КОНТРОЛНО 1 17.12.2022 СЕМ

1. 10 двойки отиват на урок по танци и разделят се на 2 отбора A и B

а) X_1 = „брой хора в отбор A" $\sim Bin(20, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow \mathbb{E}X_1 = n \cdot p = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

X_2 = „брой двойки в един отбор" $\sim Bin(10, \frac{1}{2})$

$\mathbb{E}X_2 = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$

б) P(конкретен човек да е в отбор с партньора си) $= \frac{1}{2}$

Ако не е иска разделяне се докато не се падне в един отбор.

→ брой неуспехи до първи успех

$X \sim Ge(\frac{1}{2}) \Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

в) P(всички двойки да са заедно) $= (\frac{1}{2})^{10}$

→ разделят се докато всички не са доволни

брой неуспехи до първи успех

$X \sim Ge((\frac{1}{2})^{10}) \rightarrow \mathbb{E}X = \frac{1}{p} = 2^{10} = 1024$

→ Ако Y_A и Y_B са броя двойки в отборите A и B

$\Rightarrow Y_A \overset{d}{=} Y_B$ и $Y_A + Y_B = 10 \Rightarrow \mathbb{E}Y_A = 5$

3. 5 кръга по 1 дузпа за всеки отбор
- ако има равенство се продължава докато един осъм, а др. не
отбор A → 75%.
отбор B → 80%.

а) P(през първите 5 рунда двата отбора да са отбелязали в едни и същи рундове) = ?

↳ Трябва всеки път или да са вкарали едновременно или да са пропуснали едновременно

⇒ X = „двата отбора вкарват в едни и същи рундове"

$$P(X) = (75\% \cdot 80\% + 25\% \cdot 20\%)^5 =$$
$$= (0{,}75 \cdot 0{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}2)^5 =$$
$$= (0{,}6 + 0{,}05)^5 = (0{,}65)^5 = 0{,}116 \approx 11{,}6\ \%$$

б) P(след първите 5 кръга да има равенство) = ?

Голове отбор B от първите 5 кръга: $X \sim Bin(5, 80\%)$
Голове отбор A от първите 5 кръга: $Y \sim Bin(5, 75\%)$

$$P(X = Y) = \sum_{i=0}^{5} P(X = Y = i) = \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i}^2 (75\% \cdot 80\%)^k (25\% \cdot 20\%)^{5-k}$$

$$P(X=Y) = \binom{5}{1}^2 (75\% \cdot 80\%)^1 (25\% \cdot 20\%)^4 + \binom{5}{2}^2 (75\% \cdot 80\%)^2 (25\% \cdot 20\%)^3 +$$
$$+ \binom{5}{3}^2 (75\% \cdot 80\%)^3 (25\% \cdot 20\%)^2 + \binom{5}{4}^2 (75\% \cdot 80\%)^4 (25\% \cdot 20\%)^1 +$$
$$+ \binom{5}{5}^2 (75\% \cdot 80\%)^5 (25\% \cdot 20\%)^0 =$$

$$= 25 \cdot 0{,}6 \cdot (0{,}05)^4 + 100 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}05)^3 + 100 \cdot (0{,}6)^3 \cdot (0{,}05)^2 +$$
$$+ 25 \cdot (0{,}6)^4 \cdot (0{,}05)^1 + 1 \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}05)^0 =$$
$$= 0{,}000009375 + 0{,}0045 + 0{,}054 + 0{,}162 + 0{,}0776 =$$
$$= 0{,}2984 \approx 29{,}8\%$$

P(след първите 10 кръга да има равенство) = ?

$$= P(X=Y)\cdot(75\%\cdot 80\% + 25\%\cdot 20\%)^5 =$$

$$= 0{,}298 \cdot 0{,}116 = 0{,}0345\ldots \approx 3{,}46\%.$$

в) $\mathbb{E}$ # дузпи, които ще се изпълняват общо от двата отбора = ?

$$\mathbb{E}\,\text{дузпи} = 10\cdot(1 - P(X=Y)) + P(X=Y)\left(10 + \frac{1}{1-(75\%\cdot 80\% + 25\%\cdot 20\%)}\right)$$

$$\approx 10{,}85\ \%$$?

4.

P(OX, XY, YA да може да се състави Δ) =

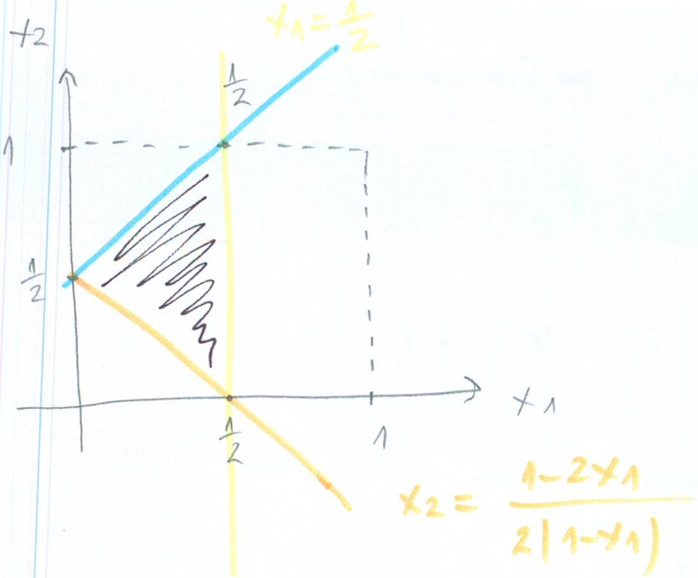
Избираме $X_1 \sim U(0,1)$

$Y \sim U(0, 1-X_1)$.

Можем да запишем Y като $(1-X_1)X_2$, където $X_2 \sim U(0,1)$ и $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

Искаме
$$\begin{cases} X_1 + Y > 1 - X_1 - Y \\ X_1 + 1 - X_1 - Y > Y \\ Y + 1 - X_1 - Y > X_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + Y > \frac{1}{2} \\ Y < \frac{1}{2} \\ X_1 < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + (1-X_1)X_2 > \frac{1}{2} \\ (1-X_1)X_2 < \frac{1}{2} \\ X_1 < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_2 > \frac{1-2X_1}{2(1-X_1)} \\ X_2 < \frac{1}{2(1-X_1)} \\ X_1 < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow X_2 = \frac{1}{2(1-X_1)}$$



$$\Rightarrow \frac{S_{\text{ww}}}{S_{\square}} = \frac{\int_0^{1/2} \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1-2x}{2(1-x)}\, dx}{1} = \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x}\, dx =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 19{,}32\,\%$$