МАТЕМАТИЧЕСКО ОЧАКВАНЕ

→ X е дискретна случайна величина

Ако редът $\sum_{x \in X} x\,p(x)$ е абсолютно сходящ, имаме

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X} x\,p(x)}$$ → математическо очакване

→ Числата $\mathbb{E}[X^k]$ и $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k]$ се наричат съответно к-ти начален и к-ти централен момент на X

$$\boxed{\mathbb{E}[X^k] = \sum_{x \in X} x^k p(x)}$$ и $$\boxed{\mathbb{E}[(x-\mathbb{E}[X])^k] = \sum_{x \in X} (x-\mathbb{E}[X])^k p(x)}$$

* Вторият централен момент се нарича дисперсия

$$\boxed{DX \equiv \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2}$$

↳ дава средното квадратично отклонение

* Редът $\sum a_n$ се нарича сходящ, ако сумата на неговите членове има крайна стойност.

* Редът $\sum a_n$ се нарича абсолютно сходящ, ако редът на неговите членове $\sum |a_n|$ е абсолютно сходящ. Това означава, че дори ако вземем абсолютните стойности на всички членове на реда и формираме нов ред, този нов ред все още е сходящ.

→ Ако $\sum |a_n|$ е сходящ, то $\sum a_n$ е абсолютно сходящ ~~също~~

→ Всички абсолютно сходящи редове са и сходящи, но обратното не винаги е вярно

* Свойства на МО:

а) $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq 0$, като $\mathbb{E}[X] = 0 \iff \mathbb{P}(X=0) = 1$

б) $X = c$, то $\mathbb{E}[X] = c$ и ако $X = 1_A$, то $\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(A)$

в) $Y = cX$, то $\mathbb{E}[Y] = c\,\mathbb{E}[X]$

г) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$, ако $\mathbb{E}[X]$ и $\mathbb{E}[Y]$ съществуват

д) $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$, ако $\mathbb{E}[X]$ и $\mathbb{E}[Y]$ съществуват

г) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

$$\mathbb{E}[X+Y] = \sum_i \sum_j (x_i + y_j)\,\mathbb{P}(X=x_i \cap Y=y_j) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i\,\mathbb{P}(X=x_i \cap Y=y_j) + \sum_i \sum_j y_j\,\mathbb{P}(X=x_i \cap Y=y_j) =$$

$$= \sum_i x_i \underbrace{\sum_j \mathbb{P}(X=x_i \cap Y=y_j)}_{\mathbb{P}(X=x_i)} + \sum_j y_j \underbrace{\sum_i \mathbb{P}(X=x_i \cap Y=y_j)}_{\mathbb{P}(Y=y_j)} =$$

$$= \sum_i x_i\,\mathbb{P}(X=x_i) + \sum_j y_j\,\mathbb{P}(Y=y_j) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$$

д) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$, ако $X \perp\!\!\!\perp Y$

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{i,j} x_i y_j\,\mathbb{P}(X=x_i \cap Y=y_j) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_{i,j} x_i y_j\,\mathbb{P}(X=x_i)\,\mathbb{P}(Y=y_j) =$$

$$= \sum_i x_i\,\mathbb{P}(X=x_i) \sum_j y_j\,\mathbb{P}(Y=y_j) = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$$

→ когато имаме съвместното и таблица!

$\mathbb{E}[XY] = x_1 y_1 \cdot p(x,y) + x_2 \cdot y_2 \cdot p(x,y) \dots$

* Дисперсия

* Ако сумата $\sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_j$ е добре дефинирана, то

$$DX = \sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_j$$ е дисперсията на X.

→ запис валиден само за диск. сл. вел

$$\boxed{DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2}$$ → запис валиден за всички сл. вел.

$$\boxed{DX \overset{(1)}{=} \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \overset{(2)}{=} \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2}$$

↳ $g(x) = (x - \mathbb{E}X)^2$

$$\mathbb{E}g(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_i = DX \rightarrow (1)$$

$$\Rightarrow \boxed{DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2}$$

д-во) $DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2) =$

$= \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}(-2X\mathbb{E}X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}X)^2 =$ → $x=c$ const, а $\mathbb{E}x = c$

$= \mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2 =$

$= \underline{\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2}$

* Свойства на дисперсията:

а) $DX \geq 0$

б) ако $X = c$ е константа, то $Dc = 0$

в) $DcX = c^2 DX$

г) $D(X+Y) = DX + DY$

д) $D(X+c) = DX$

$D(aX + bX) = a^2 DX + b^2 DY + 2ab\, Cov(X, Y)$

⇒ а) $DX = \sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_i \geq 0$, понеже $(x_i - \mathbb{E}X)^2 \geq 0$ (поради степента 2), то и $DX \geq 0$

б) $Dc = \mathbb{E}(c - \mathbb{E}c)^2 = \mathbb{E}(c - c) = 0$

в) $DcX = \mathbb{E}(cX - \mathbb{E}cX)^2 = \mathbb{E}(cX - c\mathbb{E}X)^2 =$

$= \mathbb{E}c^2(X - \mathbb{E}X)^2 = c^2 \underbrace{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2}_{DX} = c^2 DX$

г) $D(X+Y) = \mathbb{E}(X+Y - \mathbb{E}(X+Y))^2 = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) + (Y - \mathbb{E}Y))^2 =$

$= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2 - 2(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y) + (Y - \mathbb{E}Y)^2) =$

$= \underbrace{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2}_{DX} - \underbrace{2\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)}_{\parallel} + \underbrace{\mathbb{E}(Y - \mathbb{E}Y)^2}_{DY} =$

$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y - \cancel{\mathbb{E}Y\mathbb{E}X} + \cancel{\mathbb{E}X\mathbb{E}Y} =$

$= \mathbb{E}X\mathbb{E}Y - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0$

$= DX + DY$

? как?

д) $D(X+c) = \mathbb{E}(X + c - \mathbb{E}(X+c))^2 = \mathbb{E}(X + c - \mathbb{E}X - c)^2 = DX$

* Следствие: X е диск. сл. вел. с крайна дисперсия $DX < \infty \Rightarrow \mathbb{E}X^2 \geq (\mathbb{E}X)^2$

Д-во: $0 \leq DX = \mathbb{E}(\underbrace{X - \mathbb{E}X}_{Y})^2 \Rightarrow \mathbb{E}Y = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

⇒ Защото дисперсията няма как да бъде по-малко от 0
$\Rightarrow \mathbb{E}X^2$ или е по-голямо или е равно на $(\mathbb{E}X)^2$

ПОРАЖДАЩА ФУНКЦИЯ

* функцията $g_X(s) = \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X=k)$, за $|s|<1$, се нарича пораждаща функция

→ Свойства:

a) $\boxed{g'_X(1) = \mathbb{E}X}$

$$\frac{d}{ds} g_X(s) = \frac{d}{ds}\mathbb{E}s^X = \mathbb{E}\frac{d}{ds}s^X = \mathbb{E}Xs^{X-1}\Big|_{s=1} = \mathbb{E}X$$

б) $$\frac{d^2}{ds^2} g_X(s)\Big|_{s=1} = \mathbb{E}\frac{d^2}{ds^2}s^X = \mathbb{E}\frac{d}{ds}Xs^{X-1}\Big|_{s=1} = \mathbb{E}X(X-1)s^{X-2}\Big|_{s=1} =$$

$$= \mathbb{E}X(X-1) = \boxed{\mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X \to g''_X(1)}$$

$$\Rightarrow DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \underbrace{\mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X}_{g''_X(1)} + \underbrace{\mathbb{E}X}_{g'_X(1)} - \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{(g'_X(1))^2} = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

в) $g_X^{(n)}(0) = n!\,P(X=n) = n!\,p_n$

Теорема

* Ако $(X_j)_{j=1}^n$ са целочислени сл.вел. дефинирани в едно вер.прост. и са независими в съвкупност, то за $Y(\omega) = \sum_{j=1}^n X_j(\omega)$ е вярно и $g_Y(s) = \prod_{j=1}^n g_{X_j}(s)$, $|s| \le 1$. Ако $(X_i)_{j=1}^n$ са еднакви по разпределение, то $g_Y(s) = g_{X_1}^n(s)$.

→ $X \overset{d}{=} Y \iff g_X(s) = g_Y(s)$, $|s| \le 1$

"⇒" $P(X=j) = P(Y=j)$, $\forall i \le j \le \infty \Rightarrow g_X(s) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X=i) s^i = \sum_{i=0}^{\infty} P(Y=i)s^i = g_Y(s)$

→ д-во: $(n=2)$ → $Y = X_1 + X_2$

$$g_Y(s) = \mathbb{E}s^{X_1+X_2} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} s^{i+j} P(X_1=i, X_2=j) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} s^i s^j P(X_1=i) P(X_2=j) = g_{X_1}(s) g_{X_2}(s)$$

$X_1 \overset{d}{=} X_2 \Rightarrow g_{X_1} = g_{X_2} \Rightarrow g_Y = g_{X_1}^2$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{E}X = g_X'(1) \\ &DX = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2 \\ &P(X=k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!} \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}X_j}$, когато очакванията са добре дефинирани

$\boxed{D\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} DX}$, ако $X_1, \dots, X_n$ са независими в съвкупност

А) Разпределение на Бернули

$\mathbb{E}X = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

$\mathbb{E}X^2 = 0^2 \cdot p + 1^2 \cdot p = p$ $\Rightarrow$ $DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$

$g_X(s) = \mathbb{E}s^X = s^0 q + s^1 p = q + sp = 1 - p + sp$

Б) Биномно разпределение

$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = np$

$DX = D\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} DX_i = npq$

$P(X=k) = \dfrac{g_X^{(k)}(0)}{k!} = p^k n(n-1)\dots(n\dots) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$g_X(s) = \mathbb{E}s^X = (q + sp)^n$ $\rightarrow$ n пъти от Бернулиевата

В) Геометрично разпределение

а) $\mathbb{P}(X=k)=pq^k$

$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X_1=1)=p$ 1

$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X_1=0; X_2=1)=p\cdot q$ 0 1

$\vdots$

$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X_1=0; X_2=0; \dots X_k=0, X_{k+1})=p\cdot q^k$ $\underbrace{00\dots0}_{k}1$

б) $g_X(s)=\mathbb{E}s^X=\sum_{k=0}^{\infty} pq^k s^k = p\sum_{k=0}^{\infty} q^k s^k \overset{|qs|<1}{=} \frac{p}{1-qs}$ → от формулата за безкрайна геометрична прогресия $\sum_{k=0} ar^k=\frac{a}{1-r}$

в) $g'_X(s)\Big|_{s=1}=p\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1-qs}\right)=p(-1)\frac{\frac{d}{ds}(1-qs)}{(1-qs)^2}\Bigg|_{s=1}=$

$=\frac{pq}{(1-q)^2}=\frac{pq}{p^2}=\frac{q}{p}$

$g''_X(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{pq}{(1-q)^2}\right)=pq\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)=pq(-2)\frac{\frac{d}{ds}(1-qs)}{(1-qs)^3}=$

$=\frac{2pq^2}{(1-qs)^3}\Bigg|_{s=1}=\frac{2pq^2}{(1-q)^3}=\frac{2pq^2}{p^3}=\frac{2q^2}{p^2}$

$\Rightarrow \mathbb{E}X=g'_X(s)=\frac{q}{p}$

$DX=g''_X(1)+g'_X(1)-(g'_X(1))^2=\frac{2q^2}{p^2}+\frac{q}{p}-\left(\frac{q}{p}\right)^2=$

$=\frac{q^2}{p^2}+\frac{q}{p}=\frac{q^2+qp}{p^2}=\frac{q(\overbrace{q+p}^{=1})}{p^2}=\frac{q}{p^2}$

Твърдение: Нека $X \sim Ge(p)$, $p \in (0,1)$, то е вярно, че

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq m+k \mid X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq m)} = q^m, \quad \forall m, k \in \mathbb{N}$$

Д-во: $\mathbb{P}(X \geq m+k \mid X \geq k) = \dfrac{\mathbb{P}(X \geq m+k; X \geq k)}{\mathbb{P}(X \geq k)} = \dfrac{\mathbb{P}(X \geq m+k)}{\mathbb{P}(X \geq k)} =$

$$= \frac{q^{m+k}}{q^k} = q^m = \mathbb{P}(X \geq m)$$

смисъл на доказателството? + $\mathbb{P}(X = k)$!

г) Отрицателно биномно

→ конструира се от няколко геометрично разпределени случайни величини

$$X \in NB(r,p) = \min\{n \geq 1 : \sum_{j=1}^{n} X_j = r\} - r$$

→ броят неуспехи до r-тия успех

* Ако $X \sim NB(r,p)$, то $X = \sum_{i=1}^{r} Y_i$, където $Y_1, \ldots, Y_r$ са независими в съвкупност, геометрични случайни величини

$\Rightarrow Y_i \sim Ge(p)$, $0 < i \leq r$

д-во: $r = 2$ $\qquad\qquad$ $l = 4$, $k = 2$ $\qquad$ цел: $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

цел: $X = Y_1 + Y_2$ $\qquad\qquad$ $\underbrace{0000}_{Y_1}1\underbrace{00}_{Y_2}1$

$\mathbb{P}(Y_1 = l, Y_2 = k) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}(Y_1 = l)\,\mathbb{P}(Y_2 = k)$ $\qquad$ $Y_1 \sim Ge(p)$

още не знаем, че е Ge, ще разберем след доказателството

$$\mathbb{P}(Y_1 = l, Y_2 = k) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \ldots, X_l = 0, X_{l+1} = 1, X_{l+2} = 0, \ldots, X_{l+k+1} = 0, X_{l+k+2} = 1) =$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_2 = 0) \ldots \mathbb{P}(X_l = 0)}_{l}\,\mathbb{P}(X_{l+1} = 1)\,\underbrace{\mathbb{P}(X_{l+2} = 0) \ldots \mathbb{P}(X_{l+k+1} = 0)}_{k}\,\mathbb{P}(X_{l+k+2} = 1) =$$

$$= q^l p\, q^k p$$

$$\mathbb{P}(Y_1 = l, Y_2 = k) = \mathbb{P}(Y_1 = l) \cdot q^k \cdot p = \mathbb{P}(Y_1 = l)\,\mathbb{P}(Y_2 = k)$$

$$\mathbb{P}(Y_2 = k) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_1 = l, Y_2 = k) = q^k \cdot p \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_1 = l) = \boxed{q^k p}$$

→ 1 уд

→ $Y_2 \sim Ge(p)$

→ $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$

* $\mathbb{P}(Y_2 = k) = q^k \cdot p = \mathbb{P}(Y_1 = k) \Rightarrow Y_2 \sim Ge(p)$ ▲

* Твърдение:

$X \sim NB(r, p)$, то

- $\boxed{g_X(s) = \left(\frac{p}{1-qs}\right)^r} \Rightarrow g_X(s) = g_{Y_1}^{\,r}(s) = \left(\frac{p}{1-qs}\right)^r$, $Y_1 \sim Ge(p)$
- $\boxed{\mathbb{E}X = \frac{rq}{p}} \Rightarrow \mathbb{E}X = g'_X(1) = \mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{E}Y_1 = r \cdot \mathbb{E}Y_1 = r \cdot \frac{q}{p}$
- $\boxed{DX = \frac{rq}{p^2}} \Rightarrow DX = D\sum_{j=1}^{r} Y_j = \sum_{j=1}^{r} DY_j = r \cdot DY_j = r \cdot \frac{q}{p^2}$

↳ прилагаме r на геометричното и се получават стойностите им за отрицателно биномно

* Твърдение:

$X \sim NB(r, p)$, то $\mathbb{P}(X = k) = \binom{r+k-1}{r-1} q^k p^r$

д-во: комбинаторен подход

↳ k нули и r-1 единици трябва да се поставят на r+k-1 позиции, след което да се последват от 1ца

$\Rightarrow \binom{r+k-1}{r-1} \cdot q^k p^r$

Аналитичен подход:

$g_X^{(k)}(s)\Big|_{s=0}$ – смятаме k-тата производна в нулата

$\shortparallel$

$k!\,\mathbb{P}(X = k)$

ask!

Правилна формула + кое доказателство ????

→виж ръководството !!

Д) Поасоново разпределение

- не произтича от схемата на Бернули
- вероятностите се сумират до 1ца *
- първо разпределение, което в дефиницията си включва вероятност

→ казваме, че $X \sim Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$, ако $\boxed{P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$, $k \geq 0$

* $$1 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

развитие в ред на Тейлор за $\exp(\lambda)$

(+) Независимост на едно събитие върху другото

(+) Брой голове за 1ца време

(+) Брой насекоми за единица площ

* Твърдение:

* λ се нарича интензитет

$X \sim Poi(\lambda)$, то

а) $g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

$\boxed{б) \; EX = DX = \lambda}$ → това е важно да се запомни, че очакването и дисперсията са равни на λ

д-во:

а) $g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(s^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$

$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) s^k$

б) $g'_X(s)\big|_{s=1} = \lambda \cdot e^{\lambda(s-1)}\big|_{s=1} = \lambda \cdot e^{\lambda(1-1)} = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot 0} = \lambda \cdot 1 = \lambda$

$\frac{d}{ds} \lambda \cdot e^{\lambda(s-1)}$

$g''_X(s)\big|_{s=1} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda(s-1)}\big|_{s=1} = \lambda^2 \cdot e^0 = \lambda^2$

$DX = g''_X(s) + g'_X(s) - (g'_X(s))^2 \Big|_{s=1} = \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{(\lambda)^2} = \lambda$

Твърдение:

$(X_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ са целочислени сл. вел. и $g_{X_n}(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} g_X(s)$, $|s|<1$ за някоя целочислена X. Тогава

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n=k) = \mathbb{P}(X=k),\ \forall k\geq 0}$$

* Теорема на Поасон

→ редица от експерименти с вариращи вероятности

Нека $X_n \sim Bin(n, p_n)$, $\forall n\geq 1$. Нека е в сила, че $p_n = \frac{\lambda}{n} + \frac{u_n}{n}$, където $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ и $\lambda > 0$. Тогава

$$\mathbb{P}(X_n=k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k\geq 0. \quad \left(X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X\sim Po(\lambda)\right)$$

$n\geq 100$, $\lambda\leq 20$ е в сила

! $n\geq 100$ и имаме $Y\sim Bin(n,p)$

$\lambda := np \leq 20$. Тогава $\mathbb{P}(Y=k) \approx \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$

от $p_n = \frac{\lambda}{n} + \frac{u_n}{n}$, → $\frac{u_n}{n}$ клони по-бързо към 0 от $\frac{\lambda}{n}$

понеже u_n клони към нула и не се вижда

$n = 1000$, $p = \frac{1}{1000}$, $\lambda = np = 1$

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{1000}{k}\left(\frac{1}{1000}\right)^k\left(\frac{999}{1000}\right)^{1000-k} \approx \frac{1}{k!}e^{-1}$$

* Теоремата се ползва за приближение

д-во: $u_n := 0$, $p_n = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow q_n = 1 - p_n = 1 - \frac{\lambda}{n}$

$$g_{X_n}(s) = \underbrace{(q_n + p_n s)^n}_{\text{биномното}} = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}\cdot s\right)^n = \left(1 + \frac{\lambda(s-1)}{n}\right)^n$$

цел: $g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$ $=$ $e^{\lambda(s-1)}$

$$\boxed{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_n=k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Е) Хипергеометрично разпределение

N - брой обекти

M - маркирани обекти (дефектни) от тези N

n - (големина извадка)

$X \sim HG(N, M, n)$,

* твърдение:

Нека $X \sim HG(N, M, n)$, тогава

а) $$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$, където $\max(0, n-N+M) \le k \le \min(n, M)$

б) $$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{E}X &= n \cdot \frac{M}{N} \\ DX &= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} \end{aligned}}$$

д-во:

б) $X_j = \begin{cases} 1, & \text{ако на } j\text{-та позиция имаме маркирано} \\ 0, & \text{иначе (ако няма маркирано)} \end{cases}$

маркирано

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad j \quad \dots \quad n$

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j \overset{?}{\sim} Bin(n, \frac{M}{N})$$ $\to X_j \sim Ber(\frac{M}{N})$

↳ не защото не са независими (зависими са)

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}X_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j = 1) = n \cdot \mathbb{E}X_1 = n \cdot \frac{M}{N}$$

* очакването няма значение от независимостта, но дисперсията има

$$\mathbb{P}(X_j = 1) = \frac{\binom{N-1}{M-1}}{\binom{N}{M}} = \frac{M}{N} = p$$

на коя място маркираните ←

* ако има линейност ⇒ винаги

Съвместни дискретни разпределения

* Деф (Съвместна функция на разпределението):

Нека (X, Y) са две случайни величини в едно вероятностно пространство. Тогава $\boxed{F_{X,Y}(x,y) := \mathbb{P}(X \le x; Y \le y)}$ се нарича съвместна функция на разпределението.

↳ интересуваме се от вектора, а не от случайните величини X и Y отделно

↳ затова искаме едно вероятностно пространство за тези
* две вероятности да са в една A-алгебра

$$P_{nk} := \mathbb{P}(X = x_n, Y = y_k) = \mathbb{P}(\{X = x_n\} \cap \{Y = y_k\})$$

* Деф (Независимост):

Нека X и Y са две случайни величини във вероятностното пространство V. Тогава

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

$$\mathbb{P}(X \le x; Y \le y) = \mathbb{P}(X \le x)\, \mathbb{P}(Y \le y)$$

* $F_{X,Y}(x,\infty) = \mathbb{P}(\underbrace{X \le x}_{A}; \underbrace{Y \le \infty}_{B}) = \mathbb{P}(X \le x) = F_X(x)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

1ца

$F_{X,Y}(\infty, y) = F_Y(y)$

$F_{X,Y}(\infty,\infty) = 1$

* независимост => произведение на двете маргинални или само на X и само на Y

Ковариация

Линейна зависимост $Y = aX + b$

↳ Показател за това до колко имаме линейна зависимост между произволни случайни величини X и Y е ковариацията.

$$\boxed{Cov(X, Y) = \sum_{i,j} (x_i - \mathbb{E}X)(y_j - \mathbb{E}Y)\, p_{ij}}$$

↳ ако са дискретни обхождаме всички възможности

* защо вадим $X - \mathbb{E}X$?
  ↳ за да ги центрираме в нулата
  ↳ няма значение изместването
  ↳ изваждането на константата не зависи, и ако има някаква зависимост, тя ще се види т.е. тя няма нищо да промени

$D(X+C) = DX \to$ защото отместването не променя стойностите и то е константа

* Твърдение:

$$\boxed{Cov(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y}$$

д-во: $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] =$

$$= \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}Y - Y\mathbb{E}X + \mathbb{E}X\mathbb{E}Y] =$$

$$= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}(-X\mathbb{E}Y) + \mathbb{E}(-Y\mathbb{E}X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}X\mathbb{E}Y) =$$

$$= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}Y\mathbb{E}X \cancel{- \mathbb{E}X\mathbb{E}Y} \cancel{+ \mathbb{E}X\mathbb{E}Y}$$

* Ако $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $Cov(X,Y) = 0$

→ ако заместим

$X \to 10X$
$Y \Rightarrow 10Y$ → $Cov(10X, 10Y) = 100\, Cov(X, Y)$

↳ константата не променя зависимостта

↳ зависи от мащаба

Корелация

Нека X и Y са две случайни величини, с крайни дисперсии ($DX < \infty$ и $DY < \infty$). Тогава

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}}$$

се нарича коефициент на корелация между X и Y

→ целта на корелацията е да мери някаква степен на линейност между X и Y

→ ако заменим
$X \to 10X$
$Y \to 10Y$

$$\to \rho(10X, 10Y) = \frac{100\, cov(X,Y)}{\sqrt{100DX}\sqrt{100DY}} = \frac{100\, cov(X,Y)}{10\sqrt{DX}\, 10\sqrt{DY}} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

→ не зависи от мащаба!

→ Условно математическо очакване

* Нека X е произволна случайна величина и Y е дискретна случайна величина, Тогава случайната величина $\mathbb{E}[X|Y]$ се нарича УМО на X при положение (условие) Y, ако $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X|Y)]^2 = \min\limits_{G} \mathbb{E}[X - G(Y)]^2$

* Нека X и Y са дискретни сл. величини, $X = \sum_i x_i \mathbb{1}_{B_i}$ и $Y = \sum_j y_j \mathbb{1}_{A_j}$. Тогава $X|Y_j$ е разпределението на X при дадено $Y = y_j$.

$$\sum_i \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \sum_i \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} = 1$$

* Свойства : X е сл. вел. и Y е дискретна сл. вел.

а) $\mathbb{E}[aX+bZ|Y] = a\mathbb{E}[X|Y] + b\mathbb{E}[Z|Y]$

$$\mathbb{E}[aX+bZ|Y] = \sum_j \frac{\mathbb{E}[aX+bZ \cdot 1_{A_j}]}{\mathbb{P}(A_j)} \cdot 1_{A_j} =$$

$$= \sum_j \frac{a\mathbb{E}X\cdot 1_{A_j} + b\mathbb{E}Z\cdot 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} \cdot 1_{A_j} = a\mathbb{E}[X|Y] + b\mathbb{E}[Z|Y]$$

б) $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}X$

индикаторите се сумират до 1-ца

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_j \mathbb{E}[X|Y=y_j]\cdot 1_{A_j} = \mathbb{E}X \underbrace{\sum_j 1_{A_j}}_{=1} = \mathbb{E}X$$

$$\mathbb{E}[X|Y=y_j] = \sum_j x_j\, \mathbb{P}(X=x_j|Y=y_j) = \sum_j x_j \frac{\mathbb{P}(X=x_j;\ Y=y_j)}{\mathbb{P}(Y=y_j)} =$$

$$\overset{X\perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_j x_j \frac{\mathbb{P}(X=x_j)\cancel{\mathbb{P}(Y=y_j)}}{\cancel{\mathbb{P}(Y=y_j)}} = \sum_j x_j\,\mathbb{P}(X=x_j) = \mathbb{E}X$$

в) Ако $X = f(Y) \Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = f(Y) = X$

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_j \frac{\mathbb{E}X\cdot 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)}\cdot 1_{A_j} = \sum_j \frac{\mathbb{E}f(Y)\cdot 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)}\cdot 1_{A_j} =$$

$$= \sum_j f(y)\frac{\cancel{\mathbb{P}(A_j)}}{\cancel{\mathbb{P}(A_j)}}\cdot \underset{}{\overset{=1}{1_{A_j}}} = f(Y) = X$$

г) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}X$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}\Big[\sum_j \frac{\mathbb{E}X\cdot 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)}\cdot 1_{A_j}\Big] = \sum_j \frac{\mathbb{E}X\cdot 1_{A_j}}{\cancel{\mathbb{P}(A_j)}}\cdot \cancel{\mathbb{E}1_{A_j}} =$$

$$= \sum_j \mathbb{E}X\cdot 1_{A_j} = \mathbb{E}\sum_j X\cdot 1_{A_j} = \mathbb{E}X \underbrace{\sum_j 1_{A_j}}_{=1} = \mathbb{E}X$$

д) ако $X \perp\!\!\!\perp Y$ и $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, то $\mathbb{E}[f(X,Y)|Y=y_j] = \mathbb{E}f(X,y_j)$