* Комбинаторика

→ Пермутации, комбинации и вариации без повторение

↳ Пермутации $P_n = n!$

↳ Комбинации $|C_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ ✓ $\binom{n}{k}$

↳ Вариации $|V_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!}$

→ Пермутации, комбинации и вариации с повторение

↳ Пермутации $P(n, k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_n!}$

↳ Комбинации $C(n, k) = |C_{n+k-1}^{k}| = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$ → когато подредбата няма значение

↳ Вариации $V(n, k) = n^k$

→ $\boxed{\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$ → условна вероятност

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(A)$

→ $\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$

→ $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ → закон на деМорган

↓

$1 - \mathbb{P}(A \cup B)$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ → когато са независими

А когато са зависими?

$\boxed{\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A) \cdot \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}}$ → формула на Бейс за събития

формула на Бейс

$$\boxed{\mathbb{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_k)\,\mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A \mid H_i)\,\mathbb{P}(H_i)}}$$

* Когато A и B са несъвместими

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$A \cap B = \emptyset$ или $P(A \cap B) = 0$

* (събития които не могат да се реализират (едновременно) при един и същ комплекс от условия се наричат несъвместими.

* A и B са независими, ако е изпълнено равенството

$P(AB) = P(A)P(B)$ и се бележи с $A \perp B$ (вероятността да настъпи събитието A не зависи от това дали е настъпило събитие B).

* Разпределение на Бернули

$X \sim Ber(p)$ → успех p, неуспех $q = 1-p$

$$\boxed{\begin{aligned} &EX = p \\ &DX = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = pq \end{aligned}}$$ → $p(1-p)$

* Биномно разпределение

↳ броят успехи от първите n експеримента в схемата на Бернули

$X \sim Bin(n,p)$ → $p = P(X_1 = 1)$

$$\boxed{\begin{aligned} &EX = n \cdot p \\ &DX = n \cdot p \cdot q \end{aligned}}$$

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} \underbrace{p^k}_{k \text{ успехи}} \underbrace{q^{n-k}}_{\text{неуспехи}}}$$

* Геометрично разпределение

$X \sim Ge(p)$ → броят неуспехи до първия успех

$$\boxed{\begin{aligned} &EX = \frac{q}{p} \\ &DX = \frac{q}{p^2} \end{aligned}}$$ → с успеха

$$\boxed{P(X=k) = p \cdot q^k}$$ → само тук я има?

* Безпаметност

$P(X \geq n+m \mid X \geq m) = P(X \geq n) = q^n$

↳ информация за минали събития не ни носи никаква информация

$EX = \frac{1}{p}$ → когато броим само броят неуспехи (без успеха)

* Отрицателно биномно разпределение

↳ брой неуспехи до r-тия успех

$X \sim NB(r, p)$ * Ако $r=1$, то $X \sim Ge(p)$

↓ r-тия успех ↓ вероятност за успех

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k$$

$$\mathbb{E}X = \frac{rq}{p} \rightarrow \mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{E}Y_i$$

$$DX = \frac{rq}{p^2} \rightarrow DX = \sum_{i=1}^{r} DY_i$$

* Поасоново разпределение → вече не е схема на Бернули

↳ брой случки се неща за единица време (дадено време)

$$\mathbb{E}X = \lambda$$
$$DX = \lambda$$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$X \sim Poi(\lambda)$

* Хипергеометрично разпределение

$X \sim HG(N, M, n)$ → избират се n от всички

↓ N общо (предмети) ↓ M маркирани (дефектни)

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\mathbb{E}X = n \cdot \frac{M}{N}$$

$$DX = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

* **Коварияция**

↳ Показател за това до колко имаме линейна зависимост между произволни случайни величини X и Y е коварияция.

$$\boxed{cov(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)\right]} = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

→ $cov(X,Y) = \mathbb{E}\tilde{X}\tilde{Y}$, където $\tilde{X} = X - \mathbb{E}X$, $\tilde{Y} = Y - \mathbb{E}Y$

→ $cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$

* $cov(X,Y) = 0$, ако $X \perp\!\!\!\perp Y$

* **Корелация**

↳ целта и е да мери някакво числено линейност между X и Y

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}}$$

$$\bar{X} = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}} \text{ и } \bar{Y} = \frac{Y - \mathbb{E}Y}{\sqrt{DY}} \Rightarrow \rho(X,Y) = \mathbb{E}\bar{X}\bar{Y}$$

$$\mathbb{E}\bar{X} = \mathbb{E}\bar{Y} = 0, \quad D\bar{X} = \mathbb{E}\bar{X}^2 = D\bar{Y} = \mathbb{E}\bar{Y}^2 = 1$$

* Условна вероятност

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \overset{\mathbb{P}(A\cap B)}{=} \rightarrow \text{формула на Бейс}$$

* Независимост

→ Ако $A \perp B$, то $A \perp B^c$, $A^c \perp B$, $A^c \perp B^c$

* Формула за пълната вероятност

$$\mathbb{P}(H_n|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_n)\,\mathbb{P}(H_n)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|H_i)\,\mathbb{P}(H_i)}$$

* Неравенство на Чебишев

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > a) \leq \frac{DX}{a^2}$$

* Съвместно разпределение

↳ $\mathbb{P}(X=x; Y=y)$ → збирът е 1-ца

→ Маргинално разпределение $\mathbb{P}(X=x_i)$ | $\mathbb{P}(Y=y_i)$

* $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

ако $X \geq Y$, то $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$

* Две дискретни сл. вел. X и Y са независими, ако за произволни техни стойности $x \in X$ и $y \in Y$ е изпълнено:

$$\boxed{\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)}$$

* Две дискретни сл. вел., приемащи едни и същи възможни стойности в $X \subseteq \mathbb{R}^m$, се наричат еднакво разпределени, ако за всяко $x \in X$ е изпълнено:

$$\boxed{\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(Y=x) \rightarrow X \overset{d}{=} Y}$$

! Когато $X \perp Y$ и $X \overset{d}{=} Y$, ще наричаме X и Y независимо и еднакво разпределени (iid)

* A и B наричаме несъвместими когато $(A \cap B) = \emptyset$ и независими когато $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

* функция на разпределение

$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$

→ плътност на X → $f_X(x)\, dx$

* $f_X(x) = F'_X(x)$ → по Лайбниц Нютон

→ $f_Y(y) = \pm f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy}(g^{-1}(y))$

→ $\boxed{\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx}$

$$\boxed{DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \right)^2}$$

* Равномерно разпределение

→ X е равномерно разпределено в интервала (a,b)

$X \sim U(a,b)$

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$\mathbb{E}\, U(a,b) = \frac{b-a}{2}$

$D[U(a,b)] = \frac{(b-a)^2}{12}$

* Експоненциално разпределение

$X \sim Exp(\lambda)$

$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

$$\boxed{F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}}$$

$\boxed{\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}}$ $\boxed{DX = \frac{1}{\lambda^2}}$

→ събития случващи се във времето колко време чакаме нщо.

– липса на памет

$\mathbb{P}(X > x) = \int_x^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x}$

★ Basic Derivative Formula Rules:

Constant Rule: $c' = 0$

Constant Multiple Rule: $(cf(x))' = cf'(x)$

Power Rule: $(x^n)' = nx^{n-1}$

Sum Rule: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

Difference Rule: $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$

Product Rule: $(f(x)g(x))' = f(x)g(x)' + g(x)f'(x)$

Quotient Rule: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Chain Rule: $(f[g(x)])' = f'[g(x)]g'(x)$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$

★ ЦГТ:

$$\frac{x_1 + \dots + x_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$Cor = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

$$Cov = EXY - EXEY$$

- Равномерна вероятност
- Геометрична вероятност
- Условна вероятност $\to$ $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$
- Независимост $\to$ $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B)$
- Формула за пълната вероятност. Бейс $\to$
- Случайни величини
- Дискретни случайни величини
- Математическо очакване
- Дисперсия – средна квадратична грешка
- Пораждаща функция

$$\boxed{P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)}$$

$$\boxed{P(A\cap B) = P(A)\, P(B) \to A \perp\!\!\!\perp B}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)\, P(H_i)} \to$$ формула за пълната вероятност

→ Условно очакване

→ При две независими събития

$$\boxed{DX_1 = DX_2}$$

Дискретни вероятности

→ **Равномерна вероятност**

Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е дискретно вер. пр., където $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ е крайно множество. Ако елементарните събития са еднакво вероятни, т.е. $p(\omega_i) = p$, тогава $p = \frac{1}{n}$, от където следва че за всяко $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\} \in \mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{m} p(\omega_{i_j}) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

т.е. броят на благоприятните изходи върху всички възможни изходи.

→ $\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{N} =: p}$ $\boxed{\mathbb{P}(A^c) = \frac{N-|A|}{N} = 1-p =: q}$

→ **Геометрична вероятност**

↳ задава размерна вероятност

$$\mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$|A|$ → лицето на A

$|\Omega|$ → лицето на Ω

→ **Условна вероятност**

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}} \qquad \mathbb{P}(B) > 0$$

ако в допълнение $\mathbb{P}(A) > 0$, то $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A)$$

→ формула на Бейс

→ **Независимост**

Ако $A, B \in \mathcal{A}$, тогава A е независимо от B ако $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)}$, означаваме с $A \perp\!\!\!\perp B$

! $\mathbb{P}(A) > 0$, то $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$

защото настъпването на A не ни носи информация за B

!! Ако $A \perp\!\!\!\perp B$, то $A \perp\!\!\!\perp B^c$, $A^c \perp\!\!\!\perp B$ и $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

→ **формула за пълната вероятност**

→ $\mathcal{A}$-алгебра

$\mathcal{A}$ - мн-во от събития / комбинации от изходи $) = 2^{\Omega}$

↳ Ако $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$, и $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$, то

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

→ това свойство се нарича сигма адитивност

↳ $\mathcal{A}$-алгебра се казва такава съвкупност от множества, за която както вземем един изброим брой и вземем обединението, то пак е вътре

→ **Несъвместими**

↳ A и B се наричат несъвместими, ако $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ или $A \cap B = \emptyset$

* идеята, че не се сещат няма нищо общо с понятието независимост

↓ когато не си влияят едно на др.

→ несъвместими, няма как да се случат в едно и също време !!!

→ ФОРМУЛА ЗА ПЪЛНАТА ВЕРОЯТНОСТ

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)\, P(H_i)}$$

в допълнение ако $P(A) > 0$

$$\Rightarrow \boxed{P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)\, P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|H_k)\, P(H_k)}}$$

→ СЛУЧАЙНА ВЕЛИЧИНА

$P(X=1) = P(\{\omega : X(\omega)=1\}) = P(\{(E,T),(T,E)\})$

↓

т.е. искаме тези ~~от~~ стойности от Ω, които имат стойност 1

+ ДИСКРЕТНА СЛ. ВЕЛ

↳ X приема краен брой стойности

EX – средна стойност $\Rightarrow x_1p_1 + x_2p_2 + \dots$

$DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$

- Неравенство на Марков

X е диск. сл. вел., $X \geq 0$, за $\forall \alpha > 0$ е в сила:

$$\boxed{\mathbb{P}(X > \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\alpha}}$$

- Неравенство на Чебишев

X е д.сл.вел. с $\mathbb{E}[X]$ и $Var(X)$, тогава за $\forall \alpha > 0$ е в сила:

$$\boxed{\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > \alpha) \leq \frac{Var(X)}{\alpha^2}}$$

→ $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$ → за да сметнем до $n-1$, заместване n със $n-1$ ⟹

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

→ формула за геометрична прогресия

$$1+x+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

за $|x|<1 \to 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$

→ $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

↳ $x+2x^2+3x^3+\dots = \frac{x}{(1-x)^2}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot x^i$$

$$\boxed{P(A|B) = P(B|A)\cdot\frac{P(A)}{P(B)}}$$ → формула на Бейс

$H_1, H_2, \dots, H_n$ разбиване на Ω (пълна група от събития)

$P(H_1|A) = ?$ както имаме достъп до $P(A|H_i)$ и $P(H_i)$, следователно искаме да обърнем вероятностите

$$\to \boxed{P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)\,P(H_1)}{P(A)} = \frac{P(A|H_1)\,P(H_1)}{\sum_{i=1} P(A|H_i)\,P(H_i)}}$$ → формула на Бейс

* При Бейс, условието обикновено ни е дадено, а хипотезите ни са другото → за задачите

Производно на функция " == " диференциране "

- функция $f(x)$, що производната ѝ в точка x се означава като $f'(x)$ или $\frac{d f(x)}{dx}$
- ако c е константа $\frac{d}{dx} c = 0$
- $f(x) = x^n$, $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$
- линейност: $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
- произведение: $\frac{d}{dx}[u(x) v(x)] = u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$
- частно деление: $\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{u'(x) v(x) - u(x) v'(x)}{[v(x)]^2}$
- производно на композирани функция:
  ако $y = f(g(x))$, що $\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} c' &= 0 \\ x' &= 1 \end{aligned}}$$

→ Пораждаща ф-я
- ако $X \overset{d}{=} Y \iff g_{X}(s) = g_{Y}(s)$, $|s| \leq 1$

→ $EX = g'_X(1)$

$DX = g''_X(1) - g'_X(1) - (g'_X(1))^2$

$P(X = k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!}$

! $DX+Y = DX + DY$ → само ако $X \perp\!\!\!\perp Y$

→ $\mathbb{E}XY$, когато имаме съвместното разпределение (таблицата) се смята като $\sum_{x,y} xy\, \mathbb{P}(X=x, Y=y)$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cap B}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) + \mathbb{P}(\bar{B}) - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})}$$

→ Сумата на първите n - естествени числа

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

→ По симетрия

$$\boxed{\mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X = Y) = 1}$$

$$\boxed{(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

→ Непрекъснати

- константата c → $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx$ и я намираме
- $\mathbb{E}[X]$ → $\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$
- $\mathbb{E}[X^2]$ → $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx$

→ $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy$

→ Ако $g^{-1}(y)$ е нещо което може да има 2 стойности,

! примерно $\pm\sqrt{y}$, смятаме като 2 събираеми

→ Нечетна ф-я се интегрира до 0

→ четни са x^2, $\cos(x)$, $|x|$

→ нечетни са x^3, $\sin(x)$, $\tan(x)$

→ понеже $F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ няма явен вид,

за пресмятането се ползват таблици до стандартно нормално разпределение.

→ ЦГТ

→ $f_X(x) \int \dots dy$

$$\boxed{f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}}$$

$$\mathbb{E}Y = \int_0^1 \int_0^{1-x} y \, f_{X,Y}(x,y) \, dy \, dx$$

→ $$\mathbb{E}XY = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \, f_{X,Y}(x,y) \, dy \, dx$$

c? $$1 = \int_0^1 \int_0^{1-x} f_{X,Y}(x,y) \, dy \, dx$$

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} f_{X,Y}(x,y) \, dy$$

$E[Y \mid X = 1/2] = ?$

→ намираме плътността → $f_{X|Y}(x,y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$

– намираме отделно

$f_X(x)$ и $f_{X,Y}(x,y)$

↓

$$\int_a^b f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

a,b – интервала за y

→ след като ги намерим заместваме и получаваме $f_{Y|X}(y \mid \frac{1}{2})$

→ смятаме $E[Y \mid X = 1/2]$ като $\int_0^{1/2} y \cdot f_{Y|X}(y \mid 1/2)\,dy$

***

$y = \frac{2}{w}$ → $\frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{2}{w^2}$

$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{w}$

→ $f_{X,Y}(x,y) = \dots$

$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}$

$z = x + 2y$
$w = x$
$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = w \\ y = \frac{z+w}{2} \end{array} \right.$

***

→ $f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}\left(w, \frac{z-w}{2}\right) \cdot |J| = \dots$

→ $f_Z(z) = \int f_{Z,W}(z,w)\,dw$ //

$Y = \frac{X}{Y}$

$\frac{dZ}{dY} = \frac{d}{dY}\left(\frac{X}{Y}\right) \Rightarrow \frac{d}{dY}\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{\frac{dX}{dY}Y - X}{Y^2} = \frac{-X}{Y^2}$

→ $P(X < Y)$ → $\iint dx\, dy$ → каде поставуваме границите за X и Y строго

→ плотност? → с една променлива $Y = 2X + 1$ ⇒ смена на променливи

и со повеќе $Z = X + 2Y$ → $|J|$

$$\min_{G} \mathbb{E}(X - G(Y))^2 = \min_{a,b\in\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{E}(X - a\mathbb{1}_A - b\mathbb{1}_{A^c})^2}_{f(a,b)} = \min_{a,b\in\mathbb{R}} f(a,b)$$

$$f(a,b) = \mathbb{E}(X^2 + a^2\mathbb{1}_A + b^2\mathbb{1}_{A^c} - 2aX\mathbb{1}_A + 2ab\underbrace{\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{A^c}}_{0} - 2bX\mathbb{1}_{A^c})$$

$$= \mathbb{E}X^2 + a^2\mathbb{P}(A) + b^2\mathbb{P}(A^c) - 2a\,\mathbb{E}X\mathbb{1}_A - 2b\,\mathbb{E}X\mathbb{1}_{A^c}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial a} = 2a\,\mathbb{P}(A) - \cancel{\ldots}\, 2\mathbb{E}X\mathbb{1}_A \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial b} = 2b\,\mathbb{P}(A^c) - 2\mathbb{E}X\mathbb{1}_{A^c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

<u>УМО</u>

$$\mathbb{1}_A = Y$$

$$a = \frac{\cancel{2}\mathbb{E}X\mathbb{1}_A}{\cancel{2}\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{E}X\mathbb{1}_A}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{E}XY}{\mathbb{P}(Y=1)}$$

$$b = \frac{\cancel{2}\mathbb{E}X\mathbb{1}_{A^c}}{\cancel{2}\mathbb{P}(A^c)} = \frac{\mathbb{E}X\mathbb{1}_{A^c}}{\mathbb{P}(A^c)} = \frac{\mathbb{E}X(1-Y)}{\mathbb{P}(Y=0)}$$

и глобален минимум

$$\Rightarrow G^*(Y) = \frac{\mathbb{E}X\mathbb{1}_A}{\mathbb{P}(A)}\cdot\mathbb{1}_A + \frac{\mathbb{E}X\mathbb{1}_{A^c}}{\mathbb{P}(A^c)}\cdot\mathbb{1}_{A^c} =: \mathbb{E}[X|Y]$$

$G(Y)$ за който се достига минимума

$$\boxed{(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca}$$

$$X = 1_B \Rightarrow G^*(Y) = \frac{E\, 1_B 1_A}{P(A)} \cdot 1_A + \frac{E\, 1_B 1_{A^c}}{P(A^c)} \cdot 1_{A^c} =$$

$E\, 1_A 1_B = E\, 1_{A \cap B} = P(A \cap B)$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \cdot 1_A + \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} \cdot 1_{A^c} =$$

$$= P(B|A) \cdot 1_A + P(B|A^c) \cdot 1_{A^c}$$

* Својство на УМО:

a) $E[aX + bZ \mid Y] = aE[X|Y] + bE[Z|Y]$

↳ доказателство

$* A_j = \{Y = y_j\}$

$$E[aX + bZ \mid Y] = \sum_j \frac{E[(aX + bZ) \cdot 1_{A_j}]}{P(A_j)} \cdot 1_{A_j} =$$

$$= \sum_j \frac{a\,EX \cdot 1_{A_j} + b\,EZ \cdot 1_{A_j}}{P(A_j)} \cdot 1_{A_j} = a \underbrace{\sum_j \frac{EX \cdot 1_{A_j}}{P(A_j)} \cdot 1_{A_j}}_{= E[X|Y]} + b \underbrace{\sum_j \frac{EZ \cdot 1_{A_j}}{P(A_j)} \cdot 1_{A_j}}_{= E[Z|Y]} =$$

$$= a\,E[X|Y] + b[Z|Y]$$

б) $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$

$\boxed{\mathbb{E}\, f(x)\, g(y) = \mathbb{E}\, f(x) \cdot \mathbb{E}\, g(y)}$

Д-доказателство

$\mathbb{1}_{A_j} = \mathbb{1}_{\{Y = y_j\}}$

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_j \frac{\mathbb{E}\underbrace{X}_{f(x)} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{Y=y_j\}}}_{g(Y)}}{\mathbb{P}(Y=y_j)} \cdot \mathbb{1}_{\{Y=y_j\}} =$$

$$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_j \mathbb{E}X \frac{\cancel{\mathbb{P}(Y=y_j)}}{\cancel{\mathbb{P}(Y=y_j)}} \cdot \mathbb{1}_{A_j} = \mathbb{E}X \underbrace{\sum_j \mathbb{1}_{A_j}}_{\text{пълна група от събития } = 1} = \mathbb{E}X \cdot 1 = \mathbb{E}X$$

в) Ако $X = f(Y)$, то $\mathbb{E}[X|Y] = X = f(Y)$

X е някаква функция на Y, т.е. зависи от Y

* Ако знаем X, знаем и Y, защото X зависи от Y

Д-доказателство

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_j \frac{\mathbb{E}\, f(Y) \cdot \mathbb{1}_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} \cdot \mathbb{1}_{A_j} =$$

$f(Y) \cdot \mathbb{1}_{A_j} = f(y_j) \cdot \mathbb{1}_{A_j}$

когато се сбъдва събитие A_j, Y е точно равно на y_j, така че то може да приеме само една единствена стойност y

$$= \sum_j f(y_j) \frac{\cancel{\mathbb{P}(A_j)}}{\cancel{\mathbb{P}(A_j)}} \cdot \mathbb{1}_{A_j} = f(Y)$$

г) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}X$

Доказателство

константа, някакво число

очакването се пренася върху индикаторите, които са случайни величини

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}\left[\sum \frac{\mathbb{E}X\cdot 1_{A_j}}{P(A_j)}\cdot 1_{A_j}\right] =$$

$$= \sum_j \frac{\mathbb{E}X\cdot 1_{A_j}}{\cancel{P(A_j)}}\cdot \cancel{\mathbb{E}1_{A_j}} = \sum_j \mathbb{E}X\cdot 1_{A_j} =$$

$$= \mathbb{E}\sum_j X\cdot 1_{A_j} = \mathbb{E}X\cdot \underbrace{\sum_j 1_{A_j}}_{=1} = \mathbb{E}X$$

X е константа спрямо j

д) $X \perp\!\!\!\perp Y$ и $f(X,Y)$, тогава $\mathbb{E}[f(X,Y)\,|\,Y=y_j] = \mathbb{E}f(X,y_j)$

→ Биномно

- $EX = np$
- $DX = npq$
- $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
- $g_X(s) = \left((1-p)+sp\right)^n$

$X \sim Bin(n,p)$

→ Бернули

- $EX = p$ $\quad EX^2 = p$
- $DX = pq$
- $g_X(s) = sp + (1-p)$

$X \sim Ber(p)$

→ Геометрично

- $EX = \frac{q}{p} \to \frac{1}{p}$
- $DX = \frac{q}{p^2}$
- $P(X=k) = pq^k$; $P(X \geq k) = q^k$
- $g_X(s) = \frac{p}{1-qs}$

$X \sim Ge(p)$

! $P(X \geq m+k \mid X \geq k) = P(X \geq m) = q^m$

→ Отрицателно биномно

- $EX = \frac{rq}{p}$
- $DX = \frac{rq}{p^2}$
- $P(X=k) = \binom{r+k-1}{r-1} q^k p^r$
- $g_X(s) = \left(\frac{p}{1-qs}\right)^r$

$X \sim NB(r,p)$

→ Поасоново

- $EX = DX = \lambda$
- $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$
- $g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

$X \sim Poi(\lambda)$

→ Хипергеометрично

- $EX = n \cdot \frac{M}{N}$
- $DX = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$
- $P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

→ няма $g_X(s)$! –

$X \sim HG(M, N, n)$ → извадка

M – дефектни, N – бр. обекти

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad \vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad$ М.М.П

$\hookrightarrow f_X(x, \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\hookrightarrow L(\vec{X}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, понеже $\vec{X}$ са $\underline{\text{i.i.d}}$

$$\hookrightarrow \ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\ln\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right]}_{I} + \ln\left[e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] \ominus$$

$\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln(x)$

$$I = \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) = \ln(1) - \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) =$$

$$= 0 - \left(\ln(\sigma) + \ln(\sqrt{2\pi})\right) = 0 - \left(\ln(\sigma) + \frac{1}{2}\ln(2\pi)\right) =$$

$$= -\ln(\sigma) - \frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\ominus \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \ln(\sigma) - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] =$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{d\ln L}{d\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x_n}^{(1)}$$

$$\frac{d\ln L}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x_n}^{(1)}\right)^2$$

Моавър - Лаплас

p за ези $= \frac{3}{4}$, хвърля се 2000 пъти

$\mathbb{P}(1475 \le X \le 1535) = ?$

$\ell \quad X \sim Bin(2000, \frac{3}{4}) \Rightarrow \quad \mathbb{E}X = n \cdot p = \overset{500}{\cancel{2000}} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} = \underline{\underline{1500}}$

$DX = n \cdot p \cdot q = 2000 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = 375$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1475 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{1535 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$

$$= \left(\frac{1475 - 1500}{\sqrt{375}} \le \frac{X - 1500}{\sqrt{375}} \le \frac{1535 - 1500}{\sqrt{375}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}(-1{,}29 \le Z \le 1{,}81) = \Phi(b) - \Phi(a) =$$

$$= \Phi(1{,}81) - \Phi(-1{,}29) = 0{,}9649 - 0{,}0985 = 0{,}8664$$

$$\approx 86{,}64\ \%$$

→ Ber(p)

X

$X_1 \sim Ber(p_1)$

$X_2 \sim Ber(p_2)$

$X = X_1 + X_2 \qquad Y = X_1 X_2 \qquad X \sim ? \quad Y \sim ?$

↳ $X_1 + X_2 \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow X \not\sim Ber(p)$

→ понеже възможните стойности за сумата са 0, 1, 2, което ще няма как да бъде бернулиево разпределение, тъй като то може да приеме стойности 0 и 1

↳ възможните стойности за Y са 0 и 1

$\Rightarrow \mathbb{P}(X_1 X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 1) = p \cdot p = p^2$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X_1 X_2 = 0) = 1 - p^2$

$\Rightarrow Y \sim Ber(p^2)$

→ Bin(n, p)

$X_1 \sim Bin(n_1, p)$

$X_2 \sim Bin(n_2, p)$

$X = X_1 + X_2$

$$g_{X_1}(s) + g_{X_2}(s) = g_{X_1}(s)\, g_{X_2}(s) = (sp + (1-p))^{n_1} (sp + (1-p))^{n_2} =$$

$$= (sp + (1-p))^{n_1 + n_2} \Rightarrow X \sim Bin(n_1 + n_2, p)$$

→ $Po(\lambda)$

$X_1 \sim Po(\lambda_1)$

$X_2 \sim Po(\lambda_2)$

$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

$X = X_1 + X_2$

$\hookrightarrow g_{X_1}(s) + g_{X_2}(s) = g_{X_1}(s)\, g_{X_2}(s) = e^{\lambda_1(s-1)}\, e^{\lambda_2(s-1)} =$

$= e^{\lambda_1 + \lambda_2(s-1)} \Rightarrow X \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$

→ $Ge(p)$

$X_1 \sim Ge(p_1)$

$X_2 \sim Ge(p_2)$

$X = X_1 + X_2$

$\hookrightarrow g_{X_1}(s) + g_{X_2}(s) = g_{X_1}(s)\, g_{X_2}(s) = \frac{p_1}{1-s(1-p_1)} \cdot \frac{p_2}{1-s(1-p_2)} =$

$= \frac{p^2}{(1-s(1-p))^2} \Rightarrow X \sim NB(2, p)$

б) плътността на $Z = X+2Y$

$$f_{X,Y}(x,y) = 18(x^2+1), \quad \text{за } x,y \geq 0 \text{ и } x+2y \leq 1$$

$$\left| \begin{aligned} Z &= X+2Y \\ W &= X \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} X &= W \\ Y &= \frac{Z-W}{2} \end{aligned} \right.$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial W} & \frac{\partial X}{\partial Z} \\ \frac{\partial Y}{\partial W} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial W} = \frac{\partial W}{\partial W} = 1$$

$$\frac{\partial X}{\partial Z} = \frac{\partial W}{\partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial W} = \frac{\partial\left(\frac{Z-W}{2}\right)}{\partial W} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial Z} = \frac{\partial\left(\frac{Z-W}{2}\right)}{\partial Z} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}\left(w, \frac{z-w}{2}\right) \cdot |J| = 18(w^2+1) \cdot \frac{1}{2} = 9(w^2+1)$$

за $w, \frac{z-w}{2} \in (0,1)$ и $w + 2\left(\frac{z-w}{2}\right) \leq 1$, i.e. $z \in (0,1)$, $w \in (0,z)$

$$f_Z(z) = \int_0^z f_{Z,W}(z,w)\,dw = \int_0^z 9w^2+1\,dw = 9\left[\frac{w^3}{3} + w\right]_0^z =$$

$$= 9 \cdot \left[\frac{z^3}{3} + z\right] = \cancel{18 \cdot \left(\frac{z^3+3z}{3}\right)} \; 3z^3 + 9z, \quad z \in (0,1)$$

Нека времената между клиентите под 30 год. са

$X_1, X_2, \ldots, \sim Exp\left(\frac{1}{5}\right)$ $\qquad \mathbb{E}X_1 = 5$

$Y_1, Y_2, \ldots \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$ $\qquad \mathbb{E}Y_1 = 10$

са времената между клиентите над 30 год.

$10 - 18 \rightarrow 8 \cdot 60 = 480$ мин

а) $\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_{100} < 480)$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_{100} - 100 \cdot 5}{\sqrt{25}\sqrt{100}} < -\frac{20}{\sqrt{25}\sqrt{100}} \right) \overset{ЦГТ}{\approx}$$

$$\frac{-20}{5 \cdot 10} = -\frac{20}{50} = -\frac{2}{5} = -0{,}4$$

$$= \Phi(-0{,}4) = 0{,}3446 \approx 34{,}46\%$$

б) $Z := \min(X_1, Y_1) \sim Exp\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) = Exp\left(\frac{3}{10}\right)$

в) Ако Z_i е времето между $(i-1)$ и i-ти човек.

$Z_i \sim Exp\left(\frac{3}{10}\right) \rightarrow \mathbb{E}Z_i = \frac{3}{10}$

$$\mathbb{P}(Z_1 + \ldots + Z_{150} \leq 480) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_1 + \ldots + Z_{150} - n \cdot \mu}{\sqrt{150} \cdot \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2}} \leq \frac{n \cdot \mu - 480}{\sqrt{150}\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2}} \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{Z_1 + \ldots + Z_n - 45}{\sqrt{150}\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2}} \leq \frac{45 - 480}{\sqrt{150}\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2}} \right)$$

$$150 \cdot \frac{3}{10} = \frac{450}{10}$$

$$\frac{-435}{12{,}24 \cdot 3{,}33} = -\frac{435}{40{,}75} =$$

$= -$

Испит ВиС / СЕМ 2023

$\boxed{3.}$ $f_{X,Y}(x,y) = cx+y$, $x,y \ge 0$, $x+2y \le 1$ и 0 инаку

$2y \le 1-x$

$y \le \frac{1-x}{2}$

а) c, $f_X(x)$, EY ?

$$1 = \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{1-x}{2}} cx+y \, dy\right] dx =$$

$$\int_0^{\frac{1-x}{2}} cx+y \, dy = \int_0^{\frac{1-x}{2}} cx \, dy + \int_0^{\frac{1-x}{2}} y \, dy =$$

$$= \left[cx \Big| \frac{1-x}{2}\right) + \frac{\left(\frac{1-x}{2}\right)^2}{2} = \frac{cx\cdot(1-x)}{2} + \frac{\frac{(1-x)^2}{4}}{2} = \frac{\frac{1-2x+x^2}{4}}{\frac{2}{1}} =$$

$$= \frac{1-2x+x^2}{8}$$

$$cx\left(\frac{1-x}{2}\right) + \frac{1-2x+x^2}{8}$$

$$\frac{c}{2}(x-x^2) + \frac{1}{8}(1-2x+x^2)$$

$$\int_0^1 \frac{c}{2}(x-x^2) + \frac{1}{8}(1-2x+x^2) \, dx =$$

$$\frac{c}{2}\int_0^1 x-x^2 \, dx = \frac{c}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{2} - \right.$$

$E[X \mid X = 1/2] = 1/2$

Ъ защото очакването на сл. вел. с дадено нейната стойност е самата стойност, няма ~~изчисления~~ изчисления

б) $Z = XY$ $\qquad f_{X,Y}(x,y) = cx^3y$

$f_{X,Y}(x,y) = 120x^3y$

$$\left| \begin{array}{l} Z = XY \\ W = X \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} X = W \\ Y = \frac{Z}{W} \end{array} \right.$$

$\rightarrow \frac{\partial Y}{\partial W} =$

$$\Rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial X}{\partial W} \\ \frac{\partial Y}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial W} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{w} & -\frac{z}{w^2} \end{vmatrix} = 0 - \frac{1}{w} = -\frac{1}{w}$$

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}\left(w, \frac{z}{w}\right) \cdot |J| = cw^3 \cdot \frac{z}{w} \cdot \frac{1}{w} = 120wz$$

$w + \frac{z}{w} \leq 1$; $w, z \geq 0$

$$f_Z(z) = \int_0^1 f_{Z,W}(z,w)\,dw = \int_0^1 120wz\,dw = 120z\int_0^1 w\,dw =$$

$$= 120z\left[\frac{w^2}{2}\right]_0^1 = 120z \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{60z}}$$