Контролно 1, КН

2024 / КН

1. 1а) В урна има 2 жълти, 3 зелени и 4 сини камъчета

- жълто = един зар
- зелено = 2 зара
- синьо = 3 зара

- A = „Паднала се е сума 3 от хвърлените зарчета“

B = „Избрано е зелено камъче“

$P(B|A) = ?$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}\cdot\frac{3}{9}}{\frac{112}{1942}} = \frac{\frac{6}{324}}{\frac{112}{1942}} = \frac{6\cdot 1942}{324\cdot 112} =$$

$P(B) = \frac{3}{9}$

$P(A|B)$ = при хвърлянето на 2 зара, да има сума 3

$\Rightarrow$ 1 и 2, 2 и 1 $\rightarrow \frac{2}{36}$

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{един зар}}\cdot\frac{2}{9} + \underbrace{\frac{2}{36}}_{\text{2 зара}}\cdot\frac{3}{9} + \underbrace{\frac{1}{216}}_{\text{3 зар}}\cdot\frac{4}{9} = \frac{2}{54} + \frac{6}{324} + \frac{4}{1944} = \frac{72+36+4}{1944} =$$

$\frac{112}{1942}$

1 1 1

$= \frac{11652}{36288} = 0,3210\ldots$

$\approx 32,1\%$

2) Стандартен зар се хвърля 5 пъти

а) A = „максималното паднало се число е поне 3"

б) B = „произведението на всички паднали се числа се дели на 10"

↳ $\mathbb{P}(\max \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(\text{всички са } 1 \text{ или } 2) =$

$= 1 - \left(\frac{2}{6}\right)^5 =$

↳ $C := \{$има число което се дели на 5$\}$

$D := \{$има число което се дели на 2$\}$

$\mathbb{P}(\overline{C}) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \qquad \mathbb{P}(\overline{C} \cap \overline{D}) = \left(\frac{2}{6}\right)^5$

$\mathbb{P}(\overline{D}) = \left(\frac{3}{6}\right)^5$

↳ Търсим $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(C \cup D) =$

$= 1 - \mathbb{P}(\overline{C}) + 1 - \mathbb{P}(\overline{D}) - \left(1 - \mathbb{P}(\overline{C} \cap \overline{D})\right) =$

$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 + 1 - \left(\frac{3}{6}\right)^5 - \left(1 - \left(\frac{2}{6}\right)^5\right) =$

$= \frac{7776 - 3125}{7776} + \frac{7776 - 243}{7776} - \frac{7776 + 32}{7776}$

$= \frac{4651}{7776} + \frac{7533}{7776} - \frac{7744}{7776} = \frac{4651 + 7533 - 7744}{7776} =$

$= \frac{4440}{7776} \approx 57\%$

3) 7 топки попадат случайно и независимо в 7 кутии

X_i = „# на кутиите, в които има точно i топки"

↳ разпределението на X_3

↳ $\mathbb{E}[X_3]$

↳ $\sum_{i=1}^{7} i\,\mathbb{E}[X_i]$

$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \mathbb{P}($2 кутии с 3 топки и 1 кутия с 1 топка$) =$

$$= \frac{7 \cdot \binom{7}{3} \cdot 6 \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{5}{2}}{7^7} \approx 1{,}78\%$$

??

$\boxed{2}$ 15 въпроса с 5 възможни отговори

↳ студент знае отговорите на 10 от тях

→ отговаря с вероятност 90%

↳ за останалите 5 избира на случаен принцип

$X =$ "# верни отговори от всички 15 въпроса"

а) $\mathbb{P}(X>12)$, очакване и дисперсия $= ?$

$A =$ "# брой верни от тези които знае" $\sim Bin(10, \frac{9}{10})$

$B =$ "# верни от тези които не знае" $\sim Bin(5, \frac{1}{5})$

$A + B = X$

$$\mathbb{P}(X>12) = \sum_{k=3}^{5} \mathbb{P}(B=k)\,\mathbb{P}(A>12-k) =$$

$$= \mathbb{P}(B=3)\left[\mathbb{P}(A=10)\right] +$$
$$+ \mathbb{P}(B=4)\left[\mathbb{P}(A=9)+\mathbb{P}(A=10)\right] +$$
$$+ \mathbb{P}(B=5)\left[\mathbb{P}(A=8)+\mathbb{P}(A=9)+\mathbb{P}(A=10)\right]$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[A] + \mathbb{E}[B] = 10\cdot\frac{9}{10} + 5\cdot\frac{1}{5} = 10$$

$$D[X] \overset{\text{независими}}{=} DA + DB = 10\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10} + 5\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{9}{10} + \frac{4}{5} = \frac{9+8}{10} = \frac{17}{10}$$

б) $$\mathbb{P}(A=3 \mid X=3) = \frac{\mathbb{P}(X=3 \mid A=3)\,\mathbb{P}(A=3)}{\sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(X=3 \mid A=k)\,\mathbb{P}(A=k)} = \frac{\mathbb{P}(B=0)\,\mathbb{P}(A=3)}{\sum \mathbb{P}(B=3-k)\,\mathbb{P}(A=k)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \binom{10}{3}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^7}{\sum_{k=0}^{3} \binom{5}{3-k}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3-k}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{k+2} \binom{10}{k}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{10-k}} = \dots \quad ???$$

$\boxed{3.}$ X е сл. число измежду {0,1,2}

а) $Y \sim Ber(2/3)$ сл. вел. независима от числото X

$Z := (X+Y) \bmod 3$

↳ Възможните стойности при %3 са 0, 1 или 2

$\Rightarrow Z = \{0,1,2\}$

$Z \backslash X$	0	1	2	
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{3}{9}$
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$
	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	

X Y

0 + 0

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$1 + Y = 2 \to$ за да $Z=0 \to$ X

$2 + 1 \ \%3 = 0$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$0 + 1 \ \%3 = 1$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} =$

$1 + 0 \ \%3 = 1$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$2 + 2 \ \%3 = 1 \to$ X

$0 + 2 \ \%3 = 2 \to$ X

$1 + 1 \ \%3 = 2$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$Y \sim Ber(2/3)$

$P(Y=1) = 2/3$

$P(Y=0) = 1/3$

$$cor(X,Z) = \frac{cov(X,Z)}{\sqrt{DX\,DZ}}$$

$cov(X,Z) = \mathbb{E}XZ - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Z$

$\to \mathbb{E}[X] = 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = \underline{1}$

$\mathbb{E}[Z] = 0\cdot\frac{3}{9} + 1\cdot\frac{3}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} = 0 + \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = \frac{9}{9} = \underline{\underline{1}}$

$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$

$\mathbb{E}[Z^2] = \frac{3}{9} + \frac{12}{9} = \frac{15}{9} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$

$DX = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$

$DZ = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{5}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$

$\mathbb{E}XZ = \sum_{x,z} xz\,\mathbb{P}(X=x, Z=z) =$

$= \cancel{0\cdot 0\cdot \frac{1}{9}} + \cancel{0\cdot 1\cdot 0} + \cancel{0\cdot 2\cdot \frac{2}{9}} +$

$+ \cancel{1\cdot 0\cdot \frac{1}{9}} + 1\cdot 1\cdot \frac{1}{9} + \cancel{1\cdot 2\cdot 0} +$

$+ \cancel{2\cdot 0\cdot 0} + 2\cdot 1\cdot \frac{2}{9} + 2\cdot 2\cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$

$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Z) = \mathbb{E}XZ - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Z = 1 - 1\cdot 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Cor}(X,Z) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{DX\,DZ}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}} = 0$

б) X е равномерно сл. число $\{1, \dots, 6\}$

$g_X(s) = ?$

$\mathbb{E}X$ и DX $= ?$

$\boxed{g_X(s) = \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k\,\mathbb{P}(X=k)}$ → обща формула

$g_X(s) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} s^k$

$g_X(s) = \frac{1}{6}(s^1 + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6)$

$g'_X(s) = \frac{1}{6}\left(1 + 2s + 3s^2 + 4s^3 + 5s^4 + 6s^5\right)\Big|_{s=1} =$

$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6}\cdot 21 = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \Rightarrow \mathbb{E}[X]$

$$g''_X(s) = \frac{1}{6}\left(2 + 6s + 12s^2 + 20s^3 + 30s^4\right)\Big|_{s=1} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(2+6+12+20+30\right) = \frac{1}{6}\cdot 70 = \frac{70}{6}$$

$$DX = g''_X(1) + g'_X(1) - g'_X(1)^2 =$$

$$= \frac{35}{3} + \frac{7}{2} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{70}{6} + \frac{7}{2} + \frac{49}{4} = \frac{140+42-147}{12} = \frac{35}{12}$$

б) X и Y са сл. вел със стойности в $\{0, 1, \dots\}$

- ако $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $\forall s \geq 0$, $g_X(s) g_Y(s) = g_{X+Y}(s)$?
- ако $\forall s \geq 0$ $g_X(s) g_Y(s) = g_{X+Y}(s)$, то X и Y са независими ?

→ доказване твърденията

→ Ако $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $\mathbb{P}(X=k, Y=m) = \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=m)$ и значи

$$g_{X+Y}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \, \mathbb{P}(X+Y=k) =$$

$$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{m=0}^{k} \mathbb{P}(X=m)\mathbb{P}(Y=k-m) =$$

$k-m=i$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} s^m \, \mathbb{P}(X=m)\, s^{k-m}\, \mathbb{P}(Y=k-m) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} s^m \, \mathbb{P}(X=m) \sum_{i=0}^{\infty} s^i \, \mathbb{P}(Y=i) =$$

$$= g_X(s)\, g_Y(s)$$

- Обратното, обаче не е вярно

Ако $g_{X+Y}(s) = g_X(s)\, g_X(s) \not\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

КОНТРОЛНО 1 КН 2023

$\boxed{2.}$ $Ber(p)$, $Bin(n,p)$, $Ge(p)$, $Poi(\lambda)$

X_1 и X_2 са iid

Нека $Y_1 = X_1 + X_2$ и $Y_2 = X_1 X_2$

1. За $X_i \sim Ber(p)$

$X_1 + X_2 \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow Y_1 \not\sim Ber(p_1)$

$\mathbb{P}(X_1 X_2 = 1) = p \cdot p = 1 - \mathbb{P}(X_1 X_2 = 0) \Rightarrow Y_2 \sim Ber(p^2)$

2. За $X_i \sim Bin(n,p)$

$X_1 + X_2 =$ сума на n iid $Ber(p)$ + сума на n iid $Ber(p) \sim Bin(2n, p)$

Контролно 1 КН 2022

1\. в кутия зар с 6 страни
в друга кутия зар с 8 страни

$\mathbb{P}$(зар от първата кутия | съвпадва падналото се число) =

$$= \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{4+3}{48}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{48}} = \frac{1\cdot 48}{12\cdot 7} = \frac{4}{7}$$

за $k \le 6$

и 0 иначе т.е. за $k > 6$

2\. 1 курс : 600 − 80% = 4/5
2 курс : 400 − 60% = 3/5
3 курс : 200 − 25% = 1/4

$\mathbb{P}(I) = \frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(II) = \frac{400}{1200} = \frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(III) = \frac{200}{1200} = \frac{1}{6}$

A = отишли са 2 студенти от различни курсове на лекция

$\mathbb{P}$(III | отишъл на лекция) = ?

$$\mathbb{P}(III \mid O) = \frac{\mathbb{P}(O \mid III)\,\mathbb{P}(III)}{\mathbb{P}(O)} = \frac{50\cdot\frac{1}{6}}{\frac{985}{3}} = \frac{\cancel{50}^{10}\cdot 3}{\cancel{6}_{2}\cdot \cancel{985}_{197}} = \frac{5}{197}$$

$\mathbb{P}(III) = \frac{200}{1200} = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(O \mid III) = 200\cdot\frac{1}{4} = 50$

$$\mathbb{P}(O) = \mathbb{P}(O \mid I)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(O \mid II)\mathbb{P}(II) + \mathbb{P}(O \mid III)\mathbb{P}(III) =$$

$$= \cancel{600}^{480}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}\cdot\frac{1}{2} + \cancel{400}^{80}\cdot\frac{3}{\cancel{5}}\cdot\frac{1}{3} + 50\cdot\frac{1}{6} =$$

$$= 240 + 80 + \frac{50}{6} = \frac{1440+480+50}{6} = \frac{1970}{6} = \frac{985}{3}$$

2.

1 курс: $600 \cdot \frac{4}{5} = 480$ $\quad P(I) = \frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$

2 курс: $400 \cdot \frac{3}{5} = 240$ $\quad P(II) = \frac{400}{1200} = \frac{1}{3}$

3 курс: $200 \cdot \frac{1}{4} = 50$ $\quad P(III) = \frac{200}{1200} = \frac{1}{6}$

P(по-горен курс = 3 | не са от един курс) =

$$= \frac{50 \cdot (480 + 240)}{50 \cdot 240 + 50 \cdot 480 + 240 \cdot 480} =$$

$$= \frac{50 \cdot 720}{12000 + 24000 + 115200} = \frac{36000}{151200} = \frac{360}{1512} = \frac{90}{378} = \frac{45}{189} =$$

$$= \frac{15}{63} = \frac{5}{21}$$

3. 20 въпроса, всеки с 4 отговора и студент знае отговорите на 10 и отговаря правилно и останалите 10 отговаря случайно

X = „# верни отговори от всички 20 въпроса"

а) разпределението на X

A = „# верни от тези които знае" ~ Bin(10, 1)

B = „# верни от тези които не знае" ~ Bin(10, $\frac{1}{4}$)

$X = A + B$

$g_{X_1}(s) + g_{X_2}(s) = g_{X_1}(s)\, g_{X_2}(s) = (sp + (1-p))^{n_1} (sp + (1-p))^{n_2} = (sp + (1-p))^{n_1+n_2}$

$\Rightarrow X \sim Bin(n_1 + n_2, p)$

$P(X > 15) = ?$

$P(X \geq 15) = P(B > 5) = P(B=6) + P(B=7) + P(B=8) + P(B=9) + P(B=10) =$

$= \dots$

б) $E[X]$ и DX

$E[X] = E[A] + E[B] = 10 + \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$

$E[A] = 10 \cdot 1 = 10$

$E[B] = 10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$

$DA = n \cdot p \cdot q = 10 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

$DB = n \cdot p \cdot q = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$

$DX \overset{\text{независими}}{=} DA + DB = 0 + \frac{15}{8} = \frac{15}{8}$

Контролно 1 КН 2021

1. плаща 2лв. за да участва в игра с 3 изстрела

3 пъти да улучи = 10лв печели

2 пъти - 5лв

1 път - 1лв.

$p = 1/3$

X = " # улучвания "

X	0	1	2	3
печалба	-2	-1	3	8
	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

$\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$= \frac{8}{27}$

$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{3\cdot 2!}{2!\cdot 1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9} = \frac{4}{9}$

$\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{3\cdot 2!}{1!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{3}{3}\cdot\frac{1}{27}\cdot 1 = \frac{1}{27}$.

$\Rightarrow E[X] =$

$= (-2)\cdot\frac{8}{27} + (-1)\cdot\frac{4}{9} + 3\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{27} =$

$= \frac{-16}{27} - \frac{4}{9} + \frac{6}{9} + \frac{3}{27} =$

$= -\frac{16 - 12 + 18 + 3}{27} =$

$= \frac{13}{27}$

$\Rightarrow$ За да бъде справедлива играта, очакването трябва да е 0 $\Rightarrow$ тази игра не е справедлива.

б) ако е на печалба, вероятността да не е уцелил на 3 изстрел

$\Rightarrow$ P(да не е уцелил на 1 и 2) =

$$= \frac{\frac{2}{27}}{3 \cdot \frac{2}{27} + \frac{1}{27}} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

$\boxed{2.}$ 4 бели и 6 черни – кутия 1

7 бели и 3 черни – кутия 2

и вади се по една топка от урна + 1 бяла и се добавят 3-те в 3та кутия

а) случайно избрана топка от кутия 3 да е бяла?

A = „Изтеглили сме бяла от третата кутия"

B_{xy} = „изтеглили сме x от първата и y от втората", като $x, y \in \{b, w\}$

$$P(A) = P(A|B_{ww})P(B_{ww}) + P(A|B_{bb})P(B_{bb}) + P(A|B_{wb})P(wb) + P(B_{\ldots}$$

$$= 1 \cdot \frac{28}{100} + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{18}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\cancel{54}^{18}}{100} = \frac{28}{100} + \frac{6}{100} + \frac{36}{100} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$$

$$P(B_{ww}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{28}{100}$$

$$P(B_{wb}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{12}{100} + \frac{42}{100} = \frac{54}{100}$$

$$P(B_{bb}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{18}{100}$$

$P(A|B_{ww}) = 1$

$P(A|B_{bb}) = \frac{1}{3}$

$P(A|B_{bw}) = \frac{2}{3}$

б) Ако има 3 бели в шрейката, шеглим на първи ход

Ако има 2 бели 1 черна, $Ge(\frac{2}{3}) \Rightarrow \mathbb{E}\ \frac{3}{2}$

Ако има 1 бела 2 черни, $Ge(\frac{1}{3}) \Rightarrow \mathbb{E}\ 3$

$$\Rightarrow \mathbb{E}X = \mathbb{E}(X|B_{www})P(B_{www}) + \mathbb{E}(X|B_{bww})P(B_{bww}) + P(B_{wwb})) + \mathbb{E}(X|B_{bbb})P(B_{bbb}) =$$

$$= 1\cdot\frac{28}{100} + \frac{3}{2}\cdot\frac{54}{100} + 3\cdot\frac{18}{100} =$$

$$= \frac{28}{100} + \frac{81}{100} + \frac{54}{100} = \frac{163}{100}$$

$\Rightarrow$ Ако X беше геометрично $X \sim Ge(\frac{7}{10})$, то очакването му щеше да е $\frac{10}{7}$, което видяхме, че не е така.

3) За $k = 0, 1, \ldots, n$, нека X_k е равно 1, ако сме изтеглили монетата k и 0 иначе

$\Rightarrow X \sim Ber(p)$ и следователно $\mathbb{E}X_k = p$, което по линейност на очакването води до:

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}(1X_1 + 2X_2 + 3X_3, \ldots, nX_n) = 1\mathbb{E}X_1 + 2\mathbb{E}X_2 + \ldots + n\mathbb{E}X_n =$$

$$= pn(n+1)/2$$

$$\boxed{* \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[S] = \frac{pn(n+1)}{2}$$

$\boxed{4}$ а) → A и B наричаме несъвместими, когато $A \cap B = \emptyset$, т.е. двете събития няма как да се случат по едно и също време

→ A и B наричаме независими, когато $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

↳ Ако A и B са независими, то за да са несъвместими е нужно $\mathbb{P}(A) = 0$ или $\mathbb{P}(B) = 0$

↳ За $A \subset B$, ако са независими е нужно $\mathbb{P}(A) = 0$ или $\mathbb{P}(B) = 1$

б) • Наричаме дискретните сл. вел. X и Y еднакво разпределени, ако имаме за $\forall a \in \mathbb{R}$, че $\mathbb{P}(X=a) = \mathbb{P}(Y=a)$ и независими ако за $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(X=a, Y=b) = \mathbb{P}(X=a)\mathbb{P}(X=b)$

в) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

г) $a = \min\{\mathbb{P}(X<Y), \mathbb{P}(Y<Z), \mathbb{P}(Z<X)\} \leq 2/3.$

→ Нека $A = \{X<Y\}$, $B = \{Y<Z\}$, $C = \{Z<X\}$

$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup \mathbb{P}(A \cap C) \cup \mathbb{P}(B \cap C)) \leq 1$

Контролно 1 СЕМ 2022

1. 10 двойки на урок по танци разделят се по случаен начин на 2 отбора: A и B

а) $\mathbb{E}$ хора в отбор A?
$\mathbb{E}$ брой двойки след разделението?

X = „# хора в отбор A"
Y = „# двойки в един отбор"

$X \sim Bin(20, \frac{1}{2}) \Rightarrow \mathbb{E}X = n \cdot p = 20 \cdot \frac{1}{2} = \frac{20}{2} = 10$

$Y \sim Bin(10, \frac{1}{2}) \Rightarrow \mathbb{E}Y = n \cdot p = \frac{10}{2} = 5$

б) $\mathbb{P}$(„1 конкретен да е в отбор с партньора си")=?
↳ броя неуспехи до първия успех
$\sim Ge(\frac{1}{2}) \Rightarrow \mathbb{E}Ge(\frac{1}{2}) = 2$

в) $\mathbb{P}$(всички двойки да са заедно)=? $= X \quad (\frac{1}{2})^{10}$
↳ броят неуспехи до пъри успех:
$\Rightarrow \mathbb{E}\,Ge((\frac{1}{2})^{10}) = 1024$ $(10, \frac{1}{2})$

↳ $\mathbb{E}X = n \frac{1-p}{p}$ $10 \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$
$\Rightarrow$ Ако x_A и x_B са # двойки в отбор A и B
$x_A + x_B = 10 \Rightarrow \mathbb{E}X_A = 5$
$\Rightarrow$

3 5 кръга по 1 дузпа за всеки отбор

↳ Ако има равенство се продължава, докато ~~[illegible]~~ единият отбелязан а другият не

отбор A → отбелязва с 75%

отбор B → отбелязва с 80%

а) $\mathbb{P}$(през първите 5 рунда, двата отбора да са отбелязали в едни и същи рундове) = ?

↳ Трябва всеки път или да са вкарали едновременно или да са пропускали

$$\Rightarrow \left(75\% \cdot 80\% + 25\% \cdot 20\%\right)^5 \approx 11,6\%$$

б) $\mathbb{P}$(след първите 5 кръга да има равенство) = ?

X = „# голове на отбор A" $\sim Bin(5, 75\%)$

Y = „# голове на отбор B" $\sim Bin(5, 80\%)$

$$\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}^2 (75\% \cdot 80\%)^k (25\% \cdot 20\%)^{5-k} = 0,2984$$

$\mathbb{P}$(равенство след първите 10 кръга) = ?

$$\mathbb{P}(X=Y) \cdot (75\% \, 80\% + 25\% \cdot 20\%)^5 \approx 3,46\%$$

↳ да има равенство на първите 5 и след това да отбелязват по едно и също време (в същи рундове).

в) $\mathbb{E}$ # дузпи от двата отбора = ?

$$\mathbb{E}\,\#\text{дузпи} = 10 \cdot (1 - \mathbb{P}(X=Y) + \mathbb{P}(X=Y)) \cdot \left(10 + \frac{1}{1-(75\% \cdot 80\% + 25\% \cdot 20\%)}\right)$$

$$\approx 10,85$$

Контролно 1 СЕМ 2021

1. 2% от населението е заразено от COVID

~~P(Positive | Pos) = 65%~~ ~~P(True)~~

$P(Pos \mid Sick) = 65\%$

$P(Pos \mid NoSick) = 1\%$

а) тестираме случаен човек => резултатът е положителен

$P(Sick) = ?$

$P(\text{болен} \mid \text{тестът е положителен}) = ?$ (Sick, Pos)

$$P(Sick \mid Pos) = \frac{P(Pos \mid Sick)\,P(Sick)}{P(Pos \mid Sick)P(Sick) + P(Pos \mid NoSick)\,P(NoSick)} =$$

$$= \frac{65\% \cdot 2\%}{65\% \cdot 2\% + 1\% \cdot 98\%} \approx 57{,}02\%$$

б) човек е болен, колко теста до получаване на отрицателен тест

↪ # тестове до първ отрицателен при болен човек $\sim Ge(p)$

$p = \frac{35}{100}$.

⇒ броят неуспехи до първия успех $= E\,Ge\left(\frac{35}{100}\right) = \frac{100}{35}$

$\approx 2{,}86$ теста.

$P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = p + (1-p)p = 0{,}5775$

$\boxed{2.}$ хвърля се зар 100 пъти, за всяко 6 у печалба 1лв, цената за участие = 20лв

а) X_i = „печалбата от хвърляния $25i-24$ до $25i$" за $i = 1,2,3,4$, а X е общата печалба

$X_i \sim Bin(25, \frac{1}{6})$

$X \sim Bin(100, \frac{1}{6}) \Rightarrow EX = 100 \cdot \frac{1}{6} < 20 \rightarrow$ играта не е справедлива

б) $Y = 4X_1$, вместо 100 пъти хвърля 25 и умножаваме печалбата по 4. EY и DY ?

$DX = 100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{500}{36}$

$D4X_1 = 25 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{36} \leftarrow DX_1 \rightarrow 4DX_1 = 4^2 DX_1 =$

$= 16 \cdot \frac{125}{36} = \frac{2000}{36}$

↳ при по-голям брой хвърляния отклонението от средното е логически по-малко.

в) Нека Y_i е стойността при i-тото хвърляне, тогава може да изразим $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100}$.

$EY_1 = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$ $\qquad EY_1^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$

средна стойност при едно хвърляне

$DY_1 = EY_1^2 - (EY_1)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{364-294}{24} = \frac{70}{24} = \frac{35}{12}$

→ Той като Y_i са независими

$$\mathbb{E}Y = 100 \cdot \mathbb{E}Y_1 = 100 \cdot \frac{7}{2} = \frac{700}{2} = 350$$

$$DY = 100 \cdot DY_1 = 100 \cdot \frac{35}{12} = \frac{875}{3}$$

→ От неравенството на Чебишев:

$$P(|X - \mathbb{E}X| > \alpha) \le \frac{DX}{\alpha^2}$$

$555 - 350 = 205$

$$P(Y \ge 555) = P(|Y - \mathbb{E}Y| \ge 205) \le \frac{DY}{205^2}$$

$$= \frac{\frac{875}{3}}{205^2} \approx 0{,}00694 \approx 0{,}007 \cdot 100\% = 0{,}7\%$$

→ играта е строго $< 1\%$ ⇒ рекламата е лъжлива

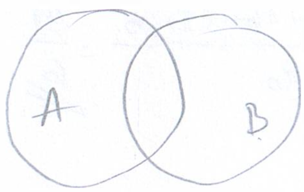
2020 СИ

4.

• A и B са независими когато $P(A \cap B) = P(A)P(B)$,

той като $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ то

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A})$$



в) $p_n := \mathbb{P}(X=n)$

$\mathbb{E}X$ и $DX = ?$

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} n p_n \quad , \quad DX = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (n-\mathbb{E}X)^2 p_n$$

$$\hookrightarrow \mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} p_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} p_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n \quad , \quad DX = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (n-\mathbb{E}X)^2 p_n \\ \hookrightarrow \mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} p_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) \end{array}}$$

од теоремата на Фубини

III Изпит СЕМ 2024

1. урна 1: 3 бели и 2 черни

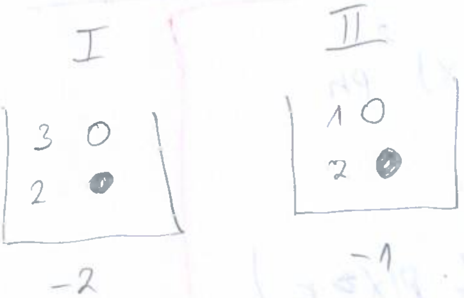
1.) урна 2: 1 бяла и 2 черни

и 2 топки от първата и 1 от втората

A = „от първата е изтеглена точно една бяла топка"

B = „от първата са изтеглени повече бели отколкото от втората"

а) $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A|B) = ?$



X = „# изтеглени бели от I"

Y = „# изтеглени бели от II"

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{\frac{3\cdot 2!}{2!\cdot 1}\cdot\frac{2\cdot 1}{1\cdot 1}}{\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!}} = \frac{3\cdot 2}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X=2, Y=1) + \mathbb{P}(X=2, Y=0) + \mathbb{P}(X=1, Y=0) =$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{\frac{3\cdot 2!}{1\cdot 2!}\cdot 1}{\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!}} = \frac{3}{10}$$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{0}}{\binom{3}{1}} = \frac{1\cdot 1}{\frac{3\cdot 2!}{2!\cdot 1}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{3} + \frac{6}{10}\cdot\frac{2}{3} =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=0)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{7}{10}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$$

в) броят неуспехи до първия успех

$\mathbb{P}(B) = \frac{7}{10} \to \mathbb{E}(Ge(\frac{7}{10})) = \frac{10}{7}$

2.) $X_1, \dots, X_n$ са нез. сл. вел. със средно μ и дисперсия σ^2.

Изразете очакванията на:

а) $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ б) $s^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$

↳ по линейност на очакването

$$\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}X_i$$

↳ понеже всяко X_i има средно μ:

$$\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu = \mu$$

→ понеже са независими

$D[\overline{X}_n] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i$, понеже всички имат съща дисперсия σ^2 $\Rightarrow$

$$D\overline{X}_n = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\boxed{DcX = c^2 DX}$$

$$E[S^2] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2\right] =$$

разлагаме $(x_i - \overline{x}_n)^2$

$(x_i^2 - 2x_i\overline{x}_n + \overline{x}_n^2)$

обратно в сумата

$$E[S^2] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x_i\overline{x}_n + \overline{x}_n^2\right] =$$

използваме линейността на очакването

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E x_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E x_i\overline{x}_n + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\overline{x}_n^2 \; \text{=}$$

използваме формулата за дисперсия

$D x_i = E[x_i^2] - (E[x_i])^2$

$\Rightarrow \underline{\underline{E x_i^2}} = \underbrace{D x_i + (E x_i)^2}_{\text{дадени са ни в условието}} = \underline{\underline{\sigma^2 + \mu^2}}$

$\Rightarrow E x_i \overline{x}_n = E x_i \, E\overline{x}_n = \mu \cdot \mu = \underline{\underline{\mu^2}}$

$* \; E\overline{x}_n^2 = D\overline{x}_n + (E\overline{x}_n)^2 = \underline{\underline{\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2}}$

$$\textcircled{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2) - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right) =$$

$$= \frac{n(\sigma^2+\mu^2)}{n} - \frac{2n\mu^2}{n} + \frac{n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)}{n} =$$

$$= \sigma^2 + \cancel{\mu^2} - \cancel{2\mu^2} + \frac{\sigma^2}{n} + \cancel{\mu^2} = \underline{\underline{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n}}}$$

б) монета с вероятност p, за ези, се хвърля n пъти

E = „пада се ези при първо хвърляне"

F_k = „точно k пъти се пада тура"

търсим n и k, такива че $E \perp F_k$

$\Rightarrow P(E) = p \qquad P(F_k) = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$

$P(E \cap F_k) = p\cdot\binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$

$\rightarrow$ Търсим такива n и k, че:

$$p\cdot\binom{n}{k}\cancel{(1-p)^k}\cancel{p^{n-k}} = \cancel{p}\binom{n-1}{k}\cancel{(1-p)^k}\cancel{p^{n-k-1}}$$

$$p\cdot\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}$$

$$p\cdot\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!}$$

$$\rightarrow p = \frac{\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!}}{\frac{n!}{(n-k)!\,k!}} = \frac{(n-k)!\,(n-1)!}{(n-1-k)!\,n!} = \frac{n-k}{n}$$

$$p = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n}$$

→ Ако p е рационално, $1-p = \frac{r}{s}$, $r, s \in \mathbb{N}$

решения са всички $(k, n) = (l \cdot r, l \cdot s)$, $l \in \mathbb{N}$

и ако p е ирационално, не съществуват такива

(k, n) !!

Изпит СЕМ/ВИС 2023

$\boxed{1.}$

1. 3 честни монети и 3 стандартни зара

за всяко ези → 1лв.

за всяка шестица → по 3лв

очакваната печалба = ?

$X =$ „# езита" $\sim Bin(3, \frac{1}{2})$

$Y =$ „# шестици" $\sim Bin(3, \frac{1}{6})$

$\Rightarrow \mathbb{E}X = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \mathbb{E}X = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$\mathbb{E}Y = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{E}Y = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

очаквания от монетите

$\mathbb{E}[\text{обща печалба}] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3лв$

играч хвърля зар докато сумата от падналите се числа се дели на 6. Ако това се случи на k-ия ход печели k лв. Очакването?

$X =$ „# хвърляния до сума $\% 6 = 0$"

$X \sim Ge\left(\frac{1}{6}\right)$

$\mathbb{E}X = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

$$\frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = k-1)} = \frac{3}{k}, \quad \mathbb{E}X \text{ и } DX = ?$$

↳ нека означим с $p_k \to \mathbb{P}(X=k)$:

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{3}{k} \Rightarrow p_k = \frac{3}{k} p_{k-1}$$

↳ намираме израз за p_k рекурсивно

$$p_k = p_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{3}{k}, \text{ т.е. за } k \geq 1: \ p_k = p_0 \cdot \frac{3^k}{k!}$$

↳ трябва да намерим p_0, така че сумата от всички вероятности е 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_0 \cdot \frac{3^k}{k!} = 1 \Rightarrow \text{това е сумата на реда на експоненциалната ф-я}$$

$$p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} = p_0 \cdot e^3 = 1 \Rightarrow p_k = \frac{1}{e^3} \cdot \frac{3^k}{k!}$$

$$\Rightarrow X \sim Po(\lambda), \ \lambda = 3 \Rightarrow \mathbb{E}X = DX = 3$$

4) X = "# посетители от вход 1"

Y = "# посетители за целия ден (общ)" $\sim Poi(\lambda)$

↳ стадионът има 10 входа

↳ $\sim$, E и D на посетителите влезли през вход E_1?

↳ Тъй като всеки ~~играч~~ посетител избира вход с равна вероятност и изборът на всеки посетител е независим от изборите на другите посетители, броят посетители, които влизат през вход E_1, всъщност е с биномно разпределение с параметри Y и p, където $p = \frac{1}{10}$

↳ $X \mid Y \sim Bin(Y, \frac{1}{10})$

* Имаме че ако $Y \sim Poi(\lambda)$ и $X \mid Y \sim Bin(Y, p)$, тогава безусловното разпределение на X следва Поасоново разпределение с параметър λp

!

$\Rightarrow X_1 \sim Poi(\lambda \cdot \frac{1}{10}) = Poi(\frac{\lambda}{10})$

↳ $E[X_1] = DX_1 = \frac{\lambda}{10}$

$\boxed{2.}$ $n > 2$ човека хвърлят честна монета

↳ победител е този който хвърли обратното на всички останали, ако няма такъв хвърлят отново

a) $X =$ „# кръгове до излъчване на победител"

P_n(да има победител) $=$

P_n(1 хвърля ези и всички други тура) $+$

P(1 хвърля тура и всички други ези) $=$

$= 2 \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$, за $n \geq 3$

$\to X \sim Ge\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right) \Rightarrow EX = \frac{2^{n-1}}{n} = \frac{1}{p} n$

$DX = \frac{1-p}{p^2}$

↳ $P(\text{победител}_{\text{ези}}) = \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{2}^1 \cdot \frac{1}{2}^{n-1} = \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{2}^n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ → една опция пр. ези и $n-1$ тура

↳ същото е и за 1 тура и $n-1$ ези

$\Rightarrow P(\text{победител}) = 2 \cdot n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot n \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

$X \sim Ge\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)$

↳ $E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{2^{n-1}}{n}$

↳ $DX = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1 - \frac{n}{2^{n-1}}}{\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^2} \dots$

б) след първия победител играта продължава докато останат двама

↳ n – брой играчи в началото

X_1 – „# кръгове до първи победител"

$E[X_1] = \frac{2^{n-1}}{n}$

↳ след като е излъчен първият победител, броят на играчите намалява с 1 и имаме $n-1$ играчи.

$\Rightarrow E[X_2] = \frac{2^{(n-1)-1}}{n-1} = \frac{2^{n-2}}{n-1}$

... и така за всеки следващ, докато останат двама

Ако Y = „общ брой очаквани ходове до двама играчи"

$E[Y] = \sum_{k=2}^{n} E[X_{k-1}] = \sum_{k=2}^{n} \frac{2^{k-2}}{k-1}$, за удобство може да преномерираме сумата:

$E[Y] = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{k-1}}{k}$

↳ Печалба на първ победител $100(n-1)$

— || — втор $100(n-2)$

$\vdots$

$100(2-1) = 100$

обща печалба $= \sum_{k=1}^{n-1} 100(n-k) = 100 \sum_{k=1}^{n} (n-k)$ → ако заменим $(n-k)$ с i $\Rightarrow$

$E[\text{печалба}] = 100 \sum_{i=1}^{n-1} i = 100 \cdot \frac{(n-1)n}{2}$ → сумата от първите $n-1$ ест. числа

$\Rightarrow 50(n-1)n$ → обща $\Rightarrow$ за един играч $\frac{50(n-1)n}{n} = 50(n-1)$

1.4. Урна с $1, 2, \dots, n$ и теглим k пъти

$\mathbb{P}$(да видим в $\uparrow$ редица) = ? $\hookrightarrow X$

2024 / КН

a) без връщане

$\Omega = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_i$ са различни и са ест. числа между 1 и $n\}$

вероятността е равномерна

$A = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_i$ са различни и $a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$

$$\mathbb{P}(X) = \frac{|A|}{|\Omega|} \to \frac{\text{броя в } A}{\text{всички}} = \frac{\binom{n}{k} \cdot 1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \frac{1}{k!}$$

избираме от n числа k и умножаваме по 1

$n(n-1)\cdots(n-k+1)$ – избор за 1-во, 2-ро, k-то място

защото от всички разменивания (пермутации), само една редица може да е наредена

в) с връщане

$\Omega = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_i$ са между 1 и $n\} = [1, \dots, n]^k$

няма нужда да са наредени

$|\Omega| = n^k$

$A = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_1 \le a_2 \le \dots \le a_k\}$

Избираме набор от k числа от 1 до n, но може да има и повторения

$$\underset{\#1\text{-ци}}{x_1} + \underset{\#2\text{-ки}}{x_2} + \dots + \underset{\#n}{x_n} = k$$

като фиксираме колко числа са взети от всяко, ние пак имаме само една възможност, която ни върши работа

$$\Rightarrow \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} \overset{\text{отг.}}{\Rightarrow} \frac{\binom{n+k-1}{k} \cdot 1}{n^k}$$

15. $P(\#1 = \#6) = ?$

$= P(\#1 = \#6 = 0) + P(\#1 = \#6 = 1) + \dots + P(\#1 = \#6 = 5) =$

$$= \frac{4^{10}}{6^{10}} + \frac{2\cdot\binom{10}{2}\cdot 4^{8}}{6^{10}} + \frac{\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{2!\,2!}\cdot 4^{6}}{6^{10}} + \dots$$

останалите

за всяко едно хвърляне има 6 възможности

10 позиции къде да сложим 2 единици 2 шестици

22. 5 бели, 8 зелени и 7 червени топки

$P($бяла $<$ зелена$) = ?$

преди

а) с връщане

$\Omega = \{(a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in \{б, з, ч\}\}$

$A =$ "бяло преди зелено" $= \{б, чб, ччб, \dots, ч\dots чб\}$

$$P(A) = \frac{5}{5+8+7} + \frac{7}{20}\cdot\frac{5}{20} + \frac{7}{20}\cdot\frac{7}{20}\cdot\frac{5}{20} + \dots \left(\frac{7}{20}\right)^{k}\cdot\frac{5}{20} =$$

$$= \frac{5}{20}\cdot\left(1 + \frac{7}{20} + \left(\frac{7}{20}\right)^{2} + \dots\right) = \frac{5}{20}\cdot\frac{1}{1-\frac{7}{20}} = \frac{5}{20}\cdot\frac{20}{13} = \frac{5}{13}$$

формула за геометрична прогресия

* $1 + x + \dots + x^{n} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

защото x^{n+1} отива към безкрайност

за $|x| < 1 \to 1 + x + x^{2} + \dots = \frac{1}{1-x}$

б) без връщане

$$P(A) = \frac{5}{20} + \frac{7}{20}\cdot\frac{5}{19} + \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18} + \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{5}{17} + \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{17}\cdot\frac{5}{17} +$$

$$+ \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{17}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{5}{15} + \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{17}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{2}{15}\cdot\frac{5}{14} +$$

$$+ \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{17}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{14}\cdot\frac{5}{13} = \frac{5}{13}$$

и тук може да се доверим на симетрията

$$P(\bar{A}) = P(g) + P(rg) + P(rrg) \ldots$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \rightarrow$$

$\boxed{16}$ $A \cap B$

$A = \{$ посещавали > 1 годишно лекар $\} \Rightarrow 60\% = P(A)$

$B = \{$ посещавали хирург $\} = P(B) = 17\%$

$P(B|A) = 15\%$

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = ? \quad \rightarrow \quad P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{B}\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$P(\bar{B}\cap\bar{A}) = \overline{A\cup B} \Rightarrow 1 - 68\% = 32\%$$

$$\overline{A\cup B} = 1 - A\cup B$$

$$A\cup B = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B) = P(B|A)\,P(A) = 15\% \cdot 60\% = \frac{15}{100}\cdot\frac{60}{100} = \frac{9}{100} = 9\%$$

$$\rightarrow P(A\cup B) = 60\% + 17\% - 9\% = 68\%$$

$$\rightarrow \frac{1 - A\cup B}{P(\bar{A})} = \frac{32}{40\%} = \frac{4}{5} = 80\%$$

4.1. ези →

тура ←

P/ след 10 хвърляния да се намира:

а/ на мястото от където е тръгнал?

$X=0 \to$ да хвърлим равен брой езита и тури

$P(X=0) = P($5 езита и 5 тури$) = \binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$

б/ на разстояние 2 крачки от началната позиция

$P(X=2$ или $X=-2) = P\left(\begin{matrix}\text{6 ези и 4 тура}\\ \text{6 тури и 4 ези}\end{matrix}\right) =$

$= 2\cdot\binom{10}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$

в/ на 5 крачки пред началната си позиция

→ невъзможно събитие!

3.2. от числата от 1 до 10, по случаен начин се избират три числа без връщане.

X = „средно по големина от избраните 3"

а/ разпределението на X

X	2	3	4	5	6	7	8	9
P	$\frac{1\cdot 8}{\binom{10}{3}}$	$\frac{2\cdot 7}{\binom{10}{3}}$	$\frac{3\cdot 6}{\binom{10}{3}}$	$\frac{4\cdot 5}{\binom{10}{3}}$	$\frac{5\cdot 4}{\binom{10}{3}}$	$\frac{6\cdot 3}{\binom{10}{3}}$	$\frac{7\cdot 2}{\binom{10}{3}}$	$\frac{8\cdot 1}{\binom{10}{3}}$

б/ $P(X\geq 7) = ?$

$P(X\geq 7) = P(X\geq 7) + P(X\geq 8) + P(X\geq 9) =$

$= \frac{18}{\binom{10}{3}} + \frac{14}{\binom{10}{3}} + \frac{8}{\binom{10}{3}} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$

в) $P\{3 \le X < 7\} = ?$

$P(3 \le X < 7) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) =$

$= \frac{14+18+20+20}{120} = \frac{72}{120} = \frac{4}{5}$

г) $P(|X-2| < 2) = ?$

$P(|X-2|<2) = P(\cancel{0} < X < 4) = P(X=2) + P(X=3) =$

$= \frac{8+14}{120} = \frac{22}{120} = \frac{11}{60}$

д) $Y := (X-5)^2$, $P(Y) = ?$

X	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	9	4	1	0	1	4	9	16

Y	0	1	4	9	16
P(Y)	$\frac{20}{\binom{10}{3}}$	$\frac{18+20}{\binom{10}{3}}$	$\frac{14+18}{\binom{10}{3}}$	$\frac{14+8}{\binom{10}{3}}$	$\frac{8}{\binom{10}{3}}$

$\boxed{40}$ 5лв → 2 зара

2-6ци → 100лв. – печели 95

1-6ца → 5лв. – печели 0 , нито една 6ца – губи 5лв.

$E(\text{печалба}) = ?$

X = „#6ци"

X	0	1	2
печалба	-5	0	95
$P_{\text{печалба}}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$

$E(\text{печалба}) = 95 \cdot \frac{1}{36} + 0 \cdot \frac{10}{36} + (-5) \cdot \frac{25}{36} = \frac{95}{36} - \frac{125}{36} = -\frac{30}{36} = -\frac{5}{6}$

→ играта е справедлива ако очакването е 0

3.5. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ с равно вероятной $\to p = \frac{1}{n}$

$\mathbb{E}[X] = ?$

$Var(X) = ?$

a) $x_i = \frac{i-1}{n-1}, \quad i = 1, \dots, n$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} j =$$

$$= \frac{1}{n(\cancel{n-1})} \cdot \frac{\cancel{(n-1)}(\cancel{n-1+1})}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{\cancel{n}(n-1)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{(n-1)}(\cancel{n-1+1})(2(n-1)+1)}{6} =$$

$$= \frac{2n-2+1}{(n-1)6} = \frac{2n-1}{6(n-1)}$$

$$\to Var(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2n-1}{6(n-1)} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2n-1}{6(n-1)} - \frac{1}{4}$$

δ) $x_i = a + (b-a)\cdot\frac{i-1}{n-1} \rightarrow X = \frac{i-1}{n-1}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) = a + (b-a)\mathbb{E}X$$

$$\mathbb{E}[X] = a + (b-a)\cdot\mathbb{E}X = a + (b-a)\cdot\frac{1}{2} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = a + (b-a)\cdot\mathbb{E}X^2 = a + (b-a)\cdot\frac{2n-1}{6(n-1)} =$$

$$= a + \frac{(2n-1)(b-a)}{6(n-1)} = a + \frac{2nb - 2na - b + a}{6(n-1)} = \frac{a\cdot 6(n-1) + 2nb - 2na \ldots}{6(n-1)}$$

$$(2n-1)(b-a) =$$

$$\frac{2nb - 2na - b + a}{6(n-1)}$$

$a\cdot 6(n-1)$

$a\cdot(6n-6)$

$6na - 6a$

$$= \frac{6na - 6a + 2nb - 2na - b + a}{6(n-1)} = \frac{4na + 2nb - 5a + b}{6(n-1)}$$

~~$b(2n-1) - a(4n+5)$~~

???

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2\,\frac{n+1}{12(n-1)}$$

58. 3 бели и 2 черни топки

X – номерът на теглене на първата бяла топка

Y – номерът на опита на теглене на първата черна топка след първата бяла

ако няма такава, Y = 6

а) съвместното разпределение на X и Y

Y\X	1	2	3	
2	$\frac{3}{10}$	0	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{10}$
5	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
6	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	

$P(X=1, Y=2) = (б, ч) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P(X=1, Y=3) = (б, б, ч) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{10}$

$P(X=1, Y=4) = (б, б, б, ч) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{10}$

$P(X=1, Y=5) = (б, б, б, б, ч) = 0$

$P(X=2, Y=2) = 0$

$P(X=2, Y=3) = (ч, б, ч) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$

$P(X=2, Y=4) = (ч, б, б, ч) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

$P(X=2, Y=5) = (ч, б, б, б, ч) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{10}$

б) $P(Y > 2 \mid X = 1) = \frac{P(Y=3, X=1) + P(Y=4, X=1)}{\underbrace{\frac{6}{10}}_{P(X=1)}} = \frac{\frac{2}{10} + \frac{1}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(Y = 3 \mid X < 3) = P(Y=3 \mid X=1) + P(Y=3 \mid X=2) = \frac{\frac{2}{10} + \frac{1}{10}}{\underbrace{\frac{3}{10} + \frac{6}{10}}_{P(X<3)}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

в) Независими ли са?

$P(X=3, Y=2) = 0 \overset{?}{\neq} P(X=3)\,P(Y=2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{100}$

⇒ не са независими

44. A х въргя 3 монети
B х въргя 2

Ще печели този който вземе повече езита
В случай на равен брой, печели B

P(A да спечели) = ?

X = "# езита на A" $\sim Bin(3, \frac{1}{2})$

Y = "# езита на B" $\sim Bin(2, \frac{1}{2})$

Y\X	0	1	2	3
0	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$
1	$\frac{3}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{2}{32}$
2	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

→ б)

X > Y

Y	0	1	2
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

X	0	1	2	3
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$X \sim Bin(3, \frac{1}{2})$

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$P(X=0) = \binom{3}{0} \frac{1}{2}^0 \frac{1}{2}^3 = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = \binom{3}{1} \frac{1}{2}^1 \frac{1}{2}^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = \binom{3}{2} \frac{1}{2}^2 \frac{1}{2}^1 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$\binom{3}{0} = \frac{3!}{3!\,0!} = 1$

$\binom{3}{1} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!\,1!} = 3$

$\binom{3}{2} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{3 \cdot 2!}{1!\,2!} = 3$

$\binom{3}{3} = \frac{3!}{0!\,3!} = 1$

$P(A$ да спечели$) = ?$

$$P(X > Y) = \frac{3+3+1+6+2+1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \rightarrow A \text{ да спечели}$$

$$P(Y = 1 \mid X > Y) = ? = \frac{P(Y=1 \cap X>Y)}{P(X>Y)} = \frac{\frac{6}{32} + \frac{2}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{8}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{16} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$E[A] =$

A	2	-3
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E[A] = 2 \cdot \frac{1}{2} + (-3) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$E[B] = \frac{1}{2}$$

↳ zero sum game

печалба на A + печалба B = 0

3.11

X	-1	1
P_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	1	3	5
P_Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

E и Var и ~ ?

a) $2X + Y + 1$

$$E[X] = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$E[X^2] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 1 - 0 = 1$$

$$E[Y^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{2+9+25}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = 9 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 9 - \frac{25}{4} = \frac{36-25}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\mathbb{E}[2X+Y+1] = 2\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y + 1 = 2\cdot 0 + \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$$

$$D[2X+Y+1] = 2DX + DY + \underset{0}{1} = 2\cdot 1 + \frac{11}{4} + 0 = 2 + \frac{11}{4} = \frac{8+11}{4} = \frac{19}{4}$$

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y = 0\cdot\frac{5}{2} = 0$$

$$DXY = \mathbb{E}[(XY)^2] - \left(\mathbb{E}(XY)\right)^2 = \mathbb{E}X^2\,\mathbb{E}Y^2 - 0 = 1\cdot 9 - 0 = 9$$

$\boxed{50}$ 5 бели и 3 ~~бел~~ черни

X = „# изтеглени черни топки"

а) без връщане

X	0	1	2	3
	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}$

$$\mathbb{E}X = 0\cdot\frac{5}{8} + 1\cdot\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\right) + 2\cdot\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\right) + 3\cdot\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}\right) =$$

$$= 0 + \frac{15}{56} + 2\cdot\frac{5}{56} + 3\cdot\frac{1}{56} = \frac{15+10+3}{56} = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{15}{56} + \frac{20}{56} + \frac{9}{56} = \frac{44}{56}$$

$$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{44}{56} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{44}{56} - \frac{1}{4} = \frac{44-14}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

б) с връщане

↳ брой неуспехи до първи успех

$X \sim Ge(p)$

$$\mathbb{E}X = \frac{q}{p} = \frac{1-\frac{5}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$$

$$DX = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{3}{8}}{\left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{25}{64}} = \frac{3\cdot 8}{25} = \frac{24}{25}$$

↳ Нека $Y_1, \dots, Y_{1000}$ са сл. вел. бр. изтеглени черни топки при 1000 независими опита

$$\mathbb{E}X = 1000 \cdot \mathbb{E}X_1 = \begin{cases} 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500 & \text{за а)} \\ 1000 \cdot \frac{3}{5} = 600 & \text{за б)} \end{cases}$$

$$DX = 1000 \cdot DX_1 = \begin{cases} 1000 \cdot \frac{15}{28} = 535{,}71 \\ 1000 \cdot \frac{24}{25} = 960 \end{cases}$$

↳ $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i > 900\right) = \frac{\mathbb{E}X}{900} = \frac{500}{900} = \frac{5}{9}$ → от Марков, не дава много добър резултат

→ Чебишев

↳ $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{1000} x_i - \mathbb{E}\sum_{i=1}^{1000} x_i\right| > 900-500\right) \le \frac{540}{400^2} \approx 0{,}0034$

↳ $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{1000} x_i - \mathbb{E}\sum_{i=1}^{1000} x_i\right| > 900-600\right) \le \frac{960}{300^2} \approx 0{,}01$

49. X = „сумата от падналите се точки"

$\mathbb{E}, D, \sigma \to ?$

а) заровете са правилни

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\sim$

$$\mathbb{E}X = (2+12)\cdot\frac{1}{36} + (3+11)\cdot\frac{2}{36} + (4+10)\cdot\frac{3}{36} + (5+9)\cdot\frac{4}{36} + (6+8)\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} =$$

$$= 14\cdot\frac{1}{36} + 14\cdot\frac{2}{36} + 14\cdot\frac{3}{36} + 14\cdot\frac{4}{36} + 14\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} = 7$$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(Y_1+Y_2) = \mathbb{E}Y_1 + \mathbb{E}Y_2 \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbb{E}X_1 = 3{,}5 \\ \mathbb{E}Y_2 = 3{,}5 \end{array}$$

↳ понеже са независими и тяхната дисперсия е сума

$$DY_1 = DY_2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} i^2}{6} - (3{,}5)^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$DX = DX_1 + DX_2 = 2 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$$

3.15.

$Y \backslash X$	-1	0	1	
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$
	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	

а) маргинальные на X и Y

б) $E[X]$, $E[Y]$, $Var(X)$, $Var(Y)$ =?

$$E[X] = -1 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{5}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} = -\frac{3}{10} + \frac{2}{10} = -\frac{1}{10}$$

$$E[X^2] = (-1)^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{2}{10} = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10}$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{5}{10} - \left(-\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{5}{10} - \frac{1}{100} = \frac{50-1}{100} = \frac{49}{100}$$

$$E[Y] = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{10}$$

$$E[Y^2] = \frac{7}{10}$$

$$Var(Y) = (EY^2) - (EY)^2 = \frac{7}{10} - \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{7}{10} - \frac{49}{100} = \frac{70-49}{100} = \frac{21}{100}$$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - EX\,EY$$

$$E[XY] = \underbrace{\cancel{\left(0 \cdot -1 \cdot \frac{1}{10}\right)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\left(0 \cdot 0 \cdot \frac{2}{10}\right)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{(0 \cdot 1 \cdot 0)}}_{=0} + \left(1 \cdot (-1) \cdot \frac{2}{10}\right) + \underbrace{1 \cdot 0 \cdot \frac{3}{10}}_{\to 0} +$$

$$1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{10} = -\frac{2}{10} + \frac{2}{10} = 0 \checkmark$$

$$Cov(X,Y) = 0 - \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \frac{7}{10} = 0 - -\frac{7}{100} = \frac{7}{100}$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX\,DY}} = \frac{\frac{7}{100}}{\sqrt{\frac{49}{100}}\sqrt{\frac{21}{100}}} = \frac{\frac{7}{100}}{\frac{7}{10}\,\frac{\sqrt{21}}{10}} = \frac{7}{7\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}} = \cancel{\frac{\sqrt{21}}{21}}$$

г) $X \perp\!\!\!\perp Y = ?$

$$\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1)$$

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{100} \neq \frac{2}{10}$$

$\rightarrow$ не са независими

д) $Z = X + 2Y$, $\mathbb{E}[Z]$; $DZ = ?$

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}X + 2 \cdot \mathbb{E}Y = -\frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{7}{10} = -\frac{1}{10} + \frac{14}{10} = \frac{15}{10}$$

$$DZ = DX + 2^2 DY + 2 \cdot 2\, Cov(X,Y) =$$

$$= \frac{49}{100} + 4 \cdot \frac{21}{100} + 4 \cdot \frac{7}{100} =$$

$$= \frac{49}{100} + \frac{84}{100} + \frac{28}{100} = \frac{161}{100}$$

3.16. Хвърляме 2 пъти монета

$X = \#$ ези

$Y = \#$ тури

$\rho_{X,Y} = ?$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX\,DY}}$$

$$Y = 2 - X$$

Понеже $X + Y = 2 \Rightarrow Cov(X,Y) = Cov(X, 2-X$???

$Y \sim Bin(2, \frac{1}{2})$

3.17 правилен зар се хвърля n пъти

X = „сумата от първите n-1 хвърляния"

Y = „сумата от последните n-1 хвърляния"

$Cor(X,Y) = ?$

$$Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX\,DY}}$$

Са X_i, са точките на i-тия зар

$X_1, \dots, X_n$ са i.i.d

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i = X_1 + Z$$

?

$$Y = \sum_{i=2}^{n} X_i = X_n + Z$$

$$Z = \sum_{i=2}^{n-1} X_i$$

Условно очакване

61. 4 пъти последователно се хвърля монета

X = „# езита, паднали се при първите 3 хвърляния"

Y = „# езита от последните 2 хвърляния"

а) съвместното разпределение

$y \backslash x$	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{4}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{8}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$
	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{2}{16}$	

всички възможни изходи са $2^4 = 16$

1,1 → TTET
ETTE
TETE
TTEE
EETT

2,1 → ETET
TEET
EETE

EEEE
EEEE

T EEE
ETEE

) $X|Y$

$Y|X$

AAAA

X	0	1	2	3
$P\,X|Y=0$	1/4	1/2	1/4	0
$P\,X|Y=1$	1/8	3/8	3/8	1/8
$P\,X|Y=2$	0	1/4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

→ делиме стойността от съвместното на маргиналния за Y на съответния ред

Y	0	1	2
$P\,Y|X=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$P\,Y|X=1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$P\,Y|X=2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$P\,Y|X=3$	0	1/2	1/2

$$\frac{\frac{2}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{2}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{2}{16}} = \frac{1}{2}$$

в) $P(X=Y)$

$P(X>1|Y=1)$

$P(X+Y>2|X=2)$

$P(X=Y) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$P(X>1|Y=1) = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{2}$

$P(X+Y>2|X=2) = \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{5}{16}$

г) разпределенията на $E[X|Y]$

$E[X\|Y]$	1	1,5	2
P	1/4	1/2	1/4

$\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + 3\cdot 0 =$

$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + 0 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$\frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot 1 + \frac{3}{8}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 =$

$= 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5$

$0\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3 =$

$= 0 + \frac{1}{4} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{2}{2} = 2$

$E[Y\|X]$	1/2	5/6	7/6	3/2
	1/8	3/8	3/8	1/8

$\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 + 0 = 0,5$

$0 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

$0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}$

$0 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$

3.19.

Y\X	-1	0	4	
2	1/5	1/10	1/10	4/10
5	1/10	3/10	1/5	6/10
	3/10	4/10	3/10	

$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{2+1}{10}=\frac{3}{10}$

а) условните разпределения на $X|Y$ и $Y|X$

X	-1	0	4
P|X|Y=2	1/2	1/4	1/4
P|X|Y=5	1/6	1/2	1/3

$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{10}}=\frac{1\cdot 10}{5\cdot 4}=\frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}}=\frac{1}{4}$ $\qquad \frac{\frac{1}{5}}{\frac{6}{10}}=\frac{10}{6\cdot 5}=\frac{1}{3}$

$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{6}{10}}=\frac{1}{6}$ $\qquad \frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Y	2	5
P|Y|X=-1	2/3	1/3
P|Y|X=0	1/4	3/4
P|Y|X=4	1/3	2/3

$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}}=\frac{10}{5\cdot 3}=\frac{2}{3}$

$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$

б) разпределението на $E[X|Y]$ и $E[Y|X]$

E[X|Y]	1/2	7/6
	4/10	6/10

гледаме од горната таблица за условните разпределения

$-1\cdot\frac{1}{2}+0+4\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{4}{4}=-\frac{2}{4}+\frac{4}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$-1\cdot\frac{1}{6}+0+4\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}+\frac{8}{6}=\frac{7}{6}$

E[Y|X]	3	17/4	4
	3/10	4/10	3/10

$\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{9}{3}=3$

$\frac{2}{4}+\frac{15}{4}=\frac{17}{4}$

$\frac{2}{3}+\frac{10}{3}=\frac{12}{3}=4$

3.21. Ако сумите в плика са x и $2x$ лв., то очакваната печалба преди да започне играта е $1{,}5x$ лв.

!

Y = „избрали сме плика с по-голяма сума на първа стъпка", като $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=0) = 0{,}5$ или $1/2$

$x \cdot \frac{1}{2} + 2x \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{2} + x = \frac{3x}{2}$

X = „очакваната печалба при смяна на писмата"

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X|Y=1]\,\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{E}[X|Y=0]\,\mathbb{P}(Y=0) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{3x}{2}$$

$\Rightarrow$ Няма промяна на очакваната печалба и при смяна и без смяна на плика!!

Функция на разпределение

3.24. $X_1, \dots, X_n$ са i.i.d

$X_{max} := \max\{X_1, \dots, X_n\}$

$X_{min} := \min\{X_1, \dots, X_n\}$

Изразете: $F_{X_{max}}$ и $F_{X_{min}}$ през F_{X_1}

$$F_{X_{max}}(x) = \mathbb{P}(X_{max} \le x) =$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \le x, \dots, X_n \le x) = \mathbb{P}(X_1 \le x)\,\mathbb{P}(X_2 \le x) \dots \mathbb{P}(X_n \le x) =$$

$$= \left(\mathbb{P}(X_1 \le x)\right)^n$$

$$F_{X_{min}}(x) = \mathbb{P}(X_{min} \le x) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_{min} > x) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)^n = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n$$

$\boxed{3.25}$

X е сл. вел. с пораждаща ф-я $g(x) = \dfrac{s}{4-3s}$

$\mathbb{E}[X] = ?$

↳ $\mathbb{E}[X] = g'(x)(1)$

$\rightarrow g_X(s) = \dfrac{s}{4-3s}$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

$u = s$
$v = 4-3s$ $\Rightarrow g'_X(s) = \dfrac{1(4-3s) - (s)(-3)}{(4-3s)^2} =$

$$= \frac{4 - \cancel{3s} + \cancel{3s}}{(4-3s)^2} = \frac{4}{(4-3s)^2}\Bigg|_{s=1} \Rightarrow$$

$$= \frac{4}{(4-3)^2} = \frac{4}{1^2} = \underline{\underline{4}}$$

$Var(X) = ?$

$$DX = G''(X)(1) + G'(X)(1) - (G'_X(1))^2$$

$g'_X(s) = \dfrac{4}{(4-3s)^2}$ → първата производна

$$\boxed{\left((4-3s)^2\right)' = 2\cdot(4-3s)\cdot(-3) = -6(4-3s)}$$

↳ сега намираме втората:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{4}{(4-3s)^2}\right) = \frac{0\cdot(4-3s)^2 - 4(-6(4-3s))}{(4-3s)^4} = \frac{24\cancel{(4-3s)}}{(4-3s)^{\cancel{4}}} =$$

$$= \frac{24}{(4-3s)^3}\Bigg|_{s=1} \Rightarrow \frac{24}{(4-3)^3} = \frac{24}{1^3} = \underline{\underline{24}}$$

$DX = 24 + 4 - 4^2 = 24 + 4 - 16 = \underline{\underline{12}}$

→ $\mathbb{P}(X=1)$

↳ използваме геометричната редица, за да разширим израза:

→ геометрични прогресия

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ за } |x|<1$$

↳ преобразуваме пораждащата ф-я в подходящ вид:

$$g_X(s) = \frac{s}{4-3s} = \frac{s}{4\left(1-\frac{3s}{4}\right)} = \frac{s}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{3s}{4}}$$

↳ използваме геометричната редица

$$\frac{1}{1-\frac{3s}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3s}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n s^n}{4^n}$$

$$\Rightarrow \frac{s}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n s^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n s^{n+1}}{4^{n+1}}$$

↳ може да пренапишем сумата да започва от $n=1$:

$$\boxed{g_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} s^n}{4^n}}$$ ⇒ коефициентът пред s^1 в разширението е $\mathbb{P}(X=1)$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=1) = \frac{3^{1-1}}{4^1} = \frac{3^0}{4} = \frac{1}{4}$$

→ $\mathbb{P}(X=2)$

↳ използваме, степенното разширение на $g_X(s)$, което вече ~~преобразувахме~~ в ред на Тейлор:

$$\boxed{g_X(s) = \sum_{n=1}^{n} \frac{3^{n-1} s^n}{4^n}}$$, за $\mathbb{P}(X=2)$ трябва да намерим коефициента преди s^2

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=2) = \frac{3^{2-1}}{4^2} = \frac{3^1}{16} = \frac{3}{16}$$

48.

$P(H_0) = 1/2$

$P(H_1) = 1/2$

$H_0: p_0 = 1/2$

$H_1: p_1 = 2/3$

A = „събитието от 200 бернулиеви опита (с вероятност за успех p) да имаме 120 успеха"

$P(H_0|A)$
$P(H_1|A)$ } → това са двата апостериорни вероятности, които искаме да сметнем

$$P(H_0|A) = \frac{P(H_0 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_0)\,P(H_0)}{P(A|H_0)\,P(H_0) + P(A|H_1)\,P(H_1)} =$$

$$= \frac{1}{P(A|H_0)\,P(H_0) + P(A|H_1)\,P(H_1)} \cdot \binom{200}{120} \cdot \frac{1^{120}}{2^{200}}$$

$$P(H_1|A) = \frac{1}{P(A|H_0)\,P(H_0) + P(A|H_1)\,P(H_1)} \cdot \binom{200}{120} \cdot \frac{2^{120}}{3^{200}}$$

$\Rightarrow P(H_1|A) > P(H_0|A)$

→ Дискретни разпределения

→ Memoryless

$$P(X \geq m+k \mid X \geq k) = P(X \geq m) = q^m$$

$P(X \geq k) = q^k$

$$\rightarrow P(X \geq m+k \mid X \geq k) = \frac{P(X \geq m+k ; X \geq k)}{P(X \geq k)} = \frac{P(X \geq m+k)}{P(X \geq k)} =$$

$$= \frac{q^{m+k}}{q^k} = q^m = P(X \geq m)$$

$\boxed{3.27}$ $X_1 \sim Bin(n_1, p)$

$X_2 \sim Bin(n_2, p)$

$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

$\sim$ на $X = X_1 + X_2$

$$P(X_1+X_2=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X_1+X_2=k, X_1=i) = \sum_{i=0}^{k} P(X_2=k-i \mid X_1=i) P(X_1=i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X_2=k-i) P(X_1=i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} q^{n_2-(k-i)} \cdot \binom{n_1}{i} \cdot p^i \cdot q^{n_1-i} =$$

$$= p^k q^{n_1+n_2-k} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}}_{\binom{n_1+n_2}{k}} \Rightarrow X_1+X_2 \sim Bin(n_1+n_2, p)$$

↳ или с пораждащи функции

$$g_{X_1+X_2}(s) = g_{X_1}(s) \cdot g_{X_2}(s) = (q+sp)^{n_1} (q+sp)^{n_2} = (q+sp)^{n_1+n_2}$$

↓ пораждащата ф-я на $Bin(n_1+n_2, p)$

3.29 $N \sim Bin(M, q)$

$X | N = n \sim Bin(n, p)$, $n = 0, 1, \dots, M \to P(X = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$X \sim ?$

$P(X = k) = ?$

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{M} P(X = k | N = n)\, P(N = n) =$$

$$\cancel{= \sum_{n=k}^{M} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \binom{M}{n} q^n p^{M-n} =}$$

$$\cancel{= p^k q^k \sum_{n=k}^{M} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot \frac{M!}{(M-n)!\,n!}}$$

понеже сме извадили q^k пред скоби остава q^{n-k}

$$= \sum_{n=k}^{M} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{M}{n} q^n (1-q)^{M-n} =$$

$$= p^k q^k \sum_{n=k}^{M} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot \frac{M!}{(M-n)!\,n!} \left((1-p)q\right)^{n-k} (1-q)^{M-n} \cancel{(M-k)!} =$$

$$= \binom{M}{k} p^k q^k \sum_{i=0}^{M-k}$$

$$g_X(s) = E[s^X] = E[E[s^X | N]] = \sum_{n=0}^{M} E[s^X | N = n] \cdot P(N = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{M} (sp + (1-p))^n \cdot \binom{M}{n} q^n (1-q)^{M-n} =$$

$$= \left((sp + (1-p))q + (1-q)\right)^M = \left(spq + (1-pq)\right)^M =$$

$$\sim Bin(M, pq)$$

$\boxed{3.29.}$ $N \sim Bin(M, q)$ $X|Y$, $Y \sim Poi(\lambda)$?,

$X|N=n \sim Bin(n,p)$

$X \sim$?.

$\hookrightarrow P(X=k \mid N=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$P(X=k) = ?$

$$g_X(s) = E[s^X] = E[E[s^X|N]] = \sum_{n=0}^{M} E[s^X|N=n] \cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{M} (sp+(1-p))^n \cdot \binom{M}{n} q^n (1-q)^{M-n} =$$

$$= (sp+(1-p)q)^n + (1-q)^{M-n} = ((sp+(1-p)q)+(1-q))^M =$$

$$= (spq + (1-pq))^M \sim Bin(M, pq)$$

55. A и B стрелят едновременно по мишена

A с $p = 0,2$

B с $p = 0,3$

а) $\mathbb{P}$(A да улучи, а B не) = ?

б) среден брой изстрели ?

X_k = " A улучва на k-ия ход"

$X_k \sim Ge(0,2)$

Y_k = # неуспехи на B за k хода"

A_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ → събитията в които A успява да улучи за първи път а B не

$A_k = \{X = k-1, Y = k\} = \{X = k-1\} \cap \{Y = k\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k-1)\,\mathbb{P}(Y = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{0,2}_{\text{успех на A}} \cdot \underbrace{(0,8)^{k-1}}_{\text{неуспехи на A}} \cdot \underbrace{(0,7)^{k}}_{\text{k неуспехи на B}}$$

→ Вероятността за неуспех, при един опит : $0,8 \cdot 0,7 = \underline{0,56}$

Нека Z = " # неуспехи до първи успех"

$Z \sim Ge(0,44)$ → $\mathbb{E}Z = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,44} = 2,27$

$\mathbb{E}2Z = 2 \cdot \mathbb{E}Z = 2 \cdot 2,27 = \underline{4,54}$

3.31. $X \sim Ge(p)$

$Y \sim Ge(p)$

$X \perp\!\!\!\perp Y$

а) $\min\{X,Y\}$ б) $\max\{X,Y\}$

а) $$P(\min\{X,Y\} \ge k) = P(X \ge k, Y \ge k) =$$

$$= (1-p)^k (1-p)^k = (1-p-p+p^2)^k = (1-(2p-p^2))^k \sim$$

$$\min\{X,Y\} \sim Ge(2p-p^2)$$

б) $$P(\max\{X,Y\} < k) = P(X < k, Y < k) =$$

$$= (1 - P(X \ge k))(1 - P(Y \ge k)) =$$

$$= (1-(1-p)^k)(1-(1-p)^k) =$$

$$= 1 - (1-p)^k - (1-p)^k + (1-p)^{2k} =$$

$$= 1 - 2(1-p)^k + (1-p)^{2k} = \to$$

$$= (1-(1-p)^k) + (1-p)^{2k} = (1-(1-p)^k)^2$$

52. 7 лампи, от които 3 дефектни
по случаен начин избираме 4
X = „брой на изпробвани дефектни лампи"
$\mathbb{E}X = ?$

$N = 7$
$M = 3$
$n = 4$

$X \sim HG(M, N, n)$
$X \sim HG(3, 7, 4)$

$\mathbb{E}X = n \cdot \frac{M}{N} = 4 \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{7}$

$DX = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} = 4 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7-3}{7} \cdot \frac{7-4}{7-1} =$

$= \frac{\cancel{12}^{2}}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{\cancel{6}} = \frac{24}{49}$

3.36. 52 карти, теглим случайно 13 от тях
вероятността 2 да бъдат червени, ако
а) теглим с връщане
б) теглим без връщане

X = „# изтеглени червени карти"

$X \sim Bin(13, 1/2) \Rightarrow \mathbb{P}(X=2) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

$= \binom{13}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{11! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^{11}} =$

$= \frac{78}{4 \cdot 2048} = \frac{78}{8192} \approx 0{,}01$

б) $X \sim HG(M, N, n) = HG(26, 52, 13)$

$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{26}{2}\binom{26}{11}}{\binom{52}{13}} \approx 0{,}004$

3.37.

$X_1 \sim Po(\lambda_1)$

$X_2 \sim Po(\lambda_2)$

$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

$X = X_1 + X_2$, $\mathbb{P}(X=k) = ?$

↳ $g_{X_1+X_2}(s) = g_{X_1}(s) g_{X_2}(s) = e^{\lambda_1(s-1)} e^{\lambda_2(s-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)} \sim Po(\lambda_1+\lambda_2)$

↳ $\mathbb{P}(X_1+X_2=k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X_2=k-i, X_1=i) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X_2=k-i)\mathbb{P}(X_1=i) =$

$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_2^{k-i} e^{-\lambda_2}}{(k-i)!} \cdot \frac{\lambda_1^{i} e^{-\lambda_1}}{i!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^{i} \lambda_2^{k-i} =$

$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$

$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} (\lambda_1+\lambda_2)^k \sim Po(\lambda_1+\lambda_2)$

! ↳ Ако смятаме с $\mathbb{P}(X=k)$, и резултатът трябва да ни бъде някоя ф-я на разпределение

! ↳ Ако смятаме с пораждащата и резултатът трябва да ни бъде пораждаща

42. 2 зара се хвърлят последователно 5 пъти

X = „# хвърляния, при които сумата е 6"

$\mathbb{P}(X=2)=?$

$\mathbb{E}X=?$

$$X \sim Bin\left(5, \frac{5}{36}\right)$$

1+5
2+4
3+3
4+2
5+1

$\frac{5}{36}=p$

$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=\binom{5}{2}\left(\frac{5}{36}\right)^2\left(\frac{31}{36}\right)^3=$$

$$=\frac{5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot\cancel{2!}}\cdot\frac{25}{1296}\cdot\frac{29791}{46656}=$$

$$=\frac{7447750}{60466176}\approx 0{,}123$$

$$EX=n\cdot p\cdot q=5\cdot\frac{5}{36}=\frac{25}{36}$$

53. X = „# слаби земетресения на месец"

$\mathbb{E}X=2$, $\lambda=2$

$$\mathbb{P}(X_1+X_2+X_3<4)=\mathbb{P}(Po(6)<4)=\sum_{i=0}^{3}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$

$$=\sum_{i=0}^{3}\frac{6^k}{k!}e^{-6}$$