期末考试模拟

每题10分

June 7, 2021

1. 设$A \in M_{4\times4}(\mathbb{C})$ 为一矩阵，其特征值为$-1, 3, 4$，重数分别为$2, 1, 1$，求A的行列式。
2. 设$T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R}), T(p) = p + xp'$.
   (a) 求T在基$\{1, x, x^2, x^3\}$下的矩阵。
   (b) 求T的零空间。
3. 求下列矩阵的最小多项式，特征多项式，若当标准型:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
4. 设$\mathbb{R}^2$上的内积为$<(x_1, x_2), (y_1, y_2)>= 2x_1y_1 + x_2y_2$.
   (a) 找到$\mathbb{R}^2$在上述内积下的一个规范正交基。
   (b) 找到离$(1, 0)$点最近的向量$v = (a, b)$满足$a + b = 0$。
5. 设V为有限维复内积空间, $T : V \to V$为一正规算子，其每个特征值满足$|\lambda| \leq 1$. 证明$||Tv|| \leq ||v||$, 对于任意$v \in V$.
6. 设V, W有限维线性空间，证明下面命题或给出反例:
   若$T : V \to W$ 为一线性映射，满足$\dim(Range(T)) = 1$, 那么我们可以找到$w \in W, \phi \in V'$, 满足$T(v) = \phi(v)w$.
7. 设V为有限维复向量空间, $T : V \to V$ 线性映射，满足$T^2 = T$。
   (a) 证明T的特征值为0或1。
   (b) 证明T可对角化。
8. 设V为n维复向量空间，$T : V \to V$满足$T^n = 0$，但$T^{n-1} \neq 0$。证明存在$v \in V$, 使得$\{v, Tv, T^2v, ..., T^{n-1}v\}$ 是V的基。