

1) Нам ничего неизвестно об истинности и ложности утверждений  $A$  и  $B$  для произвольной параболы  $\rightarrow$  мы ничего не можем сказать об истинности или ложности утверждений  $A \rightarrow B$  или  $B \rightarrow A$

2) Обозначим  $A = 1$ , если  $A$  — смотрит ТВ, и  $A = 0$  — если не смотрит, тогда:

$$A \rightarrow B = 1 \quad (1)$$

$$D \vee E = 1 \quad (2)$$

$$B + C = 1 \quad (3)$$

$$C \equiv D = 1 \quad (4)$$

$$E \rightarrow (AD) = 1 \quad (5)$$

Будем отталкиваться от уравнения (4):

1-й случай ( $C = D = 0$ ):

Тогда, из (2) —  $E = 1$ , а в таком случае уравнение (5) — ложно, противоречие

2-й случай ( $C = D = 1$ ):

Тогда, из уравнения (3) —  $B = 0$ , тогда из уравнения (1) —  $A = 0$ , а тогда из уравнения (5) —  $E = 0$ . Таким образом получаем:  $A = 0, B = 0, C = 1, D = 1, E = 0$

Ответ: Смотрят —  $C, D$ , не смотрят —  $A, B, E$

3)

- Пусть, утверждение  $A$  говорит, что  $x^2 - 6x + 5$  — четно, а утверждение  $B$ , что  $x$  — нечетно
- Если  $x$  — четно, тогда  $x^2$  — четно,  $-6x$  — четно,  $5$  — нечетно, тогда  $x^2 - 6x + 5$  — нечетно. Таким образом,  $\overline{B} \rightarrow \overline{A} = 1$ , тогда по контрапозиции  $A \rightarrow B = 1$ , ч.т.д.

4) Пусть,  $a, b$  — рац. числа, тогда  $a = \frac{p_1}{q_1}, b = \frac{p_2}{q_2}$ , где  $p_1, q_1, p_2, q_2$  — ,  $i$  — иррациональное число, тогда, от противного:

$$\frac{p_1}{q_1} i = \frac{p_2}{q_2} \rightarrow i = \frac{p_2 q_1}{q_2 p_1} \rightarrow i - \text{рациональное число, противоречие}$$

5)

- Если  $B = A \cap C$ , то  $C \subseteq B \rightarrow C \setminus A \subseteq B$  — верно
- Если  $C \subseteq B \rightarrow C \setminus B = \emptyset \Rightarrow C \setminus B \subseteq A$  — верно

Ответ: Да, возможно

6a)

- Проверим для  $n = 1 : 0 = 0$ , верно
- Предположим, что  $1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 1 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6}$  и проверим истинность для  $n+1$   
Тогда:  $1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \dots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1 = F \rightarrow$   
 $F - \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6} = 1 + 2 + \dots + n - 1 + n$  — арифметическая прогрессия  $\rightarrow$   
 $F - \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6} = \frac{2+n-1}{2} \cdot n = \frac{3 \cdot n \cdot (n+1)}{6} \rightarrow F = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$ , ч.т.д.

6b) Далее используется формула приведения:  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

- Проверим для  $n = 1 : \cos x = \frac{\sin \frac{3x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot (\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2}) = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos x = \cos x$  — верно

- Предположим, что верно для  $n$  и проверим для  $n + 1$ :

$$F(n) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$F(n + 1) = F(n) + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{3}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\cos nx = \frac{\sin(n + \frac{3}{2})x - \sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos(n+1)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \cos(n + 1)x$$

9) Чтобы этого добиться, мы циклически выстраиваем фишки каждого цвета по строкам. Т.е., пускай у нас в первой строке  $a$  фишек, во второй —  $b$ , в третьей —  $n - a - b$  (цвета 1). Тогда в первые  $a$  позиций первой строки устанавливаем фишки 1 цвета, во второй строке - с  $a + 1$  по  $b$  позиции, и с  $b + 1$  по  $n$ . В каждом столбце получилось ровно по 1 фишке цвета 1. Аналогичным образом заполняем строки остальными цветами, в случае, если мы достигли конца строки, но у нас еще остались фишки, начинаем устанавливать их в ее начало.