

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 高等线性代数选讲 B 卷 2021 年 4 月 16 日

本试题共 4 道大题, 满分 50 分.

1. 填空题 (12 分)

(1) 设 V, W 是两个向量空间, 维数分别为 n, m , 那么乘空间 $V \times W$ 与所有从 V 到 W 的线性映射组成的向量空间 $\mathcal{L}(V, W)$ 的维数分别为 _____ :

(a) $m + n, mn$;

(b) $mn, m + n$;

(c) mn, mn ;

(d) $m + n, m + n$.

(2) 考虑所有 n 阶方阵的集合 $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 作为复向量空间, 请列出下面 $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 的子集中是子空间的是 _____ :

(a) 所有可对角化方阵;

(b) 所有对角线元素之和为 0 的方阵;

(c) 所有幂零方阵;

(d) 所有不可逆方阵.

(3) 是否存在一个非零的向量空间 V 及其上的算子 T , 满足 $\text{Null}(T) = \text{Range}(T)$? _____ :

(a) 存在;

(b) 不存在.

2. (10 分) 设 $M_{n \times n}$ 上的线性算子 $S: A \mapsto A^T$.

(1) 已知 1 与 -1 是 S 的特征值, 求其对应的特征空间 $E(1, S), E(-1, S)$ 的维数.

(2) 判断 S 是否可对角化, 并简明说明理由.

3. (14 分) 设 $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ 是所有次数小于等于 n 的实系数多项式组成的实线性空间.

(1) 令 $D = \frac{d}{dx}$ 为 $V = \mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ 上的求导算子, 证明子空间 $U = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ 是 D 不变的.

(2) 找到商空间 V/U 的一组基, 并求商算子 D/U 在这组基下的矩阵.

(3) 在 $\{0\}$ 与 V/U 之外, 找到一个 V/U 的 D/U 不变子空间 (不需证明).

4. (14 分) 设 V 为一 n 维向量空间, $U \subset V$ 为一 m 维子空间. 令 $L \subset \mathcal{L}(V)$ 为所有线性算子 T , 满足 U 是 T 的不变子空间, 所组成的子集, 即

$$L = \{T \in \mathcal{L}(V) | U \text{ 是 } T \text{ 不变的} \}$$

- (1) 证明 L 是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间.
- (2) 计算 L 的维数.