Вероятности и статистика

→ ези/тура

* Каква е вероятността от 10 хвърляния да получим 6 езита?

$$\to P(\dots) = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

→ вероятността да се падне ези или тура с $\frac{1}{2}$

↓ вероятността да се случи еди кво си

↓ от 10 монети трябва да избера 6

Th: * **Закон за големите числа:**

$$\frac{\#\text{езита}}{\#\text{хвърляния}} \xrightarrow{\text{хвър.}\ \infty} \frac{1}{2}$$

↓ клони

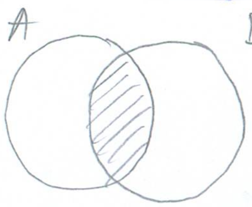
$X_1 = 1$ за ези

$X_1 = 0$ за тура

$$\boxed{\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{почти сигурно}} \frac{1}{2}}$$

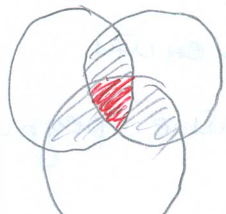
n → брой хвърляния

Зад. 1 Принципа за включване и изключване



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

↓ колко елементи има в обединението



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

→ $A_1, \dots, A_n$, $|A_i| < \infty$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i_1,\dots,i_k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| (-1)^{k+1}$$

↓ брой на елементите в обединението

$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \dots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|}$$

↓ обща формула

зад 2. $|M| < n$

а) k различни елемента от M

$n \quad n-1 \quad \dots \quad n-k+1$

начина да бера вр[illegible] — k елемента

→ когато не ни интересува наредбата (комбинация)

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \text{ (по всички начини по които избирам k-ти елемент) } = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

разделяме на $k!$ заради възможните пермутации в наредбата

комбинации кога ще може да изберем k предмета от n

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$ → бином на Нютон

б) k-орка от различни елементи $(a_1, \dots, a_k)$, т.е. редът има значение (вариация)

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = V_n^k$$

в) k-орка $(a_1, \dots, a_k) \in \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{k}$

$$|M^k| = n^k$$

Зад 3. $x_1+\dots+x_k=n$

а) $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{N}$

Stars and bars

$x_1+x_2+x_3=6$

6 звездички и 2 прегради

5 позиции за преградите

$\Rightarrow$ Уравнението $x_1+x_2+x_3$ има $\binom{5}{2}$ решения в $\mathbb{N}$

т.е. от 5 места където да сложа преградите избирам 2

$\rightarrow$ $x_1+\dots+x_k=n$

n звезди, k-1 прегради

n-1 позиции за преградите $\Rightarrow$ $\boxed{\binom{n-1}{k-1} \text{ решения}}$

б) 

$x_1=0$

- може да имаме и от страни
- но може да имаме и две прегради едно до едно

$\cancel{\binom{n+1}{k-1}}$ не е валидно

$x_1+\dots+x_k=n$

$(x_1+1)+\dots+(x_k+1)=n+k$

на всяко x му добавяме единичка за да няма нули

$x_1'+\dots+x_k'=n+k$

от а) $\Rightarrow$ $\boxed{\binom{n+k-1}{k-1} \text{ начина}}$

$\rightarrow$ вместо n от а) имаме n+k, а преградите си остават k-1 к елементно подмножество на n елементно множество, но позволяване и повторения

→ ако е без повторения просто е $\binom{n}{k}$

Ако $M = \{a_1, \dots, a_n\}$, то търсеният брой е # решения на

$x_1 + \dots + x_n = k$ → общо колко елементи сме взели

↓

колко пъти ме избрали a_1 в $\mathbb{N}_0$

↓

мога и да не взема някой елемент

$\Rightarrow \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ → броят възможности

* когато избирам k елемента от n е също като да избирам кои n−k да не вземам $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$$

$\boxed{\text{Зад 4.}}$ k различни частици (топки) в n различни клетки (урни)

а) всяка клетка ≤ 1 частица

б) няма ограничение

в) няма празна клетка $(k \geq n)$

а) като избирам за първата частица имам n възможности, за втората n−1 ... за k-тата ⇒ n−k+1

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!} = V_n^k}$$

б) за първата имам n възможности, за втората n ... k-тата пак n $\Rightarrow$ $\boxed{n^k}$

в) k частици, различни
n клетки

? # начини няма празна клетка

□ □ ... □ → взимаме n частици и ги слагаме във всичките n клетки, така сме си осигурили, че няма празна клетка и после останалите $k-n$ частици ще ги сложа отгоре по някакъв начин

грешен подход ✗ ←

$A_i = \{$ i-тата клетка е празна $\}$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{$ поне една клетка е празна $\}$

В такъв случай $\Rightarrow$ $\left|\text{броя на всички конфигурации}\right| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$

$n^k - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$ → изразяваме го от принципа за вкл. и изкл.

$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |A_1| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_{n-1} \cap A_n| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$

$|A_1| = (n-1)^k$ - първата кутия е забранена

$|A_1 \cap A_2| = (n-2)^k$ - и първата и втората са забранени

и т.н.

Следователно $\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m}(n-m)^k(-1)^{m+1}}$

Ако частиците са <u>неразличими</u>

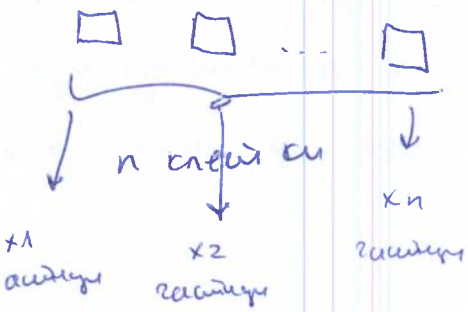
k неразличими

n клетки

↓ повечето задачи могат да се решат с това уравнение, когато имаме неразличими неща

а) $\binom{n}{k}$ → трябва да избера в кои k клетки да сложа частиците

б) няма ограничение



? колко слагам във всяка от тях

\# решения в N_0

$$x_1 + \dots + x_n = k$$

$$\to x_1' + \dots + x_n' = n+k \text{ в } N$$

n+k звезди

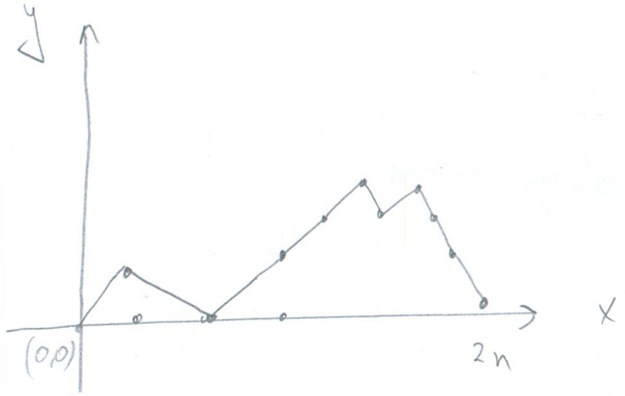
n−1 прегради $\to \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$

в) няма празна клетка

↳ пак с принципа на вкл. и изкл.

Зад 10.* малко променено условие

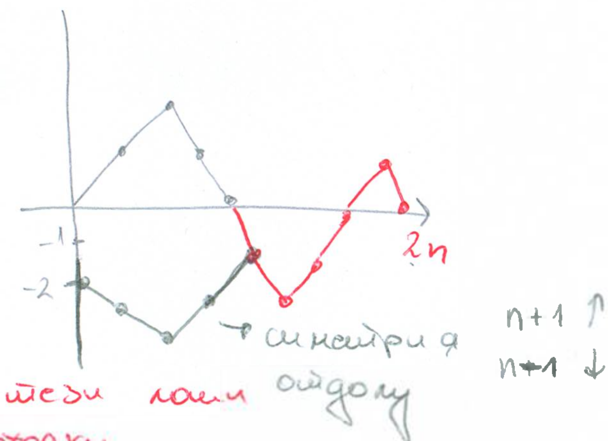
simple random walk



- на всяка стъпка или се качвам едно нагоре или едно надолу

- По колко начина може да стигнем от $(0,0)$ до $(2n,0)$? $\binom{2n}{n}$

- —||— , но както не пресичаме $\overrightarrow{Ox}$?



\# на тези лоши разходки

↳ принцип на отражението

⇒ Всички "лоши" разходки са брой разходки от $(0,-2)$ до $(2n,0)$ за $2n$ време

Те са $\binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n-1}$

→ Следователно "добрите" разходки (т.е. неотрицателните пътища) са

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!} =$$

$$= \binom{2n}{n}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

→ числа на Каталан

(5.) Колко 4 цифрени числа могат да се напишат с цифрите
1, 2, 3, 4, 5

а) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

б) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$

в) $\frac{3}{5}$ от 120 защото имаме 3 нечетни числа

* На колко различни начина може да разделим думата мисисипи

$$\to \frac{8!}{4!\,2!\,1!\,1!}$$

8! → броят на всички букви

4! 2! 1! 1! → броят на повтарящите се

→ Ако всички бяха различни просто е 8!

↳ може да се запише и като $\binom{8}{4,2,1,1}$ → мултиномен коефициент

$\boxed{\text{Зад 8.}}$ а) започват ~~[illegible]~~ с а

$\Rightarrow 3^{n-1}$ → фиксираме а-то и за всяка следваща позиция избираме

б) к-пъти а

$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$

↓ имаме к а-та, избираме къде да ги сложим

→ имаме две позиции за които трябва да направим избор помежду две неща (b или c)

в) к пъти а, като първият и последният символ е а

а__________а

$\binom{n-2}{k-2} \cdot 2^{n-k}$

$k1 + k2 + k3 = n$ → * подобна на задачата мисисипи !

$k1$ a-ята

$k2$ b-ята

c-ята → $n - k1 - k2$

$$\binom{n}{k1} \cdot \binom{n-k1}{k2} \cdot \binom{n-k1-k2}{n-k1-k2} = \frac{n!}{k1!\,\cancel{(n-k1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k1)!}}{k2!\,(n-k1-k2)!} = \binom{n}{k1,k2,n-k1-k2}$$

избираме a-тата

мястото за b-тата

това остава за c-тата

$\boxed{\text{Зад 7.}}$ 5 топки в $\sqcup_A \; \sqcup_B \; \sqcup_C$

а) A е празна

↳ което не означава, че и B или C може да е празно също

$\Rightarrow 2^5$

б) само A е празна

2^5 – всички в C или в B (което е 2 комбинации)

$\Rightarrow 2^5 - 2$

в) точно една кутия е празна

↳ е или A или B или C

$\Rightarrow$ само A + само B + само C $= 3(2^5-2)$

г) поне една кутия е празна

↳ поне 1 = точно 1 + точно 2 + 3 ↗ всички са на едно място

или една празна

или две празни

$= в) + 3 + 0 = 3(2^5-2) + 3 = 3(2^5-1)$

-2-

д) няма празно

$3^5 -$ поне $1 = 3^5 - 3(2^5-2) - 3$

Зад 6. 12 човека, избираме 4 $\quad M=\{1,2,\dots,12\}$

а) няма ограничение за участие

↳ няма значение подредеността $\Rightarrow C_{12}^4$

б) A и B да не са заедно

$\rightarrow \{A,$ $\quad 4 \quad C_{10}^3 \rightarrow$ изключваме A и B и остават 10

$\{B,$ $\quad 4 \quad C_{10}^3$

$\{$ $\quad 4 \quad C_{10}^4$

$\Rightarrow$ само A + само B + без A и B

$$\Rightarrow 2\cdot\binom{10}{3}+\binom{10}{4}$$

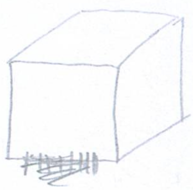
в) C и D само заедно

↳ от всички 4 елементни подмножества от 12 елементното множество изваждаме броя на тези в който C и D не са заедно:

$$\binom{12}{4} - 2\binom{10}{3}$$

#2 $\underbrace{\binom{10}{2}}_{C\text{ и }D}+\underbrace{\binom{10}{4}}_{\text{нито }C\text{ нито }D}$

Зад 11. P(кубче с 2 оцветени)



#ръбове = 8 → 10 − крайните 2 (защото не ни вършат работа)

$\Rightarrow \quad 10\cdot 8 \Rightarrow \dfrac{12\cdot 8}{10^3}$

зад 12.

0000
⋮
9999 } 10^4

а) без еднакви → $\frac{V_{10}^4}{10^4} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{10^4}$

б) точно 2 еднакви → _ $\dot{\_}$ _ $\dot{\_}$

$$\frac{10\cdot9\cdot8\cdot\binom{4}{3}}{10^4},$$

в) 3 еднакви → $\frac{10\cdot9\cdot\binom{4}{3},}{10^4}$

г) a, a, b, b

$$\frac{10\cdot9\cdot\binom{4}{2\cdot2}/2}{10^4}$$

aabb
abab
baab
abba
baba
bbaa

д) ⊔ ⊔ | ⊔ ⊔

0 1 | 0 1
1 0 | 1 0

$+1++2=18$

суми	0	1	2	... 8	9	10	11 ... 18
# начини	1	2	3	9	10	9	8	1

02
11
20

↓
може от
0 ~~до~~ 8 до 8+0,
които са
9 варианта

⇒ отг. е $\frac{2(1^2+2^2+3^2+\dots+9^2)+10^2}{10^4}$ → делим на всичко

извод от това, че половината са еднакви

Ω - множество от елементарни събития

= {възможни изходи}

→ В миналата задача:

$\Omega = \{0000, 0001, \dots\}$ → всички номера

→ сигма алгебра

множество от всички възможни

$\mathcal{A}$ - всички събития = подмножества на Ω

$\mathcal{A} \ni A$ - събитие → {номерът има две еднакви цифри}

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Упр. 4

Зад 18. $\Omega = \{$ ходят на лекар $\}$

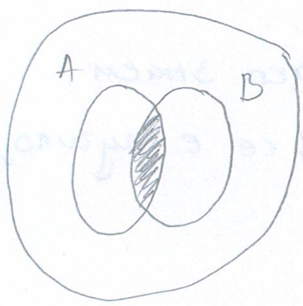
$A = \{$ посещават > 1 годишно лекар $\}$

$P(A) = 60\% \rightarrow P(\bar{A}) = 40\%$

$B = \{$ посещават хирург $\}$

$P(B) = 17\%$

$P($ от B, ако знаем, че е от $A) = 15\%$, → условна вероятност



$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A)$$

↓ вероятността на B, при условие A

Търси се $P(\bar{B} \mid \bar{A})$

не е в B не е в A

$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ → закон на де Морган

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ → вкл. и изкл.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

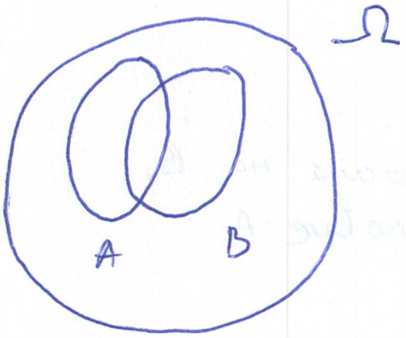
$$= 60\% \cdot 15\% =$$

$$= \frac{\cancel{60}^{3}}{\cancel{100}_{5}} \cdot \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{100}_{20}} = \frac{9}{100} = 9\%$$

$$P(\bar{B} \mid \bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{40\%} = \frac{1 - P(A \cup B)}{40\%}$$

$$\frac{100\% - (P(A) + P(B) - P(A\cap B))}{40\%} =$$

$$= \frac{100\% - (60\% + 17 - 9\%)}{40\%} = \frac{100\% - 68\%}{40} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5} = 80\%$$



Вероятността на A, ако знаем, че сме в B (т.е. B се е случило)

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

условна вероятност

$P(B) > 0$

* A и B са независими $\overset{def}{\iff}$ $P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$

· Ако $P(B) > 0$, то горното е еквивалентно на

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A|B) = P(A),$$ → независими събития

т.е. „B не влияе на A"

· A и B се наричат несъвместими, ако $P(A\cap B) = 0$ (или $A\cap B = \emptyset$)

· Понятието независими събития няма нищо общо с това те да са несъвместими

* Хвърляне монета веднъж

A = { хвърляне ези }

B = { хвърляне тура }

– несъвместими са, понеже няма как да хвърлим и ези и тура

$A \cap B = \emptyset$ – няма как от 1 хвърляне и двете

За независимост:

$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$

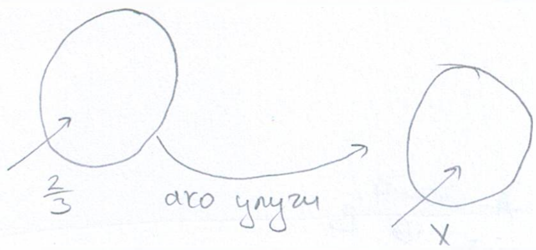
$P(A \cap B) = 0$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \neq P(A \cap B)$

$\Rightarrow$ не са независими

т-е са зависими

Зад 17.



P(да уцели и 2-ия) = 1/2

$\frac{2}{3} \cdot x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Зад 19. 2 зара

P(сумата < 8 | нечетна)

A = { сумата < 8 }

B = { сумата е нечетна }

$P(A \mid B) = ?$

Независими ли са A и B ?

пишраме $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A\cap B)$

$$\rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B)$$

сума	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
начина	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

$36 \rightarrow$ 2 зара $6\times 6 = 36$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2+4+6+4+2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$ $\rightarrow$ частта на A-тата, които попадат в B

Независими ли са?

$$\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = \frac{7}{12}\cdot\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A\cap B)$$

$\rightarrow$ не са независими

$\rightarrow$ $A\cap B \rightarrow$ и да е <8 и да е нечетна

$A|B \rightarrow$ да е <8, ако знаем че сумата е нечетна

Зад 14. 52 карти

пегели A - 7♢ → седмица каро

пегели B - общо 2 аса

P(A да спечели) = ?

Решение: Б.О.О. може да считаме, че тестето се състои от $\boxed{7, A, A, A, A}$. В такъв случай имаме 5 наредби

$\boxed{\begin{matrix} 7 & A & A & A & A \\ A & 7 & A & A & A \end{matrix}}$

$\frac{2}{5}$ - са тези които ни вършат работа

- - .

A A A A 7

↳ P(A да спечели)

→ Може да ги игнорираме всички други карти и да мислим само на тези които ни интересуват

→ Решение 2:

$\binom{52}{5}$ → избиране позициите на тези 5 карти

$\frac{\binom{52}{5} \cdot 47! \cdot 2 \cdot \boxed{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{52!}$

47! → останалите 47 ги пермутираме

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ → къде да сложим асата

2 → 7-цата трябва да е или на първа или на втора позиция

$$\to \frac{\binom{52}{5} \cdot 47! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{52!} = \frac{\frac{52!}{5!\,47!} \cdot 47! \cdot 2 \cdot 4!}{52!} = \frac{2}{5}$$

• Ако след като извлечем картата я връщане обратно

7, А, А, А, А

□ □

А А

↓ ↓

$\frac{4}{5}$ $\frac{4}{5}$ → вероятности

→ възможностите В да спечели са 2 поредни Аса

$\mathbb{P}$(два поредни аса) = $\mathbb{P}$(В да спечели) $= \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\mathbb{P}$(за А да спечели) $= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{25}$ → □ □

7 А

А 7

→

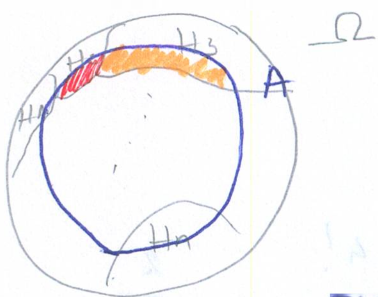
Времето утре

1/3 ще вали: 1/10 да излиза, 9/10 да не излиза

2/3 няма да вали: 7/10 да излиза, 3/10 да не излиза

$\mathbb{P}$(излиза утре) $= \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{10}}_{\mathbb{P}(A|H_1)} + \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\frac{7}{10}}_{\mathbb{P}(A|H_2)}$

↳ приложение на понятието за пълна вероятност



$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$; $H_i \cap H_j = \varnothing$ за $i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$; $\bigsqcup_{i=1}^{n} = \Omega$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap H_1) + \mathbb{P}(A \cap H_2) + \ldots + \mathbb{P}(A \cap H_n) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)$

Зад 23 I и II се редуват

Печели 1-вият, хвърлил ези

$\mathbb{P}($I да спечели$) = ?$

$\mathbb{P}($II да спечели$) = 1 - \mathbb{P}($I$)$ → все пак единия ще спечели

Решение: E

T T E

T T T T E

⋮

$$\mathbb{P}(I) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \dots =$$

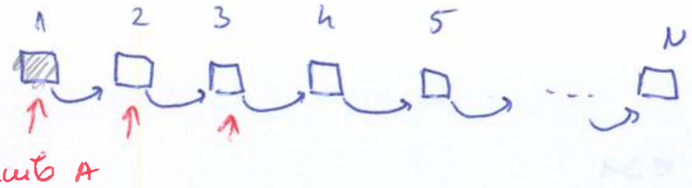
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots\right) =$$

* $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ за $|x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

зад. 28.



На стъпка k избираме случайно (равно) число от $\{1, \dots, k\}$

Ако изберем 1, слагаме $A[k]$ на позиция 1

$\mathbb{P}(A[1]$ да не се е променил след алгоритъма$) = ?$

Решение:

$\mathbb{P}(A[1]$ да не се промени$) =$

$= \mathbb{P}($да нямаме смяна$)$

$= \mathbb{P}($да нямаме смяна на стъпка 2$)$

$\mathbb{P}($ — || — 3$)$

$\vdots$

$\mathbb{P}($ — || — N$)$

2 от $\{1,2\}$ 2,3 от $\{1,2,3\}$ 2,...N от $\{1,\dots,N\}$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \ldots \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}$$

$\mathbb{P}($началният $A[3]$ да е на позиция 1 след алгоритъма$) = ?$

$= \mathbb{P}($на стъпка 3 местим $A[3]$ в началото$) \cdot$

$\cdot\ \mathbb{P}($да няма смени след ст. 3$) =$

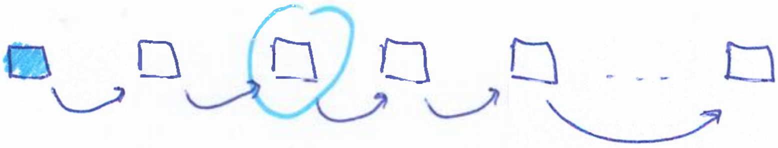
$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{5} \cdot \ldots \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}$$

Аналогично $\mathbb{P}($нач. $A[k]$ да е на 1-ва позиция след алг.$) =$

$$= \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2} \cdot \ldots \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}$$

→ Reservoir sampling

Reservoir sampling



→ Ако знаем N

Избираме случайно число $\{1, \dots, N\} = X$

Изход: $A[X]$

→ Ако не знаем N, алгоритъмът връща (през $A[1]$ в края) случаен елемент, при това с 1 пробягване на масива

1.
30.

$\boxed{1 \quad 11} \rightarrow$ 1 дефектно и 11 недефектни

$\boxed{1 \quad 9}$

$\mathbb{P}$(да изтеглим дефектно на стълка 2) = ?

↳ $\underbrace{\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{11}}_{\text{ако първото изтеглено е дефектно}} + \underbrace{\frac{11}{12} \cdot \frac{1}{10}}_{\text{ако на стъпка 1 не сме изтеглили дефектно}} = \frac{13}{132}$

↳ $H_1 = \{$изтеглили сме дефектно от I$\}$

$H_2 = \{$не сме изтеглили дефектна от I$\} = \overline{H_1}$ (отрицание)

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{12}$, $\mathbb{P}(H_2) = \frac{11}{12}$

$A = \{$изтеглили сме дефектна от II$\}$

$\mathbb{P}(A \mid H_1) = \frac{2}{11}$

$\mathbb{P}(A \mid H_2) = \frac{1}{11}$

и от ф-ла за пълна вероятност $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(A \mid H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i) =$$

$$= \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{11} \cdot \frac{11}{12} = \frac{13}{132}$$

31) 3 стандартни зара → Избираме 3 от тях и ги
1 само с 6-ци хвърляме накуп

а) $\mathbb{P}$(три 6-ци) = ?

б) $\mathbb{P}$(различни) = ?

в) $\mathbb{P}$(поредни) = ?

→ а) H_1 = { избрали сме 2 стандартни и този с 6-ците }

H_2 = { избрали сме 3 стандартни зара }

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{1}{\underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{избиране 3 от 4}}} = \frac{1}{4} = \overline{H_1}$$

а) A_1 = { хвърлили сме 3 6-ци }

$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 | H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \dots$ за H_2

$$\mathbb{P}(A_1 | H_1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$\mathbb{P}(A_1 | H_2) = \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{4}}$$

б) $A_2 = \{$хвърлили сме различни$\}$

$$\mathbb{P}(A_2 | H_1) = \frac{5 \cdot 4}{6^2}$$

$$\mathbb{P}(A_2 | H_2) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5 \cdot 4}{6^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A_2) = \frac{20}{6^2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{20}{6^2} \cdot \frac{1}{4}}$$

в) $A_3 = \{$паднали са се последователни числа$\}$

4,5
5,4

1,2,3
2,3,4
3,4,5
4,5,6 $\Big\} = 4$

$$\mathbb{P}(A_3 | H_1) = \frac{2 \cdot 2!}{6^2}$$

$$\mathbb{P}(A_3 | H_2) = \frac{4 \cdot 3!}{6^3}$$

4 възможности по 3 в комбинация

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A_3) = \frac{2}{6^2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4 \cdot 3!}{6^3} \cdot \frac{1}{4}}$$

34) 15 билета по 2 въпроса покриват 30 въпроса

Студентът знае 25 и 5 не знае

За да премине

→ билет и отговаря на 2та

→ билет и отговаря на 1 + 1 въпрос от друг билет

$\mathbb{P}$(да вземе изпита) = ?

H_i = { на първия билет има i познати въпроса }

A = { минава изпита }

$\mathbb{P}(A|H_0) = 0$

$\mathbb{P}(A|H_1) = \frac{24}{28}$

$\mathbb{P}(A|H_2) = 1$

25 знаещи
5 незнаещи

$\mathbb{P}(H_0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{20}{30\cdot 29}$

$\mathbb{P}(H_1) = 25\cdot 5 \Big/ \binom{30}{2} = \frac{250}{30\cdot 29}$

$\mathbb{P}(H_2) = \frac{\binom{25}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{25\cdot 24}{30\cdot 29} = \frac{600}{30\cdot 29}$

избиране от 30 2

$30\cdot 29 = \underline{870} =$

$600 + 250 + 20 = \underline{870}$

V X → ☐

24/28

24 са тези
дето остават да
ги знае

$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(A|H_i)\,\mathbb{P}(H_i)$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_0)\cdot\mathbb{P}(H_0) + \mathbb{P}(A|H_1)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\cdot\mathbb{P}(H_2) =$

$= 0\cdot\frac{20}{30\cdot 29} + \frac{24}{28}\cdot\frac{250}{30\cdot 29} + 1\cdot\frac{600}{30\cdot 29} =$

$= \boxed{\frac{24}{28}\cdot\frac{250}{30\cdot 29} + \frac{600}{30\cdot 29}}$

(55.) синя

зелена

$P(\text{зелено}) = 85\%$ } prior

$P(\text{синьо}) = 15\%$ } aprior

Свидетел казва, че е било синьо

P(да определи правилно цвят) = 80%.

P(да е била колата синьа) = ?

↳ $\frac{15}{100} \cdot \frac{80}{100} = 12\%$

$$\frac{\text{колата е синя и свид казва синя}}{\text{колата е синя и свид казва синя + колата е зелена и свид казва синя}}$$

⇓

вероятността да казва синьо

$$= \frac{\text{правилни}}{\text{правилни + грешни}} = \frac{15\% \cdot 80\%}{15\% \cdot 80\% + 85\% \cdot 20\%} = \frac{120}{120+170} = \frac{12}{29}$$

⇒ $\frac{12}{29} < 50\%$!! → не можем да повярваме на такъв резултат

* формула на Бейс – ни казва как да обърнем вероятности

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $[P(A \cap B) = P(A,B) = P(AB)]$ → едни и същи означения за вероятността и двете да са се случили

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$\boxed{P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}}$$ → формула на Бейс за събития

$H_1, H_2, \dots, H_n$ разбиване на Ω / пълна група от събития)

$$\boxed{P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)\cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{P(A|H_1)\cdot P(H_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)\, P(H_i)}} \rightarrow$$ формула на Бейс 2

↳ $A = \{$свидетелят казва "синьо"$\}$

$H_1 = \{$катастрофиралата е била синя$\}$

$H_2 = \{$катастрофиралата е била зелено$\}$

$P(H_1) = 15\%$

$P(H_2) = 85\%$

$P(H_1|A) = ?$ → търсим колата да е синя при положение, че казва, че е синя

За Бейс, ще ни трябват:

$P(A|H_1) = 80\%$

$P(A|H_2) = 20\%$

$P(H_1) = 15\%$

$P(H_2) = 85\%$

⇒ прилагаме Бейс

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)\cdot P(H_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)\cdot P(H_i)}$$ = точно както видяхме в началото с неформалните разсъждения

(36) Класически пример за формула на Бейс

Тест е точен в 99%

0,5% страда от болестта

$\mathbb{P}$(да сме болни, ако теста е +) = ?

$A = \{$Теста е положителен$\}$

$H_1 = \{$Болни сме$\}$ → $\mathbb{P}(H_1) = 0,5\%$

$H_2 = \{$Здрави$\}$ → $\mathbb{P}(H_2) = 99,5\%$

$\mathbb{P}(H_1 | A)$

↳ Ако подходим че H_1 и H_2 са ни теста да е + и теста де е − е грешен подход!

! Защото в този случай ние няма да знаем за това вероятност, а така вече ги имаме за това колко хора са болни, а колко здрави!

$\mathbb{P}(A | H_1) = 99\%$ $\qquad$ $\mathbb{P}(H_1) = 0,5\%$

$\mathbb{P}(A | H_2) = 1\%$ $\qquad$ $\mathbb{P}(H_2) = 99,5\%$

↳ Отговор по Бейс

$$\mathbb{P}(H_1 | A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)} = \frac{99\% \cdot 0,5\%}{99\% \cdot 0,5\% + 1\% \cdot 99,5\%} \approx \frac{0,5}{0,5+1} = \frac{1}{3}$$

33. A, B, C

$\mathbb{P}(A) = 0{,}6$ → заявка е изпратена към принтър A

$\mathbb{P}(B) = 0{,}3$

$\mathbb{P}(C) = 0{,}1$

E = {отпадала е грешка}

$\mathbb{P}(E|A) = 0{,}01\% \rightarrow 1\%$

$\mathbb{P}(E|B) = 0{,}05\% \rightarrow 5\%$

$\mathbb{P}(E|C) = 0{,}04\% \rightarrow 4\%$

$\mathbb{P}(A|E) = ?$

↳ $\mathbb{P}(A|E) = \dfrac{\mathbb{P}(E|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(E)} =$ → понеже E не го знаем разписваме

$$= \frac{\mathbb{P}(E|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(E|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(E|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(E|C)\,\mathbb{P}(C)}$$

↳ щом е настъпило E (има error), значи се е случило една от трите грешки

↳ Заместваме ...

$$\mathbb{P}(A|E) = \frac{0{,}01\% \cdot 0{,}6\%}{0{,}01\% \cdot 0{,}6\% + 0{,}05\% \cdot 0{,}3\% + 0{,}04\% \cdot 0{,}1\%}$$

40). 1 / 4 отговора е верен

$\mathbb{P}$(студент да знае въпроса) = 90%.

ако не знае → налучква

$\mathbb{P}$(налучквал | правилно) = ?

→ H_1 = { знае отговор }

. H_2 = { не знае отговор } = $\overline{H_1}$

$\mathbb{P}(H_1) = 90\%$

$\mathbb{P}(H_2) = 10\%$

A = { отговорил е правилно }

$\mathbb{P}(H_2 | A) = ?$

↳ Решение: Бейс

$\mathbb{P}(A | H_1) = 100\%$ $\mathbb{P}(H_1) = 90\%$

$\mathbb{P}(A | H_2) = \frac{1}{4} \to 25\%$ $\mathbb{P}(H_2) = 10\%$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(H_2 | A) = \frac{\mathbb{P}(A | H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(A | H_i)\, \mathbb{P}(H_i)} = \frac{\mathbb{P}(A | H_2)\, \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A | H_1)\, \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A | H_2)\, \mathbb{P}(H_2)} =$$

$$= \frac{25\% \cdot 10\%}{100\% \cdot 90\% + 25\% \cdot 10\%} = \frac{250\%}{9000\% + 250\%} = \frac{250\%}{9250\%} \approx 0{,}027\%$$

$\approx 3\%$

4.1. A, B, C → ловци стрелят по заек

$$A \to 0{,}2 \qquad B \to 0{,}4 \qquad C \to 0{,}6$$

D = { Оцелил е точно един човек }

$P(A|D) = ?$

не става с Бейс !?

↳ $P(A|D) = \dfrac{P(A\cap D)}{P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)}$ → непресичащи се събития

$$P(A\cap D) = \boxed{0{,}2}\cdot\boxed{0{,}6\cdot 0{,}4} + \boxed{0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4} + \boxed{0{,}2}\cdot\boxed{0{,}6\cdot 0{,}4} +$$

$$\boxed{(0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4)^2}\cdot\boxed{0{,}2}\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 + \dots =$$

$$= \underline{0{,}2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4\,(1+q+q^2+\dots)}$$

$$q = 0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4$$

$$1+q+q^2+\dots = \frac{1}{1-q}$$

$$P(B\cap D) = 0{,}8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4 + (0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4) + 0{,}8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4 + \dots =$$

$$= \underline{0{,}8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4\,(1+q+q^2+\dots)}$$

$q = 0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4$ → и тримата да не оцелят

$$P(C\cap D) = \underline{0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6\,(1+q+q^2+\dots)}$$

↳ Отговор :

$$\frac{0{,}2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4\,\left(\cancel{\frac{1}{1-q}}\right)}{(0{,}2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 + 0{,}8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4 + 0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6)\cdot\cancel{\frac{1}{1-q}}}$$

* Ако никой не оцели се стреля отново и не ни интересува колко пъти са започнали отново !

43. 55 М
45 Ж

$A = \{$ взима изпита $\}$

$\mathbb{P}(A \mid M) = 0{,}4$
$\mathbb{P}(A \mid Ж) = 0{,}7$

След изпита сме избрали 3 резултата ✓✓ ✗

$\mathbb{P}($да сме избрали резултатите на 3 момчета $\mid$ ✓✓✗$)$

↳ Решение: Бейс

$H_i = \{$от избраните 3-ма има i момичета$\}$

$\mathbb{P}(✓✓✗ \mid H_0) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 3$ → понеже не знаем реда, а само, че са 3 и затова умножаваме

$\mathbb{P}(H_0) = \frac{55}{100} \cdot \frac{54}{99} \cdot \frac{53}{98} = \boxed{\approx \left(\frac{55}{100}\right)^3}$ → $\approx$ понеже ако са големи числа ще трябва много да смятаме и взимаме приближението

$= \frac{\binom{55}{3}}{\binom{100}{3}}$ → тоя 3 момчета от 55 / → колко хора от 100

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{\binom{45}{1}\binom{55}{2}}{\binom{100}{3}}$ $\mathbb{P}(H_2) = \frac{\binom{45}{2}\binom{55}{1}}{\binom{100}{3}}$ $\mathbb{P}(H_3) = \frac{\binom{45}{3}}{\binom{100}{3}}$

2М ✓, Ж ✗ М ✓ Ж ✓ М ✗

$\mathbb{P}(✓✓✗ \mid H_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 + (0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}7) \cdot 2$
1Ж, 2М

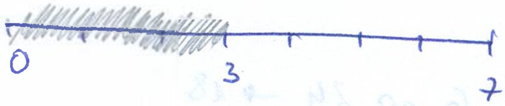
$\mathbb{P}(✓✓✗ \mid H_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 + (0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3) \cdot 2$

$\mathbb{P}(✓✓✗ \mid H_3) = (0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3) \cdot 3$

→ Заместваме в Бейс

$$P(H_3 \mid VVX) = \frac{P(VVX \mid H_3)\,P(H_3)}{\sum_{i=0}^{3} P(VVX \mid H_i)\,P(H_i)}$$

→ геометрична вероятност



x - случай

$P(x < 3) = \frac{3}{7}$

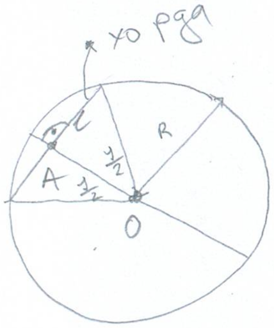
μ = мярка

$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

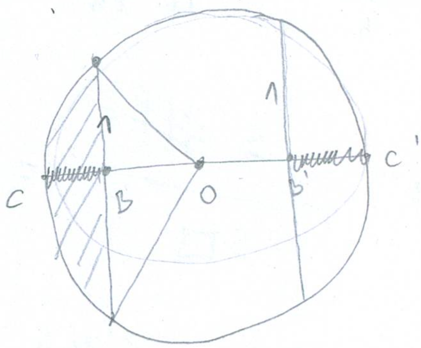
Геометрична вероятност задачи

44.

$R = 1$



P(хордата < радиуса) = ?



$l < 1 \iff 1^2 + 1^2 - 2\cos\varphi < 1 \iff$

$\cos\varphi > \frac{1}{2}$

$\varphi \in (0°, 60°)$

$OB^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ от питагорова теорема

$= \frac{3}{4}$

$\Rightarrow OB = \frac{\sqrt{3}}{2}$

→ отговор:

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = \frac{BC + B'C'}{CC'}$$

5) А и В между 0 и 24

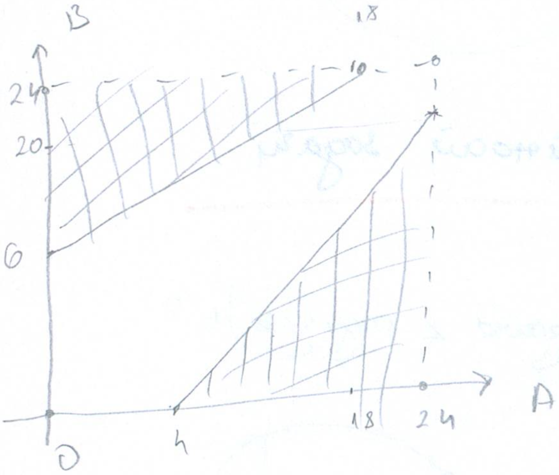
А - 6 часа, за да бъде разтоварен

В - 4 часа, - || -

$\mathbb{P}$(да не се засекат) = ?

→ Ако А дойде в 0 → В може от 6 до 24 → 18

→ Ако А дойде в 12 → В може от 0 до 8 и от 18 до 24 → 14



Отговор: $\frac{S_{\text{шрих}}}{S_{\square}} = \frac{18^2 \cdot \frac{1}{2} + 20^2 \cdot \frac{1}{2}}{24^2}$

→ $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x,y \le 24\}$

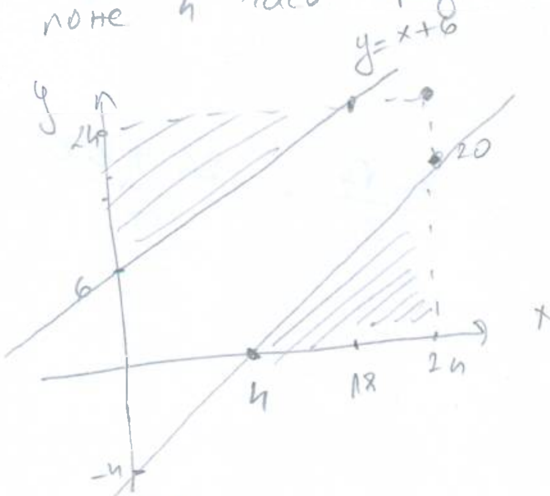
$\left| \begin{array}{l} 0 \le x,y \le 24 \\ y > x+6 \text{ или } y < x-4 \end{array} \right.$

вторият да е дошел поне 6 часа след първия

$y > x+6$ или $y < x-4$

$x,y \in [0, 24]$

вторият да е дошел поне 4 часа преди първия



→ ако $t=0$

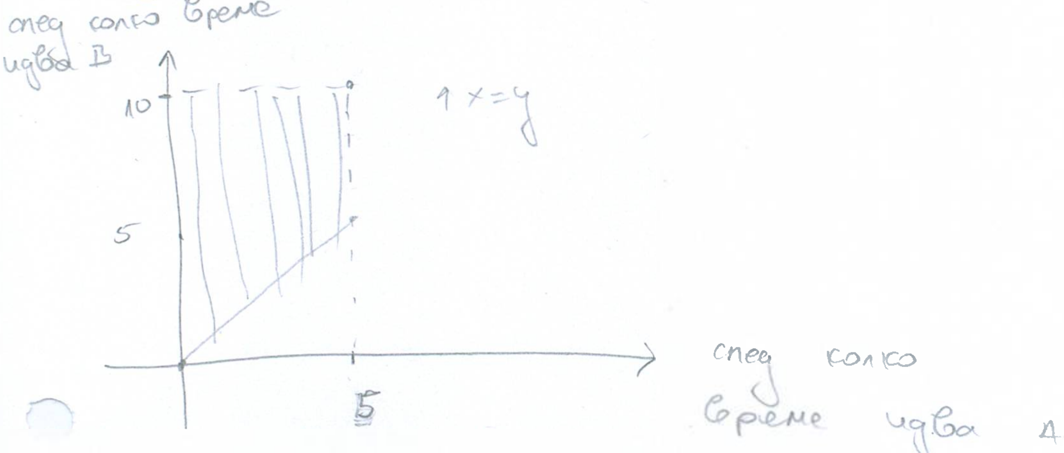
ако $t=24$

46. A на 5 min

B на 10 min

а) P(A да дойде преди B) = ?

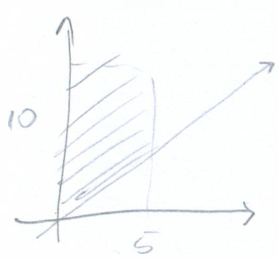
б) $\mathbb{P}$(да чакаме ≤ 2 min) = ?



отговор $\dfrac{S_{||||}}{S_{\Omega}} = \dfrac{50 - \frac{5^2}{2}}{50} = 1 - \dfrac{25}{100} = \dfrac{75}{100} = \dfrac{3}{4}$

$$\Omega = \left\{ (x, y) : \begin{matrix} 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{matrix} \right\}$$

$x < y$



1.

$\frac{2}{3}$ туристи – $\frac{1}{6}$ вероятност за грешка

опитни – 1 да е правилно

P(каква е вероятността да е правилен отговор) P = ?

P(верен | ляво)

P(правилен) = ?

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot 1$$

б) P(верен | отговорил 2 пъти едно и също) =

$$\frac{P(\text{верен} \cap A_2)}{P(A_2)} =$$

$$= \frac{P(\text{верен} \cap A_2 \mid \text{туристи})\,P(\text{туристи}) + P(\text{верен} \cap A_2 \mid \text{опитен})\,P(\text{опитен})}{P(A_2 \mid \text{туристи})\,P(\text{туристи}) + P(A_2 \mid \text{опитен})\,P(\text{опитен})} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot 1^2}{\frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{2+36}{2\cdot 26+36} = \frac{38}{88} = \frac{19}{4}$$

17)

K ⊢———⊣

Избиране x и $y \in [0, K]$

$P(x, y, K$ да образуват $\Delta) = ?$

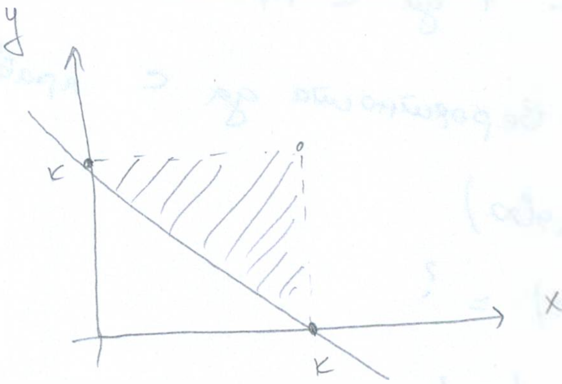
→ Решение:

$0 \le x, y \le K$

$x + y > K$

$x + K > y$

$y + K > x$



↳ $x + y > K$

Ако $x = 0 \to y = K$

$y = 0 \to x = K$

→ Отговор $= \dfrac{S_{///}}{S_{\square}} = \dfrac{1}{2}$

(48) $0 \le x, y, z \le 1$ → K

$P(x, y, z$ да образуват $\Delta) = ?$

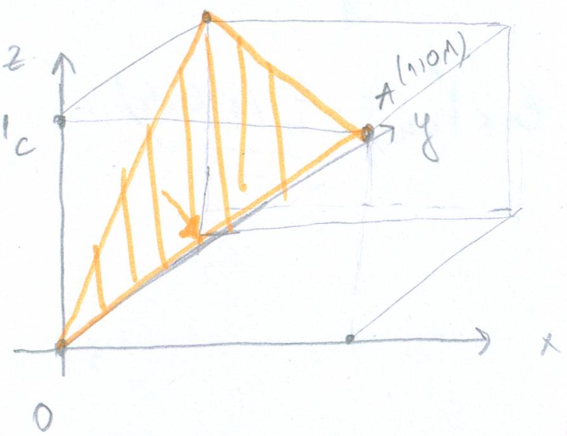
Решение:

↳ Може да си фиксираме че произволна отсечка е най-голяма ⇒ Б.О.О. ако фиксираме, че z е $> x, y$ ⇒ решението е същото като (47) (z игра ролята на K)

↳ $\begin{cases} 0 \le x, y, z \le 1 \\ x + y > z \quad (2) \\ x + z > y \\ y + z > x \end{cases}$ → $x + y - z = 0$

x	y	z
0	1	1
1	0	1

B(0,1,1)



Ограничение (2) премахва обем от $\frac{1}{6}$

→ пирамидата OABC

↳ Аналогично за другите две ограничения също по $\frac{1}{6}$

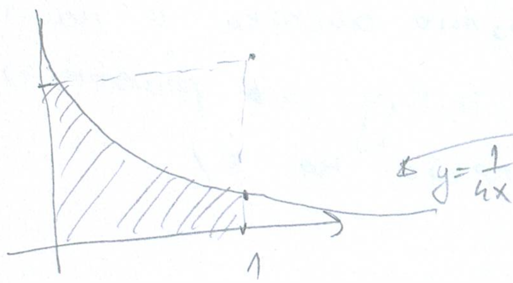
↳ Отговор:

$$\frac{1 - 3 \cdot \frac{1}{6}}{1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

цялото минус трите по $\frac{1}{6}$ дето махаме

50. $x, y \in [0,1]$

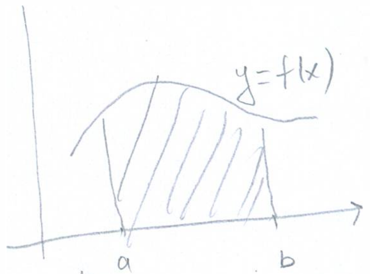
a) $\mathbb{P}(xy < \frac{1}{4}) = ?$



$y \leq \frac{1}{4x}$

$x = 0 \to \infty$

$x = 1$

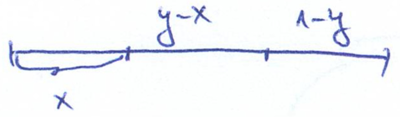


$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Одговор: $$\frac{\frac{1}{4} + \int_{1/4}^{1} \frac{1}{4x}\,dx}{1} = \frac{1}{4}\left(1 + \ln x \Big|_{1/4}^{1}\right) = \frac{1}{4}(1 + \ln 4)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \int x^n\,dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{за } n \neq -1 \\ \int \frac{1}{x}\,dx &= \ln x \\ \int e^x\,dx &= e^x \end{aligned}}$$

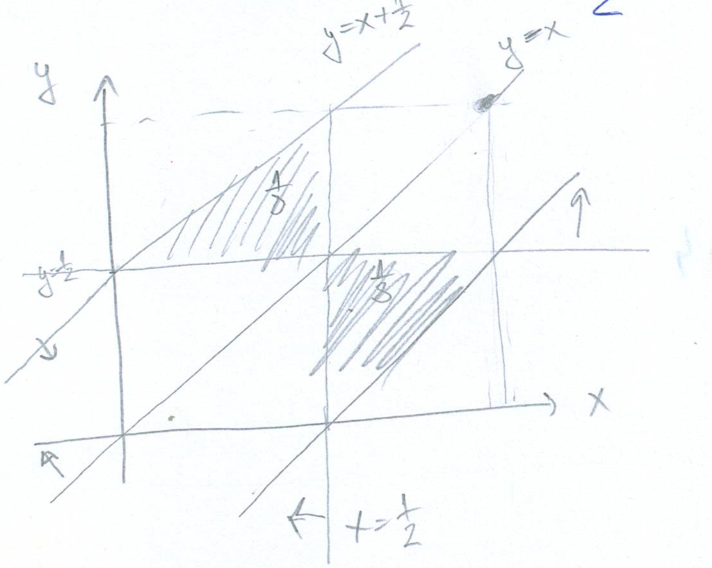
51. отсечка 3 части



x, y са случайни между 0 и 1

P(да можем да образуваме Δ от 3-те части) = ?

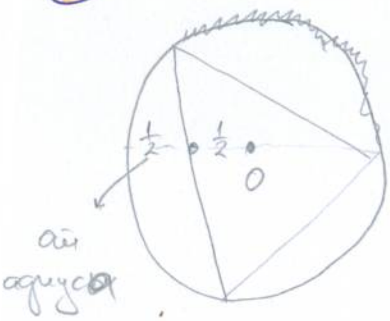
$$\begin{cases} y > x \\ x + (y-x) > 1-y \iff y > \frac{1}{2} \\ x + (1-y) > y-x \iff 2y < 2x+1 \\ (y-x) + (1-y) > x \iff x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



отговор:

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{8}}{1} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}$$

52.



→ Отг. $\frac{1}{3}$

→ Отг. $\frac{1}{2}$

→ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$P: \mathcal{A} \to [0,1]$

X (random variable)

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

: Хвърляме 2 пъти монета

$\Omega = \{(E,E), (T,E), (T,T), (E,T)\}$

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

X = „брой езита"

$X(E,E) = 2$ $\quad$ $X(T,T) = 0$

$X(E,T) = 1$ $\quad$ $X(T,E) = 1$

$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = 1\}) = \mathbb{P}(\{(E,T), (T,E)\}) = \frac{1}{2}$

→ дискретна случайна величина – X приема краен брой стойности или изброима безкрайност

X	0	1	2
$\mathbb{P}(X=\cdot)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

→ разпределение на X

X	x_1	x_2	x_3	...
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	p_3	...

$\mathbb{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots$ → очакване на X

$DX = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2$ → дисперсия

$= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

53. → ези

← тура

10 хвърляния

$X =$ „крайна позиция"

а) $\mathbb{P}(X=0) = ?$ → да е на мястото от където е тръгнал

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(5 \text{ езита и } 5 \text{ тури}) = \dfrac{\binom{10}{5}}{2^{10}} \rightarrow \underline{\binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}$

б) $\mathbb{P}$(да е на 2 крачки от началото) =

$\mathbb{P}(X=2 \text{ или } X=-2) = \mathbb{P}\left(\begin{matrix} 6\rightarrow, 4\leftarrow \text{ или} \\ 6\leftarrow, 4\rightarrow \end{matrix}\right) =$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{10}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{10}{4} =$

$= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{10}{6}$

в) $\mathbb{P}(X=5) = ?$

$m \rightarrow$

$n \leftarrow$

$m+n = 10$

$m-n = 5$

$\Rightarrow 2m = 15$ → няма решение в $\mathbb{N}$

$X \sim Ber(p)$

X следва разпределение на Бернули с параметър p, ако

$\mathbb{P}(X=1) = p$

$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

X	0	1
P	1-p	p

$\mathbb{E}X = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$

$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 0^2\cdot(1-p) + 1^2\cdot p - p^2 = p - p^2$

* $X \sim Bin(n,p)$ #успехи

n опита с Бер. за успех p

→ 10 опита с Бер. за успех $\frac{1}{5}$

$\mathbb{P}(X=3) = \underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^3}_{\text{успех}} \cdot \underbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^7}_{\text{неуспех}} \binom{10}{3}$ → кои 3 от 10

X	0	1	2	...	n

$\mathbb{P}(X=k) = p^k(1-p)^{n-k}\binom{n}{k}$

$1-p=q$

$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{n} k\cdot p^k(1-p)^{n-k}\binom{n}{k}$

→ n опита

$X \overset{d}{=} X_1 + X_2 + \dots + X_n$

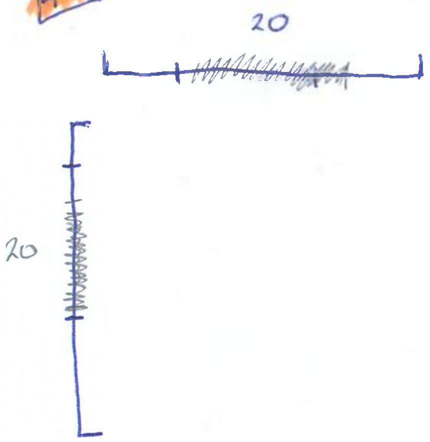
1 ако е успешен → т.е. $X_i \sim Ber(p)$

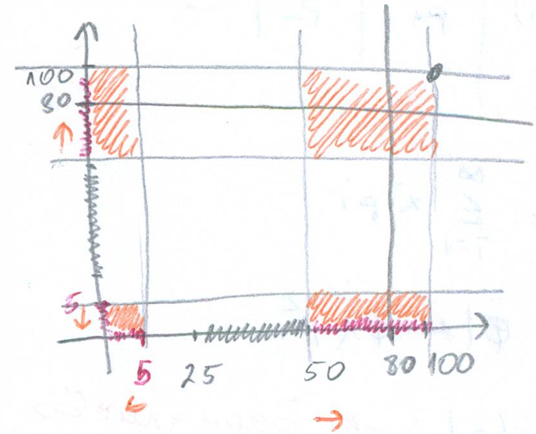
0 ако е неуспешен

$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_n = n\cdot p$

$DX = n\cdot \mathbb{E}X_1 = np(1-p)$

55/9 49 Упр. No..





$$\frac{S_{\text{оранжово}}}{S_{\text{цяло}}} = \frac{5\cdot 55 + 50\cdot 55}{100^2} = \frac{55^2}{100^2}$$

P(да няма сбъдване от 5 до 50 и от двете страни) =

$= P($ —\|— от едната страна$)^2$ ⌐ понеже са независими двете страни

↳ Ако смятаме, че трябва да се обере цялото сбъдване ще е до 80 а не до 100

↳ $$\frac{S_{\text{оранжово}}}{S_{\text{цяло}}} = \frac{5\cdot 35 + 30\cdot 35}{100^2} = \frac{35^2}{100^2}$$

X	x_1	x_2	...
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	...

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$DX = E(X - EX)^2$$

- $X \sim Ber(p)$ → Бернулиево разпределение

$EX = p$; $DX = p(1-p)$

- $X \sim Bin(n, p)$ → Биномиално разпределение

$X = X_1 + \dots + X_n$ $\qquad$ X_i - iid

→ independant identically distributed (независими и еднакво разпределени)

$EX = np$

$DX = np(1-p)$

55. а) вход А

2 лева

ези → 5 лева

тура → 0 лева

$\frac{5}{2} = 2,5$ лева не средната печалба

X = „печалбата"

X	2	2^2	2^3	...	2^n
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	$\frac{1}{2^n}$

↓ да се падне ези на първи ход

$$EX = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$= 1 + 1 + 1 + \dots =$$

$$= \infty$$

→ St. Petersburg Paradox

очакването не е всичко

б) Martingale strategy $\to$ удвояване на загуба

$$A \begin{cases} \xrightarrow{\frac{1}{2}} 2A \\ \xrightarrow{\frac{1}{2}} 0 \end{cases}$$

$1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 2$ (чисто $2-1=1$)

$1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} -1$, залагаме 2

$2 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 4$ (чисто $4-1-2=1$)

$2 \xrightarrow{\frac{1}{2}}$ залагаме 4

$4 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 8$ (чисто $8-1-2-4=1$)

$4 \xrightarrow{\frac{1}{2}}$ залагаме 8 ...

$X =$ „ходът, на който печелим"

X	0	1	2	3	4	...
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

$$\mathbb{E}\,\text{печалба} = \frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{4}(4-1-2) + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum \frac{1}{2^n} = 1$$

56) 2 зара 5 пъти

$\mathbb{P}($„# хвърляния със сума 6" $= 2) = ?$

Средната стойност?

$\mathbb{E}$ „# хв. със сума 6" = ?

↳ $p = \mathbb{P}($от два зара да получим сума $6)$

$X =$ „# хв. със сума 6" $\sim Bin(5, p) \to$ успех

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3$$

↓ успехите ↳ неуспехите

$\mathbb{E}X = 5 \cdot p$

$$p = \frac{\{(1,5),(2,4),(3,3),\dots\}}{36} = \frac{5}{36}$$

↳ Вероятността да ни се падне 2 6-ци е по-малка от вероятността да ни се падне 2 и 4

↳ защото 2 6-ци можем да хвърлим по един начин, докато 2 и 4 можем по два

$X \sim Bin(3, \frac{1}{2})$

3 хвърляния с вероятност за успех $\frac{1}{2}$

Следователно $\to$ $\left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} =$

$= \frac{7+8+1}{32} = \boxed{\frac{1}{2}} \to$ A да спечели

б) $\to \mathbb{P}(Y=1 \mid X > Y) =$

$= \frac{\mathbb{P}(Y=1 \cap X>Y)}{\mathbb{P}(X>Y)} = \frac{\mathbb{P}(\{(2,1),(3,1)\})}{\mathbb{P}(X>Y)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{4}}{1/2} = \frac{8}{16}$

в) $\to$ за A $\to$ $\frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(-3) = -\frac{1}{2}$

за B $= \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{да спечели}}(3) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{да изгуби}}(-2) = \frac{1}{2}$

57.

A - 3 монети

B - 2 монети

Печели този с повече езита

а) $\mathbb{P}($A да спечели$) = ?$

б) $\mathbb{P}($B да съб. 1 ези $|$ A е спечелил$) = ?$

в) средна печалба $= ?$

→ $X =$ „Езита на A" $Y =$ „Езито на B"

а) $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=2, Y=0) + \mathbb{P}(X=3, Y=0) +$
$\mathbb{P}((X,Y) \in \{(2,1), (3,1), (3,2)\})$

X	0	1	2	3
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	0	1	2
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

58

p - успех

$$\underbrace{\overset{V}{\sqcup}\ \overset{X}{\sqcup}\ \overset{X}{\sqcup}\ \overset{X}{\sqcup} \dots \overset{V}{\sqcup}\ \overset{X}{\sqcup}}_{k+r}\ \boxed{\overset{V}{\sqcup}}$$

r-ти успех на $(k+r)$-ти опит

$\mathbb{P}$(r-ти успех на $(k+r)$-ти опит) = ?

↳ $\mathbb{P}$(r-ти успех на $(k+r)$-ти опит) =

$$= \underbrace{\binom{k+r-1}{r-1} p^{r-1}}_{r-1 \text{ успеха}} \cdot \underbrace{(1-p)^k}_{k \text{ неуспеха}} \cdot p \to \text{от последния успех}$$

→ X = „броят неуспехи до r успеха" $r \geq 1$

X приема ст-сти $0, 1, 2, \dots, \dots$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k \quad \text{за } k \in \mathbb{N}_0$$

$X \sim NB(r, p)$

↳ отрицателно биномно

→ $X \sim Ge(p)$ → геометрично с вероятност p

↳ два вида

$X \sim Ge_1(p)$

↳ брой опити до успех

$\underbrace{X\, X\, X\, X \dots X\, X\, V}$

→ броим всички опити

$X \sim Ge_2(p)$

↳ брой неуспехи до успех

$\underbrace{X\, X\, X, \dots X\, X}\, V$

→ броим само неуспехите

$\boxed{\text{разликата е } 1}$

$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

к-опита

$k \geq 1$

понеже броим всички опити

$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k} \cdot p$

$k \geq 0$

само неусп...

$\mathbb{E}X = \mathbb{E}[Ge_2(p)+1] = \frac{1-p}{p} + 1 = \frac{1}{p}$

→ той като само успеха, който го броим е плюс

$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} p \cdot (1-p)^k \cdot k =$

$= p \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k =$

$= p \cdot \frac{1-p}{(p)^2} = \frac{1-p}{p}$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}}$$

→ Ако не знаем $Ge_2(p)$

$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \cdot k =$

$= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \cdot k =$

$= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{1-p}{p^2} = \frac{1}{p}$

$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

$\mathbb{E}X^2 = \sum_{k}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^k$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}}$$

$DX = \frac{1-p}{p^2}$ → и в двата случая

→ защото разликата е 1-ца, а дисперсията на константата е 0!

• $X \sim NB(r,p)$ → може да се представи като геометрични

неуспехи до r успеха

$$\underbrace{xxx}_{Geo(p)}\checkmark \dots \underbrace{xxx}_{Geo(p)}\checkmark\dots\checkmark\underbrace{xxx}_{Geo(p)}\boxed{\checkmark} \to r\text{-ти успех}$$

тоест $X_1, \dots, X_r \sim Geo(p)$, ~~които~~ независимо, то

$$X \overset{d}{=} X_1 + \dots + X_r$$

$$EX = E(X_1 + \dots + X_r) = r \cdot EX_1 = r \cdot \frac{1-p}{p}$$

Аналогично $DX = r \cdot \frac{1-p}{p^2}$

$$\hookrightarrow EX = \sum k \cdot P(X=k) = \sum k \cdot \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k = r \cdot \frac{1-p}{p}$$

60 n пъти стреля

p - вероятност да улучи

m - отсека

При улучване, торпедото попада в един от m-те отсека случайно (равномерно).

P(да се наводнят поне 2 отсека) = ?

n, p, m

X = „наводнени отсеци"

$$P(X=0 \text{ или } X=1) = (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}}_{\text{к улучвания}} \underbrace{\left(\frac{1}{m}\right)^k}_{\text{винаги в един фиксиран отсек}} \cdot m \to \text{кой отсек сме фиксирали}$$

$$= m \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{m}\right)^k (1-p)^{n-k} - (1-p)^n =$$

$$= m\left(\frac{p}{m} + 1 - p\right)^n - m(1-p)^n$$

(62) X = „сума от два зара"

разпределение, очакване и дисперсия = ?

а) заровете са правилни

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

→ сумата от 2 зар може да е от 2 до 12

1 и 6
6 и 1
3 и 4
4 и 3
2 и 5
5 и 2

↳ разпределението

що e то от вероятност

$$\mathbb{E}X = (2+12)\cdot\frac{1}{36} + (3+11)\cdot\frac{2}{36} + (4+10)\cdot\frac{3}{36} + (5+9)\cdot\frac{4}{36} + (6+8)\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} =$$

$$= 14\cdot\frac{15}{36} + \frac{42}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

X_1 - 1-ви зар

X_2 - 2-ри зар

$X = X_1 + X_2$

X_1	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

→ $\mathbb{E}X_1 = \frac{1}{6}\cdot 21 = 3,5$

$DX_1 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \approx 2,92$

↳ $DX = DX_1 + DX_2 = \frac{35}{6}$

↳ 1000 зара

сума от 3700

необичайно ли е?

$|X - \mathbb{E}X|$ да е голямо - отклонение

Големи отклонения при „хубави" сл. вел. са необичайни

→ Чебишов

$$0 \le \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > a) \le \frac{DX}{a^2}$$

В случая X = сума от 1000 зара

$\mathbb{E}X = 1000 \cdot 3{,}5 = 3500$

$DX = 1000 \cdot \frac{35}{12} \approx 1000 \cdot 2{,}92 = 2920$

$$\mathbb{P}(X > 3700) \le \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > 200) \overset{\text{Чебишов}}{\le} \frac{2920}{40000} = 0{,}073 = 7{,}3\%$$

→ Получихме, че вероятността $X > 3700$ е по-малка от 7,3%, което можем да приемем за малко.

→ Малко теория :)

$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

Кога $D(X+Y) = DX + DY$?

→ Когато $X \perp\!\!\!\perp Y$ – X и Y са независими

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\,\mathbb{P}(Y = y_j)$ } независимост на дискретни сл. величини

→ $D(X+Y) = DX + DY$

$\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

Th. Ако $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими и еднакво разпределени, то

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{\text{п.с.}} \mathbb{E}X_1$$ → почти сигурно

→ законът за големите числа

За големи n: $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \approx \mathbb{E}X_1$; $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}X_1 \approx 0$

ЦГТ: Ако $\sigma^2 = DX_1 < \infty$ → $$\frac{\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}X_1}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

64. $p = \frac{1}{1000}$

$\mathbb{P}$(поне 2 пъти от 5000 изстрела) = ?

↳ X = „брой попадения" $\sim Bin(5000, p)$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) =$$

$$= 1 - \binom{5000}{0} p^0 (1-p)^{5000} - \binom{5000}{1} p^1 \underbrace{(1-p)^{4999}}_{\left(\frac{1}{e}\right)^5}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \xrightarrow[x\to\infty]{} e$$

За малки x: $(1+x)^{\frac{1}{x}} \approx e$, След. $\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx \frac{1}{e}$

$$(1-x)^{\frac{1}{x}} \approx \frac{1}{e}$$

↳ $1 - e^{-1.5} - 5000 \cdot \frac{1}{1000} \cdot e^{-5} = 1 - 6e^{-5}$

65. 7 лампи

3 дефектни

Избираме 4

X	0	1	2	3
	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

X = „# изтеглени дефектни"

$\mathbb{E}X = ?$

$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{35}$ $\quad \frac{7\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 35$

$\mathbb{P}(X=1) = \frac{3\cdot4}{35}$

$\mathbb{P}(X=k) = ?$ $\quad k = 0, 1, 2, 3$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{4}{4-k}}{\binom{7}{4}}$$

$$\mathbb{E}X = 0\cdot\frac{1}{35} + 1\cdot\frac{12}{35} + 2\cdot\frac{18}{35} + 3\cdot\frac{4}{35} =$$

$$= \frac{12+36+12}{35} = \frac{60}{35} = \frac{12}{7}$$

* С връщане, 4 изтегляния

$\mathbb{E}$ брой изтеглени дефектни $= \frac{3}{7}\cdot 4$

• Хипергеометрично

$X \sim HG(N, K, n)$

$\# \text{предмети}$ $\quad$ $\# \text{специални от тях}$

Теглим n от тях; $X =$ „# изтеглени спец."

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad k = 0, 1, \dots, \min(K, n)$$

$\max(0, n-N+K)$

$$\mathbb{E}X = n \cdot \frac{K}{N}$$

66. средно 2 земетресения / месец

$\mathbb{P}$(за 3 месеца < 4 земетресения) = ?

$X =$ „# земетресения за 1 месец"

$X \sim Po(\lambda)$

• $X \sim Po(\lambda)$, ако $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ за $k = 0, 1, \dots$

* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$DX = \dots = \lambda$$

$X_i \sim$ # земетресения за месец i

$X_i \sim Po(2)$

$\mathbb{P}(X_1+X_2+X_3 < 4) = ?$

↳ на ръка да разгледаме възм. ст-сти за X_i

≈

→ месец 1

$X_1+X_2+X_3 \sim Po(6)$

* Поасоновото измерва колко пъти са се случили за даден период от време

* Ако е вярно, че $\mathbb{P}(X_1+X_2+X_3<4) = \mathbb{P}(Po(6)<4) =$

$$e^{-6}\left(\frac{6^0}{0!}+\frac{6^1}{1!}+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}\right)$$

↳ Нека $X_i \sim Po(\lambda_i)$ са независими

Док. $X_1+X_2+\dots+X_n \sim Poi(\lambda_1+\dots+\lambda_n)$

За X със ст-сти в $\mathbb{N}_0$:

$$g_X(s) = \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)\cdot s^k$$

за $X \sim Poi(\lambda)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot s^k = e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda s} = \underline{\underline{e^{\lambda(s-1)}}}$$

$$g_{X_1+X_2}(s) = \mathbb{E}s^{X_1+X_2} = \mathbb{E}s^{X_1}\cdot s^{X_2} \overset{\text{незав.}}{=\!=} \mathbb{E}s^{X_1}\cdot\mathbb{E}s^{X_2} = g_{X_1}(s)\cdot g_{X_2}(s)$$

В нашия случай: $g_{X_i}(s) = e^{\lambda_i(s-1)}$

след.: $\mathbb{E}\, s^{X_1+\dots+X_n} = \mathbb{E}\, s^{X_1} \cdot \mathbb{E}\, s^{X_2} \dots \mathbb{E}\, s^{X_n} = e^{\lambda_1(s-1)} \dots e^{\lambda_n(s-1)} =$

$$= e^{(s-1)(\lambda_1+\dots+\lambda_n)} = g_{X_1+\dots X_n}(s) =$$

$$= g_{Po(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}(s)$$

$g_{X_1}(s) = g_{X_2}(s)$, що $X_1 \stackrel{d}{=} X_2$, т.е. $\mathbb{P}(X_1 = k) = \mathbb{P}(X_2 = k)$ за $\forall k$

$\Rightarrow X_1 + \dots + X_n \sim Po(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$

→ пораждащи функции най-често се използват когато имаме суми P.

Непрекъснати случайни величини

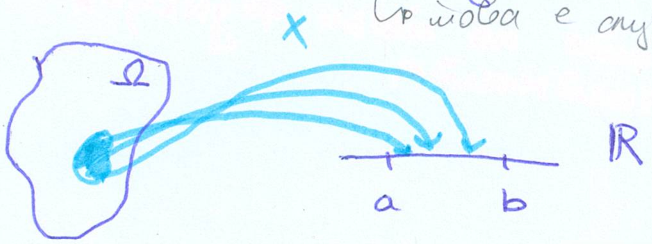
$X: \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\mathcal{F}$ ↓ сигма алгебра

$X^{-1}((a,b)) \in \mathcal{F}$

$\mathbb{P}(X \in (a,b)) = \dots$ → може да смятаме $\mathbb{P}$ X да попада в някой интервал

↳ това е случайна величина



* Ако X има плътност е непрекъсната.

дискретни

X	x_1	x_2	x_3	...
	p_1	p_2	p_3	...

$\mathbb{P}(X = \frac{1}{2}) = \frac{|[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]|}{1} = 0$

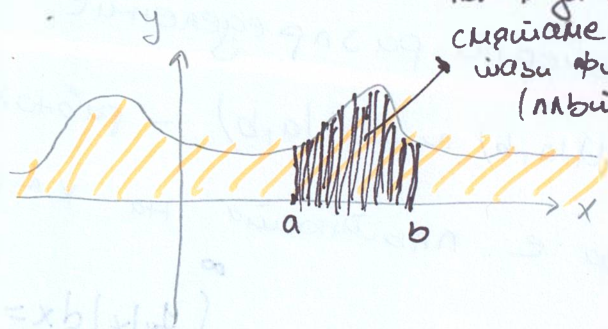
→ Тук искахме: $\boxed{\sum p_i = 1}$

Непрекъснати – pdf

Тук искаме:

* $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1}$

ако искаме да смятаме $\mathbb{P}$ да е в (a,b), смятаме лицето на тази фигура (плътност)



↳ графиката на функцията

→ лицето на фигурата (ограничено) е 1.

$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \mathbb{P}(X \in (a,b)) = \dots =$

$= \int_a^b f_X(x)\,dx$

* cdf - функция на разпределение (винаги съществува)

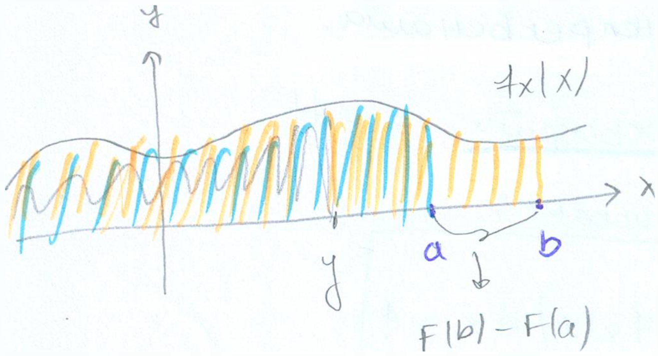
$F_X(x) = P(X \le x)$ → ! дали е < или ≤ е все тая, ако има плътност

→ Ако има плътност $P(X=y) = \int_y^y f_X(t)\,dt = 0$

* Плътност съществува т.т.к. функцията на разпределение $\Leftrightarrow$ е непрекъсната + още нещо.

$\boxed{F_X'(x) = f_X(x)}$ → производната на тази функция е плътността

$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$



$F_X(y)$

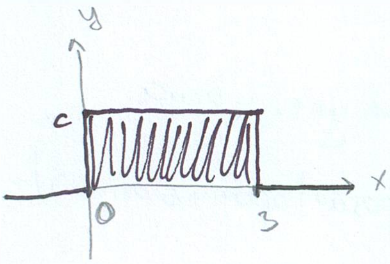
$P(X \in (a,b)) = \int_a^b f_X(x)\,dx =$

$F(b) - F(a)$

* Равномерно разпределение

$X \sim U(a,b) \sim Unif(a,b)$ – равномерно върху $[a,b]$

Каква е плътността на $X \sim U[0,3]$?



$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$\int_0^3 c\,dx = 1$

$3c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

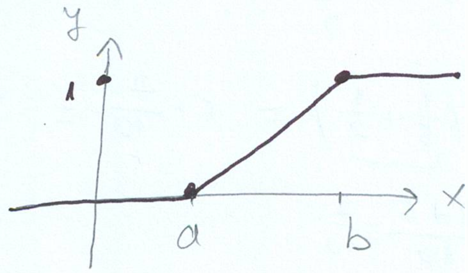
$f_X(v) = \frac{1}{3} \cdot 1_{\{x \in [0,3]\}} = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [0,3] \\ 0, & иначе \end{cases}$

$X \sim U(a,b)$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot 1_{\{x \in [a,b]\}}$$

$$\int_0^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x}{b-a}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$



Ако $x \le a$: е 0

$x \ge b$: е 1

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx$$

$$\mathbb{E}\, U(a,b) = \frac{b-a}{2}$$

$$D\left[U(a,b)\right] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\mathbb{E}g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\cdot f_X(y)\,dy$$

↳ Law of the unconscuous statisticion

$$\mathbb{E}X^2 = \sum x^2 \cdot \mathbb{P}(X=x)$$

8.1. $f_X(x) = c(x^2+2x)\cdot 1_{\{x\in[0,1]\}} = \{ \dots$

1.) константата c

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1 = \int_0^1 c(x^2+2x)\,dx = c\left[\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = c\left(\frac{1}{3}+1\right) \Rightarrow \boxed{c = \frac{3}{4}}$$

2) $\mathbb{E}X$ и DX

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot c(x^2+2x)\,dx = c\left[\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= c\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)}_{\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{11}{12}} = c\cdot\frac{11}{12} = \frac{3}{4}\cdot\frac{11}{12} = \cancel{\frac{11}{16}}\ \frac{11}{12}$$

$$\boxed{DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^1 x^2 \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot c(x^2+2x)\,dx = c\left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$c\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{4}\right) = c\left(\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}}_{\frac{2+5}{10}=\frac{7}{10}}\right) = c\cdot\frac{7}{10} = \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{10} = \frac{21}{40}$$

$$DX = \frac{21}{40} - \left(\frac{11}{16}\right)^2 =$$

3) $\mathbb{P}(X < \mathbb{E}X) = \mathbb{P}\left(X < \frac{11}{16}\right) = \int_{\cancel{-\infty}\ 0}^{11/16} f_X(x)\,dx$

$$\mathbb{P}\left(X < \frac{11}{16}\right) = F_X\left(\frac{11}{16}\right)$$

$$F_X(y) = ?$$

$$F_X(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ c\left(\frac{y^3}{3}+y^2\right) & \text{za } y\in[0,1] \\ 1, & y>1 \end{cases}$$

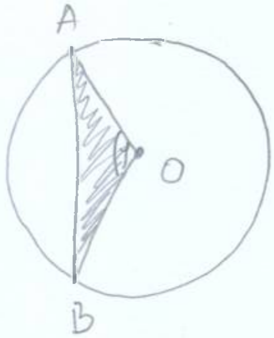
$$\mathbb{P}(X<y) = \int_0^y c(x^2+2x)\,dx = c\left[\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^y$$

4) $\mathbb{E}(X^2+3X)$

I $\mathbb{E}(X^2+3X) = \mathbb{E}X^2 + 3\,\mathbb{E}X = \frac{21}{40} + 3\cdot\frac{11}{16} = \frac{21}{40} + \frac{33}{16}$

II $\int_0^1 (y^2+3y)\, f_X(y)\,dy$

82.



$\mathbb{E}\, S_{AOB} = ?$

I ↳ $Y \sim U(0, \pi)$

II ↳ $Y \sim U([0, 2\pi])$

I) $S_{\Delta AOB} = \dfrac{\sin Y}{2}$

$$\mathbb{E}\, S_{AOB} = \mathbb{E}\, \frac{\sin Y}{2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2} \cdot \frac{1}{\pi}\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{\pi}}}$$

II) $$S_{AOB} = \frac{\sin Y}{2} \cdot 1_{\{Y<\pi\}} + \frac{\sin(2\pi - Y)}{2} \cdot 1_{\{Y>\pi\}}$$

$$\mathbb{E}\, S_{AOB} = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2} \cdot \frac{1}{2\pi}\, dy + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(2\pi - y)}{2} \cdot \frac{1}{2\pi}\, dy = \ldots = \underline{\underline{\frac{1}{\pi}}}$$

83. $X \sim U(0, 7)$ – „време до счупване"

↳ на 5-тата година се сменя със сигурност или преди това, ако се счупи

Y = „време до смяна" → най-много 5

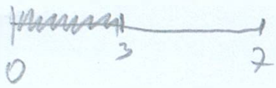
$F_Y(y)$, $\mathbb{E}Y$, $DY = ?$

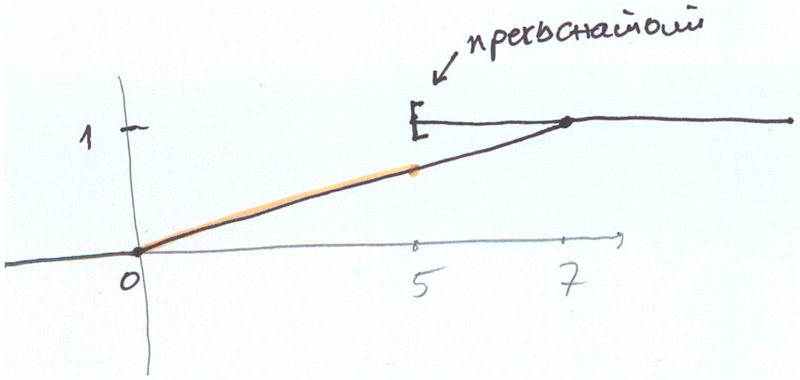
↳ Y е про в $[0, 5]$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y<y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{y}{7}, & y \in (0, 5] \\ 1, & y > 5 \end{cases}$$

* Ако $y \le 5$
$\mathbb{P}(Y<y) = \mathbb{P}(X<y) = \frac{y}{7}$

↳ $\mathbb{P}(Y<3) = \mathbb{P}(X<3) = \frac{3}{7}$





$$F_X(x) = \mathbb{P}(U(0,7) < x) = \int_0^x \frac{1}{7}\,dy = \frac{x}{7}$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \begin{cases} 0, & \dots \\ \frac{y}{7}, & y \in [0,5] \\ 1, & y > 5 \end{cases}$$

Ако има плътност $\mathbb{P}(Y=y) = 0$

В случая: $\mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(X \geq 5) = \frac{2}{7}$ $\quad$ 0 $\quad$ 5 $\quad$ 7

<u>Y няма плътност!</u>, защото:

- $F_Y(y)$ е прекъсната
- $\mathbb{P}(Y=5) = \frac{2}{7} \neq 0$ → Ако има плътност всички вероятности трябва да са нули

→ $\mathbb{E}Y$

$$Y = X \cdot 1\{X \leq 5\} + 5 \cdot 1\{X > 5\}$$

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X \cdot 1\{X \leq 5\} + 5 \cdot 1\{X > 5\} = \mathbb{E}X \cdot 1\{X \leq 5\} + 5 \cdot \mathbb{E}1\{X > 5\} =$$

$$= \int_0^5 x \cdot \underbrace{f_X(x)}_{\frac{1}{7}}\,dx + 5 \cdot \int_5^7 \underbrace{f_X(x)}_{\frac{1}{7}}\,dx = \left[\frac{x^2}{14}\right]_0^5 + 5 \cdot \left[\frac{2}{7}\right]_5^7 =$$

$$= \frac{25}{14} + 5 \cdot \frac{2}{7} = \underline{\underline{\frac{45}{14}}}$$

$DY = EY^2 - (EY)^2$

$EY^2 = E X^2 \cdot 1\{x \le 5\} + E 5^2 \cdot 1\{x > 5\} =$

$= \int_0^5 x^2 \cdot f_X(x)\, dx + \int_5^7 25 \cdot f_X(x)\, dx =$ ($f_X(x) = \frac{1}{7}$) поненк от 5 до 7 има 2

$= \frac{x^3}{21} + \left(25 \cdot \frac{1}{7}\right) \cdot 2 = \frac{125}{21} + \frac{50}{7} = \frac{275}{21}$

$DY = \frac{275}{21} - \left(\frac{45}{14}\right)^2$

→ Ако са продадени 1000, колко средно ще се apoменят преди петата година?

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ако апарат } i \text{ е сменен преди 5-та година} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$X_i \sim Ber(P(X<5))$, $p = P(X<5) = \frac{5}{7}$

вер. да се случи преди 5-тата година

$EX_i = p$

$\#$ случени $= X_1 + X_2 + \dots + X_{1000} \Rightarrow \sim Bin(1000, p)$

Упр. No. 11

$f_X(x) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

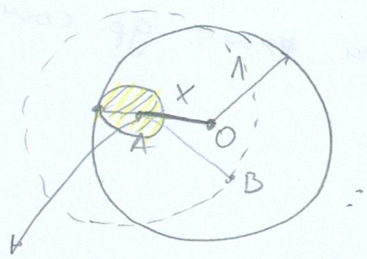
$$P(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

$$F_X(x) = P(X < x)$$

$$F'_X(x) = f_X(x)$$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_X(x)$$

84.



Всички B които ни вършат работа

$$P(K(A, AB) \subset K(O,1)) = ?$$

При фиксирано A, B трябва да принадлежи на жълтото кръгче.

$K(A, 1-OA)$ $(1-x)$

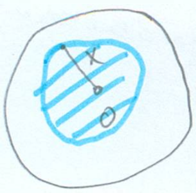
$$P(B \in K(A, 1-x)) = \frac{\pi \cdot (1-x)^2}{\pi \cdot 1^2} = (1-x)^2$$

лицето на кръгчето / лицето на целия кръг

Ако знаем $f_X(x)$, отг. би бил $\int_0^1 (1-x)^2 f_X(x)\,dx$

$f_X(x) = F'_X(x)$

$F_X(x) = P(X<x) = P(X \in K(0,x)) = \frac{\pi \cdot x^2}{\pi \cdot 1^2} = x^2$



$\Rightarrow f_X(x) = (x^2)' = 2x \cdot 1_{\{x \in [0,1]\}}$

плътността

Заместваме:

$$\int_0^1 (1-x)^2 \cdot 2x\,dx = 2\int_0^1 (1-2x+x^2)\cdot x\,dx = 2\int_0^1 x-2x^2+x^3\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{6-8+3}{12}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6}$$

* Експоненциално разпределение

$X \sim Exp(\lambda)$, ако $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1_{\{x>0\}}$

→ Използва се за моделиране на събития случващи се във времето ! (до достигане на някое др. събитие)

→ пр. колко време ще чакаме нещо...

липса на памет

* $\mathbb{P}(X > s+t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$

не се интересуваме от това, което е минало

$$\frac{\mathbb{P}(X>s+t,\ X>t)}{\mathbb{P}(X>s)} = \frac{\mathbb{P}(X>s+t)}{\mathbb{P}(X>s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X>t)$$

$$\mathbb{P}(X>s) = \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx \overset{y=\lambda x}{=} \int_{s\cdot\lambda}^\infty e^{-y}\,dy = \left[-e^{-y}\right]_{s\cdot\lambda}^\infty = e^{-\lambda s}$$

$$\boxed{F_X(x) = \mathbb{P}(X<x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & \text{за } x>0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} EX &= \frac{1}{\lambda} \\ DX &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}}$$

30 min → доказателство за $EX = \frac{1}{\lambda}$

85.

$X_1 \sim Exp(\lambda_1) \quad X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

$\mathbb{E} X_1 = 8 min \to \mathbb{E} X = \frac{1}{\lambda} \to 8 = \frac{1}{\lambda} \to \lambda_1 = \frac{1}{8}$ → скорост за обслужване

$\mathbb{E} X_2 = 5 min \to \lambda_2 = \frac{1}{5}$

$A = \{$чака < 4 min$\}$

$\mathbb{P}(I \mid A) = ?$

I - избира опашка 1

II - избира опашка 2

$\hookrightarrow \mathbb{P}(I \mid A) = \frac{\mathbb{P}(I \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid I) \cdot \mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(A \mid II) \cdot \mathbb{P}(II) =$$
$$= \mathbb{P}(X_1 < 4) \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{P}(X_2 < 4) \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \left(1 - e^{-\frac{1}{8} \cdot 4} + 1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 4}\right) \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \left(1 - e^{-\frac{1}{2}} + 1 - e^{-\frac{4}{5}}\right) \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \left(2 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{4}{5}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{8}\right)$

$X_2 \sim Exp\left(\frac{1}{5}\right)$

$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

↓

функцията на разпределението

$\to \mathbb{P}(I \cap A) = \mathbb{P}(A \mid I) \cdot \mathbb{P}(I) = \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2}$

Отг.: $\frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{\left(2 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{4}{5}}\right) \cdot \cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{2 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{4}{5}}}$

86.

по 2-ма на час

$X \sim Exp(2) \to EX = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\lambda} \to \lambda = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2$

→ ако X_1 е обслужван повече от 30 min

X_i – „време за обслужване на i"

Y – „времето, което вторият е бил в поликлиниката"

$EY = ?$

$$Y = 1_{\{X_1 < 1/2\}} \cdot X_2 + 1_{\{X_1 \geq \frac{1}{2}\}} \cdot \left(X_2 + \left(X_1 - \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= X_2 + \left(X_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 1_{\{X_1 \geq \frac{1}{2}\}}$$

$$EY = EX_2 + E\left(X_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 1_{\{X_1 \geq \frac{1}{2}\}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \int \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot e^{-2x} \, dx =$$

87. $X \sim Exp(\lambda)$

Каква е плътността на $Y =$

а) $-X$

б) $2X$

в) $\sqrt{X}$

→ Метод:

$f_X(x)$ ✓ имаме $P(X<x)$

$f_g(x) = ?$ $P(Y<x)$ чрез $P(X<x)$

а) $Y = -X$

$$\mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(-X < y) = \mathbb{P}(X > -y) =$$

$$* \ \mathbb{P}(X > s) = \begin{cases} e^{-\lambda s}, & s \geq 0 \\ 1, & s < 0 \end{cases}$$

$$= 1 \cdot 1_{\{-y<0\}} + e^{\lambda y} \cdot 1_{\{-y \geq 0\}}$$

производна

$$\Rightarrow f_X(y) = \frac{d}{dy}\mathbb{P}(Y < y) = \frac{d}{dy}\left(1 \cdot 1_{\{-y<0\}} + e^{\lambda y} \cdot 1_{\{-y \geq 0\}}\right) =$$

$$= 0 + \underline{\lambda \cdot e^{\lambda y} \cdot 1_{\{y \leq 0\}}}$$

* мързелив начин:

Плътността на $Y = -X$ е $f_X(y) = \lambda e^{\lambda y} \cdot 1_{\{y \leq 0\}}$

$$\rightarrow \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(X > -y) = \begin{cases} e^{\lambda y}, & y \leq 0 \\ 1, & y > 0 \end{cases}$$

производната

$$\Rightarrow f_X(y) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda y}, & y \leq 0 \\ 0, & y > 0 \end{cases}$$

б) $Y = 2X - 1$

$$\mathbb{P}(2X - 1 < y) = \mathbb{P}\left(X < \frac{y+1}{2}\right) = \quad F_X\left(\frac{y+1}{2}\right)$$

$$* \ \mathbb{P}(X < s) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda s}, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases} \quad F_X(s)$$

$$= f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda\left(\frac{y+1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1_{\{\frac{y+1}{2} \geq 0\}} =$$

производна

$$= \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda\left(\frac{y+1}{2}\right)} \cdot 1_{\{y \geq -1\}}$$

$$\rightarrow f_{g(X)}(x) = ?$$

$$\mathbb{P}(g(X) < x) = \mathbb{P}(X < g^{-1}(x))$$

ако обратима, g е $\uparrow$

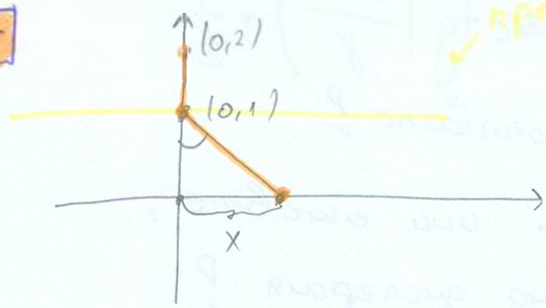
$$= F_X(g^{-1}(x)) = f_{g(X)} = \frac{d}{dx}F_{g(X)}(x) = \frac{d}{dx}(F_X(g^{-1}(x))) = F'_X(g^{-1}(x)) \cdot g^{-1}(x)' =$$

$$= f_X(g^{-1}(x)) \cdot g^{-1}(x)'$$

g е $\uparrow$ или $\downarrow$

$$f_{g(X)}(x) = f_X(g^{-1}(x)) \cdot |g^{-1}(x)'|$$

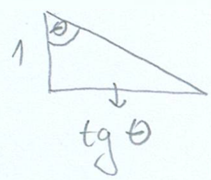
88.



$\theta \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$f_X(x) = ?, \quad \mathbb{E}X = ?$

→ Решение:



$tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

$arctg : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

прилагаме arctg

$\to \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(tg\,\theta \leq t) = \mathbb{P}(\theta \leq arctg\, t) =$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{arctg\, t} \frac{1}{\pi} dx = \frac{arctg\, t + \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{arctg}{\pi} = F_X(t)$

$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{2\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$

$f_X(t) = 0 + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}}}$ → плътността

$* \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) - F(a)$ → Лайбниц-Нютон

$\mathbb{E}X = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi \cdot 2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} d(x^2+1) =$ $\quad (d(x^2+1) = 2x\,dx)^*$

$= \frac{1}{2\pi} \ln(1+x^2) \Big|_{-\infty}^{\infty}$ – не съществува! не е добре дефинирано

$* \int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty \quad \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{1-x^2} dx \approx \int x \cdot \frac{1}{x^2} dx \approx \int \frac{1}{x} dx$

$X \sim Coushy(0,1)$

$X \sim Coushy(x_0, \gamma)$

$$\mathbb{P}(X \le x) = \frac{1}{\pi} arc\,tg\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$$

X няма очакване!

→ Ако има дисперсия със сигурност има очакване, може да има очакване, но да няма дисперсия?

$\mathbb{E}X^n < \infty$, то $\mathbb{E}X^k < \infty$ за $0 \le k < n$ $(k \in \mathbb{R})$

Щом X няма очакване, то X няма и дисперсия!

* Проблемни опашки → не важи ЦГТ

$\boxed{39.}$ $\mathbb{P}(\overset{p}{\text{ези}}) = \frac{3}{4}$, $\overset{n}{2000}$ пъти и

$\mathbb{P}$(между 1475 и 1535) = ?

↳ Решение:

– нормално разпределение

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ези на } i\text{-тo} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad X_i \sim Ber(p)$$

$\mathbb{P}(1475 \le X_1 + \dots + X_n \le 1535) = ?$

ЦГТ: Нека $X_1, X_2, \dots$ незав. и едн. разпр. (iid) сл.вел. и $\mu = \mathbb{E}X_1$, $\sigma^2 = DX_1 < \infty$. Тогава

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \to 0$$

→ не към число, а към разпределение

$$\frac{\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0,1)$$

→ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ако $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ← свойства на нормалните разпределения

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

1. $cX_1 \sim N(c \cdot \mu_1, c^2 \cdot \sigma_1^2)$ → свойства
2. $c + X_1 \sim N(c+\mu_1, \sigma_1^2)$
3. $X_1 \perp X_2$

$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

D на Бернули $= p \cdot (1-p)$

$\frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$

→ Продължение на задачата:

$$\mathbb{P}(1475 \le X_1 + \dots + X_n \le 1535) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{1475 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{X_1 + \dots + X_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{1535 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$

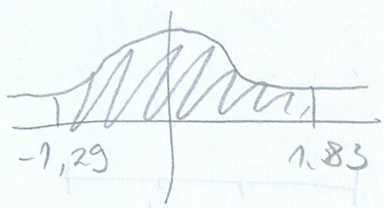
$\mu = \frac{3}{4}, n = 2000, \sigma^2 = \frac{3}{16}$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{-25}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{2000}} \le \frac{X_1 + \dots + X_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{35}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{2000}}\right)$$

$n > 30, \sigma^2 < \infty$

$$\approx \mathbb{P}(-1{,}29 \le N(0,1) \le 1{,}83) = \int_{-1,29}^{1,83} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$\int e^{-x^2/2} dx$ → няма явен вид



$$\mathbb{P}(N(0,1) \le x) = F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x)$$

$$\mathbb{P}(-1{,}29 \le N(0,1) \le 1{,}83) = \Phi(1{,}83) - \Phi(-1{,}29) =$$

$= 0{,}9664 - (1 - 0{,}9015) =$ → от таблицата

$= 0{,}9664 - (0{,}0985) =$ число...

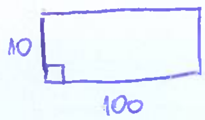
$*\ X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\to X - \mu \sim N(0, \sigma^2) \to \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

↓

z-score

100.



X_i = време на живот на диод $i \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$

$\mathbb{E}\, Exp(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$

P(да трябва да има ремонт след 3 години) =

P(да работят $\leq 75\%$ на третата година)

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{ако диод } i \text{ работи на 3-тата година} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Exp(\lambda) > t) = e^{-\lambda t}$$

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_i \geq 3) = e^{-\frac{3}{10}}$$

$$Y_i \sim Ber\left(e^{-\frac{3}{10}}\right), \quad \mathbb{E} Y_i = e^{-\frac{3}{10}} = p$$

$$D Y_i = p(1-p)$$

$$\mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_{100} \leq 750) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_{100} - 1000 \cdot e^{-\frac{3}{10}}}{\sqrt{e^{-3/10} \cdot e^{-9/10}} \cdot \sqrt{1000}} \leq \frac{750 - 1000 \cdot e^{-\frac{3}{10}}}{\sqrt{e^{-3/10} \cdot e^{-9/10}} \cdot \sqrt{1000}} \right)$$

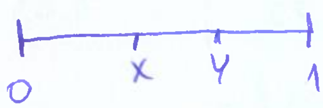
$\downarrow$

б како ???

$D < \infty$, $n > 30$ $\Rightarrow$ ЦГТ $\approx$

$$\mathbb{P}(N(0,1) \leq 0{,}66) = \Phi(0{,}66) \approx 74{,}54\%$$

91.



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = cxy \cdot 1\{0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

1.) $c = ?$

$$* \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\mathbb{P}(X \in (a,b)) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$ – плътност

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\mathbb{E}XY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \le x, Y \le y)$$

$$\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial y\,\partial x} = f_{X,Y}(x,y)$$

формули

↳ Продължение на задачата:

$$\int_0^1 \left[\int_x^1 cxy\,dy\right] dx = \int_0^1 cx\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^1 dx = c\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{c}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\,dx = \frac{c}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{c}{2}\left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{c}{8} \quad - ?$$

2. Маргинални плътности и мат. очаквания

$f_X(x)$, $\mathbb{E}X$ … ?

*

$y \backslash x$	x_1	x_2
y_1	0	
y_2	0	

$$\mathbb{P}(X = x_1) = \sum \mathbb{P}(X = x_1, Y = y_i)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_X(x) = \int_{x}^{1} cxy\, dy = cx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x}^{1} = \frac{c}{2} x (1-x^2) =$$

$x \in [0,1]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} cxy\, 1_{\{0 \le x \le y \le 1\}}\, dy$$ ← може и тако

$$\int_{x}^{1} cxy\, dy \, ; \quad EX = \int_{0}^{1} x \cdot f_X(x)\, dx = \dots$$

3.) $\mathbb{P}(X < \frac{3}{4}, Y - X < \frac{1}{6}) =$

$$= \mathbb{P}(X < \tfrac{3}{4}, Y < X + \tfrac{1}{6}) =$$

$$= \int_{0}^{3/4} \int_{0}^{x+\frac{1}{6}} cxy \cdot 1_{\{0 \le x \le y \le 1\}}\, dy\, dx =$$

$$= \int_{0}^{3/4} \int_{x}^{x+\frac{1}{6}} cxy\, dy\, dx = c \int_{0}^{3/4} x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x}^{\frac{1}{6}+x} dx =$$

$$= \frac{c}{2} \int_{0}^{3/4} x \left(\left(x + \tfrac{1}{6}\right)^2 - x^2 \right) dx = \dots$$

→ 4 и 5 1:11 ...

Упр. No. 13

$X, f_X, g\uparrow, f_{g(X)}?$

$$P(g(X) \le t) = P(X \le g^{-1}(t)) = F_X(g^{-1}(t))$$

$$f_{g(X)}(t) = F_X'(g^{-1}(t)) \cdot |g^{-1}(t)'| = f_X(g^{-1}(t))\,|g^{-1}(t)'|$$

*

$X_1, X_2 \to X_1 / (X_1 + X_2)$

$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \to f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = x_1 x_2 \\ y_2 = x_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = y_2 \\ x_2 = \frac{y_1}{y_2} \end{array} \right.$$

$$= f_{X_1,X_2}\left(y_2, \frac{y_1}{y_2}\right) \cdot |\ldots|$$

$$\to |J| = \begin{vmatrix} \frac{dX_1}{dY_1} & \frac{dX_1}{dY_2} \\ \frac{dX_2}{dY_1} & \frac{dX_2}{dY_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{Y_2} & -\frac{Y_1}{Y_2^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{Y_2}$$

??? как се сметна

93. $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ независими. $Y = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ $f_X(y) = ?$

→ пльтност, разпределение

$$\left| \begin{array}{l} Y = \frac{X_1}{X_1+X_2} \\ Z = X_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = z \\ x_2 = \frac{z - zy}{y} = \frac{z}{y} - \frac{zy}{y} = \frac{z}{y} - z \end{array} \right.$$

$$Y = \frac{X_1}{X_1+X_2} \Rightarrow Y = \frac{Z}{Z+X_2} \to Y(Z+X_2) = Z$$

$$ZY + X_2 Y = Z$$

$$X_2 Y = Z - ZY$$

$$X_2 = \boxed{\frac{Z - ZY}{Y}}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{z}{y^2} & \frac{1}{y} - 1 \end{vmatrix} = \frac{z}{y^2}$$

$$f_{Y,Z}(y,z) = f_{X_1,X_2}\left(z, \frac{z}{y} - z\right) \cdot \left|\frac{z}{y^2}\right|$$

понеже са независими ще е произведението на поединичните

* $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) = \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} =$

$= \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} \cdot 1_{\{x_1,x_2>0\}}$

$\Rightarrow f_{Y,Z}(y,z) = f_{X_1,X_2}(z, \frac{z}{y} - z) \cdot \left| \frac{z}{y^2} \right| =$

$= \underline{\lambda^2 e^{-\lambda(\cancel{z} + \frac{z}{y} - \cancel{z})} \cdot \frac{z}{y^2}}$ за $y \in (0,1)$, $z \in (0,\infty)$

съвместната плътност

↳ маргиналната, когато имаме съвместната

$f_Y(y) = \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\frac{\lambda z}{y}} \cdot \frac{z}{y^2}\, dz \overset{\frac{\lambda z}{y} = t}{=} \int_0^\infty \cancel{\lambda^2} e^{-t} \cdot \frac{t \cdot \cancel{y}}{\cancel{\lambda}} \cdot \frac{1}{\cancel{y^2}} \cdot d\frac{t y}{\lambda} =$

↓ събираме по всички z

$= \int_0^\infty e^{-t} \cdot t\, dt = 1$, т.е. $f_Y(y) = 1$ за $y \in (0,1)$

↳ смята се по части

$Y \sim Unif(0,1)$! → Y е равномерно в интервала $(0,1)$

→ $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda) \rightarrow \frac{X_1}{X_1+X_2}$ е равномерно

* $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ независими

плътност на $a_1 X_1 + a_2 X_2 \sim N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)$

$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2$
$Z = X_1$

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} X_1 = Z \\ X_2 = \frac{Y - a_1 X_1}{a_2} = \frac{Y - a_1 Z}{a_2} \end{array} \right. \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{a_2} & \dots \end{vmatrix} = -\frac{1}{a_2}$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_1^2 \sigma_1^2}} e^{\frac{-(x-a_1\mu_1)^2}{2a_1^2\sigma_1^2}} \dots \qquad X_1 \sim N(a_1\mu_1, a_1^2\sigma_1^2)$$

$$f_{Y,Z}(y,z) = f_{X_1,X_2}\left(z, \frac{y-a_1 z}{a_2}\right) \cdot |J| \dots$$

става много дълго за смятане

$\hookrightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ← по-лесен начин

94. $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ $\quad Y = X_1 + X_2 \quad f_X(y) = ?$

$$* \left| \begin{array}{l} Y = X_1 + X_2 \\ Z = X_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} X_1 = Z \\ X_2 = Y - X_1 = X_2 = Y - Z \end{array} \right. \qquad J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

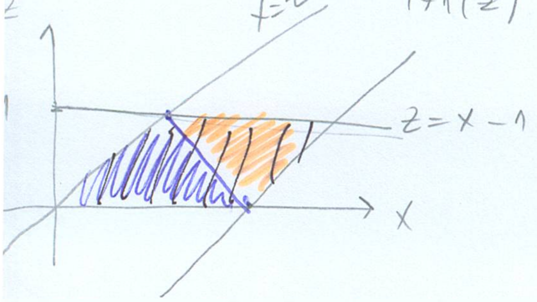
$$\Rightarrow f_{Y,Z}(y,z) = f_{X,Y}(z, y-z) = f_X(z) \cdot f_X(y-z)$$

$$\to f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z) f_Y(y-z)\, dz$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \to f_{X_1+X_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(z) f_{X_2}(y-z)\, dz \\ \mathbb{P}(X_1+X_2 = k) = \sum \mathbb{P}(X_1 = m)\, \mathbb{P}(X_2 = k-m) \end{array}}$$

• В случая:

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{1_{\{z \in (0,1)\}}}_{f_{X_1}(z)} \cdot \underbrace{1_{\{x-z \in (0,1)\}}}_{f_{X_2}(x-z)}\, dz$$



$0 \le x - z \le 1$

$x \ge z \ge x-1$

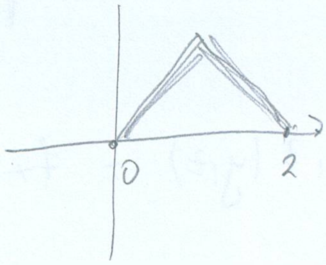
$0 \le z \le 1$

ако $x \in [0,1]$, то $z \in [0,x]$

$x \in [1,2)$, то $z \in [x-1, 1]$

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_0^x 1 dt = x, \text{ за } x \in [0,1]$$

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{x-1}^{1} 1 dt = 2-x, \text{ за } x \in [1,2]$$



$X_1, X_2, \dots, X_n$ са iid $\quad F_{X_1}(x) = \mathbb{P}(X_1 < x)$, $f_{X_1} = F'_{X_1}$

Какво е разпределението на max?

$Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} < t) = \mathbb{P}(X_1 < t, X_2 < t, \dots, X_n < t) =$$

$$= \mathbb{P}(X_1 < t) \dots \mathbb{P}(X_n < t) \overset{\text{еg. разп}}{=} (\mathbb{P}(X_1 < t))^n = F_{X_1}(t)^n$$

$Z = \min\{X_1, \dots, X_n\}$

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z < t) = 1 - \mathbb{P}(Z \geq t) = 1 - \mathbb{P}(X_1 \geq t, X_2 \geq t, \dots, X_n \geq t) =$$

$$\overset{\text{нез.}}{=} 1 - \mathbb{P}(X_1 \geq t) \dots \mathbb{P}(X_n \geq t) \overset{\text{еg. раз.}}{=} 1 - \mathbb{P}(X_1 \geq t)^n =$$

$$= 1 - (1 - F_{X_1}(t))^n$$

101.

$A \sim N(3,2)$

$B \sim N(3,3)$

$C \sim N(1,10)$

5 единици за инвестиция

а) Всяко разпр. $a_1 \cdot A + (5-a_1)B =$

$\stackrel{d}{=} a_1 N(3,2) + (5-a_1) N(3,3) =$

$= N(3a_1, 2a_1^2) + N((5-a_1)\cdot 3, 3(5-a_1)^2) =$

$= N(15, 2a_1^2 + 3(5-a_1)^2)$

б) a_1? $2a_1^2 + 3(5-a_1)^2$ да е min

$= 5a_1^2 - 30a_1 + 75$ min се достига в $\underset{\frac{-b}{2a}}{a_1} = \frac{30}{10} = 3$

Т.е. оптималното портфолио $\sim N(15, 2\cdot 9 + 3\cdot 4) = N(15, 30)$

в) $5D \stackrel{d}{=} 5N(-2,20) \stackrel{d}{=} N(-10, 500)$

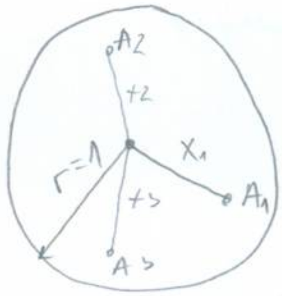
$P(N_1(-10, 500) > N(15,30))$

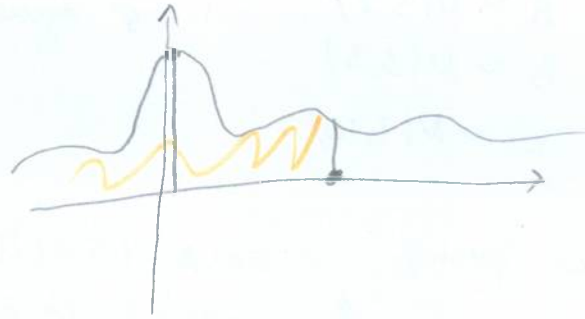
$P(N_1(-10, 500) - N_2(15,30) > 0) =$

$= P(N(-25, 530) > 0)$

$= P(N(0,530) > 25) = P(N(0,1) > \frac{25}{\sqrt{530}}) = 1 - \Phi\left(\frac{25}{\sqrt{530}}\right)$

99





$f_{X_1}(x) = ?$

$\mathbb{P}(X_1 \le t) = \frac{\pi \cdot t^2}{\pi \cdot 1^2} = t^2$

за $t \in (0,1)$

$\Rightarrow f_{X_1}(t) = 2t \cdot 1\{t \in [0,1]\}$

$\mathbb{E}X_1 = \int_0^1 t \cdot 2t\,dt = \frac{2}{3}$

$\to Z = \min(X_1 X_2, X_3)$

$\mathbb{E}Z = ?$

$\mathbb{P}(Z \le t) = 1 - \mathbb{P}(Z > t) =$

$t \in (0,1)$ $= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t)^3 = (1-(1-t^2))^3$

$\Rightarrow f_Z(t) = 3(1-t)^2 \cdot 2t$

$\therefore \mathbb{E}Z = \int_0^1 t \cdot 3(1-t^2)^2 \cdot 2t\,dt =$

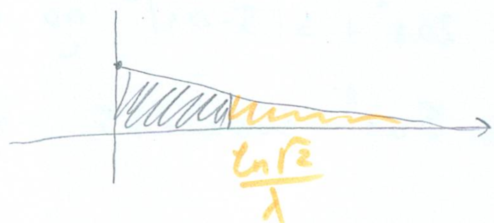
$= \int_0^1 6t^6 - 12t^4 + 6t^2\,dt =$

$= 6\frac{1}{7} - 12\frac{1}{5} + 6\frac{1}{3} = \frac{16}{35}$

до $\max(X_1, X_2, X_3) \to$ аналогично

Мода на X = стойността x, за която $f_X(x)$ е max

Медианата = $x : \mathbb{P}(X < x) = \frac{1}{2}$



$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $\quad \mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$

мода = 0

медиана = $\frac{\ln 2}{\lambda}$

$e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$

$\lambda t = \ln 2 \quad t = \frac{\ln 2}{\lambda}$

Непрекъснати случайни величини

81.

$$f_X(x) = \begin{cases} c(x^2+2x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

а) константата $c = ?$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 c(x^2+2x)\,dx = c\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = c\left(\frac{1}{3}+1\right) = c\cdot\frac{4}{3} = \frac{4c}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{3}{4}}$$

б) $$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

$$\Rightarrow EX = \int_0^1 x\cdot c(x^2+2x)\,dx = c\int_0^1 x^3+2x^2\,dx = c\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= c\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right) = c\cdot\frac{11}{12}$$

$$\Rightarrow c = \frac{3}{4} \Rightarrow EX = \frac{3}{4}\cdot\frac{11}{12} = \boxed{\frac{11}{16}}$$

$$\rightarrow DX = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = \int_0^1 x^2\cdot c(x^2+2x)\,dx = c\int_0^1 x^4+2x^3\,dx = c\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 = c\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{4}\right)$$

$$= c\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right) = c\cdot\frac{7}{10} \rightarrow \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{10} = \frac{21}{40}$$

$$\boxed{DX = \frac{21}{40} - \left(\frac{11}{16}\right)^2 \approx 0.052}$$

в) $\mathbb{P}(X < \mathbb{E}X) = ?$

$\mathbb{P}(X < \frac{11}{16}) = F_X(\frac{11}{16})$

$F_X(y) = ?$

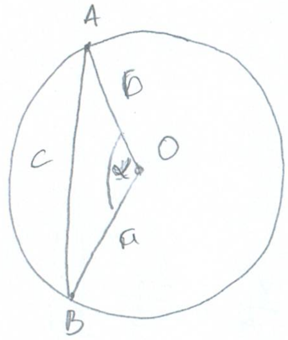
$\mathbb{P}(X<y) = \int_0^y c(x^2+2x)\,dx = c\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^y$

$$F_X(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ c\left(\frac{y^3}{3}+y^2\right), & y\in[0,1] \\ 1, & y>1 \end{cases}$$

$\Rightarrow c\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^{\frac{11}{6}} \approx 0,435$

г) $\mathbb{E}(X^2+3X) = \mathbb{E}X^2 + 3\mathbb{E}X = \frac{21}{40} + 3\cdot\frac{11}{16} = \frac{21}{40}+\frac{33}{16} = \boxed{\frac{207}{80}} \approx 2,5875$

82.



$\mathbb{E}\, S_{AOB} = ?$

→ Понеже B е избрана по произволен начин можем да считаме, че ъгълът α е равномерно разпределен в интервала $(0, 2\pi)$ → $\alpha \sim U(0,2\pi)$

a b

$$f_\alpha(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \alpha \in [0,2\pi] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\frac{1}{2\pi - 0} = \frac{1}{2\pi}$

$$F_\alpha(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha<0 \\ \frac{1}{2\pi}, & \alpha\in[0,2\pi] \\ 1, & \alpha > 2\pi \end{cases}$$

→ $g : [0, 2\pi] \to R$

$\alpha \mapsto$

$$\boxed{\begin{gathered} S = \frac{a\cdot b\cdot \sin C}{2} = \frac{a\cdot c\cdot \sin B}{2} = \frac{b\cdot c\cdot \sin A}{2} \\ S = R^2 \sin(A)\cdot\sin(B)\cdot\sin(C) = \frac{abc}{4R} \end{gathered}}$$

→ $S_{\Delta AOB} = \frac{a\cdot b\cdot \sin\alpha}{2} = \frac{r^2\cdot\sin\alpha}{2}$

$\mathbb{E}\, S_{AOB} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cdot \sin x}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\,dx = \frac{r^2}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx - \frac{r^2}{4\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx =$

$= \frac{r^2}{4\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} - \frac{r^2}{4\pi}\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{r^2}{4\pi} - \frac{r^2}{4\pi}\cdot(-2) = \frac{r^2}{4\pi} + \frac{2r^2}{4\pi} = \frac{3r^2}{4\pi}$

$\cos\pi = -1$ $\quad -1 - 1 = (-2)$

??

83. X = „времето на безотказна работа на апарат"

$X \sim U(0,7)$

→ заменя се на 5-тата година или по-рано, ако има дефект

Y – „времето до смяна на апарата"

• $\mathbb{P}(Y<4)$, $\mathbb{E}Y$ и $DY = ?$

↳ Считаме, че след дефект апаратът веднага бива сменен

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & X(\omega) < 5 \\ 5, & X(\omega) \geq 5 \end{cases} \text{, т.е. } Y = X \cdot 1_{\{X<5\}} + 5 \cdot 1_{\{X \geq 5\}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y<4) = \mathbb{P}(X<4) = F_X(4) = \boxed{\frac{4}{7}}$$

$$^{*} F_Y(x) = \mathbb{P}(U(0,7)<x) = \int_0^x \frac{1}{7}\,dy = \frac{x}{7}$$

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(X \cdot 1_{\{X<5\}} + 5 \cdot 1_{\{X \geq 5\}}) =$$

$$= \mathbb{E}(X \cdot 1_{\{X<5\}}) + \mathbb{E}(5 \cdot 1_{\{X \geq 5\}}) =$$

$$= \int_0^5 x \cdot f_X(x)\,dx + 5 \cdot \int_5^7 f_X(x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{7}\right]_0^5 + 5 \cdot \left[\frac{x}{7}\right]_5^7 = \frac{25}{14} + 5 \cdot \frac{2}{7} = \frac{25}{14} + \frac{10}{7} = \boxed{\frac{45}{14}}$$

$$DY = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2$$

$$\mathbb{E}Y^2 = \int_0^5 x^2 \cdot \frac{1}{7}\,dx + 5^2 \int_5^7 \frac{1}{7}\,dx = \left[\frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{7}\right]_0^5 + 25 \cdot \left[\frac{x}{7}\right]_5^7 =$$

$$= \frac{125}{21} + \frac{50}{7} = \frac{125}{21} + \frac{150}{21} = \frac{275}{21}$$

$$\boxed{DY = \frac{275}{21} - \left(\frac{45}{14}\right)^2 \approx 2{,}763}$$

→ 1000 апарата $= n$

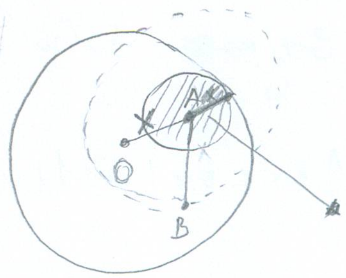
$X \to$ „да се промени преди 5-тата година" $= \mathbb{P}(X < 5)$

$X \sim Ber\left(\frac{5}{7}\right)$

→ Средно ще трябва да се променят $Bin\left(1000, \frac{5}{7}\right)$

$= 1000 \cdot \frac{5}{7} = \boxed{714,28}$.

$\boxed{84.}$



$\mathbb{P}(K(A, AB) \subset K(O, R)) = ?$

→ Всички точки които са в тази окръжност с радиус $r - OA$ ни вършат работа

→ Б.О.О $R = 1$

→ При фиксирана A, B трябва да принадлежи на кръгчето.

$$\mathbb{P}(B \in K(A, 1-x)) = \frac{\pi \cdot (1-x)^2}{\pi \cdot 1^2} = (1-x)^2$$

→ $\dfrac{\text{мястото на кръгчето}}{\text{цялото място}}$

→ Ако знаем $f_X(x)$, отговора би бил $\int_0^1 (1-x)^2 f_X(x)\,dx$

$\Rightarrow f_X(x) = F_X'(x)$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \in K(0, x)) = \frac{\pi \cdot x^2}{\pi \cdot 1^2} = x^2$$

$$f_X(x) = F_X'(x) \Rightarrow f_X(x) = (x^2)' = 2x \cdot 1\{x \in [0,1]\}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^2 \cdot 2x\,dx = \int_0^1 (1 - 2x + x^2) \cdot 2x\,dx = \int_0^1 2x - 4x^2 + 2x^3\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{6-8+3}{12}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

85.

$X_1 \sim Exp(\lambda_1)$ $\quad$ $X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

$EX_1 = 8 min \to EX = \frac{1}{\lambda} \to \lambda_1 = \frac{1}{8}$

$EX_2 = 5 min \to \lambda_2 = \frac{1}{5}$

A = „клиент е чакал по-малко от 4 min"

$P(I|A) = ?$

I – избира първа опашка

II – избира втора опашка

$$P(I|A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)}$$

$$* \; P(I|A) = \frac{P(A|I)\,P(I)}{P(A|I)\,P(I) + P(A|II)\,P(II)}$$

$$P(A) = P(A|I) \cdot P(I) + P(A|II)\,P(II) =$$
$$= P(X_1 < 4) \cdot \frac{1}{2} + P(X_2 < 4) \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \left(1 - e^{-\frac{1}{8} \cdot 4} + 1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 4}\right) \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \left(1 - e^{-\frac{1}{2}} + 1 - e^{-\frac{4}{5}}\right) \cdot \frac{1}{2} = \left(2 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{4}{5}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

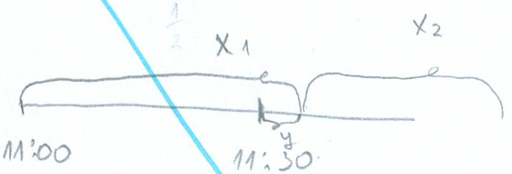
$$P(I \cap A) = P(A|I) \cdot P(I) = \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(I|A) = \frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{\left(2 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{4}{5}}\right) \cdot \cancel{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{2 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{4}{5}}}} \approx 0,61$$

86. X - време за преглед на пациент

$X \sim Exp(\lambda)$

$\mathbb{E}X = 30 min = \frac{1}{2}$ $\qquad \mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda} \to \boxed{\lambda = 2}$



Y = „времето, което вторият пациент прекарва в клиниката"

$\mathbb{E}Y = ?$

$x_2 = \cancel{x_2} + (x_1 - 30)$

$$Y(y) = \begin{cases} X(y), & X(y) \le \frac{1}{2} \\ 2X(y) - \frac{1}{2}, & X(y) > \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ т.е. } Y = X \cdot 1_{\{X \le \frac{1}{2}\}} + \left(2X - \frac{1}{2}\right) \cdot 1_{\{X > \frac{1}{2}\}}$$

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\left(X \cdot 1_{\{X \le \frac{1}{2}\}} + \left(2X - \frac{1}{2}\right) \cdot 1_{\{X \ge \frac{1}{2}\}} \right) =$$

$$= \mathbb{E}\, X \cdot 1_{\{X \le \frac{1}{2}\}} + \mathbb{E}\left(2X - \frac{1}{2}\right) \cdot 1_{\{X \ge \frac{1}{2}\}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot 1_{\{X \le \frac{1}{2}\}}(x)\, dF_X(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(2x - \frac{1}{2}\right) \cdot 1_{\{X > \frac{1}{2}\}}(x)\, dF_X(x) =$$

86. X - време за преглед на пациент

$X \sim Exp(\lambda)$

$\mathbb{E}X_1 = 30\,min = \frac{1}{2}$ $\qquad \mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda} \to \boxed{\lambda = 2}$

$Y =$ „времето, което вторият пациент прекарва в клиниката"

$\mathbb{E}Y = ?$

$$Y = X_2 \cdot 1_{\{X \le \frac{1}{2}\}} + \left(X_2 + \left(X_1 - \frac{1}{2}\right)\right) \cdot 1_{\{X > \frac{1}{2}\}}$$

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X_2 + \mathbb{E}\left(X_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 1_{\{X > \frac{1}{2}\}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 2e^{-2x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right) de^{-2x} = \frac{1}{2} - \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{\infty} + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-2x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\infty} = \boxed{\frac{1}{2}\left(1 + e^{-1}\right)}$$

89. $\mathbb{P}(\text{ези}) = \overset{p}{\frac{3}{4}}$, 2000 пъти $\to n$ $\qquad \mu = \frac{3}{4}$

$\mathbb{P}(\text{между } 1475 \text{ и } 1535) = ?$

D на Бернули $= p(1-p) = \frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right) =$
$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{16}} \to \sigma^2$

$\hookrightarrow \mathbb{P}(1475 \le X_1 + \dots + X_n \le 1535) = ?$

Нека X е падане ези $\Rightarrow X \sim Bi\left(2000, \frac{3}{4}\right)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(1475 \le X \le 1535) = ?$

$\Rightarrow \mathbb{P}(1475 \le X_1 + \dots + X_n \le 1535) =$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1475 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{X_1+\dots+X_n}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{1535-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \qquad 2000\cdot\frac{3}{4} = 1500$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{1475-1500}{\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{2000}} \le \frac{X_1+\dots+X_n}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{1535-1500}{\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{2000}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{-25}{\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{2000}} \le \frac{X_1+\dots+X_n}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{35}{\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{2000}}\right) = \qquad \begin{matrix} n > 30 \\ \sigma^2 < \infty \end{matrix} \Rightarrow \text{ЦГТ}$$

$\frac{-25}{19,36} = -1,29 \qquad 1,83$

$\approx \mathbb{P}(-1,29 \le N(0,1) \le 1,83) = \Phi(1,83) - \Phi(-1,29) =$

$= 0,9664 + (0,0985) - 1 = 0,0649$

91.

Hexa $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < 1\}$

a) $\int = 1$

$$\iint f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \iint cxy\,dx\,dy = c\int_0^1 \left[\int_x^1 cxy\,dy\right] dx =$$

$$= \int_0^1 cx\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^x dx = c\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x^2)\,dx = \frac{c}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\,dx =$$

$$= \frac{c}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{c}{8} \rightarrow \boxed{c=8}$$

b) $$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,v)\,dv = \int_0^1 8xv\,dv = 8x\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^1 = 8x\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{4x}}$$

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(u,y)\,du = \int_x^1 8uy\,du = 8y\left[\frac{u^2}{2}\right]_x^1 =$$

$$= 8y\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = 8y\cdot\frac{1}{2}(1-x^2) = \underline{\underline{4y(1-x^2)}}$$

93. $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$

$Y = \frac{X_1}{(X_1+X_2)}$, функция на разпределение $=?$

$\to F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1)\,\mathbb{P}(X_2 \le x_2) =$

$= F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) = (1-e^{-\lambda x_1})(1-e^{-\lambda x_2})$

$$\to f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}, & (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} Y = \frac{X_1}{X_1+X_2} \\ Z = X_1 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{l} \boxed{x_1 = z} \\ x_2 = \frac{z - zy}{y} = \boxed{\frac{z}{y} - z} \end{array} \right.$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{z}{y^2} & \frac{1}{y} - 1 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{z}{y^2}}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial y} = \left(\frac{z}{y}\right)' - z = \frac{z'y - y'z}{y^2} = \frac{0 - z}{y^2} = -\frac{z}{y^2}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial z} = \left(\frac{z}{y}\right)' - z' = \frac{y'z - z'y}{y^2} = ?$$

$$f_{Y,Z}(y,z) = f_{X_1,X_2}\left(z, \frac{z}{y} - z\right) \cdot \frac{z}{y^2} = \lambda^2 e^{-\lambda\left(\cancel{z} + \frac{z}{y} - \cancel{z}\right)} \cdot \frac{z}{y} =$$

$$= \lambda^2 e^{-\frac{2\lambda}{y}} \cdot \frac{z}{y} \quad \text{за} \quad y(0,1)$$