Задачи к лабораторной работе №1

Токарева Ульяна

01.04.2016

Теоретические основы

Сложность алгоритмов определяется для больших объемов обрабатываемых данных, т.е. при $n \to \infty$. В связи с этим, при сравнении трудоемкости двух алгоритмов, можно рассмотреть предел отношения функций их сложности: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$

В зависимости от значения предела возможно сделать вывод относительно скоростей роста функций:

- Предел равен константе и не равен нулю, значит, функции растут с одной скоростью: $f(n) = \Theta(g(n))$;
- Предел равен нулю, следовательно $g(n)$ растет быстрее, чем $f(n)$: $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$;
- Предел равен бесконечности, $g(n)$ растет медленнее, чем $f(n)$: $f(n) = \Omega(g(n))$;

1 Задание 5

- $100n \log_2 n = \Theta(n + (\log_2 n)^2)$
  Пусть $f(n) = 100n \log_2 n$,

  $g(n) = n + (\log_2 n)^2$, тогда
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$
  Утверждение неверно;

- $2^n = \Theta(2^{n+1})$
  Пусть $f(n) = 2^n$,

  $g(n) = 2^{n+1}$, тогда
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$
  Утверждение верно;

- $n^2 / \log_3 n = \mathcal{O}(n(\log_2 n)^2)$
  Пусть $f(n) = n^2 / \log_3 n$,

  $g(n) = n(\log_2 n)^2$, тогда
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$
  Утверждение неверно;

- $n! = \Omega(2^n)$
  Пусть $f(n) = n!$,

  $g(n) = 2^n$, тогда
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$
  Утверждение верно;

- $n \log_2 n = \Theta(n)$
  Пусть $f(n) = n \log_2 n$,

  $g(n) = n$, тогда
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$
  Утверждение неверно;

- $n! = \mathcal{O}(2^n)$
  Пусть $f(n) = n!$,

  $g(n) = 2^n$, тогда
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$
  Утверждение неверно;

- $n^2/\log_4 n = \Theta(n(\log_3 n)^2)$
  Пусть $f(n) = n^2/\log_4 n$,

  $g(n) = n(\log_3 n)^2$, тогда
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$
  Утверждение неверно;

2 Задание 8.a

Какая функция растёт быстрее? $n^{n^{\sqrt{n}}}$ или $(n!)^{2^n}$?

Очевидно, что $n!$ растёт быстрее, чем n;
Докажем, что 2^n растёт быстрее, чем $n^{\sqrt{n}}$:

Пусть $f(n) = n^{\sqrt{n}}$, $g(n) = 2^n$, тогда
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) = \mathcal{O}(g(n))$

$\Rightarrow (n!)^{2^n}$ растёт быстрее, чем $n^{n^{\sqrt{n}}}$