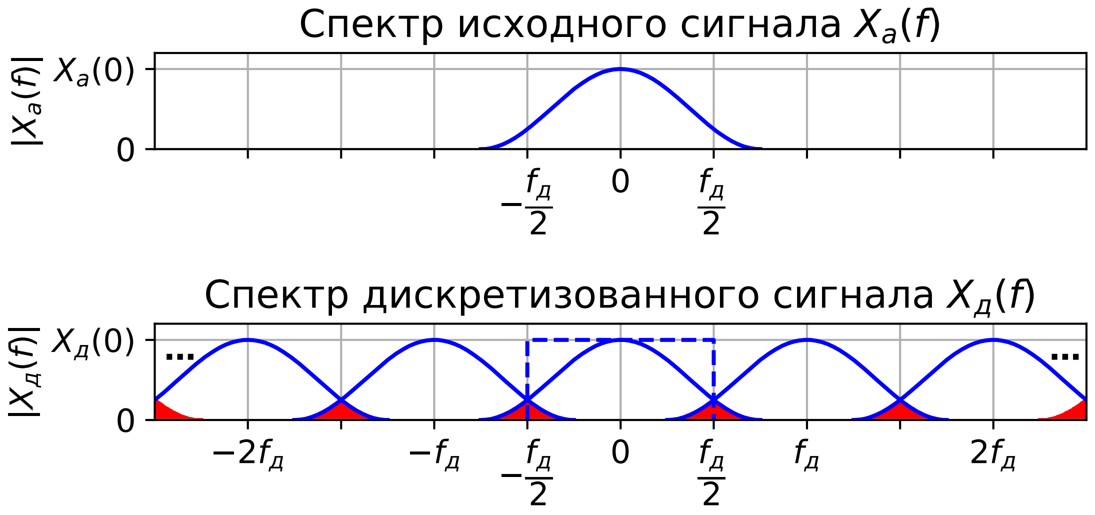
Лабораторная работа №1 «Дискретизация аналоговых сигналов»

Занятие 3. Эффект наложения спектров при дискретизации сигналов.

- **Спектр дискретизованного сигнала**
- **Эффект наложения**
- **Теорема Котельникова во временной области**
- **Эффект наложения спектров при дискретизации синусоидальных сигналов**
- **Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов**
- **Теорема отсчетов в частотной области**



Спектр дискретизованного сигнала.

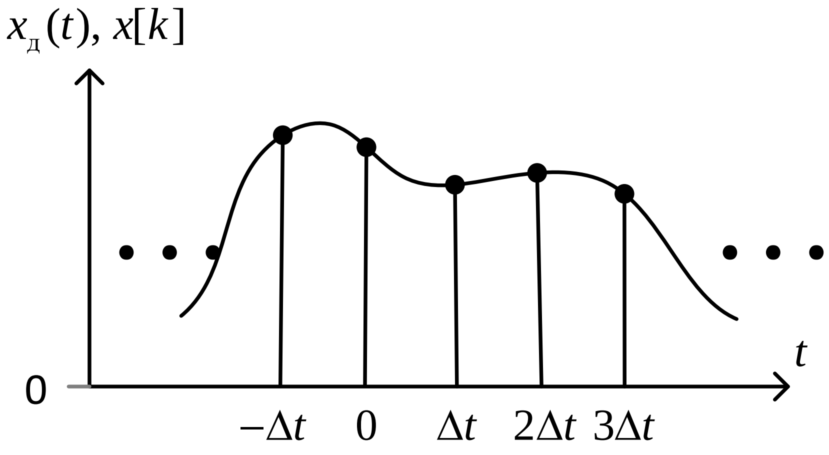
Способы описания дискретных сигналов

1) Функция дискретного времени k.

Это описание в виде последовательности отсчетов $x[k]$ в заданные моменты времени $k\Delta t$, $k \in Z$, где Δt — шаг дискретизации:

$$x[k] = \mathrm{T}x(k\Delta t),\ \mathrm{T} \in \{1;\ \Delta t\}$$

где T — константа с размерностью времени, равная единице или Δt.

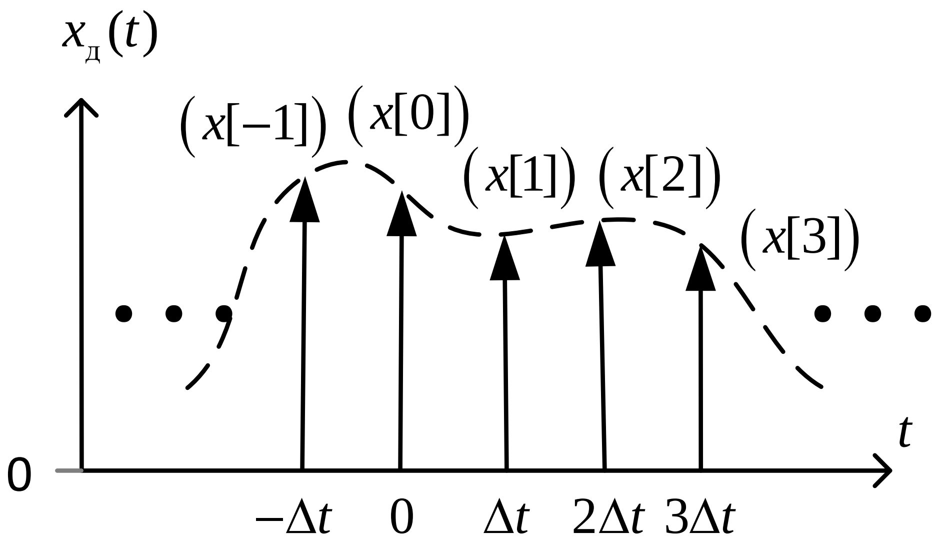


k	-1	0	1	2	3
x[*k*]	x[-1]	x[0]	x[1]	x[2]	x[3]

2) Функция непрерывного времени t ***(континуальная запись).***

$$x_д(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t).$$

В этой записи дискретный сигнал представляет собой последовательность дельта-функций с площадями $x[k]$.



$$x_д(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{T}x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t).$$

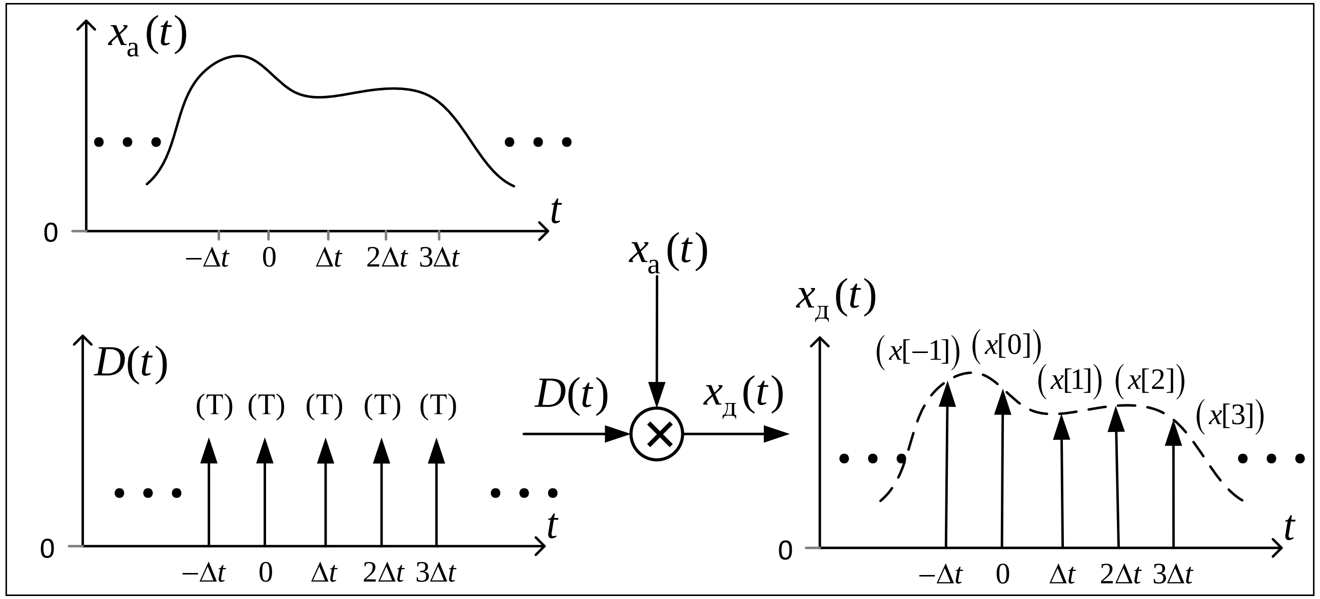
В такой форме сигнал можно подставить в преобразование Фурье.

Спектр дискретизованного сигнала.

Спектр дискретизованного сигнала $X_д(f)$

Континуальная форма записи дискретизованного сигнала

$$x_д(t) = \mathrm{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_а(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t) = D(t)x_а(t)$$



Идеальная функция дискретизации

$$D(t) = \mathrm{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\Delta t).$$

$D(t)$ — периодическая последовательность дельта-функций с периодом Δt и весами T.

Ряд Фурье для $D(t)$

$$D(t) = C_m \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm\frac{2\pi}{\Delta t}t),$$

коэффициенты Фурье

$$C_m = \frac{\mathrm{T}}{\Delta t}\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \delta(t)dt = \frac{\mathrm{T}}{\Delta t}.$$

В итоге

$$x_д(t) = \frac{\mathrm{T}}{\Delta t}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_а(t)\exp(jm\frac{2\pi}{\Delta t}t).$$

По теореме смещения для преобразования Фурье если $x_а(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X_а(f)$, то $x_а(t)\exp(jm\frac{2\pi}{\Delta t}t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X_а\left(f - mf_д\right)$.

Тогда

$$X_д(f) = \frac{\mathrm{T}}{\Delta t}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_а(f - mf_д).$$

Эффект наложения.

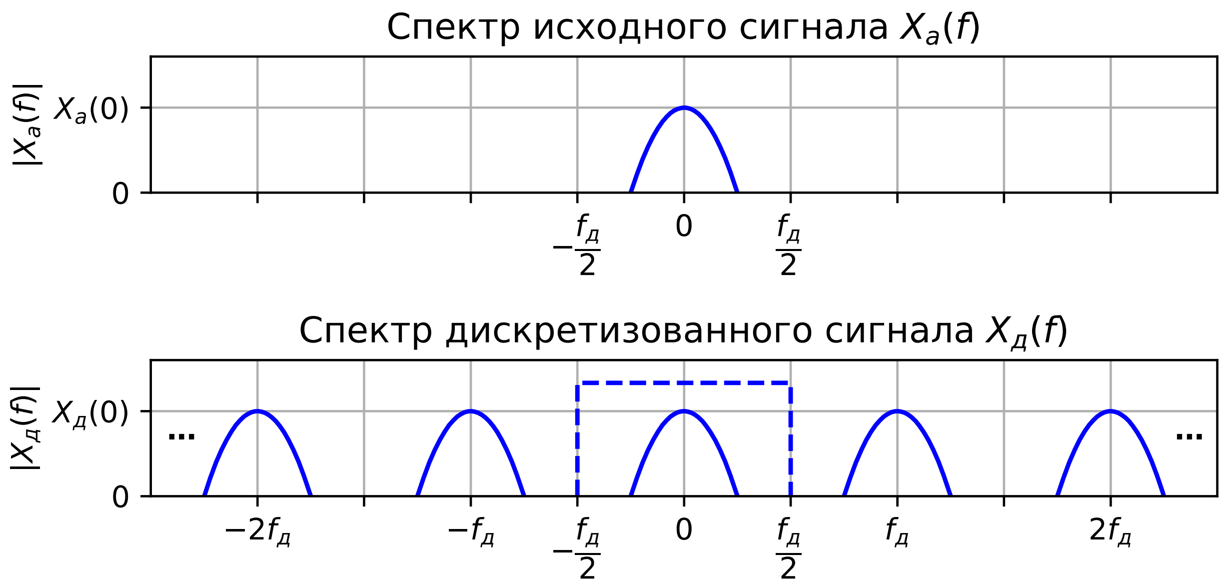
$$X_{д}(f)=\frac{T}{\Delta t}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_{а}(f-mf_{д}).$$

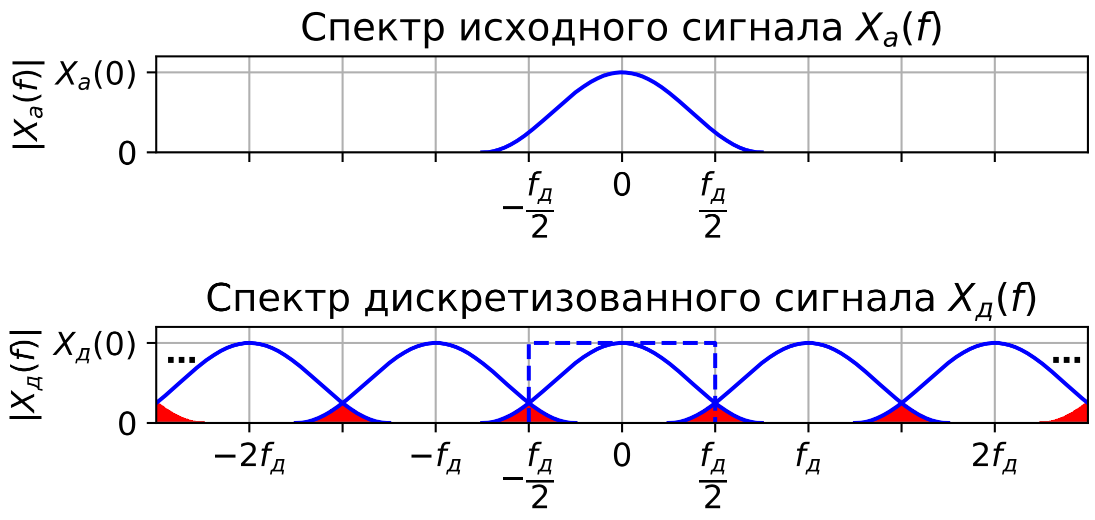
$T=1$ $x[k]=x(k\Delta t)$	спектр перед периодическим повторением масштабируется
$T=\Delta t$ $x[k]=\Delta t\ x(k\Delta t)$	$X_{д}(f)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_{а}(f-mf_{д})$ спектр периодически повторяется

Эффект наложения

Если спектр аналогового сигнала до дискретизации не был ограничен интервалом $\left[-f_{д}/2, f_{д}/2\right]$, то возникает эффект наложения (англ. aliasing): спектр аналогового и дискретизованного на этом интервале не совпадают.

Частично устранить этот эффект можно применением фильтра нижних частот с частотой среза $f_c = f_{д}/2$, при этом информация о высокочастотных спектральных компонентах $|f| > f_c$ не сохраняется.

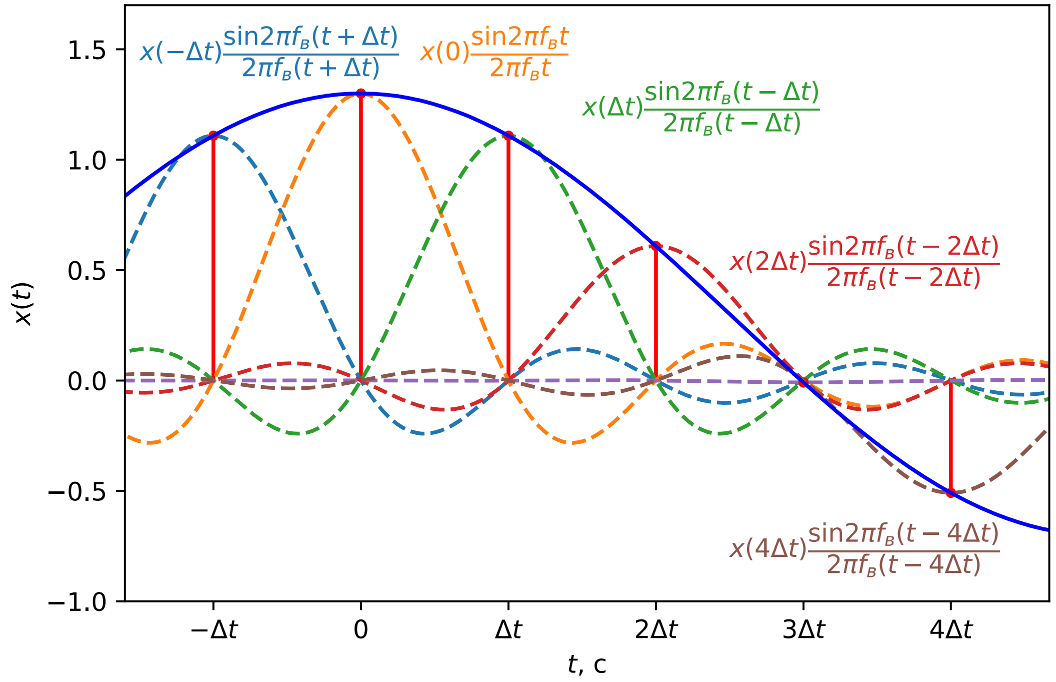




Теорема Котельникова во временной области.

Теорема отсчетов для сигнала с финитным спектром (Котельников 1933 г., Шеннон 1949 г.). Если сигнал $x(t)$ имеет спектр, ограниченный интервалом $[-f_в, f_в]$, и не содержит гармонических компонент на частотах $\pm f_в$ [1], то он представим с помощью своих дискретных отсчетов $x(k\Delta t)$, взятых с шагом $\Delta t = \dfrac{1}{2f_в}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\frac{\sin(2\pi f_в(t-k\Delta t))}{2\pi f_в(t-k\Delta t)}.$$



Интерпретация. Если сигнал $x(t)$ дискретизован с частотой $f_д$, а его спектр ограничен интервалом $\left[-f_д/2,\ f_д/2\right]$, его можно представить с помощью дискретных отсчетов $x(k\Delta t)$. Частота $f_д/2$, равная половине частоты дискретизации, называется частотой Найквиста.

В пространстве сигналов из $L_2(-\infty,\infty)$ с спектром, ограниченным интервалом $\left[-f_д/2,\ f_д/2\right]$, система функций отсчетов $\{\varphi_k(t)\}_{k\in Z}$, таких, что

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin(2\pi f_в(t-k\Delta t))}{2\pi f_в(t-k\Delta t)},\ \Delta t = \frac{1}{2f_в},$$

полна и ортогональна.

[1] Без этой оговорки теорема Котельникова не выполняется, например, для случая дискретизации сигнала $x(t)=\sin(2\pi f_в t)$ с шагом $\Delta t = \dfrac{1}{2f_в}$.

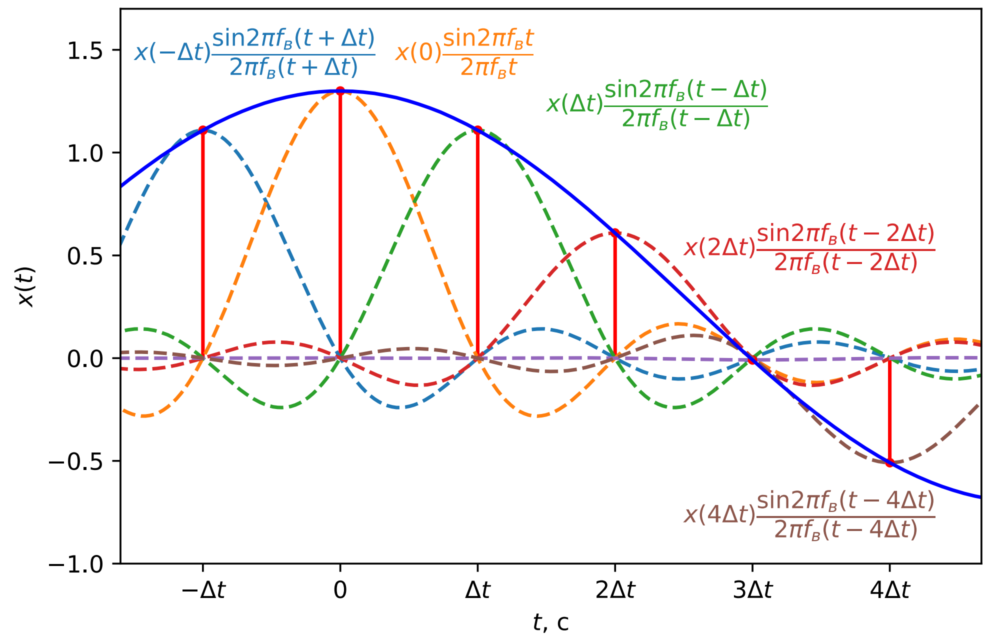
Теорема Котельникова во временной области.

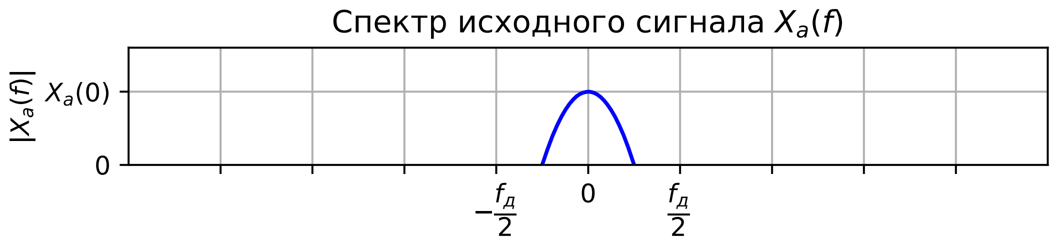
<u>Алгоритм передачи непрерывного сигнала с помощью его отсчетов.</u>

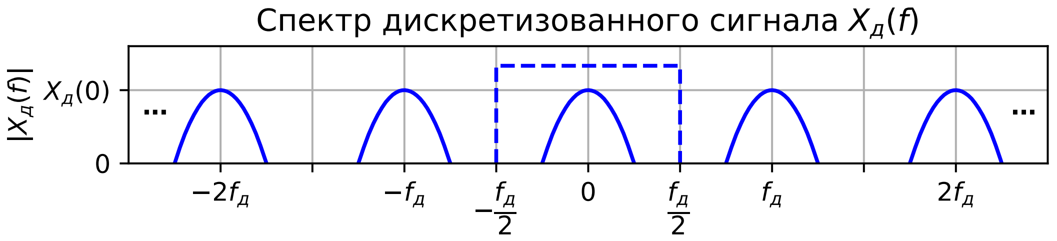
- Взять отсчеты $x(k\Delta t)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Передать величины этих отсчетов.
- На приемном конце сформировать короткие импульсы с площадями $\Delta t x(k\Delta t)$.
- Восстановить сообщение с помощью фильтра нижних частот с полосой пропускания $[-f_в, f_в]$, подавая на вход сформированные короткие импульсы

<u>Недостатки подхода.</u>

- Спектры реальных сигналов ограничены по частоте приближено.
- Невозможно измерить отсчеты сигнала за бесконечно малый промежуток времени.
- Реальные фильтры восстановления отличаются от идеального фильтра нижних частот.
- Короткие импульсы отличны от дельта-функций.







Особенности дискретизации синусоидальных сигналов.

Пусть сигнал $x(t)=\sin(2\pi f_0 t)$ дискретизуется с частотой дискретизации $f_д = 1/\Delta t$.

Тогда

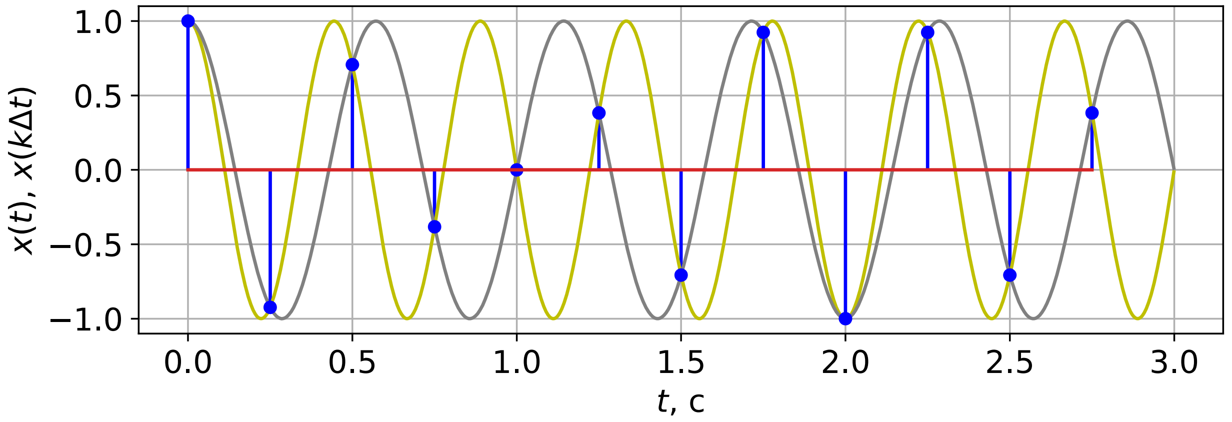
$$x[k]=\sin(2\pi f_0 k\Delta t)=\sin\left(2\pi\left(f_0+\frac{n}{\Delta t}\right)k\Delta t\right)=$$
$$=\sin(2\pi(f_0+nf_д)k\Delta t).$$

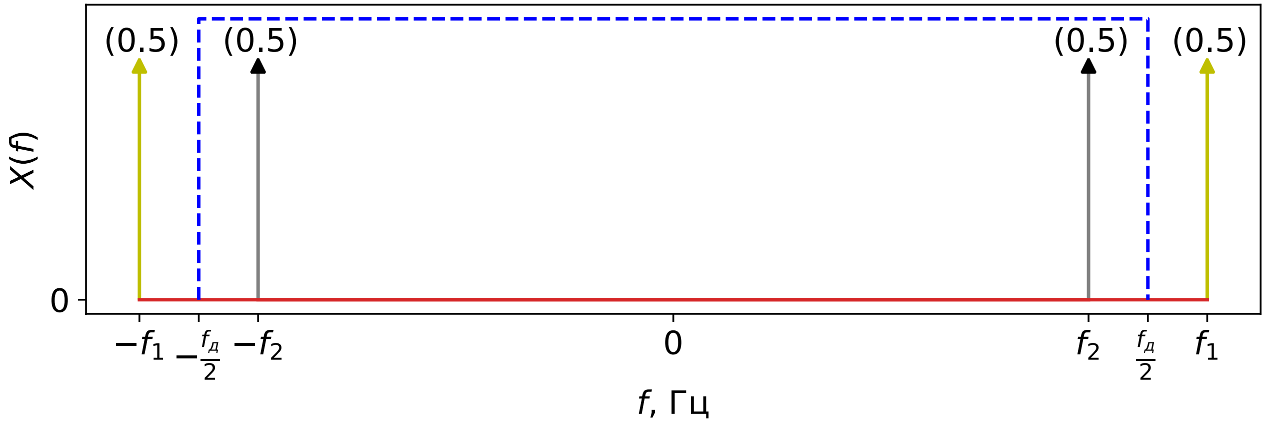
Следовательно, гармонические сигналы с частотами f_0 $f_0+nf_д$ дают одинаковый результат.

Последовательность цифровых отсчетов $x[k]$, представляющая синусоиду с частотой f_0, точно так же представляет синусоиды с другими частотами $f_0+nf_д$.

Причина заключается в эффекте наложения спектров.

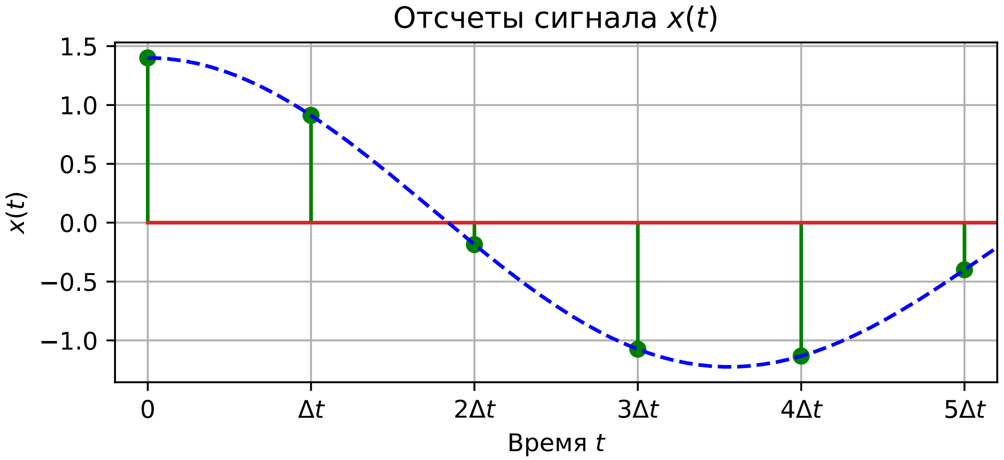
Пример. Дискретизованные косинусоиды с частотами $f_1 = 2,25$ Гц и $f_2 = 1,75$ Гц не различимы при частоте дискретизации $f_д = 4$ Гц.





Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов

Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов



Пусть есть последовательность выборок $x(k\Delta t)$, некоторого аналогового сигнала $x(t)$, где Δt — шаг дискретизации — интервал времени между каждой парой соседних эквидистантных отсчетов, $k \in Z$ — номер отсчета.

$f_д = 1/\Delta t$ — частота дискретизации — величина, обратная шагу дискретизации (размерность [Гц]=[с$^{-1}$]). Будем считать, что спектр исходного аналогового сигнала ограничен интервалом $\left[-f_д/2;\ f_д/2\right]$, а соответственно при дискретизации не наблюдается эффект наложения спектров ($f_д > 2f_в$).

Рассмотрим последовательность отсчетов (дискретный сигнал) $x[k]$, которую будем определять через выборки следующим образом

$$x[k] = \mathrm{T}x(k\Delta t),$$

где $\mathrm{T} = \Delta t$. Как ранее было установлено, при $\mathrm{T} = \Delta t$ спектр дискретизованного сигнала $x[k]$ представляет собой периодическое повторение исходного спектра $X_а(f)$ аналогового сигнала $x(t)$ с периодом, равным частоте дискретизации $f_д$:

$$X_д(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_а(f - nf_д).$$

Необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе $\left[-f_д/2;\ f_д/2\right]$. Теперь оценим спектр исходного сигнала по его выборкам в этой полосе.

Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов

Континуальная запись дискретного сигнала $x[k]$ в данном случае

$$x_{Д}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t).$$

Вычислим его спектр (преобразование Фурье)

$$X_{Д}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{Д}(t)\exp(-j2\pi f t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t)\exp(-j2\pi f t)dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)\exp(-j2\pi f t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi f k\Delta t),$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала определяется через его отсчёты по формуле

$$X_{Д}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi f k\Delta t). \qquad (1)$$

Эта формула определяет прямое дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Учитывая, что (1) представляет собой ряд Фурье для периодической функции $X_{Д}(f)$[2], получаем, что отсчётные значения дискретного сигнала соответствуют коэффициентам Фурье в этом ряде:

$$x[k] = c_{-k} = \frac{1}{f_{Д}} \int_{-f_{д}/2}^{f_{д}/2} X(f)\exp(j2\pi f k\Delta t)df. \qquad (2)$$

В итоге получаем пару формул (1) и (2), определяющих прямое и обратное дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). ДВПФ в свою очередь показывает, каким является спектр дискретного сигнала $x[k]$, который на отрезке оси частот $\left[-f_{Д}/2;\ f_{Д}/2\right]$ в отсутствии наложения совпадает со спектром исходного аналогового сигнала. При этом важно помнить, что в данном случае выборки аналогового сигнала связаны с дискретной последовательностью как $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$.

---

[2] *Напоминание. Для* $2l$*- периодической функции* $f(x)$*, абсолютно интегрируемой на интервале* $(-l;l)$ *ряд Фурье по системе функций* $\phi_m(x) = \exp(jm\frac{\pi}{l}x)$*,* $m \in Z$*:* $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(jm\frac{\pi}{l}x)$*, где коэффициенты Фурье* $c_m = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\exp(-jm\frac{\pi}{l}x)dx$.

Теорема отсчетов в частотной области

Теорема отсчетов в частотной области

Реально все сигналы наблюдаются в течение конечного интервала времени, например, $[-T,\ T]$. Поэтому можно считать, что $x(t)$ является финитной функцией. Спектр такого сигнала имеет бесконечную протяжённость и записывается в виде

$$X(f)=\int_{-T}^{T} x(t)e^{-j2\pi f t}dt.$$

Для периодического продолжения $x(t)$ с периодом $2T$ (без наложения) справедливо представление рядом Фурье:

$$x_{\text{п}}(t)=\sum_n c_n \exp(j2\pi n\Delta f\, t),$$

где $\Delta f=1/2T$ и коэффициенты Фурье

$$c_n=(1/2T)\int_{-T}^{T} x(t)\exp(-j2\pi n\Delta f\, t)dt=\Delta f\, X(n\Delta f).$$

Для спектральной функции можем записать

$$X(f)=\int_{-T}^{T}\left[\sum_n \Delta f\, X(n\Delta f)\, \exp(j2\pi n\Delta f\, t)\right]\exp(-j2\pi f t)dt=$$

$$=\Delta f\sum_n X(n\Delta f)\int_{-T}^{T}\exp\big(j2\pi(n\Delta f-f)t\big)dt.$$

$$\int_{-T}^{T}\exp\big(j2\pi(n\Delta f-f)t\big)dt=\frac{1}{j2\pi(n\Delta f-f)}\exp\big(j2\pi(n\Delta f-f)t\big)\Big|_{-T}^{T}=$$

$$=\frac{2\sin 2\pi T(n\Delta f-f)}{2\pi(n\Delta f-f)}.$$

Для $X(f)$ окончательно получаем

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta f)\frac{\sin 2\pi T(f-n\Delta f)}{2\pi T(f-n\Delta f)};\ \ \Delta f=1/2T.$$

Это интерполяционная формула Котельникова (теорема отсчётов) в частотной области. Функция $X(f)$ на любой частоте f однозначно представляется последовательностью своих отсчётов, взятых через равные интервалы $\Delta f=1/2T$.

Дискретизация спектральной функции с шагом $\Delta f=1/2T$ приводит к периодическому повторению сигнала по оси времени с периодом $2T$. При этом эффекта наложения отдельных периодов друг на друга не будет, поскольку шаг дискретизации по частоте выбран в соответствии с теоремой отсчётов в спектральной области.