СЕМ 2023

$\boxed{1.}$

1) Дайте дефиниция за случайна величина в дадено вероятностно пространство

↳ Нека V е вероятностно пространство. Тогава $X: \Omega \to \mathbb{R}$ е ~~на~~ случайна величина, тогава когато $\forall a,b$, $a,b \in \mathbb{R}$ е в сила $X^{-1}((a,b)) \in \mathcal{A}$, където $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$. Т.е. трябва да имаме
$B \subseteq \mathbb{R}$

възможността да кажем какво е вероятността X да е между a и b.

2. Въведете понятието очакване и дисперсия на дискретна случайна величина.

↳ Нека X е диск. сл. вел. Тогава под очакване на X или $\mathbb{E}X$ разбираме: $\mathbb{E}X = \sum_{i=1} x_i \cdot p_i$, ако $\sum_i |x_i| \cdot p_i < \infty$

↳ Нека X е диск. сл. вел. с очакване $\mathbb{E}X$. Тогава $DX := \sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 \cdot p_i$, когато $DX < \infty$ се нарича дисперсия на X.

Нека Y_n е Гамо разпределена с параметри 1,1 и ~~…~~ $e_1 \sim Exp(1)$;

а) намерете функцията на моментите на e_1

$$\cancel{M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX}} \qquad \cancel{f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}}$$

$$\cancel{M_{e_1}(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \int_0^\infty e^{tx} \cdot f_{e_1}(x)\,dx = \int_0^\infty e^{tx} \cdot e^{-\lambda x}}$$

$Y_n \sim \Gamma(n,1)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$Y_n \sim \Gamma(\overset{\alpha}{n}, \overset{\beta}{1}) \Rightarrow f_{Y_n}(x) = \left\{ \frac{1^n x^{n-1} e^{-1x}}{\Gamma(n)} = \frac{x^{n-1} e^{-x}}{\Gamma(n)} \right.$$

$e_1 \sim Exp(1)$

$$f_{e_1}(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \overset{\lambda = 1}{\Rightarrow} \begin{cases} 1 \cdot e^{-1x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \int_0^\infty e^{tx} \cdot e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{x(t-1)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{t-1} \int_0^\infty e^{x(t-1)}\,d\,x(t-1) = \frac{1}{t-1}\left[e^{x(t-1)}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{t-1}\left[e^{\infty} - e^{0}\right] = \frac{1}{t-1}\left[0 - 1\right] = \frac{1}{t-1}, \quad |t| < 1$$

б) Намерете функцията на моментите $M_{Y_n}(t)$ на Y_n

$$M_{Y_n}(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \int_0^\infty \frac{e^{tx} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x}}{\Gamma(n)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{x(t-1)} \cdot x^{n-1}\, dx =$$

↳ може да го запишем като

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^{n-1}\, dx = \frac{\Gamma(n)}{a^n}, \text{ където } a = t-1 \text{ и } a$$

$$= \frac{1}{\cancel{\Gamma(n)}} \cdot \frac{\cancel{\Gamma(n)}}{(t-1)^n} = \frac{1}{(t-1)^n}, \quad |t|<1$$

2. X и Y са сл. вел. върху едно вер. прост. и $\mathbb{E}X<\infty$. Нека възможните стойности на Y са $x = \{1,2,3\}$ с вероятности $\{p_1, p_2, p_3\}$

а) Въведете $\mathbb{E}[X|Y]$ като решение на оптимизационна задача

↳ Нека X и Y са случайни величини, то тогава $G^*(Y) = \mathbb{E}[X|Y]$ е тази случайна величина, която минимизира $\min_{G^*} \mathbb{E}[X-G(Y)]^2 = \mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X|Y]]^2$

2) Изведете формулата за $\mathbb{E}[X|Y]$

$Y \in \{1,2,3\}$ и $\mathbb{P}(Y=i)=p_i$, $i\in\{1,2,3\}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X|Y=i] \cdot \mathbb{1}_{\{Y=i\}}$

4.) Ако $X \sim N(Y,1)$, намерете $\mathbb{E}X$

Y приема стойности $\{1,2,3\}$ с вероятности $\{p_1,p_2,p_3\}$

и при $Y=y$, X е нормално разпределена с

$\mu=y$ и $\sigma^2=1$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X|Y=y]=y$ ¿??

$\mathbb{E}X = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] \Rightarrow \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$ 1-

$\mathbb{E}Y = \sum_{i=1}^{3} i \cdot \mathbb{P}(Y=i) = 1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + 3\cdot p_3 = \mathbb{E}X = p_1+2p_2+3p_3$ 1-

$\boxed{3.}$ а) Чрез $(X_n)_{n\geq1}$ въведете $X_n \xrightarrow{d} X$, където X е някаква сл. величина

Казваме, че ~~[illegible]~~ редицата X_n клони към случайната величина X по разпределение, ако всяка точка на непрекъснатост $F_X(x) = \mathbb{P}(X\leq x)$ е вярно, че

$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n\leq x) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathbb{P}(X\leq x) = F_X(x)$ и пишем

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

4. Броят на катастрофи в България за n единици от време се моделира с $Y_n \sim Poi(n)$.

1) Намерете пораждащата ф-я на Y_n.

$Y_n \sim Poi(n) \quad \to \quad P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$g_{Y_n}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$

$\Rightarrow \lambda = n \Rightarrow e^{n(s-1)}$

2.) За $n = 100\,000$ каква е вероятността (приблизително) да имаме повече от $100\,010$ катастрофи?

$Y_n \sim Poi(100\,000)$, $\quad P(Y_n > 100\,010) = ?$

$Y_n = X_1 + X_2 + X_3 \dots + X_{100\,000} = \sum_{i=1}^{100000} X_i, \quad X_i \sim Poi(1)$

$EX_i = \lambda = 1$

$DX_i = \lambda = 1$

ЦГТ: $\frac{Y_n - nM}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{100000} X_i - 100000 \cdot 1}{1\sqrt{100000}} = \frac{\sum_{i=1}^{100000} X_i - 100000}{100\sqrt{10}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$

$P(Y_n > 100\,010) = P\left(\frac{Y_n - 100\,000}{100\sqrt{10}} > \frac{100010 - 100\,000}{100\sqrt{10}}\right) =$

$= P\left(N(0,1) > \frac{10}{100\sqrt{10}}\right) = P\left(N(0,1) > \frac{1}{10\sqrt{10}}\right) \approx P\left(N(0,1) > \frac{1}{31,62}\right)$

$\approx 1 - P(N(0,1)) \le 0,03 = 1 - 0,5120 = 0,488$

$\frac{1}{31,62} \approx 0,03$ от таблицата =

$Y_n \sim Poi(n) \quad = \quad n = 1000000$

$Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000000} = \sum_{i=1}^{1000000} X_i \,, \quad X_i \sim Po(1)$

$EX_i = \lambda = 1$

$DX_i = \lambda = 1$

$$\mathbb{P}(Y_n > 1005000) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{1005000 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{Y_n - 1000000}{\cancel{\quad} 1000} > \frac{1005000 - 1000000}{1000} \right) =$$

ЦГТ

$$\approx \mathbb{P}\left(N(0,1) > \frac{5000}{1000} \right) = \mathbb{P}(N(0,1) > 5) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(N(0,1) \leq$$ липсва ли от таблицата за 5 ? ? ?

3) За $n = 1000000$ какво е вероятността (приблизително) да имаме повече от 1005000 катови рофи ?

3.

1.) Дайте обща дефиниция за максимално правдоподобна оценка

↳ Статистиката $\hat{\theta}(\vec{X})$, се нарича оценка по метода на м.п. ако $L(\vec{X}, \hat{\theta}) = \sup\limits_{\theta \in \Theta} L(\vec{X}, \theta)$, където Θ е множеството от допустими стойности за θ

↳ Ако $f_X(\vec{x}, \theta)$ е диференцируема по θ, то $\hat{\theta}$ е решение на $\frac{dL}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\ln L}{d\theta} = 0$

2.) Намерете максимално правдоподобна оценка за θ и намерете оценка по метода на моментите.

3.) Вярно ли е, че максимално правдоподобната оценка и оценката по метода на моментите са силно състоятелни?

→ Нека $U \sim U(0,1)$. Нека $X = U^{\theta}$, $\theta > 0$ е случайна величина, чийто параметър θ следва да определим.

6

1.) Дефинирайте точкова оценка за Θ

↳ функцията $\hat{\theta} = \Theta(\vec{X})$ се нарича статистика или още точкова оценка

2.) Дефинирайте понятието централна статистика и обяснете как тя се използва за конструиране на доверителен интервал?

↳ Нека $T(\vec{X}, \theta)$ е статистика. Казваме, че T е централна статистика, ако:

а) T е строго монотонна $(\uparrow \downarrow)$ по Θ

б) $P(T \leq x) = F_T(x)$ не зависи от Θ

↳ дов. интервал ?