Министерство науки и высшего образования
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика»

Отчёт
по учебной практике
за 5 семестр 2020-2021 гг.

Руководитель практики,
ст. преп. кафедры ФН1 ____________________ Кравченко О.В.
подпись, дата

студент группы ФН1–51 ____________________ Верина Я.В.
подпись, дата

Москва
2021

Содержание

1 Постановка задачи

Решить сингулярную двуточечную краевую задачу методом конечных разностей

$$\varepsilon y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) + f(x) = 0, \quad x \in [0,\, 1],$$

со смешанными граничными условиями

$$\begin{aligned} -\alpha_1 y'(0) + \alpha_2 y(0) &= \gamma_1, \\ \beta_1 y'(1) + \beta_2 y(1) &= \gamma_2, \end{aligned}$$

при различных значениях параметра

$$\varepsilon = 1,\ 0.1,\ 0.01,\ 0.001.$$

Индивидуальное задание:

$$p(x) = x\sin(x) + x^2, \quad q(x) = \sqrt{x^2 + x}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x^3} + x.$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_1 = 6, \quad \gamma_2 = 9.$$

2 Теоретическая часть

2.1 Метод конечных разностей

Дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$\varepsilon y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) + f(x) = 0, \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

со смешанными граничными условиями

$$\begin{aligned} -\alpha_1 y'(0) + \alpha_2 y(0) &= \gamma_1, \\ \beta_1 y'(1) + \beta_2 y(1) &= \gamma_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Разобьем интервал $[a, b]$ на n узлов с шагом $h = x_i - x_{i-1}, i = 1, \ldots n$, где

$$h = \frac{b-a}{n},$$

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \ldots \quad x_n = b.$$

Обозначим

$$y(x_i) = y_i, \quad p(x_i) = p_i, \quad q(x_i) = q_i, \quad f(x_i) = f_i.$$

Заменим в дифференциальном уравнении (1) первые производные конечными разностями, тогда на концах отрезка

$$y'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'(x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

и в промежуточных точках

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \approx \frac{\nabla y}{\nabla x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}.$$

Тогда конечные разности для второй производной имеют следующий вид

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{\nabla(\nabla y)}{\nabla(\nabla x)} = \frac{(y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1})}{h^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

В итоге вместо дифференциального уравнения (1) со смешанными граничными условиями (2) получим систему, состоящую из $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $y_0, y_1, \ldots, y_n$

$$\begin{cases} -\alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} + \alpha_2 y_0 = \gamma_1, \\ \varepsilon \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = -f_i, \qquad i = 1, \ldots n-1, \\ \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} + \beta_2 y_n = \gamma_2. \end{cases}$$

Поделим второе уравнение системы на ε и умножим его на h^2, а первое и третье умножим на h. Запишем полученную систему в матричной форме $W \cdot Y = F$, где

$$W = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 h & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \dfrac{p_1 h}{2\varepsilon} & \dfrac{q_1 h^2}{\varepsilon} - 2 & 1 + \dfrac{p_1 h}{2\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \dfrac{p_2 h}{2\varepsilon} & \dfrac{q_2 h^2}{\varepsilon} - 2 & 1 + \dfrac{p_2 h}{2\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \dfrac{p_{n-1} h}{2\varepsilon} & \dfrac{q_{n-1} h^2}{\varepsilon} - 2 & 1 + \dfrac{p_{n-1} h}{2\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1 & \beta_1 + \beta_2 h \end{pmatrix},$$

$$
Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} \gamma_1 h \\ \dfrac{-f_1 h^2}{\varepsilon} \\ \dots \\ \dfrac{-f_{n-1} h^2}{\varepsilon} \\ \gamma_2 h \end{pmatrix}.
$$

Таким образом, решение сингулярной двуточечной краевой задачи $(1), (2)$ сводится к решению СЛАУ. Для поиска значений Y применим метод прогонки, который используется для решения систем вида $A \cdot X = B$, где A – трехдиагональная(пятидиагональная) матрица.

3 Код программы

3.1 Метод конечных разностей

```
function [xx Y] = konech_raznoste(eps,N)
a=0; b=1;
h=(b-a)/N;
c1=0;c2=-1; d1=0; d2=1;
c = 6; d = 9;
syms x;
p = x*sin(x) +x^2;
q = sqrt(x^2+x);
f = -x-sqrt(x^2-x^3);
for i=1:N+1
xx(i)=a+(i-1)*h;
end
n=length(xx)-1;

for i=1:n-1
pp(i)= double(subs(p,x,xx(i+1))/eps);
qq(i)= double(subs(q,x,xx(i+1))/eps);
ff(i)= double(subs(f,x,xx(i+1))/eps);
end

F=zeros(n+1,1);

%Собираем матрицу F
F(1)= c*h;
F(n+1) = d*h;
for i = 1:n-1
F(i+1)=ff(i)*h*h;
end

%Собираем матрицу W
aa=zeros(n-1,1);
for i=1:n-1
aa(i)=qq(i)*h*h-2;
end
aaa=[c1*h - c2; aa;d1*h + d2 ]; %главная диагональ

bb=zeros(n-2,1);
for i=1:n-1
bb(i)=1-h/2*pp(i);
end
bbb=[bb;-d2];

cc=zeros(n-2,1);
for i=1:n-1
cc(i)=1+h/2*pp(i);
end
ccc=[c2; cc];
```

```
W=diag(aaa,0)+diag(bbb,-1)+diag(ccc,1);

Y=progonkaa(W,F);
```

3.2 Метод прогонки

```
function x= progonkaa(A,b)
[n n]=size(A);
P(1)=-A(1,2)/A(1,1); %-c1/y1, y1=b1
Q(1)=b(1,1)/A(1,1) ;%d1/y1, y1=b1

for i=2:n-1 %прямая прогонка находим коэфф P,Q
yi=A(i,i)+A(i,i-1)*P(i-1);
P(i)=-A(i,i+1)/yi;
Q(i)=(b(i,1)-A(i,i-1)*Q(i-1))/yi;
end

yn=A(n,n)+A(n,n-1)*P(n-1);
Q(n)=(b(n,1)-A(n,n-1)*Q(n-1))/yn;

%обратный ход находим икс
x(n)=Q(n);
for i=n-1:-1:1
x(i)=P(i)*x(i+1)+Q(i);
end
```

3.3 Решение сингулярной двуточечной задачи

```
function xxx = progonka()
[x0 y0] =konech_raznoste(1,20);
[x1 y1]=konech_raznoste(0.1,20);
[x2 y2]=konech_raznoste(0.01,25);
[x3 y3]=konech_raznoste(0.001,50);

hold on; grid on;
plot(x0,y0,'o','Linewidth', 2, 'Color', 'r');
plot(x0,y0,'Linewidth', 2, 'Color', 'r');
plot(x1,y1,'o','Linewidth', 2, 'Color', 'b');
plot(x1,y1,'Linewidth', 2, 'Color', 'b');
plot(x2,y2,'o','Linewidth', 2, 'Color', 'g');
plot(x2,y2,'Linewidth', 2, 'Color', 'g');
plot(x3,y3,'o','Linewidth', 2, 'Color', 'm');
plot(x3,y3,'Linewidth', 2, 'Color', 'm');
legend('Узлы','eps=1','Узлы','eps=0.1','Узлы','eps=0.01','Узлы','eps=0.001');
```

4 Результаты работы программы

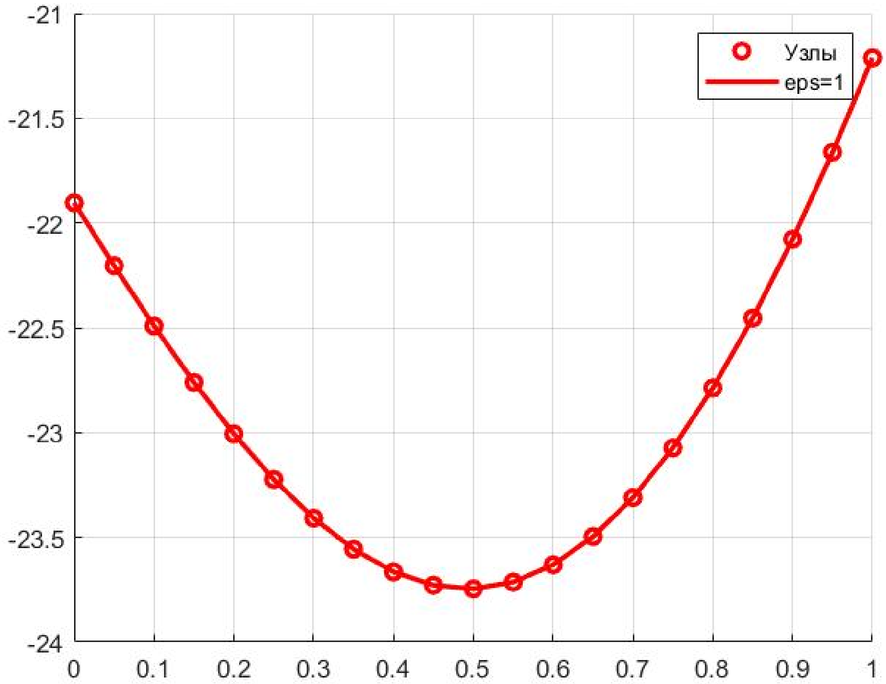

Рис. 1: Решение задачи, $\varepsilon = 1$

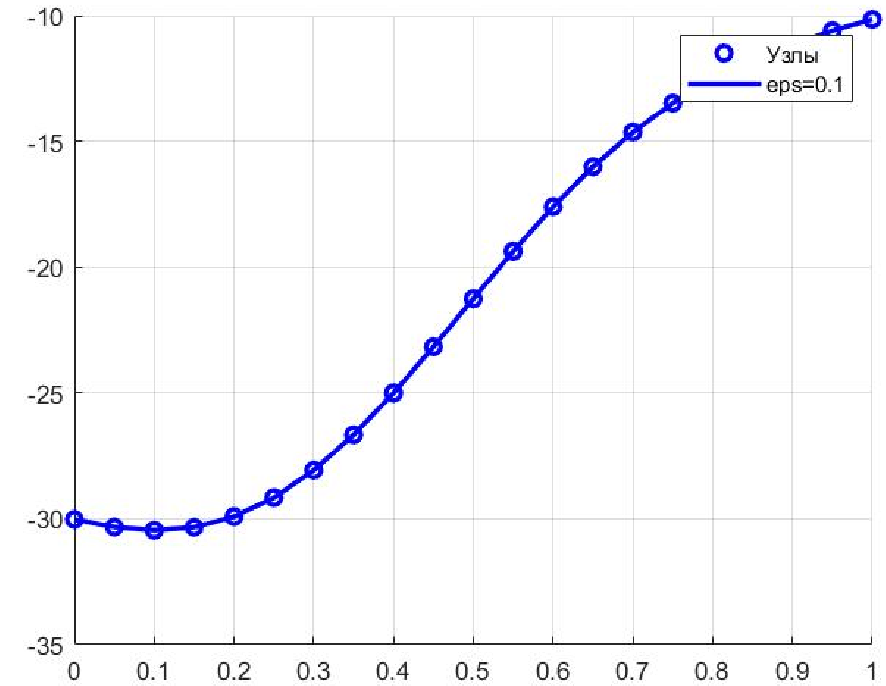

Рис. 2: Решение задачи, $\varepsilon = 0.1$

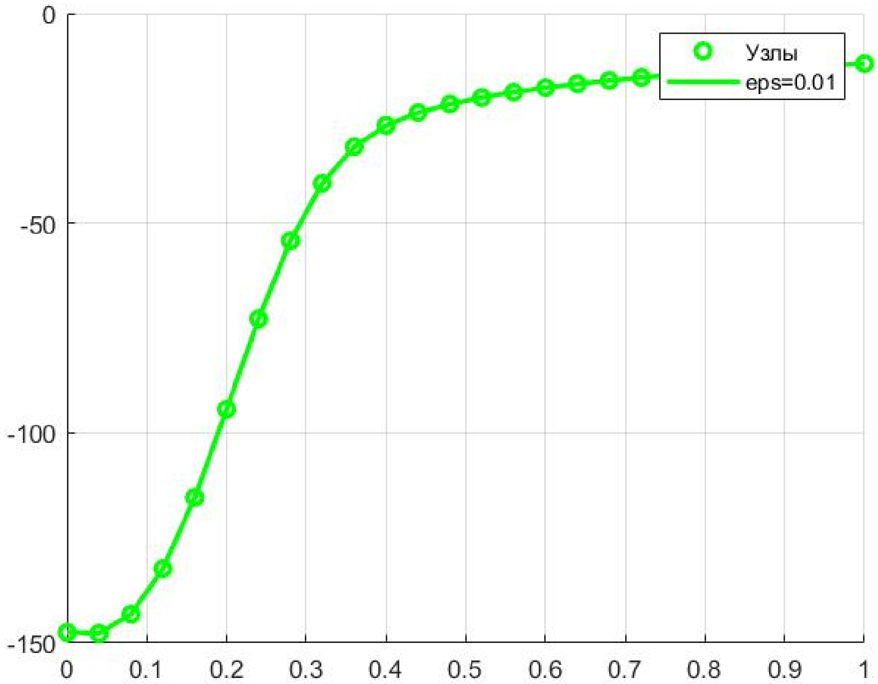

Рис. 3: Решение задачи, $\varepsilon = 0.01$

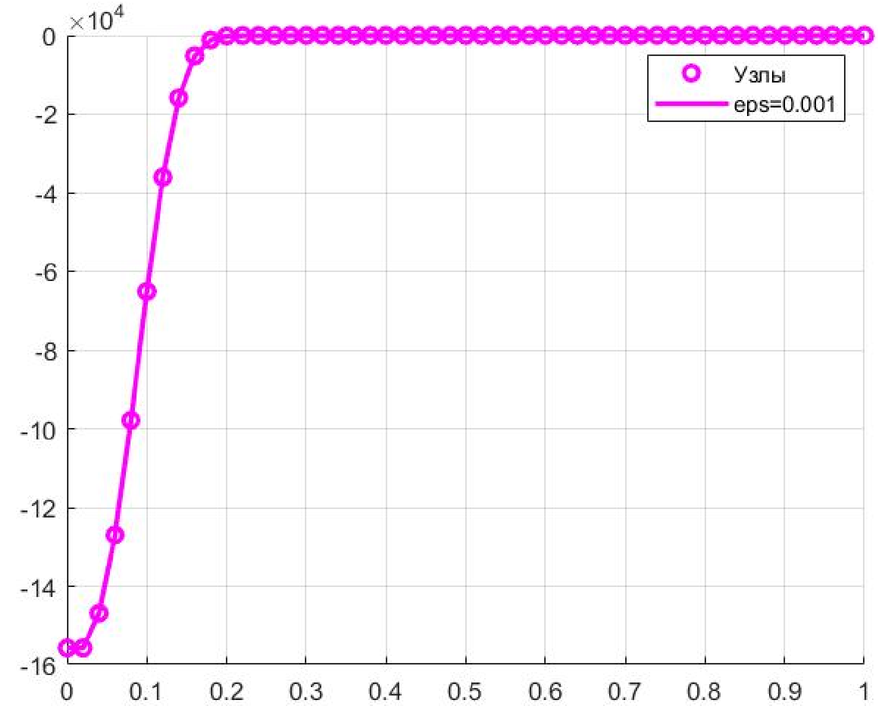

Рис. 4: Решение задачи, $\varepsilon = 0.001$

Список литературы

[1] Блюмин А.Г., Федотов А.А., Храпов П.В. Численные методы вычисления интегралов и решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Численные методы». — М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. — 74 с.

[2] Самарский А.А. Введение в численные методы. СПб.: Издательство «Лань», 2005. — 288 с.

[3] Дьяконов В. П. MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.: ил.

[4] Львовский С.М. Набор и вёрстка в системе LaTeX – 3-е изд., перераб. и доп. – 2003.