ВиС 2023

1.

**1. Дефинирайте случайна величина във вероятностно пространство.**

→ Нека $V$ е вероятностно пространство. Тогава $X: \Omega \to \mathbb{R}$ е случайна величина, тогава когато $\forall a,b,\ a,b \in \mathbb{R}$ е в сила $X^{-1}((a,b)) \in \mathcal{A}$, където $\underset{B \in \mathbb{R}}{X^{-1}(B)} = \{w \in \Omega \mid X(w) \in B\}$. Т.е. трябва да имаме възможността да кажем каква е вероятността $X$ да е между $a$ и $b$.

**2. Въведете понятието пораждаща функция на случайна величина** → деф за диск? ???

→ Нека $X$ е целочислена, неотрицателна, дискретна случайна величина във вероятностното пространство $V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, като $X: \Omega \to \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ тогава

$$g_X(s) = \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X=k) \text{ за } |s| \leq 1$$

се нарича пораждаща функция

**3. Въведете Бернулиево и Биномно разпределение**

→ $X \sim Ber(p)$, $p \in (0,1)$ и има следната таблица

| $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $q$ | $p$ |

, $p+q=1$

→ Брой успехи от $n$ експеримента в схемата на Бернули, с вероятност за успех $p$

$X \sim Bin(n,p)$, тогава таблицата е следната:

| $X$ | $0$ | $1$ | $\dots$ | $k$ | $\dots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $q^n$ | $n \cdot p \cdot q^{n-1}$ | | $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ | $\dots$ | $p^n$ |

4. Формулирайте теоремата на Моавър-Лаплас

→ Позволява да се използва нормалното разпределение за апроксимация на сумата от много случайни величини, които имат подобно разпределение

→ $Z \sim N(0,1)$, $X_n \sim Bin(n,p)$, $p \in (0,1)$

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}(Z \le x)$$

2. Нека $U \sim U(0,1)$, $X \to U$ за по-лесни сметки

а) Намерете очакването и дисперсията на $U$

$X \sim U(0,1)$

$$\mathbb{E}X = \int_a^b x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{1-0}\,dx = \int_0^1 x \cdot 1\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot 1\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

2. Намерете функцията на моментите на $U$ и чрез нея намерете $\mathbb{E}[U^k]$, $k \geq 0$

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \int_0^1 e^{tx} \cdot 1\,dx = \frac{1}{t} e^{tx}\Big|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t \to 0]{\text{по Лопитал}} 1$$

↳ $\frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\Big|_{t=0} = \mathbb{E}X^k$

$\boxed{3.}$ 1.) Въведете сходимост по вероятност и формулирайте слабия закон за големите числа

↳ Казваме, че редицата $X_n$ клони към случайната величина $X$ по вероятност, ако

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{и пишем} \quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X, \ \forall \varepsilon > 0.$$

↳ Нека имаме редица от еднакво разпределени и независими случайни величини $(X_i)_{i \geq 1}$ с очаквания съответно $\mathbb{E}X_i$. Казваме, ~~че~~ за $X$ е изпълнен (слаб) ЗГЧ, ако:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$$

2. За всяка година $n \geq 1$ растежът на цената на актива (като пропорция) се моделира с $e_{2n-1} \sim Exp(1)$ за първото шестмесечие и с $e_{2n} \sim Exp(1)$ за второто. Случайните величини $(e_n)_{n\geq 0}$ са независими в съвкупност

a) Ако първоначалната цена на акцията е $Y_0 = 1$, що колко е цената $Y_N$ след $N$ шестмесечия.

$e_{2n-1} \sim Exp(1)$

$e_{2n} \sim Exp(0,9)$

$$\to Y_N = Y_0 \cdot e_{2n-1} \cdot e_{2n} =$$

$$= Y_0 \cdot \prod_{n=1}^{N} e_{2n-1} \cdot \prod_{n=1}^{N} e_{2n}$$

5. Нека $X \sim Poi(\lambda), \lambda > 0$, и со дадени наблюдения над $X$, означени с $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

1) Намерете пораждащата функция на $X$ и изведете чрез нея очакването и дисперсията на $X$.

$$X \sim Poi(\lambda) \Rightarrow f_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \ k \geq 0$$

$$g_X(s) = \mathbb{E} s^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

$$g'_X(s) = \frac{d}{ds} e^{\lambda(s-1)} = \lambda \cdot e^{\lambda(s-1)} \Big|_{s=1} = \lambda \cdot e^0 = \lambda$$

$$g''_X(s) = \frac{d^2}{ds^2} e^{\lambda(s-1)} = \frac{d}{ds} \lambda \cdot e^{\lambda(s-1)} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda(s-1)} \Big|_{s=1} = \lambda^2 \cdot e^0 = \lambda^2$$

$$\mathbb{E}X = \lambda$$

$$\cancel{DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2}$$

$$DX = g'_X(1) + g''_X(1) - (g'_X(1))^2 =$$

$$= \lambda + \cancel{\lambda^2} - \cancel{\lambda^2} = \lambda$$

2) Намерете пораждащата функция на $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ и определете разпределението на $Y$

→ понеже $Y_1, \dots, Y_n$ са независими и еднакво разпределени, пораждащата функция на сумата, ще бъде произведение от отделните пораждащи функции

$$\Rightarrow g_Y(s) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(s) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda(s-1)} = \left(e^{\lambda(s-1)}\right)^n = e^{n\lambda(s-1)}$$

$$\Rightarrow Y \sim Poi(n\lambda)$$

3.) Предложете точкова оценка за $\lambda$ по метода на моментите и определете дали тя е неизместена и състоятелна

→ теоретични моменти: $EX = \lambda$

→ емпирични моменти: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

→ приравняване $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \overline{X}$$

→ оценката е неизместена ако $E[\hat{\lambda}] = \lambda$

$E\hat{\lambda} = E\overline{X} = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\lambda = \lambda \Rightarrow \hat{\lambda}$ е неизместена оценка

→ състоятелна ако $\hat{\lambda} = \overline{X} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \lambda \Rightarrow \hat{\lambda}$ е състоятелна

6

* Поради закона за големите числа, средното аритм. на независими и еднакво разпределени сл. вел. с крайно очакване и дисперсия се сходяда по вероятност към математическото очакване на разпределението !