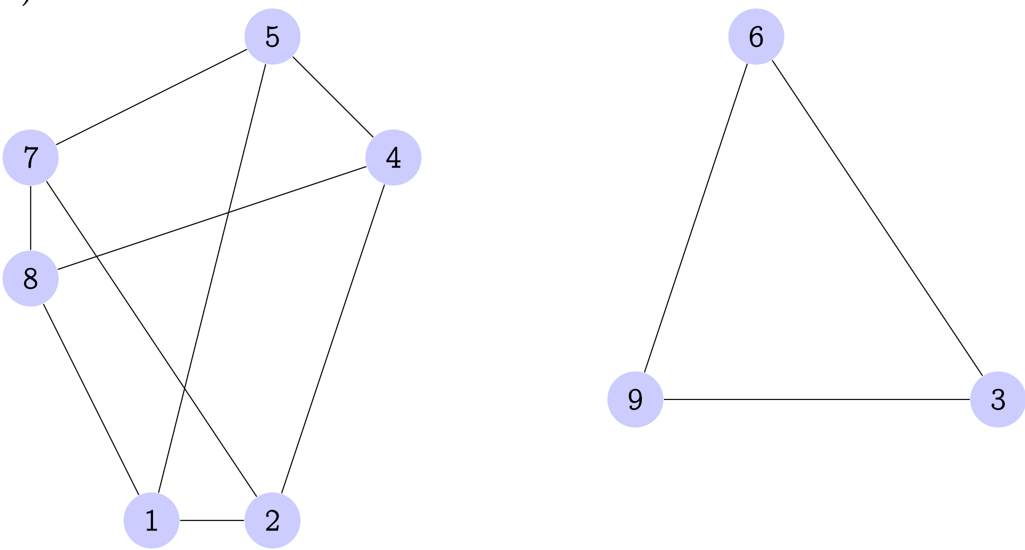
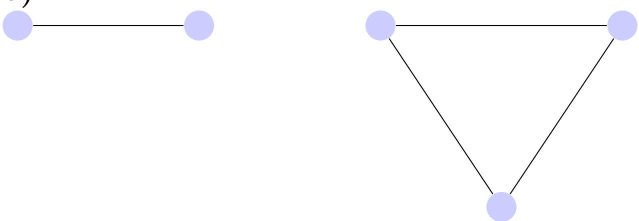
1) Построим полный граф из 7 вершин, тогда в нем будет $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$. Добавим к нему еще одну вершину степени 1, т.е. с одним ребром, тогда в нашем графе станет 22 ребра, причем 22 — максимально возможное кол-во ребер в заданном графе => т.к. $22 < 23$, ответ: нет.

2)



Построив граф (наличие ребра означает наличие авиалинии между городами), нетрудно заметить, что города 3, 6, 9 образуют "замнкнутую систему т.е. мы можем перемещаться только между ними, следовательно, в город 9 нельзя попасть из города 1.

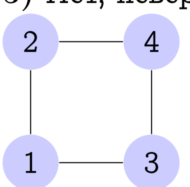
3)



(+ бесконечное мн-во графов с n ребрами, где все ребра исходят из одной точки)
Чтобы доказать, что других не существует, рассмотрим такой граф из n ребер. Выберем любое ребро, тогда она имеет общую точку с каждым => либо из точки 1 взятого ребра, либо из точки 2 взятого ребра исходят все наши ребра. Если из точки 1 выходит 0 ребер, то из точки 2 очевидно может выходить сколько угодно ребер. Если из точки 1 выходит 1 ребро, то из точки 2 выходит максимум одно ребро, т.к. иначе, чтобы связать эти ребра с ребром, выходящим из точки 1, мы получим "параллельные"ребра, которых в графе не существует. И, соответственно, если из точки 1 выходит больше одного ребра, то из точки 2 выходит 0 ребер. Кроме того, для случая когда из точек 1 и 2 выходит по однмоу ребру

4) Выделим одну вершину (обозначим A), тогда она связана с 201 элементом (обозначим их за мн-во X), остается еще 198 (обозначим Y). Выбираем один элемент из X, тогда он тоже связан с 201 элементом. Т.к. он уже связан с A, остается 200. Т.к. $198 < 200$, у нас выбранный элемент мн-ва X связан еще как минимум с 2-мя элементами X, следовательно, возникнет цикл длины 3 (из 2-х элементов X и элемента A).

5) Нет, неверно, построим контр-пример:



Тогда, $H1 = \{1, 2, 4\}, H2 = \{1, 3, 4\}$ - связные графы. Но, $H1 \cap H2 = \{1, 4\}$ - несвязный граф.

6) Выберем один город (A), мн-во городов с которым он связан (X, мы расматриваем крайний случай, поэтому $|X| = 7$), и оставшееся мн-во городов (Y, $|Y| = 7$). Очевидно, что из любого города мн-ва X и из A можно попасть в любой город X и в A. Теперь рассмотрим произвольный город из Y. Если он соединен со всеми городами Y, то задача решена. Если он не связан хотя бы с одним городом, тогда мы рассматриваем каждый такой город. В мн-ве Y он может быть связан только с 5-ю городами, поэтому остается еще 2, поэтому он связан либо с A, либо с городом из X. Таким образом, из любого города можно попасть в любой.

7) На языке графов: докажите, что в любом графе найдутся две вершины с одинаковой степенью. Чтобы доказать, заметим, что в любом графе можно выделить компоненту связности с кол-вом вершин >1 (в ином случае, все вершины не связаны с друг другом, т.е. есть как 2 человека, которые ни с кем не знакомы, ч.т.д.). В таком, случае докажем, что в люой компоненте связности (т.е. в связном графе) найдется две вершины с одинаковой степенью. Предположим обратное, тогда у нас n вершин, каждой из которых мы должны задать уникальное значение из мн-ва $X = \{1, 2, ..., n-1\}$ (т.к. граф связный, минимальная степень вершины — 1, а т.к. в нем n вершин — максимальная степень это $n-1$. Противоречие заключается в том, что в мн-ве X у нас всего $n-1$ элемент, соответсвенно мы не можем выделить из него n различных чисел никаким образом. Отсюда, в любом связном графе можно найти как минимум две вершины с одинаковой степенью, а следовательно и в любом графе можно найти две такие вершины, ч.т.д.

8) Пусть, в исходном графе n вершин, тогда если он является графом-путем, в нем $n-1$ ребро, а если он — граф-цикл, то в нем n ребер. В полном графе, очевидно, $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер. Рассмотрим три случая:

- Дополнением графа-пути является граф-путь: $\frac{n(n-1)}{2} = n - 1 + n - 1 =>$ $(n-4)(n-1) = 0 => n = 1, 4 =>$

- Дополнением графа-цикла является граф-цикл: $\frac{n(n-1)}{2} = n + n =>$ $n(n-5) = 0 => n = 5$

- Дополнением графа-цикла является граф-путь: $\frac{n(n-1)}{2} = n + n - 1 =>$ $n^2 - 5n + 2 = 0$ — не имеет натуральных корней

ОТВЕТ: Дополнением графа-пути с кол-вом вершин 1, 4 является граф-путь, дополнением графа-цикла с кол-вом вершин 5 является граф-цикл, не существует графов-циклов, дополнением которых является граф-путь.