* **деф:** Случаен експеримент наричаме опит или експеримент, при който не може предварително да определим кой от възможните изходи ще се сбъдне.
Всеки възможен елементарен изход, означаваме с ω и наричаме елементарно събитие.

* **деф:** С Ω означаваме множеството от всички елементарни събития на даден случаен експеримент

* **деф:** Нека Ω е множество (съвкупност от ел. събития), всяко подмножество $A \subseteq \Omega$ наричаме събитие.

* **деф:** ("или") $A, B \subseteq \Omega$, тогава под $A \cup B$ разбираме всички $\omega \in A$ или $\omega \in B$.

* **деф:** ("и") $A, B \subseteq \Omega$, тогава под $\omega \in A \cap B$ разбираме $\omega \in A$ и $\omega \in B$

* **деф:** ("допълнение") $A \subseteq \Omega$, под допълнение на събитието A разбираме всички $\omega \notin A$ и бележим с A^c или $\bar{A}$.

* **деф:** Нека Ω е съвкупност от елементарни събития и $\mathcal{A}$ е колекция от събития (т.е. от подмножества на Ω). Наричаме $\mathcal{A}$ σ-алгебра, ако:

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

iii) Ако $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \geq 1$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

и в частност ако $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

* Следствие: Ако $\mathcal{A}$ е σ-алгебра и $A_i \in \mathcal{A}$, за $\forall i \geq 1$, то $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Деф: Ако β е произволна колекция от събития от Ω, то $\sigma(\beta)$ е най-малката σ-алгебра, такава, че $\beta \subseteq \sigma(\beta)$, т.е. за всяко $B \in \beta$, $B \in \sigma(\beta)$,

$\Rightarrow$ най-малката σ-алгебра = Борелова алгебра

Деф: Ако $\mathcal{A}$ е σ-алгебра, то $A \in \mathcal{A}$ се нарича атом, ако от $B \subseteq A$ и $B \in \mathcal{A}$, следва, че $B = \emptyset$, т.е. не съществува нетривиално подсъбитие на $\mathcal{A}$, което е част от σ-алгебрата.

* **Деф:** Нека $\mathcal{A}$ е σ-алгебра върху множество от елементарни събития Ω. Тогава изображението $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ се нарича вероятност/вероятностна ф-я, ако:

!

i) $P(\Omega) = 1$

ii) ако $A \in \mathcal{A}$, то $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

iii) ако A_i, $\forall i \geq 1$ са елементи на $\mathcal{A}$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$, за $\forall i \neq j$, то $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

непресичащи се събития

* **Твърдение:** Нека $\mathcal{A}$ е σ-алгебра и $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ е вер. ф-я. Тогава:

а) $P(\emptyset) = 0$

б) Ако $A \subseteq B$, то $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$

в) Ако $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$ → монотонност

г) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

д) Ако $A_i \in \mathcal{A}$, то $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ → пресичащи събития

е) Ако $A_i \in \mathcal{A}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots$, то $P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$

непрекъснатост

↳ границата на индивидуалните вероятности е нула!

* **Деф:** Нека Ω е множество от елементарни събития, $\mathcal{A}$ е σ-алгебра и $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$ е вероятностна ф-я. Тогава наредената тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ се нарича вероятностно пространство.

* **Деф:** Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство и $A \in \mathcal{A}$ е такова, че $\mathbb{P}(A) > 0$. Тогава
$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}, \quad \forall B \in \mathcal{A}$$
се нарича условна вероятност.

* **Деф:** (Независимост). Нека A и B са две събития в $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, т.е. $A, B \in \mathcal{A}$. Тогава A и B са независими $(A \perp\!\!\!\perp B)$ ако
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$
$*\ \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B) \to$ общ случай

* **Деф** (независимост в съвкупност): $A_1, \dots, A_n$ са n събития. Тогава $A_1, A_2, \dots, A_n$ са независими в съвкупност ако $\forall$ $M \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ и $|M| \geq 2$, то
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in M} A_i\Big) = \prod_{i \in M} \mathbb{P}(A_i)$$

* **Деф** (пълна група от събития): Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство. Тогава $H_1, \dots, H_n$ ($H_1, H_2, \dots$) образуват пълна група от събития, ако:

краен брой / безкраен брой

а) $H_i \in \mathcal{A}$, за $i \leq n$ $\quad (H_i \in \mathcal{A},\ i \geq 1)$ $\to$ безкраен брой

б) $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega \quad \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega\Big)$ $\to$ • означава, че H_i са непресичащи се

! те са непресичащи се и изчерпват цялото вероятностно пространство

* Теорема (пълната вероятност): Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство. Нека $H_1, \dots, H_n$ $(H_1, H_2, \dots)$ е пълна група от събития. Нека $A \in \mathcal{A}$. Тогава

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \mathbb{P}(H_i)\,\mathbb{P}(A|H_i),$$ → ако е ∞

с конвенцията, че $\mathbb{P}(A|H_i) = 0$ ако $\mathbb{P}(H_i) = 0$

* Теорема (Бейс): Имаме $H_1, \dots, H_n$ $(H_1, H_2, \dots)$, които са пълна група от събития в $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Нека $A \in \mathcal{A}$ и $\mathbb{P}(A) > 0$. Тогава

$$\boxed{\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_k)\,\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_k)\,\mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^{n(\infty)} \mathbb{P}(H_i)\,\mathbb{P}(A|H_i)}}$$

* деф (случайна величина): Нека V е вероятностно пространство. Тогава $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е случайна величина, тогава когато $\forall a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ е в сила $X^{-1}((a,b)) \in \mathcal{A}$, където $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$, $B \in \mathbb{R}$. Т.е. трябва да имаме възможността да кажем каква е вероятността x да е между a и b.

→ Ако X е сл. вел. Тогава $\forall a < b$

$X^{-1}((a,b))$, $X^{-1}([a,b])$, $X^{-1}((a,b]) \in \mathcal{A}$ → всякакви интервали

$X^{-1}((b,\infty)) \in \mathcal{A}$

* **Теорема: (Свойства на случайни величини):**

Нека V е вероятностно пространство и X и Y са случайни величини ($X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$) (в едно вер. пространство).

Тогава е в сила:

а) cX е случайна величина, $\forall c \in \mathbb{R}$

б) $X \pm Y$ са случайни величини във V.

$aX \pm bY$ е случайна величина, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

в) XY е случайна величина

г) ако $\mathbb{P}(Y=0)=0$, то $\frac{X}{Y}$ е случайна величина

Це казва, че Y не може да е 0, т.е. е добре дефинирано

* **Деф (индикаторна функция):** Нека Ω е множество от елементарни събития и $H \subseteq \Omega$. Тогава 1_H се нарича индикаторна функция, ако:

$$1_H = \begin{cases} 1, & \text{ако } \omega \in H \\ 0, & \text{ако } \omega \notin H \end{cases}$$

, грубо казано: $1_H : \Omega \to \mathbb{R}$

* **Лема:** Нека V е вер. прост. и $H \subseteq \Omega$, $H \in \mathcal{A}$. Тогава $X = 1_H$ е случайна величина. ($1_H : \Omega \to \mathbb{R}$)

* **Деф (дискретна сл. величина):** Нека V е вер. прост. и $\overline{X}$ и $\overline{H}$ са дадени. Тогава $X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{H_i}(\omega)$ ($X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 1_{H_i}$) се нарича дискретна случайна величина.

Кратък запис: $X = \sum_i x_i 1_{H_i}$

* дефо (разпределение на дискретна сл. вел.):

Нека X е дискретна сл. вел. $(X = \sum_j x_j 1_{H_j})$. Тогава под разпределение на X разбираме таблицата:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	...

, където

$p_i = \mathbb{P}(X=x_i) = \mathbb{P}(H_i)$ и $p_i \geq 0$ и $\sum_i p_i = 1$

* дефо (равенство по разпределение):

Нека X и Y са диск. сл. вел. Тогава $X \overset{d}{=} Y$ ако таблицата за разпределение на X съвпада с таблицата за разпределението на Y.

Важно дефо

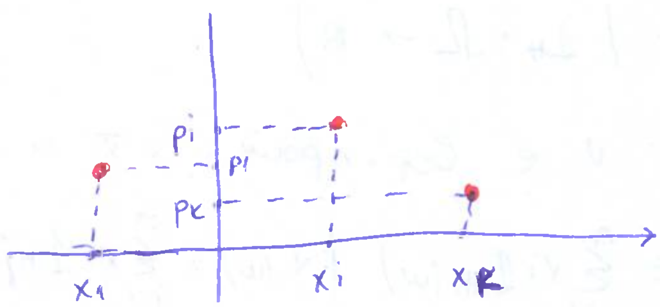
т.е. $\mathbb{P}(X=x_i) = \mathbb{P}(Y=x_i) = p_i \ \forall i$

* дефо (хистограма):

Нека имаме следната таблица на разпределение:

X	x_1	...	x_n	...
$\mathbb{P}$	p_1	...	p_n	...

. Тогава графиката:



се нарича хистограма.

* Деф (независимост на дискр. сл. вел.):

Нека X и Y са две дискр. сл. вел. в едно вероятностно пространство U. Тогава

$X \perp\!\!\!\perp Y \iff$ за всеки две възможни стойности x_i и y_j

$$\mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\,\mathbb{P}(Y = y_j).$$

* Деф (независимост в съвкупност на дискретни сл. вел.):

Нека $X_1, \dots, X_n$ са дискр. сл. вел. в U. Тогава ще са независими в съвкупност $\iff \forall M \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $|M| \geq 2$: имаме $M = \{j_1, \dots, j_m\}$, $m = |M|$ и възможни стойности $(x_{j_1,1}, x_{j_2,2}, \dots, x_{j_m,m})$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_{j_1} = x_{j_1,1} \cap X_{j_2} = x_{j_2,2} \cap \dots \cap X_{j_m,m}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_{j_i} = x_{j_i,i})$$

* Деф (функция на разпределение):

Нека X е сл. вел. (във вероятностно пространство U). Тогава $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ се нарича функция на разпределение.

* Деф (очакване): Нека X е дискр. сл. вел. Тогава под очакване на X или $\mathbb{E}X$ разбираме: $\mathbb{E}X = \sum_i x_i p_i$ ако

$\sum_i |x_i| p_i < \infty$ и сходяща сума

$\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$

* **Лема:** Нека X и Y са две дискретни сл. вел, такива, че $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y$ съществуват. Тогава:

свойства

а) $X = c$, то $\mathbb{E}X = c$ и ако $X = 1_A$, то $\mathbb{E}X = \mathbb{P}(A)$

б) $c \in \mathbb{R}$, то $\mathbb{E}cX = c\,\mathbb{E}X$

в) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ - линейност

г) ако $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$

д) ако $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, то $\mathbb{E}X \geq 0$, $x \geq 0$

* Очакването характеризира най-добре една случайна величина.

* **Деф (дисперсия):** Нека X е диск. сл. вел. с очакване $\mathbb{E}X$. Тогава $DX := \sum_j (x_j - \mathbb{E}X)^2 p_j$, когато $DX < \infty$

* **Твърдение:** Ако X е дискретна сл. вел. с крайна дисперсия ($\mathbb{E}X < \infty$ и $DX < \infty$), то $DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

* **Следствие:** Нека X е диск. сл. вел. и $DX < \infty$. Тогава $\mathbb{E}X^2 \geq (\mathbb{E}X)^2$

* **Твърдение:** Нека X и Y са диск. сл. вел., такива, че $DX < \infty$ и $DY < \infty$. Тогава:

свойства

а) $X = c$, то $DX = 0$

б) $Z = cX$, то $DZ = c^2 DX$ $(c \in \mathbb{R})$

в) $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $D(X+Y) = DX + DY$

г) $DX \geq 0$

д) $D(X+c) = DX$

* Деф 1 (пораждаща функция):

~~Нека X е целочислена случайна величина~~

Нека X е целочислена, неотрицателна, дискретна сл. вел. във вероятностното пространство $U = (\Omega, \mathcal{A}, P)$, като $X : \Omega \to N = \{0, 1, 2, \dots\}$, тогава

$$g_X(s) = \mathbb{E} s^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X = k), \text{ за } |s| \le 1 \ / s \in [-1, 1]$$

се нарича пораждаща функция.

* Твърдение: Нека X е целочислена сл. вел. с пораждаща функция g_X. Тогава:

а) $\mathbb{E}X = g_X'(1)$

б) $DX = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2$

в) $k!\, P(X = k) = g_X^{(k)}(0)$, $k \ge 0$?

* Следствие: Нека X и Y са целочислени сл. вел. Тогава

$X \overset{d}{=} Y \iff g_X = g_Y$. + деф $\nearrow \to$???

* Деф: Дискретните случайни величини $X_1, \dots, X_n$ или $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ са независими в съвкупност (за крайни сме дефинирали), или $\forall (j_1, \dots, j_n)$, $\forall n \ge 2$, $(X_{j_1}, \dots, X_{j_n})$ са независими в съвкупност.

ур безкраен брой са независими в съвкупност, ако колкото и да вземем (краен брой) от тях случайни величини са независими в съвкупност.

Деф: дискретните случайни величини $X_1, \dots, X_n$ или $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ имат еднакво разпределение, ако

$$X_i \stackrel{d}{=} X_j, \ 1 \le i, j \le n \quad \text{или} \quad X_i \stackrel{d}{=} X_j, \ 1 \le i, j \le \infty \ \forall i, j$$

* означава се имат една и съща таблица на разпределение или една и съща пораждаща функция ?

* Теорема: Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими в съвкупност целочислени случайни величини, Тогава $Y = X_1 + \dots + X_n$, то

$$g_Y(s) = \prod_{j=1}^{n} g_{X_j}(s), \quad |s| \le 1$$

Ако в допълнение $X_1, \dots, X_n$ са равни по разпределение
$g_{X_1} = g_{X_j}, \ \forall j \le n$

$$g_Y(s) = (g_{X_1}(s))^n$$

целочислени сл. вел. vs. дискретни сл. вел → кога са равни по разпределение ???

* Две целочислени случайни величини са тогава и само тогава, когато им функции са едни и същи. ?

* Твърдение: Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$ и X и Y са целочислени случайни величини, Тогава $g_{X+Y}(s) = g_X(s) g_Y(s)$

* Деф (схема на Бернули): ☆
$(X_j)_{j=1}^{\infty}$ са независими в съвкупност и еднакво разпределени (д. сл. вел.) т.е. $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = \mathbb{P}(X_j = 1), \ j \ge 1$

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p = \mathbb{P}(X_j = 0), \ j \ge 1.$$

Тази схема се нарича схема на Бернули.

* Разпределение на Бернули

$X \sim Ber(p)$, $p \in (0,1)$ и има следната таблица:

x_i	0	1
$\mathbb{P}$	$\underbrace{1-p}_{q}$	p

, $p+q=1$

↳ свойства:

- $\mathbb{E}X = p$
- $DX = p \cdot q$
- $g_X(s) = q + ps$

↳ Биномно разпределение

* Брой успехи от n експеримента в схемата на Бернули с вероятност за успех p

$X \sim Bin(n, p)$, тогава таблицата на разпределение е:

X	0	1	...	k	...	n
$\mathbb{P}$	q^n	$n \cdot p \cdot q^{n-1}$		$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$		p^n

- $\mathbb{E}X = n \cdot p$
- $DX = n \cdot p \cdot q$
- $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$
- $g_X(s) = (ps+q)^n$

* Деф | Геометрично разпределение |: ★

$X \sim Ge(p)$ и $X = \min\{\sum_{j=1}^{k} X_j = 1\} - 1$, $k \geq 1$, т.е. най-малкото k, за което сумата $\sum_{j=1}^{k} X_j$ става единица, като от нея вадим 1ца, за да извадим последната шипка.

↳ броя неуспехи до първия успех

↳ таблицата на разпределението:

X	0	1	2	...	k	...
$\mathbb{P}$	p	$p \cdot q$	$p \cdot q^2$		$p \cdot q^k$	...

$\mathbb{P}(X = k) = p \cdot q^k$

↳ – $\mathbb{E}X = \frac{q}{p}$

– $DX = \frac{q}{p^2}$

– $g_X(s) = \frac{p}{1 - qs}$

* Твърдение | безпаметност |:

$$\mathbb{P}(X \geq n + m \mid X \geq m) = \mathbb{P}(X \geq n), \ \forall m \geq 0 \text{ и } \forall n \geq 0$$

* Деф | Отрицателно биномно разпределение |: ★

~~Нек~~ $X \sim NB(r, p)$ и $X = \min\{j \geq 1 \mid \sum_{i=1}^{j} X_i = r\} - r$.

p – вероятност за успех в схемата на Бернули

Това е броя неуспехи до r-тия успех.

* Твърдение: Нека $X \sim NB(r, p)$. Тогава $X = \sum_{i=1}^{r} Y_i$, където $(Y_1, \dots, Y_r)$ са независими в съвкупност геометрични сл. величини, $Y_1 \sim Ge(p)$.

и свойство:

- $EX = \frac{rq}{p}$

- $DX = \frac{rq}{p^2}$

- $g_X(s) = \left(\frac{p}{1-qs}\right)^r$ → Понеже Y е сума от независими геометрични, сумата се представя като произ[...] пораждащите [...] понеже са ед[...]

-

X	0	1	...	k
P				$\binom{r+k-1}{k} p^r q^k$

$\lim_{n\to\infty} g_{X_n}(s) = g_X(s)$

или

$g_{X_n}(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} g_X(s)$???

само за поасоновото ли е?

* **Твърдение:** Нека $(X_n)_{n\geq1}$ е редица от целочислени случайни величини, такива че $\lim_{n\to\infty} g_{X_n}(s) = g_X(s)$, $-1\leq s\leq 1$, където X е целочислена случайна величина и g_X е нейната пораждаща функция. Тогава $\forall k\geq0$ $\lim_{n\to\infty} P(X_n=k) = P(X=k)$

от Поасоновото

* редицата от пораждащи функции клони към една конкретна пораждаща функция

* позволява чрез граница на функции да идентифицираме граница на вероятности.

* **Деф (Поасоново разпределение):**

и В предишния задавахме с ~~[illegible]~~ конкретна структура, тук задаваме с конкретни вероятности

Нека $\lambda>0$. Казваме, че X е поасоново разпределена случайна величина с параметър λ и бележим $X\sim Poi(\lambda)$, ако $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k\geq0$

* свойства:

- $g_X(s) = e^{-\lambda+\lambda s}, \ |s| \le 1$

- $\mathbb{E}X = DX = \lambda$

* Теоремата на Поасон ни казва как можем да приближаваме биномни разпределения чрез Поасоново?

$$1 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

↳ развиване в ред на Тейлор за exp

* <u>Теорема</u> (Поасон): Нека $X_n \sim Bin(n, p_n)$ (различен брой експерименти с (вариращи) различни вероятности), $\forall n \ge 1$.

~~Нека $\lim_{n\to\infty} n p_n = \lambda$~~ Нека е в сила, че $p_n = \frac{\lambda}{n} + \frac{u_n}{n}$, където $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ и $\lambda > 0$. Тогава

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ k \ge 0. \quad (X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X \sim Poi(\lambda))$$

↳ Поасоново

* Деф (хипергеометрично разпределение):

Имаме N обекта, от които M са маркирани $(0 \le M \le N)$. Избира се n обекта и случайната величина X е броя маркирани измежду тези N $(n \le N)$. Тогава казваме, че X е разпределено хипергеометрично с параметри N, M и n и бележим $X \sim HG(M, N, n)$.

↳ $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ → $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{C_M^k \, C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ (д-во)

- $\mathbb{E}X = n \cdot \frac{M}{N}$

* не са независими случайните величини!

- $DX = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

↳ затова не може да кажем, че $X \sim Bin(n, \frac{M}{N})$

* **Деф** (съвместно разпределение):

Нека X и Y са две дискретни случайни величини в едно вероятностно пространство. Тогава под съвместно разпределение на (X,Y) разбираме следната таблица:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	...	x_n	...	
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{n1}	...	$\sum_i p_{i1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{n2}	...	$\sum_i p_{i2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	...
y_k	p_{1k}	p_{2k}	...	p_{nk}	...	$\sum_i p_{ik}$
...	$\vdots$	$\vdots$	...	...	...	...
	$\sum_j p_{1j}$	$\sum_j p_{2j}$		$\sum_j p_{nj}$		

маргинално на X

маргинално на Y

където $0 \le p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i;\ Y = y_j)$, за $\forall i,j$. $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$

* **Деф** (съвместна функция на разпределение):

Нека (X,Y) са две случайни величини в едно вер. пространство. Тогава $F_{X,Y}(x,y) := \mathbb{P}(X \le x;\ Y \le y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$ се нарича съвместна функция на разпределението.

* **деф** (независимост на случайни величини):

Нека X и Y са две случайни величини във вероятностно пространство V. Тогава

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{P}(X \le x;\ Y \le y) = \mathbb{P}(X \le x)\,\mathbb{P}(Y \le y)$$

* **Ковариация:** показател за това до колко имаме линейна зависимост между произволни случайни величини X и Y е ковариацията.

Деф: Нека X и Y са случайни величини с $DX < \infty$ и $DY < \infty$. Тогава $cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)]$ се нарича ковариация.

* X и Y са две дискретни случайни величини:

$$cov(X,Y) = \sum_{i,j} (x_i - \mathbb{E}X)(y_j - \mathbb{E}Y)p_{ij}$$

* **Твърдение:** $cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$ и ако $X \perp\!\!\!\perp Y$, то

$cov(X,Y) = 0$

* **Деф (Корелация):** Нека (X,Y) са две случайни величини, такива, че $DX < \infty$ и $DY < \infty$. Тогава

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$ се нарича коефициент на корелация между X и Y

? Целта на корелацията е да мери някаква смисъл на линейност между X и Y.

* **Твърдение:** Нека X и Y са случайни величини с крайни дисперсии и нека $\bar{X} = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}}$ и $\bar{Y} = \frac{Y - \mathbb{E}Y}{\sqrt{DY}}$.

Тогава $\rho(X,Y) = \mathbb{E}\bar{X}\bar{Y}$ и $\mathbb{E}\bar{X} = \mathbb{E}\bar{Y} = 0$,

$D\bar{X} = \mathbb{E}\bar{X}^2 = D\bar{Y} = \mathbb{E}\bar{Y}^2 = 1$

* **Твърдение:** Нека X и Y са случайни величини с крайни дисперсии. Тогава:

а) $|\rho(X,Y)| \leq 1$

б) $|\rho(X,Y)| = 1 \iff Y = aX + b, \ \forall a,b \in \mathbb{R}$

* Деф (УМО):

Нека X е произволна случайна величина и Y е дискретна случайна величина. Тогава случайната величина $\mathbb{E}[X|Y]$ се нарича УМО на X при положение (условие) Y, ако $\mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X|Y]]^2 = \min_G \mathbb{E}[X-G(Y)]^2$

↳ Нека X и Y са случайни величини (дискретни). Тогава $G^*(Y) = \mathbb{E}[X|Y]$ е тази случайна величина, която минимизира $\min_G \mathbb{E}[X-G(Y)]^2 = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}[X|Y])^2$

$\mathbb{E}[X|Y]$
* дава ни минимумо или най-доброто средно квадратично приближение на X

$$G^*(Y) = \frac{\mathbb{E}X\mathbb{1}_A}{\mathbb{P}(A)}\cdot\mathbb{1}_A + \frac{\mathbb{E}X\mathbb{1}_{A^c}}{\mathbb{P}(A^c)}\cdot\mathbb{1}_{A^c} := \mathbb{E}[X|Y]$$

* Твърдение: Ако X и Y са дискретни случайни величини, то $\mathbb{E}[X|Y]$ е дискретна случайна величина със следната таблица:

$\mathbb{E}[X\|Y]$	$\mathbb{E}[X\|Y=y_1]$	$\dots$	$\mathbb{E}[X\|Y=y_j]$	$\dots$
$\mathbb{P}$	$p_1=\mathbb{P}(A_1)$	$\dots$	$p_j=\mathbb{P}(A_j)$	$\dots$

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_j \mathbb{E}[X|Y=y_j]\cdot\mathbb{1}_{A_j}$$

⭐⭐⭐

→ $\mathbb{E}[X|Y=y_j] = \sum_i x_i\,\mathbb{P}(B_i|A_j)$;

* Свойства на УМО:

а) $\mathbb{E}[aX + bZ \mid Y] = a\mathbb{E}[X \mid Y] + b\mathbb{E}[Z \mid Y]$

б) $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X]$

в) Ако $X = f(Y)$, то $\mathbb{E}[X \mid Y] = X = f(Y)$

г) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \mathbb{E}X$

д) $X \perp\!\!\!\perp Y$ и $f(x,y)$, тогава $\mathbb{E}[f(X,Y) \mid Y = y_i] = \mathbb{E}\, f(X, y_i)$

* Схема на Бернули:

$(X_i)_{i \geq 1}$ са независими в съвкупност и еднакво разпределени дискретни случайни величини

X_i	0	1
P	q	p

$i \geq 1$

$p + q = 1$

→ p и q са фиксирани за $\forall i$. Все едно имаме n експеримента, които са еднородни по своя характер (хвърляне на монета).

↳ Тази постановка се нарича схема на Бернули