

系名_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

一. 填空题 (每空 3 分, 共 15 题) (请将答案直接填写在试题纸横线上!)

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x^2+y^2)^{\frac{x^2+2}{x^2+y^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(2,1)$ 处的微分 $df = 2dx + dy$, 则 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+2t, 1+t) - f(2,1)}{t} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 若 $z = y^x$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, e) = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 f 为可微且 $f'(0) = 1$, 则函数 $z(x,y) = xy + f(\frac{y}{x})$ 在点 $(1,0)$ 处的微分 $dz = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 从 $(u_0, v_0) = (2,1)$ 的邻域到 $(x_0, y_0) = (3,4)$ 的邻域中, 向量值函数 $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 v^2 \end{cases}$ 有可微的逆向量值函数 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}(3,4) = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 设函数 $f(u,v) \in C^{(1)}$, 函数 $w(x,y,z) = f(x-y, x-z)$, 则 $\text{grad } w = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 已知函数 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿单位向量 \mathbf{l} 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(1,1) = 0$, 则 $\mathbf{l} = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. $\frac{1}{x+y}$ 在点 $(1,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

9. 曲线 $\begin{cases} x = e^t \\ y = 2 \sin t + \cos t \\ z = 1 + e^{3t} \end{cases}$ 在 $t = 0$ 所对应的点处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

10. 曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$ 和曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 的交线在点 $(1,-1,2)$ 处的法平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

11. 曲面 $e^z + xy - z = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

12. 已知 $z = z(x,y)$ 由方程 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - z - 7 = 0$ 确定的一个隐函数, 则 $z = z(x,y)$ 的驻点 $(x_0, y_0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

13. 设 $I(y) = \int_y^{y^2} e^{x^2 y} dx$, 则 $I'(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

14. $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xy}}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. 所有 2 阶实数矩阵 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ 组成一个 4 维线性空间 V ，定义向量值函数 $\mathbf{f}: V \rightarrow V$ ， $\mathbf{f}(X) = X^2$ ，则 $\mathbf{f}(X)$ 在 $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 处全微分为_____。

填空题答案

- A1 e^2 B1 e^2
A2 5 B2 2
A3 2 B3 5
A4 $2dy$ B4 $2dy$
A5 2 B5 $(f'_u + f'_v, -f'_u, -f'_v)$
A6 $(f'_u + f'_v, -f'_u, -f'_v)$ B6 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ 或 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 一个即可
A7 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ 或 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 一个即可 B7 2
A8B8 $1 - (x-1+y) + (x-1+y)^2 + o((x-1)^2 + y^2)$ 或 $3 - 3(x+y) + (x+y)^2 + o((x-1)^2 + y^2)$
A9B9 $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2+3t \end{cases}$ 或等价形式 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$
A10B10 $8(x-1) + 10(y+1) + 7(z-2) = 0$ 或者 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
A11B11 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$
A12B12 $(0, 0)$
A13B13 e
A14B14 0
A15B15 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dX + (dX) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 或 $\begin{pmatrix} 2dx_{11} & dx_{12} \\ dx_{21} & 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dx_{11} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dx_{12} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dx_{21}$

二. 计算题 (每题 10 分, 共 4 题) (请写出详细的计算过程和必要的根据!)

16. 设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, 回答以下问题:

(I) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否连续, 说明理由;

(II) 函数 $f(x,y)$ 在原点处沿任意给定的方向 $u = (a,b)$ ($a^2 + b^2 = 1$) 的方向导数是否存在?

若存在, 求出这个方向导数, 若不存在, 说明理由;

(III) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否可微, 若可微, 求出这个微分, 若不可微, 说明理由。

解: (I) 函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处连续。这是因为当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 时, 我们有

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|x||y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}^3}{x^2+y^2} = x^2 + y^2 \rightarrow 0$$

(II) 函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处沿任意给定的方向 $u = (a,b)$ ($a^2 + b^2 = 1$) 的方向导数是存在且为零。理由如下。

$$\frac{f(ta, tb) - f(0,0)}{t} = \frac{t^4 ab^3}{t^3(a^2 + b^2)} = tab^3 \rightarrow 0, \text{ 当 } t \rightarrow 0 \text{ 时。}$$

注: 也可先按(III)中证得 $df(0,0) = 0$, 从而 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}}(0,0) = df_{(0,0)}(\mathbf{I}) = 0$ 。

(III) 当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 时

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|x||y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}^3}{x^2+y^2} = x^2 + y^2 = o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

因此函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处可微,

且 $df(0,0) = 0$ 。

17. 已知方程 $2z - e^z + 1 + \int_y^{x^2} \sin(t^2) dt = 0$ 在 $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$ 的某个邻域中确定了一个隐函数

$$z = z(x, y). \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1).$$

解: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \sin(x^4), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\sin(y^2), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2 - e^z,$

代入 $(1, 1, 0)$ 得到 $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1, 0) = 2 \sin 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 1, 0) = -\sin 1, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 0) = 1.$

因此 $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1, 0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 0)} = -2 \sin 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1, 0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 0)} = \sin 1.$

在恒等式 $F(x, y, z(x, y)) = 0$ 两边对 y 求导, 得到

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin(y^2) + (2 - e^z) \frac{\partial z}{\partial y}$$

再对 x 求导, 得到

$$0 = -e^z \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + (2 - e^z) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

或者对 $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}$ 求导得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \frac{\partial z}{\partial x}\right) \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

代入 $(1, 1, 0)$ 得到, 解得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = -2 \sin^2 1 = \cos 2 - 1$$

18. 设实数 $a \geq 0$, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx$ 。

解: 记 $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx$ 。

因为 $\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} \right) = e^{-(a+1)x}$, 且当 $a \geq 0$ 时, $\int_0^{+\infty} e^{-(a+1)x} dx$ 一致收敛,

所以 $I'(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)x} dx = \frac{1}{a+1}$ 。

又因为 $I(0) = 0$, 所以 $I(a) = \ln(a+1)$ 。

19. 设 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ 。

(I) 求 f 在平面 \mathbb{R}^2 所有极值;

(II) 求 f 在曲线 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 上的最大值和最小值。

解: (I) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$, 解得全部驻点: $(0,0), (1,1)$ 。

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,$$

f 在 $(1,1)$ 处 Hesse 矩阵正定, 所以 $f(1,1) = -1$ 为极小值;

f 在 $(0,0)$ 处, $AC - B^2 = -9 < 0$, Hesse 矩阵非退化, 既非正定又非负定, $(0,0)$ 不是极值点。

(也可从 $f(x,0) = x^3$ 知 $(0,0)$ 不是极值点。)

(II) 曲线 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 上, $x^2 + y^2 = 1 + xy \leq 1 + \frac{x^2 + y^2}{2}$, 所以 $x^2 + y^2 \leq 2$ 。从而

$\{(x,y) | x^2 - xy + y^2 = 1\}$ 是有界闭集。 f 连续, 在 $\{(x,y) | x^2 - xy + y^2 = 1\}$ 上存在最大值和最小值。

用 Lagrange 乘子法,

考虑函数 $F(x,y,\lambda) = x^3 + y^3 - 3xy - \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$ 。

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y - \lambda(2x - y) = 0 & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3x - \lambda(-x + 2y) = 0 & (2) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x^2 - xy + y^2 - 1) = 0 & (3) \end{cases} \quad \dots\dots 1 \text{ 分 (设辅助函数 } F \text{ 及求导)}$$

解得 $x=1, y=1$ 或 $x=-1, y=-1$

$$\text{或 } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}, \quad y = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{4}$$

$$f(1,1) = -1, \quad f(-1,-1) = -5, \quad f\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}, \frac{1 \mp \sqrt{5}}{4}\right) = \frac{5}{4}。$$

所以 $f(x,y)$ 曲线 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 上的最大值为 $\frac{5}{4}$, 最小值为 -5 。

三. 证明题 (请写出详细的证明过程!)

20. (8 分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 满足 $f(0) \neq -1$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$ 。

(I) 证明存在 $t_0 = 1$ 的邻域 U 和 $x_0 = 0$ 的邻域 V 以及 C^1 函数 $g: U \rightarrow V$ 使得对任意

$(t,x) \in U \times V$, $\int_x^t f(u) du = x$ 当且仅当 $x = g(t)$ 。

(II) 求 $g'(1)$ 。

(I) 证明: 令 $F(t,x) = \int_x^t f(u) du - x$ 。 $F(1,0) = \int_0^1 f(u) du - 0 = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(1,0) = -f(0) - 1 \neq 0$,

所以根据隐函数定理存在 $t_0 = 1$ 的邻域 U 和 $x_0 = 0$ 的邻域 V 以及 C^1 函数 $g: U \rightarrow V$,

使得对任意 $(t, x) \in U \times V$, $F(t, x) = 0$ (即 $\int_x^t f(u) du = x$) 当且仅当

$$x = g(t)。$$

(II) 解: 对恒等式 $\int_{g(t)}^t f(u) du = g(t)$ 求导得到 $f(t) - f(g(t))g'(t) = g'(t)$, 从而

$$g'(1) = \frac{f(1)}{f(0)+1} = \frac{f(1)}{f(0)+1}。$$

21. (7 分) 设 $f \in C^{(0)}[0, 1]$ 且 $f(x) > 0$, $\alpha > 0$ 。根据参数 α 的不同值, 研究函数

$$g(y) = \int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} dx \quad (y \in [0, +\infty))$$
 的连续性, 并证明你的结论。

结论: 当 $0 < \alpha \leq 1$ 时, f 在 $(0, +\infty)$ 连续, 在 $y = 0$ 处不连续; 当 $1 < \alpha$ 时, f 在 $[0, +\infty)$ 连续。

证明: 对于 $(0, +\infty)$ 的任何有界闭子区间 $[\delta, N]$, $\frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2}$ 在 $[0, 1] \times [\delta, N]$ 上 (一致) 连续, 所以

$$g(y) = \int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} dx \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上连续。}$$

以下讨论 $y = 0$ 处的连续性, 并设 $0 \leq y < 1$ 。

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} = 0, \text{ 所以 } g(0) = 0。$$

因为 $f \in C^{(0)}[0, 1]$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上存在最大值 M 和最小值 m 。又因为 $f(x) > 0$, 所以 $0 < m \leq f(x) \leq M$ 。

$$\text{当 } 0 < \alpha \leq 1 \text{ 时, } \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} \geq \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} \geq \frac{my}{x^2 + y^2}, \text{ 所以}$$

$$g(y) = \int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} dx \geq m \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx = m \arctan \frac{1}{y} \rightarrow \frac{m\pi}{2} > 0, \text{ 当 } y \rightarrow 0^+。$$

$$\text{因此 } g(y) = \int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} dx \text{ 在 } y = 0 \text{ 处不连续;}$$

$$\text{当 } 1 < \alpha \text{ 时, } 0 \leq \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} \leq \frac{My^{\alpha-1}y}{x^2 + y^2}, \text{ 所以}$$

$$0 \leq g(y) = \int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} dx \leq My^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx = My^{\alpha-1} \arctan \frac{1}{y} \rightarrow 0 = g(0) ,$$

所以 $g(y) = \int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} dx$ 在 $y = 0$ 处连续。