \binom{200}{120} \cdot \frac{2^{120}}{3^{200}}$$

* апостериорна вероятност $\mathbb{P}(A_i | B)$, където B е настъпило и $A_i$ е с вероятност $\mathbb{P}(A_i | B)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(H_1 | A) > \mathbb{P}(H_0 | A)$