1) Подставим: $a_k = \lambda^k \to$
$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 18 = 0 \to \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$
$a_k = c_1 \cdot 3^k + c_2 \cdot k \cdot 3^k + c_3 \cdot 2^k$
Подставим полученное уравнение в начальные условия:
$a_0 = c_1 + c_3 = 1$
$a_1 = 3c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 0$
$a_2 = 9c_1 + 18c_2 + 4c_3 = 0 \to$
$c_1 = -8, c_2 = 2, c_3 = 9 \to$
Ответ: $a_k = 3^k \cdot (2k - 8) + 9 \cdot 2^k$

2) $g(n)$ — искомая зависимость числа таких слов от n
$g(n) = A + B$, A — кол-во искомых слов, оканчивающихся не на букву 'a' $\to A = 32 \cdot g(n-1)$ (т. к. убрав последнюю букву мы снова получаем "правильное"слово, но длиной $n - 1$ + в конце может быть любая из 32 букв).
B — кол-во искомых слов, оканчивающихся на букву 'a', тогда:
$B = C + D$, C — кол-во слов, оканчивающихся на '(!a)(a)',что равносильно кол-ву слов длиной $n - 1$, оканчивающихся не на 'a', по аналогии: $C = 32g(n-2)$
D — кол-во слов, оканчивающихся на "aa это означает, что на третьем с конца месте точно стоит не буква 'a', а значит это равно кол-ву слов длиной $n - 2$, оканчивающихся не на 'a', по аналогии: $D = 32g(n-3)$
$\to g(n) = A + B = A + C + D = 32(g(n-1) + g(n-2) + g(n-3)), g(0) = 1, g(1) = 33, g(2) = 33^2$
Ответ: $g(n) = 32(g(n-1) + g(n-2) + g(n-3)), g(0) = 1, g(1) = 33, g(2) = 33^2$

3) Обозначим $f(n)$ — число слов длины n, оканчивающихся на 'a' и не содержащее двух 'b' подряд, $g(n)$ — число слов длины n, оканчивающихся на 'b' и не имеющих двух букв 'b' подряд.
$f(n) = g(n-1)$ (т. к. если слово кончается на 'b', его предпоследняя буква — 'a')
$g(n) = g(n-1) + f(n-1)$ (т. к. если слово оканчивается на 'a', перед ней может стоять любая буква)
$\to g(n) = g(n-1) + g(n-2) \to f(n) = f(n-1) + f(n-2)$
$f(0) = 1, f(1) = 1$ Ответ: $f(n) = f(n-1) + f(n-2); f(0) = 1, f(1) = 1$

4) Обозначим: $g(n)$ — число путей длины n,начинающихся в первой вершине, $g_k(n)$ — число путей длины n, начинающихся в первой вершине и заканчивающихся в k-ой вершине. Тогда:
$g(n) = g_1(n) + g_2(n) + g_3(n) + g_4(n)$
$g_1(n) = g_4(n) = g(n-1)$ (закончив путь длины $n - 1$ в любой вершине, всегда можно продолжить его на один шаг до первой или четвертой вершины).
$g_2(n) = g_3(n) = g_1(n-1) + g_4(n-1) = 2g(n-2)$ (во вторую и третью можно попасть только из первой и четвертой, соответственно любому пути длины n в эти вершины соответствует путь длины $n - 1$ в первую или четвертую вершины).
$\to$ Ответ: $g_n = 2g(n-1) + 4g(n-2), g(1) = 4, g(0) = 1$

6) $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$
$a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f(2k-2) = \sum_{k=1}^{p} (2k-2), a_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} f(2k-1) = 0 \to$
$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \sum_{p=1} (2p-2) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) x^{2k} = \dfrac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} 2k(2k-2) x^{2k}$
$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = 1 + x^2 + x^4 \ldots = \dfrac{1}{1-x^2} \to$
$\dfrac{g'(x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k \cdot x^{2k-2} = \dfrac{2}{(1-x^2)^2} \to$
$\dfrac{x^3}{4}\left(\dfrac{g'(x)}{x}\right)' = \dfrac{2x^4}{(1-x^2)^3} = \dfrac{1}{4} \sum_{k=2}^{\infty} 2k(2k-2) x^{2k} = A(x) - 0 - 0 = A(x) \to$
$A(x) = \dfrac{2x^4}{(1-x^2)^3} = \dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{4}{(1-x^2)^2} + \dfrac{2}{(1-x^2)^3} = 2\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} - 4\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{2k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot x^{2k-4} =$
$2\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k) \cdot x^{2k} \to$

Ответ: $a_{2k+1} = 0, a_{2k} = k^2 - k$

7) $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right) \to$
$a_k = F_{2k} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)^k\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k +$
$\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k = c_1 \cdot \lambda_1^k + c_2 \cdot \lambda_2^k \to$

- $c_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, c_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \to a_0 = c_1 + c_2 = 1, a_1 = 2$
- $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \to \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0 \to$
  $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \to$
  $a_{k+2} - 3a_{k+1} + a_k = 0$

Ответ: $a_{k+2} - 3a_{k+1} + a_k = 0, a_0 = 1, a_1 = 2$

8) $T(n) = T(n-2) + 2T(n-3) + \ldots + (n-2)T(1)$
$T(n+1) = T(n-1) + 2T(n-2) + \ldots + (n-1)T(1) =$
$T(n-1) + T(n-2) + 2T(n-3) + \ldots + (n-2)T(1) + T(n-2) + T(n-3) + \ldots + T(1) =$
$T(n-1) + T(n) + T(n-2) + \ldots + T(1) = \sum_{k=1}^{n} T(k) = 3 \cdot 2^{n-3}$ (из исходных данных)
Ответ: $T(n) = 3 \cdot 2^{n-3}, T(1) = 1, T(2) = 2$

9) $T_n = \frac{1}{2}(nT_{n-1} + 3n!) \to T_{n-1} = \frac{1}{2}((n-1)T_{n-2} + 3(n-1)!) \to$
$T_n = \frac{n(n-1)}{4}T_{n-2} + \frac{3}{4}n! + \frac{3}{2}n! \to T_n = \frac{n!}{2^k(n-k)!}T_{n-k} + 3n! \sum_{p=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^p$
$T_n = \frac{n!}{2^k(n-k)!}T_{n-k} + 3n!(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k) \to$
$T_n = \frac{n!}{2^n n!}T_0 + 3n!(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k) = n!(3 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1})$ Можно подставить формулу в изначальную рекуррентность и проверить её истинность.
Ответ: $T_0 = 5, T_n = n!(3 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}), (n \geqslant 1)$