1. 填空题 (12 分)

(1) 考虑所有实系数一元多项式的集合 $\mathbb{P}(\mathbb{R})$，和 n 阶方阵空间 $M_{n\times n}$，作为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，请列出下列映射中是线性映射的是 ________ :

(a) $\mathbb{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}), \quad f(x) \mapsto f'(x) + f''(x)$；

(b) $\mathbb{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}), \quad f(x) \mapsto f(x) + 1$；

(c) $M_{n\times n} \to M_{n\times n}, \quad A \mapsto AA^{\mathrm{T}}$；

(d) $M_{n\times n} \to M_{n\times n}, \quad A \mapsto A - A^{\mathrm{T}}$.

解. (a) (d).

(2) 设 T 是有限维线性空间 V 上的算子，$\mathrm{Null}(T), \mathrm{Range}(T)$ 分别是 T 的零空间和像空间．请问 $\mathrm{Null}(T) \oplus \mathrm{Range}(T) = V$ 是否对任意的 T 都成立？________ :

(a) 是；

(b) 不是.

解. (b).

(3) 设 T 为 5 维线性空间 V 上的算子，令 d_i 为零空间 $\mathrm{Null}(T^i)$ 的维数，$i = 1, 2, 3, 4, 5$. 那么 $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ 可能的取值有 ________ :

(a) (1,2,3,4,5);

(b) (2,3,3,3,3);

(c) (1,1,2,2,2);

(d) (2,3,4,5,6).

解. (a) (b).

2. (8 分) 设 $\mathbb{F}^2$ 上的算子 $T : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$.

(1) 求 T 的所有特征值和特征子空间；(6分，每个特征值1分，每个特征子空间2分)

解. 在 $\mathbb{F}^2$ 的自然基 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 下，T的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

解方程 $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 1 = 0$ 得 T的特征值为 $1, -1$.

解方程 $(I - A)X = 0$ 得特征值 1 的一组线性无关的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 特征值 1 的特征子空间为 $\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

解方程 $(-I - A)X = 0$ 得特征值 -1 的一组线性无关的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. 特征值 -1 的特征子空间为 $\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

(2) 判断 T 是否可对角化，并简明说明理由. (2分)

解. T 可对角化.

取 T 的特征向量 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 组成 $\mathbb{F}^2$ 的一组基,

T 在这组基下的矩阵为对角阵 $\begin{bmatrix}1&\\&-1\end{bmatrix}$.

3. (18 分) 设 $\mathbb{F}$ 上的二阶方阵 $A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$. 考虑线性映射

$$\begin{array}{rccc} T_A: & M_{2\times 2} & \to & M_{2\times 2} \\ & X & \mapsto & AX-XA. \end{array}$$

取 $M_{2\times 2}$ 的两组基

$$e_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, e_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, e_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

$$t_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, t_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, t_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, t_4=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

(1) 求 T_A 在这两组基下的矩阵 $\mathcal{M}(T_A,(e_1,e_2,e_3,e_4),(t_1,t_2,t_3,t_4))$. (8分)

解. 记 $N=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, 则 $A=2I+N$.

$$\begin{aligned} T_A(X) &= AX-XA \\ &= (2I+N)X-X(2I+N) \\ &= 2X+NX-2X-XN \\ &= NX-XN \\ &= T_N(X). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_A(e_1,e_2,e_3,e_4) &= (T_Ae_1, T_Ae_2, T_Ae_3, T_Ae_4) \\ &= (T_Ne_1, T_Ne_2, T_Ne_3, T_Ne_4) \\ &= (-t_2, 0, t_4, t_2) \\ &= (t_1,t_2,t_3,t_4)\begin{bmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

所求矩阵为 $\begin{bmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$.

(2) 将 T_A 看作 $M_{2\times 2}$ 上的算子．在 $\{0\}$ 和 $M_{2\times 2}$ 之外，找到两个 $M_{2\times 2}$ 的 T_A 不变子空间 (不需证明)．（4分）

解. $T_A(e_2)=0$，故 $T(\mathrm{span}(e_2))=\{0\}\subset \mathrm{span}(e_2)$，

故 $\mathrm{span}(e_2)$ 为 T 的不变子空间.

$T_A(e_1)=e_2$，故 $T(\mathrm{span}(e_1,e_2))=\mathrm{span}(e_2)\subset \mathrm{span}(e_1,e_2)$，

故 $\mathrm{span}(e_1,e_2)$ 为 T 的不变子空间.

(3) 判断 T_A 是否是幂零算子，并说明原因．（6分）

解. 是.

由 $T_A=T_N$，只需验证 T_N 幂零.

$T_N(X)=NX-XN$.

$$
\begin{aligned}
T_N^2(X)=T_N(T_NX)&=T_N(NX-XN)\\
&=N(NX-XN)-(NX-XN)N\\
&=\underbrace{N^2}_{=0}X-NXN-NXN+X\underbrace{N^2}_{=0}\\
&=-2NXN
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_N^3(X)=T_N(T_N^2X)&=T_N(-2NXN)\\
&=N(-2NXN)-(-2NXN)N\\
&=-2\underbrace{N^2}_{=0}XN+2NX\underbrace{N^2}_{=0}\\
&=0.
\end{aligned}
$$

故 $T_N^3=0$，T_N 幂零.

4. (12 分) 设 $S : V_0 \to V_1$, $T : V_1 \to V_2$ 为有限维线性空间之间的线性映射，满足 $TS = 0$.

(1) 证明：$\mathrm{Range}(S)$ 是 $\mathrm{Null}(T)$ 的子集；(4分)

证明. 设 $v \in \mathrm{Range}(S)$.

存在 $u \in S$, 使得 $Su = v$.

$Tv = TSu = 0u = 0$.

故 $v \in \mathrm{Null}(T)$.

故 $\mathrm{Range}(S) \subseteq \mathrm{Null}(T)$.

(2) 令 $W_0 = \mathrm{Null}(S), W_1 = \mathrm{Null}(T)/\mathrm{Range}(S), W_2 = V_2/\mathrm{Range}(T)$, 证明下列等式：

$$\dim(V_0) - \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(W_0) - \dim(W_1) + \dim(W_2).$$ (8分)

证明. 对于以下有限维向量空间，有

$\dim(V_0) = \dim(\mathrm{Null}(S)) + \dim(\mathrm{Range}(S))$

$\dim(V_1) = \dim(\mathrm{Null}(T)) + \dim(\mathrm{Range}(T))$

$\dim(\mathrm{Null}(T)/\mathrm{Range}(S)) = \dim(\mathrm{Null}(T)) - \dim(\mathrm{Range}(S))$

$\dim(V_2/\mathrm{Range}(T)) = \dim(V_2) - \dim(\mathrm{Range}(T))$

故

$\dim(W_0) - \dim(W_1) + \dim(W_2)$

$= \dim(\mathrm{Null}(S)) - \dim(\mathrm{Null}(T)/\mathrm{Range}(S)) + \dim(V_2/\mathrm{Range}(T))$

$= \dim(\mathrm{Null}(S)) - (\dim(\mathrm{Null}(T)) - \dim(\mathrm{Range}(S))) + (\dim(V_2) - \dim(\mathrm{Range}(T)))$

$= (\dim(\mathrm{Null}(S)) + \dim(\mathrm{Range}(S))) - (\dim(\mathrm{Null}(T)) + \dim(\mathrm{Range}(T))) + \dim(V_2)$

$= \dim(V_0) - \dim(V_1) + \dim(V_2)$.