Законы Кеплера:

- 1-й закон Кеплера:
  Каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Форма эллипса и степень его сходства с окружностью характеризуется отношением $e = \frac{c}{a}$, где c — расстояние от центра эллипса до его фокуса (фокальное расстояние), a — большая полуось. Величина e называется эксцентриситетом эллипса. При $c = 0$, и, следовательно, $e = 0$ эллипс превращается в окружность.

- 2-й закон Кеплера:
  Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает собой равные площади.

- 3-й закон Кеплера:
  Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей орбит планет.
  $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$,
  где T_1, T_2 — периоды обращения двух планет вокруг Солнца, а a_1, a_2 — длины больших полуосей их орбит. Утверждение справедливо также для спутников.

Получим закон всемирного тяготения, используя законы Кеплера:
1) Введем полярную систему координат с полюсом в фокусе F1, где находится Солнце и полярной осью PA, направленной вдоль большой оси эллипса (рис. 1).

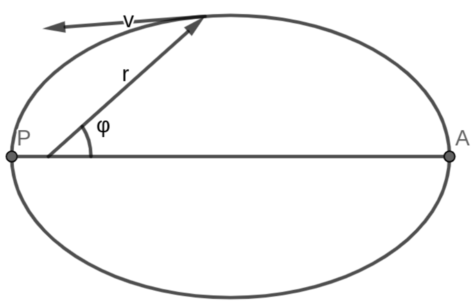

Рис. 1

Ускорение движущегося тела разложим на радиальную составляющую a_r, направленную вдоль радиуса r, и азимутальную составляющую a_ϕ, перпендикулярную к радиусу r. Они определяются выражениями:

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\phi}^2 r, a_\phi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\right) \tag{1}$$

Докажем, что их можно записать в таком виде. Введем единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Вектор $\vec{i}$ направим вдоль радиуса r. Вектор $\vec{j}$ перпендикулярен $\vec{i}$ и направлен в сторону возрастания угла ϕ. Вектор $\vec{k} = [\vec{i}\vec{j}]$ (рис. 2).

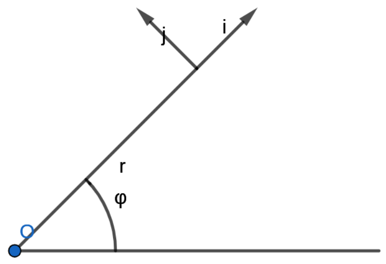

Рис. 2

Вектор угловой скорости направлен вдоль k, поэтому $\omega = \dot{\phi}k$.

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = [\omega\vec{i}] = \dot{\phi}[\vec{k}\vec{i}] = \dot{\phi}j, \ \frac{d\vec{j}}{dt} = \dot{\phi}[\vec{k}\vec{j}] = -\dot{\phi}\vec{i}$$
$$\vec{r} = r\vec{i}. \tag{2}$$

Дифференцируем:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{i} + r\frac{d\vec{i}}{dt} = \dot{r}\vec{i} + r\dot{\phi}\vec{j} \tag{3}$$

Дифференцируем вторично, находим ускорение:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\vec{i} + r\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{r}\dot{\phi}\vec{j} + r\ddot{\phi}\vec{j} + r\dot{\phi}\frac{d\vec{j}}{dt} = (\ddot{r} - \dot{\phi}^2 r)\vec{i} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\vec{j} = (\ddot{r} - \dot{\phi}^2 r)\vec{i} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\right)\vec{j}, \text{ ч. т. д} \tag{4}$$

Величина $\sigma = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}$ — секториальная скорость. По второму закону кеплера она постоянна $\rightarrow$ $a_{\phi} = 0$. Таким образом, ускорение нашего тела всегда направлено к Солнцу.

$$\dot{\phi} = \frac{2\sigma}{r^2} \tag{5}$$

Вычислим $\ddot{r}$ используя уравнение конического сечения в полярной системе координат (e — эксцентриситет эллипса, p — параметр эллипса):

$$r(1 - e\cos\phi) = p \tag{6}$$

Продифференцируем выражение:

$$\dot{r}(1 - e\cos\phi) + er\dot{\phi}\sin\phi = 0$$

(7)

Домножим на r и воспользуемся соотношениями 5 и 6:

$$p\dot{r} + 2\sigma e \sin\phi = 0$$

(8)

Еще раз продифференцируем:

$$p\ddot{r} + 2\sigma e \cos\phi\dot{\phi} = 0$$

(9)

Еще раз воспользуемся соотношениями 5 и 6 и получим:

$$\ddot{r} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \frac{4\sigma^2}{r^3} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \dot{\phi}^2 r$$

(10)

Подставляем это в формулу для a_r:

$$a_r = -\frac{4\sigma^2}{pr^2}$$

(11)

Таким образом, из законов Кеплера вытекает, что ускорение планеты обратно пропорционально квадрату ее расстояния до Солнца.

2) Докажем, что коэффициент пропорциональности $\frac{4\sigma^2}{p}$ — один и тот же для всех планет. Площадь эллипса πab, где a, b — длины большой и малой полуосей. Т. к. секториальная скорость постоянна, то ее можно посчитать по формуле $\sigma = \frac{\pi ab}{T}$, где T — период обращения планеты по ее орбите. Также воспользуемся формулой из ан. геометрии $p = \frac{b^2}{a}$. Тогда:

$$a_r = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 r^2} = \frac{4\pi^2 K}{r^2}$$

(12)

Тогда, сила, действующая на планету:

$$F = \frac{4\pi^2 K m}{r^2},$$

(13)

причем, т. к. при описании движения Солнце и планета абсолютно равноправны, можно записать $4\pi^2 K = GM$, где M — масса Солнца, G — некоторая константа. $\rightarrow F = \frac{GMm}{r^2}$, ч. т. д.

Задача двух тел:

Даны два тела (1 и 2), их начальные положения $\vec{r_1}(0), \vec{r_2}(0)$ и начальные скорости $\dot{\vec{r_1}}(0), \dot{\vec{r_2}}(0)$. Необходимо высчитать траектории $\vec{r_1}(t), \vec{r_2}(t)$. Тела взаимодействуют только друг с другом гравитационно.

Обозначим $\vec{r_m} = \dfrac{\vec{r_1}m_1 + \vec{r_2}m_2}{m_1 + m_2}$ — радиус-вектор центра масс, $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$. Тогда, можно получить зависимость для $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ через $\vec{r_m}, \vec{r}$:

$$\vec{r_1} = \vec{r_m} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \vec{r_2} = \vec{r_m} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{1}$$

Вычислим $\vec{r_m}$:

$$\begin{gathered}
\ddot{\vec{r_m}} = \frac{\ddot{\vec{r_1}}m_1 + \ddot{\vec{r_2}}m_2}{m_1 + m_2},\ \ddot{\vec{r_1}}m_1 = F_{12},\ \ddot{\vec{r_2}}m_2 = F_{21} = -F_{12} \to \\
\ddot{\vec{r_m}} = 0 \to \\
\dot{\vec{r_m}} = const = \dot{\vec{r_m}}(0) = \frac{\dot{\vec{r_1}}m_1 + \dot{\vec{r_2}}m_2}{m_1 + m_2} \to \\
\vec{r_m} = \vec{r_m}(0) + t \cdot \dot{\vec{r_m}}, \vec{r_m}(0) = \frac{\vec{r_1}m_1 + \vec{r_2}m_2}{m_1 + m_2}
\end{gathered} \tag{2}$$

Вычислим $\vec{r}$:

$$\begin{gathered}
\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} \to \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_1}} \\
m_1\ddot{\vec{r_1}} = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^3}\vec{r}, m_2\ddot{\vec{r_2}} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \to \ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{r^3}\vec{r}
\end{gathered} \tag{3}$$

Решением этого уравнения могут быть различные конические сечения (парабола, гипербола, эллипс). Их тип будет зависеть от накопленной энергии в системе.