期末考试模拟

June 7, 2021

1. 设$A \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$ 为一矩阵，其特征值为$-1, 3, 4$，重数分别为$2, 1, 1$，求A的行列式。

解. $\det A = (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 = 12.$

2. 设$T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R}), T(p) = p + xp'$.

   (a) 求T在基$\{1, x, x^2, x^3\}$下的矩阵。

解. $T(1, x, x^2, x^3) = (T1, Tx, Tx^2, Tx^3)$

$= (1, 2x, 3x^2, 4x^3)$

$= (1, x, x^2, x^3)\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{bmatrix}.$

T在基$\{1, x, x^2, x^3\}$下的矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{bmatrix}.$

   (b) 求T的零空间。

解. 由T可逆，T的零空间 null $T = \{0\}$.

3. 求下列矩阵的最小多项式，特征多项式，若当标准型:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解1. 易见 rank $A = 1$，由于 n 阶若当块 $J_n(\lambda)$ 的秩为 n $(\lambda \neq 0)$ 或 $n-1$ $(\lambda = 0)$,

A 的非零若当块形如 $J_1(\lambda) = [\lambda]$，$\lambda \neq 0$ 或 $J_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}$.

由A对称，A可(正交)相似对角化.

故A的若当标准型为 $\begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda \neq 0$.

由 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ 知 $\lambda = 4$. 从而有A的若当标准型为 $\begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

A的最小多项式和特征多项式等于 $\begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ 的最小多项式和特征多项式 $(\lambda-4)\lambda$, $(\lambda-4)\lambda^3$.

解2. 直接计算A的特征多项式为

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-4)\lambda^3.$$

A的最小多项式形如 $(\lambda-4)\lambda^k$, $1 \leq k \leq 3$.

计算 $(A-4I)A = 0$, 故A的最小多项式为 $(\lambda-4)\lambda$.

这说明A的特征值0的若当块均为1阶的.

A的若当标准型为 $\begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

4. 设$\mathbb{R}^2$上的内积为$<(x_1,x_2),(y_1,y_2)>= 2x_1y_1 + x_2y_2$.

(a) 找到$\mathbb{R}^2$在上述内积下的一个规范正交基。

解. 对 $\mathbb{R}^2$ 的一组基 $\{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ 做正交化.

$\langle e_1, e_1\rangle = 2$. 取 $e_1' = \frac{1}{\sqrt{\langle e_1, e_1\rangle}} e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$.

$\langle e_1, e_2\rangle = 0$. 取 $e_2' = e_2 - \frac{\langle e_1, e_2\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 = e_2$, $e_2'' = \frac{1}{\sqrt{\langle e_2, e_2\rangle}} e_2 = e_2$.

$\{\frac{1}{\sqrt{2}} e_1, e_2\}$ 构成 $\mathbb{R}^2$ 的一组规范正交基.

(b) 找到离$(1,0)$点最近的向量$v=(a,b)$满足$a+b=0$。

解. $v=(a,-a)$.

$$\begin{aligned}\langle v-(1,0),\ v-(1,0)\rangle &= \langle (a-1,-a),\ (a-1,-a)\rangle \\ &= 2(a-1)^2+(-a)^2 \\ &= 3a^2-4a+2 \\ &= 3\left(a-\tfrac{2}{3}\right)^2+\tfrac{2}{3}\end{aligned}$$

故 $a=\frac{2}{3}$, $v=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ 时 v 与 $(1,0)$ 在题目中内积确定的距离下最近.

5. 设V为有限维复内积空间, $T:V\to V$为一正规算子，其每个特征值满足$|\lambda|\le 1$. 证明$||Tv||\le||v||$, 对于任意$v\in V$.

证明. 由 T 正规, 存在 V 的一组规范正交基 $\{e_i\}_{i=1,2,\cdots,\dim V}$ 使得 $Te_i=\lambda_i e_i$.

设 $v=\sum_{i=1}^{\dim V} a_i e_i$. 则

$$\|v\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\dim V}|a_i|^2},\quad Tv=\sum_{i=1}^{\dim V}\lambda_i a_i e_i.\quad \|Tv\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\dim V}|\lambda_i a_i|^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{\dim V}|a_i|^2}=\|v\|.$$

6. 设V,W有限维线性空间，证明下面命题或给出反例:
若$T:V\to W$ 为一线性映射，满足$\dim(Range(T))=1$, 那么我们可以找到$w\in W,\phi\in V'$, 满足$T(v)=\phi(v)w$.

证明. 取 $w\in \mathrm{Range}\,T\setminus\{0\}$. 对任意的 $v\in V$, 由于 $T(v)\in \mathrm{Range}\,T$ 以及 w 构成了 $\mathrm{Range}\,T$ 的一组基, 存在唯一的 $\phi(v)\in\mathbb{F}$ 使得 $T(v)=\phi(v)w$.

易见这样给出了 V 上的线性函数 ϕ.

7. 设V为有限维复向量空间, $T:V\to V$ 线性映射，满足$T^2=T$。

(a) 证明T的特征值为0或1。

证明. 设 T 有特征值 λ 以及 λ 的特征向量 e. 我们有

$$0=(T^2-T)e=T^2e-Te=\lambda^2e-\lambda e=(\lambda^2-\lambda)e.$$

由 $e\ne 0$, 有 $\lambda^2-\lambda=0$, $\lambda=0$ 或 1.

(b) 证明T可对角化。

证明. 设T有若当标准型 $\begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_n}(\lambda_n) \end{bmatrix}$.

由 $T^2-T=0$, 每个若当块 $J_{r_i}(\lambda_i)$ 满足 $J_{r_i}(\lambda_i)^2-J_{r_i}(\lambda_i)=0$.

这说明 $r_i=1$, T的若当块阶数均为1, 故T可对角化.

8. 设V为n维复向量空间，$T: V \to V$满足$T^n=0$，但$T^{n-1}\neq 0$。证明存在$v\in V$，使得$\{v, Tv, T^2v, ..., T^{n-1}v\}$ 是V的基。

证明. 由 $T^{n-1}\neq 0$, 存在 $v\in V$, 使得 $T^{n-1}v\neq 0$.

下证 $\{v, Tv, T^2v, \cdots, T^{n-1}v\}$ 线性无关, 由维数原因组成V的基.

否则, 设有非平凡的线性组合 $a_0v+a_1Tv+\cdots+a_{n-1}T^{n-1}v=0$.

设 i 为最小的整数使得 $a_i\neq 0$, 即有 $a_iT^iv+\cdots+a_{n-1}T^{n-1}v=0$.

两边用 T^{n-1-i} 作用, 有 $a_iT^{n-1}v=0$, $a_i=0$, 矛盾.