f_X се нарича $\boxed{\text{плътност}}$ на X:

→ за зх а :)

→ реално число

* Тв: Нека X е н.с.в. с плътност f_X. Тогава $\forall c \in \mathbb{R}$, $P(X=c)=0$ и следователно за $a<b$ $P(X\in(a,b)) = P(a<X<b) = P(a<X\le b)$
$= P(a\le X<b) = P(a\le X\le b)$
$= P(X\in[a,b)) = P(X\in[a,b])$

* д-во: $\{X=c\} = \bigcap_{n\ge1}\{c-\frac{1}{n} < X < c+\frac{1}{n}\}$

$$P(X=c) = P\left(\bigcap_{n\ge1}\{c-\frac{1}{n}<X<c+\frac{1}{n}\}\right) = \lim_{n\to\infty}\int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x)\,dx = 0$$

$$P(X=c)\le P\left(X\in\left(c-\frac{1}{n}, c+\frac{1}{n}\right)\right) \overset{\text{деф}}{=} \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x)\,dx$$

$$P(X=c)\le \lim_{n\to\infty}\int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x)\,dx = \int_c^c f_X(x)\,dx = 0 \qquad P\left(c-\frac{1}{n}<X<c+\frac{1}{n}\right)$$

интеграл от равна горна и долна граница е 0

* деф: Ако f_X е плътност на X, то

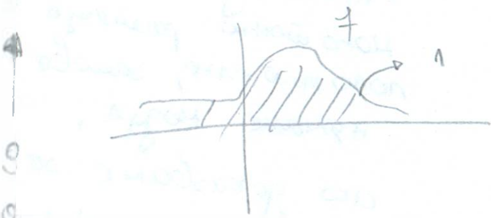
$$F_X(x) = P(X<x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$ е ф-я на разпределението на X

доп.

Ако x_0 е точка, в която f_X е непрекъсната, то

$$\left.\frac{\partial F_X}{\partial x}\right|_{x=x_0} = f_X(x_0)$$

f → можем да конструираме X: f е неговата плътност



* деф за функция на разпределението: X е сл. вел. $F_X(x)=P(X<x)$

Ако X е непрекъсната, то $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$, $\forall x\in R$,

ако f_X е непрекъсната в x_0: $\left.\frac{\partial F_X}{\partial x}\right|_{x=x_0} = f_X(x_0)$

Смяна на променливите

11.04

X е н.с.в $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и се интересуваме от

$Y = g(X) \to f_Y \overset{?}{=}$ израз(f_X) $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

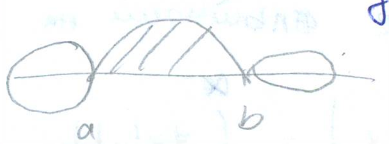
*Th: Нека X е н.с.в. с плътност f_X. Нека g е монотонно $\uparrow$ или $\downarrow$ (строго). и $Y = g(X)$. Нека g е диференцируема.

$\downarrow$ е н.с.в. с плътност

Тогава
$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| (g^{-1})'(y) \right|, \quad y \in \mathbb{R}.$$

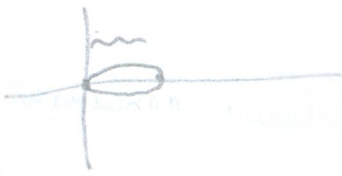
*Заб: Монотонност и диференцируемост са необходими само там където $f_X > 0$

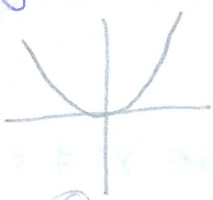
$g \uparrow$ или $\downarrow$ на $[a, b]$



-той деф: g е монотонна и диференцируема

+ достатъчно е върху региона където $f_X(x) > 0$





*g-во: $P(a < Y < b) \overset{?}{=} \int_a^b f_Y(y)\,dy$ (1)

$= P(a < g(X) < b) \overset{g\uparrow}{=} P(g^{-1}(a) < X < g^{-1}(b)) =$

$= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f_X(x)\,dx \overset{x = g^{-1}(y)}{=} \boxed{\int_a^b f_X(g^{-1}(y))\,(g^{-1})'(y)\,dy}$

$\|$

$f_Y(y)$

* производната на монотонно растяща е положителна, затова нямаме модул, ако доказваме за $\downarrow$ ще имаме $|\ |$ модул

*Д-во:

$$\mathbb{P}(Y\in(a,b)) = \mathbb{P}(g(X)\in(a,b))$$

$g\uparrow$:

$$\overset{g\uparrow}{=} \mathbb{P}(X\in(g^{-1}(a), g^{-1}(b))) = \int_{w=g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f_X(w)\,dw \overset{w=g^{-1}(v)}{=} \int_{v=a}^{b} f_X(g^{-1}(v))(g^{-1})'(v)\,dv = \int_a^b f_X(g^{-1}(v))(g^{-1})'(v)\,dv$$

$g\downarrow$:

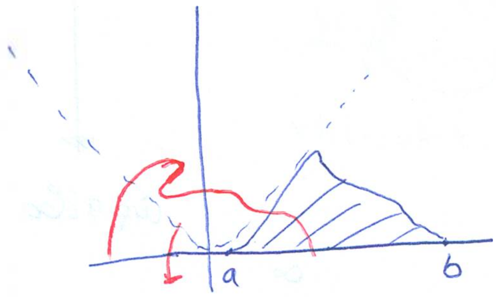
$$\overset{g\downarrow}{=} \mathbb{P}(X\in(g^{-1}(b), g^{-1}(a))) = \int_{g^{-1}(b)}^{g^{-1}(a)} f_X(w)\,dw \overset{v=g^{-1}(w)}{=} \int_{v=b}^{v=a} f_X(g^{-1}(v))(g^{-1})'(v)\,dv =$$

$$= \int_a^b f_X(g^{-1}(v))(-g^{-1})'(v)\,dv = \int_a^b \underbrace{f_X(g^{-1}(v))\,|g^{-1}{}'(v)|}_{f_Y(v)}\,dv$$

*Деф (Независимост в съвкупност): Нека $X=(X_1,\dots,X_n)$ е непрекъснат вектор от сл. вел. Тогава $X_1,\dots,X_n$ са независими в съвкупност, ако $\forall n > k \geq 2$, $\forall (j_1,\dots,j_k)$ (различни индекси от 1 до n) съвместната плътност на $Y=(X_{j_1},\dots,X_{j_k})$, $f_X(x_1,\dots,x_n)=\prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j)$,

$$f_Y(y_{j_1},\dots,y_{j_n}) = f_{X_{j_1}}(y_{j_1})\cdot f_{X_{j_2}}(y_{j_2})\cdots f_{X_{j_k}}(y_{j_k})$$

$*\ Y = g(X)$ g е строго монотонна $Y = X^2$



не е монотонна

g-во: $g\uparrow$ $\quad \mathbb{P}(Y \in (a,b)) \overset{?}{=} \int_a^b f_Y(y)\,dy \quad \forall a<b$

$$\mathbb{P}(a<g(Y)<b) \overset{g\uparrow}{=} \mathbb{P}(g^{-1}(a) < X < g^{-1}(b)) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f_X(x)\,dx$$

$$\overset{x=g^{-1}(y)}{=} \int_a^b f_X(g^{-1}(y))\,(g^{-1}(y))'\,dy$$

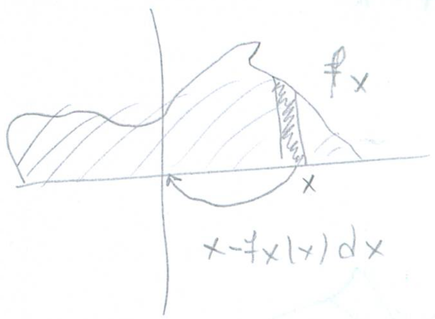
$g\downarrow$

$$\mathbb{P}(a<g(x)<b) \overset{g\downarrow}{=} \mathbb{P}(g^{-1}(b) < X < g^{-1}(a)) = \int_{g^{-1}(b)}^{g^{-1}(a)} f_X(x)\,dx =$$

$=$

X н.с.в. $\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$ $\left(\mathbb{E}X = \sum_i x_i p_i\right)$

→ математическо очакване на НСВ



трябва

$\sum_i |x_i| p_i < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx < \infty \text{ - да е краен}$$

следствие

• $Y = g(x)$, то $\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx$

$$DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}X)^2 f_X(x)\,dx \quad \to DX = \sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_i$$

* **Деф (дисперсия):** Нека X е н.с.в. с плътност f_X. Тогава, ако $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx < \infty$ (е крайно), то под дисперсия на X разбираме

$$DX = \mathbb{E}\underbrace{[X - \mathbb{E}X]^2}_{g(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}X)^2 f_X(x)\,dx$$

* **Свойства:**

→ дисперсията

1) $\mathbb{E}c = c$ 1') $Dc = 0$

2) $\mathbb{E}cX = c\,\mathbb{E}X \quad \forall c \in \mathbb{R}$ 2') $D(aX + b) = a^2 DX$, $a, b \in \mathbb{R}$

3) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ 3') $D(X+Y) = DX + DY$, ако $X \perp\!\!\!\perp Y$

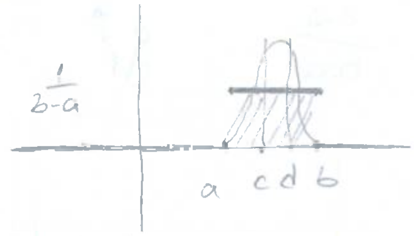
4) Ако $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$

* Видове н.с.в

а) Равномерно разпределена НСВ

а) $X \sim U(a,b)$, $-\infty < a < b < \infty$

ако $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$



$P(c < X < d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{d-c}{b-a}$ - дължината на интервала

→ $\mathbb{E}X = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2}$ → очакването

→ $\mathbb{E}X^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$

→ $DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

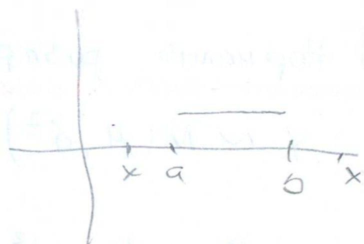
интиналната средно квадратична грешка

$\int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy =$

$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dy = \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a,b] \\ 1, & x > b \end{cases}$

→ не сме хванали нищо

хванали сме целия



$Y \sim U(0,1)$ в интервала от 0 и 1

(+) от миналата год.

деф (равенство по разпределение):

X,Y н.с.в.

$X \overset{d}{=} Y \iff F_X = F_Y \iff f_X = f_Y$

$P(X \in (a,b)) = \int_a^b f_X(x)\,dx = \int_a^b f_Y(x)\,dx = P(Y \in (a,b))$

$Y = \frac{X-a}{b-a}$ връщаща стойности на $(0,1)$

$g(x) = \frac{x-a}{b-a}$ $\quad g\uparrow \quad g^{-1}(y) = a+(b-a)y$

$f_Y(y) = f_X(a+(b-a)y) \cdot |(g^{-1}(y))'|$ $\quad y \in (0,1)$

$= \frac{1}{b-a} \cdot b-a = 1 \quad y \in (0,1)$ $\quad y = g(x) \Rightarrow x = a+(b-a)y = g^{-1}(y)$

$g^{-1}(y) = b-a$

и 0 за $y \notin (0,1)$

$X = a+(b-a) \Rightarrow \mathbb{E}X = a+(b-a)\mathbb{E}Y = \frac{a+b}{2}$

$DX = (b-a)DY$

в) Нормално разпределение (Гаусово разпределение)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, ако $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

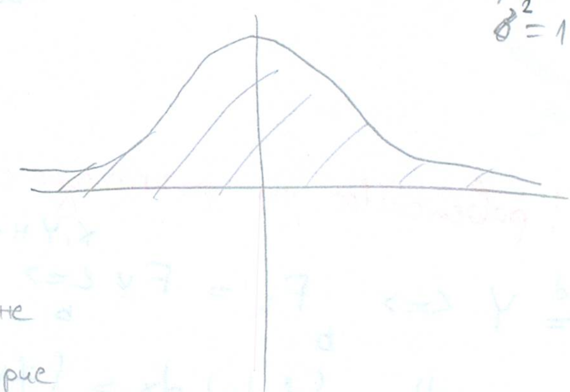
реално $\quad$ положително $\quad$ плътност $\quad \sigma\sqrt{2\pi}$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \overset{?}{=} 1$ → Интеграл на Дирихле

$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

не може да се сметне

или според Фурие може би по някакъв начин 1



$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ $\quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad \boxed{X = \sigma Y + \mu}$

$g(x)$ - дописи

$f_Y(y) = f_X(\mu + \sigma y) \cdot \sigma = , \quad -\infty < y < \infty$

$$= \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\mu+\sigma y-\mu)^2}{2\mu}} \cdot \cancel{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-} \longrightarrow Y \sim N(0,1)$$

$\mu = 0, \sigma^2 = 1$

или Z

стандартно нормално разпределение

$$\to f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

нечетна функция

$\mathbb{E}X = \sigma \mathbb{E}Y + \mu = \mu$ $\qquad \mathbb{E}Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0$

$DX = \sigma^2 DY$

$DY = \mathbb{E}Y^2$ $\qquad \mathbb{E}Y^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$

допълнително

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

цел: $\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

$$\sqrt{2\pi}\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{y^2}{2} \cdot \frac{-2}{\sigma^3} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \Rightarrow \sqrt{2\pi}\sigma^3 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} = Z \sim N(0,1)$$

$$P(X<x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(x)$$

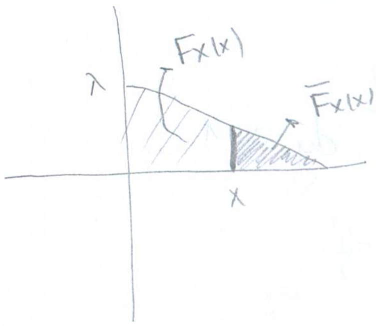
$\mu = \sigma = 1$ $\quad P(X<x) = \Phi(x-1)$

$x = 1$ $\quad P(X<x) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$

б) Експоненциално разпределение

$X \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$$



$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\, dy = 1 - e^{-\lambda x} = P(X \leq x), x>0$$

опашка

$$\bar{F}_X(x) = P(X \geq x) = 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x}, x>0$$

* Безпаметност:

$$\frac{P(X \geq x+y;\ X \geq x)}{P(X \geq x)}$$

$x, y > 0$

$$P(X \geq x+y \mid X \geq x) = \frac{P(X \geq x+y)}{P(X \geq x)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} = P(X \geq y)$$

X е безпаметна

Непрекъснат еквивалент на геометрично ?

Непрекъснати съвместни разпределения

да

Деф: Нека $X = (X_1, \dots, X_n)$ е вектор от сл. вел $(X_1, \dots, X_n)$. Тогава наричаме X вектор от н.с.в., ако $\exists\, f_X : \left(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)\right)$, такова че:

$f_{X_1, \dots, X_n}$

а) $f_X(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

б) $\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{\mathbb{R}^n} f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 1$

f_X се нарича съвместна плътност

заедно е за всичките заедно

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_{A \subseteq \mathbb{R}} f_X(x)\, dx$$

в) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int \dots \int_A f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n$

$\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \iint_A f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

Деф: Ако f_X е съвместна плътност на $X = (X_1, \dots, X_n)$, то

$$D(f_X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f_X(x_1, \dots, x_n) > 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

носител на случайна величина

да

Деф: Маргинални плътности: Нека X е вектор от н.с.в, тогава

$$f_{X_j}(x_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_{j+1} \dots dx_n$$

плътността на j-тия компонент на случаен вектор

се нарича маргинална плътност на X_j.

Деф. (съвместна функция на разпределението) X Нека $X=(X_1,\dots,X_j,\dots X_n)$ е вектор от н.с.в.

Тогава, ако $f_{X_j}(x_j)>0$, за някое $x_j\in R$, тогава

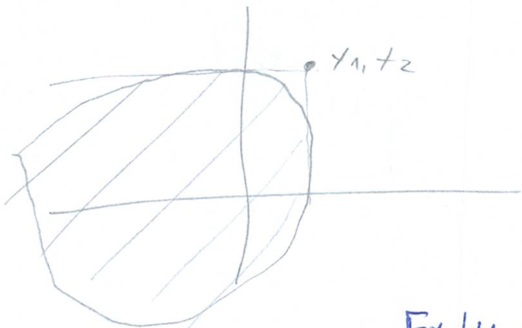
$$f_{X|X_j=x_j}(x_1,\dots,x_n) = \frac{f_X(x_1,\dots,x_n)}{f_{X_j}(x_j)}$$ долини

$x_1,\dots$ варират, x_j е фиксиран

*** Деф:** $X=(X_1,\dots,X_n)$, Тогава съвместната ф-я на разпределение

$$F_X(x_1,\dots,x_n) = P(X_1<x_1;\ X_2<x_2 \dots X_n<x_n)$$

$n=2$



Ако f_X

$$F_X(x_1,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f_X(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n$$

$$\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_X(y_1,y_2)\,dy_1dy_2$$

допуск на 11.04

*** Деф. (Независимост):** Нека X_1 и X_2 са две сл. вел. Казваме, че $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$, ако $\forall (x_1,x_2)$ $F_X(x_1,x_2)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$ *

Ако (X_1,X_2) е вектор от н.с.в., то независимост е еквивалентна на $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$ $\forall(x_1,x_2)$

* $P(X_1\le x_1;\ X_2\le x_2)=P(X_1\le x_1)P(X_2\le x_2)$

вектор от н.с.в.

* Деф: (независимост в съвкупност): $X = (X_1, \dots, X_n)$, то $X_1, \dots, X_n$ са независими в съвкупност ако $\forall (x_1, \dots, x_n)$

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)\, F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_n}(x_n)$$

$$\mathbb{P}(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j < x_j)$$

Ако те са вектор от н.с.в., то независимост е еквивалентна на $f_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j) \quad \forall (x_1, \dots, x_n)$

* Деф: Нека $X = (X_1, X_2)$ е непр.вектор със съвм. плътност f_X. Тогава ако съществуват $\mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}X_2$, то

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) > \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2$$

$X = (X_1, X_2)$ е вектор от н.с.в

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}g(X_1 + X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 + x_2)\, f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

интегриране първо по x_1 по x_2

$$= \int_{x_1 -\infty}^{\infty} x_1 \underbrace{\int_{x_2 -\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_2}_{f_{X_1}(x_1)} dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1) dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\, dx_2 =$$

$$= \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2$$

* X е непрекъснат вектор и $g: R^n \to R$, то

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_X(x)\, dx$$

(+) $X=(X_1,X_2)$ $\quad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

$$EX_1X_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \underbrace{f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)}_{= f_X(x_1,x_2)} dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{x_1=-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1) \underbrace{\int_{x_2=-\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\, dx_2}_{= EX_2} dx_1 = EX_1 EX_2$$

*** Твърдение:** $X=(X_1,X_2)$ е непр. вект. и $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$. Тогава при допускане, че EX_1 и EX_2 съществуват $\boxed{EX_1X_2 = EX_1 EX_2}$ и ако DX_1 и DX_2 съществуват $\boxed{D(X_1+X_2) = DX_1 + DX_2}$

Смяна на променливите

X, f_X; $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\quad Y=g(X)$ $\quad f_Y = ?$

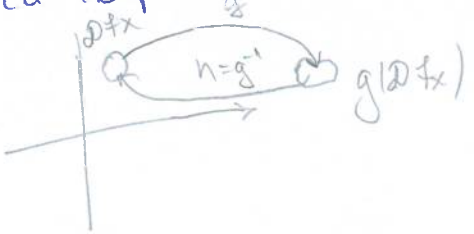
дефиниционна област на f_X

*** Th (Смяна на променливите):** Нека $X=(X_1,X_2)$ е ~~непр. вектор~~ със съвместна плътност f_X и $D(f_X)$. Нека $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, такова че $g: D(f_X) \to \mathbb{R}^2$ е взаимно еднозначно. Нека $Y=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = g(X) = \begin{pmatrix} g_1(x_1,x_2) \\ g_2(x_1,x_2) \end{pmatrix}$

и $g(Df_X) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y = g(x)$ за някое $x \in D(f_X)\}$

$$X = g^{-1}(Y) = h(Y) \quad (h = g^{-1})$$

Нека g и h са непрекъснати и диференцируеми в $D(f_X)$ и $g(Df_X)$

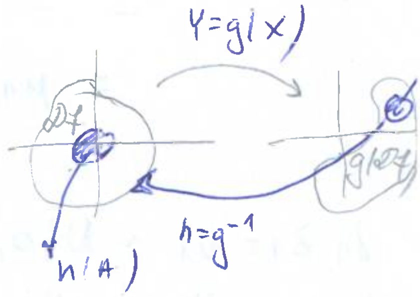


Totalsa $\boxed{f_Y(y) = f_X(h(y))\,|J(y)|}$, $\forall y \in g(D f_X)$

$$J(y) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}, \quad h = g^{-1} = (h_1, h_2)$$

1:39:56

*2-во: $Y = (Y_1, Y_2) = g(X) = g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2)$



$\mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}(g(X) \in A) = \mathbb{P}(X \in h(A))$

$X = (x_1, x_2) = h(y) = (h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2))$

$$\iint_A f_Y(y_1,y_2)\, dy_1 dy_2 = \iint_{h(A)} f_X(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2$$

$\|$ Th. за смяна на променливите

$$= \iint f_X(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2))\, |J|\, dy_1 dy_2$$

$$|J| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y_2} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}\right|$$

+ $X_1, \dots, X_n$ са нез. в съвкупност сл. вел. $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \overset{?}{\sim} N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right) \qquad \mathbb{E}Y = \sum_{i=1}^n \mu_i; \quad DY = \sum_{i=1}^n DX_i = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

$n=2$ $\quad X_1+X_2 = \mu_1+\sigma_1 Z_1+\mu_2+\sigma_2 Z_2 \qquad Z_i \sim N(0,1) \quad i\le 2$

$$= \mu_1+\mu_2 + \sigma_1 Z_1+\sigma_2 Z_2$$

$\sigma_1 Z_1 = V_1 \sim N(0,\sigma_1^2)$

$\sigma_2 Z_2 = V_2 \sim N(0,\sigma_2^2)$

$V_1+V_2 \overset{?}{\sim} N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2) \qquad = \mu_1+\mu_2+V_1+V_2$

$$f_{V_1 V_2}(v_1,v_2) = \frac{1}{\sqrt{\quad}} e^{-\frac{v_1^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\quad}} e^{-\frac{v_2^2}{2\sigma_2^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{v_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{v_2^2}{2\sigma_2^2}}$$

$X=(V_1+V_2)=g_1(V_1,V_2)$ $\quad$ gen: $f_{X,Y}(x,y) = f_{V_1 V_2}(y,x-y)\cdot 1 \Rightarrow$

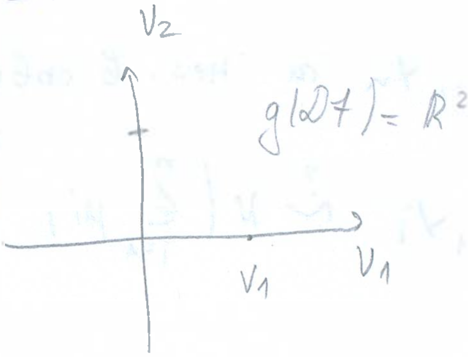
$Y=V_1=g_2(V_1,V_2)$

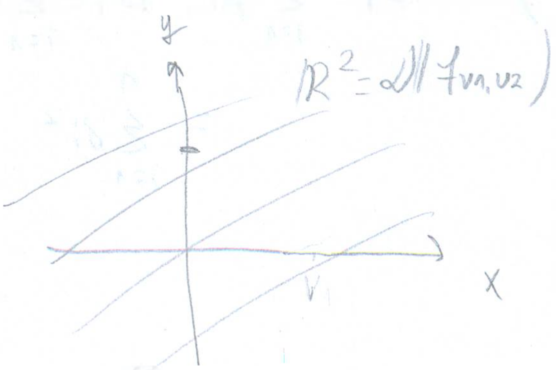
$V_1=Y=h_1(X,Y)$

$V_2=X-Y=h_2(X,Y)$

$h_1(x,y)=y$

$h_2(x,y)=x-y$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow |\det J| = 1$





$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-y)^2}{2}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-y)^2}{2\sigma_2^2}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2\sigma_2^2)}} \sim$$

$$N(0,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$$

→ интегралът може да се сметне с допълване до точен квадрат

→ пада се подготвен за $\alpha = 0$

Деф (Гама разпределение) $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ $\alpha > 0$, $\beta > 0$ е Гама (α - число) разпределена ако $f_X(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$, $x > 0$

плътността

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(1) = 1$$

⊕ $\alpha = \beta = 1$ $\quad f_X(x) = \cancel{\beta}\, e^{-x}, \; x > 0$ $\quad Exp(1)$ → експоненциално разпределение

⊕ $\alpha = 1$, $\beta > 0$ $\quad f_X(x) = \beta e^{-\beta x} \rightarrow Exp(\beta)$

$$\Gamma(1,\beta) = Exp(\beta)$$

ТВ: Ако $X_i \sim \Gamma(\alpha_i,\beta)$ за $1 \le i \le n$ и $X_1,\dots,X_n$ са независими в съвкупност, то $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i, \beta\right)$

Следствие: $X_1,\dots,X_n$ са $Exp(\beta)$ и са независими в съвкупност, то $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n;\beta)$

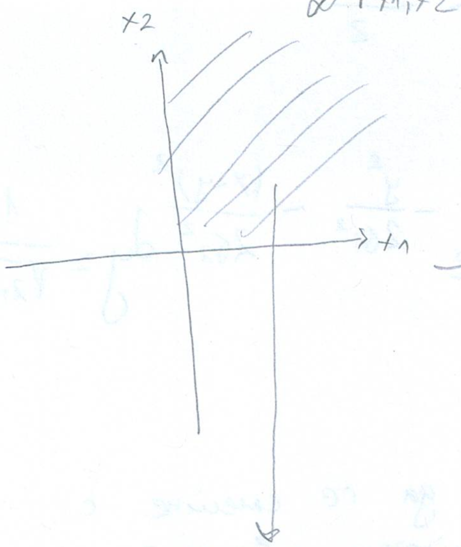
2-во: $n=2$;

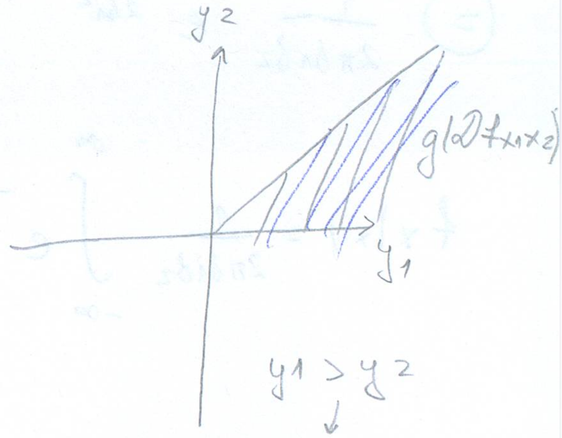
$$Y_1 = X_1 + X_2$$

$$Y_2 = X_2$$

$$X_1 = Y_1 - Y_2$$

$$X_2 = Y_2$$





$y_1 > y_2$ ↓ винаги

Γ разпределение живее само в първия квадрант

$$\boxed{\infty > y_1 \geq y_2 \geq 0}$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(y_1-y_2, y_2)\cdot 1 = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}(y_1-y_2)^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} e^{-\beta y_1}$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-\beta x_1} \cdot \frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2-1} e^{-\beta x_2} =$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} e^{-\beta(x_1+x_2)}$$

маргинално от сега

$$f_{Y}(y_1) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta y_2} \int_{y_2=0}^{y_1} (y_1-y_2)^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha-1} \, dy_2 =$$

$$\overset{y=w\cdot y_1}{\Longleftarrow} \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta y_1} \int_{w=0}^{1} y_1^{\alpha_1-1}(1-w)^{\alpha_1-1} y_1^{\alpha_2-1} w^{\alpha_2-1} y_2 \, dw =$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta y} y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1} \underbrace{\int_0^1 (1-w)^{\alpha_1-1} w^{\alpha_2-1} \, dw}_{\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}}$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} y^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta y_1}$$

Th: $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ то $EX = \frac{\alpha}{\beta}$, $DX = \frac{\alpha}{\beta^2}$ да 1, 8, 18 + дайте изпит

→ снимки $DX = ?$

Д-во:

$$EX = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x \cdot x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} dx$$

$$\frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\,\Gamma(\alpha+1)} \to \Gamma(\alpha+1, \beta)$$

↳ ако не знаем директно довършваме

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

↗ хи квадрат частен случай на Г разпределението

→ да 18.04 2 снимки

Деф: (χ^2 → chi squared) Казваме, че $X \sim \chi^2(n)$ ако $X \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

n - степен на свобода

$$EX = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$f_Y(y) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \; x > 0$$

↳ α

$DX = 2n$

↳ $\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4n}{2} = 2n$

Твърдение: Ако $Z_1, \dots, Z_n$ са стандартно нормално разпределение, които са независими в съвкупност, тогава

↳ теорема

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2(n)$$

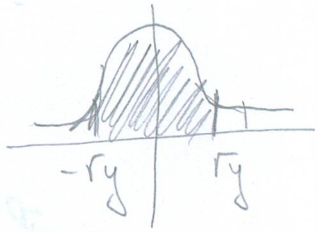
2-бо: Ако покажем, че $z_1^2 \sim \chi^2(\quad)$ що б

$$z_1^2 = \chi^2(1) \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$Y = z_1^2$ $\qquad P(Y \le y) = P(z_1^2 < y) = P(-\sqrt{y} < z_1 < \sqrt{y})$

$$= 2P(0 \le z_1 < \sqrt{y}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



$$f_X(y) = F'_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}$$

↳ плътността я намираме с производната

18.04

2деф: (t-разпределение) Нека $Z \sim N(0,1)$ и $X \sim$ $\qquad X \perp Z$. Тогава

$\sim t(x)$ или t $\qquad$ с n степени на свобода

→ до тук

18.04

Видове сходимост.

А. Сходимост

+Деф: (сходимост почти сигурно (п.с) ?) Нека $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ са сл. вел. във вер. прост. $V = (\Omega, \mathcal{A}, P)$ и $X : \Omega \to \mathbb{R}$ също е такава.

допълн

Казваме, че $X_n \to X$, ако $P(L) = 1$, където $L = \{\omega \in \Omega;$

+Деф (Сходимост по вероятност): Нека $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ са сл. вел. във V и $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е сл. вел. Тогава $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, ако

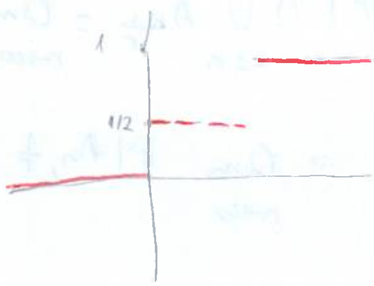
$\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} P(A_{n}, \varepsilon) = 0$, където $A_{n\varepsilon} = \{\omega \in \Omega : |$?

+Деф (Сходимост по разпределение): Нека $\{X_n\}_{n\geq 1}$ е редица от сл. вел. Нека X е сл. вел. Тогава $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ ако $\forall x \in C_{F_X}$ е вярно, че $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

доп.

C_{F_X}

$$X = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{cases}$$



$X \in C_{F_X}$ ако $\mathbb{P}(X = x) = 0$

X н.с.в. $\quad C_{F_X} > \mathbb{R}$

* Th: Нека X_n е редица от сл. вел. и X е сл. вел.

док.

б)

пълна сходимост влече по вероятност, а вероятността влече сходимост по разпределение

$$п.с. \Rightarrow \mathbb{P} \Rightarrow d$$

Най-силната сходимост

* 2-во: а) Нека $X_n \longrightarrow X$ или $\mathbb{P}(L) = 1$, където

$L = \{\lim X_n = X\} \overset{?}{=} \overset{?}{\vphantom{x}}$

→ ако се борим за висока оценка ;)

$$\overset{?}{=} C = \bigcap_{r\geq 1} \bigcup_{n=1} \bigcap_{k\geq n} \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{r}\}$$

$$A^c_{n\frac{1}{r}} = \{\omega \in \Omega : |X_n(n) - X_n(n)| \leq \frac{1}{r}\}$$

$$0 = \mathbb{P}(L^c) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{n\geq 1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n}^{\infty} A_{k\frac{1}{r}}\right) \Rightarrow \bigcup_{k\geq n}^{\infty} A_{k\frac{1}{r}} \supseteq \bigcup_{k\geq n+1} A_{k\frac{1}{r}}$$

$$\forall r \geq 1 \quad 0 = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_{k\frac{1}{r}}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_{k\frac{1}{r}}\right) \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_{n,\frac{1}{r}}\right) = 0$$

? доп.

8) $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X \Rightarrow Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ Уелим: $\forall x \in C_{F_X}$! $\underset{\mathbb{P}(Y_n<x)}{F_{Y_n}(x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underset{\mathbb{P}(X<x)}{F_X(x)}$

Имаме $\forall \varepsilon>0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(\underbrace{|Y_n-X|>\varepsilon}_{A_{n\varepsilon}})=0$

$\xleftarrow{?} \mathbb{P}(X_n<x) = \mathbb{P}(Y_n<x; A_{n\varepsilon}) + \mathbb{P}(Y_n<x; A^c_{n\varepsilon})$

доп.

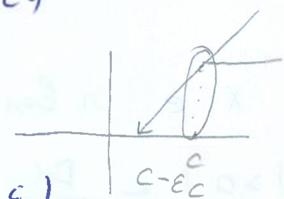
$$X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{п.с.} X(\omega) \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n < x) = \mathbb{P}(X < x) \quad \forall x \in C_{F_X}$$

*Твр: Нека $X_n \to C$ и $(X_n)_{n\ge 1}$ са деф. едно Вер. простр. Тогава $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} C$

*Д-во: $\lim F_{X_n}(x) = F_C(x), \ \forall x \neq c$ $\quad (C_{F_X} = \mathbb{R}\setminus\{c\})$

$$\lim \mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$



$$\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > c+\varepsilon) + \mathbb{P}(X_n < c-\varepsilon) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_n \le c+\varepsilon) + F_{X_n}(c-\varepsilon)$$

$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(c-\varepsilon) = 0$; $\quad \mathbb{P}(X_n \le c+\varepsilon) \ge \mathbb{P}(X_n < c+\varepsilon) = F_{X_n}(c+\varepsilon)$ при $n\to\infty$ клони 1

$$1 - 1 + 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = 0 \quad \#$$

→ Ако $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X \iff \lim \mathbb{E} f(X_n) = \mathbb{E} f(X)$ за ∀ непрекъсната и ограничена ф-я #.

изпит?

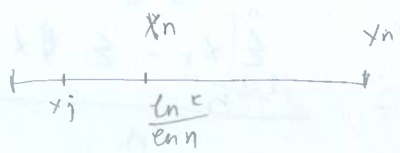
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g_{X_n}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g_X(x)\, dx$$

$\boxed{\text{Задача}}$: Нека f е непрекъсната в $[0,1)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\le k\le n} f\left(\frac{\ln k}{\ln n}\right) = ?$$

$X_n = \frac{\ln k}{\ln n}, 1 \le k \le$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} f(X_n) = \mathbb{E} f(1) = f(1)$$



Равномерно разп. на $\{x_1, \dots, x_n\}$

$\mathbb{P}(X_n < x) = \frac{1}{n} \# \text{точки} < x = \frac{n^x}{n}$ $\qquad \frac{\ln k}{\ln n} < x \iff k < n^x$

При $x \geq 1 \Rightarrow \lim \mathbb{P}(X_n < x) = 0$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} 1$$

Неравенство на Чебишев

$\{|X - \mathbb{E}X| > a\}$

Th: Нека X е сл. вел. с крайна дисперсия $DX < \infty$, тогава

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > a) \leq \frac{DX}{a^2}, \quad \forall a > 0$$

д-во: $DX = \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^2 \cdot 1 = \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^2 \left(1_{\{|X-\mathbb{E}X|>a\}} + 1_{\{|X-\mathbb{E}X|\leq a\}}\right) \geq$

$$\geq \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^2 1_{\{|X-\mathbb{E}X| \geq a\}} \geq a^2 \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > a)$$

Сл: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| < a) < \frac{\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^n}{a^n}$

Сл: $\mathbb{E}X = 0$, то $\mathbb{P}(|X| > a) \leq \frac{\mathbb{E}X^2}{a^2}$ $\quad (DX = \mathbb{E}X^2)$

+: $a := b\sqrt{DX}$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > b\sqrt{DX}) \leq \frac{1}{b^2}$$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > 10\sqrt{DX}) \leq \frac{1}{100}$$

(Слаб) Закон за големите числа (ЗГЧ) дефиниран в едно вер. прост.

Деф: (С)ЗГЧ: Нека (X_n) е редица от сл. вел. с очаквания $(\mathbb{E}X_n)_{n\geq 1}$ тогава за редицата се казва, че е валиден (С)ЗГЧ, ако

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$$ се схожда по вероятност

+ $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 \ \forall i \geq 1$, то $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}X_1 = c$

* **Теорема:** Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от независими и с еднакво разпределени сл. вел. с очакване $\mathbb{E}X_1$. Тогава

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}X_1$$

* **д-во:** $(DX<\infty)$? $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mathbb{E}X_1\right| > \varepsilon\right)}_{*} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

* $\lim_{n\to\infty} (*) = \lim_{n\to\infty} \left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}X_1\right| > n\varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} (X-\mathbb{E}X)\right| > n\varepsilon\right) \leq$

$$\overset{\text{Чебишов}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \frac{D\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)}{n^2\varepsilon^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} DX_i}{\varepsilon^2 n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{nDX_1}{n^2\varepsilon^2} = 0$$

УЗГЧ

* **деф:** Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от сл. вел. с очаквания $(\mathbb{E}X_n)_{n\geq 1}$. (деф в една вер прос)

Тогава за редицата е в сила УЗГЧ (усилен) ако

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с}} 0$$

(п.с → почти сигурно)

* $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_i = c \quad \forall i \geq 1$, то $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с}} \mathbb{E}X_1 = c$ → до тук 25.04

* **Теорема:** Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от независими и с еднакво разпределени сл. вел. с очакване $\mathbb{E}X_1$. Тогава (съществува $\mathbb{E}|X_1|<\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с}} \mathbb{E}X_1$$

* **д-во:** $(\mathbb{E}X_1^4 < \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_{X_1}(x)\,dx < \infty$$

$$L^c = \left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}X_1\right\} \text{ и } \mathbb{P}(L^c) > 0$$

$$L^c = \bigcup_{r=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} \left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{k} - \mathbb{E}X_1\right| > \frac{1}{r}\right\}}_{A_r}$$

$\mathbb{P}(L^c) \overset{?}{=} 0$

$A_r = \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} \left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} - \mathbb{E}x_1 \right| > \frac{1}{r} \right\}}_{B_{n,r}}$

$L^c = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r$

$B_{n,r} \supseteq B_{n+1,r}$

Ако $\mathbb{P}(A_r) = 0 \ \forall r \geq 1$, то $\mathbb{P}(L^c) \leq \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_r) = 0$

$A_r = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{n,r}$, то $\mathbb{P}(A_r) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_{n,r}) \overset{?}{=} 0$

$$\mathbb{P}(B_{n,r}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} \left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} - \mathbb{E}x_1 \right| > \frac{1}{r} \right\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{k} Y_i \right| > \frac{k}{r} \right\}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{k} Y_i\right| > \frac{k}{r}\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right)^4 r^4}{k^4} = \frac{k\mathbb{E}Y_1^4 + k(k-1)(\mathbb{E}Y_1^2)^2 r^4}{k^4}$$

$\mathbb{E}Y_1 \overset{4}{=} 0$

$! \ Y_1 = X_1 = \mathbb{E}X = X_1 - \mathbb{E}X_1$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right)^4 = \mathbb{E}(Y_1^4) = k\mathbb{E}Y_1^4 + 2\binom{k}{2}(\mathbb{E}Y_1^2)^2 = k\mathbb{E}Y_1^4 + k(k-1)(\mathbb{E}Y_1^2)^2$$

$\mathbb{E}Y_i^4 = \mathbb{E}(Y_1)^4$

$\mathbb{E}Y_k^3 Y_l = \mathbb{E}Y_k^3 \mathbb{E}Y_l = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k\mathbb{E}Y_1^4 + k(k-1)(\mathbb{E}Y_1^2)^2}{k^4} = 0$$

$\mathbb{E}$

$\mathbb{E}$

$\mathbb{E}$

→ $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ Схемо на Бернули $\mathbb{E}X = p = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

⊕ Ези и шифри с $p = \frac{1}{2}$

⊕ $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p$

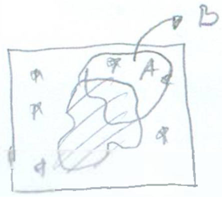
⊕

x_i	-1	1
	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \longrightarrow -\frac{1}{37} = \mathbb{E}x_1$

По-общо $\mathbb{E}(x_1 = 0)$, то за редица от

$? \ \frac{S_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



$|A| \sim ?$

$|A| > |B|$

$|V| = 1$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \frac{|A|}{1} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} |A| - \mathbb{E}X_1 \; !$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$S_n > 0$, печели дясната

$S_n \leq 0$

$S_n < 0$, печели лявата

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} 0 \qquad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > 0\right) \sim 0$$

успехи / всички

(5) $Д_n - Л_n$

Централна гранична теорема

Деф: Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от независими еднакво разпределени случайни величини

доп.

(4) $\mathbb{P}(a < Z_n < b) = \mathbb{P}($ доп.)

$$\mathbb{P}(a < Z < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

няма доказателство е) ако $M_X(t) = M_Y(t)$ за $\delta < t < \delta$, то $X \overset{d}{=} Y$

ж) $a+bX$, то $M_Y(t) = e^{a\cdot t} M_X(bt)$

Д-во:

а) $M_X(0) = \mathbb{E}\, e^{0\cdot X} = \mathbb{E}\,1 = 1$

б) $\mathbb{E}\, e^{tX} = \mathbb{E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E} X^k$

в) $M_X^{(k)}(t) = \left| \sum_{t=0\ l=n}^{\infty} \frac{t^{l-n} \cdot l(l-1)\dots(l-k+1)}{k!} \mathbb{E} X^k \right|_{t=0} = \mathbb{E} X^k$

г) $M_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x+y)}$

22. 12. 2022 Лекция No. 11

Твърдение: Нека X и Y са сл. вел. с функции на моментите $M_X(t)$, $M_Y(t)$, тогава:

а) $M_X(0) = 1$

б) $M_X(t) = \mathbb{E} e^{tX} = \sum \frac{t^k}{k!} \mathbb{E} X^k$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$

в) $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E} X^k \quad \forall k \geq 0$

г) $X \perp\!\!\!\perp Y$, то M_{X+Y}

д) Ако $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от сл. вел и $\lim\limits_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = \varepsilon$

Твърдение: Нека $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Тогава $M_X(t) =$

* Д-во: $X = \mu + \sigma Z$, $Z \sim N(0,1)$ => ~~...~~ $M_X(t) =$

* Д-во (ЦГТ): $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ $\quad S_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$; $M_{X_1}(t)$ съществува $\forall t \in \mathbb{R}$

Ще търсим M

$$Y_j = \frac{X_j - \mu}{\sigma} \quad \text{и} \quad U_n =$$

стандартното отклонение

(+) Извадка от N

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{гласувай за партия } X \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$X_i \sim Ber(p)$

$$\frac{S_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} p$$

грубо грешка ЦГТ

$$\varepsilon_N = \frac{S_N}{N} - p = \frac{Z_N\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}} \approx \frac{Z\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}}$$

$$\frac{S_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} = Z_n \approx Z \sim N(0,1)$$

$\sqrt{p(1-p)} \le \frac{1}{2}$

$$|\varepsilon_N| \lessapprox \frac{1}{2}\frac{|Z|}{\sqrt{N}}$$

(+) Неравенство на Бери Есеен

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} - \mu \le \frac{\sigma}{\sqrt{N}} x \right) - \Phi(x) \right| \le \frac{0,4748}{\sqrt{N}} \frac{\mathbb{E}|X-\mu|^3}{\sigma^3} =$$

$\mu, \sigma, \mathbb{E}|X-\mu|^2$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{S_N - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \le x \right) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{ЦГТ}} \Phi(x)$$

$$\frac{\mathbb{E}|X-\mu|^3}{\sigma^3}$$

$X_1 \sim Ber(p)$

$\sigma = \sqrt{p(1-p)}$ → тогава може $\frac{\mathbb{E}|X-\mu|^3}{(p(1-p))^{3/2}}$

* След.: Нека $X_n \sim Bin(n,p)$. Тогава $\forall x \in \mathbb{R}$ е вярно че

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \Phi(x)$$

може да има нещо такова на изпит с използване на ЦГТ

* Д-во: $X_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, $X_j \sim Ber(p)$

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z \qquad \mathbb{P}\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(Z < x)$$

$C_{F_Z} = \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n}} < x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$$

Статистика

Обекти - хора, молекули, животни, клетки, избиратели - генерална (пълната) съвкупност

* Напълно случайно вземаме извадка от генералната съвкупност и на базата на нея искаме да разберем свойство на генералната съвкупност

↳ 1936 в САЩ избори ~~прогноза~~ 1 - $?$ $7\,100000$

Галъп - 4000 души

X сл. вел., която отразява някакво свойство на ген. съвкупност от

$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ както извадката има n броя и $Y_1 \overset{d}{=} X_i \overset{d}{=} X$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ са взаимно независими

На базата на $\vec{X}$ искаме да оценим $\boxed{F_X}$ и/или $\boxed{f_X}$.

Ще допуснем, че $F_X(x; \theta)$ (типа) или $f_X(x; \theta)$

(+) $f_X(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\theta = (\mu, \sigma^2)$ $\Theta = \mathbb{R} \circ \mathbb{R}^1$

θ - вектор от параметри, които описват $\forall$ в клас от разпределения.

(+) $Y \sim Ber(p)$

$F_X(x; \theta)$ $\Theta = p < [0, 1]$

Θ - означаваме възможните стойности на θ (типа голямо)

* Деф (точкова оценка): Ако $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$.

$\hat{\Theta}$ $\mathbb{R}^n \to \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$ $\hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n) - \hat{\Theta}(\vec{X})$ се нарича точкова оценка на Θ

Концептуално ниво $\vec{X}$ и $\hat{\Theta}(\vec{X}) \to$ вектор от сл. вел.

вектор от нсв

Практически: $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ реализация на $\vec{X}$

$\hat{\Theta}(\vec{x})$ е вектор от числа

Цел: да намерим разумни точкови оценки

1) Метод на максималното

Допуска се, че $X \sim f_X$ има $f_X(x, \theta)$ (плътност); $\theta \in \Theta$

$L(\vec{x}; \theta) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j, \theta) = \prod_{j=1}^{n} f_X(x_j, \theta) \to$ функция на ?

$(L(\vec{x}, \Theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i, \Theta))$ $\quad L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$X \sim N(\mu, 1)$ $\quad \Theta = \mu$

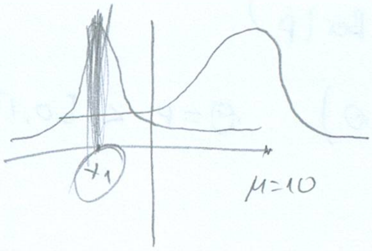
$n = 1$

$X_1 = x_1$

$$L(x_1, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}} \longrightarrow \sup_{\mu \in \mathbb{R}} L(x_1; \mu)$$ и $\hat{\mu}$ който максимизира

$L(x_1, \mu)$ е нашата максимална правоподобна оценка (м.п.о) на μ.

$\sup_{\mu} L(x_1, \mu) = L(x_1; x_1))$ $\quad \hat{\mu} = x_2$



$P(X_1 \in (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)) \approx 2\varepsilon f(x_1, \mu)$ → когато плътността се максимизира имаме най-голяма вероятност да сме наблюдавали x_1

*Деф (м.п.о): Нека $\vec{X}$ е извадка за X, и нека $f_X(x, \Theta)$, където $\Theta \in \mathbb{R}^s$, $s \geq 1$.

Тогава м.п.о. на Θ наричаме $\hat{\Theta}$, който максимизира функцията на правоподобие

$$L(\vec{x}, \hat{\Theta}) = \sup_{\Theta \in \Theta} L(\vec{x}, \Theta) = \sup_{\Theta \in \Theta} \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i, \Theta)$$

$\vec{X} = \vec{x}$ $\quad \sup_{\Theta \in \Theta} \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \Theta)$ $\quad$ Макс на $\ln L$ е макс на L, понеже $\ln$ е растяща ф-я

Ако f_X са диференцуеми по Θ, то $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_s)$

$\Theta \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \Theta = (\Theta_1 - \Theta_2) = (\mu, \sigma^2)$

$$L(\vec{X}, \Theta) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_j-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{\partial \ln L}{} = \frac{\partial n}{\partial \mu} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} +$$

долнии

снимка