Układy równań liniowych - Projekt 2

Jan Wiśniewski

Przegląd Projektu

Projekt implementuje i porównuje różne metody rozwiązywania układów równań liniowych:

1. **Metody iteracyjne**:
   - **Metoda Jacobiego**: opiera się na iteracyjnym przekształcaniu układu równań, zakładając przy każdej iteracji, że pozostałe niewiadome pozostają niezmienione.
     Notacja macierzowa:
     $$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - (L+U)\mathbf{x}^{(k)})$$
     gdzie: A = D + L + U,
     D — macierz diagonalna,
     L — macierz dolnotrójkątna (z zerami na diagonali),
     U — macierz górnotrójkątna (z zerami na diagonali).
   - **Metoda Gaussa-Seidla**: ulepszona wersja metody Jacobiego, w której bieżące obliczenia są natychmiast wykorzystywane.
     Notacja macierzowa:
     $$\mathbf{x}^{(k+1)} = (D+L)^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(k)})$$
2. **Metoda bezpośrednia**:
   - **Rozkład LU**: polega na rozłożeniu macierzy A na iloczyn macierzy trójkątnych:
     $$A = LU$$
     Następnie rozwiązujemy:
     $$L\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

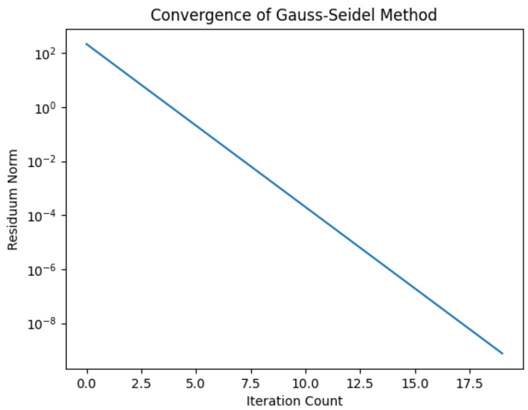
Zadanie A

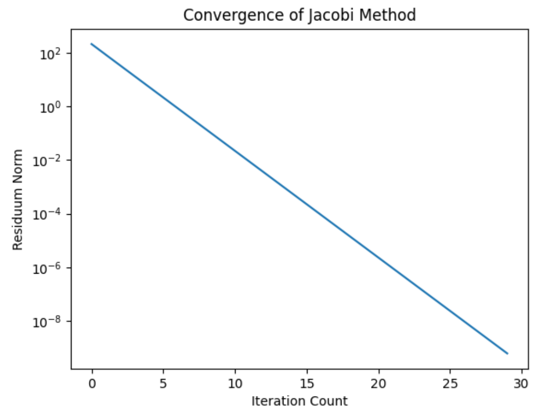
Skonstruowano układ Ax = b, gdzie:

- Macierz A ma rozmiar NxN z:
  - a1 = 5 + e (e = 6)
  - a2 = a3 = -1
- Wektor b ma elementy b_n = sin(n*(f+1)) (f = 7)

Zadanie B

Zaimplementowano obie metody iteracyjne z kryterium stopu ||residuum|| < 1e-9.





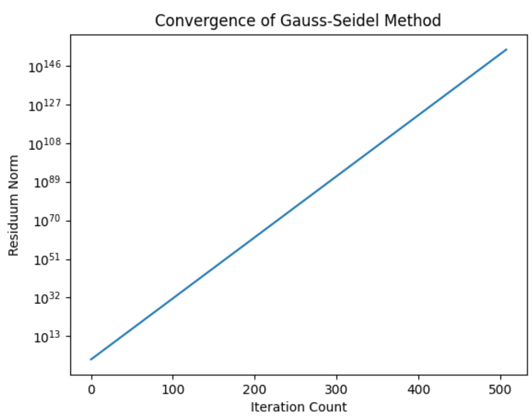
Wyniki:

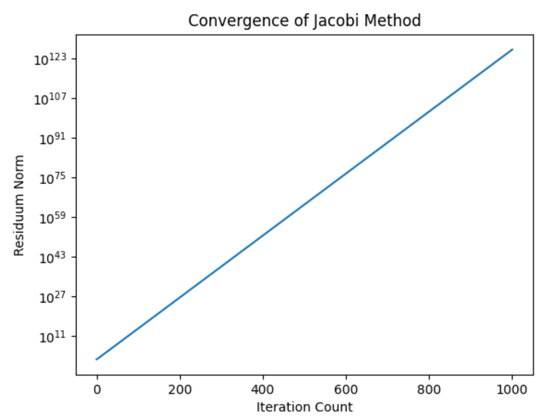
- **Metoda Jacobiego**:
  - Wymagała ~30 iteracji
- **Metoda Gaussa-Seidla**:
  - Wymagała ~15 iteracji

Wykresy zbieżności pokazują stabilny spadek normy residuum dla obu metod.

Zadanie C

Przetestowano metody z zmodyfikowanymi parametrami (a1=3, a2=a3=-1):





- Obie metody rozbiegały się:
  - Residuum Jacobiego wzrosło do ~1e123
  - Residuum Gaussa-Seidla wzrosło do ~1e146

Wniosek: macierz **nie jest już diagonalnie dominująca**.

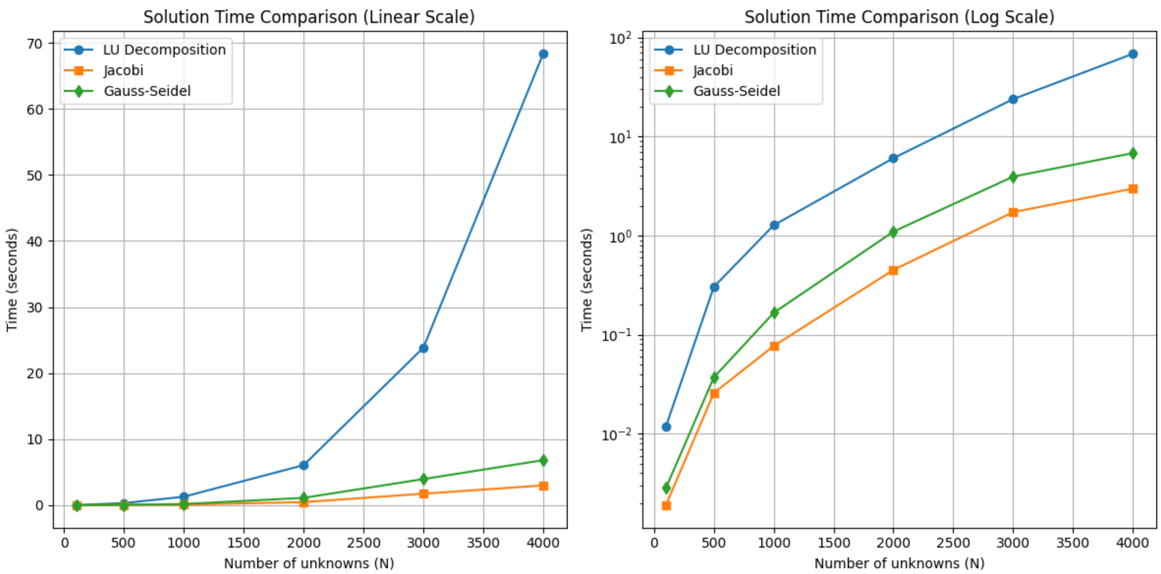
Zadanie D

Zaimplementowano metodę rozkładu LU:

- Osiągnięto normę residuum równą 1.58e-13 dla układu z Zadania C
- Zapewnia dokładne rozwiązanie, gdy metody iteracyjne zawodzą

Zadanie E

Utworzono wykresy wydajności dla N = {100, 500, 1000, 2000, 3000}:



1. Skala liniowa pokazuje:
    - Metody iteracyjne szybsze dla małych N
    - Rozkład LU staje się kosztowny dla dużych N
2. Skala logarytmiczna ujawnia:
    - Złożoność $O(N^3)$ rozkładu LU
    - Lepsze skalowanie metod iteracyjnych

Zadanie F

1. Zbieżność:
    - Metody iteracyjne zbieżne tylko dla niektórych macierzy
    - LU zawsze działa, ale jest kosztowne obliczeniowo
2. Wydajność:
    - Gauss-Seidel zazwyczaj szybszy niż Jacobi
    - LU najlepsze dla małych układów lub gdy potrzebna jest wysoka dokładność
3. Rekomendacje:
    - Małe układy: użyj LU
    - Duże układy: użyj metod iteracyjnych
    - Zawsze sprawdź warunki zbieżności