Примерни задачи теория

$\boxed{1}$

$A \perp\!\!\!\perp B \iff \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$ $\qquad \mathbb{P}(1_A = 1) = \mathbb{P}(A)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(1_{A\cap B} = 1) = \mathbb{P}(1_A 1_B = 1) = \mathbb{P}(1_A = 1 \cap 1_B = 1) =$

$= \mathbb{P}(1_A = 1)\,\mathbb{P}(1_B = 1) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

$\boxed{2}$ $cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}Y - \mathbb{E}XY + \mathbb{E}X\mathbb{E}Y] =$

$= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y - \cancel{\mathbb{E}X\mathbb{E}Y} + \cancel{\mathbb{E}X\mathbb{E}Y} = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0$ т.е.

a) $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$

$$\sum_i \sum_j x_i x_j\, \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) = \sum_i x_i\, \mathbb{P}(X = x_i) \sum_j x_j\, \mathbb{P}(Y = y_j)$$

$\Rightarrow$ ако $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow Cov(X,Y) = 0$

б) $n > 3$

A = „третото хвърляне е ези"

B = „общо са се паднали 3 езита"

↳ При какви условия A и B са независими?

$\Rightarrow B \sim Bin(n,p)$, $k = 3 \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B=3) = \binom{n}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

Нека X_i = „на i-тата позиция се пада ези", $1 \le i \le n$

X_i са независими в съвкупност бернулиеви експерименти

$\Rightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(X_3 \cap \{$на останалите $n-1$ позиции разпределяме 2 успеха$\}) = \mathbb{P}(X_3) \cap \mathbb{P}($на останалите ...$) = p \cdot \binom{n-1}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-1-2}$

↳ За да са независими е необходимо и достатъчно:

$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

$$\binom{n-1}{2} p^3 (1-p)^{n-3} = \binom{n}{3} p^4 (1-p)^{n-3} \quad \text{т.е. когато}$$

$$p = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(n-3)!\,2!}}{\frac{n!}{(n-3)!\,3!}} = \frac{(n-1)!\,\cancel{(n-3)!}\,3!^{3}}{\cancel{(n-3)!}\,\cancel{2!}\,n!} = \frac{\cancel{(n-1)!}\,3}{n\,\cancel{(n-1)!}} = \frac{3}{n}$$

$p = \frac{3}{n} \Rightarrow n \cdot p = 3 \Rightarrow$ A и B са независими когато $\underline{\underline{n \cdot p = 3}}$

$\boxed{3.}$ X н.с.в. с $F_X(x)$, $\wedge$

$Y = F(X) \in U(0,1)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) \overset{F\uparrow}{=} P(X < F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$$

понеже е непрекъсната и монотонно растяща, тя е и обратима

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \Rightarrow Y \sim U(0,1)$, тъй като $F_U(t) = t = F_Y(t)$,

$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1 \qquad \forall t \in [0,1]$

$\boxed{4.}$ Нека $X = (X_1, X_2)$. $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \Leftrightarrow F_X(x) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$ или

$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = P(X_1 \leq x_1) P(X_2 \leq x_2)$ за всяко $x = (x_1, x_2)$.

*) $\Leftarrow$ X и Y са некорелирани когато имаме че $EXY = EX\,EY$

$$\int\limits_{DX}\int\limits_{DY} xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int\limits_{DX} x f_X(x) dx \int\limits_{DY} y f_Y(y)\, dy$$

2) $X \sim N(0,1)$

$M_X(t)$

Нека X е случайна величина. Ако $\mathbb{E}e^{tX}$ съществува, за $|t|<\varepsilon$ и за някое $\varepsilon>0$, то $M_X(t)=\mathbb{E}e^{tX}$ за $|t|<\varepsilon$, се нарича функция на моментите.

$X \sim N(0,1)$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\Bigg|_{\substack{\mu=0\\ \sigma^2=1}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}dx$$

$$\Rightarrow M_X(t)=\mathbb{E}e^{tX}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx+\cancel{t^2})+\frac{t^2}{2}}dx=e^{\frac{t^2}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(x-t)^2}dx}_{f_X(x),\ X\sim N(t,1)}=e^{\frac{t^2}{2}}$$

НЕ РАЗБИРАЕМО

РАЗБИРАЕМО

$$M_X(t)=\mathbb{E}e^{tX}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx-\frac{x^2}{2}}\ \circledequal \qquad tx-\frac{x^2}{2}=-\frac{1}{2}(x^2-2tx+t^2-t^2)=-\frac{1}{2}((x-t)^2-t^2)$$

$$\circledequal\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\underbrace{e^{\frac{t^2}{2}}}_{\text{константа спрямо } x}=e^{\frac{t^2}{2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-(x-t)^2}{2}}dx}_{f_X(x),\ X\sim N(t,1)}=1 \Rightarrow$$

$\mu=t$, $\sigma^2=1$ $\Rightarrow f_X(x)=1$

$$\Rightarrow M_X(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$\mathbb{E} X^k = \frac{d}{dt^k} M_X(t)\Big|_{t=0}, \quad k \ge 1 \quad \rightarrow$$ от свойство 3) на функция на моментите

$$\Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{d}{dt} e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = \frac{2t}{2} \cdot e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = 0 \cdot 1 = \underline{\underline{0}}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{d}{dt^2} e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} t e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = e^{\frac{t^2}{2}} + t \cdot \frac{2t}{2} \cdot e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} =$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} + t^2 \cdot e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = e^0 + 0 \cdot e^0 = 1 + 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\mathbb{E}X^3 = \frac{d}{dt^3} e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{\frac{t^2}{2}} + t^2 \cdot e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} =$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot t + 2t \cdot e^{\frac{t^2}{2}} + t^2 \cdot t e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = 3t \cdot e^{\frac{t^2}{2}} + t^3 \cdot e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} =$$

$$= 3 \cdot 0 \cdot e^0 + 0^3 \cdot e^0 = \underline{\underline{0}}$$

3.) $X \sim N(0,1) \Rightarrow \mathbb{E}X = 0$ (от 4 a)

Търсим полином $Y = g(X)$, за който е изпълнено $cov(X,Y) = 0$ и $X \not\perp\!\!\!\perp Y$.

Той като $Y = g(X)$ е функция на X, то $Y \not\perp\!\!\!\perp X$. За да бъдат некорелирани е необходимо:

$$0 = cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \underbrace{\mathbb{E}X}_{=0}\mathbb{E}Y = \mathbb{E}XY = \mathbb{E}Xg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x)\, f_X(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot g(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$ Последното ще се нулира, когато функцията под интеграла е нечетна, тоест е еквивалентно на това $xg(x)$ да е нечетна или $g(x)$ да е четна. $Y = x^2$, $Y = x^4$, …, $Y = \cos(x)$, $Y = e^{x^2}$, $Y = e^{-x^2}$ са валидни опции.

5. $f_X(x) = 3(1-x)^2, \quad x \in (0,1), \quad M_X(t) = ?, \quad \mathbb{E}X^2 = ?$

↳ Нека първо да проверим дали плътността е добре дефинирана:

$$1 \overset{?}{=} \int_0^1 3(1-x)^2\,dx = 3\int_0^1 1-2x+x^2\,dx = 3\left(\int_0^1 1\,dx - 2\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 x^2\,dx\right)$$

$$= 3\left([x]_0^1 - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right) = 3\left(\cancel{1} - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + \frac{1}{3}\right) = 3\cdot\frac{1}{3} = 1$$

↳ X е добре дефинирана

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \int_0^1 e^{tx}\cdot 3(1-x)^2\,dx = 3\int_0^1 e^{tx}(1-2x+x^2)\,dx =$$

$$= 3\left(\int_0^1 e^{tx} - 2xe^{tx} + x^2e^{tx}\,dx\right) = \underbrace{3\int_0^1 e^{tx}dx}_{I} - \underbrace{6\int_0^1 xe^{tx}dx}_{II} + \underbrace{3\int_0^1 x^2e^{tx}\,dx}_{III}$$

$$I: \quad 3\int_0^1 e^{tx}\,dx = 3\cdot\frac{1}{t}\int_0^1 e^{tx}\,dtx = 3\cdot\frac{1}{t}\cdot\left[e^{tx}\right]_0^1 = 3\cdot\left(\frac{e^t}{t} - \frac{1}{t}\right)$$

$$II: \quad \int_0^1 xe^{tx}\,dx = \frac{1}{t}\int_0^1 x\,de^{tx} \overset{\text{и.ч.}}{=} \frac{1}{t}\left(\left[xe^{tx}\right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 e^{tx}\,dx}_{I}\right) =$$

$$= \frac{1}{t}\left(e^t - \frac{e^t}{t} - \frac{1}{t}\right) = \frac{e^t}{t} - \frac{e^t-1}{t^2} = \frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2} + \frac{1}{t^2}$$

$$III: \quad \int_0^1 x^2e^{tx}\,dx = \frac{1}{t}\int_0^1 x^2\,de^{tx} \overset{\text{и.ч.}}{=} \frac{1}{t}\left(\left[x^2e^{tx}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{tx}\,dx^2\right) = \frac{1}{t}\left(\left[x^2e^{tx}\right]_0^1 - \underbrace{2\int_0^1 xe^{tx}dx}_{II}\right)$$

*

$$= \frac{1}{t}\left(e^t - 2\left(\frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2} + \frac{1}{t^2}\right)\right) = \frac{e^t}{t} - \frac{2e^t}{t^2} + \frac{2e^t}{t^3} - \frac{2}{t^3}$$

$$M_X(t) = 3\left(\frac{e^t}{t} - \frac{1}{t}\right) - 6\left(\frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2} + \frac{1}{t^2}\right) + 3\left(\frac{e^t}{t} - \frac{2e^t}{t^2} + \frac{2e^t}{t^3} - \frac{2}{t^3}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{3e^t}{t}} - \frac{3}{t} - \cancel{\frac{6e^t}{t}} + \cancel{\frac{6e^t}{t^2}} - \frac{6}{t^2} + \cancel{\frac{3e^t}{t}} - \cancel{\frac{6e^t}{t^2}} + \frac{6e^t}{t^3} - \frac{6}{t^3} =$$

$$= -\frac{3}{t} - \frac{6}{t^2} + \frac{6e^t}{t^3} - \frac{6}{t^3}$$

* от свойствата

$$EX^k = \frac{d}{dt^k} M_X(t)\Big|_{t=0}, \quad k \geq 1$$ и не ни трябва за този случай

$$EX = \int_0^1 x\,3(1-x)^2\,dx = 3\int_0^1 x(1-2x+x^2)\,dx = 3\int_0^1 x - 2x^2 + x^3\,dx =$$

$$= 3\int_0^1 x\,dx - 6\int_0^1 x^2\,dx + 3\int_0^1 x^3\,dx = 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{6}{3} + \frac{3}{4} = \frac{6+3}{4} - 2 = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$EX^2 = 3\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx = 3\int_0^1 x^2 - 2x^3 + x^4\,dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + 3\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{3} - \frac{6}{4} + \frac{3}{5} = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{5} = 1 - \frac{15+6}{10} = 1 - \frac{9}{10} = \frac{10-9}{10} = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$$

$\boxed{7}$ зар с 2 червени и 4 черни страни
зар с 4 червени и 2 черни страни

а) $p = 1/6$

$A =$ „падa се черна страна при хвърляне"

$Y =$ „избираме един от двата зара"

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} V \text{, където } V = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{когато е първия зар} \\ \frac{1}{3}, & \text{когато е втория зар} \end{cases},$$

но това не е ЗГЧ, защото V е случайна величина а не константа

$$X_i = \frac{2}{3} \cdot \mathbb{1}\{Y=1\} + \frac{1}{3} \cdot \mathbb{1}\{Y=2\}$$

$$\mathbb{E}V = \frac{2}{3} \cdot \mathbb{E}\mathbb{1}\{Y=1\} + \frac{1}{3} \cdot \mathbb{E}\mathbb{1}\{Y=2\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{2}{6}}\ \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

б) ~~Казваме, че ЗГЧ~~

Нека имаме редицата от еднакво разпределени и независими случайни величини $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ с очаквания съответно $\mathbb{E}X_i$. Казваме, че за X е изпълнен (слаб) ЗГЧ, ако:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}X_i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

За $Y_1, \dots, Y_n$ независими и еднакво разпределени с $DX_i < \infty$, е в сила ЗГЧ:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}X_i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0 \iff \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}X_1$$

8] $X =$ „# паднати се 6-ци" $\quad DX = n \cdot p \cdot q = 900 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} =$

$X \sim bin(900, \frac{1}{6})$

$EX = n \cdot p = 900 \cdot \frac{1}{6} = 150$, $\mu = EX_1 = \frac{1}{6}$

$\sigma^2 = \frac{5}{36} \Rightarrow DX_1 = p \cdot (1-p) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

$P(120 \leq S_{900} \leq 180) \leq \frac{31}{36}$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu n}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0,1), \text{ т.е. } \frac{S_{900} - 900 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{900 \cdot \frac{5}{36}}} \to N(0,1)$$

$$\Rightarrow P(120 \leq S_{900} \leq 180) = P(120 - 150 \leq \underset{150}{S_{900}} \leq 180 - 150) =$$

$$= P\left(\frac{-30 - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq N(0,1) \leq \frac{30 - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = \frac{-30 \cdot 6}{30 \cdot \sqrt{5}} \leq N(0,1) \leq \frac{30 \cdot 6}{30 \cdot \sqrt{5}}$$

?

Изпит СЕМ 03.02.2021

$\boxed{1.}$ а) Вероятностната функция $\mathbb{P}$

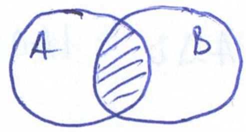
Нека $\mathcal{A}$ е σ-алгебра върху множеството от елементарни събития Ω. Тогава изображението $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$ се нарича вероятност / вероятностна функция, ако:

а) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

б) ако $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

в) ако $\forall i \geq 1$, $A_i \in \mathcal{A}$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ (непресичащи се събития), $\forall i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

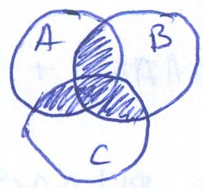
б) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$



$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Нека да поставим $D = A \cup B$, то

$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(D \cup C) \leq \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(C)$



$\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$

$A\Delta B := (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$

$\Rightarrow 1_{A\Delta B} = 1_{(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)} = 1_{(A\cap B^c)} + 1_{(A^c\cap B)}$

$\Rightarrow 1_{A\Delta B}\,\Delta C = \left(1_{(A\cap B^c)} + 1_{(A^c\cap B)}\right)\Delta C$

* по дефиниция, различието на две множества X и Y се дефинира като $X\Delta Y = (X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$

$\Rightarrow \left(1_{(A\cap B^c)} + 1_{(B\cap A^c)}\right)\Delta C = \left(\left(1_{(A\cap B^c)} + 1_{(A^c\cap B)}\right)\setminus C\right)\cup\left(C\setminus\left(1_{(A\cap B^c)} + 1_{(A^c\cap B)}\right)\right)$

$\Rightarrow 1_{A\Delta B\Delta C} = \left((1_{A\Delta B^c} - 1_C) + (1_{B\cap A^c} - 1_C)\right) + \left((1_C - 1_{A\cap B^c}) + (1_C - 1_{A^c\cap B})\right)$

б) $P(A\Delta B) \le P(A\Delta C) + P(B\Delta C)$

~~$P(A\Delta B)$~~ $A\Delta B = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B) \rightarrow$ симетрична разлика между множествата A и B

$P(A\Delta B) = P((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)) =$

$= P(A\cap B^c) + P(A^c\cap B) - P((A\cap B)\cap(A^c\cap B))$

$P(A\Delta C) = P((A\cap C^c)\cup(A^c\cap C)) =$

$= P(A\cap C^c) + P(A^c\cap C) - P((A\cap C^c)\cap(A^c\cap C))$

$P(B\Delta C) = P((B\cap C^c)\cup(B^c\cap C)) =$

$= P(B\cap C^c) + P(B^c\cap C) - P((B\cap C^c)\cap(B^c\cap C))$

$\boxed{3}$ $\mathbb{P}(A|B) \geq \frac{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-1}{\mathbb{P}(B)}$

а)

↳ Това неравенство се редуцира до

$\mathbb{P}(A\cap B) \geq \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-1$ и това е изпълнено, понеже

$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B)$

б) Ако $\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C)$ и $\mathbb{P}(A|C^c) > \mathbb{P}(B|C^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap C) > \mathbb{P}(B\cap C)$;

$\mathbb{P}(A|C^c) > \mathbb{P}(B|C^c) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap C^c) > \mathbb{P}(B\cap C^c)$

↳ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|C)\,\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A|C^c)\,\mathbb{P}(C^c)$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|C)\,\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B|C^c)\,\mathbb{P}(C^c)$

↳ да анализираме сумите $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \left(\mathbb{P}(A|C) - \mathbb{P}(B|C)\right)\cdot \mathbb{P}(C) + \left(\mathbb{P}(A|C^c) - \mathbb{P}(B|C^c)\right)\cdot \mathbb{P}(C^c)$

и тъй като по условие $\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C)$ и $\mathbb{P}(A|C^c) > \mathbb{P}(B|C^c)$

↳ то и двете разлики са положителни

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) > 0 \Rightarrow \underline{\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)}$

4.

P(отрицателен тест) $= \frac{1}{4} \cdot (1-0{,}10) + \frac{1}{4} \cdot (1-0{,}01) + \frac{1}{4} \cdot (1-0{,}05) +$

$\frac{1}{4} \cdot (1-0{,}04) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}90 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}99 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}95 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}96 =$

a) $= 0{,}9025$

→ цената за един човек е 1 лв.

P(положителен тест) $= 1 - P$(отрицателен тест) $=$

$= 1 - 0{,}9025 = 0{,}0975$

→ цената за един човек тогава е 1,25 лв.

→ $P_c(n) = P$(отрицателен тест) $\cdot 1 + P$(положителен тест) $\cdot 1{,}25 =$

$= 0{,}9025 \cdot 1 + 0{,}0975 \cdot 1{,}25 =$

$= 0{,}9025 + 0{,}121875 = 1{,}024375$

→ очакваната цена за тестване на един човек

$\approx 1{,}02$ лв.

б) P(отрицателен тест) $= f(x)$

P(положителен тест) $= g(x)$

$P_c(x) = f(x) \cdot 1 + g(x) \cdot 1{,}25$

→ търсим x^*, за което $p_c'(x^*) = 0$ → така получаваме уравнението, което задава x^*, минимизиращо $p_c(x)$

→ намираме производната на $p_c(x)$ спрямо x и приравняване на нула, за да намерим критичните точки

$\boxed{5.}$ X е случайна величина

а) $Hx(\lambda) = \mathbb{E}[e^{-\lambda x}]$ за $\lambda \geq 0$

↳ тъй като $e^{-\lambda x} \leq 1$, за всяко $\lambda \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[e^{-\lambda x}] \leq \mathbb{E}[1] = \underline{1}$

↳ За да намерим $\mathbb{E}X$ ще диференцираме $Hx(\lambda)$ по λ

$$H'x(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\mathbb{E}[e^{-\lambda x}] = -\mathbb{E}[x \cdot e^{-\lambda x}],$$

тогава поставим $\lambda = 0 \Rightarrow H'x(0) = -\mathbb{E}[X]$

↳ За да намерим $\mathbb{E}X^2$, диференцираме $\mathbb{E}X$ по λ

$$H''x(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left(-\mathbb{E}[x \cdot e^{-\lambda x}]\right) = \mathbb{E}[x^2 e^{-\lambda x}]$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow H''x(0) = \mathbb{E}[x^2 \cdot e^0] = \mathbb{E}[x^2]$$

б) пораждаща функция $gx(s) = ?$

$gx(s) = \mathbb{E}[s^x]$

$Hx(\lambda) = \mathbb{E}[e^{-\lambda x}]$

$$gx(s) = \mathbb{E}[s^x] = \mathbb{E}[e^{-\lambda x}] = Hx(\lambda) \Rightarrow gx(e^{-\lambda}) = Hx(\lambda)$$

в) $Hx(\lambda) = \mathbb{E}[e^{-\lambda x}]$ за $X \sim Bin(n,p)$

$$Hx(\lambda) = \mathbb{E}[e^{-\lambda x}] = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda x}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{E}[X] = H'x(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = \sum_{k=0}^{n} k e^{-\lambda k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\Big|_{\lambda=0} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = H''x(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$\boxed{6}$ $X \sim U(0,2)$ и $Y \sim U(0,1)$

$\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[Y^2]$ = ?

$$\mathbb{E}X = \int_a^b x\, f_X(x)\, dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{2(b-a)} \cdot b^2 - a^2 = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{b+a}{2}$$

$$\Rightarrow X \sim U(0,2) \quad \mathbb{E}X = \frac{b+a}{2} = \frac{2+0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b x^2 f_X(x)\, dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{3(b-a)} \cdot b^3 - a^3 =$$

$$= \frac{1}{3\cancel{(b-a)}} \cancel{(b-a)}(b^2+ab+a^2) = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\Rightarrow X \sim U(0,2) \Rightarrow \mathbb{E}X^2 = \frac{2^2 + 2\cdot 0 + 0^2}{3} = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow Y \sim U(0,1)$

$$\mathbb{E}Y = \frac{b+a}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}Y^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} = \frac{1+0+0}{3} = \frac{1}{3}$$

$D(X-2Y) = ?$

$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{4}{3} - (1)^2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$

$DY = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$

$\cancel{D(X-2Y) = DX - 2^2 DY = \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0}$

$D(X-2Y) = DX + 2^2 DY - 2^2 \operatorname{Cov}(X,Y) =$

$= \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{12} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) =$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{10} = \cancel{\frac{2}{3} + \frac{4}{10} = \frac{20+12}{30} = \frac{32}{30}}$

$= \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{10+6}{15} = \frac{16}{15}$

7. $\mathbb{P}(Y > a) = \mathbb{P}(|X-1| > a) \leq \frac{DX}{a^2}$ → от неравенството на Чебишев

(също така $\mathbb{P}(Y \in [n, n+1)) \leq \mathbb{P}(Y \geq n)$ и горната граница също е валидна, както за $\mathbb{P}(Y > n)$, така и за $\mathbb{P}(Y \geq n)$)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(n)\,\mathbb{P}(Y \in [n, n+1)) \leq \lim\limits_{n\to\infty} g(n)\,\mathbb{P}(Y \geq n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} g(n) \frac{DX}{n^2} = 0$

8. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} X$

i) Нека $X_1, \dots$ е редица от случайни величини и X е сл. вел. Казваме, че $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} X$ (редицата X_n клони п.с. към X) ако $\mathbb{P}(X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} X) = 1$.

$\boxed{9.}$ $X =$ " # паднали се 1 или 3 "

$X \sim Bin(n, p)$, $n = 3\cdot 10^{12}$, $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (2 от възможни 6 изхода)

$$EX = n\cdot p = \cancel{3}\cdot 10^{12} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \underline{\underline{10^{12}}}$$

$$DX = n\cdot p\cdot q = \cancel{3}\cdot 10^{12}\cdot \frac{1}{\cancel{3}}\cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\cdot 10^{12}}}$$

$$\sqrt{DX} = \sqrt{\tfrac{2}{3}\cdot 10^{12}} \approx \underline{\underline{8{,}16\cdot 10^{5}}}$$

$$P(X > 10^{12}) = P\left(\underbrace{\frac{X-10^{12}}{8{,}16\cdot 10^{5}}}_{Z\sim N} > \frac{10^{12}-10^{12}}{8{,}16\cdot 10^{5}}\right) = P(Z>0) = 0{,}5$$

$$P(X > 10^{12}+10^{3}) = P\left(\underbrace{\frac{X-10^{12}}{8{,}16\cdot 10^{5}}}_{Z\sim N} > \frac{10^{12}+10^{3}-10^{12}}{8{,}16\cdot 10^{5}}\right) = P\left(Z > \frac{10^{3}}{8{,}16\cdot 10^{5}}\right)$$

$$\frac{10^{3}}{8{,}16\cdot 10^{5}} \approx 0{,}001225 \approx 0{,}5$$

$$P(X > 10^{12}+10^{9}) = P\left(Z > \frac{10^{9}}{8{,}16\cdot 10^{5}}\right)$$

$$\frac{10^{9}}{8{,}16\cdot 10^{5}} \approx 1225 \approx 0$$

$\rightarrow$

→ Равномерно

$X \sim Unif(a,b)$

- $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$
- $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 1, & x \ge b \end{cases}$

+ $\mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$

→ Нормално

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x)$
- $\mathbb{E}[X] = \mu$
- $DX = \sigma^2$

$f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$?

плътността на стандартното нормално разпределение

→ Експоненциално

$X \sim Exp(\lambda)$

- $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$, $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$
- $DX = \frac{1}{\lambda^2}$
- $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $(P(X \le x))$, $x > 0$
- $\bar{F}_X(x) = e^{-\lambda x}$, $P(X > x)$, $x > 0$

→ Гама разпределение $\Gamma(\alpha, \beta)$

$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$

$\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\beta}$ $DX = \frac{\alpha}{\beta^2}$

СЕМ изпит 18.02.2023

1.

1) Дайте дефиниция на случайна величина в дадено вероятностно пространство

• Нека U е вероятностно пространство. Тогава $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е случайна величина, ако за $\forall a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ е вярно че $X^{-1}((a,b)) \in \mathcal{A}$, където

$$\underset{B \subseteq \mathbb{R}}{X^{-1}(B)} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

. Т.е. трябва да имаме възможността да кажем каква е вероятността X да е между a и b.

2) Въведете понятието очакване и дисперсия на дискретна случайна величина

• Нека X е дискретна случайна величина. Тогава под очакване на X или $\mathbb{E}X$ разбираме:

$$\mathbb{E}X = \sum_i x_i \, \mathbb{P}(X = x_i)$$

• Нека X е дискретна случайна величина. Тогава под дисперсия на X или DX имаме предвид:

$$DX = \sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_i$$

, ако $DX < \infty$ и $\mathbb{E}X < \infty$, т.е. са добре дефинирани.

3) $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} & , x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$$

$$Y_n \sim \Gamma(\overset{\alpha}{n}, \overset{\beta}{1}) \Rightarrow f_{Y_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{1^n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x}}{\Gamma(n)} = \dfrac{x^{n-1} \cdot e^{-x}}{\Gamma(n)} \end{cases}$$

$e_1 \sim Exp(1)$

$$f_{e_1}(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x \ge 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot e^{-1 \cdot x} & , x \ge 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} & , x \ge 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

a) $M_X(t) = \mathbb{E} e^{tX}$

$$M_{e_1}(t) = \mathbb{E} e^{tX} = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot f_{e_1}(x)\, dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-x}\, dx = \int_0^{\infty} e^{tx - x}\, dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{(t-1)x}\, dx = \frac{1}{t-1} \int_0^{\infty} e^{x(t-1)}\, d\, x(t-1) = \frac{1}{t-1} \left[e^{x(t-1)} \right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{t-1} \left[e^{-\infty} - e^{0} \right] = \frac{1}{t-1} [0 - 1] = \frac{1}{t-1}, \quad |t| < 1$$

б) функцията на моментите на $M_{Y_n}(t)$ на Y_n

$$M_{Y_n}(t) = \mathbb{E}\, e^{tX} = \int_0^\infty e^{tx} \cdot f_{Y_n}(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{e^{tx} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x}}{\Gamma(n)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{x(t-1)} \cdot x^{n-1}\, dx \;\; \textcircled{=}$$

може да го запишем като

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^{n-1}\, dx = \frac{\Gamma(n)}{a^n}, \quad \text{където } a = 1-t \text{ и } a>0$$

$$\textcircled{=} \;\; \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(n)}{(1-t)^n} = \underline{\underline{\frac{1}{(1-t)^n}}}, \quad |t|<1$$

в) ако $X_n = Y_n/n$, покажете, че $M_{X_n}(t)$ се схожда

$$X_n = \frac{Y_n}{n}$$

$$M_{X_n}(t) = \mathbb{E}[e^{tX_n}] = \mathbb{E}\left[e^{t\frac{Y_n}{n}}\right] \overset{\text{свойства на МО}}{\Longrightarrow} \mathbb{E}\left[e^{\frac{t}{n}Y_n}\right]$$

това нещо е функция на моментите на Y_n при аргумент $\frac{t}{n}$

$$\Rightarrow M_{X_n}(t) = M_{Y_n}\left(\tfrac{t}{n}\right)$$

$$M_{Y_n}(t) = \frac{1}{(1-t)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n} \to \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$

$\Rightarrow$ при $n\to\infty$, ф.м. X_n се приближава до $M_{X_n}(t) \approx \frac{1}{e^{-t}} = e^t$

$\Rightarrow$ $M_{X_n}(t)$ се схожда към e^t за всяко фиксирано t

* начин 2:

$$X_n = \frac{Y_n}{n}$$

$$M_{X_n}(t) = \mathbb{E}\, e^{tX_n} = \mathbb{E}\, e^{t\frac{Y_n}{n}} = \mathbb{E}\, e^{\frac{t}{n}\cdot Y_n} \overset{w=\frac{t}{n}}{=\!=} \mathbb{E}\, e^{w \cdot Y_n} =$$

$$= \int_0^\infty e^{wx}\, d x_n(x) = \frac{1}{(1-w)^n} = \frac{1}{(1-\frac{t}{n})^n} \qquad 1-\frac{t}{n}>0 \text{ и } t<n$$

2 а) $\mathbb{E}[X|Y]$ като решение на оптимизационна задача:

* Нека X и Y са сл. величини. Тогава $G^*(Y) = \mathbb{E}[X|Y]$ е тази случайна величина, която минимизира

$$\min_G \mathbb{E}[X - G(Y))^2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}[X|Y])^2$$

* $\mathbb{E}[X|Y] = f(y) : \min_G \mathbb{E}[X - G(Y)]^2 = \mathbb{E}[X - f(Y)^2]$

б) $Y \in \{1, 2, 3\}$ и $\mathbb{P}(Y=i) = p_i$, $i \in \{1,2,3\}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \sum_{y=1}^{3} \mathbb{E}[X|Y=y] \cdot \mathbb{1}\{Y=y\}$$

г) $X \sim N(Y,1)$, $\mathbb{E}(X) = ?$

Y приема стойности $\{1,2,3\}$ с вероятности $\{p_1, p_2, p_3\}$

* При $Y=y$, X е нормално разпределено с $\mu = y$ и $\sigma^2 = 1$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X|Y=y] = y$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y=1}^{3} y \cdot \mathbb{P}(Y=y) = 1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + 3\cdot p_3 \Rightarrow \mathbb{E}[X] = p_1 + 2p_2 + 3p_3$$

3.

а) Казваме, че редицата Y_n клони към случайната величина X по разпределение, ако всяка точка на непрекъснатост на $F_X(x) := \mathbb{P}(X<x)$ е вярно, че

$$\cancel{\mathbb{P}}F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \le x) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathbb{P}(X\le x) = F_X(x)$$ и пишем

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X .$$

$$* \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

4. $Y_n \sim Poi(n)$ $\qquad \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$

а)

$$g_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k \cdot \mathbb{P}(Y_n = k) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} = e^{\lambda s}\cdot e^{-\lambda} =$$

$$= e^{\lambda(s-1)} \Rightarrow e^{n(s-1)}$$

б) $Y_n \sim Poi(100\,000)$, $\mathbb{P}(Y_n > 100\,010) = ?$

$$Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_{100\,000} = \sum_{i=1}^{100\,000} X_i , \quad X_i \sim Poi(1)$$

$$\mathbb{E}X_i = \mathbb{D}X_i = 1$$

$$\sigma^2 = 1 \Rightarrow \sigma = 1$$

ЦГТ: $$\frac{\sum_{i=1}^{100\,000} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{100\,000} X_i - 100\,000\cdot 1}{1\sqrt{100\,000}} = \frac{\sum_{i=1}^{100\,000} - 100\,000}{100\sqrt{10}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

$$\mathbb{P}(Y_n > 100\,010) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_n - 100\,000}{100\sqrt{10}} > \frac{100\,010 - 100\,000}{100\sqrt{10}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(N(0,1) > \frac{10}{100\sqrt{10}}\right) = \mathbb{P}\left(N(0,1) > \frac{1}{10\sqrt{10}}\right) \approx \mathbb{P}\left(N(0,1) > \frac{1}{31{,}62}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \mathbb{P}(N(0,1) \le 0{,}03) = 1 - 0{,}5120 = 0{,}488$$

от таблицата

4) $Y_n \sim Poi(n)$ $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $X_i \sim Poi(1)$ $\mu = \sigma^2 = 1$

ЦГТ: $$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{Y_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

5. а) дефиниция за максимално правдоподобна оценка

Нека $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ и $\vec{x}$ е извадка над X, тогава

м.п.о. за μ е $\hat{\mu}(\vec{x}) = \overline{x_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

(независимо дали σ^2 е известно или не), а за σ^2 е:

i) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$ – ако μ е известно

ii) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_n})^2$ – ако μ не е известно

6. а) Дефинирайте точкова оценка за θ

Функцията $\theta = \theta(\vec{x})$ се нарича статистика или още точкова оценка

б) централна статистика

Нека $T(\vec{x}, \theta)$ е статистика. Казваме, че T е централна статистика, ако:

а) T е строго монотонна (↑↓) по θ

б) $P(T \le x) = F_T(x)$ не зависи от θ

Доверителният интервал представя диапазон от стойности за параметъра, който с определена степен на увереност включва истинската стойност на параметъра.