

1) Обозначим:  $N$  — мн-во перестановок книг на поле,  $\alpha_i$  — св-во, означающее, что какие-то две из названных книг стоят рядом (таких свойств, соответственно три, для каждой возможной пары книг).

$$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}) = N - C_3^1 \cdot N(\alpha_i) + C_3^2 \cdot N(\alpha_i, \alpha_j) - C_3^3 \cdot N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

- $N = 20!$
- $N(\alpha_i) = 19 \cdot 2 \cdot 18!$  (выбираем два рядом стоящих места — 19 вариантов, внутри этих двух местах книги можно переставить двумя способами, остальные книги — 18! способов расставить)
- $N(\alpha_i, \alpha_j) = 18 \cdot 2 \cdot 17!$  (выбираем три места подряд — 18 способов, внутри этих трех мест двумя способами можно переставить три книги (чтобы одновременно выполнялись выбранные условия), остальные книги переставляем 17! способами).

$$N_0 = 20! - 6 \cdot 19! + 6 \cdot 18! = 272 \cdot 18!$$

Ответ:  $272 \cdot 18!$

2) Обозначим:  $N$  — мн-во наборов по 7 карт, выбранных из колоды,  $\alpha_i$  — свойство, обозначающее отсутствие  $i$ -ой масти в колоде (масти пронумерованы от 1 до 4). Тогда, по формуле включений и исключений:

$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}, \overline{\alpha_4}) = N - C_4^1 \cdot N(\alpha_i) + C_4^2 \cdot N(\alpha_i, \alpha_j) - C_4^3 \cdot N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$  (т. к. для разных мастей и их сочетаний кол-во одно и то же, слагаемые объединены по числу сочетаний, т. е.  $N(\alpha_i)$  — кол-во наборов, в которых отсутствует  $i$ -я масть, таких мастей можно выбрать  $C_4^1$ . Для двух мастей —  $C_4^2$  и т. д.

- $N = C_{36}^7$
- $N(\alpha_i) = C_{27}^7$  (выбрасываем из колоды все карты одной масти и выбираем из них)
- $N(\alpha_i, \alpha_j) = C_{18}^7$  (аналогично выбрасываем две масти из колоды)
- $N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) = C_9^7$

Кроме того,  $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}, \overline{\alpha_4})$  — кол-во наборов, в которых есть все масти  $\rightarrow$

$$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}, \overline{\alpha_4}) = C_{36}^7 - 4 \cdot C_{27}^7 + 6 \cdot C_{18}^7 - 4 \cdot C_9^7$$

Ответ:  $C_{36}^7 - 4 \cdot C_{27}^7 + 6 \cdot C_{18}^7 - 4 \cdot C_9^7$

4)  $N$  — мн-во функций алгебры логики,  $\alpha_i$  — свойство, означающее, что функция несущественно зависит от  $i$ -ой переменной. Тогда:

$$N(\overline{\alpha_1} \dots) = 2^n - C_n^1 \cdot N(\alpha_i) + \dots + (-1)^n \cdot N(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$$

$N(\overline{\alpha_1} \dots)$  — искомое кол-во функций.

$N(\alpha_i, \dots = (\text{для } k \text{ штук } \alpha) 2^{n-k}$ . Убираем указанные  $k$  переменных, остается  $n - k$ , тогда функций для такого кол-ва переменных  $2^{n-k}$ . Тогда, чтобы получить необходимые функции, просто к каждому набору из  $n - k$  допишем по  $2^k$  наборов из  $k$ , причем значение функции остается одинаковым на одинаковых наборах из  $n - k$ .

$N_0 = 2^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cdot 2^{n-k} \cdot C_n^k + (-1)^n \cdot 2$  (последнее слагаемое в исходной сумме не подчиняется правилу  $2^{n-k}$ , т. к. существует 2 функции, существенно не зависящие ни от какой из своих переменных — 0 и 1)

Ответ:  $2^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cdot 2^{n-k} \cdot C_n^k + (-1)^n \cdot 2$

5) Т. . у любого художника готово как минимум  $\frac{2}{3}$  картины, то, если предположить, что у каждого невыполненная область целиком лежит в области, которую выполнил другой, то пересечение их

выполненных областей как минимум  $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ , поэтому:

Ответ: нет

7) Проведем дуги вокруг сферы по сторонам треугольника и разобьем его на 6 двуугольников: по 2 с углами  $\alpha, \beta, \gamma$ , причем три из них (с углами  $\alpha, \beta, \gamma$ ) пересекаются дважды по искомой площади  $x$  (с одного полюса и с другого), а трое других — не пересекаются вообще. (пояснения см. ниже)

Площадь одного двухугольника с углом  $\phi$  равна:  $S_\phi = \frac{\phi}{2\pi} \cdot S_0 = \frac{\phi \cdot 4\pi \cdot R^2}{2\pi} = 2\phi$

$$S_0 = 4\pi = 2S_\alpha + 2S_\beta + 2S_\gamma - 4x$$

$$x = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Ответ:  $x = \alpha + \beta + \gamma - \pi$

Handwritten solution on a whiteboard:

Left side:

$$S \cdot N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = x$$

$x = ?$

$$X_i \cap X_j = 2x$$

$$i+j \equiv 0 \pmod{2}$$

$$X_i \cap X_j = 0$$

$$i+j \equiv 1 \pmod{2}$$

Center:

Right side:

$$S_0 = 4\pi \cdot R^2 = 4\pi$$

$$S_1 = S_4 = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot S_0 = 2\alpha$$

$$S_2 = S_5 = \frac{\beta}{2\pi} \cdot S_0 = 2\beta$$

$$S_3 = S_6 = \frac{\gamma}{2\pi} \cdot S_0 = 2\gamma$$

Below the sphere:

$$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) = \sum_{i=1}^6 N(\alpha_i) + N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \cdot S.$$

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) = 0 = S_0 - S_1 - S_2 - \dots + 2x$$

Bottom left:

$$4\pi = \sum_{k=1}^6 S_k - 2x - 2x$$

Bottom right:

$$x = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Final answer:

Отв:  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$