LEILÕES COM ORÇAMENTO

Yan Soares Couto

2017

Instituto de Matemática e Estatística

PROBLEMA - ENTRADA

Dados:

- Conjunto I de n participantes.
- Conjunto J de k itens com um item falso j_0.
- Preços mínimos r_j para todo $j \in J$.
- Valorações $v_{i,j}$ para todo $(i, j) \in I \times J$.
- Preços máximos $m_{i,j}$ para todo $(i, j) \in I \times J$.

Tal que:

- $r_{j_0} = 0$
- $m_{i,j_0} = \infty$ para todo $i \in I$.
- $v_{i,j_0} = 0$ para todo $i \in I$.

PROBLEMA - SOLUÇÃO

Solução: (μ, p) com $\mu \in I \times J$ com cada $i \in I$ aparecendo exatamente uma vez em μ, e cada $j \neq j_0$ no máximo uma vez, e $p_j \geq 0$ para todo $j \in J$, e $p_{j_0} = 0$.

Defina a utilidade de $i \in I$ quando compra o item $j \in J$ como

$$u_{i,j}(p_j) = \begin{cases} v_{i,j} - p_j & \text{se } p_j < m_{i,j} \\ -\infty & \text{se } p_j \geq m_{i,j} \end{cases}$$

Defina $u_i = u_{i,j}(p_j)$ para j tal que $(i, j) \in \mu$. Se $j = j_0$ dizemos que i não está emparelhado.

(μ, p) é viável se $u_i \geq 0$ para todo i e $p_j \geq r_j$ para todo $(i, j) \in \mu$.

(μ, p) é estável se $u_i \geq u_{i,j}(p_j)$ para todo $j \in J$.

(μ, p) é ótima se é estável e, para toda solução estável (μ', p'), vale que $u_i \geq u'_i$ para todo i.

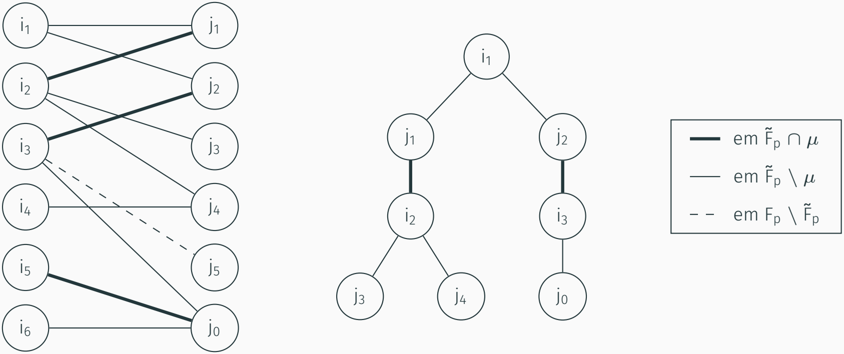
Defina o grafo de melhores escolhas para preços p como $G_p := (I \cup J, F_p)$, onde $(i, j) \in F_p$ sse $u_{i,j}(p_j) \geq u_{i,j'}(p_{j'})$ para todo j'.

Defina o grafo de melhores escolhas viáveis para preços p como $\tilde{G}_p := (I \cup J, \tilde{F}_p)$, onde $(i, j) \in \tilde{F}_p$ sse $(i, j) \in F_p$ e $p_j \geq r_j$.

Considere $\hat{\mu} := \{(i, j) \in \mu \mid j \neq j_0\}$. Note que $\hat{\mu}$ é um emparelhamento nesses grafos. Um caminho alternante em $\tilde{F}_p$ é um caminho que alterna entre arestas emparelhadas e não emparelhadas.

Uma árvore alternante é uma árvore na qual cada caminho da raiz a uma folha é um caminho alternante. Tal árvore é maximal se não pode ser extendida.

Nesse caso, cada folha é o item falso, um item sem comprador, ou um participante cujas melhores escolhas viáveis já estão na árvore.



1. Começamos com $(\mu, \mathrm{p}) = (\emptyset, 0)$.

2. Escolha i exposto, e encontre uma árvore alternante maximal em $\tilde{G}_p$.

3. Se j_0 ou um item não comprado está na árvore, aumente o emparelhamento.

4. Caso contrário, aumente os pesos de $F_p(T)$, onde T são os participantes na árvore, e volte para o passo 2.

ALGORITMO - AUMENTANDO PREÇOS

Aumentaremos todos os pesos em $F_p(T)$ por $\delta = \min(\delta_{in}, \delta_{fsb}, \delta_{out})$, onde

δ_{in} é o mínimo que devemos aumentar para criar uma nova melhor escolha.

δ_{fsb} é o mínimo que devemos aumentar para tornar uma aresta de melhor escolha em viável.

δ_{out} é o mínimo que devemos aumentar para que uma aresta de melhor escolha de T saia do grafo.

Aumentaremos todos os pesos em $F_p(T)$ por $\delta = \min(\delta_{in}, \delta_{fsb}, \delta_{out})$, onde

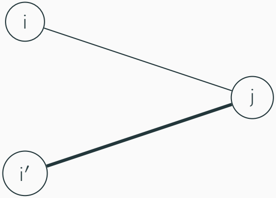
δ_{in} é o mínimo que devemos aumentar para criar uma nova melhor escolha. $\delta_{in} = \min\{u_i - v_{i,j} + p_j \mid i \in T,\ j \notin F_p(T),\ p_j < m_{i,j}\}$

δ_{fsb} é o mínimo que devemos aumentar para tornar uma aresta de melhor escolha em viável. $\delta_{fsb} = \min\{r_j - p_j \mid j \notin F_p(T)\}$

δ_{out} é o mínimo que devemos aumentar para que uma aresta de melhor escolha de T saia do grafo.
$\delta_{out} = \min\{m_{i,j} - p_j \mid i \in T,\ j \in F_p(i)\}$

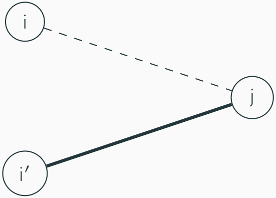
Não existe item em $F_p(T)$ emparelhado com participante fora de T.

Caso 1:



$$i \in T \implies i' \in T$$

Caso 2:



$$i \in T \implies \perp$$

```
Inicialize (μ, p) = (∅, 0)
enquanto existe i_0 não emparelhado :
    Seja T e S o conjunto de participantes e itens de uma
        árvore alternante máxima em G̃_p.
    enquanto todos j ∈ S estão emparelhados e j_0 ∉ S :
        Calcule δ = min(δ_in, δ_fsb, δ_out).
        Faça p_j = p_j + δ para todo j ∈ F_p(T).
        μ = μ ∩ F̃_p
        Seja T e S o conjunto de participantes e itens de uma
            árvore alternante máxima em G̃_p.
    Aumente μ usando o caminho alternante na árvore.
devolve (μ, p)
```

Corretude. O algoritmo termina e devolve uma solução viável e estável.

ALGORITMO - PSEUDOCÓDIGO

Inicialize $(\mu, p) = (\emptyset, 0)$
enquanto existe i_0 não emparelhado :
    Seja T e S o conjunto de participantes e itens de uma árvore alternante máxima em $\tilde{G}_p$.
    enquanto todos $j \in S$ estão emparelhados e $j_0 \notin S$:
        Calcule $\delta = \min(\delta_{in}, \delta_{fsb}, \delta_{out})$.
        Faça $p_j = p_j + \delta$ para todo $j \in F_p(T)$.
        $\mu = \mu \cap \tilde{F}_p$
        Seja T e S o conjunto de participantes e itens de uma árvore alternante máxima em $\tilde{G}_p$.
    Aumente μ usando o caminho alternante na árvore.
devolve (μ, p)

Corretude. O algoritmo termina e devolve uma solução viável e estável. ✓

Complexidade. O algoritmo pode ser implementado em tempo $\mathcal{O}(nk^3)$.

1. Uma árvore alternante maximal pode ser encontrada em $\mathcal{O}(k^2)$.
2. O laço externo consome tempo $\mathcal{O}(nk^3)$.
3. Se provarmos que sequências de atualizações do tipo δ_{in} podem ser realizadas em tempo $\mathcal{O}(k^2)$, a complexidade do laço interno fica $\mathcal{O}(nk^3)$.

Complexidade. O algoritmo pode ser implementado em tempo $\mathcal{O}(nk^3)$.

1. Uma árvore alternante maximal pode ser encontrada em $\mathcal{O}(k^2)$. ✓
2. O laço externo consome tempo $\mathcal{O}(nk^3)$.
3. Se provarmos que sequências de atualizações do tipo δ_{in} podem ser realizadas em tempo $\mathcal{O}(k^2)$, a complexidade do laço interno fica $\mathcal{O}(nk^3)$.

Complexidade. O algoritmo pode ser implementado em tempo $\mathcal{O}(nk^3)$.

1. Uma árvore alternante maximal pode ser encontrada em $\mathcal{O}(k^2)$. ✓
2. O laço externo consome tempo $\mathcal{O}(nk^3)$. ✓
3. Se provarmos que sequências de atualizações do tipo δ_{in} podem ser realizadas em tempo $\mathcal{O}(k^2)$, a complexidade do laço interno fica $\mathcal{O}(nk^3)$.

Complexidade. O algoritmo pode ser implementado em tempo $\mathcal{O}(nk^3)$.

1. Uma árvore alternante maximal pode ser encontrada em $\mathcal{O}(k^2)$. ✓
2. O laço externo consome tempo $\mathcal{O}(nk^3)$. ✓
3. Se provarmos que sequências de atualizações do tipo δ_{in} podem ser realizadas em tempo $\mathcal{O}(k^2)$, a complexidade do laço interno fica $\mathcal{O}(nk^3)$. ✓

ALGORITMO - ATUALIZAÇÕES δ_{in}

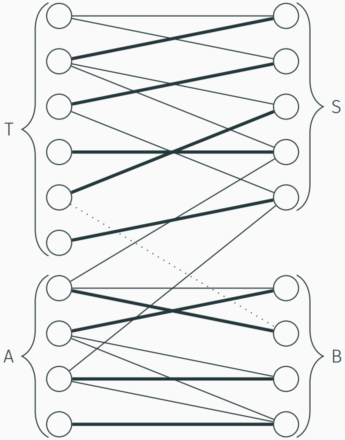
Vamos manter os seguintes valores calculados durante o procedimento:

- $u_i := \max\{u_{i,j}(p_j) \mid j \in F_p(T)\}$ para todo $i \in T$.
- $\gamma_j^{in} := \min\{u_i - v_{i,j} + p_j \mid i \in T,\ p_j < m_{i,j}\}$ para todo $j \notin F_p(T)$.
- $\gamma_j^{fsb} := r_j - p_j$ para todo $j \in F_p(T) \setminus \tilde{F}_p(T)$.
- $\gamma_i^{out} := \min\{m_{i,j} - p_j \mid j \in F_p(i)\}$ para todo $i \in T$.

Note que $\delta_{in} = \min\{\gamma_j^{in} \mid j \notin F_p(T)\}$ e o análogo para δ_{fsb} e δ_{out}.

Com estes valores calculados, conseguimos calcular δ em $\mathcal{O}(k)$.

Podemos fazer o algoritmo da árvore alternante maximal aos poucos com complexidade total $\mathcal{O}(k^2)$.



Atualizações:

- u_i em T: $\mathcal{O}(|T|)$.
- γ^{in} em B: $\mathcal{O}(|B|(|T| + |A|))$.
- γ^{in} em S: $\mathcal{O}(|S||A|)$.
- γ^{fsb}: $\mathcal{O}(|S| + |B|)$.
- γ^{out} em A: $\mathcal{O}(|A|(|S| + |B|))$.
- γ^{out} em T: $\mathcal{O}(|T||B|)$.

No total, temos um número constante de operações por par em $S \times T$, e assim complexidade $\mathcal{O}(k^2)$.

RESULTADOS

Provamos: O algoritmo discutido encontra uma solução viável e estável em tempo $\mathcal{O}(nk^3)$.

Teorema. A solução devolvida pelo algoritmo é ótima.

Exemplo. Nenhum algoritmo para resolver o problema é à prova de estratégia.

Teorema. O algoritmo também pode ser usado para resolver o problema se a função de utilidade for $u_{i,j}(p_j) = v_{i,j} - c_i c_j p_j$.

FUNÇÃO MAIS GENÉRICA

Dados $\hat{v}$, $\hat{m}$ e $\hat{r}$. Encontre $(\hat{\mu}, \hat{p})$ que siga as restrições do problema original, exceto que $\hat{u}_{i,j}(\hat{p}_j) = \hat{v}_{i,j} - c_i c_j \hat{p}_j$.

Defina v, m e r tal que $v_{i,j} = \frac{\hat{v}_{i,j}}{c_i}$, $m_{i,j} = \hat{m}_{i,j} c_j$ e $r_j = \hat{r}_j c_j$. Seja (μ, p) uma solução para o problema, e considere $(\hat{\mu}, \hat{p})$, onde $\hat{\mu} = \mu$ e $\hat{p}_j = \frac{p_j}{c_j}$.

Se (μ, p) é viável então $(\hat{\mu}, \hat{p})$ também é.

Se (μ, p) é estável então $(\hat{\mu}, \hat{p})$ também é.

Se (μ, p) é ótima então $(\hat{\mu}, \hat{p})$ também é.

FUNÇÃO MAIS GENÉRICA

Dados $\hat{v}$, $\hat{m}$ e $\hat{r}$. Encontre $(\hat{\mu}, \hat{p})$ que siga as restrições do problema original, exceto que $\hat{u}_{i,j}(\hat{p}_j) = \hat{v}_{i,j} - c_i c_j \hat{p}_j$.

Defina v, m e r tal que $v_{i,j} = \frac{\hat{v}_{i,j}}{c_i}$, $m_{i,j} = \hat{m}_{i,j} c_j$ e $r_j = \hat{r}_j c_j$. Seja (μ, p) uma solução para o problema, e considere $(\hat{\mu}, \hat{p})$, onde $\hat{\mu} = \mu$ e $\hat{p}_j = \frac{p_j}{c_j}$.

Se (μ, p) é viável então $(\hat{\mu}, \hat{p})$ também é. ✓

Se (μ, p) é estável então $(\hat{\mu}, \hat{p})$ também é.

Se (μ, p) é ótima então $(\hat{\mu}, \hat{p})$ também é.

Dados $\hat{v}$, $\hat{m}$ e $\hat{r}$. Encontre $(\hat{\mu}, \hat{p})$ que siga as restrições do problema original, exceto que $\hat{u}_{i,j}(\hat{p}_j) = \hat{v}_{i,j} - c_i c_j \hat{p}_j$.

Defina v, m e r tal que $v_{i,j} = \frac{\hat{v}_{i,j}}{c_i}$, $m_{i,j} = \hat{m}_{i,j} c_j$ e $r_j = \hat{r}_j c_j$. Seja (μ, p) uma solução para o problema, e considere $(\hat{\mu}, \hat{p})$, onde $\hat{\mu} = \mu$ e $\hat{p}_j = \frac{p_j}{c_j}$.

Se (μ, p) é viável então $(\hat{\mu}, \hat{p})$ também é. ✓

Se (μ, p) é estável então $(\hat{\mu}, \hat{p})$ também é. ✓

Se (μ, p) é ótima então $(\hat{\mu}, \hat{p})$ também é.

FUNÇÃO MAIS GENÉRICA

Dados $\hat{v}$, $\hat{m}$ e $\hat{r}$. Encontre $(\hat{\mu}, \hat{p})$ que siga as restrições do problema original, exceto que $\hat{u}_{i,j}(\hat{p}_j) = \hat{v}_{i,j} - c_i c_j \hat{p}_j$.

Defina v, m e r tal que $v_{i,j} = \frac{\hat{v}_{i,j}}{c_i}$, $m_{i,j} = \hat{m}_{i,j} c_j$ e $r_j = \hat{r}_j c_j$. Seja (μ, p) uma solução para o problema, e considere $(\hat{\mu}, \hat{p})$, onde $\hat{\mu} = \mu$ e $\hat{p}_j = \frac{p_j}{c_j}$.

Se (μ, p) é viável então $(\hat{\mu}, \hat{p})$ também é. ✓

Se (μ, p) é estável então $(\hat{\mu}, \hat{p})$ também é. ✓

Se (μ, p) é ótima então $(\hat{\mu}, \hat{p})$ também é. ✓

Perguntas?