1а) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \to$
$C_{n+k+1}^k = C_{n+k}^{k-1} + C_{n+k}^k = C_{n+k-1}^{k-2} + C_{n+k-1}^{k-1} + C_{n+k}^k \to$ Раскладывая таким образом слагаемые, мы будем получать элементы суммы $\sum_{m=0}^k C_{n+m}^m$. В самом конце останется слагаемое $C_{n+2}^1 = C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 = 1 + C_{n+1}^1 = C_n^0 + C_{n+1}^1$. Ч. т. д.

1б) $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} \to$ Т. к. $n = const$, найдем минимум функции $(n-k)!k!$. Если мы увеличиваем k на единицу, тогда наша функция уменьшается в $\dfrac{n-k}{k-1}$. Решая неравенство $\dfrac{n-k}{k-1} > 1 \to k < \dfrac{n}{2} - 1 \to k = \dfrac{n}{2}$ — точка минимума функции и, соответственно возрастает при меньших k и убывает при больших k.
Числа F_{998} и F_{999} равноудалены от $\dfrac{F_{1000}}{2}$, т. к. $F_{999} - \dfrac{F_{1000}}{2} = F_{1000} - F_{998} - \dfrac{F_{1000}}{2} = \dfrac{F_{1000}}{2} - F_{998}$, но, т. к. они оба увеличены на единицу, первое число приблизилось к середине, а второе наоборот удалилось, поэтому, больше будет число $C_{F_{1000}}^{F_{998}+1}$
Ответ: $C_{F_{1000}}^{F_{998}+1}$

1в) $x_k = C_n^k \cdot 2^k, x_{k+1} = C_n^{k+1} \cdot 2^{k+1} \to x_{k+1} = \dfrac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} 2^{k+1} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} 2^k \cdot \dfrac{2(n-k)}{k+1} = x_k \cdot \dfrac{2(n-k)}{k+1} \to$
$\dfrac{2(n-k)}{k+1} \geqslant 1 \to k \leqslant \dfrac{2n-1}{3} \to$ Т. к. $\dfrac{2n-1}{3}$ - последнее число k, следующий элемент после которого больше его самого $\to$ мы должны выбрать $k = \dfrac{2n+2}{3}$ (во всех формулах подразумевается целая часть от числа).
Тогда, максимальный член: $C_n^{\frac{2n+2}{3}} \cdot 2^{\frac{2n+2}{3}}$
Ответ: $C_n^{\frac{2n+2}{3}} \cdot 2^{\frac{2n+2}{3}}$

1г) $x_n = \dfrac{2^{2n}}{n+1}$

- База индукции, $n = 2$: $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$, $\dfrac{2^4}{3} = \dfrac{16}{3} < 6$ — верно.
- Шаг индукции: $C_{2n+2}^{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \dfrac{(2n)!}{n!n!} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot C_{2n}^n$
  $\dfrac{2^{2n+2}}{n+2} = \dfrac{2^{2n}(n+1) \cdot 4}{(n+1)(n+2)} = x_n \cdot \dfrac{4n+4}{n+2}$
  Проверим, что: $\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} > \dfrac{4n+4}{n+2}$
  $4n^3 + 6n^2 + 2n + 8n^2 + 12n + 4 > 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4$
  $14n^2 + 2n > 12n^2$
  $2n^2 + 2n > 0$ — верно $\to$ т. к. $C_{2n}^n > x_n$ по предположению индукции $\to C_{2n+2}^{n+1} > x_{n+1}$, ч. т. д.

2а)

- Посчитаем кол-во чисел, не содержащих единицу. Тогда, на любое из 6-ти мест мы может поставить 9 различных цифр $\to$ кол-во вариантов $9^6 = 531441 > 500000 \to$ не содержащих единицу больше.
- Аналогично для 10-ти миллионов: $9^7 = 4782969 < 5000000 \to$ содержащих единицу больше.

2б)

- Если на первом месте четная цифра (4 возможных варианта), на остальных местах по 5 возможных вариантов $\to 4 \cdot 5^5$. Кроме того, учтем кол-во перестановок — C_5^2(как переставить 2 нечетных числа по 5 местам). $\to 4 \cdot 5^5 \cdot C_5^2$

- Если на первом месте нечетная цифра (5 возможных вариантов), остальное аналогично $\to$ $5^6 \cdot C_5^2$

$\to 9 \cdot 5^5 \cdot C_5^2$
Ответ: $9 \cdot 5^5 \cdot C_5^2$

2в) Т. к. четных и нечетных цифр поровну (5), то на каждое место мы можем поставить по 5 различных цифр. Остается учесть перестановки четных. Сначала мы выбираем 1 место среди 6, потом 1 среди 4 (т. к. перед каждым четным — нечетное). Таким образом, получаем: $5^7 \cdot C_6^1 \cdot C_4^1 = 24 \cdot 5^7$
Ответ: $24 \cdot 5^7$

3)

- $A \geqslant 5$: Наш путь не поднимется выше 5, т. к. иначе мы не сможем попасть в $(10, 0)$. Таким образом, кол-во способов: C_{10}^5

- $A < 5$. Тогда, путь может пересечь прямую $y = A$. Тогда, найдем первую точку пересечения для всех таких путей и отразим весь путь после этой точки относительно $y = A$, тогда наш путь теперь приходит в точку $(10, 2A)$. Тогда, чтобы попасть в эту точку, нам нужно выбрать a шагов вверх, тогда: $a - (10 - a_= 2A \to a = 5 + A \to C_{10}^{5+A} \to$ получаем $C_{10}^5 - C_{10}^{5+A}$

Ответ: при $A \geqslant 5$: C_{10}^5, при $A < 5$: $C_{10}^5 - C_{10}^{5+A}$

4)

- Найдем кол-во путей, которые пересекают $y = 6$: для этого найдем первую точку пересечения нашего пути с $y = 6$ и отразим последующий путь относительно $y = 6$, получаем путь, приходящий в точку $(20, 12)$. Тогда, таких путей: C_{20}^{16}

- Аналогично, кол-во путей, уходящих под $y = -6$ — C_{20}^{16}

- Кроме того, подсчитаем кол-во путей, которые пересекают обе прямые $y = 6$ и $y = -6$. Чтобы такое произошло, путь должен сделать как минимум 6 шагов вверх, потом 12 шагов вниз, потом 6 шагов вверх. $6 + 6 + 12 = 24 > 20 \to$ это невозможно.

- Всего путей из $(0, 0)$ в $(20, 0)$: C_{20}^{10}

Таким образом, мы должны исключить все пути, выходящие за пределы: $C_{20}^{10} - 2 \cdot C_{20}^{16}$
Ответ: $C_{20}^{10} - 2 \cdot C_{20}^{16}$

Бонусная задача) $(0, 0) \to (n, k)$. Очевидно, что при четных n, k — четные, и наоборот

- n — четные. Тогда, пусть нам нужно выбрать a шагов вверх, тогда: $a - (n - a) = k \to a = \dfrac{n + k}{2} \to C_n^{\frac{n+k}{2}}$ — кол-во вариантов для одного k. Тогда, для всех k: $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n+2k}{2}}$

- n — нечетное, все рассуждения аналогичны, только сумма в итоге будет считаться только по нечетным k: $\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n+2k+1}{2}}$

Теперь заметим, что: $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n+2k}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n+2k+1}{2}} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{\frac{n+k}{2}}$
Ответ: $\sum_{k=0}^{n} C_n^{\frac{n+k}{2}}$

5)

- Пусть, мы разбили число N на a слагаемых, тогда имеем формулу: $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_a = N$
  Тогда: $N + k = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_a + k$
  Тогда, мы можем представить k как сумму k единиц, и a из них прибавить к λ_i, т. е. каждое λ_i увеличится на единицу. Остальные $k - a$ единиц мы оставляем, и, таким образом получаем искомое разбиение числа $N + k$ на k слагаемых, удовлетворяющих условию. Это означает, что разбиений числа $N + k$ на k слагаемых как минимум не меньше, чем разбиений N на любое число слагаемых, не большее k.

- Теперь, построим разбиение $N + k = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$
  $N = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k - k = (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + \dots + (\lambda_k - 1)$
  Таким образом, мы построили разбиение числа N на a слагаемых ($a \leqslant k$, т. к. некоторые слагаемые могут занулиться). Таким образом, число разбиений числа N на a слагаемых ($a \leqslant k$) не меньше, чем число разбиений числа $N + k$ на k слагаемых.

Таким образом, мы получили, что каждое из количеств разбиений не меньше другого, что, фактически, означает их равенство.
Ответ: одинаково

6а) $\binom{n}{m}\binom{m}{k}$ — кол-во способов для того чтобы разбить мн-во размером n на подмножества размером $k, m - k, n - m$. Сначала выделяем m элементов и получаем два подмножества m и $n - m$, потом подмножество m также делим на два подмножества k и $m - k$.
$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ — сначала разбиваем на k и $n - k$. Потом, $n - k$ разбиваем на $m - k$ и $n - k - m + k = n - m$. Получаем аналогичное разбиение на 3 подмножества размерами k, $n - m$, $m - k$
Таким образом, первое и второе выражение показывают кол-во способов одного и того же разбиения $\rightarrow$ они равны, ч. т. д.

6б) $\binom{n}{m}$ — кол-во способов выделить из мн-ва размером n подмножество размером m.
Если мы уберем из мн-ва размером n два элемента, то у нас возможно три случая:

- Если оба выброшенных элемента буду входить в мн-во размером m, тогда, из мн-ва размером $n-2$ нам нужно выбрать $m-2$ элемента и потом добавить к нему оба выброшенных элемента $\rightarrow \binom{n-2}{m-2}$
- Если только один из выброшенных будет входить, тогда нам необходимо выбрать $m - 1$ из $n - 2$, и добавить либо первый, либо второй элемент $\rightarrow 2\binom{n-2}{m-1}$
- Если ни один из элементов не будет входить в m, тогда нам нужно выбрать m из $n - 2$ $\rightarrow \binom{n-2}{m}$

Таким образом, кол-во способов составить подмножество размером m путем выбрасывания двух элементов из мн-ва размером n это $\binom{n-2}{m-2} + 2\binom{n-2}{m-1} + \binom{n-2}{m} = \binom{n}{m}$ по определению, ч. т. д.