

Далее найдем диэлектрическую проницаемость для волны. Как и ранее, считаем, что волна распространяется перпендикулярно полю. Рассмотрим 2 случая:

1. Волна поляризована вдоль E_0 Это значит, что $E_z \neq 0$, $E_x = E_y = 0$, $p_z = \beta E_z s_z^2$
Вектор поляризации среды имеет вид:

$$\begin{aligned} P_z &= \int p_z dN = \frac{1}{4\pi} N \beta E_z \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{a}{2} \left(s_z^2 - \frac{1}{3} \right) \right) s_z^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} N \beta E_z \left(1 + \frac{2}{15} a \right) = \alpha_{zz} E_z \end{aligned}$$

Учитывая, что $E_z = 4\pi P_z = \varepsilon_{zz} E_z$, получаем

$$\varepsilon_{zz} = 1 + 4\pi \alpha_{zz} = 1 + \frac{4\pi}{3} N \beta + \frac{8\pi}{45} N \beta \alpha$$

Эта компонента имеет вид $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^0 + \varepsilon_{zz}^2 E_0^2$

Тогда для показателя преломления имеем $n_z = \sqrt{\varepsilon_{zz}} = n_z^0 + n_z^2 E_0^2$, где $n_z^0 = 1 + \frac{2\pi}{3} N \beta$, $n_z^2 = \frac{4\pi}{45} \frac{N \beta^2}{kT}$

2. Теперь пусть поле E перпендикулярно полю в конденсаторе и направлено по оси x . Тогда:

$$\begin{cases} p_x = \beta E_x s_x^2 \\ p_y = \beta E_x s_x s_y \\ p_z = \beta E_x s_x s_z \end{cases}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} P_x &= \int p_x dN = \frac{1}{4\pi} N \beta E_x \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{a}{2} \left(s_z^2 - \frac{1}{3} \right) \right) s_x^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} N \beta E_x \left(1 - \frac{1}{15} a \right) \end{aligned}$$

$$P_y = \int p_y dN = \frac{1}{4\pi} N \beta E_x \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{a}{2} \left(s_z^2 - \frac{1}{3} \right) \right) s_x s_y \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

$$P_z = \int p_z dN = \frac{1}{4\pi} N \beta E_x \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{a}{2} \left(s_z^2 - \frac{1}{3} \right) \right) s_x s_z \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

Учитывая, что $E_x + 4\pi P_x = \varepsilon_{xx} E_x$ получаем:

$$\varepsilon_{xx} = 1 + 4\pi \alpha_{xx} = 1 + \frac{4\pi}{3} N \beta - \frac{4\pi}{45} N \beta \alpha$$

Тогда для показателя преломления имеем $n_x = \sqrt{\varepsilon_{xx}} = n_x^0 + n_x^2 E_0^2$, где $n_x^0 = 1 = \frac{2\pi}{3} N\beta$, $n_x^2 = \frac{-2\pi}{45} \frac{N\beta^2}{kT}$

Ясно, что если бы мы направили поле E по оси y , то аналогичным образом получили бы подобные формулы:

$$P_x = 0, P_y = \frac{1}{3} N\beta E_y \left(1 - \frac{1}{15} a\right), P_z = 0$$

а также

$$\varepsilon_y y = 1 + 4\pi\alpha_{xx} = 1 + \frac{4\pi}{3} N\beta - \frac{4\pi}{45} N\beta\alpha$$

Полученный результат означает, что выбранные оси являются главными, и тензор проницаемости в них приводится к диагональному виду.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Причем $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$ — как и в одноосном кристалле.

Это означает, что величина $n_x = \sqrt{\varepsilon_{xx}}$ имеет смысл показателя преломления для обыкновенного луча, а $n_z = \sqrt{\varepsilon_{zz}}$ — необыкновенного.

Учитывая, что в отсутствие внешнего поля показатель преломления среды есть:

$$n = n_x^0 = n_z^0 = 1 + \frac{2\pi}{3} N\beta$$

можно записать формулы в виде:

$$n_e - n = \frac{4\pi}{45} N\beta\alpha, n_0 - n = \frac{-2\pi}{45} N\beta\alpha$$

или

$$\frac{n_e - n}{n_0 - n} = -2$$

Это равенство хорошо выполняется для большинства веществ.

$$\text{Далее находим разность } n_e - n_0 = \frac{2\pi}{15} N \beta \alpha = \frac{n-1}{5} \frac{\beta E_0^2}{kT}$$

Получили выражение для постоянной Керра:

$$B = \frac{n-1}{5\lambda_0 kT} \beta$$

Теория Ланжевена имеет небольшую проблему. Постоянная Керра получается всегда положительная не только для полностью анизотропных молекул, но и для молекул с произвольным тензором поляризуемости. Эта проблема была устранена в 1916 году Борном, который распространил ее на полярные молекулы со значительными постоянными дипольными моментами, направления которых могут не совпадать с направлениями наибольшей поляризуемости молекул. Так как собственный момент велик по сравнению с индуцируемыми моментами, то ориентация в таком случае будет определяться именно собственными моментами. Направление наибольшей поляризации среды может составлять с ним значительный угол, и если их направления взаимно перпендикулярны, то постоянная Керра считается отрицательной.

Научно-техническое применение эффекта Керра основано на том, что явление имеет чрезвычайно быстрое время установления и исчезновения. Это обусловлено быстрым процессом поляризации и поворота молекул во внешнем поле – порядка 10^{-9} секунд. На основе эффекта Керра были придуманы быстродействующие затворы и модуляторы света, применяемые в лазерной технике для управления режимом работы лазеров.