1. Преобразование Фурье(new2)

П1. Основные свойства и теоремы преобразования Фурье.

Все реальные сигналы являются действительными функциями времени и имеют конечную удельную энергию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty. \qquad (П1.1)$$

Действительно, если $x(t)$ – напряжение (или ток), действующее на единичном сопротивлении, то интеграл представляет энергию, выделяемую на единичном сопротивлении, и эта энергия конечна. В этом случае $x(t)$ – функция с интегрируемым квадратом на всей оси.

Известно, что для существования преобразования Фурье достаточно выполнения следующих условий Дирихле:

а) $x(t)$ ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$;

б) $x(t)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$;

в) $x(t)$ имеет конечное число максимумов и минимумов, а также конечное число разрывов на каждом конечном интервале.

Имеет место *теорема Планшереля*: если $x(t)$ – функция с интегрируемым квадратом на всей оси, то существует функция $X(f)$ также с интегрируемым квадратом на всей оси и связанная с $x(t)$ соотношением

$$X(f) = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt, \qquad (П1.2)$$

где $\mathrm{l.i.m.}$ понимается как предел в среднем (limit in the mean):

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(f) - \int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 df = 0. \qquad (П1.3)$$

Аналогично, если $X(f)$ – функция с интегрируемым квадратом на всей оси, то существует функция $x(t)$ также с интегрируемым квадратом на всей оси и связанная с $X(f)$ соотношением

$$x(t) = \underset{W\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-W}^{W} X(f)\, e^{j2\pi f t} df. \qquad (П1.4)$$

В этом случае имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df. \qquad (П1.5)$$

Если в дополнение к сказанному функция $x(t)$ абсолютно интегрируема, то

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt. \qquad (П1.6)$$

Если и функция $X(f)$ абсолютно интегрируема, то

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t} df. \qquad (П1.7)$$

Соотношения (П1.6) и (П1.7) определяют пару преобразований Фурье (ПФ) соответственно прямое и обратное.

Для частоты $\omega = 2\pi f$ пара ПФ имеет вид

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \qquad (П1.8)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega. \qquad (П1.9)$$

Интеграл (П1.8) называется *спектральной плотностью*, а интеграл (П1.9) – интегралом Фурье.

Интеграл Фурье сходится к значению $x(t)$ в каждой точке, не имеющей разрыва, и к величине, равной среднему значению лево- и правостороннего пределов в точке разрыва $x(t)$.

Теорема Планшереля имеет важное практическое значение, так как часто приходится использовать *финитное преобразование Фурье*, т. е. преобразование Фурье с конечными пределами интегрирования.

Пара ПФ символически изображается в виде

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega), \quad x(t) \leftrightarrow X(f).$$

В дальнейшем мы будем использовать обе формы записи ПФ.

Свойства спектральной плотности

1) В общем случае $X(\omega)$ – *комплексная функция* частоты:

$$X(\omega) = \mathrm{Re}\left[X(\omega)\right] + j\,\mathrm{Im}\left[X(\omega)\right] = A(\omega) - jB(\omega) = \left|X(\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$\mathrm{Re}\left[X(\omega)\right] = A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t\,dt, \qquad (\text{П}1.10)$$

$$\mathrm{Im}\left[X(\omega)\right] = -B(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\omega t\,dt, \qquad (\text{П}1.11)$$

$$\left|X(\omega)\right| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \qquad (\text{П}1.12)$$

– *амплитудно-частотная характеристика* (АЧХ),

$$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\,\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \qquad (\text{П}1.13)$$

– *фазочастотная характеристика* (ФЧХ) сигнала.

2) *Свойства симметрии* $X(\omega)$. Для действительного сигнала (физические сигналы всегда действительные функции) имеет место

$$X(\omega) = X^*(-\omega). \qquad (\text{П}1.14)$$

Это означает, что для действительного сигнала $A(\omega)$ и $\left|X(\omega)\right|$ – чётные функции, а $B(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ – нечётные функции частоты. Если в дополнение к этому $x(t)$ – чётная функция, то

$$X(\omega) = X(-\omega) = A(\omega), \qquad (\text{П}1.15)$$

т. е. спектральная плотность является действительной и чётной функцией ω.

Основные спектральные теоремы

1) *Свойство линейности (спектр суммы равен сумме спектров)*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[x_1(t) + x_2(t)\right] e^{-j\omega t}\,dt = X_1(\omega) + X_2(\omega). \qquad (\text{П}1.16)$$

2) *Теорема запаздывания*

$$X_\tau(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega\tau}X(\omega). \qquad (\text{П}1.17)$$

3) *Теорема Парсеваля–Релея*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\,x_2^*(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)\,X_2^*(\omega)\,d\omega. \qquad (\text{П}1.18)$$

Если сигналы действительные и $x_1 = x_2 = x$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left|X(\omega)\right|^2 d\omega = 2\int_0^{\infty}\left|X(f)\right|^2 df. \qquad (\text{П}1.19)$$

Пусть $x(t)$ – напряжение (или ток), действующее на единичном сопротивлении, тогда функция

$$\psi_x(f) = |X(f)|^2 = X(f)\cdot X^*(f) \qquad (П1.20)$$

по физическому смыслу представляет *спектральную плотность энергии* сигнала. Эту плотность иногда называют *энергетическим спектром* сигнала. Спектральная плотность энергии описывает энергию сигнала на единицу ширины полосы и измеряется в Дж/Гц.

4) *Теорема о спектре произведения*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\,x_2(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\tilde\omega)\,e^{j\tilde\omega t}\,d\tilde\omega\right]e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\tilde\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\,e^{-j(\omega-\tilde\omega)t}\,dt\right]d\tilde\omega = \qquad (П1.21)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\tilde\omega)\,X_2(\omega-\tilde\omega)\,d\tilde\omega = X_1(\omega)\otimes X_2(\omega),$$

т. е. спектр произведения двух сигналов равен свертке их спектров.

5) *Теорема о спектре свертки*. Составим свертку двух функций:

$$y(t) = x_1(t)\otimes x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\,x_2(t-\tau)\,d\tau \qquad (П1.22)$$

и вычислим ее спектр:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\,x_2(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)\,e^{-j\omega t}\,dt\right]d\tau.$$

Делая замену $\vartheta = t-\tau$, получаем

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\vartheta)\,e^{-j\omega\vartheta}d\vartheta = X_1(\omega)X_2(\omega), \qquad (П1.23)$$

т. е. спектр свёртки двух сигналов равен произведению их спектров. Эта теорема имеет большое значение в задачах фильтрации сигналов.

Пусть, например, $x(t)$ – входной сигнал линейного фильтра, а $h(t)$ – импульсная характеристика фильтра (по определению отклик на дельта-импульс) и пусть $x(t)\overset{ПФ}{\leftrightarrow}X(\omega)$, $h(t)\overset{ПФ}{\leftrightarrow}H(\omega)$. Тогда по теореме о спектре свертки для выходного сигнала фильтра имеем:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = x(t)\otimes h(t)\overset{ПФ}{\leftrightarrow}X(\omega)H(\omega). \qquad (П1.24)$$

Операцию фильтрации часто проще реализовать в частотной области, чем во временной.

6) *Автокорреляционная функция и её спектр*. Эта функция для действительного сигнала $x(t)$ определяется следующим образом:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x(t+\tau)\,dt. \qquad (П1.25)$$

Она показывает меру похожести сигнала с его копией, смещённой на τ единиц времени. Переменная τ играет роль параметра сканирования или поиска. $R_x(\tau)$ – это не функция времени, а функция смещения τ между сигналом и его копией.

Используя (П1.25), можно показать, что для действительного сигнала $x(t)$ его автокорреляционная функция $R_x(\tau)$ и спектральная плотность энергии $\psi_x(\omega) = |X(\omega)|^2$ связаны парой ПФ:

$$R_x(\tau)\leftrightarrow\psi_x(\omega). \qquad (П1.26)$$

П2. Дельта-функция и её спектр

Введём в рассмотрение дельта-функции Дирака. *Их корректное определение даётся в теории обобщённых функций.* Здесь мы воспользуемся некоторыми полезными свойствами этих функций.

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)\,dt = 1 \text{ при любом } \varepsilon > 0. \qquad (\text{П2.2})$$

Из этого соотношения следует, что дельта-функция имеет размерность, обратную размерности её аргумента.

Часто желательно определять эту функцию так, чтобы она была чётной функцией своего аргумента:

$$\delta(t-t_0) = \delta(t_0 - t), \qquad (\text{П2.3})$$

в этом случае

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \delta(t-t_0)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)\,dt = \frac{1}{2},\ \varepsilon > 0. \qquad (\text{П2.4})$$

Предположим, что дельта-функция интегрируема по интервалу $(-\infty, t)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - t_0)\,d\tau = \sigma(t-t_0), \qquad (\text{П2.5})$$

где $\sigma(t-t_0)$ – *функция единичного скачка* или *функция Хевисайда*:

$$\sigma(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ 1/2 & \text{при } t = t_0, \\ 1 & \text{при } t > t_0. \end{cases} \qquad (\text{П2.6})$$

Таким образом, функция единичного скачка является интегралом от дельта-функции. Следовательно:

$$\sigma'(t-t_0) = \delta(t-t_0). \qquad (\text{П2.7})$$

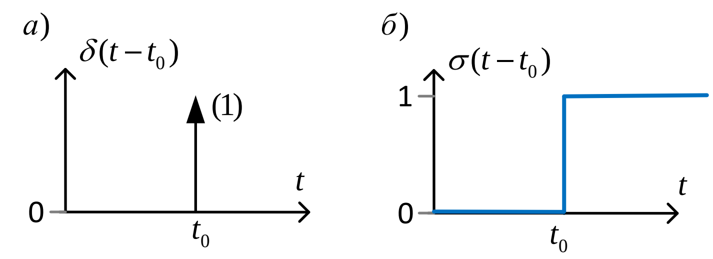


Рис. П2.1 *а* – *д*ельта-функция, *б* – функция единичного скачка

Рассмотрим три импульса (рис. П2.2) с общим свойством площади их равны единице.

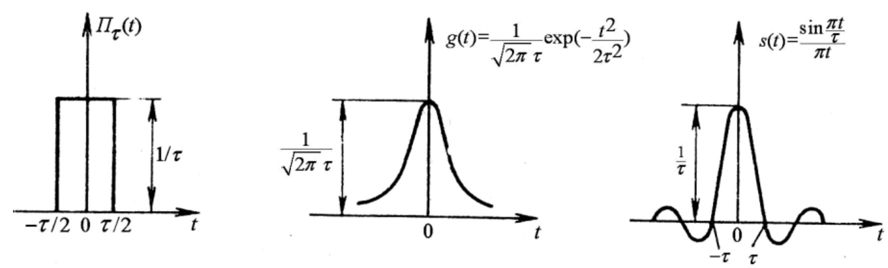


Рис. П2.2. Импульсы, обращающиеся в дельта-функцию, при стремлении их длительности к нулю

Введём предельные соотношения:

$$\lim_{\tau\to 0} \Pi_\tau(t) = \delta(t);$$

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\tau} \exp(-\frac{t^2}{2\tau^2}) = \delta(t);$$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\sin\frac{\pi t}{\tau}}{\pi t}=\delta(t).$$

Каждая из приведённых аппроксимирующих функций (импульсов) является простым и физически наглядным прототипом дельта-функции. Однако следует отметить, что дельта-функция не является ни функцией в классическом смысле, ни импульсом, а является обобщенной функцией.

Известно так называемое *фильтрующее свойство* дельта-функции, заключающееся в том, что её свёртка с любой ограниченной и непрерывной в точке t_0 функцией $x(t)$ равна

$$\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)\,dt=\begin{cases} x(t_0), & a<t_0<b,\\ (1/2)x(t_0), & t_0=a \text{ или } t_0=b,\\ 0, & t_0<a,\quad t_0>b.\end{cases} \tag{П2.8}$$

Если функция $x(t)$ в точке $t=t_0$ имеет разрыв (первого рода), то

$$\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)\,dt=(1/2)[x(t_{0+})+x(t_{0-})],\quad a<t_0<b, \tag{П2.9}$$

где $x(t_{0+})$ и $x(t_{0-})$ – значения $x(t)$ справа и слева от точки разрыва.

Доказательство (П2.8) получается, если под знак интеграла подставить вместо $\delta(t-t_0)$ любую аппроксимирующую её функцию (рис. П2.2), а затем перейти к пределу.

Если a – действительная величина, то выполняются следующие равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-a)\,dt=x(a), \tag{П2.10}$$

$$x(t)\otimes\delta(t-a)=x(t-a), \tag{П2.11}$$

$$x(t)\cdot\delta(t-a)=x(a)\cdot\delta(t-a), \tag{П2.12}$$

$$\delta[(t-t_0)/a]=|a|\delta(t-t_0) \text{ и } \delta(at-t_0)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a}). \tag{П2.13}$$

На основании (П2.10) находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j2\pi f t}dt=e^0=1, \tag{П2.14}$$

т. е. спектр дельта-функции постоянен на всех частотах. Отсюда еще одно полезное соотношение (обратное ПФ):

$$\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j2\pi f t}df=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi f t}df. \tag{П2.15}$$

Аналогично, из того, что $1\leftrightarrow\delta(f)$, можем записать

$$\delta(f)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi f t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j2\pi f t}dt, \tag{П2.16}$$

$$\delta(f-f_0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi(f-f_0)t}dt, \tag{П2.17}$$

$$e^{j2\pi f_0 t}\leftrightarrow\delta(f-f_0). \tag{П2.18}$$

Из последних соотношений видно, что спектр единичной константы есть дельта-функция, сосредоточенная в нуле, а спектр комплексной экспоненты $e^{j2\pi f_0 t}$ – одиночная дельта-функция, сосредоточенная в точке f_0. Для частоты $\omega=2\pi f$ соответствие (П2.18) записывается в виде

$$e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0). \tag{П2.19}$$

П.3. Спектры импульсных сигналов

Пример П3.1. В качестве примера рассмотрим симметричный одиночный прямоугольный импульс с амплитудой E и длительностью τ (рис. П3.1*а*).

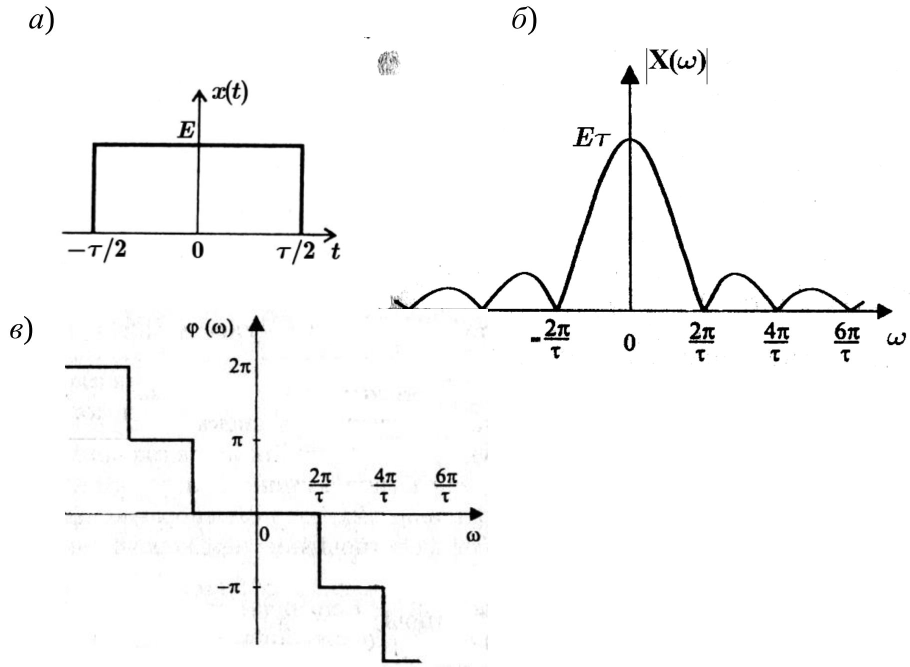


Рис. П3.1. *а* – симметричный прямоугольный импульс, *б* – амплитудный спектр, *в* – фазовый спектр

Спектральная функция такого импульса

$$X(\omega)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E\, e^{-j\omega t}\,dt=-\frac{E}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=E\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}. \qquad (\text{П}3.1)$$

АЧХ есть непрерывная функция частоты (рис. П3.1*б*). Ширина главного лепестка $|X(\omega)|$ на нулевом уровне составляет $4\pi/\tau$.

Максимум главного лепестка равен площади импульса $E\tau$, а максимумы боковых лепестков

$$\frac{2E\tau}{(2n+1)\pi}, \qquad (\text{П}3.2)$$

где $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ – номер бокового лепестка. ФЧХ (рис. П3.1*в*) учитывает изменение знака синуса.

В качестве примера на рис. П3.2 изображены (для положительных частот) амплитудный и фазовый спектры прямоугольного импульса длительностью τ = 1 мс и амплитудой E = 1 В. АЧХ показана на рис. П3.2*а*, ФЧХ симметричного импульса – на рис. П3.2*б*. Здесь также учтено изменение знака синуса.

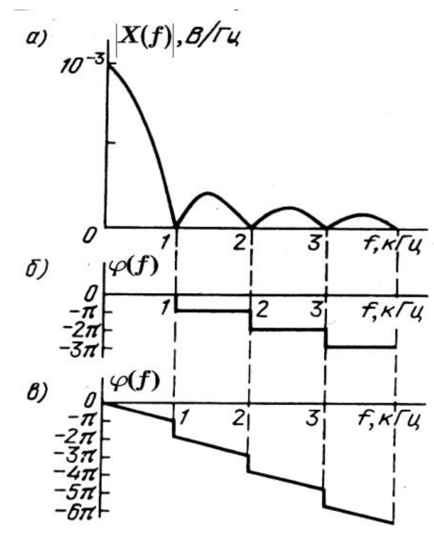


Рис. П3.2

Однако для импульса, задержанного на $\tau/2$, спектральная функция

$$X(f)=E\tau\frac{\sin\pi f\tau}{\pi f\tau}e^{-j\pi f\tau} \qquad (П3.3)$$

отличается наличием фазового множителя $e^{-j\pi f\tau}$ и ФЧХ имеет вид, представленный рис. П3.2*в*. Действительно

$$\varphi(f)=-\pi f\tau,\ 0\le f<\frac{1}{\tau}; \qquad \varphi(f)=-\pi f\tau-\pi,\ \frac{1}{\tau}\le f<\frac{2}{\tau};$$

Пример П3.3. Используя равенство Парсеваля для прямоугольного импульса, вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 d\theta.$$

Пара преобразования Фурье для прямоугольного импульса в примере 1 имеет вид

$$x(t)\Leftrightarrow X(f)=E\tau\frac{\sin\pi f\tau}{\pi f\tau}.$$

Запишем равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df$$

или

$$E^2\int_{-\tau/2}^{\tau/2}dt=E^2\tau^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\pi f\tau}{\pi f\tau}\right|^2df.$$

Сделаем замену

$\theta=\pi f\tau,\ \ d\theta=\pi\tau df$, тогда

$$1=\tau\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right|^2\frac{d\theta}{\pi\tau}.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 dy=\pi.$$

П4. Спектры периодических сигналов

Пример П4.1 Спектр гармонического сигнала

Рассмотрим функцию

$$x(t)=e^{j\omega_0 t},\quad -\infty<t<\infty, \qquad (П4.1)$$

представляющую в комплексной форме гармонический сигнал с частотой ω_0. Используя интегральное соотношение для дельта-функции (П2.9)

$$2\pi\delta(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}dt,$$

можем записать:

$$e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=2\pi\delta(\omega-\omega_0). \qquad (П4.2)$$

Это важное соотношение мы используем для получения спектральной функции периодического сигнала.

Для действительных гармонических сигналов с учётом формул Эйлера имеет место

$$\cos\omega_0 t\leftrightarrow\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right], \qquad (П4.3)$$

$$\sin\omega_0 t\leftrightarrow\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]. \qquad (П4.4)$$

Пример П4.2. Спектр периодического сигнала

Рассмотрим сигнал с периодом T. Такой сигнал может быть представлен своим рядом Фурье по T - периодическим комплексным экспоненциальным функциям

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, e^{\,j\frac{2\pi}{T}nt}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\,jn\Delta\omega t}, \qquad (\text{П.4.5})$$

где по определению

$$A_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jn\Delta\omega t}dt \qquad (\text{П4.6})$$

есть коэффициенты Фурье, а $\Delta\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ – расстояние между гармониками в спектре *T*-периодического сигнала. Предполагается, что функция $x(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т. е. $x(t)$ или непрерывная, или имеет конечное число разрывов на интервале $[-T/2,\ T/2]$, и число максимумов и минимумов на этом интервале конечно.

Чтобы получить спектральную функцию $X_{\text{п}}(\omega)$ *T*-периодического сигнала, воспользуемся приведенным выше выражением для спектра комплексного гармонического сигнала. Тогда

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\,jn\Delta\omega t} \leftrightarrow X_{\text{п}}(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\delta(\omega-n\Delta\omega). \qquad (\text{П4.7})$$

Таким образом, спектральная функция *T*-периодического сигнала имеет дискретную структуру в виде взвешенной последовательности дельта-функций. Площади отдельных δ-функций равны соответствующим коэффициентам Фурье с множителем 2π, а период следования на частотной оси $\Delta\omega=2\pi/T.$ Такое представление спектра периодического сигнала является удобной математической идеализацией, как впрочем идеализацией является и сам периодический сигнал.

Размерность дискретного амплитудного спектра A_n имеет размерность самого сигнала, в то время как спектральная функция $X_{\text{п}}(\omega)$ периодического сигнала имеет размерность самого сигнала, умноженную на размерность времени.

Средняя мощность периодического сигнала

$$P_x=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|x(t)\right|^2 dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot x^*(t)\,dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_n A_m^* \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{\,jn\Delta\omega t}\cdot e^{-jm\Delta\omega t}\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|A_n\right|^2 \qquad (\text{П4.8})$$

определяется суммой мощностей всех его спектральных компонент. Формула (П5.8) есть *равенство Парсеваля для периодического сигнала.* Выделим один период $x(t)$:

$$x_{\text{T}}(t)=\begin{cases} x(t), & -T/2\le t<T/2,\\ 0\,, & |t|\ge T/2.\end{cases}$$

Преобразование Фурье такого сигнала конечной длительности

$$X_{\text{T}}(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

связано с коэффициентами Фурье *T*-периодического сигнала очевидным соотношением:

$$A_n=\frac{1}{T}X_{\text{T}}(n\Delta\omega). \qquad (\text{П4.9})$$

Пример П4.3. Спектр периодической последовательности дельта-функций

$$D(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT). \qquad (\text{П4.10})$$

Эту последовательность иногда называют *гребенкой Дирака*. Ряд Фурье такой T-периодической последовательности дельта-функций

$$D(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\,j\frac{2\pi}{T}nt}=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\,jn\Delta\omega t}, \qquad (\text{П}4.11)$$

где коэффициенты Фурье

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t-kT)\,e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}dt=\frac{1}{T} \text{ для всех } n.$$

По аналогии с T-периодическим сигналом можем записать

$$D_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\,jn\Delta\omega t}\leftrightarrow\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Delta\omega)=$$

$$=\Delta\omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Delta\omega)=D_{\Delta\omega}(\omega).$$

Соответствие $D_T(t)\leftrightarrow D_{\Delta\omega}(\omega)$ или

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\leftrightarrow\Delta\omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Delta\omega) \qquad (\text{П}.4.12)$$

называется *формулой Пуассона* и иллюстрируется на рис. П4.3.1, где в круглых скобках отмечены площади отдельных дельта-импульсов и по-прежнему $\Delta\omega=2\pi/T$.

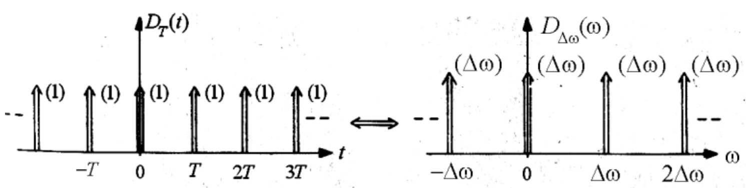


Рис. П4.3. 1. Соответствие $D_T(t)\leftrightarrow D_{\Delta\omega}(\omega)$

Пример П4.4. Спектральная функция периодической последовательности прямоугольных импульсов

Соответствие (П.5.12) удобно использовать, например, для нахождения спектра сигнала, полученного периодическим повторением одиночного импульса. Возьмем для примера одиночный прямоугольный импульс с амплитудой E, длительностью τ и повторим его с периодом T_0. Такой, T_0-периодический сигнал $x(t)$ может быть представлен в виде свертки

$$x(t)=x_{T_0}(t)\otimes\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0)$$

сигнала на одном периоде $x_{T_0}(t)$ и T_0-периодической последовательности дельта-функций $D_{T_0}(t)$. В спектральной области свертке соответствует произведение Фурье-образов

$$X(\omega)=\Delta\omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_{T_0}(\omega)\,\delta(\omega-n\Delta\omega)=$$

$$=\Delta\omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_{T_0}(n\Delta\omega)\,\delta(\omega-n\Delta\omega),$$

Спектральная функция такой последовательности равна

$$X(\omega)=E\tau\Delta\omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{n\Delta\omega\tau}{2}}\delta(\omega-n\Delta\omega) \qquad (\text{П}4.13)$$

и изображена по модулю на рис. П5.4.1 для случая $T_0=3\tau$.

Таким образом, спектральная функция T_0-периодической последовательности прямоугольных импульсов имеет дискретную структуру в виде взвешенной последовательности дельта-функций.

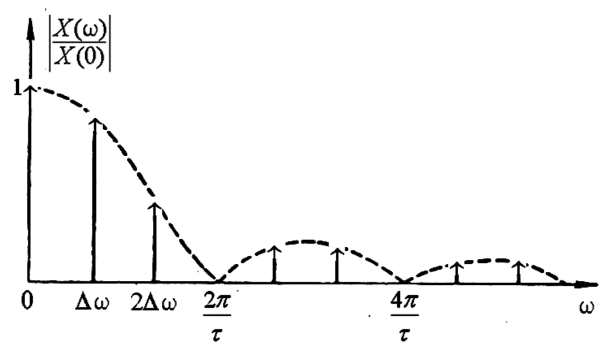


Рис. П4.4.1. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Площади отдельных δ-функций равны $E\tau\Delta\omega\dfrac{\sin\frac{n\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{n\Delta\omega\tau}{2}}$, а период следования на частотной оси $\Delta\omega = 2\pi/T_0$.

Пример П4.5. Определить и изобразить спектр $X(f)$ гармонического сигнала

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 3\cos(2\pi f_2 t)$$

где $f_1 = 100$ Гц, $f_2 = 200$ Гц.

Решение

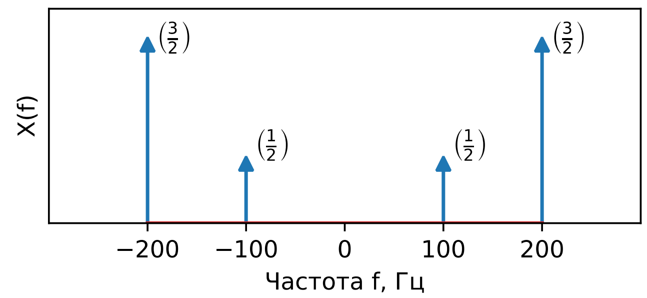
По свойствам преобразования Фурье

$$\exp(j2\pi f_0 t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \delta(f - f_0),$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0).$$

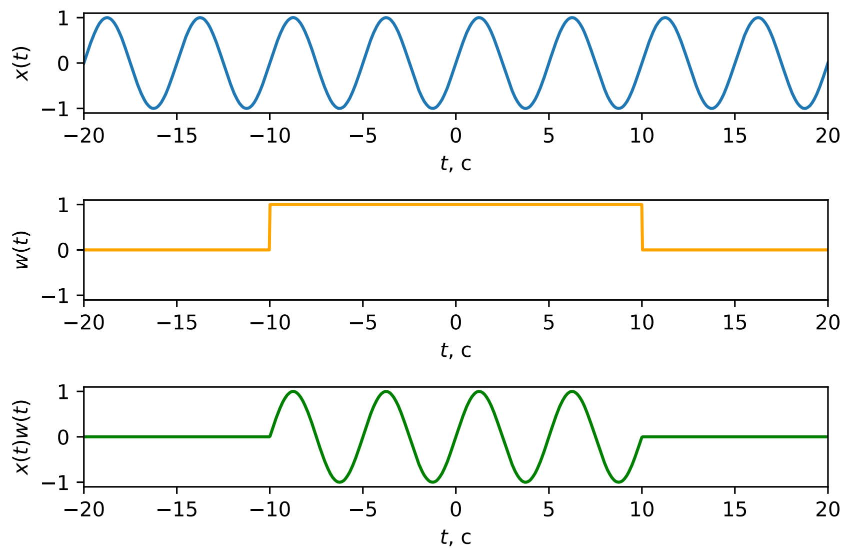
Тогда по свойству линейности преобразования Фурье

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_1) + \frac{1}{2}\delta(f + f_1) + \frac{3}{2}\delta(f - f_2) + \frac{3}{2}\delta(f + f_2)$$



П.5 Эффект растекания спектра при ограничении длительности сигнала.

Ограничение сигнала по длительности эквивалентно умножению на прямоугольную оконную функцию.



$y(t) = w(t)x(t)$. Пусть $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f)$, $w(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} W(f)$, $y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(f)$.

$$w(t)x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}W(f)\otimes X(f),\;\; w(t)x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\int_{-\infty}^{\infty}W(\tilde f)X(f-\tilde f)d\tilde f.$$

В нашем примере

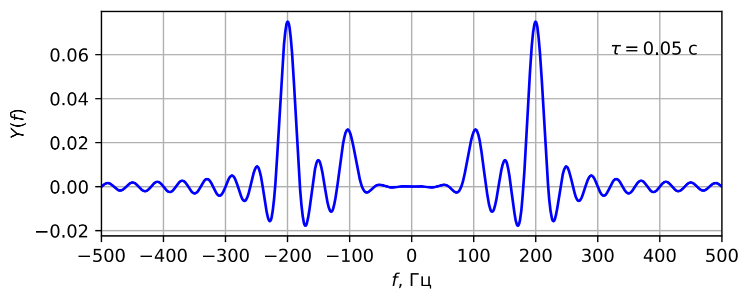
$$X(f)=\frac{1}{2}\delta(f-f_1)+\frac{1}{2}\delta(f+f_1)+\frac{3}{2}\delta(f-f_2)+\frac{3}{2}\delta(f+f_2).$$

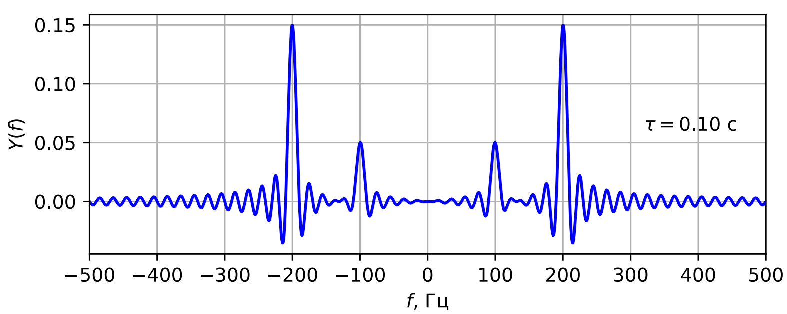
$$w(t)x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\int_{-\infty}^{\infty}W(\tilde f)X(f-\tilde f)d\tilde f.$$

$$Y(f)=\frac{1}{2}W(f-f_1)+\frac{1}{2}W(f+f_1)+\frac{3}{2}W(f-f_2)+\frac{3}{2}W(f+f_2).$$

Спектр прямоугольного окна длиной τ соответствует спектру прямоугольного импульса длиной τ с высотой $E=1$

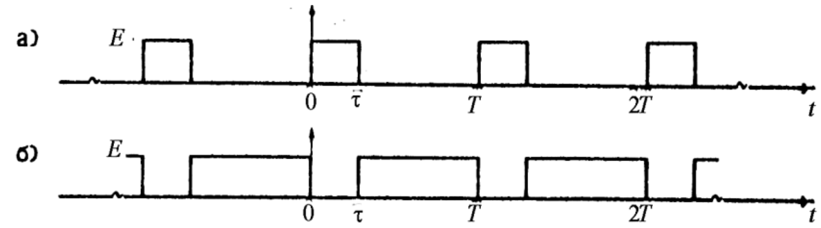
$$W(f)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}Ee^{-j2\pi ft}=\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f}=\tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}.$$





Задачи для самостоятельного решения

1. Изобразить на одном чертеже модули спектров двух последовательностей с одинаковым периодом T.



Указать значение максимальной спектральной плотности.

2. Определить спектр окна Ханна длительностью $\tau=2T$.

$$w(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)\right), & \text{если } |t|<T,\\[2mm] 0, & \text{если } |t|\ge T.\end{cases}$$

Найти отношение уровней первого бокового и главного лепестков.

3. Найти спектр функции отсчетов, используемых в теореме Котельникова.

$$\varphi_k(t)=\frac{\sin(2\pi f_{\text{в}}(t-k\Delta t))}{2\pi f_{\text{в}}(t-k\Delta t)},\;\;\Delta t=\frac{1}{2f_{\text{д}}}$$

Использовать равенство Парсеваля для прямоугольного импульса и дуализм времени и частоты преобразования Фурье.