* Деф: Казваме, че $X: \Omega \to \mathbb{R}$ е непрекъснато сл. вел. ако X може да приема неизброимо много стойности.

* Деф (н.с.в): Казваме, че X е н.с.в. (абсолютно непрекъсната) ако:

a) $f_X(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

б) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$

в) $\forall a, b, \quad \mathbb{P}(X \in (a,b)) = \mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$,

f_X се нарича плътност на X.

* Твърдение: Нека X е н.с.в. с плътност $f_X(x)$. Тогава за $\forall x \in \mathbb{R}$ е в сила, че $\mathbb{P}(X = x) = 0$ и за $a < b$: $\mathbb{P}(X \in (a,b)) = \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) =$
$= \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$

* Деф (ф-я на разпределение):

Нека X е н.с.в. с плътност f_X. функцията

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

* Ако f_X е непрекъснато в x, то $\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$

* Теорема (смяна на променливите):

Нека X е н.с.в и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е строго монотонно растяща или намаляваща функция. Тогава $Y = g(X)$ е н.с.в. с плътност $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \, |{g^{-1}(y)}'|$.

! За теоремата е достатъчно g да е строго монотонна

$Df_X := \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$

* Деф (очакване):

Казване, че $\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$ е мат. очакване на н.с.в. X, ако $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx < \infty$.

* Следствие:

$\mathbb{E}\,g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx$ щом $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x)\,dx < \infty$.

* Деф (дисперсия):

Ако X е н.с.в., що $DX := \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathbb{E}X)^2 f_X(x)\,dx$ има $DX < \infty$ се нарича дисперсия на X.

* Свойства

$\mathbb{E}$	D
$\mathbb{E}cX = c\mathbb{E}X$	$DcX = c^2 DX$
$\mathbb{E}c = c$	$Dc = 0$
$\mathbb{E}aX+b = a\mathbb{E}X+b$	$DaX+b = a^2 DX$
$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$	$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \geq 0$
$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$	$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow D(X+Y) = DX + DY$
	$D(X+Y) = DX + DY + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$

* Равномерно разпределение

Казване, че $X \sim U(a,b)$, $-\infty < a < b < \infty$, ако

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$
- $DX = \frac{(a-b)^2}{12}$ → доказват се лесно
- $\mathbb{E}X = \frac{b+a}{2}$
- $\mathbb{E}X^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$

* **Твърдение:**

Ако $X \sim U(a,b)$, то $Y = \frac{X-a}{b-a} \sim U(0,1)$ или

$$X = a + (b-a)Y$$

§ Всяко едно равномерно, може да го направим като равномерно в интервал $(0,1)$, като линейна комбинация.

* **Нормално разпределение**

↪ казваме, че $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, ако

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

∘ $F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$

∘ $EX = \mu$ ∘ $DX = \sigma^2$ → следствие от $Z \sim N(0,1)$ → $X = \mu + \sigma Z \sim N(0,1)$

↪ стандартно нормално разпределение $Z \sim N(0,1)$

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

∘ $EZ = 0$ → понеже $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ - нечетна функция

∘ $EZ^2 = 1$ → смята се по метода на Фейнман

∘ $DZ = 1$

* **Експоненциално разпределение**

↪ казваме, че $X \sim Exp(\lambda)$, ако:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X \leq x)$
- $\bar{F}_X(x) = e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X > x)$
- $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathbb{E}X^2 = \frac{2}{\lambda^2}$ — смята се трудно
- $DX = \frac{1}{\lambda^2}$

* Деф (memoryless):

Експоненциалното разпределение е непрекъснат аналог на геометричното в смисъла на свойството безпаметност.

$$\mathbb{P}(X \geq m + k \mid X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq m)$$

⇒ НЕПРЕКЪСНАТИ СЪВМЕСТНИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

* Деф: $X = (x_1, \dots, x_n)$ е непрекъснат вектор от сл. вел., ако $\exists f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, така че:

1) $f_X(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad , \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

2.) $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n = 1$

3.) $D \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{P}(X \in D) = \int_D f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n$

f_X се нарича съвместна плътност.

* Деф: Ако $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е съвместна плътност на сл. вектор X, то

$\mathcal{D}f_X := \{x \in \mathbb{R}^n : f_X(x) > 0\}$ → носител на случайната величина

↓

смисъла на $\mathcal{D}$ е да показва какви са възможните стойности на случайния вектор

* деф (**маргинална плътност**):

Ако f_X е съвместната плътност на $X=(X_1,\dots,X_n)$, то

$$f_{X_j}(x_j)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} f_X(x_1,\dots,x_j,x_{j+1},\dots,x_n)\,dx_1,\dots,dx_j,dx_{j+1},\dots,dx_n$$

се нарича маргинална плътност на X_j.

* деф (**условна плътност**):

Нека $X=(X_1,X_2)$ е случаен вектор и $f_{X_1}(x_1)>0$.

Тогава $f_{X_2|X_1=x_1}(x_2|x_1)=\dfrac{f_X(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$ е условна плътност.

→ **Примери за маргинално плътност:**

- $f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1,x_2)\,dx_2$
- $f_{X_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1,x_2)\,dx_1$

* деф (**съвместна ф-я на разпределение**):

Нека $X=(X_1,\dots,X_n)$ е сл. вектор и $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Тогава $F_X(x)=\mathbb{P}(X_1\le x, X_2\le x_2,\dots,X_n\le x_n)$ се нарича съвместна функция на разпределение.

* деф (**независимост**):

Казваме, че X_1 и X_2 от вектора $X=(X_1,X_2)$ с плътност f_X са независими $\Leftrightarrow$

$$f_X(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$F_X(x_1,x_2)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$

Деф (**независимост в съвкупност**):

Казваме, че компонентите $X=(X_1, \dots, X_n)$ със съвместна плътност f_X са независими в съвкупност <=>

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\Updownarrow$$

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(x_j)$$

↳ Следствие:

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и разглеждаме $Y=g(X)$, където X е вектор от сл. вел. Тогава ако има съвместна пл.

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n, \text{ акo}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} |g(x_1, \dots, x_n)| f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots dx_n.$$

* Твърдение:

$X=(X_1, X_2)$ с плътност $f_X(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Нека $\mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}X_2$ поотделно да съществуват. Тогава

$$\mathbb{E}g(X) = \mathbb{E}(X_1+X_2) = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2.$$

* Ако в допълнение $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ и $DX_1 < \infty$ и $DX_2 < \infty$, то

$$D(X_1+X_2) = DX_1 + DX_2$$

* Твърдение: $X=(X_1+X_2)$ е н.с.в. и $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$. Тогава при допускане, че $\mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}X_2$ съществуват

$\mathbb{E}X_1X_2 = \mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2$ и ако DX_1 и DX_2 съществуват, то

$D(X_1+X_2) = DX_1 + DX_2.$

* Теорема 1 (смяна на променливите - многомерна):

Нека $X=(X_1, X_2)$ е вектор от сл. вел. със съвместна плътност f_X и $D_{f_X} = \{ x=(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : f_X(x_1,x_2)>0 \}$.

Нека $g: D_{f_X} \to \mathbb{R}^2$ зададена чрез $g(x_1,x_2)=g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x_1,x_2) \\ g_2(x_1,x_2) \end{pmatrix}$.

Нека $g(D_{f_X})$ е образът на D_{f_X}. Нека g е взаимно еднозначна с ~~[illegible]~~ обратната ф-я $h=g^{-1}$. Нека g и h са непрекъснати и непрекъснато-диференцируеми.

Нека $h(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} h_1(y_1,y_2) \\ h_2(y_1,y_2) \end{pmatrix}$ и $J(y_1,y_2) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq$

$\forall y=(y_1,y_2) \in g(D_{f_X})$.

Тогава $Y=g(X)=\begin{pmatrix} g_1(X_1,X_2) \\ g_2(X_1,X_2) \end{pmatrix}$ има плътност

$f_Y(y) = f_Y(y_1,y_2) = f_X(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2)) \cdot |J(y_1,y_2)|$,

$\forall y=(y_1,y_2) \in g(D_{f_X})$.

* Гама разпределение:

Казваме, че $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ ако има плътност

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} &, x>0 \\ 0 &, x \le 0 \end{cases}, \text{ където}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

* Твърдение: Нека $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $1 \le i \le n$, $\alpha_i > 0$ и $\beta>0$.

Тогава $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta\right)$

независими в съвкупност

Следствие: Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими в съвкупност, експоненциални с параметър β ($Exp(\beta)$).

Тогава $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \beta)$. $(X_i \sim \Gamma(1, \beta))$

Теорема: $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то

- $EX = \frac{\alpha}{\beta}$
- $DX = \frac{\alpha}{\beta^2}$

* Хи-квадрат разпределение

Казваме, че $X \sim \chi^2(n)$ е хи-квадрат с $n \geq 1$ степени на свобода ако $X \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и съответно има плътност

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad x > 0,$$

* Теорема: Нека $Z \sim N(0,1)$ и $X = Z^2 \Rightarrow X \sim \chi^2(1)$

* t-разпределение:

Нека $Z \sim N(0,1)$ и $X \sim \chi^2(n)$, където $X \perp\!\!\!\perp Z$.

Тогава $\frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n}}}$ има t-разпределение с n-степена на свобода.

* Деф (сходимост почти сигурно):

Нека $X_1, X_2, X_3, \dots$ е редица от сл. вел. и X е сл. вел.

Казваме, че $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{п.с.} X$ ако $P(X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X) = 1$.

* Деф (сходимост по вероятност):

Казваме, че редицата X_n клони към сл. вел. X по вероятност, ако $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и пишем $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$, $\forall \varepsilon > 0$

* Деф (сходимост по разпределение):

Казваме, че X_n клони към сл. вел. X по разпределение, ако за всяка точка на непрекъснатост на $F_X(x) := \mathbb{P}(X \le x)$ е в сила (вярно), че:

$$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \le x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X \le x) = F_X(x)$$ и пишем

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

* Твърдение:
  - Нека $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \dots$ и $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, Тогава $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A)$
  - Нека $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots$ и $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Тогава $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A)$

* Теорема: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{nc} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$

* Твърдение: Ако $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} C$ и $(X_n)_{n\ge1}$ са дефинирани в едно вер. прост., то $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} C$. $C = const$

* Твърдение: Нека X е сл. вел. с положителна стойност. Тогава $\mathbb{P}(X > a) \le \frac{\mathbb{E}X}{a}$.

→ Неравенство на Марков

* **Свойства на ФМ:**

1.) $M_X(0)=1$

2.) $M_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathbb{E}X^k$, $|t|<\varepsilon$

3.) $\frac{d^k}{dt^k}M_X(t)\Big|_{t=0}=\mathbb{E}X^k$

4.) $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)$

5.) Ако $\lim M_{X_n}(t)=M_X(t)$ за $|t|\le\varepsilon \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$

2 сл. вел. със същата ф-я на разп. имат една и съща ф-я на моментите

6.) $M_X(t)=M_Y(t)$ за $|t|\le\varepsilon \Rightarrow X \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y$

7.) $Y=aX+b$, то $M_Y(t)=e^{bt}M_X(at)$, $|t|<\frac{\varepsilon_X}{|a|}$

* **Твърдение:** Нека $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. Тогава

$$M_X(t)=e^{\mu t}\cdot e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}},\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

* **Теорема (Моавър-Лаплас):**

$Y_n\sim Bin(n,p)$, $Z\sim N(0,1)$

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le z\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbb{P}(Z\le z)$$

* **Неравенство на Бери-Есеен**

$X_1\sim Ber(p) \Rightarrow \mathbb{E}|X_1-p|^3=p(1-p)\left(p^2+(1-p)^2\right)\le\frac{1}{16}$