Комбинаторика

1. $$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \dots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

2. а) k различни елемента от M

↳ комбинация, защото не се интересуваме от подредбата

$\binom{n}{k}$ → от n избираме k елемента

↳ $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

б) k-орка от различни елементи на M, $a_i \neq a_j$

↳ редът има значение

↳ вариации без повторение

$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

в) k-орка от елементи на M

↳ редът има значение, но могат да се повтарят

↳ вариации с повторение

$V(n;k) = n^k$

3. а) $x_1, \dots, x_n$ са цели числа

$\binom{n-1}{k-1}$ решения ⇒ от n-1 позиции за преградите избираме k-1

↳ комбинации

б) $\binom{n+k-1}{k-1}$

а) всяка кнопка най-много една гасител

↳ първата гасителка има n възможности, втората $n-1$, k-тата $n-k+1$

⇒ Вариации без повторение

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

б) ↳ За първата имаме n възможности, за втората n и т.н.

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{k} = n^k$$ → Вариации с повторение

в) k гасители, n кнопки } различни

↳ Ако $k < n$ → не е възможно

↳ Нека $k \geq n$

$A_i = \{i\text{-тата кнопка е празна}\}$

$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{$поне една кнопка е празна$\}$

↳ $|$# всички конфигурации$| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$

$n^k - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$ → от пр. вкл. и изкл.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |A_1| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_{n-1} \cap A_n| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

$|A_1| = (n-1)^k$ – първата кнопка е забранена

$|A_1 \cap A_2| = (n-2)^k$ – и първата и втората са забранени и т.н.

$$\Rightarrow \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} (n-m)^k (-1)^{m-1}$$

$\rightarrow |V(n;k) \setminus A| = n^k - |A|$ ...

↳ Когато имаме неразличими

а) $\binom{n}{k}$ → избираме в кои k клетки да сложим гайчиците

↳ Комбинации без повторения $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

б) ? колко слагаме във всяка от тях ?

↳ $n+k$ звезди

$n-1$ прегради → $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{k}$

в) $\binom{k-n+n-1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1} = C_{k-1}^{n-1}$

$\boxed{5.}$ а) не се допуска повторение на цифри 1, 2, 3, 4, 5

↳ за първото число имаме 5 опции, за второто - 1 мин.

$\Rightarrow 5\times4\times3\times2 = |V_5^4| = \dfrac{5!}{(5-4)!} = 5! = 120$

↳ вариации без повторение

б) допуска се повторение

↳ $5\times5\times5\times5 = V(5;4) = 5^4$

↳ вариации с повторение

в) не се допуска повторения и числото е нечетно

↳ за числото да е нечетно на последна позиция трябва да има едно от числата (1, 3, 5) → които са 3 на брой

⇒ за другите 3 позиции остават 4 числа

$\Rightarrow 3\cdot V_4^3 = 3\cdot4\cdot3\cdot2 = 72$

↳ $\frac{3}{5}$ от 120

$\boxed{6}$ 4 члена от 12 кандидати

а) няма ограничение за участие

↳ комбинации без повторение

$$C_{12}^{4} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{(12-4)!\,4!} = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{2\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}\,\cancel{8!}} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{2} = 11\cdot 5\cdot 9 = 495$$

б) A и B не трябва да участват заедно

↳ от броя на всички възможности изваждаме възможностите
в които A и B са заедно

$$\binom{12}{4} - \binom{10}{2} = 495 - 45 = 450$$

↳ може и $\binom{10}{4} + 2\binom{10}{3}$

в) C и D могат да участват само заедно

↳ от всички изваждаме тези в които C и D не са
заедно

$$\binom{12}{4} - 2\binom{10}{3}$$

↳ или може и $\binom{10}{4} + \binom{10}{2} = 255$

$\boxed{7}$ а) A е празна — 5 различни топки в 3 различни кутии A, B, C

↳ или ще отиде в B или в C $\Rightarrow 2^5 = 32$

б) само A е празна

$$2^5 - 2 = 30$$

в) точно една кутия е празна

$3\cdot(2^5-2) = 90$ → или A е празна или B или C г) поне една кутия е празна

↳ поне 1 = точно 1 + точно 2 + 3 → всички са в една кутия
или 1 празна; или 2 празни

→ $3 \cdot (2^5 - 2) + |$две празни кутии$| = 90 + \binom{3}{2} = 93$
$\binom{3}{2}$ → от 3 избираме 2

д) няма празна

$3^5 - |(г)| = 3^5 - 93 = 243 - 93 = 150$

8. а) започват с а дължина n, съдържащи a, b, c

↳ оставят $n-1$ позиции на които можем да разпределим 3 букви, той като на първата позиция имаме a. За втората позиция ще имаме пак 3 възможности, за третата 3 и т.н.

↳ 3^{n-1} → вариации с повторение

б) съдържат точно k-пъти a

↳ остават $n-k$ позиции за останалите две букви той като a вече е разпределена k пъти.

↳ $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ → за останалите 2 букви (b и c)
$\binom{n}{k}$ → началните

k - пъти a, при което първият и последният символ е a
↳ остават ни $n-2$ позиции да изберем, къде да поставим останалите $k-2$ a-та. Остана ли $n-k$ позиции са за b и c.

↳ $\underbrace{\binom{n-2}{k-2}}_{\text{от } n-2 \text{ избираме останалите } k-2 \text{ позиции за } a\text{-тата}} \cdot 2^{n-k} \rightarrow$ за останалите (b и c)

г) $k_1+k_2+k_3=n$ от a, b, c

↳ имаме $\binom{n}{k_1}$ начина за буквата a

$\binom{n-k_1}{k_2}$ за b и $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ за c

↳ $$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3} = \frac{n!}{k_1!\cancel{(n-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\cancel{(n-k_1-k_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1-k_2)!}}{k_3!\underbrace{(n-k_1-k_2-k_3)!}_{=0! = 1}}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}$$

$\boxed{9}$ $|\mathbb{P}(A)| = 2^{n+k} \rightarrow$ броят на всички подмножества на a

$A = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k\}$

$AB \rightarrow$ съдържа и a и b

$\bar{A}B \rightarrow$ не съдържа a

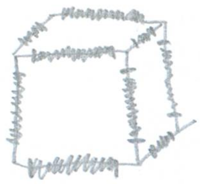
$A\bar{B} \rightarrow$ не съдържа b

$\overline{AB} \rightarrow$ не съдържа нито a нито b

↗ тъй като множествата са непресичащи се и обединението им прави цялото множество, то са РАЗБИВАНЕ

↳ $AB = \mathbb{P}(A) \setminus (\bar{A}B \cup A\bar{B})$ и от принципа на изваждането и вкл. и изкл.

$$|AB| = |\mathbb{P}(A)| - |\bar{A}B \cup A\bar{B}| = 2^{n+k} - |\bar{A}B| - |A\bar{B}| + |\bar{A}B \cap A\bar{B}| =$$
$$= 2^{n+k} - 2^n - 2^k + 1$$

11. 

→ кубчето трябва да е на някой от ръбовете, но да не е първото или последното защото то ще има 3 червени страни

\# ръбове = 8 ⇒ $\frac{10 \cdot 8}{10^3}$ или $\frac{12 \cdot 8}{10^3}$

12. Цифрите с които разполагаме са от 0 до 9, общо 10 на брой, т.е. всички възможни номера са 10^4 /за всяка от 4-те позиции имаме 10 възможности/

а) за първата позиция имаме 10 възможности и след това за всяка следваща -1

↳ $\mathbb{P}(a)) = \frac{|V_{10}^4|}{10^4}$

б) Избираме позиция за двете еднакви цифри → C_4^2 (от 4 позиции избираме 2). След това от 10-те цифри избираме тази която ще се повтаря → C_{10}^1. На останалите позиции разпределяме от останалите 9 цифри → V_9^2

↳ $|C_4^2| \cdot |C_{10}^1| \cdot |V_9^2| = 6 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 4320 \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{4320}{10^4}$

в) Същото като б) само вместо с 2 с 3 еднакви

$|C_4^3| \cdot |C_{10}^1| \cdot |V_9^1| = 4 \cdot 10 \cdot 9 = 360 \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{360}{10^4}$

г) Избираме двете цифри, които ще участват в записа на числото → $\binom{10}{2}$; пермутираме цифрите $\frac{4!}{2!\,2!}$

↳ $\binom{10}{2} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 270 \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{270}{10^4}$

g) $\dfrac{2(1^2+2^2+3^2+\dots+9^2)+10^2}{10^4}$

поне не половината са еднакви

↳ сумата на първите 2 цифри може да е от 0 до 18, също и за вторите 2

↳

$\boxed{14.}$ Б.О.О. може да считаме, че тестето се състои от 7, A, A, A, A. В такъв случай имаме 5 възможни наредби:

$\boxed{\begin{matrix} 7 & A & A & A & A \\ A & 7 & A & A & A \end{matrix}}$ → $\mathbb{P}$(A да спечели) = $\frac{2}{5}$ → защото $\frac{2}{5}$ са тези наредби, дето ти вършат работа

...

A A A A 7

↳ т.е 7 преди 2 поредни аса

↳ Ако след като изтеглен картата я връщаме обратно

$\frac{4}{5}$ → да изтеглим ас и $\frac{1}{5}$ → 7

$\mathbb{P}$(B да спечели) = $\mathbb{P}$(два поредни аса) = $\left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\mathbb{P}$(A да спечели) = $\mathbb{P}$(7 при 2 поредни аса) = $\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{9}{25}$

7 на първи ход

7 на втори ход

15. топки с номера от 1 до n в урна
k-пъти последователно се вади по една топка
$\mathbb{P}$(номерата на извадените топки да образуват растяща редица) = ?

а) без връщане

↳ Разделяме пространството от множеството топки с извадените топки, тъй като вероятността да извадим топка от урната е 1. Нека $\{a_1, \dots, a_k\}$ са извадените топки от урната, тогава има точно една наредба от всичките $k!$, която е в нарастващ ред.

↳ $$\mathbb{P}(a)) = \frac{1}{k!} \rightarrow \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k}}{V_n^k} = \frac{1}{k!}$$

б) с връщане

↳ Имаме n^k възможни изхода (т.е. всяко вадене е независимо от другото).

↳ $$\mathbb{P}(б)) = \frac{C(n;k)}{n^k} = \frac{\binom{n+k-1}{n-1}}{n^k} \rightarrow k? \quad \frac{\binom{n+k-1}{k}}{n^k}$$

17. $\frac{2}{3}$ - да улучи първата мишена
$\frac{1}{2}$ да улучи второто мишени

$\mathbb{P}$(за улучване на втората мишена, ако е получил право да стреля втори път) = ?

↳ A_i = {стрелецът улучва i-тата мишена}

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(A_2 | A_1) = ?$

↳ $$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

12.

$\Omega = \{$ ходящи на лекар $\}$

$A = \{$ посещавали повече от веднъж (>1) лекар годишно $\}$

$\mathbb{P}(A) = 60\% \rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}) = 40\%$

$B = \{$ посещавали хирург $\}$

$\mathbb{P}(B) = 17\%$

$\mathbb{P}($да е от $B \mid$ че е от $A) = 15\% \rightarrow \mathbb{P}(B \mid A) = 15\%$

$\mathbb{P}(\bar{B} \mid \bar{A}) = ?$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid A) = 60\% \cdot 15\% = \frac{\cancel{60}^{3}}{\cancel{100}_{5}} \cdot \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{100}_{20}} = \frac{9}{100} = 9\%$$

$$\mathbb{P}(\bar{B} \mid \bar{A}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{B} \cap \bar{A})}{\mathbb{P}(\bar{A})} = \frac{\mathbb{P}(\overline{A \cup B})}{40\%} = \frac{1 - \mathbb{P}(A \cup B)}{40\%} =$$

$$= \frac{100\% - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B))}{40\%} = \frac{100\% - (60\% + 17\% - 9\%)}{40\%} =$$

$$= \frac{100 - 68}{40} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5} = 80\%$$

$* \ \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)$

$\boxed{19.}$ хвърлят се два зара

$\mathbb{P}($сумата $< 8 \mid$ нечетна$) = ?$

↳ $A = \{$сумата $< 8\}$

$B = \{$сумата е нечетна$\}$

$\mathbb{P}(A \mid B) = ?$ Независими ли са A и B?

↳ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ -

сума	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
начина	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2+4+6+4+2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ → $12 = 2+4+6$ → сумата да е нечетна, колко начина са

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

↳ $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$ → не са независими

$\boxed{0.}$ тесте от 36 карти (от 6ца нагоре)

↳ 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A $= 9 \cdot 4 = 36$ карти.

$\mathbb{P}($да изтеглим дама $(Q)) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$\mathbb{P}($да изтеглим пика (пик)$) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(Q \cap \spadesuit) = \frac{1}{36}$ → понеже има само една такава в цялото тесте

↓ дама пика

↳ $\mathbb{P}(Q \mid \spadesuit) = \dfrac{\mathbb{P}(Q \cap \spadesuit)}{\mathbb{P}(\spadesuit)} = \dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ → което е равно

на това да изтеглим дама. ⇒ събитието не зависи от това дали сме изтеглили пика или не т.е. събитията са независими

→ Аналогично, ако тестето е от 52 карти

$\mathbb{P}(Q \mid \spadesuit) = \dfrac{\mathbb{P}(Q \cap \spadesuit)}{\mathbb{P}(\spadesuit)} = \dfrac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ → каквато е

и вероятността да сме изтеглили дама, тъй като имаме

карти 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A

$\boxed{21.}$ 10 мъже и 10 жени

$\mathbb{P}($лица от еднакъв пол да не седят един до друг$) = ?$

↳ Б.О.О. нека фиксираме една жена на масата. Останалите жени разполагат с 9 места и може да ги пермутираме по 9! начина. За мъжете имаме 10 места, следователно 10! начина, общо 19! начина за всички останали хора.

↳ $\dfrac{9!\,10!}{19!}$ → отговор на задачата

22. Нека броят на хора, за които вероятността поне двама от тях да имат един и същ рожден ден е по голяма от $\frac{1}{2}$ е k.

Търсим $\min k$.

$\bar{A} = \{$ никои двама да не са родени на една дата $\}$

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \frac{365-(k-1)}{365} = \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right)$$

↳ Колкото повече стойности взимаме (колкото повече расте k), толкова повече произведението намалява.

Той като $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

↳ За да оценим това може да напишем програма и да видим че първи път условието се изпълнява при 23 души или да използваме приближението $1-x \sim e^{-x}$ за $x \in [0, 1)$ и да правим оценки.

23 човека

23. $A = \{$ първият който хвърли монетата печели $\}$

$B = \{$ вторият който хвърли монетата печели $\}$

↳ Очевидно все някога един ще спечели

$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) \rightarrow$ Той като двете събития (хвърляне на монетка за ези и тура) са независими от формулата за пълната вероятност имаме.

E

T T E

T T T T E

...

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(TTE) + \mathbb{P}(TTTTE) + \ldots + \mathbb{P}(\underbrace{TT\ldots TTE}_{}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{2^i} \overset{n\to\infty}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$, тъй като

$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$, за $|x| < 1$ $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$

• Във второто условие на играта, вероятността да печели първият е:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(TEE) + \mathbb{P}(ETT) + \mathbb{P}(TETEE) + \mathbb{P}(ETETT) + \dots +$$

$$+ \mathbb{P}(\underbrace{ET\dots ETT}_{2n}) + \mathbb{P}(\underbrace{TE\dots TEE}_{2n}) = 2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{2n+1}}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{4^i} \overset{n\to\infty}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}$$

⇒ При втория регламент на играта, вероятностите се разменят: по-голямия шанс да спечели има втория играч (понеже винаги пред него ще има хвърлено ези или тура, той винаги ще е със стъпка по-напред).

4. Нека N е множество от събития, в които никой не получава писмото си. Търси се $\mathbb{P}(N)$.

(Y е множеството от събития, в които всеки получава правилното писмо. Очевидно $|Y| = 1$ и $\mathbb{P}(Y) = \frac{1}{n!}$)

⇒ Отрицанието на N, т.е. $\overline{N}$ е множеството от събития, в които поне един адресат получава предназначеното за него писмо.

Нека $A_i = \{i$-тия адресат получава предназначеното за него писмо$\}$

$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n}$

$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}$, $i<j$

$\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$, $i<j<k$

...

$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)}$

...

$\mathbb{P}(Y) = \frac{1}{n!}$

$$\mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}(\overline{N}) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) =$$

$$= 1 - \left(n \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots$$

⇒ $\mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \frac{1}{(i+1)!}$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, избираме $x = -1$ ⇒

$$\mathbb{P}(N) = e^{-1} \approx \frac{1}{2{,}7182\dots}$$

25.

5 бели
8 зелени
7 червени топки } всичко 20

$\mathbb{P}$(да извадим бяла преди зелена) = ?

а) с връщане

↳ Когато вадим червени топки нищо не се променя, затова тази интуитивно може да предположим, че отговорът е

$\frac{5}{5+8} = \frac{5}{13}$ → Но това не е формалното решение

$A = \{$вадим бяла топка преди зелена$\}$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(w) + \mathbb{P}(rw) + \mathbb{P}(rrw) + \dots = \frac{5}{20} + \frac{7}{20}\cdot\frac{5}{20} + \frac{7}{20}\cdot\frac{7}{20}\cdot\frac{5}{20} + \dots =$

$= \frac{5}{20}\left(1 + \frac{7}{20} + \left(\frac{7}{20}\right)^2 + \dots\right) = \frac{5}{20}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{7}{20}\right)^i \overset{n\to\infty}{=} \frac{5}{20}\left(\frac{1}{1-\frac{7}{20}}\right) = \frac{5}{13}$

↳ Използваме факта, че $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$, за $|x| < 1$

б) без връщане

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(w) + \mathbb{P}(rw) + \dots + \mathbb{P}(\underbrace{r\dots r}_{7}w) =$

$= \frac{5}{20} + \frac{7}{20}\cdot\frac{5}{19} + \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18} + \dots + \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdots\frac{1}{14}\cdot\frac{5}{13} =$

$= \frac{5}{20}\underbrace{\left(1 + \frac{7}{19} + \frac{7\cdot 6}{19\cdot 18} + \dots\right)}_{x} = \frac{5}{20}x$

↳ За да пресметнем тази сума ще се доверим на симетрията:

$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(g) + \mathbb{P}(rg) + \dots + \mathbb{P}(\underbrace{r\dots r}_{7}g) =$

$= \frac{8}{20} + \frac{7}{20}\cdot\frac{8}{19} + \frac{7}{20}\cdot\frac{8}{18}\cdot\frac{6}{19} + \dots + \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdots\frac{1}{14}\cdot\frac{8}{13} =$

$= \frac{8}{20}\underbrace{\left(1 + \frac{7}{19} + \frac{7\cdot 6}{18\cdot 19} + \dots\right)}_{x} = \frac{8}{20}x$

↳ $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 \Rightarrow \frac{5}{20}x + \frac{8}{20}x = 1 \Rightarrow x = \frac{20}{13}$

↳ $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{13}$

31. 3 стандартни и 1 само със шестици

а) P(три шестици) = ?

H_1 = {избрали сме 2 стандартни и 1 нестандартен} $= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}} = \frac{3}{4}$

H_2 = {избрали сме 3 стандартни зара} $\Rightarrow \frac{1}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{4} = \overline{H_1}$

A_1 = {хвърлили сме 3 шестици}

$P(A_1) = P(A_1 | H_1) \cdot P(H_1) + P(A_1 | H_2) \cdot P(H_2)$

$P(A_1 | H_1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \rightarrow$ понеже имаме 2 стандартни

$P(A_1 | H_2) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \rightarrow$ 3 стандартни

$$\boxed{P(A) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{4}}$$

б) A_2 = {хвърлили сме различни}

$P(A_2 | H_1) = \frac{5 \cdot 4}{6^2} = \frac{20}{36}$

$P(A_2 | H_2) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5 \cdot 4}{6^2} = \frac{20}{36}$

$$\boxed{P(A) = \frac{20}{36} \cdot \frac{3}{4} + \frac{20}{36} \cdot \frac{1}{4}}$$

в) A_3 = {паднали са се последователни числа} // 1, 2, 3; 2, 3, 4; 3, 4, 5; 4, 5, 6 } 4

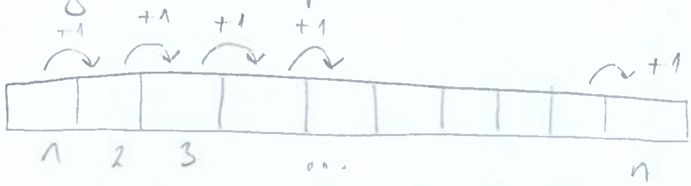
5, 4
4, 5

$P(A_3 | H_1) = \frac{2}{6^2}$

$P(A_3 | H_2) = \frac{4 \cdot 3!}{6^3}$

$$\boxed{P(A) = \frac{2}{6^2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4 \cdot 3!}{6^3} \cdot \frac{1}{4}}$$

32. урна с m бели и k черни топки
n урни на брой



H_i = {избрали сме бяла топка от i-тата урна}. Търси се H_n.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{m}{m+k} \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{H_1}) = \frac{k}{m+k}$$

↳ Разбиваме по първото вадене на топка от първата урна и прилагаме формулата за пълна вероятност:

$$\mathbb{P}(H_2) = \mathbb{P}(H_2 | H_1)\,\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(H_2 | \overline{H_1})\,\mathbb{P}(\overline{H_1}) =$$

$$= \frac{m+1}{m+k+1} \cdot \frac{m}{m+k} + \frac{m}{m+k+1} \cdot \frac{k}{m+k} =$$

$$= \frac{m\,\cancel{(m+k+1)}}{\cancel{(m+k+1)}\,(m+k)} = \frac{m}{m+k}$$

↳ Полученият резултат $\mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(H_2)$ ни навежда на мисълта, че $\mathbb{P}(H_i) = \frac{m}{m+k}$ за всяко $i = \overline{1,n}$

↳ Това може да се докаже чрез индукция

33. В кутия има 7 топки за тенис, от които 4 са нови
Игра 1 → избират се 3, след това се връщат обратно
Игра 2 → избират се пак 3 $\quad$ $\mathbb{P}$(да са нови) = ?

↳ A_i = {изтеглили сме i нови топки на първото теглене}, $i = \overline{0,3}$

B = {и трите топки изтеглени от втория път са нови}

↳ Вероятността да изтеглим 3 топки от 7 е $\binom{7}{3}$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_0)\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \dots = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i) =$$

$$= \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}\binom{7}{3}} + \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}\binom{7}{3}} = \frac{4 + 4\cdot 3}{\binom{7}{3}^2} = \frac{16}{35^2} \quad \to ?$$

↳ ?. как е сметнато
намери видео

34. 15 билета по 2 въпроса = 30 въпроса
студент знае 25 и 5 не знае

$\mathbb{P}$(да вземе изпита) = ?

H_i = { на първия билет има i познати въпроса }

A = { минава изпита }

$\mathbb{P}(A \mid H_0) = 0$

$\mathbb{P}(A \mid H_1) = \frac{24}{28}$

$\mathbb{P}(A \mid H_2) = 1$

$$\mathbb{P}(H_0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{20}{30 \cdot 29} = \frac{20}{870}$$

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{\binom{5}{1} \cdot 5}{\binom{30}{2}} = \frac{5 \cdot 5}{\frac{30 \cdot 29}{2 \cdot 1}} = \frac{10}{30 \cdot 29} = \frac{10}{870}$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{\binom{25}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{25 \cdot 24}{30 \cdot 29} = \frac{600}{30 \cdot 29} = \frac{600}{870}$$

$$\hookrightarrow \mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(\mathbb{P}(A) \mid H_i)\, \mathbb{P}(H_i)$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid H_0)\mathbb{P}(H_0) + \mathbb{P}(A \mid H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A \mid H_2)\mathbb{P}(H_2) =$$

$$= 0 \cdot \frac{20}{870} + \frac{24}{28} \cdot \frac{10}{870} + 1 \cdot \frac{600}{870} = \boxed{\frac{24}{28} \cdot \frac{10}{870} + \frac{600}{870}}$$

35. $\mathbb{P}$(зелено) = 85%
$\mathbb{P}$(синьо) = 15%

Свидетел казва, че е било синьо

$\mathbb{P}$(да определи правилно цвята) = 80% → 20% → да погреши

$\mathbb{P}$(колата да е била синя) = ?

$\hookrightarrow$ A = { свидетелят казва синьо }

H_1 = { катастрофиралата е била синя кола } → $\mathbb{P}(H_1) = 15\%$

H_2 = { катастрофиралата е била зелена кола } → $\mathbb{P}(H_2) = 85\%$

$\mathbb{P}(H_1 \mid A) = ?$

$\mathbb{P}(A \mid H_1) = 80\%$ $\qquad \mathbb{P}(H_1) = 15\%$

$\mathbb{P}(A \mid H_2) = 20\%$ $\qquad \mathbb{P}(H_2) = 85\%$

$$\mathbb{P}(H_1 \mid A) = \mathbb{P}(A \mid H_1) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{80\% \cdot 15\%}{80\% \cdot 15\% + 20\% \cdot 85\%} = \frac{8 \cdot 15}{8 \cdot 15 + 2 \cdot 85} = \frac{8 \cdot 15}{2 \cdot 5(4 \cdot 3 + 17)} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3}{12 + 17} = \frac{12}{29} < \frac{1}{2}$$

36. Тестът е точен в 99%

0,5% от населението е болно

$\mathbb{P}$ (да е болен човек | тестът е позитивен) = ?

↳ A = {тестът е положителен}

H_1 = {болни сме} → $\mathbb{P}(H_1) = 0{,}5\%$

H_2 = {здрави сме} → $P(H_2) = 99{,}5\%$

↳ $\mathbb{P}(H_1|A) = ?$

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\cdot\mathbb{P}(H_1)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A|H_i)\,\mathbb{P}(H_i)}$$

$\mathbb{P}(A|H_1) = 99\%$ $\qquad \mathbb{P}(H_1) = 0{,}5\%$

$\mathbb{P}(A|H_2) = 1\%$ $\qquad \mathbb{P}(H_2) = 99{,}5\%$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(H_1|A) = \frac{99\cdot 0{,}5}{99\cdot 0{,}5 + 1\cdot 99{,}5} \approx \frac{0{,}5}{0{,}5+1} = \frac{1}{3}$$

38. Три принтера A, B, C

$\mathbb{P}(A) = 0{,}6\%$ → заявка е изпратено към принтер A

$\mathbb{P}(B) = 0{,}3\%$

$\mathbb{P}(C) = 0{,}1\%$

E = {станала е грешка}

$\mathbb{P}(E|A) = 0{,}01\%$

$\mathbb{P}(E|B) = 0{,}05\%$

$\mathbb{P}(E|C) = 0{,}04\%$

$$\mathbb{P}(A|E) = \frac{\mathbb{P}(E|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(E|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(E|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(E|C)\,\mathbb{P}(C)} = \frac{0{,}01\cdot 0{,}6}{0{,}01\cdot 0{,}6 + 0{,}05\cdot 0{,}3 + 0{,}04\cdot 0{,}1} =$$

$$= \frac{6}{6+15+4} = 24\%$$

39. Три налона

първият → две бели страни

вторият → две черни

третият → една черна една бяла

$\mathbb{P}$(ако горната страна е бяла и долната да е бяла) = ?

→ $A = \{$ хвърлили сме бяло $\}$

$H_1 = \{$ изтеглили сме $(б, б)\}$ → $\mathbb{P}(H_1) = 1/3$

$H_2 = \{$ изтеглили сме $(б, ч)\}$ → $\mathbb{P}(H_2) = 1/3$

$H_3 = \{$ изтеглили сме $(ч, ч)\}$ → $\mathbb{P}(H_3) = 1/3$

$\mathbb{P}(A \mid H_1) = 1$

$\mathbb{P}(A \mid H_2) = 1/2$ → От Бейс имаме :

$\mathbb{P}(A \mid H_3) = 0$

$$\mathbb{P}(H_1 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A \mid H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A \mid H_2)\,\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A \mid H_3)\,\mathbb{P}(H_3)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 1/3}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

40. 1/4 отговора е верен

$H_1 = \{$ студент знае отговор $\}$ ⇒ $\mathbb{P}(H_1) = 90\%$.

$H_2 = \{$ студент не знае отговор $\}$ ⇒ $\mathbb{P}(H_2) = 10\%$.

$A = \{$ отговорил е правилно $\}$

$\mathbb{P}(A \mid H_2) = ?$

$$\mathbb{P}(A \mid H_2) = \frac{\mathbb{P}(H_2 \mid A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(H_1 \mid A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(H_2 \mid A)\,\mathbb{P}(H_2)} =$$

$\mathbb{P}(H_1 \mid A) = 100\%$

$\mathbb{P}(H_2 \mid A) = \frac{1}{4} = 25\%$

$$= \frac{25 \cdot 10}{100 \cdot 90 + 25 \cdot 10} = \frac{250}{9000 + 250} = \frac{250}{9250} \approx 0{,}027 \approx 3\%$$

36. Тестът е точен в 99%

0,5% от населението е болно

$\mathbb{P}$(да е болен човек | тестът е позитивен) = ?

↳ $A = \{$тестът е положителен$\}$

$H_1 = \{$болни сме$\}$ → $\mathbb{P}(H_1) = 0,5\%$

$H_2 = \{$здрави сме$\}$ → $\mathbb{P}(H_2) = 99,5\%$

↳ $\mathbb{P}(H_1 | A) = ?$

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(A|H_i)\,\mathbb{P}(H_i)}$$

$\mathbb{P}(A|H_1) = 99\%$ $\qquad$ $\mathbb{P}(H_1) = 0,5\%$

$\mathbb{P}(A|H_2) = 1\%$ $\qquad$ $\mathbb{P}(H_2) = 99,5\%$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(H_1|A) = \frac{99 \cdot 0,5}{99 \cdot 0,5 + 1 \cdot 99,5} \approx \frac{0,5}{0,5+1} = \frac{1}{3}$$

38. Три принтера A, B, C

$\mathbb{P}(A) = 0,6\%$ → заявка е изпратено към принтер A

$\mathbb{P}(B) = 0,3\%$

$\mathbb{P}(C) = 0,1\%$

$E = \{$стана е грешка$\}$

$\mathbb{P}(E|A) = 0,01\%$

$\mathbb{P}(E|B) = 0,05\%$

$\mathbb{P}(E|C) = 0,04\%$

$$\mathbb{P}(A|E) = \frac{\mathbb{P}(E|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(E|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(E|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(E|C)\mathbb{P}(C)} = \frac{0,01 \cdot 0,6}{0,01 \cdot 0,6 + 0,05 \cdot 0,3 + 0,04 \cdot 0,1} =$$

$$= \frac{6}{6+15+4} = 24\%$$

39. Три нашона

първият → две бели страни
вторият → две черни
третият → една черна една бяла

$\mathbb{P}($ако горната страна е бела и долната да е бела$) = ?$

→ $A = \{$хвърлили сме бяло$\}$

$H_1 = \{$изтеглили сме $(б, б)\}$ → $P(H_1) = 1/3$

$H_2 = \{$изтеглили сме $(б, ч)\}$ → $\mathbb{P}(H_2) = 1/3$

$H_3 = \{$изтеглили сме $(ч, ч)\}$ → $P(H_3) = 1/3$

$\mathbb{P}(A \mid H_1) = 1$

$\mathbb{P}(A \mid H_2) = 1/2$ → От Бейс имаме:

$\mathbb{P}(A \mid H_3) = 0$

$$\mathbb{P}(H_1 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A \mid H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A \mid H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A \mid H_3)\mathbb{P}(H_3)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 1/3}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

40. 1/4 отговора е верен

$H_1 = \{$студент знае отговор$\}$ ⇒ $\mathbb{P}(H_1) = 90\%$.

$H_2 = \{$студент не знае отговор$\}$ ⇒ $P(H_2) = 10\%$.

$A = \{$отговорил е правилно$\}$

$\mathbb{P}(A \mid H_2) = ?$

$\mathbb{P}(H_1 \mid A) = 100\%$

$\mathbb{P}(H_2 \mid A) = \frac{1}{4} = 25\%$

$$\hookrightarrow \mathbb{P}(A \mid H_2) = \frac{\mathbb{P}(H_2 \mid A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(H_1 \mid A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(H_2 \mid A)\mathbb{P}(H_2)} =$$

$$= \frac{25 \cdot 10}{100 \cdot 90 + 25 \cdot 10} = \frac{250}{9000 + 250} = \frac{250}{9250} \approx 0{,}027\% \approx 3\%$$

41. заекът е убит от 1 изстрел

$\mathbb{P}$(да уцели само първият) = $0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4$ → A

$\mathbb{P}$(да уцели само вторият) = $0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4$ → B

$\mathbb{P}$(да уцели само третият) = $0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6$ → C

D = {уцелил е точно един човек}

$$\mathbb{P}(A|D) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D) + \mathbb{P}(C \cap D)}$$

$$\to \frac{0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \left(\frac{1}{1-q}\right)}{(0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6)\left(\frac{1}{1-q}\right)}$$

→ Ако никой не е уцелил се стреля отново и не ни интересува колко пъти ще започнат отново

→ Може да считаме, че на първото стреляне е уцелил A

$$\to \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)} = \frac{3}{29}$$

42. H_i = {изтеглили сме i черни аса до 6-тата карта}, $i = 1,$

A = {виждаме черно след второто червено асо}.

$$\mathbb{P}(H_0) = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{50}{5}}$$

$$\mathbb{P}(H_1) = 2 \cdot \frac{\binom{48}{5}}{\binom{50}{5}}$$

$\mathbb{P}(A|H_0) = 2/3$

$\mathbb{P}(A|H_1) = 1/2$

$\mathbb{P}(A|H_2) = 0$

?

13.

55 М
45 Ж } 100

А = {взима изпита}

$P(A \mid Ж) = 0{,}7$

$P(A \mid M) = 0{,}4$

Обработени са 3 резултата ✓ ✓ ✗

P(и трите резултата да са на момичетата) = ?

H_1 = {избрали сме 3 момичета}

H_2 = {избрали сме 2 момичета и 1 момче}

H_3 = {избрали сме 2 момчета и 1 момиче}

H_4 = {избрали сме 3 момчета}

А = {отговорите на избраните трима са два верни един грешен}

$$P(H_1) = \frac{\binom{45}{3}}{\binom{100}{3}}$$

$$P(H_2) = \frac{55 \cdot \binom{45}{2}}{\binom{100}{3}}$$

$$P(H_3) = \frac{45 \cdot \binom{55}{2}}{\binom{100}{3}}$$

$$P(H_4) = \frac{\binom{55}{3}}{\binom{100}{3}}$$

$$P(A \mid H_1) = \overset{2Ж✓,\ Ж✗}{3 \cdot (0{,}7)^2 \cdot (0{,}3)}$$

$$P(A \mid H_2) = \overset{2Ж✓,\ М✗}{(0{,}7)^2 \cdot 0{,}6} + 2 \cdot (\overset{Ж✓}{0{,}7} \cdot \overset{Ж✗}{0{,}3} \cdot \overset{М✓}{0{,}4})$$

$$P(A \mid H_3) = \overset{2М✓\ Ж✗}{(0{,}4)^2 \cdot 0{,}3} + 2 \cdot (\overset{М✓\ Ж✓\ М✗}{(0{,}4) \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6})$$

$$P(A \mid H_4) = 3 \cdot (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)$$

2М✓, М✗

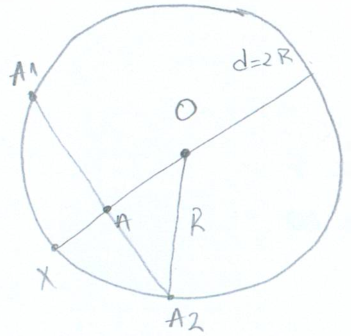
$P(H_1 \mid A) = ?$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(A \mid H_1)\, P(H_1)}{P(A \mid H_1)\, P(H_1) + P(A \mid H_2)\, P(H_2) + P(A \mid H_3)\, P(H_3) + P(A \mid H_4)\, P(H_4)}$$

Заместваме във формулата на Бейс и пресмятаме

3. Геометрична вероятност

44.



$\mathbb{P}(A_1A_2 < R) = ?$

↳ Разглеждаме само едната половина от кръга.

$A_1A_2 \perp OA$ и нека A_1A_2 сме я взели $= R \Rightarrow$ хордата е монотонна функция на която минимума и се достига в x и с O, а максимума е в т. O и е $2R$

↳ от $\triangle OAA_2$ имаме, че $OA = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ а $XA = R - \frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{2-\sqrt{3}}{2}R$

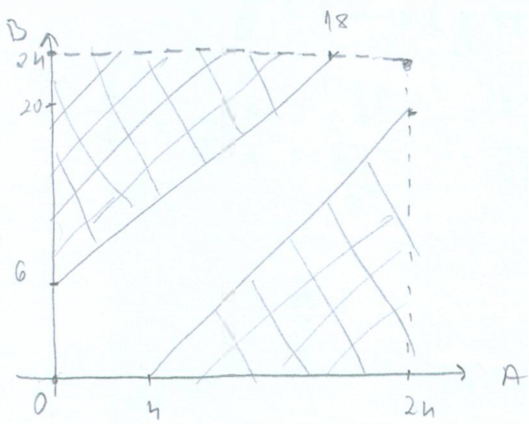
↳ $\mathbb{P}(A_1A_2 < R) = \dfrac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}R}{R} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

45.

за разтоварване на първия → 6 часа A
за разтоварване на втория → 4 часа B

$\mathbb{P}$(да не се засекат) = ?

↳ Ако A дойде в 0 часът → B може от 6 до 24 → 18 часа
Ако A дойде в 12 часът → B може от 0 до 8 и от 18 до 24 → 14



→ $\mathbb{P}$(non-overlapping) $= \dfrac{S_{\#}}{S_{\square}} =$

$= \dfrac{\frac{(24-6)^2}{2} + \frac{(24-4)^2}{2}}{24^2} = \dfrac{9^2 + 10^2}{24^2} =$

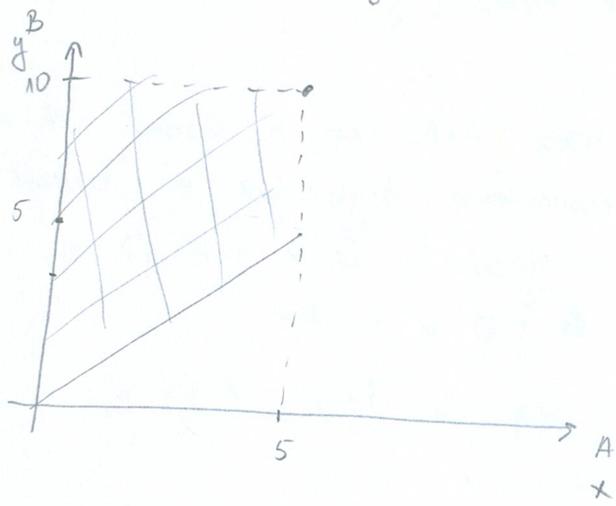
$= \dfrac{181}{288} = 0,628472(2)$

6.

A на 5 min

B на 10 min

$\mathbb{P}$(A да дойде преди B) = ?



$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 5 \\ 0 \le y < 10 \end{cases}$

→ $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x < 5;\ 0 \le y \le 10\} = [0,5] \times [0,10]$, т.е. Ω е правоъгълник

→ На координатната абсциса отбелязваме колко минути са изминали от последното идване на даден автобус.

→ Пр. Ако са изминали x минути от последното пристигане на автобус A, то следващият автобус ще е за 5 − x минути

→ a) $C = \{(x,y) \in \Omega \mid 5 - x < 10 - y\} = \{(x,y) \in \Omega \mid x - y$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{S_{\#}}{S_{\Omega}} = \frac{50 - \frac{5^2}{2}}{50} = \frac{50 - \frac{25}{2}}{50} = \frac{\frac{100-25}{2}}{50} = \frac{\frac{75}{2}}{\frac{50}{1}} = \frac{75}{2 \cdot 50} = \frac{3}{4}$$

?

47. k |————|

Избираме x и $y \in [0,k] \to$ по-малки от k

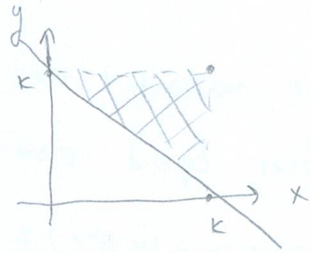
$P(x, y, k$ да образуват $\Delta) = ?$

↳ $0 \le x, y \le k$

$x + y > k$

$x + k > y$

$y + k > x$



$\to x + y > k$

Ако $x = 0 \to y = k$

$y = 0 \to x = k$ $\to \dfrac{S\#}{S\square} = \dfrac{\frac{k^2}{2}}{k^2} = \dfrac{1}{2}$

като допълнение $\to P = P(\{x+y>k\} \mid \{0<x,y<k\}) = \dfrac{\{x+y>k\} \cap \{0<x,y<k\}}{\{0<x,y<k\}} = \dfrac{\frac{k^2}{2}}{k^2} = \dfrac{1}{2}$

48. Нека $0 < x, y, z < k$ са дължините на 3-те случайно избрани отсечки

↳ $P(\{x+y>z\} \cap \{x+z>y\} \cap \{y+z>x\} \mid \{0<x,y,z<k\}) =$

$= \dfrac{k^3 - 3 \cdot \frac{k^3}{6}}{k^3} = \dfrac{1}{2}$

→ II начин: Нека A, H_k, $k = 1, 2, 3$ са съответно събитията: от трите отсечки може да се построи триъгълник.

Максималната по дължина от трите отсечки е x за $k=1$, y за $k=2$ и z за $k=3$. Тогава събитията H_k образуват пълна група $P(H_k) = \frac{1}{3}$ и съгласно предходната задача $P(A \mid H_k) = \frac{1}{2}$.

От формулата за пълната вероятност получаваме

$P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(A \mid H_k) P(H_k) = \dfrac{1}{2}$

53. $\rightarrow$ ези
$\leftarrow$ тура

10 хвърляния

X = „крайна позиция"

а) $\mathbb{P}(X=0)=?$ $\rightarrow$ да се намира на мястото от където е почнал

$\hookrightarrow$ да хвърли равен брой езита и тури

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(5 \text{ ези и } 5 \text{ тури})=\frac{\binom{10}{5}}{10^2}$$

б) $\mathbb{P}$(да е на 2 крачки от началото) = ?

$$\mathbb{P}(X=2 \text{ или } X=-2)=\mathbb{P}\left(\begin{matrix} 6\rightarrow \text{ и } 4\leftarrow \text{ или} \\ 6\leftarrow \text{ и } 4\rightarrow \end{matrix}\right)=\binom{10}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\binom{10}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{10}{6}$$

в) $\mathbb{P}$(на 5 крачки пред началната си позиция) = ?

$m \rightarrow$
$n \leftarrow$
$m+n=10$
$m-n=5$

$2m=15$ $\rightarrow$ няма решение в $\mathbb{N}$

$\rightarrow$ Няма как $m+n=10$, а при това да сме на 5-та позиция

54. залага 5 лв и има право да хвърли 2 зара
2 шестици печели 100 лв
1 шестица печели 5 лв

$EX = ?$

→ A_i, $i = 0, 1, 2$ са събития - при хвърляне на 2 зара се падат точно i бр.

X	0	1	2
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

→ колко бр. ни се падат

?

При $x_0 = -5$ лв → изгубили сме заложените 5 лв.
$x_1 = 0$ → върнали сме си ги
$x_2 = 95$ лв → запечелили сме 95 лв

$$\to EX = \sum_{i=0}^{2} p_i x_i = \frac{25}{36}\cdot(-5) + \frac{10}{36}\cdot 0 + \frac{1}{36}\cdot 95 =$$
$$= \frac{-125}{36} + \frac{95}{36} = -\frac{30}{36} = \boxed{-\frac{5}{6}}$$

↳ очакваната печалба е − и следователно играта не е справедлива

* $\frac{10}{36}$ → 1,6 2,6 3,6 4,6 5,6 6,1 6,2 6,3 6,4 6,5

$\frac{25}{36}$ → имаме 5 карти (без 6-цата), възможните вариации са $n^k = 5^2 = 25$

55.

а) Вход A

ако хвърли ези на n-тия път печели 2^n лева

⇒

X	2	2^2	2^3	...	2^n
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	$\frac{1}{n}$

→ да се падне ези на ход 1, 2, ...

X = „печалбата"

$$EX = 2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{2^2} + \dots 2^n\cdot\frac{1}{2^n} + \dots = 1+1+1+1+\dots = \infty$$

↳ очакването не е вярно → St. Petersburg Paradox

|

залог $A \begin{cases} \xrightarrow{\frac{1}{2}} 2A \\ \xrightarrow{\frac{1}{2}} 0 \end{cases}$

$1 \begin{cases} \xrightarrow{\frac{1}{2}} 2 \ (\text{тоест } 2-1=1) \\ \xrightarrow{\frac{1}{2}} -1 \text{ загуба} \end{cases}$

$2 \begin{cases} \xrightarrow{\frac{1}{2}} 4 \ (\text{тоест } 4-1-2=1) \\ \xrightarrow{\frac{1}{2}} -3, \text{ загуба} \end{cases}$

$4 \begin{cases} \xrightarrow{\frac{1}{2}} 8 \ (8-4-2-1=1) \\ \to \text{загуба } 8 \ldots \end{cases}$

X = „ходът на който печели"

X	0	1	2	3	4	...
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

E печалба $= \frac{1}{2}\cdot(2-1) + \frac{1}{4}\cdot(4-1-2) + \frac{1}{8}(8-4-2-1) + \ldots =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + = \sum \frac{1}{2^n} = \underline{\underline{1}}$

винаги печалбата ще е 1

56. 2 зара се хвърлят последователно 5 пъти

P(# хвърляния със сума 6 $= 2$) $= ?$

средната стойност ?

↳ $p = P$(от 2 зара да получим сума 6)

$X =$ „# хвърляния със сума 6" $\sim Bin(5, p) \to$ успех

$P(X=2) = \underbrace{\binom{5}{2} p^2}_{\text{успехи}} \underbrace{(1-p)^3}_{\text{неуспехи}} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} p^2 (1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3$

↳ $EX = 5 \cdot \frac{5}{36} = \frac{25}{36}$

$EX = n \cdot p = 5 \cdot p$

$p = \frac{\{(1,5), (2,4), (3,3) \ldots 4}{36} = \underline{\underline{\frac{5}{36}}}$

54. залаго 5 лв и имо право да хвърли 2 зара
2 шестици печели 100 лв
1 шестица печели 5 лв

$EX = ?$

→ A_i, $i = 0,1,2$ са събития - при хвърляне на 2 зара се падат точно i бути

→ колко бути ще се падат

X	0	1	2
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

?

при $x_0 = -5$ лв → изгубили сме заложените 5 лв.
$x_1 = 0$ → Вронали сме си ги
$x_2 = 95$ лв → запечелили сме 95 лв

$$\to EX = \sum_{i=0}^{2} p_i x_i = \frac{25}{36} \cdot (-5) + \frac{10}{36} \cdot 0 + \frac{1}{36} \cdot 95 =$$
$$= \frac{-125}{36} + \frac{95}{36} = -\frac{30}{36} = \boxed{-\frac{5}{6}}$$

↳ очакваната печалба е − и следователно играта не е справедлива

* $\frac{10}{36}$ → 1,6 6,1; 2,6 6,2; 3,6 6,3; 4,6 6,4; 5,6 6,5

$\frac{25}{36}$ → имаме 5 карти (без бутика), възможните вариации са $\overline{V}_n^k = 5^2 = 25$

55.

a) Вход A

ако хвърли ези на n-ия път печели 2^n лева

⇒

X	2	2^2	2^3	...	2^n
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	$\frac{1}{n}$

→ да се падне ези на ход 1, 2, ...

$X =$ „печалбата"

$$EX = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots 2^n \cdot \frac{1}{2^n} + \dots = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

↳ очакването не е Велико → St. Petersburg Paradox б)

залог $A \xrightarrow{\frac{1}{2}} 2A$, $\quad A \xrightarrow{\frac{1}{2}} 0$

$1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 2$ (тоест $2-1=1$)

$1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} -1$ загуба

$2 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 4$ (тоест $4-1-2=1$)

$2 \xrightarrow{\frac{1}{2}} -3$, загуба

$4 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 8$ $(8-4-2-1=1)$

$4 \to$ загуба 8 ...

X = „ходът на който печели"

X	0	1	2	3	4	...
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

$$E\,\text{печалба} = \frac{1}{2}\cdot(2-1) + \frac{1}{4}\cdot(4-1-2) + \frac{1}{8}(8-4-2-1) + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \pm \sum \frac{1}{2^n} = \underline{1}$$

винаги печалбата ще е 1

$\boxed{56.}$ 2 зара се хвърлят последователно 5 пъти

$P(\#$ хвърляния със сума 6 $= 2) = ?$

средната стойност ?

↳ $p = P($от 2 зара да получим сума $6)$

X = „# хвърляния със сума 6" $\sim Bin(5, p) \to$ успех

$$P(X=2) = \underbrace{\binom{5}{2} p^2}_{\text{успехи}} \underbrace{(1-p)^3}_{\text{неуспехи}} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} p^2 (1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3$$

↳ $EX = 5\cdot\frac{5}{36} = \frac{25}{36}$

$EX = n\cdot p = 5\cdot p$

$$p = \frac{\{(1,5),(2,4),(3,3)\dots\}}{36} = \frac{5}{36}$$

57. A – 3 монети
B – 2 монети

→ печели този, който хвърли повече езита и взима всичките 5 монети
– равен брой печели B

а) $\mathbb{P}(A$ да спечели$) = ?$

б) $\mathbb{P}(B$ да е хвърлил 1 ези $\mid A$ е спечелил$) = ?$

в) средната печалба $= ?$

→ $X =$ „Езитата на A" и $Y =$ „Езитата на B"

$$\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=2, Y=0) + \mathbb{P}(X=3, Y=0) + \mathbb{P}(X, Y) \in \{(2,1), (3,1), (3,2)\})$$

? ←

X	0	1	2	3
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\to 2^3$

Y	0	1	2
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\to 2^2$

$X \sim Bin(3, \frac{1}{2})$ → 3 хвърляния с вероятност за успех $\frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(A \text{ да спечели}) = \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{7}{32} + \frac{8}{32} + \frac{1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

б) $$\mathbb{P}(Y=1 \mid X > Y) = \frac{\mathbb{P}(Y=1 \cap X > Y)}{\mathbb{P}(X > Y)} = \frac{\mathbb{P}\{(2,1), (3,1)\}}{\mathbb{P}(X > Y)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{6}{32} + \frac{2}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{8}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

в) средната печалба за A → $\underbrace{2 \cdot \frac{1}{2}}_{\text{да спечели}} + \underbrace{(-3) \cdot \frac{1}{2}}_{\text{да изгуби}} = -\frac{1}{2}$

средната печалба за B → $3 \cdot \frac{1}{2} + (-2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$

58. $\mathbb{P}($r-ти успех до настъпи на $(k+r)$-тия опит$) = ?$

$\underbrace{\overset{\checkmark}{\sqcup}\ \overset{x}{\sqcup}\ \overset{x}{\sqcup}\ \dots\ \overset{\checkmark}{\sqcup}\ \overset{x}{\sqcup}}_{k+r}\ \boxed{\overset{\checkmark}{\sqcup}} \to$ r-ти успех на $k+r$-опит

r - броят успехи
k - броят неуспехи

$A = \{$ r-тият успех настъпва на $(k+r)$-тия бернулиев опит $\}$

$X \in Bin(k+r-1, p)$
$Y \in Bin(1, p)$, понеже $A = \{X = r-1\} \cap \{Y = 1\}$ е сечение на независими събития, то

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overset{\text{успехи преди r-тия}}{X = r-1}, Y = 1) = \mathbb{P}(X = r-1)\,\mathbb{P}(Y=1) = \underbrace{\binom{k+r-1}{r-1} p^{r-1}}_{r-1 \text{ успеха}} \cdot \underbrace{(1-p)^k}_{\text{неуспехи } k \text{ на брой}} \cdot \underbrace{p}_{\text{последния успех}} =$$

$$= \binom{k+r-1}{r-1} p^r \cdot (1-p)^k$$

59. 2 кутии с кибрит по n-на брой клечки вътре

Нека A_i за $i = 1, 2$ са съответно събитията - при случаен избор на клечки от кутия 1 и кутия 2, за $\underbrace{(n+1)}$-вия отваряме кутия i на $\underbrace{(2n-k+1)}$-вия ход.

понеже едната кутия е останала празна и на +1-вият път когато я отваряме виждаме, че е празна

$2n$ - понеже толкова е броят на клечките в двете кутии, $-k$ - понеже толкова са останали в другата кутия $+1$ защото веднъж сме отворили празната кутия и не сме взели клечка

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2^{2n-k+1}} \binom{2n-k}{n}.$$

Понеже A_1 и A_2 са несъвместими, то търсената вероятност е:

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{2^{2n-k+\cancel{1}}} \binom{2n-k}{n} = \frac{1}{2^{2n+k}} \binom{2n+k}{n}$$

60. n-пъти стреля последователно

p- вероятността да улучи

корабът има m-отсека

↳ При улучване, торпедото пада в един от m-те отсеци

P(да се наводнят поне два отсека) = ? → корабът да бъде потопен

n, p, m

X = „наводнени отсеци"

$$P(X=0 \text{ или } X=1) = (1-p)^n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{\text{улучванията}} \left(\frac{1}{m}\right)^k \cdot m$$

→ кой отсек сме фиксирали

поне да не потъне само в тези два случая

броят неуспехи

или X=0 и X=1

$\left(\frac{1}{m}\right)^k$: винаги когато улучи попада в един отсек

↳ $P(\text{да потъне}) = m \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{1}{m}\right)^k - (1-p)^n =$

↳ минус случаите в които имаме неуспех

$$= m\left(\frac{p}{m} + 1-p\right)^n - m(1-p)^n$$

61. две равновероятни и единствено възможни хипотези относно вероятността за успех при един опит: $H_0: p_0 = 1/2$ и $H_1: p_1 = 2/3$

Коя хипотеза има по-голямо апостериорна вероятност? Ако при провеждане на 200 опита са настъпили 120 успеха?

↳ A е събитието от 200 бернулиеви опита (с вероятност за успех в единичен опит p) да имаме 120 успеха.

По условие $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$. Трябва да определим кое от числата $P(H_0|A)$ и $P(H_1|A)$ е по-голямо.

→ Нека $X_i \in Bin(200, p_i)$, $i = 0,1$; $p_0 = \frac{1}{2}$, $p_1 = \frac{2}{3}$.

$$P(H_0|A) = \frac{P(H_0 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_0)P(H_0)}{P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1)} = \frac{P(A|H_0)}{P(A|H_0) + P(A|H_1)} = \frac{P(X_0 = 120)}{P(A|H_0) + P(A|H_1)}$$

$$= \frac{1}{P(A|H_0) + P(A|H_1)} \cdot \binom{200}{120} \cdot \frac{1^{120}}{2^{200}} \Rightarrow P(H_1|A) > P(H_0|A)$$

$$P(H_1|A) = \frac{1}{P(A|H_0) + P(A|H_1)} \cdot \binom{200}{120} \cdot \frac{2^{120}}{3^{200}}$$

$P(A_i|B)$ където B е настъпил и A_i е с вероятност $P(A_i|B)$ → апостериорна вероятност

62. X = „сумата от падналите се точки на 2 зара"
разпределение, очакване и дисперсия?

а) заровете са правилни

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

→ сумата от двата зара може да е от 2 до 12

→ разпределението

→ стойност по вероятност

$$\mathbb{E}X = (2+12)\cdot\frac{1}{36} + (3+11)\frac{2}{36} + (4+10)\cdot\frac{3}{36} + (5+9)\cdot\frac{4}{36} + (6+8)\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} =$$

$$= \frac{14}{36} + \frac{28}{36} + \frac{42}{36} + \frac{56}{36} + \frac{70}{36} + \frac{42}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

→ По теорема $\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 = 7$

→ $\mathbb{E}X_1 = 3{,}5 \quad \mathbb{E}X_2 = 3{,}5$

→ Понеже X_1 и X_2 са независими, то и тяхната дисперсия е сумата

$$DX_1 = DX_2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} i^2}{6} - 3{,}5^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} =$$

$$= \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{33}{12} \quad \left| \frac{35}{12} \right|$$ → от решението

→ $DX = D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2 = 2\cdot\frac{33}{12} = \frac{33}{6}$

б)

дореши
week7 / solutions !

6з. Урна съдържа 5 бели и 3 черни топки
избират се една по една докато се появи бяла

Нека X = „брой изтеглени черни топки"

а) без връщане

разпределението ↘

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}$

$$\to \mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{3} k\cdot p_k = 1\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} + 2\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} + 3\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} =$$

$$= \frac{15}{56} + \frac{5}{28} + \frac{3}{56} = \frac{15}{56} + \frac{10}{56} + \frac{3}{56} = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$$

$$\to DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \sum_{k=0}^{3} k^2\cdot p_k - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= 1\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} + 4\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} + 9\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{15}{56} + \frac{20}{56} + \frac{9}{56} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{44}{56} - \frac{1}{4} = \frac{44-14}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

б) В този случай $X \in Ge\left(\frac{5}{8}\right)$ с тегловна функция $k \longrightarrow \underbrace{\left(1-\frac{5}{8}\right)}_{q}^{k}\underbrace{\boxed{\frac{5}{8}}}_{p}$

$$\to \mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot q^k p = pq\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot q^{k-1} = pq\,\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)\Big|_{x=q} =$$

$$= pq\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=q} = pq\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)\Big|_{x=q} = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p}$$

$$DX = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\cdot q^k p = \sum_{k=0}^{\infty} k q^k p = pq^2\left(\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}\right) - \frac{q^2}{p^2} =$$

$$pq^2\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)\Big|_{x=q} + \frac{1}{q}\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)\Big|_{x=q}\right) - \frac{q^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\to \mathbb{E}X = \frac{q}{p} = \frac{3}{5} \qquad \frac{1-\frac{5}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{8-5}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5} \qquad \boxed{p = \frac{5}{8}}$$

$$DX = \frac{1-p}{p^2} = \frac{24}{25}$$

→ Нека X, X_i, $i=1,2,\dots,1000$ са случайни величини – брой изтеглени черни топки при 1000 независими опита; брой изтеглени черни топки при i-тия опит. Тогава $X = \sum_{i=1}^{1000} X_i$

$$\mathbb{E}X = 1000\,\mathbb{E}X_1 = \begin{cases} 500 & \text{за а)} \\ 600 & \text{за б)} \end{cases}$$

$$DX = 1000\,DX_1 = \begin{cases} 535{,}7 & \text{за а)} \\ 960 & \text{за б)} \end{cases}$$

→ Прилагане неравенството на Чебишев:

$\mathbb{P}(X > 900) \le \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \ge 400) \le \frac{DX}{400^2} = \frac{535{,}7}{400^2} = 0{,}003$ за а),

$\mathbb{P}(X > 900) \le \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \underset{?}{\ge} 300) \le \frac{DX}{300^2} = \frac{960}{300^2} = 0{,}01$ за б).

$\boxed{64.}$ $p = 0{,}001 = \frac{1}{1000}$

→ Нека $X \in Bi\left(5000, \frac{1}{1000}\right)$, то търсената вероятност е

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(X \ge 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - \mathbb{P}(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{5000} - \binom{5000}{1} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{4999} \approx 1 - e^{-5} - 5e^{-5} =$$

$$= 1 - 6e^{-5} \approx 0{,}959$$

II начин: $\mathbb{P}(X \ge 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) =$

$$= 1 - \binom{5000}{0} p^0 (1-p)^{5000} - \binom{5000}{1} p^1 \underbrace{(1-p)^{4999}}_{\frac{1}{e^5}} =$$

$$= 1 - e^{-5} - 5000 \cdot \frac{1}{1000} \cdot e^{-5} = 1 - 6e^{-5}$$

→ за малки x: $(1+x)^{\frac{1}{x}} \approx e \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx \frac{1}{e} \Rightarrow (1-x)^{\frac{1}{x}} \approx \frac{1}{e}$

65. 7 лампи, от които 3 са дефектни
Избират се 4 за проверка

↳ Нека X = „брой на изпробваните дефектни лампи"
$\mathbb{E}X$, разпределението ?

→ Тогава $X \in HG(N, K, n)$, където $N=7$, $K=3$, $n=4$

X е с хипергеометрично разпределение и тегловна функция
$$k \to p_k = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, \min(K, n)$$

$$\to \mathbb{E}X = n \cdot \frac{K}{N} = 4 \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{7}$$

66. средно 2 земетресения / месец
$\mathbb{P}$(за 3 месеца < 4 земетресения) = ?

X = „# земетресения за 1 месец"
→ $X \sim Po(\lambda)$

$X_i \in Po(2)$ → земетресения за 1 месец

$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 < 4) = ?$
→ Поасоновото измерва колко неща са се случили за даден период от време

Ще докажем, че ако $Y_j \in Po(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, n$ са независими, то случайната величина $Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ е поасоново разпределена с параметър $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j$.

При $n=2$ имаме $\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{k} \{Y_1 = j, Y_2 = k-j\}\right) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(\{Y_1 = j, Y_2 = k-j\}) =$
$$= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(\{Y_1 = j\} \cap \{Y_2 = k-j\}) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(Y_1 = j)\,\mathbb{P}(Y_1 = k-j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j}}{j!\,(k-j)!} =$$
$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!} \cdot \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_1^k \lambda_2^{k-j} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j}}{k!} \dots$$
(базата на индукцията) ... доказва се в следващо упр.

В частност $X = X_1 + X_2 + X_3 \in Po(6)$ и $\mathbb{P}(X < 4) = \sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-6} 6^k}{k!} = 61 e^{-6} \approx 0{,}1512$

това е цялото решение

67. Нека $X \in Bin\left(10, \frac{4}{5}\right)$ и A_i, $i = 1, \dots, 20$ са събитията - поне 9 от 10-те продадени принтера за i-тата седмица работят правилно.

$$P(A_1) = P(X \geq 9) = P(\{X=9\} \cup \{X=10\}) = P(X=9) + P(X=10) =$$

$$= \binom{10}{9}\left(\frac{4}{5}\right)^9 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0,3758$$

→ Ако приемем, че 5 месеца се състоят от 20 седмици. Тогава търсената вероятност е:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{20} A_i\right) = \prod_{i=1}^{20} P(A_i) = P(A_1)^{20} \approx 0,3758^{20}$$

68. A с $p = 0,2$
B с $p = 0,3$

$P(A$ да улучи, а B не$) = ?$
средният брой опити за улучване ?

↳ Нека A_k, $k = 1, 2, \dots$ са съответно събитията, в които A уцелва (за първи път) на k-ия ход, а B не уцелва във всичките k хода. Считаме, че всичките опити преди k са неуспешни.

Нека $X \sim Ge(0,2)$, $Y_k = \{$брой неуспехи на B за k-хода$\}$.

$$\Rightarrow A_k = \{X = k-1, Y = k\} = \{X = k-1\} \cap \{Y = k\}$$

→ Вероятността A да оцели, а B не е:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\{X=k-1\} \cap \{Y_k = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k-1)\, P(Y_k = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(0,2)}_{\text{успех на A}} \cdot \underbrace{(0,8)^{k-1}}_{\text{по } k-1 \text{ неуспехи}} \cdot \underbrace{(0,7)^k}_{k \text{ неуспехи на B}} = \sum_{k=1}^{\infty} (0,56)^k \cdot 0,14 = \frac{7}{22} \approx 0,318$$

→ Вероятността за неуспех при един опит (това са два хода - един за първия и един за втория) на двамата играчи е $0,8 \cdot 0,7 = 0,56$. Нека $Z \sim Ge(0,44)$, тогава

$$E Z = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,44} = 2,27$$

$$E 2Z = 2 \cdot E Z = 2 \cdot 2,27 \approx 4,54$$

69. A печели с $p = \frac{2}{3}$
B печели с $p = \frac{1}{3}$

X = „брой на изиграните партии"

разпределение и очакване?

→ Нека A_i, $A(i)$, за $i = 1, 2, \dots$ са събитията, i-тата партия е спечелена от първия играч (съответно $\overline{A_i}$ за победа на втория играч); играта е приключила след точно i партии.

→ $P(A_i) = \frac{2}{3}$, $P(\overline{A_i}) = \frac{1}{3}$, събитията $A_1, A_2, A_3, \dots$ са независими

$$A(2k+1) = (A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} \dots A_{2k-1} \overline{A_{2k}}) A_{2k+1} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4 \dots \overline{A_{2k-1}} A_{2k} A_{2k+1}, \ k \geq$$

$$A(2k+2) = A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} \dots A_{2k-1} \overline{A_{2k}} A_{2k+1} A_{2k+2} \cup (\overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4 \dots A_{2k} \overline{A_{2k+1}}) \overline{A_{2k+2}}, \ k \geq 0$$

$$\Rightarrow P(A(2k+1)) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{9}\right)^k$$

вероятността да спечели на $2k+1$ опит

$$P(A(2k+2)) = \frac{5}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^k \Rightarrow P_1 = 0, \ P_{2k+1} = \left(\frac{2}{9}\right)^k, \ P_{2k+2} = \frac{5}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^k \quad k \geq 0$$

$$\Rightarrow EX = \sum_{i \geq 0} i p_i = \sum_{k \geq 1} (2k+1)\left(\frac{2}{9}\right)^k + \frac{5}{9} \sum_{k \geq 0} (2k+2)\left(\frac{2}{9}\right)^k =$$

$$= \frac{10}{9} + \frac{19}{9} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{2}{9}\right)^k + \frac{28}{9} \sum_{k \geq 1} k\left(\frac{2}{9}\right)^k = \frac{20}{7} \approx 2.857$$

73. 1, 2, 3, 4 и 5 → избират се 3

X = „средното по големина от избраните три" = {2, 3, 4}

Y = „най-малкото от избраните числа" {1, 2, 3}

а)

X/Y	2	3	4
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$
3	0	0	$\frac{1}{10}$

P_{21} = 1 2 3, 1 2 4, 1 2 5

$P_{22} = 0$

$P_{23} = 0$

P_{32} = 2 3 4, 2 3 5

$P_{33} = 0$

P_{43} = 3 4 5

P_{31} = 1 3 4, 1 3 5

P_{42} = 2 4 5

P_{41} = 1 4 5

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

↖ съвместно разпределение

$\Sigma 1$

$EX = 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{4}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10}$

Контролно 2020/21 #1

1. 3 зара се хвърлят 5 пъти

X = "броят на хвърлянията при които се падат само нечетни точки"

$\mathbb{P}(X$ е четно$) = ?$

↳ Вероятността да се паднат само нечетни при едно хвърляне на трите зара е $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, то $X \sim Bin\left(5, \frac{1}{8}\right)$.

↳ Броят (...но) хвърляния може да бъде само 0, 2, 4 ⇒

$$\mathbb{P}(X \text{ е четно}) = \binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^0\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^5 + \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^4 + \binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^1 =$$

$$\frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,2!} = \frac{5\cdot\cancel{4}}{\cancel{2}\cdot1} = 5\cdot2 = 10$$

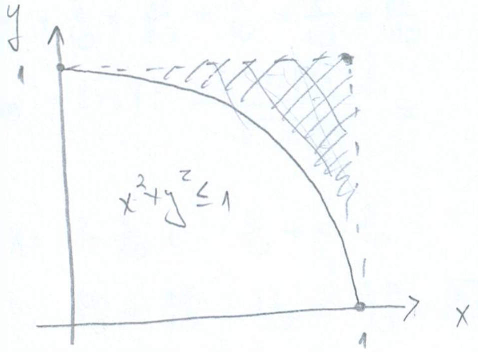
$$\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} =$$

→ $\mathbb{E}X = n\cdot p = 5\cdot\frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

$DX = n\cdot p\cdot q = 5\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8} = \frac{35}{64}$

2. две числа в $[0,1]$

$\mathbb{P}($сумата от квадратите на двете числа $> 1) = ?$



$x^2+y^2 = r^2$ →

↳ ако r го вземем да е радиус с дължина 1 ще се образува кръг

Т.е. работата ни върши само ////

$r^2\pi$ → площта на кръг

$\Rightarrow r=1 \Rightarrow \mathbb{P}(x^2+y^2>1) = 1 - \frac{r^2\pi}{4} =$

$= \boxed{1-\frac{\pi}{4}}$

$\boxed{3}$ 25 отбора : 8 джипове $\to 0{,}8$
10 камиона $\to 0{,}7$
7 мотоциклети $\to 0{,}6$

→ Избират се 3 отбора от участниците
↳ единият отбор е завършил, другите два не са

$\mathbb{P}$(избраните три отбора да са от различни категории) = ?

↳ A = {единия от избраните 3 отбора е завършил, другите два не}

K - камион
Ј - джип
M - мотоциклет

$\mathbb{P}$

$H_{i,j,k}$ = {избрани са $\{i,j,k\}$ M, J, K}

$\mathbb{P}(A \mid H_{KKK}) = 3 \cdot (0{,}3)^2 \cdot 0{,}7$ $\qquad \mathbb{P}(H_{KKK}) = \dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{25}{3}}$

$\mathbb{P}(A \mid H_{JJJ}) = 3 \cdot (0{,}2)^2 \cdot 0{,}8$

$\mathbb{P}(A \mid H_{MMM}) = 3 \cdot (0{,}4)^2 \cdot 0{,}6$ $\qquad \mathbb{P}(H_{MMK}) = \dfrac{\binom{7}{2}\binom{10}{1}}{\binom{25}{3}}$

$\mathbb{P}(A \mid H_{KKJ}) = (0{,}3)^2 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot (0{,}7) \cdot (0{,}3) \cdot (0{,}2)$

$\mathbb{P}(A \mid H_{KKM}) = (0{,}3)^2 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot (0{,}7) \cdot (0{,}3) \cdot (0{,}4)$

⋮

↳ Заместваме по Бейс

$$\mathbb{P}(H_{KJM} \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_{KJM})\,\mathbb{P}(H_{KJM})}{\sum_{i,j,k} \mathbb{P}(A \mid H_{ijk})\,\mathbb{P}(H_{ijk})} \ldots$$

отчетно #2

I а) 2% от населението е заразено

$\mathbb{P}(+ \mid Б) = 65\%$

$\mathbb{P}(+ \mid З) = 1\%$

$\mathbb{P}(Б \mid +) = ?$

$$\mathbb{P}(Б \mid +) = \frac{\mathbb{P}(+ \mid Б)\,\mathbb{P}(Б)}{\mathbb{P}(+ \mid Б)\,\mathbb{P}(Б) + \mathbb{P}(+ \mid З)\,\mathbb{P}(З)} = \frac{65\% \cdot 2\%}{65\% \cdot 2\% + 1\% \cdot 98\%} \approx 57{,}02\ ?$$

б) → знае, че е болен

– средно, колко теста ще са му нужни, докато получи отрицателен тест ?

– $\mathbb{P}($2 теста до са достатъчни за да получи сертификата$) = ?$

↳ Нека успех = "отрицателен тест"

→ броим броят неуспехи (положителни) до първият успех

$X \sim Ge(p) \Rightarrow p = \frac{35}{100} \to 35\%$

$\mathbb{E}X = \frac{1}{\frac{35}{100}} = \frac{100}{35}$ → теста до първият отрицателен

$\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = p + (1-p)p = \frac{35}{100} + \left(1 - \frac{35}{100}\right)\frac{35}{100}$

в) X = брой болни , Y = брой положителни тестове

$p = \frac{99}{100}$

$q = \frac{65}{100}$

$r = \frac{2}{100}$

$\mathbb{P}(X=0;\ Y=0) =$

$\mathbb{P}(X=0;\ Y=1) =$

$\mathbb{P}(X=0;\ Y=2) =$

$\mathbb{P}(X=1;\ Y=0) =$

$\mathbb{P}(X=1;\ Y=1) =$

$\mathbb{P}(X=1;\ Y=2) =$

$\mathbb{P}(X=2;\ Y=0) =$

$\mathbb{P}(X=2;\ Y=1) =$

$\mathbb{P}(X=3;\ Y=2) =$

Не я разбирам

$\wedge\_$

2.

Цената за участие 20лв.
Хвърля се зар 100 пъти, за всяка буя → +1лв

а) X_i = "печалбата от хвърляния $25i-24$ до $25i$" за $i=1,2,3,4$;
X - обща печалба

$X_i \sim Bin(25, \frac{1}{6})$, $X \sim Bin(100, \frac{1}{6})$

$\mathbb{E}X = \frac{100}{6} < 20$, т.е. играта не е честна от гледна точка на средна печалба

б) $Y = 4X_1$

$\Rightarrow \mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1$

$DX = n \cdot p \cdot q = 100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{500}{36}$

$D4X_1 = 4 \cdot \frac{500}{36} = \frac{2000}{36}$ → при по-голям брой хвърляния отклонението от средното е по-голямо

в) Нека Y_i е стойността при i-тото хвърляне. Тогава общата сума $Y = Y_1 + \dots + Y_{100}$.

$\mathbb{E}Y_1 = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$
$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{6}{6} + \frac{9}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

$DY_1 = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}$

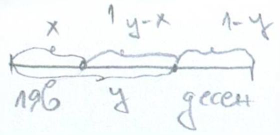
$\mathbb{E}Y^2 = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6} = \frac{91}{6}$

$\Rightarrow \mathbb{E}Y = 100 \cdot \frac{7}{2} = \frac{700}{2} = 350$

$DY = 100 \cdot \frac{35}{12} = \frac{875}{3}$ → от неравенството на Чебишов

$\mathbb{P}(Y \geq 555) = \mathbb{P}(Y - \mathbb{E}Y \geq 205) \leq \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}Y| \geq 205) \leq \frac{DY}{205^2} < 0{,}7\%$

→ т.е. вероятността на печалба е строго по-малка от 1% и рекламата е лъжлива.



$P(\text{ляв} < \text{десен}) = ?$

→ Ако x и y са разстоянията от левия край до двете точки, то ако $y > x$, трябва да е изпълнено
$x < y-x < 1-y$

Контролно #3 СИ

$1 \to 1$
$2 \to 5$
$3 \to 10$

$\boxed{1.}$ а) → Нека най-голямата печалба е y. Тогава:

$$EX = \underbrace{(-2)\cdot\binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^3}_{\text{да не оцели нито веднъж}} + \underbrace{(-1)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2}_{\text{да оцели веднъж}} + \underbrace{3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)}_{\text{да оцели 2 пъти}} + \underbrace{(y-2)\cdot\binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3}_{\text{до оцели 3 пъти}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{3} + (y-2)\cdot\frac{1}{27} =$$

$$= -\frac{4}{27} + \frac{6}{27} + \frac{y-2}{27} = \frac{2}{27} + \frac{y-2}{27} = \frac{y}{27}$$

→ Играта е благоприятна, ако $y > 12$ и неблагоприятна за $y < 12$. В частност за $y = 10$ играта не е честна.

б) Ако е на печалба, вероятността да е оцелил на 3-та стрелба?

↳ Ако пишем Y за попадане и N за пропуск, вероятността играчът да не е оцелил на третия изстрел е:

$$P(YYN \mid \{YYN, YNY, NYY, NNY\}) = \frac{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}{3\cdot\frac{2}{27}+\frac{1}{27}} = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{7}{27}} = \frac{2}{7}$$

↳ Вероятността да е на печалба, а да не е оцелил на третия изстрел е да е оцелил на първите два, понеже ако оцелее само един от двата е на -1, понеже за участие е дал 2, и следователно след втория оцелване вече е на печалба.

→ Търсената вероятност е $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

онтролно #4

1. 1 обикновен зар със 6 страни $\frac{1}{6} \to I$

1 правилен зар с 8 страни $\frac{1}{8} \to II$

P A = {падналото се число}

$P(I \mid A) = ?$

$$P(I \mid A) = \frac{P(A \mid I)\,P(I)}{P(A \mid I)\,P(I) + P(A \mid II)\,P(II)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{8}{96}+\frac{6}{96}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{14^{\,7}}{96_{\,48}}} = \frac{1\cdot 48}{12\cdot 7} = \frac{4}{7}$$

2. I курс – 600 – 80% = 0,8
II курс – 400 – 60% = 0,6
III курс – 200 – 25% =

Избират се 2 случайни студенти, които не са от един курс

P(студентът от горен курс да е от 3-ти) = ?

↳ Нека A = "отишли са 2 различни курсови студенти".

↳ По-големият студент който е отишъл да е от III-ти курс ⇒ или да са отишли I и III или II и III.

P(III | отишъл на лекция) = ? → понеже не не интересува дали вторият е I или II курс

↳ Нека O = "отишъл на лекция"

$$P(III \mid O) = \frac{P(O \mid III)\,P(III)}{P(O \mid III)\,P(III) + P(O \mid II)\,P(II) + P(O \mid I)\cdot P(I)} =$$

$$= \frac{25\cdot\frac{1}{200}}{25\cdot\frac{1}{200} + 60\cdot\frac{1}{400} + 80\cdot\frac{1}{600}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{25}{200}+\frac{60}{400}+\frac{80}{600}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{150}{1200}+\frac{180}{1200}+\frac{160}{1200}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{490}{1200}} = \frac{1200}{8\cdot 49} = \frac{15}{49}$$

3. 20 въпроса с 4 отговори
студент знае 10
10 отговаря по случаен принцип с $p = \frac{1}{4}$

X = "брой верни отговори на студент от всички 20 въпроса"

↳ Нека $X = 10 + Y$ → 10-те дето ги отговаря по случаен принцип

↓ 10-те верни отговори дето ги знае

а)

→ $Y \sim Bin(10, \frac{1}{4})$ → $n = 10,\ p = \frac{1}{4},\ k = 0, \dots, 10$

$P(Y=1) = \binom{10}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{10-1} = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$

$P(Y=2) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{10-2} = 45 \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8 = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8$

$P(Y=3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{10-3} = 120 \cdot \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7$

$P(Y=4) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^6 =$

$P(Y=5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^5$

$P(Y=6) = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^4 =$

$P(Y=7) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7\left(\frac{3}{4}\right)^3$

$P(Y=8) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$P(Y=9) = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)^1$

$P(Y=10) = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$

$P(Y=0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

↖ разпределението

$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3$
$81 \cdot 81 \cdot 3$
$6561 \cdot 3 =$
$16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 3$
$256 \cdot 256 \cdot 3$
65536

б) $P(X > 15) = P(X=16) + P(X=17) + P(X=18) + P(X=19) + P(X=20) = \sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^i\left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}$

в) $EX = 10 \cdot \frac{1}{4} + 10 = 10 + \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$

$DX = n \cdot p \cdot q =$

$DX = D(10) + D(Y) = 0 + 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{30}{16}$

СЕМ изпит 01.02.2023

$\boxed{1.}$ рулетка включва 18 червени, 18 черни и 1 зелено поле
↳ при успешен залог на червено/черно, казиното изплаща заложената сума $\times 2$

а) залозите са само по 1 лв.
колко залога на ден, за да очаква, че ще спечели поне 1000 лв на ден с вероятност 90%?
↳ при този брой залози, вероятността казиното да е на загуба за даден ден?

↳ Нека X_i = печалба на казиното при i-тия залог

X_1	$+1$	-1
	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

$$\mathbb{E}X_1 = 1 \cdot \frac{19}{37} - 1 \cdot \frac{18}{37} = \frac{1}{37}$$

$$DX_1 = 1 - \left(\frac{1}{37}\right)^2 = \frac{1368}{1369} \approx 1 \qquad DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

$$1^2 \cdot \frac{19}{37} + (-1)^2 \cdot \frac{18}{37} = \frac{19}{37} + \frac{18}{37} = \frac{37}{37} = 1$$

↳ Търсим n: $\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n \geq 1000) \geq 90\%$

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n \cdot \frac{1}{37}}{\sqrt{\frac{1368}{1369} \cdot n}} \geq \frac{1000 - n \cdot \frac{1}{37}}{\sqrt{\frac{1368}{1369} \cdot n}}\right) \geq 90\%$$

↳ от ЦГТ можем да търсим n: $\mathbb{P}\left(N(0,1) \geq \frac{1000 - \frac{n}{37}}{\sqrt{\frac{1368}{1369} \cdot n}}\right) \geq 90\%$

т.е. $\Phi\left(\frac{1000 - \frac{n}{37}}{\sqrt{\frac{1368}{1369} \cdot n}}\right) \leq 10\%$ т.е. $\approx$

$$1000 - \frac{n}{37} \leq -1{,}29 \cdot \sqrt{\frac{1368}{1369} \cdot n}, \quad n \geq 47387$$

При фиксирано n

$$\mathbb{P}(X_1+\dots+X_n \ge 0) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1+\dots+X_n - \frac{n}{37}}{\sqrt{\frac{1368}{1368}\cdot n}} \ge -\sqrt{\frac{n}{1368}}\right)$$

ЦГТ

$$\approx 1 - \Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{1368}}\right) \Rightarrow \sqrt{\frac{n}{1368}}$$ ще е сравнително голямо

≈ 6 при $n = 47587$ и следователно

$\mathbb{P}(X_1+\dots+X_n \ge 0) \approx 1$, съответно

$\mathbb{P}(X_1+\dots+X_n \le 0) \approx 0$

б) при залог на конкретно число, печалбата е 36 x залог

↳ кое е по-добре на конкретно число или на черно/червено?

↳ Нека Y_1 и Y_2 са чисти печалби за играта при двете игри

червено/черно

Y_1	$+1$	-1
	$\frac{18}{37}$	$\frac{19}{37}$

конкретно число

Y_2	$+35$	-1
	$\frac{1}{37}$	$\frac{36}{37}$

↳ $\mathbb{E}Y_1 = 1\cdot\frac{18}{37} + (-1)\cdot\frac{19}{37} = \frac{18}{37} - \frac{19}{37} = -\frac{1}{37}$

$\mathbb{D}Y_1 = \mathbb{E}Y_1^2 - (\mathbb{E}Y_1)^2 = 1 - \left(-\frac{1}{37}\right)^2 = 1 - \frac{1}{1369} = \frac{1369-1}{1369} = \frac{1368}{1369} = 0{,}99 \approx 1$

$\mathbb{E}Y_1^2 = 1^2\cdot\frac{18}{37} + (-1)^2\cdot\frac{19}{37} = \frac{18}{37} + \frac{19}{37} = \frac{37}{37} = 1$

↳ $\mathbb{E}Y_2 = 35\cdot\frac{1}{37} + (-1)\cdot\frac{36}{37} = \frac{35}{37} - \frac{36}{37} = -\frac{1}{37}$

$\mathbb{E}Y_2^2 = 35^2\cdot\frac{1}{37} + (-1)^2\cdot\frac{36}{37} = \frac{1225}{37} + \frac{36}{37} = \frac{1261}{37}$

$\mathbb{D}Y_2 = \frac{1261}{37} - \left(-\frac{1}{37}\right)^2 = \frac{1261}{37} - \frac{1}{1369} = \frac{46657-1}{1369} = \frac{46656}{1369}$

↳ Двете игри имат равни очаквания, но втората е по-рискова.

в) 5 лв: 5 пъти на някое число при 5 завъртания, на 5 различни числа при 1 завъртане или 5 лв на черно/червено при 1 завъртане

Игра 1: $E[Z_1+Z_2+Z_3+Z_4+Z_5] = -\frac{5}{37}$

$D[Z_1+\dots+Z_5] = 5\cdot DZ_1 \approx 6129,86$

Игра 2:

Z_1^*	$+31$	-5
	$\frac{5}{37}$	$\frac{32}{37}$

$\to$ $EZ_1^* = -\frac{5}{37}$

$DZ_i \approx 151,47$

Игра 3:

X_1^*	$+5$	-5
	$\frac{18}{37}$	$\frac{19}{37}$

$EX_1^* = -\frac{5}{37}$

$DX_1^* \approx 624,98$

2. $f_{X,Y}(x,y) = cx^3y$ за $x,y\geq 0$, $x+y\leq 1$ и 0 извън областта

а) c, плътността на X и очакването на Y, $\operatorname{cov}(X,Y)$

$y \leq 1-x$

$x \leq 1-y$

$$1 = \int_0^1\int_0^{1-x} cx^3y\,dy\,dx = c\int_0^1 x^3\frac{(1-x)^2}{2}\,dx =$$

$$= c\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 x^3(1-2x+x^2)\,dx = c\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 x^3-2x^4+x^5\,dx =$$

$$= c\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = c\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{30-48+20}{120} =$$

$$= c\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{120} = c\cdot\frac{1}{120} \Rightarrow \boxed{c = 120}$$

1. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3x, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

a) $\mathbb{P}(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{4}) = ?$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{4}}^{x} 3x \, dy \, dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 3x\left(x - \frac{1}{4}\right) dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 3x^2 - \frac{3x}{4} \, dx =$$

$$= \left[\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} - \frac{3x^2}{8}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{8} - \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{3\left(\frac{1}{4}\right)^2}{8} =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{\frac{3}{4}}{8} - \frac{1}{64} - \frac{\frac{3}{16}}{8} = \frac{1}{8} - \frac{3}{32} - \frac{1}{64} + \frac{3}{128} =$$

$$= \frac{16 - 12 - 2 + 3}{128} = \frac{5}{128}$$

***

б) $Cov(X, Y) = ?$

$$\boxed{Cov(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y}$$

$$f_X(x) = \int_0^x 3x \, dy = 3x^2 \Rightarrow \mathbb{E}X = \int_0^1 x\, 3x^2 dx = \left[\frac{3x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 3x \, dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_y^1 = \frac{3}{2} - \frac{3y^2}{2} = \frac{3}{2}(1 - y^2)$$

$$\mathbb{E}Y = \frac{3}{2}\int_0^1 y(1-y^2) \, dy = \frac{3}{2}\int_0^1 y - y^3 dy = \frac{3}{2}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$\boxed{1.}$ A = „турист" $\to$ $P(A) = 1/6$ $\to \frac{2}{3}$

B = „местен" $\to$ $P(B) = 1$ $\to \frac{1}{3}$

а) случаен минувач, коя посока е правилна, ако отговорът е ляво, какво е вероятността да е верен?

$P(\text{вярното да е ляво} \mid \text{казал ляво}) = ?$

$$P(Л \mid \text{казал } Л) = \frac{P(\text{казал } Л \mid Л)\,P(Л)}{P(\text{казал } Л \mid Л)\,P(Л) + P(\text{казал } Л \mid Д)\,P(Д)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot 1\right)\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot 1\right)\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\cdot 0\right)\cdot\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{18}} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{4}{18}+\frac{5}{18}} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{9}{18}} = \frac{4}{9}$$

б) $P(Л \mid \text{казал } ЛЛ) =$

$$= \frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot 1^2}{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{36}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{36}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{25}{36}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{54}+\frac{18}{54}}{\frac{19}{54}+\frac{25}{54}} = \frac{\frac{19}{54}}{\frac{44}{54}} = \frac{19}{44}$$

2. първият бит да бъде 1 с вероятност 1/2
вторият с 1/4 и т.н...

а) очакваният брой единици = ?

Можем да моделираме i-тия бит, $i = 1, 2, \dots, 8$, като
$X_i \sim Ber(2^{i})$

$\Rightarrow E(X_1 + \dots + X_8) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^8} = \frac{255}{256}$

б) очакваното число в 10-тична бройна система = ?

$E[X_1 \cdot 2^7 + X_2 \cdot 2^6 + \dots + X_8 \cdot 2^0] =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2^7 + \frac{1}{4} \cdot 2^6 + \dots + \frac{1}{2^8} \cdot 1 = 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-8} =$

$= 64 + 16 + 4 + 1 + 0,25 + 0,0625 + 0,015625 + 2^{-8} =$

$= 85,33203125$

2022-06

1. таблица 3x3, така че сборът по всички редове, колони и диагонали е равен

- поставя ги в ред отгоре надолу и от ляво на дясно

2	7	
	5	
		8

а) очакван брой познати числа при всяка симулация?

$X =$ „# познати числа" $\sim Bin(5, \frac{1}{10})$

$EX = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$

б) очакван брой симулации до постигане на правилна наредба = ?

$Y =$ „# симулации до правилна наредба" $\to Y \sim Ge(\frac{1}{10})$

но поне това е за 1 число, а те са 5 $\Rightarrow Ge((\frac{1}{10})^5)$

$EY_5 = \frac{1}{p} = \frac{1}{(\frac{1}{10})^5} = 10^5$

3) число n, тако че ще сме посодени 99% след n симулации

. $X =$ „# симулации до първи успех" $\sim Ge(1/10)^5$

$\mathbb{E}X = 10^5$, $DX = \frac{1-p}{p^2} =$

↳ Търсим n: $\mathbb{P}(X > n) \leq 1\%$.

Използваме Чебишов

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}X > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} = 1\%.$$

т.е. $\varepsilon = 10\sqrt{DX}$ и можем да изберем

$$n = [\mathbb{E}X + 10\sqrt{DX}] = 109995,$$

↳ За втората част

1.) $X =$ „# познати числа" $\sim Bin(5, \frac{1}{5})$

$\mathbb{E}X = 5 \cdot \frac{1}{5} = \underline{\underline{1}}$

2.) $\mathbb{E}(Ge(1/5!)) = 5! = \underline{\underline{120}}$

3.) Както по-горе можем да изберем

$n = [\mathbb{E}Y + 10\sqrt{DY}] = 1315$ за $Y \sim Ge(1/5!)$

$\boxed{2.}$ На всяка от страните на празен зар се записва случайно число от 1 до 6, след това зарът се хвърля n пъти

$X =$ „сумата на първите $n-1$ хвърляния"

$Y =$ „сумата на последните $n-1$ хвърляния"

$Cor(X, Y) = ?$

↳ Нека $Z_i =$ падналото се число на i-тия зар

$Cor(Z_1 + \dots + Z_{n-1}, Z_2 + \dots + Z_n)$

$$Cor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}, \quad Cov(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$