Tarea 3

Yanely Luna Gutiérrez

27/5/2021

Ejercicio 1

Supongamos que la llegada de autos a la caseta de cobro de una autopista los días viernes de 5 a 8 p.m. se puede modelar mediante la familia paramétrica Poisson. Hacemos dos preguntas al encargado de la caseta:

- ¿Como cuántos autos llegan en promedio por minuto a la caseta? A lo cual nos responde que 5.
- Tomando en cuenta que el dato anterior es una apreciación subjetiva ¿Cuál cree usted que sería en el mayor de los casos el número promedio de autos por minuto? A lo cual nos responde que 12.

a) Utilizando una distribución conjugada especifique la distribución a priori del parámetro con base en la informacion que se tiene. Calcule el valor esperado del parámetro así como la probabilidad de que dicho parametro sea mayor a 8.

Para facilidad de los cálculos podemos suponer que el parámetro de interés λ sigue una distribución $\Gamma(a, b)$ ya que es la distribución conjugada de una Poisson.

Según la información proporcionada,

$$E(\Lambda) = 5$$

y podemos interpretar la segunda respuesta como que

$$P(\lambda \geq 12) = 0.05$$

. Entonces tenemos que

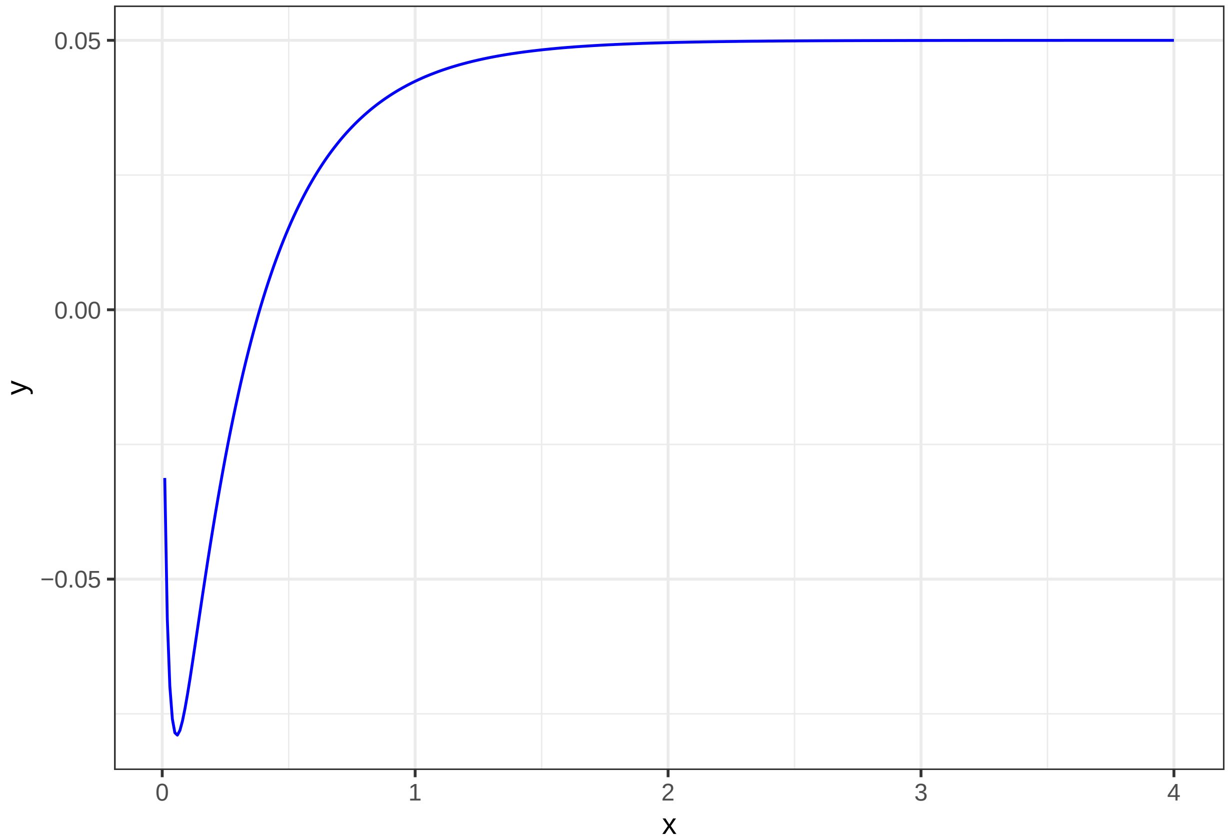
$$E(\lambda) = \frac{a}{b} = 5 \Rightarrow a = 5b$$

y

$$F_\lambda(12) = 0.95 \Rightarrow \int_0^{12} \frac{(b\lambda)^{a-1}}{\Gamma(a)} be^{-b\lambda} d\lambda = 0.95$$

$$\Rightarrow \int_0^{12} \frac{(b\lambda)^{5b-1}}{\Gamma(5b)} be^{-b\lambda} d\lambda = 0.95$$

```
# Tenemos que aproximar el cero de la siguiente función:
aux <- function(b){
  a <- 5*b
  return(pgamma(12,shape = a, rate = b)-0.95)
}
# Graficamos la función para encontrar el intervalo donde cruza el cero
x <- seq(0.01,4,by=0.01)
ggplot(data.frame(x=x,y=aux(x)),aes(x=x,y=y)) + geom_line(color="blue") +
  theme_bw()
```




```r
# Parámetros estimados
(b_hat <- uniroot(aux,interval = c(0,0.5))$root)
```

```
## [1] 0.385447
```

```r
(a_hat <- 5*b_hat)
```

```
## [1] 1.927235
```

```r
# Comprobamos que la probabilidad con estos parámetros es cercana a 0.95
pgamma(12,shape = a_hat, rate = b_hat)
```

```
## [1] 0.9499986
```

```r
# Y la esperanza es 5
a_hat/b_hat
```

```
## [1] 5
```

Entonces, los parámetros son $a = 1.9272351$ y $b = 0.385447$, por lo que $\lambda \sim Gamma(1.927, 0.385)$ y $E(\lambda) = 5$. Entonces,

$$P(\lambda \geq 8) = 1 - F_\lambda(8) =$$

0.1739074

b) Supongamos ahora que procedemos a tomar una muestra aleatoria y obtenemos $x = (679; 703; 748; 739; 693)$. Obtenga la distribución a posteriori del parámetro y calcule el valor esperado del parámetro así como la probabilidad de que dicho parámetro sea mayor a 8.

La muestra observada es del número de autos que pasan entre las 5 y 8 pm, por lo que tenemos que convertirla a autos por minuto (entre 180):

$x = (679; 703; 748; 739; 693) = (3.772; 3.905; 4.155; 4.105; 3.85)$

```
x <- c(679,703,748,739,693)
x <- x/180
```

La distribución posterior es $\lambda|x \sim Gamma(a + \sum_{i=1}^{n} X_i, b + n)$. En este caso $n=$5

$$\Rightarrow a + \sum_{i=1}^{n} X_i = 1.927 + 3.772 + 3.905 + 4.155 + 4.105 + 3.85 =$$

21.716124

$$b + n = 0.385 + 5 = 5.385$$

Entonces

$$E(\lambda|X) = \frac{a + \sum_{i=1}^{n} X_i}{b + n} = \frac{21.716}{5.385} = 4.033$$

Compare con el inciso a). Grafique en una misma hoja la distribución a priori, la distribución a posteriori con el primer dato, con los primeros dos y así sucesivamente hasta la a posteriori con los cinco datos.