ЕКЪСНАТИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ

Деф: Казваме, че $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е непрекъсната сл. вел., ако X може да приема неизброимо много стойности

* фундаменталните теореми включват н.с.в., с изключение на Поасон.
  - имаме проблеми със съхранение на много числа

Деф: Казваме, че X е н.с.в. (абсолютно непрекъсната), ако:

а) $f_X(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

б) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$

в) $\forall a, b, \ P(X \in (a,b)) = P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$,

f_X се нарича плътност на X.

+ a може да е $-\infty$, b може да е $+\infty$

(+) $M = 100\,000\,X$ $\qquad P(M > 10\,000) = ?$

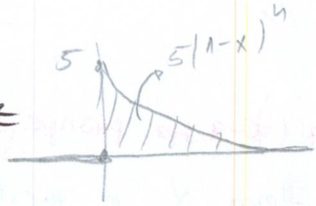
$$f_X(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$

$D f_X = (0,1)$ → интервалът там където ф-ята не е 0

↳ проверяваме дали ф-ята е добре дефинирана (определена)

$$\int_0^1 5(1-x)^4\,dx \overset{1-x=y}{=} 5\int_0^1 y^4\,dy = 5 \cdot \frac{y^5}{5}\Big|_0^1 = 1$$ → добре определена

↳ $\cancel{P(100\,000\,X > 10\,000) = P(X > \tfrac{1}{10}) = \int_{1/10}^{\infty} f_X(x)\,dx = 5\int_{1/10}^{1}(1-x)^4\,dx \overset{y=1-x}{=} 5 \cdot \frac{y^5}{5}\Big|_{1/10}^{1}}$



→ плътност е когато това нещо се интегрира до 1-ца

$$\mathbb{P}(M > 10\,000) = \mathbb{P}(10\,000X > 10\,000) = \mathbb{P}(X > \tfrac{1}{10}) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X \le \tfrac{1}{10}) = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{1}{10}} f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{10}}^{1} 5(1-x)^4\,dx = 1 - \int_{0}^{\frac{1}{10}} 5(1-x)^4\,dx \approx 0{,}59$$

$$= \int_{\frac{1}{10}}^{1} 5(1-x)^4\,dx = 5\int_0^{9/10} y^4\,dy = y^5\Big|_0^{\frac{9}{10}} = \left(\tfrac{9}{10}\right)^5 \approx 0{,}59$$

Твърдение: Нека X е н.с.в. и $x \in \mathbb{R}$. Тогава $\mathbb{P}(X=x) = 0$ (може с)

вероятността да се случи точно едно конкретно фиксирано е е нула

д-во: $\mathbb{P}(X=x) = \int_x^x f_X(y)\,dy = 0$

$\Updownarrow$ → по различни начини

Твърдение: Нека X е н.с.в. с плътност f_X. Тогава $\forall c \in \mathbb{R}$, (реално число)

$\mathbb{P}(X=c) = 0$ и следователно за $a < b$

$$\mathbb{P}(X \in (a,b)) = \mathbb{P}(a \le X < b) = \mathbb{P}(a < X \le b) = \mathbb{P}(a \le X \le b)$$

* Случайната величина няма маса, т.е. има нулева вероятност в конкретна точка.

д-во: $$\{X=c\} = \bigcap_{n\ge 1} \{c - \tfrac{1}{n} < X < c + \tfrac{1}{n}\} = \lim_{n\to\infty} \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x)\,dx = 0 \qquad \forall n \ge 1$$

$$\mathbb{P}\left(X \in (c - \tfrac{1}{n}, c + \tfrac{1}{n})\right) \overset{\text{деф}}{=} \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x)\,dx$$

интеграл от равна горна и равна долна граница е нула!

Деф (ф-я на разпределение):

Нека X е н.с.в. с плътност f_X. функцията

$$\boxed{F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $F_X(-\infty) = 0$
- $F_X(+\infty) = 1$
- $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X<x) + \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X<x)$, ($\mathbb{P}(X=x) = 0$)

Ако f_X е непрекъсната в x, то $\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$ (производната)

$$\boxed{F_X' = f_X}$$

$\mathbb{P}(X<x) = \mathbb{P}(X \le x)$ → защо е равно? – няма конкретна точка

НА ПРОМЕНЛИВИТЕ

X — температура; $Y = g(X)$ — разходи, които зависят от температурата за затопляне

изисква съществуване на плътност

* Теорема:

Нека X е н.с.в. и нека $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е строго монотонно (е диференцируема) растяща или намаляваща функция. Тогава $Y = g(X)$ е н.с.в. с плътност

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1}(y))'|},$$

→ понеже може да си е, ако е намаляваща

g^{-1} — обратната ф-я на g, защото g е строго нам. или раст.

* Или $f_Y(y) = f(h(y)) \cdot |h'(y)|$, където $h = g^{-1}$

! За теоремата е достатъчно g да е строго монотонна

$Df_X := \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$

↳ д-во: целта е да покажем, че $a < b$

$$\boxed{P(a < Y < b)} \overset{?}{=} \int_a^b f_Y(y)\,dy$$

$g \downarrow \Rightarrow P(Y \in (g^{-1}(b), g^{-1}(a)))$ $\int_b^a f_X(g^{-1}(y)) \cdot (-g^{-1}(y))'\,dy$

$\parallel$

$P(a < g(X) < b)$

→ само тука за разлика

$$g\uparrow \Rightarrow P(g^{-1}(a) < X < g^{-1}(b)) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f_X(x)\,dx \underset{x = g^{-1}(y)}{\overset{\text{смяна}}{=}}$$

$$= \int_a^b f_X(g^{-1}(y)) \cdot g^{-1}(y)'\,dy = \int_a^b \underbrace{f_X(g^{-1}(y))\,|(g^{-1}(y))'|}_{f_Y(y)}\,dy$$

* производната на монотонно растяща ф-я е положителна

↳ Теоремата е валидна, ако $Df_X = (A, B)$ и $g\uparrow$ или $\downarrow$ само върху (A, B)

Съзащото извън (A, B) не приема стойности и не ни интересува

* Смяна на променливите

X — температура; $Y = g(X)$ — разходите, които зависят от температурата за затопляне

* н.с.в. изисква съществуване на плътност

* Теорема:

Нека X е н.с.в. и нека $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е строго монотонно (→ е диференцируема) растяща или намаляваща функция. Тогава $Y = g(X)$ е н.с.в. с плътност $\boxed{f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1}(y))'|}$, → понеже може да е −, ако е намаляваща

g^{-1} — обратната ф-я на g, защото g е строго нам. или раст.

* Или $f_Y(y) = f(h(y)) \cdot |h'(y)|$, където $h = g^{-1}$

! За теоремата е достатъчно g да е строго монотонна $D f_X := \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$

Д-во: целта е да покажем, че $a < b$

$$\boxed{\mathbb{P}(a < Y < b)} \overset{?}{=} \int_a^b f_Y(y)\, dy$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{P}(a < g(X) < b)$$

$g \downarrow \Rightarrow \mathbb{P}(Y \in (g^{-1}(b), g^{-1}(a)))$

$\int_a^b f_X(g^{-1}(y)) \cdot (-g^{-1}(y))' \, dy$

само щяха за разлика

$g\uparrow \Rightarrow \mathbb{P}(g^{-1}(a) < X < g^{-1}(b)) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f_X(x)\, dx \underset{\text{смяна}}{\overset{x = g^{-1}(y)}{=}}$

$$= \int_a^b f_X(g^{-1}(y)) \cdot g^{-1}(y)'\, dy = \int_a^b \underbrace{f_X(g^{-1}(y))\, |(g^{-1}(y))'|}_{f_Y(y)}\, dy$$

* Производната на монотонно растяща ф-я е положителна

↳ Теоремата е валидна, ако $D f_X = (A, B)$ и $g\uparrow$ или $\downarrow$ само върху (A, B)

Защото извън (A, B) не приема стойности и не ни интересува

Математическо очакване

Казваме, че $\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$ е мат. очакване на сл. в. X, ако

$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx < \infty$ (е крайно)

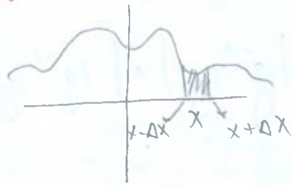
$\int (x)\, f_X(x)\,dx$

възможна стойност

по своята същност плътност

Припомняне за X дискретно:

$\mathbb{E}X = \sum_i x_i p_i$



$\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} x f_X(x)\,dx = x \cdot \mathbb{P}(X \in (x-\Delta x, x+\Delta x))$

може да се интерпретира така

Следствие:

$\mathbb{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx$ когато $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x)\,dx < \infty$

да е добре дефиниран

Дисперсия

Ако X е сл. в., то $DX = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathbb{E}X)^2 f_X(x)\,dx$

има $DX < \infty$ се нарича дисперсия на X.

$DX = \min_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(X-a)^2$

Свойства

$\mathbb{E}$	D
$\mathbb{E}cX = c\,\mathbb{E}X$	$DcX = c^2 DX$
$\mathbb{E}c = c$	$Dc = 0$
$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}X + b$	$D(aX+b) = a^2 DX$
$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$	$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \geq 0$
$X \perp\!\!\!\perp Y$ то $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$	$X \perp\!\!\!\perp Y$ $D(X+Y) = DX + DY$
	$D(X-2Y) = DX + 2^2 DY - 2^2\,Cov(X,Y)$

$D(X+Y) = DX + DY + 2\,Cov(X,Y)$

- д-во:

- $\mathbb{E}cX = \int_{-\infty}^{\infty} c x f_X(x)\,dx = c\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = c\,\mathbb{E}X$

- $DcX = \mathbb{E}(cX - \mathbb{E}(cX))^2 = \mathbb{E}\left(c^2(X-\mathbb{E}X)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} c^2 (x-\mathbb{E}X)^2 f_X(x)\,dx =$

$= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathbb{E}X)^2 f_X(x)\,dx = c^2 DX$

- $DX = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathbb{E}X)^2 f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x^2 - 2x\,\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2\right) f_X(x)\,dx$

$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx}_{\mathbb{E}X^2} - 2\mathbb{E}X \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx}_{\mathbb{E}X} + (\mathbb{E}X)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx =$

$= 1 \rightarrow$ зашто е интеграл на цела плотност

$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx - \cancel{2\mathbb{E}X\,\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2} = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

- $\mathbb{E}aX+b \Rightarrow Y = aX+b = g(x) \qquad g(x) = ax+b$

- $a=0 \Rightarrow Y = b \Rightarrow \mathbb{E}Y = b$

- $a>0 \Rightarrow \mathbb{E}g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f_X(x)\,dx = a\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx}_{\mathbb{E}X} + b\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx}_{1} =$

$\Rightarrow \mathbb{E}aX+b = a\,\mathbb{E}X + b$

- $DaX+b = \mathbb{E}(ax+b - \mathbb{E}(ax+b))^2 = \mathbb{E}(ax+\cancel{b} - a\,\mathbb{E}X - \cancel{b})^2 =$

$= \mathbb{E}\,a^2(x-\mathbb{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 (x-\mathbb{E}X)^2 f_X(x)\,dx = a^2 DX$

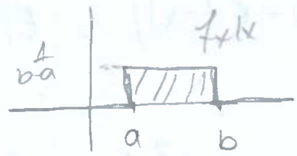
▸ Видове НСВ

• Равномерно разпределение

* Казваме, че $X \sim Unif(a,b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, ако

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

→ неговата плътност е константна



• Частен случай на геометричната

• Зависи от мястото, обема, дължината

→ всички изходи са равно вероятни

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\, dx = 1$$

$$(b^2 - a^2) = (b-a)(b+a)$$
$$(b^3 - a^3) = (b-a)(a^2 + b^2 + ab)$$

→ ф-я на разпределение

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x > b \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} 0\, dy = 0$ → не сме хванали нищо

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\, dy = 1$ → хванали сме цялата

$\int_a^x \frac{1}{b-a}\, dy$

$$EX = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2(b-a)} \cdot (b^2 - a^2) = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{(b+a)}{2}$$

$$EX^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{3(b-a)} \cdot (b^3 - a^3) =$$

$$= \frac{1}{3\cancel{(b-a)}} \cancel{(b-a)}(a^2 + b^2 + ab) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$DX = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \left(\frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right) = \frac{1}{12}\left(4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2\right)$$

$$= \frac{1}{12}(a^2-2ab+b^2) = \frac{(a-b)^2}{12} \to \frac{(b-a)^2}{12} \ ???$$

$\hookrightarrow \ X \overset{?}{=} a+(b-a)Y$

$Y = \frac{x-a}{b-a}$

→ нещо примерно нејасно ?

$g(x) = \frac{x-a}{b-a} \qquad g\uparrow \qquad g^{-1}(y) = a+(b-a)y$

$(g^{-1}(y))' = b-a$

→ По теорема: за смяна на променливите

$$f_Y(y) = f_X(a+(b-a)y)\cdot|b-a| =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b-a}\cdot b-a = 1, & a < a+(b-a)y < b \to y\in(0,1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

* н.с.в. не могат да попаднат в конкретна точка, т.е. $p=0$

$EX = a+(b-a)\,EY$

$DX = (b-a)^2\,DY$

→ Твърдение: $X\in U(a,b)$, то $Y=\frac{x-a}{b-a}\in U(0,1)$ и $t=a+(b-a)Y$

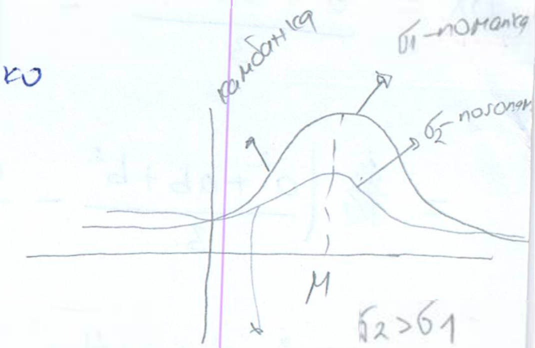
линейна комбинация на Y, където Y е един конкретен случай на този клас

→ Всяко едно равномерно може да го направим, като равномерно в интервал $(0,1)$, като линейна комбинация

5. Нормално разпределение

Казваме, че $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, ако

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



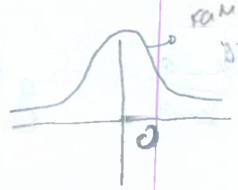
много по-стегната камбанка около средната стойност на μ

* $F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \;\to$ интеграл на Дирихле

↳ не може да се сметне, няма затворена форма

* $Z \sim N(0,1)$, $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ → стандартно нормално разпределение

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$



отместването на камбанката; само свива или разширява камбанката

$X = \mu + \sigma Z$, цел да видим, че $Z \in N(0,1)$

$$Z := \frac{X-\mu}{\sigma} = g(X)$$

g-во

↳ $g(x) = \frac{x-\mu}{\sigma} \to g\uparrow$

$$g^{-1}(y) = \mu + \sigma y$$

$$g^{-1\prime}(y) = \sigma$$

по теорема; !фейман?

$$f_Z(y) = f_X(g^{-1}(y))\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\mu+\sigma y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\sigma^2 y^2}{2\sigma^2}}, \quad y \in \mathbb{R}$$

* $\mathbb{E}Z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$ → равен е на 0, защото $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ е нечетна функция!

$\mathbb{E}Z^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ → смята се по метода на Файнан

→ четна спрямо 0

↳ има как се смята

$$\mathbb{D}Z = \mathbb{E}Z^2 - (0)^2 = \mathbb{E}Z^2$$

↳ $\mathbb{E}X = \mu + \sigma \mathbb{E}Z = \mu$

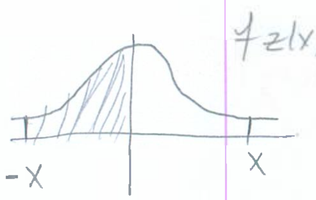
$DX = D(\mu + \sigma Z) = D\sigma Z = \sigma^2 DZ = \sigma^2$

↳ $\Phi(x) = F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \le x)$

$F_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\mu + \sigma \le x) = \mathbb{P}(\sigma Z \le x - \mu) = \mathbb{P}\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) =$

$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

→ важно е защото ги приближаваме, използваме таблици, а няма нищо в явен вид



$\Phi(x) = \frac{1}{2}$

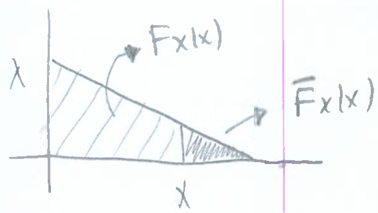
$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x) = \bar{\Phi}(-x)$

$\bar{\Phi}(x) = 1 - \Phi(x)$ → опашката на Z

↳ поради симетрия

В. Експоненциално разпределение

* Казваме, че $X \sim Exp(\lambda)$, ако $\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}}$



$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dy = 1 - e^{-\lambda x}$ → $\mathbb{P}(X \le x)$, $x > 0$

$x \le 0 \to 0$

опашка

$\bar{F}_X(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x}$, $x > 0$

$x \le 0 \to 1$

→ $\mathbb{E}X = \int_0^\infty x \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{\text{плътността}} dx$; $\frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx$

$\frac{2}{\lambda^2} = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \mathbb{E}X^2 \Rightarrow DX = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$

↳ • $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$

• $\mathbb{E}X^2 = \frac{2}{\lambda^2}$

• $DX = \frac{1}{\lambda^2}$

Експоненциалното разпределение е непрекъснат аналог на геометричното в смисъла на свойството безпаметност.

$\hookrightarrow$ $x, y > 0$ то $\mathbb{P}(X > x+y \mid X > x) = \mathbb{P}(X > y)$

д-во: $\mathbb{P}(X > x) = \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y}\, dy \overset{w=\lambda y}{=} \int_{\lambda x}^\infty e^{-w}\, dw = e^{-\lambda x}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X > x+y \mid X > x) = \dfrac{\mathbb{P}(X \geq x+y\,;\, X \geq x)}{\mathbb{P}(X \geq x)} = \dfrac{\mathbb{P}(X \geq x+y)}{\mathbb{P}(X \geq x)} =$

$= \dfrac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} = \mathbb{P}(X \geq y)$ $\to$ memoryless

$\hookrightarrow$ X е безпаметна

Непрекъснати съвместни разпределения

Деф: $X = (X_1, \dots, X_n)$ е непрекъснат вектор от сл. вел. ако

$\exists f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такава че:

1) $f_X(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

f_X е съвместна плътност

2.) $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n = 1$

3.) $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathbb{P}(X \in D) = \int_D f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n$

хубаво подмножество

Деф: Ако $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е съвместна плътност на сл. вектор X, то

$\mathcal{D} f_X = \{x \in \mathbb{R}^n : f_X(x) > 0\}$ $\to$ носител на случайната величина

смисъла на $\mathcal{D}$ е да показва какви са възможните стойности на случайния вектор

всички възможни стойности, които X като вектор може да приеме

* Деф: (Маргинална плътност):

Ако f_X е съвместна плътност на $X = (X_1, \dots, X_n)$, то

$$f_{X_j}(x_j) = \underbrace{\int_{x_1=-\infty}^{\infty} \int_{x_{j-1}=-\infty}^{\infty} \int_{x_{j+1}=-\infty}^{\infty} \dots \int_{x_n=-\infty}^{\infty}}_{n-1} f_X(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n$$

се нарича <u>маргинална плътност</u> на X_j

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_2 \rightarrow \text{маргинално разпределение на } X_1$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_1 \rightarrow \text{маргинално разпределение на } X_2$$

* Деф: $X = (X_1, X_2)$ е сл. вектор и $f_{X_1}(x_1) > 0$. Тогава

$$\boxed{f_{X_2|X_1=x_1}(x_2|x_1) = \frac{f_X(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}}$$ е <u>условната плътност</u> на

X_2 при условие, че $X_1 = x_1$

* Деф: Нека $X = (X_1, \dots, X_n)$ е сл. вектор и $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Тогава $\boxed{F_X(x) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n)}$ е

<u>съвместна ф-я на разпределение.</u>

* Деф: (Независимост)

Казваме, че X_1 и X_2 от вектора $X = (X_1, X_2)$ с плътност f_X са независими $\iff$ $f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$ $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\Updownarrow$$

$$F_X(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$$

* т.е. двумерната плътност X се разпада на произведението на двете маргинални плътности на X_1 и X_2

Деф: (Независимост в съвкупност):

Казваме, че компонентите $X = (X_1, \dots, X_n)$ със съвместна плътност f_X са независими в съвкупност $\Leftrightarrow$

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\Updownarrow$$

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(x_j)$$

↳ $X_1, \dots, X_n$ са независими в съвкупност, тогава $X = (X_1, \dots, X_n)$

! с плътност $f_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j)$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и разглеждаме $Y = g(X)$, където X е вектор от сл.вел. Тогава ако има съвместна плътност

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n)\, f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n \quad \text{стига}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |g(x_1, \dots, x_n)|\, f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n < \infty$$

Твърдение

→ $X = (X_1, X_2)$ с плътност $f_X(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Нека $\mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}X_2$ поотделно да съществуват. Тогава

$$\boxed{\mathbb{E}g(X) = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2} \quad \to \mathbb{E}g(X) = \int_{x \in \mathbb{R}^n} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

ако са повече, не само две

↳ $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 + x_2)\, f_X(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 =$$

първо интегриране по x_2 на по x_1

→ разменяме реда на интегриране

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_2 dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_1}_{f_{X_2}(x_2)} dx_2 =$$

→ това са маргиналните плътности

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)\, dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\, dx_2 = \underline{\underline{\mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2}}$$

* Ако в допълнение $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ и DX_1 и DX_2 съществуват, то

$D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2$ $\qquad * g(x_1, x_2) = (x_1 - \mathbb{E}X_1 + x_2 - \mathbb{E}X_2)^2$

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 - \mathbb{E}(X_1 + X_2))^2 = \mathbb{E}(X_1 - \mathbb{E}X_1 + X_2 - \mathbb{E}X_2)^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mathbb{E}X_1 + x_2 - \mathbb{E}X_2)^2 f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[(x_1 - \mathbb{E}X_1)^2 + 2(x_1 - \mathbb{E}X_1)(x_2 - \mathbb{E}X_2) + (x_2 - \mathbb{E}X_2)^2 \right] f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mathbb{E}X_1)^2 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_1 dx_2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mathbb{E}X_1)(x_2 - \mathbb{E}X_2) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_1 dx_2 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_2 - \mathbb{E}X_2)^2 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_1 dx_2 =$$

$$\mathrm{II} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (x_2 - \mathbb{E}X_2) f_{X_2}(x_2) \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mathbb{E}X_1) f_{X_1}(x_1)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)\, dx_1 - \mathbb{E}X_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1)\, dx_1 = 0$$

$\mathrm{III} \to ?$ #

$\mathrm{I} = DX_1$

Твърдение: $X=(X_1,X_2)$ е н.с.в. и $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$. Тогава при допускане, че EX_1 и EX_2 съществуват $\boxed{EX_1X_2 = EX_1\,EX_2}$ и ако DX_1 и DX_2 съществуват $\boxed{D(X_1+X_2) = DX_1 + DX_2}$

→ Смяна на променливите

*** Теорема:** Нека $X=(X_1,X_2)$ е вектор от сл. вел. със съвместна плътност f_X и $\mathcal{D}f_X = \{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : f_X(x_1,x_2)>0\}$.

Нека $g: \mathcal{D}f_X \to \mathbb{R}^2$ зададена чрез $g(x_1,x_2)=g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x_1,x_2) \\ g_2(x_1,x_2)\end{pmatrix}$.

Нека $g(\mathcal{D}f_X)$ е образът на $\mathcal{D}f_X$. Нека g е взаимно еднозначна с обратна ф-я $h=g^{-1}$. Нека g и h са непрекъснати и непрекъснато-диференцируеми. Нека

$$h(y_1,y_2)=\begin{pmatrix} h_1(y_1,y_2) \\ h_2(y_1,y_2)\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad J(y_1,y_2)=\det\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2}\end{pmatrix} \neq 0$$

$\forall y=(y_1,y_2)\in g(\mathcal{D}f_X)$

Тогава $Y=g(X)=\begin{pmatrix} g_1(X_1,X_2) \\ g_2(X_1,X_2)\end{pmatrix}$ има плътност

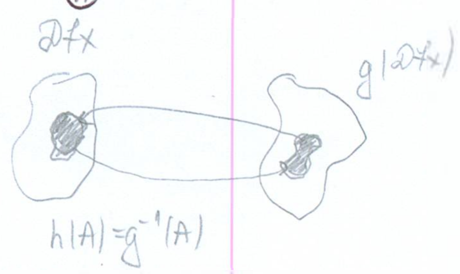
$$\boxed{f_Y(y)=f_Y(y_1,y_2)=f_X\big(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2)\big)\cdot|J(y_1,y_2)|}, \quad \forall y\in g(\mathcal{D}f_X)$$

Д-во: Нек: за произволно $A\subseteq g(\mathcal{D}f_X)$: $\underset{Y=g(X)}{P(Y\in A)} = \iint\limits_{A} f_Y(\underset{y=(y_1,y_2)}{y_1,y_2})\,dy_1\,dy_2$

$= P(g(X)\in A) = P(X\in g^{-1}(A)) =$

X е взаимно еднозначно, защото имаме $x=(x_1,x_2)=g^{-1}(y_1,y_2)=h(y_1,y_2)$

$= \iint\limits_{g^{-1}(A)} f_X(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 =$



$= \iint\limits_{A} f_X(h(y_1,y_2))\,|J(y_1,y_2)|\,dy_1\,dy_2$

(+) $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $1 \le i \le n$ са независими в съвкупност.

Нека $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, тогава $Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$ (1)

Знаем, че $X_i = \mu_i + \sigma_i Z_i$, $Z_i \sim N(0,1)$, $1 \le i \le n$

$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i Z_i$ и ако $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i Z_i \sim N\left(0, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$, то

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

Ще видим за $n=2$, че

$$\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2 \sim N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \text{ за } Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2 \text{ и } Z_1, Z_2 \sim N(0,1)$$

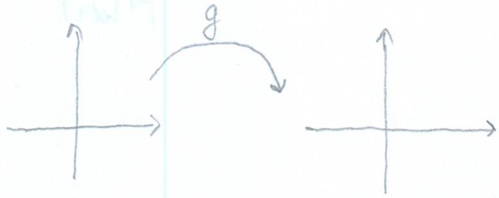
(2.) $V_1 = \sigma_1 Z_1 \sim N(0, \sigma_1^2)$

$V_2 = \sigma_2 Z_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$

Търсим $W = V_1 + V_2$

$$f_{V_1,V_2}(v_1,v_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \cdot e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \cdot e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}}$$

(3.) Решение:



$V = V_1$, $W = V_1 + V_2$ и $g(V_1, V_2) = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_1 + V_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} V = V_1 \\ W = V_1 + V_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} V_1 = V & = h_1(V,W) \\ V_2 = W - V & = h_2(V,W) \end{matrix} = h(V,W)$$

$$J(v,w) = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(4.) $f_{V,W}(v,w) = f_{V_1,V_2}(v, w-v) \cdot |1|$, $(v,w) \in$

$$f_W(w) = \int_{v=-\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot e^{-\frac{v^2}{2\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(w-v)^2}{2\sigma_2^2}} \, dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot e^{-\frac{w^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

+ инфо

цел всички зависими от w навън и допълване до пълен квадрат

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx \overset{x-a=y}{=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$$

(!) $\alpha = 1 \to X \sim \Gamma(1,\beta) = Exp(\beta)$

$$f_X(x) = \frac{\beta e^{-\beta x}}{\Gamma(1)} = \beta e^{-\beta x}, \quad x > 0$$

→ **ГАМА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ**

$\alpha = \beta - 1 \qquad f_X(x) = e^{-x}, \; x > 0 \qquad X \sim \Gamma(1,1) = Exp(1)$

$\alpha = 1, \; \beta = 0 \Rightarrow \Gamma(1, \beta) = Exp(\beta)$

* Твърдение: Нека $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $1 \le i \le n$, $\alpha_i > 0$ и $\beta > 0$. Тогава

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta\right)$$

независими в съвкупност

д-во: $n = 2 \qquad Y = X_1 + X_2$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\beta^{\alpha_1} x_1^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta x_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \cdot \frac{\beta^{\alpha_2} x_2^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta x_2}}{\Gamma(\alpha_2)}, \quad \boxed{\begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{matrix}}$$

$V = X_1$

$Y = X_1 + X_2$

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \Big($$

$y = x_1 + x_2$

$$h(v,y) = \begin{pmatrix} v \\ y - v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J| = 1$$

$$f_{V,W}(v,y) = f_{X_1,X_2}(v, y-v) \cdot 1, \quad v > 0 \text{ и } y \ge v$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \cdot v^{\alpha_1 - 1} (y-v)^{\alpha_2 - 1} \cdot 1$$

$$f_Y(y) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta y} \int_0^y v^{\alpha_1-1}(y-v)^{\alpha_2-1}\,dv \overset{v=wy}{=}$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \cdot \int_0^1 y^{\alpha_1-1} w^{\alpha_1-1} (y-yw)^{\alpha_2-1}\, y\,dw =$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} y^{\alpha_1-1+\alpha_2-\cancel{1}+\cancel{1}} \underbrace{\int_0^1 w^{\alpha_1-1}(1-w)^{\alpha_2-1}\,dw}_{\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} = \beta(\alpha_1,\alpha_2)} =$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\cancel{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}} y^{\alpha_1+\alpha_2-1} \frac{\cancel{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} y^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad y>0$$

• Сл.: Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими в съвкупност, ~~експонен~~ уиални с параметър $\beta>0$. Тогава $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n,\beta)$. $X_i \sim Exp(\lambda)$

★★★

д-во: $X_i \sim \Gamma(1,\beta)$, $1 \le i \le n$ и от теоремата

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n\cdot 1, \beta)$$

• Теорема: $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$, $\alpha>0$, $\beta>0$, то $\boxed{\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\beta}}$ и $\boxed{DX = \frac{\alpha}{\beta^2}}$

д-во: $$\mathbb{E}X = \int_0^\infty x \cdot \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x}\,dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha} e^{-\beta x}\,dx \overset{y=\beta x}{=}$$

$$= \frac{\cancel{\beta^\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{y^\alpha}{\cancel{\beta^\alpha}} e^{-y} \frac{dy}{\beta} = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha+1-1} e^{-y}\,dy =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

* Деф: Казваме, че $X \sim \chi^2(n)$ е хи-квадрат с $n \geq 1$ степени на свобода ако $X \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и съответно има плътност

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad x > 0$$

* Теорема: Нека $Z \sim N(0,1)$ и $X = Z^2 \Rightarrow X \sim \chi^2(1)$.

д-во: $X = g(Z)$, $g(z) = z^2$ не е взаимно ? за $z \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Z^2 \leq x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

лекция 9 $\downarrow$ 2:45...

* Деф: (t-разпределение): Нека $Z \sim N(0,1)$ и $X \sim \chi^2(n)$ където $Z \perp\!\!\!\perp X$. Тогава $\frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n}}}$ има t разпределение с n-степен на свобода.

Видове сходимост

Деф: (Сходимост почти сигурно):

Нека $X_1, X_2, X_3, \dots$ е редица от сл. вел. и X сл. величина.
Казваме, че $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{п.с.} X$ (редицата X_n клони към X почти сигурно),
ако $\boxed{\mathbb{P}(X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X) = 1}$

* $\mathbb{P}(\{\omega : X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)\}) = 1$, $\mathbb{P}(L) = 1$

Деф: (Сходимост по вероятност):

Казваме, че редицата X_n клони към сл. вел. X по вероятност
ако $\boxed{\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$ и пишем $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, $\forall \varepsilon > 0$

* $A_{n,\varepsilon} := \{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) \to 0)$

Деф: (Сходимост по разпределение):

Казваме, че редицата X_n клони към сл. вел. X по разпределение
ако за всяка точка на непрекъснатост на $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$,
вярно, че $\boxed{F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x)}$ и

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$. * $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, $\forall x \in C_{F_X}$

$\hookrightarrow$ $\forall$ непр. и огр. ф-я $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е в сила $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E} f(X_n) = \mathbb{E} f(X)$

Твърдение:

Нека $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Тогава $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$.
Нека $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ и $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Тогава $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$

* **Теорема:** $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{п.с.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$

* п.с. влече по вероятност, а вероятност влече сходимост по разпределение

! обратните индикации не са верни

д-во → от записки неясно :/ → лекция 10 23:.. и за смелите :)

* **Твърдение:** Ако $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} C$ ($\to const$) и $(Y_n)_{n\geq 1}$ са дефинирани в едно вер. прост, то и $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} C$

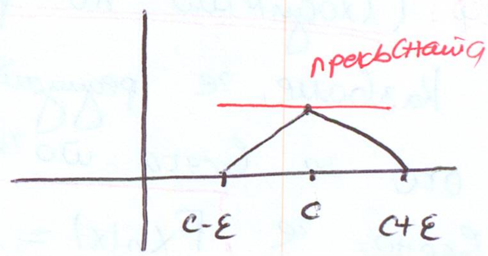
д-во: $P(|X_n - c| \leq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{?} 1, \ \forall \varepsilon > 0$

$P(|X_n - c| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{?} 0, \ \forall \varepsilon > 0$

Как точно формулираме идеята за доказателството?

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & |x-c| \leq \varepsilon \\ 0, & |x-c| > \varepsilon \end{cases}$$

прекъсната ф-я и не ни върши работа



$P(|X_n - c| \leq \varepsilon)$

$\quad ||$

$\mathbb{E}\, 1_{\{|X_n - c| \leq \varepsilon\}} \xrightarrow[n\to\infty]{? \to не} g_\varepsilon(c) = 1$

$\quad ||$

$\mathbb{E}\, g_\varepsilon(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{?} 1$

от сходимост по разпределение и условието ⇒

$\forall f$ определена и непрекъсната $\mathbb{E} f(X_n) = \mathbb{E} f(c)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad || \ f(c)$

$f_\varepsilon(x) \leq g_\varepsilon(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{E} g_\varepsilon(X_n) \geq \mathbb{E} f_\varepsilon(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_\varepsilon(c) = 1$

$1 \geq \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E} g_\varepsilon(X_n) \geq 1$ → защото $P(|X_n - c| \leq \varepsilon)$ е вероятност

→ Неравенство на Марков. Неравенство на Чебишев

+ Твърдение: Нека X е сл. вел. с положителни стойности. Тогава

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}}.$$ → Неравенство на Марков

д-во:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X \geq a\}} + X \cdot 1_{\{X < a\}}]$$

тъй като $X \geq 0$; т.к. $1_{\{X \geq a\}}$

$$\geq \mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X \geq a\}}] \geq \mathbb{E}[a \cdot 1_{\{X \geq a\}}] =$$

$$= a \cdot \mathbb{E}1_{\{X \geq a\}} = a \cdot \mathbb{P}(X \geq a) \text{ т.к. } \mathbb{E}1_A = \mathbb{P}(A)$$

очакване на индикатора е вероятността

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}$$

+ Следствие: За сл. вел. X:

1.) $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$ за $a > 0$

2.) $\boxed{\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}}$ → Неравенство на Чебишев, $\forall \varepsilon > 0$

3. $\mathbb{P}(|X|^k \geq a^k) \leq \frac{\mathbb{E}|X|^k}{a^k}$ за $k > 0$ и $a > 0$

д-во: 1.) директно, т.к. $|X| \geq 0$

2.) Прилагаме Марков за $Y = (X - \mathbb{E}X)^2$ и $a = \varepsilon^2$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}((X - \mathbb{E}X)^2 \geq \varepsilon^2)}_{\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon)} \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

3. От. нер. на Марков за $|X|^k$ и a^k

$$\underbrace{\mathbb{P}(|X|^k \geq a^k)}_{\mathbb{P}(|X| \geq a)} = \frac{\mathbb{E}[|X|^k]}{a^k}$$

Закон за големите числа

не са i.i.d, в глобалния за всяко редица

Деф: Нека имаме редицата от еднакво разпределени и независими (i.i.d.) сл. вел. $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ с очаквания съответно $\mathbb{E}X_i$. Казваме, че за X е изпълнен (слаб) ЗГЧ, ако

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mathbb{E}X_i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0}$$

Казваме, че за X е изпълнен (уси...

В лекцията когато ще са i.i.d го направи така следва ли? Как е правилно да се дефинира?

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mathbb{E}X_i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} 0}$$

ще са само за i.i.d

Теорема: За $X_1, \dots, X_n$ независими и еднакво разпределени с $DX_1 < \infty$, то е верен ЗГЧ:

i.i.d

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}[X_i])}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0 \iff \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$$

Д-во: $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$: $\mathbb{E}[S_n] = n\mathbb{E}[X_1]$

$D[S_n] = n DX_1$ (щом като са независими)

искаме да докажем $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$

Чебишев $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Нека $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} DS_n}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n} DX_1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n}\underbrace{\left[\frac{DX_1}{\varepsilon^2}\right]}_{const}$$

при $n\to\infty$, $\lim \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1\right| > \varepsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{DX_1}{\varepsilon^2}\right] = 0$

$$\Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$$

+ **Теорема УЗГЧ:** Нека X_n са независими и еднакво разпределени сл. вел. деф. в едно вер. простр. Нека $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ и да означим $\mathbb{E}X_1 = \mu$.

Тогава за редицата е в сила УЗГЧ, който твърди, че $\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)}{n} \xrightarrow{п.с.} 0$ или еквивалентно

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{п.с.} \mu \to \mathbb{E}X_1$$

примери (+) →

↳ единственото изискване е да има добре дефинирано очакване

д-во:

$(\mathbb{E}X_1^4 < \infty) \to$ да съществува четвъртия момент

$Y_i = X_i - \mu$, $i \geq 1$, тогава $\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\cdot} \xrightarrow[n \to \infty]{п.с.} 0$

$\mathbb{E} Y_i = \mathbb{E} X_i - \mu = 0, \ \forall i \geq 1$ и $\mathbb{E} Y_i^4 < \infty$, защото е линейна трансформация на тази величина

$L = \left\{ \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = 0 \right\}$ цел $P(L) = 1$ или еквивалентно

$P(L^c) = 0$, защото се сумират до единица

$$L = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n}^{\infty} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i}{k} \leq \frac{1}{r} \right\}$$

$$L^c = \bigcup_{r=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n}^{\infty} \underbrace{\left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i}{k} \right| > \frac{1}{r} \right\}}_{A_{k,\frac{1}{r}}}}_{B_r} = \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r$$

доказателство лекция 10 1:26.

виж лекция 9 !!

Ако $\mathbb{P}(B_r) = 0,\ \forall r \geq 1 \overset{?}{\Rightarrow} \mathbb{P}(L^c) = 0$, защото $\mathbb{P}(L^c) \leq \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_r) = 0$

$$B_r = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k \geq n} A_{k,\frac{1}{r}}}_{C_{n,r}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{n,r}, \quad C_{n-1,r} \supseteq C_{n,r} \supseteq C_{n+1,r}$$

като увеличаваме k

се свиваще се по n

$$\mathbb{P}(B_r) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(C_{n,r}) \overset{?}{=} 0$$

$$\mathbb{P}(C_{n,r}) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k \geq n} A_{k,\frac{1}{r}}\Big) \leq \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_{k,\frac{1}{r}})$$ → сумата от индивидуалните множества

$$\leq \sum_{k \geq n} \frac{r^4}{k^3} \mathbb{E}Y_1^4 + 3r^4 (\mathbb{E}Y_1^2)^2 \frac{k-1}{k^3}$$

в всеки сходящ ред. опашката му клони към 0

$$\mathbb{P}(A_{k,\frac{1}{r}}) = \mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{k} Y_i\Big| > \frac{k}{r}\Big) \leq \frac{r^4\, \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{k} Y_i\Big)^4}{k^4} =$$

$$= \frac{r^4}{k^4}\big(k\,\mathbb{E}Y_i^4 + 3k(k-1)\big)(\mathbb{E}Y_i^2)^2 = \frac{r^4\, \mathbb{E}Y_i^4}{k^3} + 3r^4 (\mathbb{E}Y_i^2)^2 \frac{k-1}{k^3}$$

$$\mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{k} Y_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k} Y_i\Big)\Big(\quad\Big)\Big(\quad\Big)\Big) = k\,\mathbb{E}Y_i^4 + \binom{k}{2}\binom{4}{2}(\mathbb{E}Y_i^2)^2 = k\,\mathbb{E}Y_i^4 + 3k(k-1)(\mathbb{E}Y_i^2)^2$$

фиксира i и j; колко от 4 като

$Y_i \overset{d}{=} Y_1$

$\boxed{\mathbb{E}(Y_i^4)} = \boxed{\mathbb{E}Y_1^4}$ $\qquad \mathbb{E}(Y_i Y_j Y_k Y_s) = 0$, защото $\mathbb{E}Y_i = 0$

$\mathbb{E}(Y_i^3 Y_j) = \mathbb{E}Y_i^3\, \mathbb{E}Y_j = 0$ $\qquad \mathbb{E}Y_i = \mathbb{E}Y_1 = 0$ – защото са едн. разпределени

$\boxed{\mathbb{E}(Y_i^2 Y_j^2)} = \mathbb{E}Y_i^2\, \mathbb{E}Y_j^2 = \mathbb{E}Y_1^2\, \mathbb{E}Y_1^2 = \boxed{(\mathbb{E}Y_1^2)^2}$

$\mathbb{E}(Y_i Y_j Y_k^2) = \mathbb{E}Y_i\, \mathbb{E}Y_j\, \mathbb{E}Y_k^2 = 0$

$$\mathbb{P}(C_{n,r}) \le r^4 \, \mathbb{E}Y_1^4 \sum \frac{1}{k^3} + 3r^4 (\mathbb{E}Y_i^2)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k^3}$$

$$\lim \mathbb{P}(C_{n,r}) \le r^4 \, \mathbb{E}Y_1^4 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} + 3r (\mathbb{E}Y_1^2)^2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k-1}{k^3}$$

↳ (клонят) се към 0 защото $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty$ → сходящ ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k^3} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

(+) $X_i \sim Ber(p)$

- $\frac{\text{брой ези}}{\text{хвърляния на монетата}} \to p = \frac{1}{2}$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.с.} \mathbb{E}X_1 = p$$

- гласоподаватели (интервюирани) за партия X с пропорция p

(+) Играта на рулетка

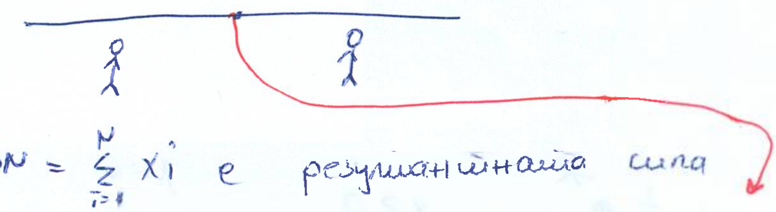
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.с.} \frac{1}{37} \leftarrow \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}Y_2$$

очакването на тази игра

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.с.}$$

(+) $\mathbb{E}X_1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{п.с.} 0$

(+)



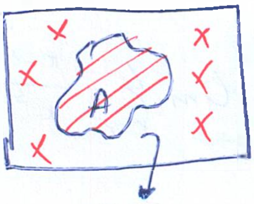
$X_i = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ 0, & 1/2 \end{cases}$

N брой

Колко бързо?

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ е резултантната сила

$\frac{S_N}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{п.с.} 0 \; ? = \mathbb{E}X_1$ → резултантната сила клони към 0

⊕ 

$$Y_i = g(X_i) = \begin{cases} 1, & X_i \in A \\ 0, & X_i \notin A \end{cases}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.с.} \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Ω - квадрат с лице Ω

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_1 \in A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$|\Omega|$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.с.} \mathbb{E}X_1$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

→ ЦЕНТРАЛНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА (ЦГТ)

* Теорема: Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от нез. и еднакво разпределени случайни величини дефинирани в едно вер. прост., Нека $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$ и $\mathbb{E}X_1 = \mu$. Нека $DX_1 = \sigma^2$, Тогава

$$Z_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z \sim N(0,1)$$

$$\left(S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \right)$$

най-слабо сходимост по разпределение

⊕ $$\underset{F_{Z_n}(x)}{\mathbb{P}(Z_n \leq x)} = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x),\ x \in C_F = \mathbb{R}$$

$a = b$

$a = -\infty$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

⊕ пример плюс

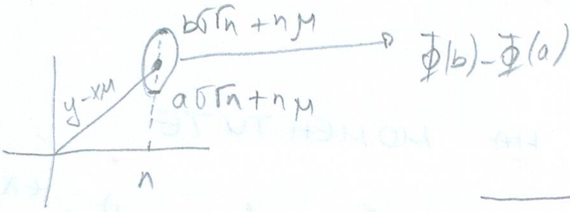
→ $$Y_1 = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ -1, & 1/2 \end{cases}, \quad \mu = 0, \ \sigma^2 = 1$$

X_1 с плътност $$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x^2}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{4}, & x \in [-2, 0] \end{cases} \quad \mu = 0, \ \sigma^2 = 1$$

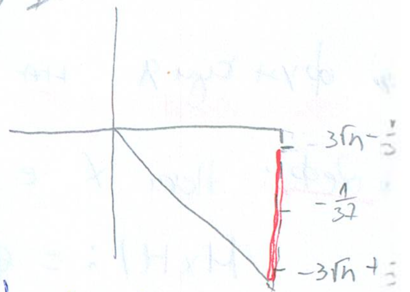
(+) $-\infty \le a < b \le \infty$ APP

$$\mathbb{P}(a < Z_n < b) = \mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le b\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(b) - \Phi(a) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \mathbb{P}(n\mu + a\sigma\sqrt{n} \le S_n \le n\mu + b\sigma\sqrt{n})$$



(+) рулетка на червено



$\mu = \frac{1}{37}$, $\sigma^2 = 1$

$$\mathbb{P}\left(-\frac{n}{37} - 3\sqrt{n} < S_n < -\frac{n}{37} + 3\sqrt{n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{3} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \approx 1$$

$a = -3$
$b = 3$

(+) $\mu = 0$, σ^2 $\qquad Z_n = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \leftarrow \mathbb{P}(Z_n < 0) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < 0\right) = \mathbb{P}(S_n < 0)$$

$$\| \quad \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(S_n > 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

разлчни варианти на тва задача се падаа на изпит ?

(+) → пример в др. записки !

(+) $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{n.c.} \mu$

$$Z_n = \frac{n\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z \sim N(0,1)$$

$$\frac{S_n}{n} = \mu + \frac{\sigma Z_n}{\sqrt{n}} \iff \frac{S_n}{n} - \mu = \frac{\sigma Z_n}{\sqrt{n}} \overset{!?}{\approx} \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{S_n}{n} - \mu \overset{?!}{\approx} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z$$ → стандартно нормално разп. е Z

④ $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right)=\mathbb{P}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}|Z_n|>\varepsilon\right)\approx\mathbb{P}\left(|Z|>\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sigma}\right)=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|y|>\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

* **функция на моментите**

* Деф: Нека X е сл. вел. Ако $\exists\, \mathbb{E}e^{tX}$ съществува за $|t|<\varepsilon$, то

$M_X(t) := \mathbb{E}e^{tX}$, $|t|<\varepsilon$ се нарича ф-я на моментите.
няк(ъ)в(о) положително число

$M_X(0)=1$ → никога няма проблем в нулата

④ $\mathbb{E}e^{tX}=\sum_i p_i e^{tx_i}<\infty$ $(|t|<\varepsilon)$ → за дискретни

④ $\mathbb{E}e^{tX}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx<\infty$ $(|t|<\varepsilon)$ * $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$

непрекъснати

④ $X\sim U(0,1)$

$M_X(t)=\mathbb{E}e^{tX}=\int_0^1 e^{tx}\cdot 1\,dx=\frac{1}{t}e^{tx}\Big|_0^1=\frac{e^t-1}{t}\xrightarrow[t\to 0]{}1$ по Лопитал

M_X е дефинирана за $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varepsilon=\infty$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx$ → но защото е от $(0,1)$ и тази функция е 1

* ф-ята на моментите е дефинирана за всяко $|t|<\infty$

* Свойства на функцията на моментите

1. $M_X(0) = 1$
2. $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}X^k$ $\quad |t|<\varepsilon: \mathbb{E}e^{tX} = \mathbb{E}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}X^k$

като разменим сумата и очакването

3. $\frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\Big|_{t=0} = \mathbb{E}X^k$

4. $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$

5. Ако $\lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)$ за $|t| \le \varepsilon \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$

6. $M_X(t) = M_Y(t)$ за $|t| \le \varepsilon \Rightarrow X \xrightarrow{d} Y$

* две сл. вел., с една и съща ф-я на разпр. сделение имат една и съща ф-я на моментите

7. $Y = aX + b$, то $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$ $\quad |t| < \frac{\varepsilon_X}{|a|}$

д-во:

(M_X е добре дефинирана за $|t| < \varepsilon_X$)

2. $M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \mathbb{E}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}X^k$

линейност

вярно заради $|t| < \varepsilon$

3. $\frac{d^k}{dt^k} \sum_{e=0}^{\infty} \frac{t^e}{e!}\mathbb{E}X^e = \mathbb{E}X^k + \sum_{e=k}^{\infty} \text{const}\, t^e + \mathbb{E}X^e \Big|_{t=0}$ — ???

да ги сметнем

4. $|t| < \min(\varepsilon_X, \varepsilon_Y)$

$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}e^{t(X+Y)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x+y)} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{не зав. } X \perp\!\!\!\perp Y}{=}$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{ty} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f_Y(y)\,dy =$

$= M_X(t) M_Y(t)$

7. $M_Y(t) = \mathbb{E}\, e^{tY} = \mathbb{E}\, e^{t(aX+b)} =$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\, e^{ta\cdot X} \cdot e^{bt}}_{const} = e^{bt}\, \mathbb{E} e^{atX} = e^{bt} M_X(at) \text{ когато } |at| < \varepsilon_X$$

Твърдение: Нека $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Тогава $M_X(t) = e^{\mu t} \cdot e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \ \forall t \in \mathbb{R}$

д-во:

$X = \mu + \sigma Z$ и от 7.

$$M_X(t) = e^{\mu t} M_Z(\sigma t) \quad (*) \text{ за } |t| < \frac{\varepsilon_Z}{\sigma}$$

$$M_Z(t) = \mathbb{E}\, e^{tZ} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} + tx - \frac{t^2}{2}} dx =$$

$$\circledast \quad = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx \overset{y = x-t}{=\!=} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

→ плътността = 1
– на стандартното нормално

$$= e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow M_X(t) = e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad | \text{ така заместим в } (*))$$

$$\circledast \left(\frac{x^2}{2} - tx + \frac{t^2}{2} \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{(x-t)^2}{2}$$

Важна!
разгледай доказателството
с интеграл!

→ Доказателство на ЦГТ:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

ще се опитаме да покажем, че $M_{Z_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ $\quad M_{X_1}(t) = M_{X_j}(t)$ са добре деф. $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{S_n - n\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \frac{(X_j - \mu)}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} Y_j = Z_n$$

$$Y_j := \frac{X_j - \mu}{\sigma}$$

полагаме

$$DY_1 = \mathbb{E}Y_1^2 - (\mathbb{E}Y_1)^2 = \mathbb{E}Y_1^2$$

| защото това е нормиран и центриран вариант на.

$\mathbb{E}Y_j = 0 \qquad DY_j = 1$

лекция М 1:05:...

$$M_{Y_1}(t) = M_{Y_j}(t), \; \forall t \in \mathbb{R}$$

$$M_{Y_2}(t) = e^{-\frac{\mu}{\sigma}t} M_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma}\right), \; \forall t \in \mathbb{R}$$

$$M_{Z_n}(t) = M_{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} Y_j}(t) = \mathbb{E}e^{t\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} Y_j} =$$

$$= \mathbb{E}e^{\frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} Y_j} = M_{\sum_{j=1}^{n} Y_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) =$$

$(Y_1, \ldots, Y_n)$ са незав.
↓
от т. 5) и свойствата на моментите

$$= \prod_{j=1}^{n} M_{Y_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \underset{\text{т.е. } 5)}{=} \left(M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \underset{\text{т. 6) 2.}}{=} 1 + \frac{\mathbb{E}Y_1}{1!}\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{\mathbb{E}Y_2^2}{2!}\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) = 1 + 0 + \frac{t^2}{2n} + o(\ldots)$$

$$\left(M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + o(\ldots)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{t^2}{2}}$$

Избадка от N гласоподавателни іддин от популация. Тогава

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{гласувал за } A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$Ber(p)$

Търсим p, което е пропорцията от гласоподаватели за A

$$E_N = \frac{\overset{S_N}{\sum_{i=1}^{N} X_i}}{N} \to p \approx \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}} Z$$

понеже $Z_n = \dfrac{\frac{S_N}{N} - p}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}}} \sim Z$

примеро нејосно ?

???

1:24

Проблем в приближението ?

$$P(|E_N| > \varepsilon) \qquad |E_N| \approx \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}} |Z| \le \frac{1}{2\sqrt{N}} |Z|$$

$$\le P(|Z| > 2\varepsilon\sqrt{N})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|x| > 2\varepsilon\sqrt{N}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$Z_n = \frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$$

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = P\left(\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le x\right) \approx P(Z \le x) = \Phi(x)$$

Ако знаем μ и σ^2 за X_1 от $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ н.е.р. сл. вел., то

$S_n = \sum_{j=1}^{\infty} X_j$ имаме

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_N}{N} - \mu \le \frac{\sigma}{\sqrt{N}} x\right) - \Phi(x)\right| \le 0{,}474 \cdot \frac{E|X_1 - \mu|}{\sigma^3\sqrt{N}}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x)\right| \le \frac{0{,}4748}{\sqrt{n}\,\sigma^3} E|X_1 - \mu|^3$$

щот запис