41. ези →

щура ←

Или

Дискретни 2

20.03.20

а) $\mathbb{P}$(след 10 хвърляния да се намира на мястото от където е тръгнал) = ?

$X = 0$

⟺ да хвърлим равен брой езита и тури

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}$(5 езита и 5 тури) $= \binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$

б) на разстояние 2 крачки от началната си позиция = ?

$\mathbb{P}(X=2$ или $X=-2) = \mathbb{P}\left(\begin{matrix}\text{6 ези и 4 тури} \\ \text{6 тури и 4 ези}\end{matrix}\right) =$

$= 2\cdot\binom{10}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$

в) на 5 крачки пред началната си позиция

⟺ не може след четен брой, да сме на нечетна позиция.

+ От числата от 1 до 10 избираме случайно 3 от тях. Нека X е средното по големина от избраните 3

а) разпределението на X

б) $\mathbb{P}(X \geq 7) = ?$

в) $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 7) = ?$

г) $\mathbb{P}(|X-2| < 2) = ?$

д) $Y := (X-5)^2$, $\mathbb{P}(Y) = ?$

а)

X	2	3	4	5	6	7	8	9
P	$\frac{8}{\binom{10}{3}}$	$\frac{2\cdot 7}{\binom{10}{3}}$	$\frac{3\cdot 6}{\binom{10}{3}}$	$\frac{4\cdot 5}{\binom{10}{3}}$	$\frac{5\cdot 4}{\binom{10}{3}}$	$\frac{6\cdot 3}{\binom{10}{3}}$	$\frac{7\cdot 2}{\binom{10}{3}}$	$\frac{8\cdot 1}{\binom{10}{3}}$

2 → за лявото имаме
2 възможности 1 и 2

7 → за десното 7 → 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

б) $P(X \geq 7) = P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) =$

$$= \frac{18}{\binom{10}{3}} + \frac{14}{\binom{10}{3}} + \frac{8}{\binom{10}{3}} = \frac{18}{120} + \frac{14}{120} + \frac{8}{120} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10\cdot\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}$$

в) $P(3 \leq X \leq 7) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) =$

$$= \frac{14+18+20+20+18}{120} = \frac{9\cancel{0}}{12\cancel{0}} = \frac{3}{4}$$

f) $\mathbb{P}(|X-2|<2) = \mathbb{P}(0<X<4) = \mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3) = \frac{8+14}{120} = \frac{22}{120} = \frac{11}{60}$

$X-2<2$

$X<2+2$

$X<4$

g) $Y := (X-5)^2$; $\mathbb{P}(Y) = ?$

X	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	9	4	1	0	1	4	9	16

Y	0	1	4	9	16
P_Y	$\frac{20}{120}$	$\frac{38}{120}$	$\frac{32}{120}$	$\frac{22}{120}$	$\frac{8}{120}$

$\mathbb{P}(X=5)$ $\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=6)$

$\boxed{40.}$ запата 5лв и хвърля 2 зара

2 6ули → 100лв → печели 95лв.

1 6уля → 5лв → запомнил е 5лв ⇒ няма печалба на 0 е

→ няма нито една 6уля ⇒ губи 5лв

$\mathbb{E}$ печалбата = ?

X = "# 6ули"

X	2	1	0
печалба	95	0	−5
$\mathbb{P}$ печалба	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

$$\mathbb{P}(2 \text{ 6ули}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}(1 \text{ 6уля}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36}$$

$$\mathbb{P}(0 \text{ 6ули}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

$$\mathbb{E} \text{ печалба} = 95\cdot\frac{1}{36} + 0\cdot\frac{10}{36} + (-5)\cdot\frac{25}{36} =$$

$$= \frac{95}{36} - \frac{125}{36} = \frac{30}{36} = -\frac{5}{6}$$

↳ Играта е справедлива, когато очакването е 0

⇒ тази не е справедлива

$\boxed{+}$ Случайна величина X в $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ с равномерно вероятност

$\mathbb{E}[X] = ?$

$Var[X] = ?$

а) $x_i = \frac{i-1}{n-1}$, $i = 1, \dots, n$

б) $x_i = a + (b-a)\cdot\frac{i-1}{n-1}$, $i = 1, \dots, n$, $a, b \in \mathbb{R}: a < b$

) $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{1}{\cancel{n(n-1)}} \cdot \frac{\cancel{(n-1)} \cdot \cancel{(n-1+1)}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 =$$

$$= \frac{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-1+1)}(2(n-1)+1)}{\cancel{n}(n-1)^2 \cdot 6} = \frac{2n-1}{6(n-1)}$$ #?

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2n-1}{6(n-1)} - \frac{1}{4}$$

δ) $X = \frac{i-1}{n-1}$

* $X_{\delta)} = a + (b-a) X_{a)}$

$\mathrm{Var}(X_\delta) = \mathrm{Var}(a + (b-a) X_a)$

$\hookrightarrow \mathbb{E}[X] = a + (b-a) \cdot \mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \rightarrow a + (b-a) \cdot \frac{1}{2} = a + \frac{b-a}{2} =$

$$= \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$\mathrm{Var}(X_\delta) = \underbrace{(b-a)}_{?}{}^2 \cdot \mathrm{Var}(X_\delta)$

Var

#ask!

$\boxed{43}$ а) Вход A лева

е за на n-тия път печели 2^n лева

X	1	2	3	...
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...

$Y = 2^X - A$ → първо началния залог

$\mathbb{E}[Y] = \sum_{n=1}^{n} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} - A = \infty$ → очакването не е всичко

St. Petersburg Paradox

б) залог $A \begin{cases} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \text{печели } 2A \\ \xrightarrow{\frac{1}{2}} 0 \end{cases}$

$1 \begin{cases} \xrightarrow{\frac{1}{2}} 2 \text{ (чисто } 2-1=1) \\ \xrightarrow{\frac{1}{2}} -1 \to \text{загуба} \end{cases}$ $2 \begin{cases} \xrightarrow{\frac{1}{2}} 4 \text{ чисто } (4-1-2)=1 \\ \xrightarrow{\frac{1}{2}} -3, \text{ загуба} \end{cases}$ $4 \begin{cases} \to 8 \text{ чисто } (8-1-2-4=1 \\ \to -7, \text{ загуба} \end{cases}$ 8 ....

X = „ходове на който печели"

X	0	1	2	3	4	...
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

$\mathbb{E}\text{ печалба} = \frac{1}{2}\cdot(2-1) + \frac{1}{4}\cdot(4-1-2) + \frac{1}{8}(8-1-2-4) + \dots =$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^n} = 1$ ✓ винаги печалбата ще е 1

$* \; Y = 2^X A - (A + 2A + 2^2 A + \dots + 2^{X-1} A) =$
$= 2^X A - A(2^X - 1) = A$

$\mathbb{E}[Y] = A > 0$

$* \; 1 + 2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

58. 3 бели и 2 черни топки в урна

X – номерът на изтеглените на първата бяла топка

Y – номерът на първата черна след първата бяла

Y=6, ако няма такава

а) разпределението

Y\X	1	2	3	
2	$\frac{3}{10}$	0	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{10}$
5	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
6	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	

$\mathbb{P}(X=1, Y=2) = (б, ч) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=3) = (ббч) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{30} = \frac{2}{10}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=4) = (бббч) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

б) $\mathbb{P}(Y>2 \mid X=1) = 1 - \mathbb{P}(Y=2 \mid X=1) =$

$= 1 - \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=2)}{\mathbb{P}(X=1)} =$

$= 1 - \frac{3/10}{6/10} = 1 - \frac{3}{6} = \frac{6-3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

или $\mathbb{P}(Y>2 \mid X=1) = \frac{\mathbb{P}(Y>2, X=1)}{\mathbb{P}(X=1)} = \frac{\mathbb{P}(Y=3, X=1) + \mathbb{P}(Y=4, X=1)}{\mathbb{P}(X=1)} =$

$= \frac{2/10 + 1/10}{6/10} = \frac{3/10}{6/10} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(Y=3 \mid X<3) = \frac{\mathbb{P}(Y=3, X<3)}{\mathbb{P}(X<3)} = \frac{\mathbb{P}(Y=3, X=1) + \mathbb{P}(Y=3, X=2)}{\frac{6}{10} + \frac{3}{10}} =$

$= \frac{2/10 + 1/10}{9/10} = \frac{3/10}{9/10} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

- Независими ли са = ?

$$P(X=3, Y=2) = 0 \overset{?}{\neq} P(X=3)\, P(Y=2) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

$\Rightarrow X \not\perp Y \to$ не са независими

44. A хвърля 3 монети
B хвърля 2 монети

$X =$ „брой езита на A" $\sim Bin(3, \frac{1}{2})$

$Y =$ „брой езита на B" $\sim Bin(2, \frac{1}{2})$

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$
1	$\frac{2}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{2}{32}$
2	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

$X > Y$

X	0	1	2	3
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

б)

$X \sim Bin(3, \frac{1}{2})$

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Y	0	1	2
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

а) $P(X > Y) = \frac{3+3+1+6+2+1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \to$ A да спечели

б) $P(Y=1 \mid X > Y) = \frac{P(Y=1 \cap X>Y)}{P(X>Y)} = \frac{P(Y=1, X=2) + P(Y=1, X=3)}{P(Y>X)} =$

$$= \frac{6/32 + 2/32}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{8}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

в)

A	2	−3
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\Rightarrow E[A] = 2 \cdot \frac{1}{2} + (-3) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow E[B] = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow$ zero-sum-game $\Rightarrow$ печалба A + печалба B = 0

$\boxed{7}$ $X \perp\!\!\!\perp Y$

X	-1	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	1	3	5
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\mathbb{E}$ и Var , разпределение ($\mathbb{P}_{2X+Y+1}$, $\mathbb{P}_{XY}$)

а) $2X+Y+1$

б) XY

$\mathbb{E}[X] = -1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ $\qquad \mathbb{E}[X^2] = (-1)^2\cdot\frac{1}{2} + 1^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

$D[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 1 - 0 = 1$

$\mathbb{E}[Y] = 1\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{4} + 5\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$\mathbb{E}[Y^2] = 1^2\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot\frac{1}{4} + 25\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{36}{4} = \frac{18}{2} = 9$

$D[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = 9 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 9 - \frac{25}{4} = \frac{36-25}{4} = \frac{11}{4}$

$\mathbb{E}[2X+Y+1] = 2\cdot\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=0} + \mathbb{E}[Y] + 1 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{5}{2} + \frac{2}{2} = \frac{7}{2}$

$D[2X+Y+1] = 2\cdot D[X] + D[Y] + D[1] = 2\cdot 1 + \frac{11}{4} = \frac{13}{4}$? 4 вместо 2 на упр. ?

$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = 0\cdot\frac{5}{2} = 0$

$D(XY) = \mathbb{E}[(XY)^2] - (\mathbb{E}[XY])^2 =$

$= \mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2] - 0 = 1\cdot 9 - 0 = 9$

50 5 бели и 3 черни, теглим докато се появи бяла

$X =$ „# на изтеглени черни топки"

a) без връщане

X	0	1	2	3
	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}$

$$\mathbb{E}X = 0\cdot\frac{5}{8} + 1\cdot\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\right) + 2\cdot\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\cancel{2}}{7}\cdot\frac{5}{\cancel{6}}\right) + 3\cdot\left(\frac{\cancel{3}}{8}\cdot\frac{\cancel{2}}{7}\cdot\frac{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}}\right) =$$

$$= 0 + \frac{15}{56} + \frac{10}{56} + \frac{3}{56} = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{15}{56} + \frac{20}{56} + \frac{9}{56} = \frac{44}{56}$$

$$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{44}{56} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{44}{56} - \frac{1}{4} = \frac{44-14}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

б) с връщане

↳ брой неуспехи до първи успех

$\sim Ge(p)$

$$\mathbb{E}X = \frac{q}{p} = \frac{1-\frac{5}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$$

$$DX = \frac{q}{p^2} = \frac{1-\frac{5}{8}}{\left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{25}{64}} = \frac{64\cdot 3}{8\cdot 25} = \frac{24}{25}$$

↳ Нека $X_1, \dots, X_{1000}$ са случайни величини, брой изтеглени черни топки при 1000 независими опита

$$\mathbb{E}X = 1000\ \mathbb{E}X_1 = \begin{cases} 1000\cdot\frac{1}{2} = 500 & \text{за a)} \\ 1000\cdot\frac{3}{5} = \frac{3000}{5} = 600 & \text{за б)} \end{cases}$$

$$DX = 1000\cdot DX_1 = \begin{cases} 1000\cdot\frac{15}{28} = 535{,}71 \\ 1000\cdot\frac{24}{25} = 960 \end{cases}$$

* $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > 900\right) = \frac{\mathbb{E}X}{900} = \frac{500}{900} = \frac{5}{9}$ → от неравенството на Марков, което не дава много добър резултат

* прилагане неравенство на Чебишев

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{1000} X_i\right] > 400\right) \le \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{1000} X_i - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{1000} X_i\right]\right| > 400\right) \le$$

$900 - 500 = 400$, $500 = \mathbb{E}X$

$$\le \frac{540}{400^2} \approx 0{,}0034$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{1000} X_i - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{1000} X_i\right]\right| > 300\right) \le \frac{960}{300^2} \approx 0{,}01$$

$300 = 900 - 600$, $600 = \mathbb{E}X$

★ ★ ★

* Неравенство на Марков

$$\boxed{\mathbb{P}(X > a) \le \frac{\mathbb{E}[X]}{a}}, \quad \forall a > 0,\ X \ge 0$$

* Неравенство на Чебишев

$$\boxed{\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > a) \le \frac{Var(X)}{a^2}}, \quad \forall a > 0$$

* д-во:
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X > a\}}] + \mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X \le a\}}] \\ &\ge \mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X > a\}}] \\ &\ge \mathbb{E}[a \cdot 1_{\{X > a\}}] \\ &= a \cdot \mathbb{P}(X > a)\end{aligned}$$

* $X_1 = X \cdot 1_{\{X > a\}} + X \cdot 1_{\{X \le a\}}$

$X \cdot 1_{\{X > a\}} \ge a \cdot 1_{\{X > a\}}$

+

03.04.202

$Y \backslash X$	-1	0	1	
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$
	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	

а) $\mathbb{P}_X, \mathbb{P}_Y = ?$

б) $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $Var(X)$, $Var(Y) = ?$

в) $Cov(X,Y)$, $\rho_{XY} = ?$

г) $X \perp\!\!\!\perp Y = ?$

д) $Z = X + 2Y$, wor. $\mathbb{E}[Z]$, $Var[Z]$:

б) $\mathbb{E}[X] = -1 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{5}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} = -\frac{1}{10}$

$\mathbb{E}[Y] = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{10}$

$\mathbb{E}[X^2] = 1 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} = \frac{5}{10}$

$\mathbb{E}[Y^2] = \frac{7}{10}$

$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{5}{10} - \left(-\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{5}{10} - \frac{1}{100} = \frac{49}{100}$

$Var(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = \frac{7}{10} - \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{7}{10} - \frac{49}{100} = \frac{70-49}{100} = \frac{21}{100}$

в) $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = 0 - \left(-\frac{1}{10} \cdot \frac{7}{10}\right) = \frac{7}{100}$

$\mathbb{E}[XY] \downarrow$ $0 = ?$ #check

$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{\frac{7}{10}}{\sqrt{\frac{49}{100}}\sqrt{\frac{21}{100}}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{21}}}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{21}}{21}}}$

д) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + 2\,\mathbb{E}[Y] =$

$Var(Z) = Var(X) + 4\,Var(Y) + 4\,Cov(X,Y)$

+ хвърляме 2 пъти монета

X – # ези

Y – # тури

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

$\rho_{X,Y} = ?$

$Y = 2 - X$

$|\rho_{XY}| = 1$

$$Cov(X,Y) = Cov(X, 2-X) = Cov(X,2) - Cov(X,X) =$$
$$= 0 - Var(X) = -Var(X)$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{-Var(X)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = -1$$ #ask ?

66. стандартен зар

X – сума от първите $n-1$ хвърляния

Y – сума от последните $n-1$ хвърляния

число от 1 до 6, хвърляме n пъти зара

$Cor(X,Y) = ?$ $$Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

// $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

// $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

// $Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2$

X_i са точките на i-тия зар

$X_1, \dots X_n$ са iid

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i = X_1 + Z$$

$$Y = \sum_{i=2}^{n} X_i = X_n + Z$$

$$Z = \sum_{i=2}^{n-1} X_i$$

$$Cov(Y, Y) = Cov(X_1 + Z, X_n + Z) =$$

$$= \underbrace{Cov(X_1, Z)}_{0} + \underbrace{Cov(X_1, X_n)}_{0} + Cov(Z, Z) + \underbrace{Cov(Z, X_n)}_{0} =$$

why #ask ?

$$= Var(Z) = \sum_{i=2}^{n-1} Var(X_i) = (n-2) Var(X_i)$$

$$Var(Y) = Var(X) = \sum_{i=1}^{n-1} Var(X_i) = (n-1) Var(X_i)$$

$$cor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{(n-2) Var(X_1)}{(n-1) Var(X_1)} = \frac{n-2}{n-1} \xrightarrow{\text{клони към единица}} 1$$

0.1. Хвърляме 4 пъти монета

X – # ези-та, паднали се при първите 3 хвърляния

Y – # ези-та, паднали се при последните 2 хвърляния

Y\X	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

X	0	1	2	3
$P_{X\mid Y=0}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
$P_{X\mid Y=1}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P_{X\mid Y=2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$\frac{0}{\frac{1}{4}} = 0$

$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

$\frac{\frac{2}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

$E[X\mid Y]$	$E[X\mid Y=0] = 1$	$E[X\mid Y=1] = 1,5$	$E[X\mid Y=2]$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 0 = 1$

Твърдение: Ако X е целочислена сл. вел., тогава 10.04

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

#?

- д-во:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \mathbb{P}(X = m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}(X = m) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} m \cdot \mathbb{P}(X = m) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

$\boxed{+}$ $X_1, \dots, X_n$ са i.i.d. сл. вел.

$X_{max} := \max\{X_1, \dots, X_n\}$

$X_{min} := \min\{X_1, \dots, X_n\}$

Изразете: $F_{X_{max}}$ и $F_{X_{min}}$ чрез F_{X_1}

$$F_{X_{max}}(x) = \mathbb{P}(X_{max} \leq x) =$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)\mathbb{P}(X_2 \leq x) \dots \mathbb{P}(X_n \leq x) =$$

$$= \left(\mathbb{P}(X_1 \leq x)\right)^n$$

$$F_{X_{min}}(x) = \mathbb{P}(X_{min} \leq x) =$$

→ т.е. поне едно от $X_1, \dots, X_n$ да е $< X$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_{min} > x) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x) = 1 - \left(\mathbb{P}(X_1 > x)\right)^n =$$

$$= 1 - \left(1 - F_{X_1}(x)\right)^n$$

$\boxed{48.}$ $\mathbb{P}(H_0) = \frac{1}{2}$ H_0: $p_0 = 1/2$

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{2}$ H_1: $p_1 = 2/3$

A = „събитието от 200 бернулиеви опита (с вероятност за успех p) да имаме 120 успеха"

$\mathbb{P}(H_0|A) = ?$
$\mathbb{P}(H_1|A) = ?$ → Това са двете апостериорни вероятности, които трябва да сметнем и по-голямото число е това, което търсим

$$\mathbb{P}(H_0|A) = \frac{\mathbb{P}(H_0 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_0)\,\mathbb{P}(H_0)}{\mathbb{P}(A|H_0)\,\mathbb{P}(H_0) + \mathbb{P}(A|H_1)\,\mathbb{P}(H_1)} =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(A|H_0)\,\mathbb{P}(A|H_1)} \cdot \binom{200}{120} \cdot \frac{1^{120}}{2^{200}}$$

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A|H_0)\,\mathbb{P}(A|H_1)} \cdot \binom{200}{120} \cdot \frac{2^{120}}{3^{200}}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbb{P}(H_1|A) > \mathbb{P}(H_0|A)}$$

$X_1 \sim Bin(n_1, p)$

$X_2 \sim Bin(n_2, p)$

$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

$X_1 + X_2 \sim ?$ → разпределението на сумата?

*да се докаже, че разпределението е биномно

$$\mathbb{P}(X_1+X_2=k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X_1+X_2=k, X_1=i) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X_2=k-i \mid X_1=i)\, \mathbb{P}(X_1=i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X_2=k-i)\, \mathbb{P}(X_1=i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n_2}{k-i} \cdot p^{k-i} (1-p)^{n_2-(k-i)} \cdot$$

$$\cdot \binom{n_1}{i} \cdot p^{i} (1-p)^{n_1-i} =$$

$$= p^{k} \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}}_{\binom{n_1+n_2}{k}} \Rightarrow X_1+X_2 \sim Bin(n_1+n_2, p)$$

Опция 2:

$$g_{X_1+X_2}(s) = g_{X_1}(s)\, g_{X_2}(s) = (sp+(1-p))^{n_1} (sp+(1-p))^{n_2} =$$

$$= (sp+(1-p))^{n_1+n_2} \rightarrow$$ което е пораждащата ф-я на $Bin(n_1+n_2, p)$

$\boxed{+}$ $N \sim Bin(M, q)$, $p, q \in [0,1]$

$X \mid N = n \sim Bin(n, p) \to P(X=k \mid N=n) = \binom{n}{k} p^k (1-q)^{n-k}$

↳ Да се докаже, че $X \sim Bin(M, pq) = ?$

↳ $P(X=k) = ?$

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{M} P(X=k \mid N=n)\, P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=k}^{M} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{M}{n} q^n (1-q)^{M-n} =$$

$$= (pq)^k \sum_{n=k}^{M} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{M!}{n!\,(M-n)!} ((1-p)q)^{n-k} \cdot (1-q)^{M-n} \, (M-k)!; =$$

$$= \binom{M}{n} (pq)^k \sum_{n=k}^{M} \binom{M-k}{n-k} ((1-p)q)^{n-k} (1-q)^{M-n} =$$

$$= \binom{M}{n} (pq)^k \sum_{j=0}^{M-k} \binom{M-k}{j} ((1-p)q)^j (1-q)^{(M-n)-j} =$$

$$= \binom{M}{k} (pq)^k \Big(\underbrace{(1-p)q + (1-q)}_{1-pq} \Big)^{M-k}$$

опция 2

↳ $$g_X(s) = E[s^X] = E[E[s^X \mid N]] = \sum_{n=0}^{M} E[s^X \mid N=n] \cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{M} (sp + (1-p))^n \cdot \binom{M}{n} q^n (1-q)^{M-n} =$$

$$= ((sp + (1-p))q + (1-q))^M = (spq + (1-pq))^M$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{0{,}2}_{\text{успехна } A} \cdot \underbrace{(0{,}8)^{k-1}}_{\text{след } k-1 \text{ неуспехи}} \cdot \underbrace{(0{,}7)^{k}}_{k \text{ неуспехи на } B}$$

↳ Вероятността за неуспех, при един опит (два хода – един за A и един за B) $\Rightarrow 0{,}8 \cdot 0{,}7 = \underline{\underline{0{,}56}}$

Нека $Z \sim Ge(0{,}44) \Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}Z}_{\text{неуспехите + изстрела, който оцелва}} = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}44} = \underline{\underline{2{,}27}}$

$\mathbb{E}\,2Z = 2 \cdot \mathbb{E}Z = 2 \cdot 2{,}27 = \underline{\underline{4{,}54}}$

55. A: 0.2 $\quad \mathbb{P}$(A да улучи, а B − не) = ?

B: 0.3 $\quad$ среден брой изстрели = ?

• Нека A_k, $k=1,2,\dots$, са съответно събитията, в които A успява (за първи път) на k-ия ход, а B не улучва във всичките k хода. Считаме, че всичките общо преди k са неуспешни

→ $X \sim G(0{,}2)$ и $Y_k = \{\#$ неуспехи на B за k хода$\}$

$A_k = \{X = k-1, Y_k = k\} = \{X = k-1\} \cap \{Y = k\}$

→ Вероятността A да ~~[illegible]~~ улучи, а B не е:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k-1)\,\mathbb{P}(Y_k = k) =$$

$\boxed{+}$ $X \sim Ge(p)$
$Y \sim Ge(p)$

$X \perp\!\!\!\perp Y$

$\min(X,Y) = ?$

$\hookrightarrow$ $\mathbb{P}(\min\{X,Y\} \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k, Y \geq k) =$

$= (1-p)^k (1-p)^k = (1-(2p-p^2))^k$ i.e. $\min(X,Y) \sim Ge(2p-p^2)$

$\hookrightarrow$ $\mathbb{P}(\max\{X,Y\} < k) = \mathbb{P}(X<k, Y<k) =$

$= (1-\mathbb{P}(X \geq k))(1-\mathbb{P}(Y \geq k)) =$

$= (1-(1-p)^k)(1-(1-p)^k) =$

$= 1-(1-p)^k-(1-p)^k+(1-p)^{2k} =$

$= 1 - 2(1-p)^k + (1-p)^{2k} =$

$= (1-(1-p)^k) + (1-p)^{2k} =$ #?

$= (1-(1-p)^k)^2$

65.

$X_1 \sim Ge\left(\frac{n}{n}\right)$

$X_2 \sim Ge\left(\frac{n-1}{n}\right)$

$\vdots$

$X_n \sim Ge\left(\frac{1}{n}\right)$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i + n$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i + 1] = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} =$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

!

$\boxed{46.}$ 2 кутии кибрит с по n клечки

$\mathbb{P}($другата кутия да има точно $k \le n$ | първата е празна$) = ?$

$\hookrightarrow X_1 \sim NB(n+1, \frac{1}{2})$

$X_2 \sim NB(n+1, \frac{1}{2})$ $\to$ проследвай броя на изтеглянията съответно от кутия 2 и 1, докато пушачът установи, че едната кутия е празна

$\Rightarrow \{X_1 = n-k\} \cup \{X_2 = n-k\}$ – е събитието пушачът за пръв път забелязва, че едната кутия е празна, докато в другата има k останали клечки.

Понеже $\{X_1 = n-k\} \cap \{X_2 = n-k\} = \varnothing$ имаме

$$\mathbb{P}(\{X_1 = n-k\} \cup \{X_2 = n-k\}) = \mathbb{P}(X_1 = n-k) + \mathbb{P}(X_2 = n-k) =$$

$$= 2 \cdot \binom{(n+1)+(n-k)-1}{n-k} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^{n-k}} =$$

why $n-k$?

$$= \binom{2n-k}{n-k} \cdot \frac{1}{2^{2n-k}}$$

52. 7 лампи, 3 дефектни, 4 за проверка

X = „# на изпробваните дефектни лампи"

↳ разпределение на X и очакване = ?

$X \sim HG(M, N, n)$

N – бъкупен брой

M – обекти с тази характеристика

n – извадка

$X \sim HG(3, 7, 4)$ → разпределение

$E[X] = n \cdot \frac{M}{N} = 4 \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{7}$

7. 52 карти, тегли случайно 13 от тях

Каква е P 2 от избраните да са червени, ако:

а) теглим с връщане

б) теглим без връщане

26 черни и 26 червени

↳ X = „# изтеглени червени"

а) $X \sim Bin(13, \frac{1}{2}) \Rightarrow P(X=2) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$

$= \frac{13!}{2!\,11!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{13 \cdot 12 \cdot \cancel{11!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{11!}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2048} = \frac{78}{8192} \approx 0{,}01$

б) ↳ $X \sim HG(\overset{M}{26}, \overset{N}{52}, \overset{n}{13}) \Rightarrow P(X=2) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \approx 0{,}004$

$\boxed{\mathrm{Т}}$ $X_1 \sim Po(\lambda_1)$

$X_2 \sim Po(\lambda_2)$

$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

$X_1 + X_2 \sim ?$ → какво е разпределението на сумата?

↳ $g_X(s) = g_{X_1}(s)\, g_{X_2}(s) = e^{\lambda_1(s-1)} e^{\lambda_2(s-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)} \Rightarrow X \sim Po(\lambda_1 +$

начин 2

↳ $P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X_2 = k-i, X_1 = i) = \sum_{i=0}^{k} P(X_2 = k-i)\, P(X_1 = i) =$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} \cdot \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^{i}}{i!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^{i} \lambda_2^{k-i} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot (\lambda_1+\lambda_2)^k \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$$

18.04

$\boxed{\mathrm{Т}2.}$ 2 зара се хвърлят последователно 5 пъти

$X =$ " # хвърляния, при които сумата е 6 "

$P(X=2) = ?$ $EX = ?$

$\left.\begin{array}{l} 1+5 \\ 2+4 \\ 3+3 \\ 4+2 \\ 5+1 \end{array}\right| \frac{5}{36} = p$ $\Rightarrow X \sim Bin\left(5, \frac{5}{36}\right)$

$$P(X=2) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{5}{2} \left(\frac{5}{36}\right)^2 \left(\frac{31}{36}\right)^3 =$$

$$= \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{25}{1296} \cdot \frac{29791}{46656} =$$

$$= \frac{7\,447\,750}{60\,466\,176} \approx 0,123$$

$EX = n \cdot p = 5 \cdot \frac{5}{36} = \frac{25}{36}$

47. n пъти стреля последователно
торпедо улучва с вероятност p
m отсека
Вероятността да бъде потопен корабът =?

↳ X = „# наводнени отсека" $\mathbb{P}(X \geq 2) = ?$

$\underbrace{|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|}_{m \text{ отсека}}$ $\qquad \mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2)$

↳ да не е потопен

$\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(X = 0) \cup \mathbb{P}(X = 1) =$

$= \underbrace{(1-p)^n}_{\text{брой неуспехи или } x=0 \text{ и } t=1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}}_{k \text{ улучвания}} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^k \cdot m$ → кой отсек сме фиксирали

↓ винаги когато улучи попада в един отсек

$p(\text{да потоне}) = m \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^k - (1-p)^n =$

$= m \cdot \left(\frac{p}{m} + 1 - p\right)^n - m(1-p)^n$ → # ?

69. Хвърлят се 2 зара

X = „сумата от падналите се точки"

~, $\mathbb{E}$ и D = ?

↳

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

→ ~

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{36}(2+12) + \frac{2}{36}\cdot(3+11) + \frac{3}{36}\cdot(4+10) + \frac{4}{36}\cdot(5+9) + \frac{5}{36}(6+8) + 7\cdot\frac{6}{36}$$

$$= \frac{14}{36} + \frac{28}{36} + \frac{42}{36} + \frac{56}{36} + \frac{70}{36} + \frac{42}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 \Rightarrow \mathbb{E}X_1 = 3,5$

$\mathbb{E}X_2 = 3,5$

↳ Понеже X_1 и X_2 са независими, то и тяхната дисперсия е една и с. $\Rightarrow DX_1 = DX_2$

$$DX_1 = DX_2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} - (3,5)^2 =$$

$$= \frac{90}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{90}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$DX = DX_1 + DX_2 = 2\cdot\frac{35}{12} = \frac{35}{6}$$

б)

X_1	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

→

1,6 ; 6,1 $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ ×2

3,4 ; 4,3 $\frac{1}{64}$ ×2

2,5 ; 5,2 $\frac{1}{64}$ ×2

$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{2}{64}+\frac{2}{64}$

$\frac{12}{64}$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{1}{16}$

#?

2 и 1, 1 и 2

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$

$\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{2}{32}$

1 и 3, 3 и 1, 2 и 2

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=$

$\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{5}{64}$

1 и 4, 4 и 1, 2 и 3, 3 и 1

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}=$ $\frac{6}{64}$

1 и 5, 5 и 1, 3 и 3, 2 и 4, 2 и 4

$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\right)\cdot 2+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}=$

$\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{3}{64}=\frac{7}{64}$

51. $p = 0{,}001$

$X =$ „# улучвания"

$\mathbb{P}(X \geq 2) = ?$, направени са 5000 изстрела?

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) =$$

$$= 1 - \binom{5000}{0} p^0 (1-p)^{5000} - \binom{5000}{1} p^1 (1-p)^{4999} =$$

$$= 1 - e^{-5} - 5000 \cdot \frac{1}{1000} \cdot e^{-5} = \underline{\underline{1 - 6e^{-5}}}$$

$\hookrightarrow$ за малки x: $(1+x)^{\frac{1}{x}} \approx e$

$$\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{5000} = \frac{1}{e^5} = e^{-5}$$

53. средно 2 спада земетресения на месец

$\mathbb{P}($за 3 месеца < 4 спада земетресения$) = ?$

$X_1 =$ „# земетресения на месец"

$\mathbb{E}X = 2$, $\lambda = 2$

$*$ $X_1 \sim Po(\lambda)$

$X_2 \sim Po(\mu)$

$X_1 + X_2 = Po(\lambda + \mu)$

$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 < 4) = ?$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 < 4) = \mathbb{P}(Po(6) < 4) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \underline{\underline{\sum_{i=0}^{3} \frac{6^k}{k!} e^{-6}}}$$

19.04 → само задачи
консултация преди
контролно