1а) Представим эту задач в виде набора шаров (шары это ступеньки). Тогда, будем устанавливать разделители между шарами, причем наличие разделителя означает шаг на тот шар (ступеньку), который слева от разделителя. Таким образом, у нас всегда существует разделитель слева от самого левого шара (т.к. мы всегда оказываемся на нижней площадке). Остается расставить k разделителей по n местам.
$\frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ Очевидно, что это C_n^k. Тогда ответ, это сумма:
$\sum_{k=1}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n$ (по биному Ньютона).
Ответ: 2^n

1б) Предположим, что ни для одной из наших пар чисел не выполняется условие для разности. Это означает, что все наши числа имеют различные остатки при делении на 12. Представим все наши числа в виде: $x_i = 12a_i + b_i$, где $b_i \in \{0, 1, 2, ..., 11\}$, и при этом все b_i различны.
Выберем некоторые числа x_1 и x_2 и перемножим их:
$x_1x_2 = (12a_1 + b_1)(12a_2 + b_2) = 144a_1a_2 + 12a_1b_2 + 12a_2b_1 + b_1b_2$
Очевидно, что такое число делится на 12 только в том случае, если b_1b_2 делится на 12. Тогда, числа b_1 и b_2 являются одной из пар множества: $\{(2,6), (3,4), (3,8), (4,6), (4,9), (6,8), (8,9)\}$, либо одно из них равно 0. Попытаемся построить такое множество остатков, что среди них не будет нуля и ни возникнет ни одной из вышеперечисленных пар.
Очевидно, можем включить в это множество числа $1, 5, 7, 10, 11$. Остается выбрать 4 числа из множества: $\{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Если мы добавим все числа, кроме пары $(3, 4)$, то у нас возникнет пара $(2, 6)$. Если добавим число 3, но не добавим число 4, то у нас либо возникнет пара $(2, 6)$, либо, если мы исключим также одно из чисел такой пары, возникнет пара $(3, 8)$. Если добавим, число 4, но не добавим число 3, то у нас либо возникнет пара $(2, 6)$, либо, если мы исключим также одно из чисел такой пары, возникнет пара $(4, 9)$. Ну и, очевидно, что мы не можем одновременно включить пару $(3, 4)$ в наше множество.
Таким образом, мы доказали, что невозможно выбрать множество остатков таким образом (при всех различных остатках), чтобы у нас не было пары чисел, произведение которых делится на 12. Из этого следует, что для любых 9 целых чисел выполняется условие о разности, либо, в случае его невыполнения, выполняется условие о произведении, ч. т. .д.

2а) Найдем кол-во расстановок, при котором хотя бы две из этих трех книг стоят рядом.

- Если все три стоят рядом: $18 \cdot 3 \cdot 2 = 18 \cdot 6$ — 18 способов поставить три книги рядом в ряду из 20 книг, 6 способов переставить выбранные книги внутри тройки.
- Если только две стоят рядом: $(2 \cdot 17 + 16 \cdot 17) \cdot 6 = 17 \cdot 18 \cdot 6$. $17 \cdot 2$ — когда две книги стоят вместе и при этом одна из них на краю полки (17 способов поставить оставшуюся книгу), $16 \cdot 17$ — когда две книги стоят вместе и при этом не около края полки (16 способов поставить оставшуюся книгу), 6 способов переставить книги внутри тройки.

Таким образом, $(18 + 17 \cdot 18) \cdot 6 = 18 \cdot 18 \cdot 6$. Кроме того, нужно домножить на 17!, т. к. остальные 17 книг мы можем как-угодно расставить. Тогда, итоговое число $18 \cdot 6 \cdot 18!$.
А т. к. нам нужны все случаи, кроме нужныъ нам, мы должны вычесть:
$20! - 18 \cdot 6 \cdot 18! = 272 \cdot 18!$
Ответ: $272 \cdot 18!$

2б) Выставим все книги в ряд и начнем расставлять между ними k разделителей (причем разделители могут стоять на $n+1$ месте, если мы имеем n книг). Тогда, кол-во способов, которыми мы можем расставить разделители: $\frac{(n+1)n...(n+1-(k-1))}{k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = C_{n+1}^k$. В нашем случае 5 коробок и 20 книг $\rightarrow k = 4, n = 20$
Таким образом, получаем C_{21}^4. Кроме того, порядок книг, выставленных в ряд также может меняться, таким образом, получаем $C_{21}^4 \cdot 20!$
Ответ: $C_{21}^4 \cdot 20!$

2в) Удалим все буквы и посчитаем кол-во всех возможных буквенных комбинаций из оставшихся букв:

- Всего 18 букв
- Буква «в» повторяется 3 раза, буквы «е», «с» и «т» по 2 раза. Букв «о» - 5.

Тогда, число комбинаций без букв «о»:
$\frac{18!}{3!2!2!2!} = \frac{18!}{48}$
Тогда, мы просто расставляем буквы «о» на 19 позиций. Т. к. букв 5, число таких перестановок, очевидно, C_{19}^5
Таким образом, получаем число $\frac{18!C_{19}^5}{48}$
Ответ: $\frac{18!C_{19}^5}{48}$

3a) Расположим пирожные в ряд и расставим k разделителей на $n+1$ место (т. к. мы можем не купить ни одного пирожного какого-либо вида). Тогда, кол-во способов расставить эти разделители: C_{n+1}^k (из задачи 2б). Мы имеем 27 пирожных и 4 вида $\to k = 3, n = 27 \to C_{28}^3$
Ответ: C_{28}^3

3b) Запишем $x_i = y_i + i - 1$, (где $y_i \geqslant 1$) $\to y_1 + y_2 + 1 + y_3 + 2 + y_4 + 3 = 36 \to$
$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 30$
Расположим 30 (n) шаров в линию и поставим между ними 3 разделителя (k), причем разделители стоят только между шарами ($n-1$ позиция). Тогда, мы имеем:
$\frac{(n-1)(n-2)...(n-1-(k-1))}{k!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!=C} = C_{n-1}^k = C_{29}^3$
Ответ: C_{29}^3

3c) $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 21x_4 + 2x_5 \leqslant 66$

- $x_4 = 1$. Тогда получаем:
  $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_5 \leqslant 45$
  $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \leqslant 22.5$
  $4 \leqslant x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \leqslant 22$ (т. к. числа натуральные)
  Решения этого неравенства можно представить в виде:
  $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = n, n \in \{4, 5, ..., 22\}$
  Чтобы найти кол-во решений в таком уравнении, нарисуем n шаров и расставим между ними 3 разделителя (по $n-1$ местам). Тогда кол-во способов сделать это и будет кол-вом решений уравнения: $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} = \frac{(n-1)!}{(n-4)!3!}$
  Тогда, кол-во решений неравенства:
  $\sum_{n=4}^{22} \frac{(n-1)!}{(n-4)!3!}$
- $x_4 = 2$ Тогда:
  $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_5 \leqslant 24$
  $4 \leqslant x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \leqslant 12$
  Кол-во решений аналогично случаю $x_4 = 1$, только $n \in \{4, 5, ..., 12\} \to$
  $\sum_{n=4}^{12} \frac{(n-1)!}{(n-4)!3!}$
- $x_4 \geqslant 3$ Тогда: $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_5 \leqslant 66 - 21x_4 \leqslant 3$ не имеет решений в натуральных числах

Ответ: $\sum_{n=4}^{22} \frac{(n-1)!}{(n-4)!3!} + \sum_{n=4}^{12} \frac{(n-1)!}{(n-4)!3!}$

4a) Рассмотрим кол-во способов, которыми можно разместить квадрат $k \times k$ внутри нашего квадрата $n \times n$. Очевидно, что проекции сторон на верхнюю и боковую тоже будут размером k, тогда мы можем двигать каждую из проекций вдоль соответстующей стороны, таким образом, получаем $n-k+1$ позиций для каждой проекции $\to (n-k+1)^2$ способов размещения самого квадрата. Тогда,

внутри квадрата $n \times n$ мы можем размещать квадраты размером до $n \times n$ включительно, т. е. $k \in \{1, ..., n\} \rightarrow$ ответом будет являться число $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2 = n^2+(n-1)^2+...+2^2+1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Ответ: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4b) Аналогично пункту а, мы выбираем первую сторону (длиной a) из верхней грани, тогда способов ее выбрать $n-a+1$, а т. к. $a \in \{1, ..., n\}$, то всего $\sum_{a=1}^{n}(n-a+1)$ способов. Аналогично, для второй стороны (длиной b). Тогда, всего способов выбрать прямоугольник: $\sum_{a,b=1}^{n}((n-a+1)(n-b+1)) = (\sum_{a=1}^{n}(n-a+1)) \cdot (\sum_{b=1}^{n}(n-b+1)) = \frac{n+1}{2}n\frac{n+1}{2}n = \frac{(n^2+n)^2}{4}$ (по формуле суммы арфимитической прогрессии).
Ответ: $\frac{(n^2+n)^2}{4}$

4c) Заметим, что для буквы Г любого вида можно построить прямоугольник вокруг нее, и причем каждому прямоугольнику соответствует 4 Г. Соответственно, задача сводится к подсчету кол-ва прямоугольников, которых мы можем нарисовать, с линейными размерами $\geqslant 2$. Тогда, воспользуемся формулой, полученной в пункте b), немного изменив ее:
$4 \cdot (\sum_{a=2}^{n}(n-a+1)) \cdot (\sum_{b=2}^{n}(n-b+1)) = 4 \cdot (\frac{1+n-1}{2}(n-1))^2 = (n^2-n)^2$
Ответ: $(n^2-n)^2$