· Непрекъснати случайни величини

* деф: (равенство по разпределение):

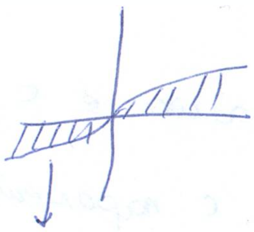
$$X \overset{d}{=} Y \iff F_X = F_Y \overset{X,Y \text{ непрекъснати}}{\iff} f_X = f_Y$$

↳ Равномерно разпределение

↳ всеки интервал с една и съща дължина има една и съща вероятност

↳ Нормалното разпределение още се нарича и Гаусово

↳ камбанката е центрирана в μ

→  → това плюс тук се съкращава с

това минус тук => и става 0 · интеграл от нечетна функция

↳ само за най-заинтересованите, как се смята интеграла по метода на Фейнман

$$\mathbb{E}Z^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1$$

↳ за да сметнем $P(X<x)$, трябва да сведем X до стандартно нормално

$$F_X(x) = P(X<x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

(+) $X \sim Exp(\lambda)$

$Y = \lambda X \sim Exp(1)$

$$\mathbb{P}(Y < x) = \mathbb{P}(\lambda X < x) = \mathbb{P}\left(X < \frac{x}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\lambda \frac{x}{\lambda}} = 1 - e^{-x} =$$

$$= \mathbb{P}(Z < x) \Rightarrow Z \sim Exp(1)$$

$F_Y = F_Z \Rightarrow Y \sim Exp(1)$

$\mathbb{E} Y = \lambda \mathbb{E} X \overset{\mathbb{E}Y = 1}{\Rightarrow} \mathbb{E} X = \frac{1}{\lambda}$

$DY = \lambda^2 DX \overset{DY=1}{\Rightarrow} DX = \frac{1}{\lambda^2}$

↳ Можем да пресметнем вероятността на X, също е с параметър λ, чрез вероятността на Y с параметър единица

↳ X е непрекъснат вектор от сл.вел.

$$f_X(x) = \frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

**

* Деф (независимост в съвкупност)

Нека $X = (X_1, \dots, X_n)$ е непрекъснат вектор от сл. вел. Тогава $X_1, \dots, X_n$ са независими в съвкупност, ако $\forall n > k \geq 2$, $\forall (j_1, \dots, j_k)$ (от различни индекси от 1 до n) съвместната плътност на $Y = (X_{j_1}, \dots, X_{j_k})$,

$$f_Y(y_{j_1}, \dots y_{j_n}) = f_{X_{j_1}}(y_{j_1}) f_{X_{j_2}}(y_{j_2}) \dots f_{X_{j_k}}(y_{j_k})$$

→ X е непрекъснат вектор и $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_X(x) dx$$

* Твърдение: $X = (X_1, X_2)$ е непр. век и $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$. Тогава при допускане, че $\mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}X_2$ съществуват $\mathbb{E}X_1X_2 = \mathbb{E}X_1 \mathbb{E}X_2$ и ако DX_1 и DX_2 съществуват $D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2$

↳ доказателство → виж от лили $\overset{D}{!}$

↳ Ако величините не са независими, не може да сметнем тяхната плътност $\overset{D}{!}$

→ Схема за смяна на променливите:

X_1, X_2 $(X_1 \perp\!\!\!\perp X_2)$ $f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$

интересуваме се от $Y = \begin{matrix} Y_2 = X_1 + X_2 \\ Y_1 = X_1 \end{matrix} \overset{?}{\Rightarrow} f_{Y_2}(y_2) = ?$

↳ $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 + X_2 \end{pmatrix} = g(X)$ $\quad X = h(Y) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \underbrace{Y_2 - Y_1}_{h_2(Y_1, Y_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot 1$ $\quad J(y) = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{y_1 = -\infty}^{\infty} f_X(h(y_1, y_2)) \cdot dy_1$$

интегрираме по всички възможни стойности на y_1

• Ако искаме да определим y_2, ще интегрираме по y_1

* деф (Гама разпределение):

$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$ ако

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx \quad \Rightarrow \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n!$$

гама функция

$$\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \, dx \overset{\beta x = y}{=\!=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} \, dy = 1$$

$\alpha = 1$, $\beta > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\Gamma(1)} e^{-\beta x} = \beta e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

експоненциалната плътност

$\Rightarrow X \sim \Gamma(1, \beta)$ що $X \sim Exp(\beta)$

т.е. гама функцията хваща в себе си експоненциалното разпределение

⊕ $X,\ DX$ $\quad P(|X - EX| > b\sqrt{DX}) \leq \dfrac{DX}{b^2 DX} = \dfrac{1}{b^2}$

$\to EX = 0,\quad b = 10 \quad \Rightarrow P(|X| > 10\sqrt{DX}) \leq \dfrac{1}{100}$

← ЦГТ

⊕ $\mu = 0;\quad \dfrac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$

$$P(S_n > 0) = P\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} > 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(Z > 0) = \frac{1}{2}$$

D!?

Всичко става на ниво вероятности

поради симетрия е $\frac{1}{2}$

⊕ Примера за дърпане на въже

$$S_n = Д_n - Л_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$X_j = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ -1, & 1/2 \end{cases}$$

$EX_1 = 0$

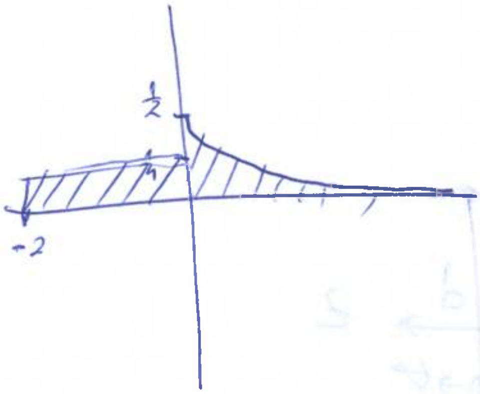
$DX_1 = EX_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \approx Z \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow P(S_n > 0) = P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 0\right) \approx P(Z > 0) = \frac{1}{2};$$

(4) $f_{Y_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{4}, & x \in (-2, 0) \end{cases}$

$EY_1 = 0$

$DY_1 = 1$



$S_n' = \sum_{j=1}^{n} Y_j$

$$\boxed{\frac{S_n'}{\sqrt{n}} \sim \frac{S_n}{\sqrt{n}} \sim Z}$$

→ една сл. вел. с две възможни стойности (с ясно поведение - бинарна) и по веден често на това количество $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$ е едно и също с една сл. вел. която по принцип може да вземе безкрайно много стойности!

→ това показва универсалността на ЦГТ!

функция на моментите

(1) $X \sim Exp(1)$

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x(1-t)} dx =$$

$$= \frac{1}{1-t}, \text{ за } t < 1$$

* деф (моменти от ред k): Нека X е сл. вел. Тогава

$\mathbb{E}X^k$ е момент от ред k

→ $\mathbb{E}X^k = \sum_i x_i^k \, \mathbb{P}(X=x_i)$ → дискретни

$\mathbb{E}X^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\,dx$ → непрекъснати

k е число, като 1, 2, 3, 4, ...

* деф (абсолютни моменти от ред k и централни моменти от ред k)

Нека X е сл. вел. Тогава $\mathbb{E}|X|^k$ е абсолютен момент от ред k

→ $\mathbb{E}|X|^k = \sum_i |x_i|^k \, \mathbb{P}(X=x_i)$ → дискретни

→ $\mathbb{E}|X|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f_X(x)\,dx$ → непрекъснати

и $\mathbb{E}|X-\mathbb{E}X|^k$ – нарича се централен момент заради това изваждане на средното на X

се нарича абсолютен централен момент от ред k

→ за $k=2$ имаме дисперсията $DX = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2$

Чебишев

X, DX $\quad P(|X-\mathbb{E}X| > \underbrace{b\sqrt{DX}}_{a}) \le \frac{DX}{b^2 DX} = \frac{1}{b^2}$

$\to \mathbb{E}X = 0; \quad b = 10 \quad P(|X| > 10\sqrt{DX}) \le \frac{1}{100}$ → може на изпит

ЗГЧ

$(X_i)_{i=1}^{\infty}$ $\quad X_i \sim Ber(p)$, $\quad p \in (0,1)$

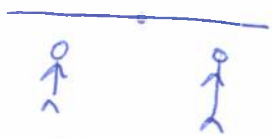
УЗГЧ $\quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.с} p = \mathbb{E}X_1$

↳ т.е. ако вземем сумата от всички гласувани, и искаме да видим колко е средното, то ще клони почти сигурно към $\mathbb{E}X_1$, защото са независими и еднакво разпределени

Хвърляне на монета $\quad X_i \sim Ber(\frac{1}{2})$

$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.с} \frac{1}{2}$, ако за много голям n, този резултат е далече от $\frac{1}{2}$, значи, че монетата не е честна

↳ също и примера за рулетката



$N_1 \qquad X_i = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ -1, & 1/2 \end{cases}$

$E - 1/1 = 0$

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i = \Delta_N - \Lambda_N$ → резултантната сила

$\frac{S_N}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{п.с.} 0 \quad \to \quad P(S_n > 0) = P(\Delta_N > \Lambda_N) \sim \frac{1}{2}$

↓ за големи N

това че пропорцията клони към 0, не означава, че и вероятността клони към 0. Това е много грешно

То реално, все някоя единия страна ще спечели и вероятността няма как да е 0

$\cancel{P(S_n = 0) \xrightarrow[N\to\infty]{} 1}$ → non-sense

и това клони към 0, защото $P(S_n > 0) \sim \frac{1}{2}$, ако обърнем равенството $P(S_n \leq 0) \sim \frac{1}{2}$ и това което остава за $P(S_n = 0) \to 0$?

ЦГТ

УЗГЧ : $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.с} \mu$

Това което решава ЦГТ

$\varepsilon_n = \frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow[n\to\infty]{п.с} 0$, Колко бързо?

Можем ли да кажем нещо за ε_n?

$\to \quad Z_n := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right) = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$

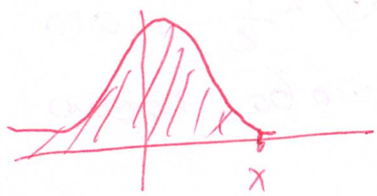
→ Независимо какви сл. величини имаме, стига да имаме крайни μ и σ^2 и да ги знаем, ние може да сметнем

→ това е универсалността на ЦГТ!

⊕ $Z \sim N(0,1)$, $\Phi(x)$ е непрекъсната, $C_Z = C_\Phi = \mathbb{R}$

множество точки на прекъснатост

за това нямаме точки на прекъсване?



$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$

$a<b$

$P(Z_n<b) - P(Z_n<a) = P(Z_n\in[a,b))$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\Phi(b) - \Phi(a)$

$=$

$P(Z\in[a,b))$

$+\ P(Z_n<b) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(Z<b) = \Phi(b)\ ,\ \forall b\in C_\Phi = \mathbb{R}$

+ сх. по разпределение

ЦГТ

(+) $x_j = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ -1, & 1/2 \end{cases}$

$N = 10^6$ $\qquad S_N = \sum_{j=1}^{N} x_j = Д_N - A_N$

$\mathbb{P}(S_n \geq \overset{5\times}{1000}) = \mathbb{P}(\text{да има движение})$

$\frac{S_N}{\sqrt{N}} = \frac{S_{10^6}}{1000} \approx Z \qquad \mathbb{P}\left(\frac{S_{10^6}}{10^3} > \underset{5}{1}\right) \approx \mathbb{P}(Z \geq \underset{5}{1}) = 1 - \Phi(\underset{5}{1}) \approx 0$

(+) Каква е вероятността да съм збъркал с ε единици?

(+) ТВ: $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, то $M_X(t) \overset{?}{=} \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$, $t < \beta$

↳ доказателство:

$$M_X(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\, dx =$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x(\beta - t)}\, dx \quad \overset{x(\beta-t)=y}{=\!=}$$

$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y}$ ↓ е плътността на $\Gamma(\alpha, 1)$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\beta-t)^\alpha} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy = \frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^\alpha}, \quad t < \beta$$

$= 1$

$$\mathbb{E}X = M_X'(0) = \frac{\alpha \beta^{\alpha}}{(\beta - t)^{\alpha+1}} \Bigg|_{t=0} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\mathbb{E}X^2 = M_X''(0) = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta^{-\alpha}}{(\beta - t)^{\alpha+2}} \Bigg|_{t=0} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

...

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}\left(w, \frac{z-w}{2}\right) \cdot |J| =$$

заместваме новите стойности за x и y в съвместната плътност и получаваме новата и определяме границите

$$\Rightarrow f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z,W}(z,w)\, dw$$

→ границите са границите за w → т.е. намираме маргиналната плътност на z чрез w

При $n \to \infty$, t-разпределението става като стандартното нормално $\Rightarrow$ това следва от универсалността на ЦГТ, която казва, че при $n \to \infty$, разпределението на извадковото средно клони към стандартното нормално разпределение, без значение какво е разпределението на извадката.

Единственото изискване за ЗГЧ е да има добре дефинирано очакване

$$Z = X + 2Y$$

$$\left| \begin{aligned} Z &= X + 2Y \\ W &= X \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} X &= W \\ Y &= \frac{Z - W}{2} \end{aligned} \right.$$

4 Конволюция $X+Y=Z$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx$$

4 $X-Y=Z \rightarrow Z = X+(-Y)$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(x-z)\, dx$$

7 $X+Y=Z$

$X, Y \sim U(0,1) \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

→ тъй като X и Y са независими и $X, Y \in [0,1]$, то тяхната сума, може да попадне в интервала $[0,2]$

$$\Rightarrow f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

→ формулата за конволюция

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx$$

→ тъй като X и Y са равномерни в $[0,1]$, плътността на разпределението $f_Z(z)$ ще зависи от това, в кой интервал ще попадне z

⇒ разглеждаме 2 случая:

- $z \in [0,1]$
- $z \in [1,2]$

• $z \in [0,1] \Rightarrow$ X и Y $\in [0,z]$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \int_0^z 1\cdot 1\, dx = \int_0^z 1\, dx = \underline{\underline{z}}$$

• $z \in [1,2]$ → $z-x$ трябва да остане в интервала $[0,1]$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \int_{z-1}^{1} 1\cdot 1\, dx = \int_{z-1}^{1} 1\, dx = 1-(z-1) = \underline{\underline{2-z}}$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \begin{cases} z, & z \in [0,1) \\ 2-z, & z \in [1,2] \end{cases}$$

$X + Y = Z$

$X, Y \sim Exp(\lambda)$

$$\Rightarrow f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

ќе применаме формулата за конволуција

$$f_Z(z) = \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x)\,dx =$$

$$= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(z-x)}\,dx =$$

$$= \lambda^2 \int_0^z e^{\cancel{-\lambda x} - \lambda z + \cancel{\lambda x}}\,dx = \lambda e^{-\lambda z} \int_0^z 1\,dx = \underline{\lambda^2 e^{-\lambda z} \cdot z}$$

$\Rightarrow \Gamma(2, \lambda)$

доказателство ЦГТ

! Ще се опитаме да докажем, че ФМ на редицата Z_n, се схожда към ФМ на Z, т.е. M_Z

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z \sim N(0,1)$$

$$M_{Z_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{S_n - n\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} Y_j \text{ , където}$$

полагаме $Y_j := \frac{X_j - \mu}{\sigma}$

! Допускаме, че M_{X_1} е добре дефинирано за $\forall t \in \mathbb{R}$

~~$\ast$ $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ $M_{X_1}(t) = M_{X_j}(t)$ са добре дефинирани за $\forall t \in \mathbb{R}$~~

$$M_{y_j}(t) \overset{*)}{=} e^{-\frac{\mu}{\sigma}} M_{x_j}\left(\frac{t}{\sigma}\right) = e^{-\frac{\mu}{\sigma}} M_{x_1}\left(\frac{t}{\sigma}\right) = M_{y_1}(t)$$

понеже едно и

зашо правим тази трансформация, къде изчезва t ?

* От свойството на ФМ, което гласи:

$Y = aX + b$, то $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$

$\Rightarrow Y = \dfrac{X_j - \mu}{\sigma} \Rightarrow M_Y(t) = e^{-\frac{\mu}{\sigma}} M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)$

$\Rightarrow$ Цел: $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} Y_j \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$

$$M_{Z_n}(t) = M_{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} Y_j}(t) = E e^{\frac{t\sum_{j=1}^{n} Y_j}{\sqrt{n}}} = M_{\sum_{j=1}^{n} Y_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \overset{4)}{=}$$

4) $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$

т.е. ФМ на Z_n в точката t е ФМ на сумата Y_j в точката $\frac{t}{\sqrt{n}}$

$$\stackrel{(=)}{=} \prod_{j=1}^{n} M_{Y_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

↳ X_j са независими
Y_j е детерминистична трансформация на X_i =>
и те са независими

тези ФМ са една и съща за всяко i, защото те всички са равни на M_{Y_1}

=> Заключаваме, че $M_{Z_n}(t) = \left(M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$

↳ Сега, да се опитаме да разберем M_{Y_1}

$$M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!\,(\sqrt{n})^j}\,\mathbb{E}Y^j = 1 + \cancel{\frac{t^1}{\sqrt{n}}\,\mathbb{E}Y_1} + \frac{t^2}{2n}\,\mathbb{E}Y_1^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \stackrel{(=)}{=}$$

$$\stackrel{(=)}{=} 1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$$, понеже

$$\mathbb{E}Y_1 = \frac{\mathbb{E}X_1 - \mu}{\sigma} = 0$$, защото $\mathbb{E}X_1 = \mu$

$$DY_1 = \frac{1}{\sigma^2} D(X_1 - \mu) = \frac{DX_1}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

↳ $o\left(\frac{t^2}{n}\right)$ → разбираме, че останалите членове на сумата, наистина, няма да имат значение

$$\Rightarrow M_{Z_n}(t) = \left(M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \stackrel{(=)}{=}$$ по деф. на експоненциалната функция

$$\stackrel{(=)}{=} \left(1 + \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{n} + o\left(\frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{t^2}{2}} = M_Z(t)\ !$$