2.
Приведем функцию на паскале.

```
function f(x: real): real;
        begin
                f := x;
        end;
```

3.
Приведем функцию на паскале.

```
function f(x: real): real;
        begin
                if x mod 2 = 0 then
                begin
                        f := x;
                end
                else
                        f := 0;
        end;
```

5.
Приведем функцию на паскале.

```
function f(x: real): real;
begin
        while True do;
end;
```

Среди функций 1-5 рекурсивными являются 1 (частично-рекурсивна и везде определена), 2 (частично-рекурсивна и везде определена), 3 (частично-рекурсивна и везде определена).

6.
Очевидно, что функция суммы как минимум частично рекурсивна (это было доказано в предыдущем семинаре). Поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ вычислимы, поступим так. Вычислим значение $f(x)$ в заданной точке, после чего вычислим значение $g(x)$ в заданнрой точке. После этого вычислим их сумму. Таким образом, если $f(x)$ и $g(x)$ частично-рекусивны, то и $f(x)+g(x)$ – частично-рекурсивна (вчислима по Тьюрингу). Более того, область определения функции $w(x) = g(x) + f(x)$ ограничивается пересечением областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

7.
Зададим функцию $w(x) = g(x) * f(x)$. Область ее определения будет ограничиваться пересечением областей определения $g(x)$ и $f(x)$.

8.
Если функция $g(x)$ вычислима по Тьюрингу (частично-рекурсивна), то для любого x из области определения $g(x)$ мы получим значение этой функции. Если значение этой функции лежит в области определения функции $f(x)$, то засчет вычислимости $f(x)$ по Тьюрингу мы можем получить значение $f(g(x))$. Таким образом область определения функции $w(x) = f(g(x))$ ограничивается пересечением области значений функции $g(x)$ и областью определения функции $f(x)$.

9.
Если функции $f(x)$ и $g(x)$ – рекурсивные, то это значит, что они определены на всей области действительных чисел. В предыдущих пунктах было показано, что если $f(x)$ и $g(x)$ частично рекурсивные, то область определения $w(x) = f(x) + g(x)$ – это пересечение областей определения $f(x)$ и $g(x)$.

То есть в данном случае область определения $w(x)$ – область действительных чисел. Поэтому $w(x)$ рекурсивна. Аналогичное доказательство рекурсивности можно провести для $w(x) = f(x) * g(x)$. В пункте 8 мы показали, что область определения $w(x) = f(g(x))$ – это пересечение областей значения функции $g(x)$ и областей определения функции $f(x)$. Но т.к. $f(x)$ рекурсивна, она определена на всей области действительных чисел, поэтому она будет определена для любого значения $g(x)$, которая также определена на всем множестве действительных чисел. Поэтому $w(x) = f(g(x))$ определена на всем множестве действительных чисел и вычислима, следовательно, она рекурсивна.

10.
Число $a \in \mathbb{P}$, если $[a] = a$. На паскале это реализуется следующим образом:

```
function f(x: real): real;
    begin
        f := false;

        if (x >= 0) and (round(x) = x) then
            f := true;

        if (x < 0) and (round(x)-1 = x) then
            f := true;
    end;
```

11.
Реализуем эту функцию на паскале.

```
function f(x: real): real;
begin
f := false;

if ((x >= 0) and (round(x) = x)) or
((x < 0) and (round(x)-1 = x)) then
begin
    f := true;
end
else
    while true do;

end;
```

12.
Пустое множество не рекурсивно, потому что его характеристическая функция не определна для элемента, непринадлежащего множеству. Поэтому его характеристическая ф-ция нерекурсивна, соответственно пустое множество нерекурсивно.

13.
Множество всех нечетных чисел рекурсивно, поскольку для каждого числа $x \in \mathbb{P}$ мы можем определить его четность (найти остаток от деления на 2). Это значит, что характеристическая функция множества нечетных чисел определена на всем множестве $\mathbb{P}$

14.
Очевидно, что любое рекурсивное множество рекурсивно перечислимо. Для доказательства просто не будем определять характеристическую функцию из предыдущего пункта для нечетных чисел. Тогда характеристическая функция станет частично-рекурсивной, а множество рекурсивно перечислимым.

15.

Раз множества A и B рекурсивны, то характеристическая функция каждого из них всюду определена. Таким образом, на объединении этих множеств $A \cup B$ характеристическая функция обоих из них определена. Определеим характеристическую функцию $C = A \cup B$ таким образом:

$$\begin{cases} \begin{cases} \mu_C(x) = \mu_A(x) & \text{если она определена} \\ \mu_C(x) = \mu_B(x) & \text{в другом случае} \end{cases} & \text{если элемент принадлежит обоим множествам} \\ \mu_C(x) = \mu_B(x) & \text{если } x \in B \setminus A \\ \mu_C(x) = \mu_A(x) & \text{если } x \in A \setminus B \end{cases}$$

Таким образом, мы получим вычислимую по Тьюрингу и всюду определенную характеристическую функцию множества C. Следовательно, оно рекурсивно.

16.

Доказывается аналогично 15. Характеритические функции множеств A и B всюду определены, сдледовательно, они определены и для $C = A \cap B$. Зададим характеристическую ф-цию C, как $\mu(x)_C = \mu(x)_A$. Таким образом, множество C рекурсивно.

17.

Определим характеристическую функцию для $C = A \setminus B$ следующим образом:

$$\begin{cases} \mu_C(x) = 0 & \text{если } x \in B \\ \mu_C(x) = \mu_A(x) & \text{в других случаях} \end{cases}$$

Таким образом мы получим всюду определенную вычислимую характеристическую ф-цию множества C. Значит C рекурсивно.

18.

Определим частичную характеристическую функцию для $C = A \cup B$ следующим образом:

$$\begin{cases} \begin{cases} \mu_C(x) = \mu_A(x) & \text{если она определена} \\ \mu_C(x) = \mu_B(x) & \text{в другом случае} \end{cases} & \text{если элемент принадлежит обоим множествам} \\ \mu_C(x) = \mu_B(x) & \text{если } x \in B \setminus A \\ \mu_C(x) = \mu_A(x) & \text{если } x \in A \setminus B \end{cases}$$

19.

Определим частичную характеристическую функцию для $C = A \cap B$ следующим образом:

$$\begin{cases} \mu_C(x) = \mu_A(x) & \text{если } x \in A \cap B \\ \mu_C(x) - \text{неопределена} & \text{для всех остальных } x \end{cases}$$

20.

Докажем обратное от противного. Допустим, $C = A \setminus B$ рекурсивно, но тогда по теоереме 2 о рекурсивных множествах, A и B рекурсивны, а по условию они только рекурсивно перечислимы. Таким образом, нет, не будет.