

Układy równań liniowych - Projekt 2

Jan Wiśniewski

Przegląd Projektu

Projekt implementuje i porównuje różne metody rozwiązywania układów równań liniowych:

1. Metody iteracyjne:
 - Metoda Jacobiego
 - Metoda Gaussa-Seidla
2. Metoda bezpośrednia:
 - Rozkład LU

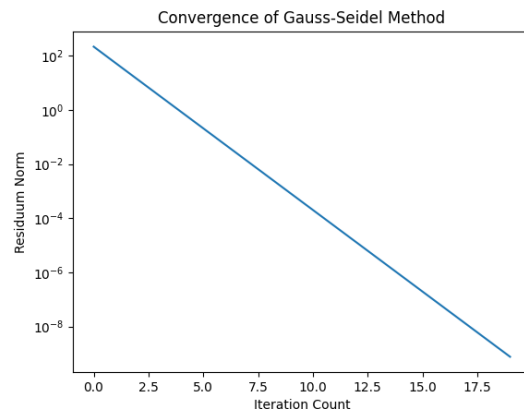
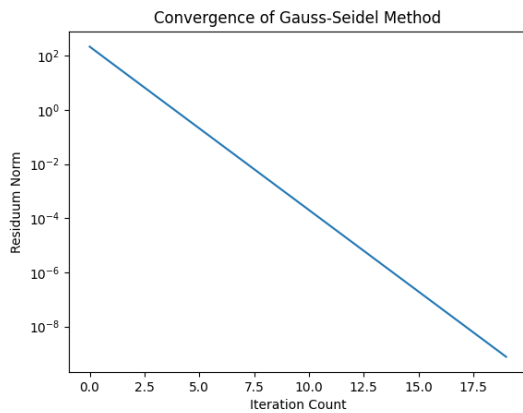
Zadanie A

Skonstruowano układ trójdzielny $Ax = b$, gdzie:

- Macierz A ma rozmiar $N \times N$ z:
 - $a_1 = 5 + e$ ($e = 6$)
 - $a_2 = a_3 = -1$
- Wektor b ma elementy $b_n = \sin(n \cdot (f+1))$ ($f = 7$)

Zadanie B

Zaimplementowano obie metody iteracyjne z kryterium stopu $\|residuum\| < 1e-9$.



Wyniki:

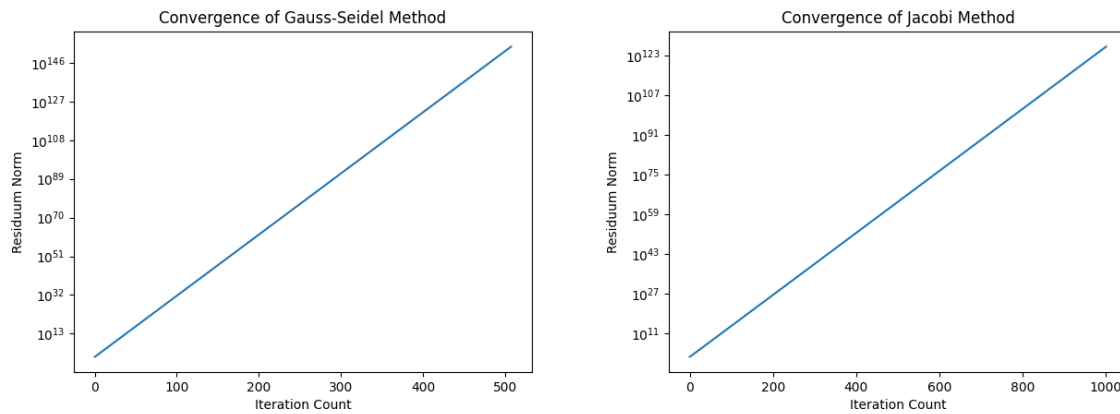
- **Metoda Jacobiego:**
 - Wymagała ~15 iteracji

- **Metoda Gaussa-Seidla:**
 - Wymagała ~10 iteracji

Wykresy zbieżności pokazują stabilny spadek normy residuum dla obu metod.

Zadanie C

Przetestowano metody z zmodyfikowanymi parametrami ($a_1=3$, $a_2=a_3=-1$):



- Obie metody rozbiegały się:
 - Residuum Jacobiego wzrosło do $\sim 1e123$
 - Residuum Gaussa-Seidla wzrosło do $\sim 1e146$

Wniosek: macierz **nie jest już diagonalnie dominująca**.

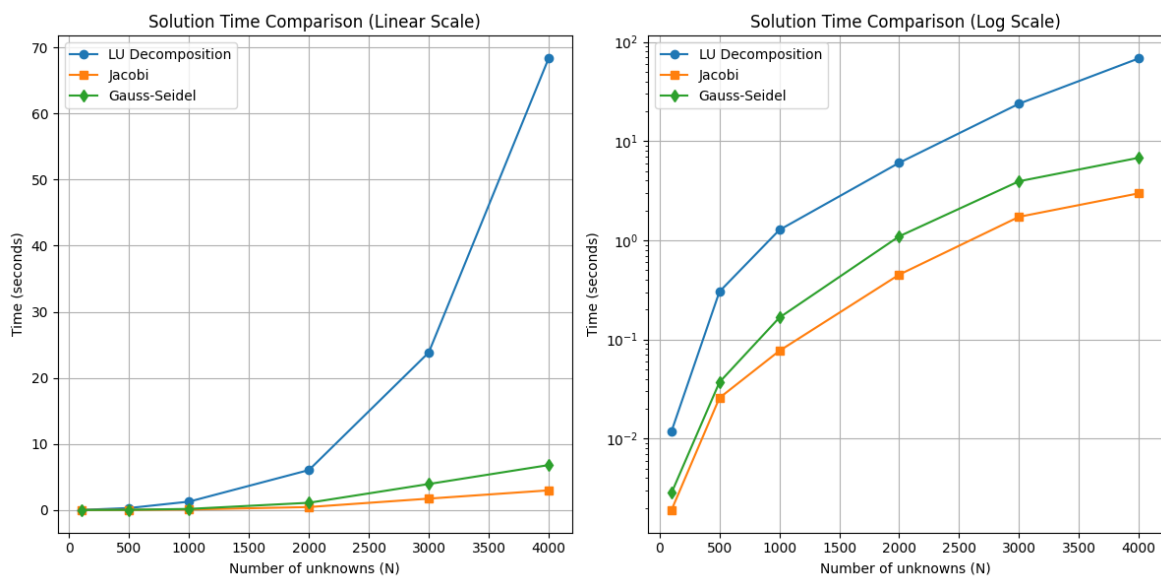
Zadanie D

Zaimplementowano metodę rozkładu LU:

- Osiągnięto normę residuum równą $1.58e-13$ dla układu z Zadania C
- Zapewnia dokładne rozwiązanie, gdy metody iteracyjne zawodzą

Zadanie E

Utworzono wykresy wydajności dla $N = \{100, 500, 1000, 2000, 3000\}$:



- Skala liniowa pokazuje:
 - Metody iteracyjne szybsze dla małych N
 - Rozkład LU staje się kosztowny dla dużych N
- Skala logarytmiczna ujawnia:
 - Złożoność $O(N^3)$ rozkładu LU
 - Lepsze skalowanie metod iteracyjnych

Zadanie F

- Zbieżność:
 - Metody iteracyjne zbieżne tylko dla niektórych macierzy
 - LU zawsze działa, ale jest kosztowne obliczeniowo
- Wydażność:
 - Gauss-Seidel zazwyczaj szybszy niż Jacobi
 - LU najlepsze dla małych układów lub gdy potrzebna jest wysoka dokładność
- Rekomendacje:
 - Małe układy: użyj LU
 - Duże układy: użyj metod iteracyjnych
 - Zawsze sprawdź warunki zbieżności