Непрекъснати случайни величини

24.04

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to$ вер. пространство

деф: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ такава, че

а) $\{a < X \le b\} \in \mathcal{A}$, $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$

б) $\exists f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такава че $\mathbb{P}(a < X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

$\downarrow$ ф-я на плътност на X

От а) следва, че $\{X \in A\} \in \mathcal{A}$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и в частност

$A = (a,b), [a,b), [a,b], (-\infty, b], (a, \infty), \{a\}$, може да сметнем $\mathbb{P}(X=a)$.

$$0 \le \mathbb{P}(X=a) = \mathbb{P}\left(a - \frac{1}{n} < X \le a + \frac{1}{n}\right) = \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} f_X(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Откъдето $\mathbb{P}(X=a) = 0$ и $\mathbb{P}(a < X < b) =$
$\mathbb{P}(a < X \le b) =$
$\mathbb{P}(a \le X < b) =$
$\mathbb{P}(a \le X \le b)$

От б) следва, че
- $f_X(x) \ge 0$ за почти всички x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$D_{f_X} := \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$

носител на f_X

* Свойства:

- $F_X(x) := \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(z)\,dz$ за $x \in \mathbb{R}$

  ф-я на разпределение на X

- F_X е ненамаляваща
- F_X е дясно непрекъсната

- $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x)=0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} F_X(x)=1$

- $X \overset{d}{=} Y \iff f_X = f_Y$ (почти навсякъде)

- f_X е непрекъсната

  $\Rightarrow F_X$ е диференцируема и $\frac{d}{dx}F_X(x) = f_X(x)$

- $X \sim F_X$

Ако F_X е непрекъснато диференцируема, то X е непр. сл. вел.

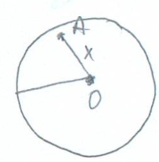
$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$$

- X е (абс.) непр. сл. вел $\iff$ F_X е абс. непр. В този случай F_X е диференцируема почти навсякъде и X има плътност

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}F_X(x), & \text{ако съществува} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

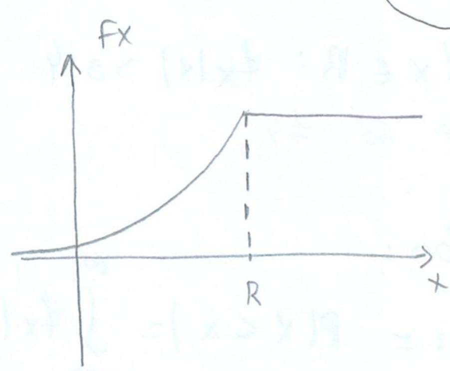
Достатъчно е $\frac{d}{dx}F_X(x)$ да съществува за изброимо много x.

7 Във вътрешността на окръжност с център т.O и радиус $R>0$ случайно се избира т.A. Нека $X=|OA|$. Да се намери разпределението на X.



↳ Нека $x \in [0,R)$. Тогава

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x \ge R \\ \frac{x^2}{R^2} = \frac{\pi x^2}{\pi R^2}, & 0<x<R \end{cases}$$



$\Rightarrow X$ е непрекъсната сл. вел. с плътност $f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{2x}{R^2}$ при $0<x<R$ и 0 иначе

$$\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^x \frac{2t}{R^2}\,dt, \quad \text{за } 0<x<R$$

$\boxed{+}$ Нека X е непр. сл. вел. с четна плътност, т.е. $f_X(-x) = f_X(x)$ за $x \in \mathbb{R}$. Да се намери $F_X(0) = P(X \le 0) = ?$ и да се представят $F_X(-x)$ и $P(|X| < x)$ чрез $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{P(X \le 0)}_{F_X(0)} = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx = 1 - F_X(0) \Rightarrow F_X(0) = 1 - F_X(0)$$

$$2F_X(0) = 1$$

$$F_X(0) = 1/2$$

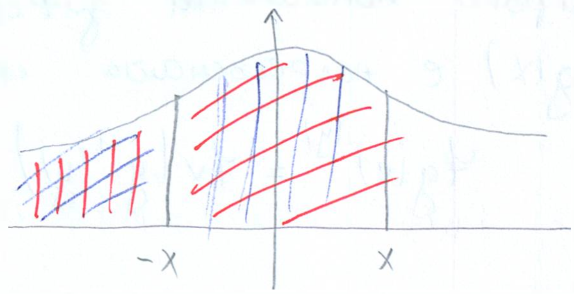
$$\int_{0}^{\infty} f_X(x)\,dx \underset{\substack{u := -x \\ du := -dx}}{=} -\int_{0}^{-\infty} f_X(-u)\,du = \int_{-\infty}^{0} f_X(u)\,du = F_X(0)$$

$$F_X(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt \underset{\substack{u := -x \\ du := -dx}}{=} \int_{x}^{\infty} f_X(t)\,dt = 1 - F_X(x)$$

$$P(|X| \le x) = \underline{P(-x \le X \le x)} =$$

$$= \underline{F_X(x)} - \underbrace{F_X(-x)}_{1 - F_X(x)} =$$

$$= 2F_X(x) - 1$$



Теория:

- X е сл. вел, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. За да бъде $g(X)$ сл. вел. е достатъчно $\{a < g(X) \le b\} = \{X \in g^{-1}((a,b])\}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}: a<b$, ако

$$g^{-1}((a,b]) \in B(\mathbb{R})$$

Ако в допълнение X е непрекъсната сл. вел, то не е задължително $g(X)$ да е непр. сл. вел.

- Контрапример: Нека X е непр. сл. вел. Да дефинираме

$$g(x) := 1 \quad \text{при} \quad x \ge 0$$
$$g(x) := 0 \quad \text{при} \quad x < 0$$

Тогава g е измерима ф-я, откъдето $g(X) \sim Ber(P(X \ge 0))$, т.е. $g(X)$ е дискретна сл. вел.

- Теорема: (смяна на променливи)

Нека $X \sim f_X$ и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е измерима ф-я. Ако g е строго монотонна диференцируема ф-я върху D_X, то $g(X)$ е непрекъсната сл. вел. с плътност

$$f_{g(X)}(y) = f_X(g^{-1}(y))\,|(g^{-1}(y))'|$$

96. $X \sim Exp(\lambda)$

$\Updownarrow$ $X \sim f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0,+\infty)}(x)$

$\Updownarrow$
$$X \sim f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 0 < x < +\infty \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Да се намерят плътностите на сл. вел:

а) $Y = -X$

б) $Y = 2X - 1$

в) $Y = \sqrt{X}$

г) $Y = X^{\alpha}$, за $\alpha > 0$

а) $g(x) = -x$

диференцируема ли е? → да
строго монотонна ли е? → да
$\Rightarrow g(x)$ е непр. сл. вел.

$g^{-1}(y) = h(y) = -y$

$f_{-X}(y) = f_X(-y) \cdot |-1| = \lambda e^{\lambda y} 1_{(0,+\infty)}(-y) = \lambda e^{\lambda y} 1_{(-\infty,0)}(y)$

б) $\underset{y}{\underset{\shortparallel}{g(x)}} = 2\underset{g^{-1}(y)}{\underset{\downarrow}{x}} - 1$

$y = 2g^{-1}(y) - 1 \Rightarrow g^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$
$\downarrow$
така получаваме $g^{-1}(y)$ от $g(x)$

$g^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$

$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{1}{2}$

$f_{2X-1}(y) = f_X(g^{-1}(y)) \, |(g^{-1}(y))'| = f_X\left(\frac{y+1}{2}\right) \cdot \left|\frac{1}{2}\right| =$

$= \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda\left(\frac{y+1}{2}\right)} 1_{(0,+\infty)}\left(\frac{y+1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}(y+1)} 1_{(-1,+\infty)}(y)$

$0 < \frac{y+1}{2} < \infty$

$2 \cdot 0 < y+1 < \infty$

$0 < y+1 < \infty$

$-1 < y < \infty$

в) $g(x) = \sqrt{x}$ за $x > 0$

$g^{-1}(y) = y^2$ за $y > 0$

$f_{\sqrt{x}}(y) = \lambda e^{-\lambda y^2} \cdot 1_{(0,\infty)}(y^2) =$

$= \lambda e^{-\lambda y^2} |2y| \cdot 1_{(0,\infty)}(y)$ обратната е дефинирана само когато $g > 0 \Rightarrow$ махаме нулата

$= \lambda e^{-\lambda^2} 2y \cdot 1_{(0,\infty)}(y)$

г) ?

* Теория:

$X \sim f_X$

$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$

* Теорема: $X \sim f_X$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е измерима, то

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx \Rightarrow DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}X)^2 f_X(x)\,dx$$

* Свойства:

- $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}X \geq 0$
- $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}X + b$, за $\forall a, b \in \mathbb{R}$
- $D(aX + b) = a^2 DX$

90. $X \sim f_X(x) = \begin{cases} c(x^2 + 2x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$

а) $c = ?$

б) $\mathbb{E}X = ?$ $\quad DX = ?$

в) $\mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}X) = ?$

г) $\mathbb{E}(X^2 + 3X) = ?$

↳ а)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^1 c(x^2 + \cancel{2x})\,dx = c\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= c\left[\frac{1}{3} + 1\right] = c \cdot \frac{1+3}{3} = c \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{c = \frac{3}{4}} \to 1 = \frac{4}{3}c$$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot\frac{3}{4}\cdot(x^2+2x)\,dx = \frac{3}{4}\int_0^1 x^3+2x^2\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^1 x^3\,dx + 2\cdot\frac{3}{4}\int_0^1 x^2\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \frac{6}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{4}_{\,2}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{16} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}} = \frac{3}{16} + \frac{1}{2} = \frac{3+8}{16} = \underline{\underline{\frac{11}{16}}}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2\cdot\frac{3}{4}(x^2+2x)\,dx = \frac{3}{4}\int_0^1 x^4+2x^3\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^1 x^4\,dx + 2\cdot\frac{3}{4}\int_0^1 x^3\,dx = \frac{3}{4}\cdot\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 + \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{20} + \frac{3}{8} = \frac{6+15}{40} = \underline{\underline{\frac{21}{40}}}$$

$$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{21}{40} - \left(\frac{11}{16}\right)^2 = \underbrace{\frac{21}{40} - \frac{121}{256}}_{\text{НОК}(40,\,256) = 1280} = \frac{672-605}{1280} = \frac{67}{1280}$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}052}}$$

b) $$\underset{F_X(\mathbb{E}X)}{\overset{\shortparallel}{P(X \le \mathbb{E}X)}} = \int_0^{11/16} \underbrace{\frac{3}{4}(x^2+2x)}_{f_X(x)}\,dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{11/16} + 2\cdot\frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{11/16} =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{(11/16)^3}{3} + \frac{3}{2}\cdot\frac{(11/16)^2}{2} =$$

$$\approx \frac{1}{4}\cdot 0{,}32 + \frac{3}{4}\cdot 0{,}47 =$$

$$= 0{,}08 + 0{,}35 \approx \underline{\underline{0{,}43}}$$

г) $\mathbb{E}(X^2+3X) =$

$$\mathbb{E}X^2 + 3\mathbb{E}X = \frac{21}{40} + 3\cdot\frac{11}{16} = \frac{21}{40} + \frac{33}{16} = \frac{207}{80} \approx \underline{2{,}59}$$

08.05

Основни непрекъснати разпределения

$X \sim Unif(a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}: a<b$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\cdot 1_{(a,b)}(x)$$

$\boxed{+}$ Нека $Y = \frac{X-a}{b-a}$. Намерете разпределението на Y? $Y\sim ?$

$$g(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{диф.}\uparrow$$

$$g^{-1}(y) = a+(b-a)y$$

#?

$$Y = \frac{X-a}{b-a} \overset{(T)}{=} Y \sim f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\cdot|(g^{-1}(y))'| =$$

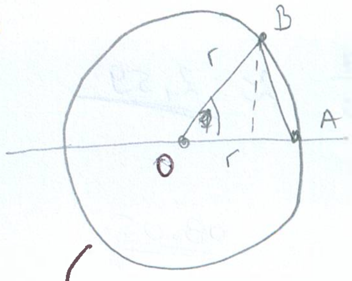
$$= f_X(a+(b-a))\cdot|b-a| =$$

$$= \frac{1}{\cancel{b-a}}\cdot 1_{(a,b)}(a+(b-a)y)\cdot\cancel{(b-a)} = 1_{(0,1)}(y) \Rightarrow Y\sim Unif(0,1)$$

$*$ $a < a+(b-a)y < b$
$\Updownarrow$
$0<y<1$

? има ли още от примера ?

91.



$\mathbb{E}\, S_{\Delta AOB} = ?$

$A(r,0)$

$B(r,\Phi)$

избираме ъгъла понеже той ще е равномерно разпределен

$\Phi \sim Unif(0,\pi)$ → $f_\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot 1_{(0,\pi)}(x)$

↳ равномерно избрано що е ъгъла Φ → това е уловката!

$$g(x) = \frac{r^2 \sin x}{2} \Rightarrow \mathbb{E}[g(\Phi)] = ?$$

$$\mathbb{E}[g(\Phi)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_\Phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r^2 \sin x}{2\pi}\,dx =$$

$$= \frac{r^2}{2\pi}\left[-\cos x\right]_0^\pi = \frac{r^2}{\pi}$$

92. $X \sim Unif(0,7)$

X - безотказната работа, в години на даден апарат

Y - време на смяна на апарата

$P(Y<4) = ?$ $\mathbb{E}Y = ?$ $DY = ?$

→ Считаме, че след дефект апаратът веднага бива заменен

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & X(\omega) < 5 \\ 5, & X(\omega) \geq 5 \end{cases}$$ т.е. $Y = X \cdot 1_{\{X<5\}} + 5 \cdot 1_{\{X \geq 5\}}$

* $F_Y(x) = P(U(0,7) < x) = \int_0^x \frac{1}{7}\,dy = \frac{x}{7}$

→ $P(Y<4) = P(X<4) = F_X(4) = \frac{4}{7}$

↳ $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X<5\}} + 5 \cdot 1_{\{X\geq 5\}}] = \mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X<5\}}] + \mathbb{E}[5 \cdot 1_{\{X \geq 5\}}] =$

$$= \int_0^5 x \cdot f_X(x)\,dx + 5 \cdot \int_5^7 \overset{\frac{1}{7}}{f_X(x)}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{7}\right]_0^5 + 5 \cdot \left[\frac{2}{7}\right]_5^7 =$$

$$= \frac{25}{14} + 5 \cdot \frac{2}{7} = \frac{25}{14} + \frac{10}{7} = \frac{25+20}{14} = \frac{45}{14}$$

? от къде $\frac{2}{7}$???

#?

$$DY = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2$$

$$\mathbb{E}Y^2 = \int_0^5 x^2 \cdot f_X(x)\,dx + 5^2 \int_5^7 f_X(x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{7}\right]_0^5 + 25\left[\frac{2}{7}\right]_5^7 = \frac{125}{21} + \frac{50}{7} = \frac{125+150}{21} = \frac{275}{21}$$

$$DY = \frac{275}{21} - \left(\frac{45}{14}\right)^2 = \frac{275}{21} - \frac{2025}{196} = \frac{7700-6075}{588} = \frac{1625}{588}$$

→ $n = 1000$ апарата

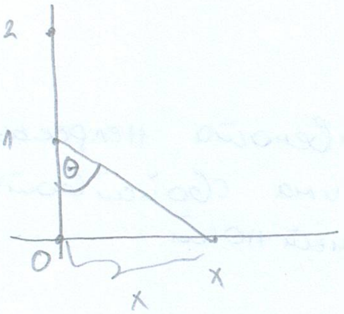
$X =$ „да се промени преди пълната година" $= \mathbb{P}(Y<5)$

$X \sim Ber\left(\frac{5}{7}\right)$

↳ средно ще трябва да се подменят $Bin\left(1000, \frac{5}{7}\right)$

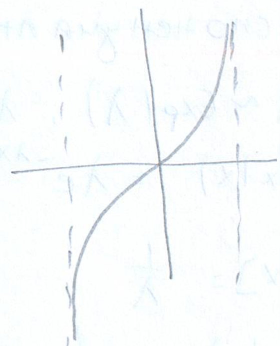
$$\Rightarrow 1000 \cdot \frac{5}{7} = 714,28$$

$\boxed{97.}$



ъгла $\theta \sim Unif\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$X = \tan\theta$ ↑ граф.



(T) $\Rightarrow X \sim f_X(x) = f_\theta(\arctan x)\left|(\arctan x)'\right| = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot 1_{(-\infty,\infty)}(x)$

$X \sim arctg(0,1)$

→ Тежки опашки

$$\mathbb{P}(X>t) = \int_t^\infty \frac{1}{\pi(1+x^t)}\,dx \approx \int_t^\infty \frac{1}{\pi x^2}\,dx = \frac{1}{\pi t}$$

↳ $$\mathbb{E}|X| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{\pi}\ln u\Big|_0^\infty = \infty$$

$u = 1+x^2$
$du = 2x\,dx$

+ Деф: $\mathbb{P}(X > t) \sim t^{-\alpha}$ при $t \to \infty$, $\alpha > 0$

Тогава $\nexists\, \mathbb{E}[X^k]$ не съществува за $k > \alpha - 1$

$\boxed{+}$ X е сл. вел. F_X - ф-я на разпределение

Нека F_X да е строго нарастваща + непрекъсната

$Y := F_X(X) \sim$?

↳ $\mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(F_X(X) \le y) = \mathbb{P}(X \le F^{-1}_X(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y,$

$y \in (0,1) \to Y \sim Unif(0,1)$

* $X \sim Unif(a,b)$, $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$, $x \in (a,b)$

$Y = \frac{X-a}{b-a}$, за $(0,1)$

→ Експоненциално разпределение

$X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$

! единственото непрекъснато, което има свойството безпаметност

• $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

• $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

→ $\mathbb{P}(X > t+s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)$

$\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$

опашката

↳ $\mathbb{P}(X > t+s \mid X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \underbrace{e^{-\lambda s}}_{\mathbb{P}(X > s)}$

94.

$X_1 \sim Exp(\lambda_1)$ $\quad X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

$\mathbb{E}X_1 = 8\,min \Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow 8 = \frac{1}{\lambda} \to \lambda = \frac{1}{8}$

$\mathbb{E}X_2 = 5\,min \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{5}$

↳ клиент избира по случаен начин опашка и чака $< 4\,min$

↳ A

$\mathbb{P}(I|A) = ?$

I - избира X_1 - първата опашка

II - избира X_2 - втората опашка

$$\mathbb{P}(I|A) = \frac{\mathbb{P}(I \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\mathbb{P}(I|A) = \frac{\mathbb{P}(A|I)\,\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(A|I)\,\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(A|II)\,\mathbb{P}(II)} \quad \to \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X_1 < 4)\cdot\frac{1}{2} + \mathbb{P}(X_2 < 4)\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \left(1 - e^{-\lambda_1\cdot 4} + 1 - e^{-\lambda_2\cdot 4}\right)\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \left(1 - e^{-\frac{4}{8}} + 1 - e^{-\frac{4}{5}}\right)\cdot\frac{1}{2} = \left(2 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{4}{5}}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A|I)\,\mathbb{P}(I) = \mathbb{P}(X_1 < 4)\cdot\frac{1}{2} = \left(1 - e^{-\lambda_1\cdot 4}\right)\cdot\frac{1}{2} = \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(I|A) = \frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\cancel{\frac{1}{2}}}{\left(2 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{4}{5}}\right)\cdot\cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{2 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{4}{5}}}$$

→ НОРМАЛНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot 1_{(-\infty,\infty)}(x)$$

↳ като интегрираме това трябва да получим 1

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ → нещо за съкратим нещо, да го интегрираме, за да получим 1

- $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, $Y \sim ?$ $\sim N(0,1)$ има го пример от лекции #???

→ $X \sim f_X$ → X е непрекъсната $\xrightarrow{T}$ теорема, която казва, че е непрекъсната

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - измерима ф-я $\Rightarrow g(x)$

диференцируема и строго монотонна

$g(x) = Y$, $g(x) = \frac{x-\mu}{\sigma}$

ф-я на разпределение на x в тази точка

→ $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le y\right) = \mathbb{P}(X \le \sigma y + \mu) = F_X(\sigma y + \mu) =$

$g(\sigma y + \mu)$ ↳ изваждаме μ и да разделим на σ

$$= \int_{-\infty}^{\sigma y+\mu} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\sigma y+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$u = \frac{x+\mu}{\sigma} = g(x)$

$x = \sigma y + \mu$

$\frac{1}{\sigma} dx = du$

$$= \int_{-\infty}^{y} f(u)\,du \Rightarrow Y \text{ е н.с.в. } f$$

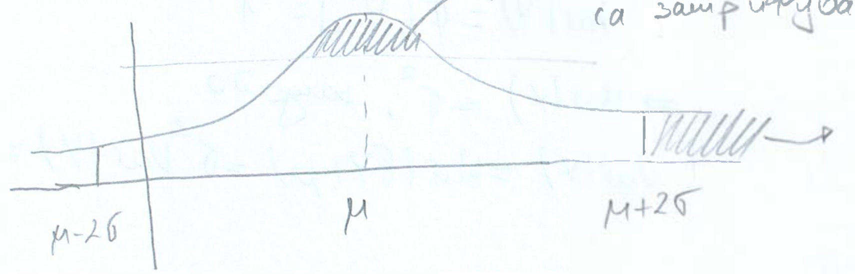
→ f_X е четна

$F_X(0) = \frac{1}{2}$

$F_X(-x) = 1 - F_X(x)$

(+) Нарисувайте нормално разпределение, като горните 10% са зашифровани

горните 10% да са зашифровани → не ни носи информация



? погледни удобно!

* Теорема (Моавър - Лаплас): $X_n \sim Bin(n,p)$, $Z \sim N(0,1)$

$$\underbrace{P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le z\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} P(Z \le z)$$

$$\frac{\frac{n}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} = \overset{\sqrt{n}}{\frac{n}{\sqrt{n}}} \, \frac{\left(\overbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i}^{\overline{Y_n}} - \mu\right)}{\sigma}$$

$\mu = \mathbb{E}[Y_1] = p$

$\sigma^2 = Var(Y_1) = p(1-p)$

$\boxed{98.}$ p за ези $= \frac{3}{4}$, хвърля се 2000 пъти

$P(1475 \le X \le 1535) = ?$

$X =$ „брой паднали се ези" $\sim Bin(n,p) = 2000 \cdot \frac{3}{4} = 500 \cdot 3 = 1500$

$$\hookrightarrow P(1475 \le X \le 1535) = P\left(\frac{1475 - 1500}{\sqrt{375}} \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{1535 - 1500}{\sqrt{375}}\right)$$

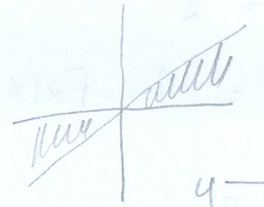
$\sqrt{6000 \cdot \frac{1}{16}}$

$\hookrightarrow \sqrt{np(1-p)}$

$$\approx P(-1,29 \le Z \le 1,81) = \Phi(1,81) - \Phi(-1,89)$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = 0$$

→ нечетна ф-я се интегрира до 0



$y \to y e^{-\frac{y^2}{2}}$

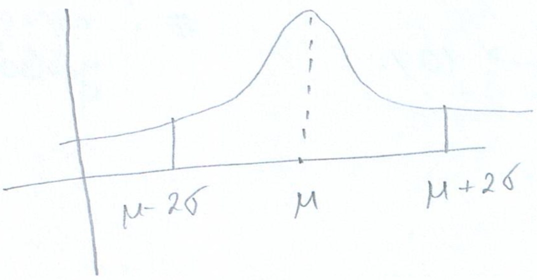
$$\mu = E[X] = E[\sigma Y + \mu] = \underbrace{\sigma E[Y]}_{0} + \mu = \mu$$

начин: ще го интегрираме и ще стане μ

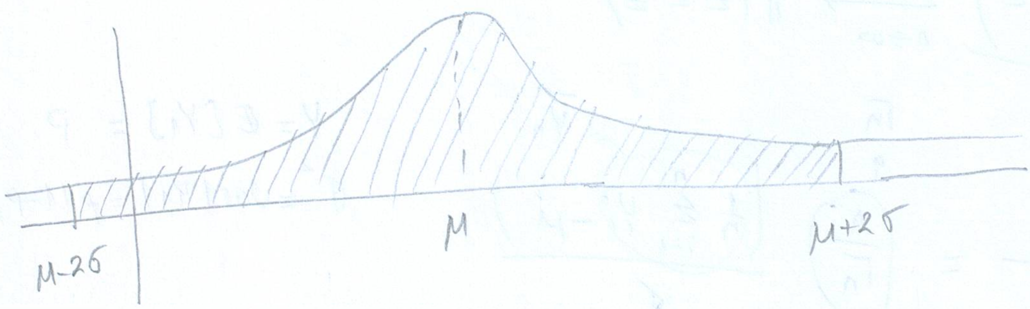
• $Var(Y) = E[Y^2] = 1$

$\Rightarrow Var(X) = \sigma^2$, защото

$Var(X) = Var(\sigma Y + \mu) = \sigma^2 Var(Y) = \sigma^2$



→ сл. вел. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$



по Чебишев

$$P(\mu - 2\sigma < X \le \mu + 2\sigma) = P(|X-\mu| \le 2\sigma) = 1 - P(|X-\mu| > 2\sigma) \ge$$

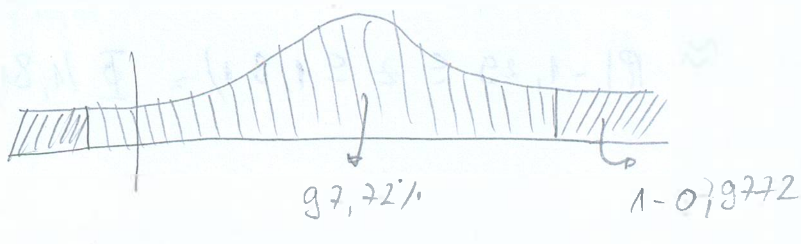
$$\ge 1 - \frac{Var}{(2\sigma)^2} = 75\%.$$

$$\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f_X(x)\, dx$$

→ шансът да си отгоре е ограничен с 25%

$$P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \le 2\right) = P(|Y| \le 2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 \approx 95{,}45\%.$$

$$P(Y \le y) = \Phi(y)$$



→ Непрекъснат вектор от случайни величини

(X, Y), ако $\exists f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$

- $P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$

- $D_{XY} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x,y) > 0\}$ носител на f_{XY}

носител

$$P(x_1 < X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy}_{= f_X(x)} \Big) dx = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\, dx \Rightarrow X \sim f_X$$

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx = 1$

$(X, Y) \sim f_{X,Y}$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (измерима) → ако е непрекъсната ф-я от $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е измерима

пр. сумата е измерима

$(x,y) \to (x+y)$

(T) $E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$ ...

- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
- $X \ge Y \Rightarrow E[X] \ge E[Y]$

100. X - пали лампите
Y - гаси лампите

$$f_{X,Y}(x,y) = cxy, \quad 0 < x < y < 1$$

а) константата $c = ?$

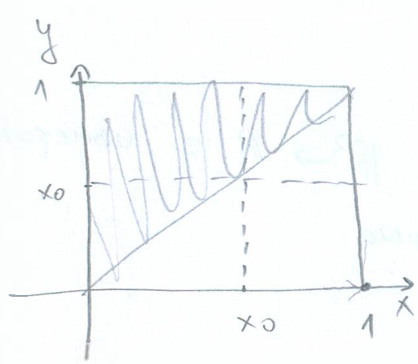
$$(X,Y) \sim f_{X,Y}(x,y) = cxy \cdot \mathbb{1}_{D_{XY}}(x,y)$$

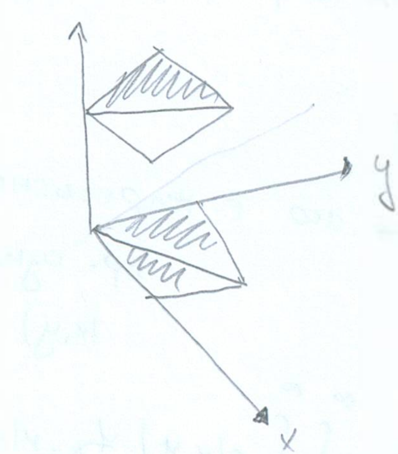
$$D_{X,Y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 1\} \cdot \mathbb{1}_{D_{XY}}(x,y) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \cdot \mathbb{1}_{(x,1)}(y)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} cxy \cdot \mathbb{1}_{D_{XY}}(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= c\int_0^1\int_x^1 xy\,dy\,dx = c\int_0^1 x\left\{\int_x^1 y\,dy\right\}dx = c\int_0^1 x\,\frac{1-x^2}{2}\,dx =$$

$$= \frac{c}{8} \Rightarrow \underline{\underline{c = 8}}$$





→ **Четна** е тази функция f, за която функцията от всеки определен аргумент е равна на същата функция от противоположния на този аргумент

- $\boxed{f(-x) = f(x)}$

↳ четни функции са четните степени на всички числа

↳ косинус е единствената четна тригонометрична функция

$\boxed{\cos(-x) = \cos x}$

→ **Нечетна** е тази функция f, за която функцията от всеки определен аргумент е противоположна на същата функция от противоположния на този аргумент

- $\boxed{f(-x) = -f(x)}$

↳ нечетни функции са нечетните степени на всички числа

↳ всички останали тригонометрични функции

- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $tg(-x) = -tg(x)$
- $ctg(-x) = -ctg(x)$

* Единствената функция, която е едновременно и четна и нечетна е $f(x) = 0$!

→ **Интегриране** на функция е процес на намиране на интеграл от тази функция, спрямо променлива.

↳ Интегралът може да се интерпретира като площ под кривата на графиката на x в интервала между две точки a и b.

→ **Диференциране** на функция е процесът на намиране на производната на тази функция

→ g^{-1} = обратната функция на функцията g