清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 高等线性代数选讲　　A 卷　　2021 年 4 月 13 日

本试题共 4 道大题，满分 50 分.

1. 填空题 (12 分)

   (1) 考虑所有实系数一元多项式的集合 $\mathbb{P}(\mathbb{R})$，和 n 阶方阵空间 $M_{n\times n}$，作为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，请列出下列映射中是线性映射的是 __________ :

   (a) $\mathbb{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}),\quad f(x) \mapsto f'(x) + f''(x)$；

   (b) $\mathbb{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}),\quad f(x) \mapsto f(x) + 1$；

   (c) $M_{n\times n} \to M_{n\times n},\quad A \mapsto AA^{\mathrm{T}}$；

   (d) $M_{n\times n} \to M_{n\times n},\quad A \mapsto A - A^{\mathrm{T}}$.

   (2) 设 T 是有限维线性空间 V 上的算子，$\mathrm{Null}(T), \mathrm{Range}(T)$ 分别是 T 的零空间和像空间．请问 $\mathrm{Null}(T) \oplus \mathrm{Range}(T) = V$ 是否对任意的 T 都成立？__________ :

   (a) 是；

   (b) 不是.

   (3) 设 T 为 5 维线性空间 V 上的算子，令 d_i 为零空间 $\mathrm{Null}(T^i)$ 的维数，$i = 1, 2, 3, 4, 5$. 那么 $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ 可能的取值有 __________ :

   (a) (1,2,3,4,5);

   (b) (2,3,3,3,3);

   (c) (1,1,2,2,2);

   (d) (2,3,4,5,6).

2. (8 分) 设 $\mathbb{F}^2$ 上的算子 $T : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$.

   (1) 求 T 的所有特征值和特征子空间；

   (2) 判断 T 是否可对角化，并简明说明理由.

3. (18 分) 设 $\mathbb{F}$ 上的二阶方阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. 考虑线性映射

$$\begin{aligned} T_A: \quad M_{2\times 2} &\to \quad M_{2\times 2} \\ X \quad &\mapsto \quad AX - XA. \end{aligned}$$

取 $M_{2\times 2}$ 的两组基

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$t_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, t_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, t_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, t_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 T_A 在这两组基下的矩阵 $\mathcal{M}(T_A, (e_1, e_2, e_3, e_4), (t_1, t_2, t_3, t_4))$.

(2) 将 T_A 看作 $M_{2\times 2}$ 上的算子. 在 $\{0\}$ 和 $M_{2\times 2}$ 之外，找到两个 $M_{2\times 2}$ 的 T_A 不变子空间 (不需证明).

(3) 判断 T_A 是否是幂零算子，并说明原因.

4. (12 分) 设 $S : V_0 \to V_1$, $T : V_1 \to V_2$ 为有限维线性空间之间的线性映射，满足 $TS = 0$.

(1) 证明：$\operatorname{Range}(S)$ 是 $\operatorname{Null}(T)$ 的子集；

(2) 令 $W_0 = \operatorname{Null}(S), W_1 = \operatorname{Null}(T)/\operatorname{Range}(S), W_2 = V_2/\operatorname{Range}(T)$, 证明下列等式：

$$\dim(V_0) - \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(W_0) - \dim(W_1) + \dim(W_2).$$