

Tarea 3

Yanely Luna Gutiérrez

27/5/2021

Ejercicio 1

Supongamos que la llegada de autos a la caseta de cobro de una autopista los días viernes de 5 a 8 p.m. se puede modelar mediante la familia paramétrica Poisson. Hacemos dos preguntas al encargado de la caseta:

- ¿Como cuántos autos llegan en promedio por minuto a la caseta? A lo cual nos responde que 5.
 - Tomando en cuenta que el dato anterior es una apreciación subjetiva ¿Cuál cree usted que sería en el mayor de los casos el número promedio de autos por minuto? A lo cual nos responde que 12.
- a) Utilizando una distribución conjugada especifique la distribución a priori del parámetro con base en la información que se tiene. Calcule el valor esperado del parámetro así como la probabilidad de que dicho parametro sea mayor a 8.

Para facilidad de los cálculos podemos suponer que el parámetro de interés λ sigue una distribución $\Gamma(a, b)$ ya que es la distribución conjugada de una Poisson.

Según la información proporcionada,

$$E(\lambda) = 5$$

y podemos interpretar la segunda respuesta como que

$$P(\lambda \geq 12) = 0.05$$

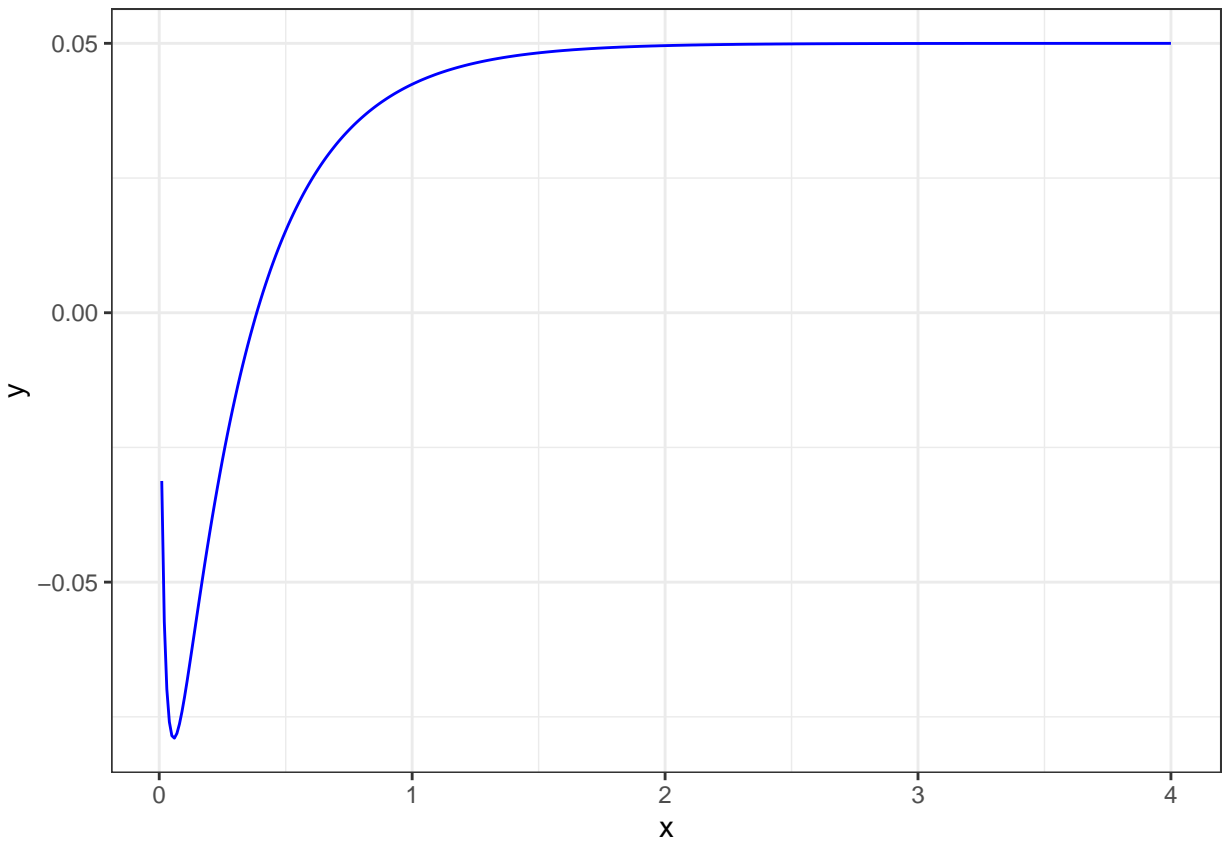
. Entonces tenemos que

$$E(\lambda) = \frac{a}{b} = 5 \Rightarrow a = 5b$$

y

$$\begin{aligned} F_{\lambda}(12) = 0.95 &\Rightarrow \int_0^{12} \frac{(b\lambda)^{a-1}}{\Gamma(a)} b e^{-b\lambda} d\lambda = 0.95 \\ &\Rightarrow \int_0^{12} \frac{(b\lambda)^{5b-1}}{\Gamma(5b)} b e^{-b\lambda} d\lambda = 0.95 \end{aligned}$$

```
# Tenemos que aproximar el cero de la siguiente función:
aux <- function(b){
  a <- 5*b
  return(pgamma(12, shape = a, rate = b)-0.95)
}
# Graficamos la función para encontrar el intervalo donde cruza el cero
x <- seq(0.01, 4, by=0.01)
ggplot(data.frame(x=x, y=aux(x)), aes(x=x, y=y)) + geom_line(color="blue") +
  theme_bw()
```



```
# Parámetros estimados
(b_hat <- uniroot(aux,interval = c(0,0.5))$root)
```

```
## [1] 0.385447
```

```
(a_hat <- 5*b_hat)
```

```
## [1] 1.927235
```

```
# Comprobamos que la probabilidad con estos parámetros es cercana a 0.95
pgamma(12,shape = a_hat, rate = b_hat)
```

```
## [1] 0.9499986
```

```
# Y la esperanza es 5
a_hat/b_hat
```

```
## [1] 5
```

Entonces, los parámetros son $a = 1.9272351$ y $b = 0.385447$, por lo que $\lambda \sim \text{Gamma}(1.927, 0.385)$ y $E(\lambda) = 5$.
Entonces,

$$P(\lambda \geq 8) = 1 - F_{\lambda}(8) =$$

0.1739074