第一章 函数与极限练习题

一、选择题

1、下列函数对中，函数相同的是（ ）

(A) $f(x)=\lg x^2,\ g(x)=2\lg x$　　(B) $f(x)=x,\ g(x)=\sqrt{x^2}$

(C) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},\ g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$　　(D) $f(x)=x+1,\ g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

2、已知函数 $f(x+1)=\dfrac{x}{x+1}$，则 $f^{-1}(x+1)$ 等于（ ）

(A) $-\dfrac{1}{x}$　　(B) $\dfrac{x}{1-x}$　　(C) $-\dfrac{x+1}{x}$　　(D) $\dfrac{x-1}{x}$

3、下列命题正确的是（ ）

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|U_n|=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=a$　(B) 设 $\{x_n\}$ 为任意数列，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$

(D) 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充分必要条件是：它的任一子数列都收敛于 a

4、设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0\\ 0, & x=0\\ 1+x^2, & x<0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 为（ ）

(A) 不存在　　(B) -1　　(C) 0　　(D) 1

5、设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq0$，$\varphi(x)$ 有间断点。则（ ）

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

6、设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ a+x+2, & x\geq0\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，则 $a=$（ ）

(A) 0　　(B) 2　　(C) -1　　(D) 1

7、已知 $f(x)$ 的连续区间是 $[0,1)$，则函数 $f[\ln(x+1)]$ 的连续区间是（ ）

(A) $[0,1)$　　(B) $[0,e-1)$　　(C) $[1,e)$　　(D) $[e^{-1},e)$

8、设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$（ ）

$(A)\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$ $(B)\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$

$(C)\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$ $(D)\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$

9、设函数 $f(x)=\ln\frac{1}{|x-2|}$，那么 $x=2$ 是 $f(x)$ 的（ ）

(A) 可去间断点 (B)跳跃间断点 (C)第二类间断点 (D)连续点

10、当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $\sin 2x-2\sin x$ 是 x 的（ ）阶无穷小量。

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

二、填空题

1、已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f\left[\varphi(x)\right]=1-x$，且 $\varphi(x)\ge 0$，则 $\varphi(x)=$___

2、$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2})^n=$_____

3、$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=$_____

4、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}(\beta\ne 0)=$___

5、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且 $f(x)\ne 0$,对任意的实数 x 和 y 均有 $f(xy)=f(x)f(y)$ 成立,则 $f(2008)=$____

6、设函数 $F(x)$ 的定义域为 $D=\{x|x\in R,x\ne 0且x\ne 1\}$，且满足 $F(x)+F(\frac{x-1}{x})=1+x$ 则 $F(x)=$____

7、设函数 $f(x)=a^x\left(a>0,a\ne 1\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left[f(1)f(2)\cdots f(n)\right]=$____

8、已知 $y=f(x)$ 是最小正周期为 5 的偶函数。当 $f(-1)=1$ 时，$f(4)=$___

9、如果 $f(\ln x)=x$, 则 $f(3)$ 的值是_____

10、已知数列 $a_1=2,a_2=2+\frac{1}{2},a_3=2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\cdots$ 的极限存在，则极限为______

三、简答题

1、已知 $f(x)$ 为二次函数，且 $f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$，求 $f(x)$。

2、设实数 $a<b$，函数 $f(x)$ 对任意实数 x，有 $f(a-x)=f(a+x), f(b-x)=f(b+x)$。

证明：$f(x)$ 是以 $2b-2a$ 为周期的周期函数。

3、设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(e^n+x^n\right)}{n}\left(x>0\right)$,求 $f(x)$。

4、若 $f(x)$ 在 $\left[0,a\right]\left(a>0\right)$ 上连续，且 $f(0)=f(a)$，则方程 $f(x)=f(x+\dfrac{a}{2})$ 在 $\left(0,a\right)$ 内至少有一个实根。

5、设 $x_1=\sqrt{2}, x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}\left(n\ge 2\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

第一章 函数与极限练习题答案

一、选择题

1、$\left(C\right)$

分析：两函数相同，必须定义域相同，对应法则也相同。本题中$\left(A\right)$，$\left(D\right)$两组定义域不同，故不是同一函数。$\left(B\right)$对应法则不同。故选$\left(C\right)$

2、$\left(A\right)$

分析：由 $f(x+1)=\dfrac{x}{x+1} \Rightarrow f(x)=\dfrac{x-1}{x}$，即 $y=\dfrac{x-1}{x} \Rightarrow x(y-1)=-1 \Rightarrow x=\dfrac{-1}{y-1}=\dfrac{1}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{1}{1-x} \Rightarrow f^{-1}(x+1)=-\dfrac{1}{x}$。故选$\left(A\right)$

3、$\left(D\right)$

分析：因为设$U_n=\left(-1\right)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|U_n\right|=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，但$\lim\limits_{n\to\infty}U_n$不存在，故不选$\left(A\right)$

设 $y_n=\dfrac{1}{n},x_n=n$，则 $x_ny_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=1\neq 0$，故不选$\left(B\right)$

设 $x_n=\dfrac{1+\left(-1\right)^n}{2},y_n=\dfrac{1-\left(-1\right)^n}{2}$，则 $x_ny_n=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n,\lim\limits_{n\to\infty}y_n$都不存在。故不选$\left(C\right)$。

4、$\left(A\right)$

分析：因为$f\left(0-0\right)=\lim\limits_{x\to-0}\left(1+x^2\right)=1\neq f(0+0)=\lim\limits_{x\to+0}\left(2x-1\right)=-1$，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在。

5、$\left(D\right)$

分析：反证法，假如$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$没有间断点，即为连续函数。因$f(x)$连续，故$\varphi\left(x\right)=f(x)\cdot\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$连续，矛盾，故$\left(D\right)$正确。取$\varphi\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\geq 1\\ -1 & x<1\end{cases}$,$f(x)=x^2+1$,则$f(x),\varphi\left(x\right)$符合要求,而$\varphi\left[f(x)\right]=1,[\varphi\left(x\right)]^2=1,f[\varphi(x)]=2$均无间断点,故排除$\left(A\right)$、$\left(B\right)$、$\left(C\right)$，应选$\left(D\right)$。

6、$\left(C\right)$

分析：因为 $f(0)=a+2=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1\Rightarrow a=-1$。

7、(B)

分析：因为 $f(x)$ 的连续区间是 $\left[0,1\right)$，由 $0\le \ln\left(x+1\right)<1$，得 $0\le x<e-1$

8、(D)

分析：当 $x<0$ 时，$g(f(x))=g(x^2)=x^2+2$，当 $x\ge 0$ 时，$g(f(x))=g(-x)=x+2$

9、(C)

分析：$x<2$ 时，$f(x)=\ln\dfrac{1}{2-x},\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\ln\dfrac{1}{2-x}=\infty$，则 $x=2$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点。

10、(B)

分析：$\sin 2x-2\sin x=2\sin x\cos x-2\sin x=2\sin x(\cos x-1)=-4\sin x\sin^2\dfrac{x}{2}$，又已知

$\sin x\sim x,\sin^2\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x^2}{4}\left(x\to 0\right)$因此 $\sin 2x-2\sin x$ 是 x 的 3 阶无穷小量

二、填空题

1、$\varphi(x)=\underline{\sqrt{\ln\left(1-x\right)}\ \left(x\le 0\right)}$

分析：由 $f(x)=e^{x^2}$，有 $f\left[\varphi\left(x\right)\right]=e^{\left[\varphi(x)\right]^2}$，又 $f\left[\varphi(x)\right]=1-x$，则 $e^{\left[\varphi(x)\right]^2}=1-x$。

两边取对数，注意到 $\varphi(x)\ge 0$，得 $\varphi\left(x\right)=\sqrt{\ln\left(1-x\right)}$ 又由 $\begin{cases}\ln\left(1-x\right)\ge 0\\ 1-x>0\end{cases}\Rightarrow x\le 0$ 故

$\varphi\left(x\right)=\sqrt{\ln\left(1-x\right)}\ \left(x\le 0\right)$。

2、$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^2})^n=\underline{e^2}$

分析：当 $n>1$ 时，
$$1+\frac{2}{n}<1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}<1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n(n-1)}=1+\frac{2}{n-1}$$
$$(1+\frac{2}{n})^n<(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2})^n<(1+\frac{2}{n-1})^n$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n})^n=e^2,\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n-1})^n=e^2$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^2})^n=e^2$

3、$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\underline{\cos a}$

分析：原式$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\cos\dfrac{x+a}{2}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}=\cos a$

4、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}(\beta\neq 0)=$ $\underline{\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}}$

分析：原式$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+(\cos\alpha x-1)]}{\ln[1+(\cos\beta x-1)]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-1}{\cos\beta x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\alpha x)^2/2}{(\beta x)^2/2}=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$

5、$f(2008)=$ $\underline{1}$

分析：令 $y=0,$ 则 $f(0)=f(x)f(0)$ 。由 $f(x)\neq 0$ ，则 $f(0)\neq 0$ ，得 $f(x)\equiv 1$ ，故 $f(2008)=$ $\underline{1}$

6、$F(x)=$ $\underline{\dfrac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}}$

分析：在①中分别用$\dfrac{x-1}{x}$和$-\dfrac{1}{x-1}$代替x，得

$$F(\frac{x-1}{x})+F(\frac{-1}{x-1})=\frac{2x-1}{x} \qquad ②$$

$$F(\frac{-1}{x-1})+F(x)=\frac{x-2}{x-1} \qquad ③$$

①+③−②，得

$$2F(x)=1+x+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}$$

$$F(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$$

7、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln\left[f(1)f(2)\cdots f(n)\right]=$ $\underline{\dfrac{1}{2}\ln a}$

分析： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln\left[f(1)f(2)\cdots f(n)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[a^1a^2\cdots a^n]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln a^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\ln a=\frac{1}{2}\ln a$$

8、$f(4)=$ $\underline{1}$

分析： $f(4)=f(-1+5)=f(-1)=1$

9、 $\underline{\ e^3\ }$

分析：$f(3)=f(\ln e^3)=e^3$

10、 $\underline{\ 1+\sqrt{2}\ }$

分析：因为数列$\left\{a_n\right\}$的极限存在，所以可设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，又因为$a_n=2+\dfrac{1}{a_{n-1}}\left(n\geq 2\right)$。对

两端求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2+\dfrac{1}{a_{n-1}})=2+\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}}$

有$a=2+\dfrac{1}{a}$，故$a=1\pm\sqrt{2}$（舍去负值，因$a_n>0$）所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1+\sqrt{2}$。

三、简答题

1、分析：设$f(x)=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$，那么

$$f(x+1)+f(x-1)=2ax^2+2bx+2\left(a+c\right)=2x^2-4x$$

比较两边系数，得$a=1,b=-2,c=-1$，故$f(x)=x^2-2x\text{-}1$。

2、证：

$$f[x+2(b\text{-}a)]=f\left[b+\left(x+b-2a\right)\right]=f\left[b-\left(x+b-2a\right)\right]=f\left(2a-x\right)$$
$$=f\left[a+\left(a\text{-}x\right)\right]=f\left[a-\left(a\text{-}x\right)\right]=f(x)$$

故$f(x)$是以$2b-2a$为周期的周期函数。

3、分析：当$0<x\leq e$时，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(e^n+x^n\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln[e^n(1+(\frac{x}{e})^n)]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\ln[1+(\frac{x}{e})^n]}{n}=\lim_{n\to\infty}1+\frac{\ln[1+(\frac{x}{e})^n]}{n}=1$$

当$x>e$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln[x^n(1+(\frac{e}{x})^n)]}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln x+\ln[1+(\frac{e}{x})^n]}{n}=\ln x$，

即$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leq e\\ \ln x, & x>e\end{cases}$。

4、证明：令$g(x)=f(x)-f(x+\dfrac{a}{2})$

则$g(0)=f(0)-f(\dfrac{a}{2})$

$$g(\frac{a}{2})=f(\frac{a}{2})-f(a)=f(\frac{a}{2})-f(0)=-(f(0)-f(\frac{a}{2}))$$

因此$g\left(0\right)\cdot g(\frac{a}{2})\le 0$

若$f(0)=f(\frac{a}{2})$，则$x=\frac{a}{2}$满足要求。

若$f(0)\ne f(\frac{a}{2})$，则$g\left(0\right)\cdot g(\frac{a}{2})<0$，由零点点定理$\exists x_0\in(0,\frac{a}{2})$使得$g\left(x_0\right)=0$，即$f(x_0)=f(x_0+\frac{a}{2})$，$x_0$是$\left(0,a\right)$内$f(x)=f(x+\frac{a}{2})$的根。

5、分析：先证$\left\{x_n\right\}$单调增加。因为$x_2=\sqrt{2+x_1}>\sqrt{2}=x_1$，今设$x_n>x_{n-1}$，则$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}>\sqrt{2+x_{n-1}}=x_n$。

再证$x_n<2\left(n\ge 1\right)$，由于$x_1=\sqrt{2}<2$，设$x_n<2$，从而有$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}=2$

因此极限存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由等式$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$，即${x_n}^2-2-x_{n-1}=0$。两边求极限得$a^2-2-a=0$，那么$a=2$或$a=-1$（舍去）。故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$。

第二章　导数与微分练习题

一、选择题

1、设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+2x)-f(x_0-x)}{2x}=1$，则 $f'(x_0)=$（ ）

(A) $\dfrac{2}{3}$　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) $-\dfrac{2}{3}$　　(D) $-\dfrac{3}{2}$

2、已知 $y=f(\dfrac{x-2}{3x+2}), f'(x)=\arctan x^2$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$（ ）

(A) π　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$

3、下列命题正确的是（ ）

(A)若 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则 $|f(x)|$ 在点 x_0 一定可导。

(B)若 $|f(x)|$ 在点 x_0 可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 一定可导。

(C)若 $f(x_0)=0$，则 $f'(x_0)=0$。

(D)若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 都不可导，但 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 可能可导。

4、已知 $f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$，则 $df\left(\sqrt{1-x^2}\right)=$（ ）

(A) $-2xdx$　　(B) $-\dfrac{2x}{|x|}dx$　　(C) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　(D) $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

5、设 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的（ ）

(A) 间断点　　(B) 连续而不可导的点　　(C) 可导的点，且 $f'(0)=0$

(D) 可导的点，且 $f'(0)\ne 0$

6、设 $f(x+1)=af(x)$ 总成立, $f'(0)=b, a, b$ 为非零常数，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处（ ）

(A)不可导　　(B)可导且 $f'(1)=ab$　　(C)可导且 $f'(1)=a$　　(D)可导且 $f'(1)=b$

7、设有多项式 $P(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，又设 $x=x_0$ 是它的最大实根，则 $P'(x_0)$ 满足（ ）

(A) $P'(x_0)>0$　　(B) $P'(x_0)<0$　　(C) $P'(x_0)\le 0$　　(D) $P'(x_0)\ge 0$

8、设 $f(x)=3x^2+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=$（ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

9、设 $f'(a)>0$，则 $\exists\delta>0$，有（ ）

(A) $f(x)>f(a)\left(x\in(a,a+\delta)\right)$，$f(x)<f(a)\left(x\in(a-\delta,a)\right)$

(B) $f(x)<f(a)\left(x\in(a,a+\delta)\right)$，$f(x)>f(a)\left(x\in(a-\delta,a)\right)$

(C) $f(x)\geq f(a)\left(x\in(a-\delta,a+\delta)\right)$

(D) $f(x)\leq f(a)\left(x\in(a-\delta,a+\delta)\right)$

10、设曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，其中 a,b 是常数，则（ ）

(A) $a=0,b=2$ (B) $a=-1,b=-1$

(C) $a=-3,b=1$ (D) $a=1,b=-3$

二、填空题

1、设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$，$f'(2)=$______。

2、给定曲线 $y=\dfrac{1}{x}$，则过点 $(-3,1)$ 的切线方程为________________。

3、设 $y=(\sin x)^{\cos^2 x}$，则 $y'=$________________。

4、设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$_______。

5、设 $y=\sin^3 x$，则 $y^{(n)}=$________________。

6、设 $y=e^{3u},u=f(t),t=\ln x$，其中 $f(u)$ 可微，则 $dy=$___________。

7、设 $y\sin x-\cos(x-y)=0$，则 $dy=$____________。

8、设 k 为常数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n[(1+\dfrac{1}{n})^k-1]=$ ___________。

9、由方程 $x^y=y^x$ 确定 $x=x(y)$，则 $\dfrac{dx}{dy}=$__________。

三、简答题

1、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$。

2、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任何 x,y 有 $f(x+y)=f(x)f(y),f(x)=1+xg(x)$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$。试证函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导。

3、证明：方程$x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x=1$在$\left(0,1\right)$内必有唯一实根$x_n$，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

4、设函数$f(x)$在$\left[-1,1\right]$上有定义，且满足$x\le f(x)\le x^3+x,-1\le x\le 1$，证明$f'(0)$存在，且$f'(0)=1$。

5、设$x\in\left(0,1\right)$，证明$\left(1+x\right)\ln^2\left(1+x\right)<x^2$。

第二章　导数与微分练习题答案

一、选择题

1、 (A)

分析：因为

$$
\begin{aligned}
1&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+2x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-x)}{2x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+2x)-f(x_0)}{2x}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}\\
&=\frac{3}{2}f'(x_0)
\end{aligned}
$$

所以 $f'(x_0)=\dfrac{2}{3}$

2、(C)

分析：令 $u=\dfrac{x-2}{3x+2}$，则 $y=f\left(u\right)$，从而

$$
\frac{dy}{dx}=f'(u)\frac{du}{dx}=\arctan u^2\cdot\frac{du}{dx}=\arctan u^2\cdot\frac{\left(3x+2\right)-3\left(x-2\right)}{\left(3x+2\right)^2}=\frac{8}{\left(3x+2\right)^2}\arctan(\frac{x-2}{3x+2})^2
$$

因此 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\dfrac{\pi}{2}$。

3、(D)

分析：例如 $f(x)=x$ 在点 $x=0$ 可导，但 $\left|f(x)\right|=\left|x\right|$ 在点 $x=0$ 不可导，故不选 $\left(A\right)$。

设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ -1, & x<0\end{cases}$，则 $\left|f(x)\right|=1$ 在点 $x=0$ 可导，但 $f(x)$ 在点 $x=0$ 不连续，因此不可导，不选 $\left(B\right)$。

设 $f(x)=x$，则 $f(0)=0$，但 $f'(0)=1$，故不选 $\left(C\right)$。

$\left(D\right)$ 是正确的。例如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ -1, & x<0\end{cases}, g\left(x\right)=\begin{cases}-1, & x\ge 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 则 $f(x)+g(x)=0$。

那么 $f(x)+g(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，但 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 $x=0$ 都不连续，从而都不可导。

4、(B)

分析：$df\left(\sqrt{1-x^2}\right)=f'(\sqrt{1-x^2})\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx=\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-2x}{|x|}dx$

5、(C)

分析：显然 $f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\left|f(x)-f(0)\right|\le\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，又 $0\le\left|f(x)-f(0)\right|$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 连续。$\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$

所以 $f'(0)=0$。

6、(B)

分析：按定义考察 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{af(x)-af(0)}{x}=af'(0)=ab$

因此，应选 (B)。

7、(D)

分析:注意 $P(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续,又 $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty\Rightarrow x>x_0$ 时 $P(x)>0\Rightarrow$

$$P'(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{P(x)-P(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{P(x)}{x-x_0}\ge 0$$

8、(C)

分析：实质上就是讨论 $g(x)=x^2|x|=\begin{cases}x^3, & x\ge 0\\ -x^3, & x<0\end{cases}$ 时，$g^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n。

$$g'(x)=\begin{cases}3x^2, & x\ge 0\\ -3x^2, & x<0\end{cases},g''(x)=\begin{cases}6x, & x\ge 0\\ -6x, & x<0\end{cases}=6|x|$$

$|x|$ 在 $x=0$ 不可导。因此 $n=2$，选 (C)。

9、(A)

分析：直接由定义出发 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$

由极限的保序性 $\Rightarrow\exists\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta),x\ne a$ 时 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$

$\Rightarrow f(x)>f(a)\left(x\in(a,a+\delta)\right),f(x)<f(a)\left(x\in(a-\delta,a)\right)$。因此选 (A)

10、(B)

分析：曲线 $y=x^2+ax+b$ 在点 $(1,-1)$ 处的斜率 $y'=(x^2+ax+b)'\big|_{x=1}=2+a$。将方程 $2y=-1+xy^3$ 对 x 求导得 $2y'=y^3+3xy^2y'$。由此知该曲线在 $(1,-1)$ 处的斜率 $y'(1)$ 为 $2y'(1)=(-1)^3+3y'(1),y'(1)=1$。因这两条曲线在 $(1,-1)$ 处相切，所以在该点它们的斜率相同，即 $2+a=1,a=-1$。又曲线 $y=x^2+ax+b$ 过点 $(1,-1)$，所以 $1+a+b=-1$，$b=-2-a=-1$。

二、填空题

1、$f'(2)=\underline{2}$。

分析：此题 $f'(2)$ 只能用定义求，为此，先求 $f(2)$

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x-2)\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-2)\cdot\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=0$$

故 $f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$

2、$\underline{y+x+2=0}$ 或 $\underline{9y+x-6=0}$

分析：设切点为 $(x_0,\dfrac{1}{x_0})$，则切线方程为 $y-\dfrac{1}{x_0}=y'(x_0)(x-x_0)=-\dfrac{1}{{x_0}^2}(x-x_0)$

又因为切线过点 $(-3,1)$，代入上式可得 $1-\dfrac{1}{x_0}=-\dfrac{1}{{x_0}^2}(-3-x_0)=\dfrac{3+x_0}{{x_0}^2}$

即 ${x_0}^2-2x_0-3=0\Rightarrow x_0=3$ 或 $x_0=-1$。

因此所求的两条切线为：$y-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{9}(x-3)$ 即 $9y+x-6=0$ 和 $y+1=-(x+1)$ 即 $y+x+2=0$。

3、$\underline{y'=(\sin x)^{\cos^2 x}\left[-\sin(2x)\ln(\sin x)+\dfrac{\cos^3 x}{\sin x}\right]}$

分析：易知 $\ln y=\cos^2 x\ln(\sin x)$，两边同时对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=2\cos x(-\sin x)\ln(\sin x)+\cos^2 x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=-\sin(2x)\ln(\sin x)+\frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow y'=(\sin x)^{\cos^2 x}\left[-\sin(2x)\ln(\sin x)+\frac{\cos^3 x}{\sin x}\right]$$

4、$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=\underline{\dfrac{1}{e}}$

分析：设 $f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线为 $y=ax+b$，则

$$\begin{cases} 1=a+b \\ a=\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=1}=nx^{n-1}\Big|_{x=1}=n \end{cases}$$

当 $y=0$ 时，$\xi_n=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{1-n}{n}=1-\dfrac{1}{n}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^n=\dfrac{1}{e}$。

5、$\underline{y^{(n)}=\dfrac{3}{4}\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})-\dfrac{3^n}{4}\sin(3x+\dfrac{n\pi}{2})}$

分析：$\sin^3 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\sin x=\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)=\dfrac{3}{4}\sin x-\dfrac{1}{4}\sin 3x$，

于是 $(\sin^3 x)^{(n)}=\dfrac{3}{4}(\sin x)^{(n)}-\dfrac{1}{4}(\sin 3x)^{(n)}=\dfrac{3}{4}\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})-\dfrac{3^n}{4}\sin(3x+\dfrac{n\pi}{2})$

6、$\underline{dy=\dfrac{3}{x}f'(\ln x)e^{3f(\ln x)}dx}$。

分析：$dy=e^{3u}d(3u)=3e^{3u}du=3e^{3u}f'(t)dt=3e^{3u}f'(t)\dfrac{dx}{x}=\dfrac{3}{x}f'(\ln x)e^{3f(\ln x)}dx$

7、$\underline{dy=\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}dx}$

分析：利用一阶微分形式的不变性求得 $d(y\sin x)-d\cos(x-y)=0$

即 $$\sin xdy+y\cos xdx+\sin(x-y)(dx-dy)=0$$

整理得 $(\sin(x-y)-\sin x)dy=(y\cos x+\sin(x-y))dx$，故 $dy=\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}dx$。

8、$\lim\limits_{n\to\infty}n[(1+\dfrac{1}{n})^k-1]=\underline{\ k\ }$

分析：利用等价无穷小因子替换：$t\to 0$ 时，$(1+t)^k-1\sim kt$，有

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}n\cdot(k\cdot\frac{1}{n})=k$$

9、$\underline{\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x^2-xy\ln x}{y^2-xy\ln y}}$

分析：两边取对数得 $y\ln x=x\ln y$，两边对 y 求导，并注意 $x=x(y)$，得

$$\ln x+\frac{y}{x}\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{dy}\ln y+\frac{x}{y}$$

两边乘 xy, 并移项得 $(y^2-xy\ln y)\dfrac{dx}{dy}=x^2-xy\ln x$，分析出 $\dfrac{dx}{dy}$ 得 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x^2-xy\ln x}{y^2-xy\ln y}$。

三、简答题

1、分析：将已知方程两边对x求导，得

$$e^{y}y'+y+xy'=0 \qquad ①$$

在①式中再两边对x求导，得

$$e^{y}(y')^{2}+e^{y}y''+y'+y'+xy''=0$$

$$y''=-\frac{e^{y}\left(y'\right)^{2}+2y'}{e^{y}+x} \qquad ②$$

将$x=0$代入原方程，得$e^{y}=e\Rightarrow y=1$，将$x=0,y=1$代入①式，得$y'\left(0\right)=-\frac{1}{e}$，再将它们代入②式，得

$$y''\left(0\right)=-\frac{(-\frac{1}{e})^{2}e-\frac{2}{e}}{e}=\frac{1}{e^{2}}$$

2、分析：设x_0为$\left(-\infty,+\infty\right)$内的任意一点，则

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)f(\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)\left[f(\Delta x)-1\right]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)\left[\Delta x g(\Delta x)\right]}{\Delta x}=f(x_0)$$

故$f(x)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$内处处可导。

3、证：设$f(x)=x^{n}+x^{n-1}+\cdots+x^{2}+x-1$，则$f(0)=-1,f(1)=n-1>0$，由介值定理知$\exists x_n\in\left(0,1\right)$，使得$f(x_n)=0$，即原方程在$\left(0,1\right)$内至少有一实根，又

$$f'(x)=nx^{n-1}+\left(n-1\right)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0,x>0$$

故$f(x)=0$在$\left(0,1\right)$内至多只有一根，从而$f(x)=0$在$\left(0,1\right)$内只有唯一实根x_n，则

$$x_n^{n}+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^{2}+x_n=1$$

$$x_n\left(x_n^{n-1}+\cdots+x_n^{2}+x_n+1\right)=1$$

$$\frac{1-x_n^{n}}{1-x_n}x_n=1 \qquad ①$$

由于$0<x_n<1$，有$\lim_{n\to\infty}x_n^{n}=0$，并记$a=\lim_{n\to\infty}x_n$，对①式两边取极限得$a(\frac{1}{1-a})=1$，分析得$a=\frac{1}{2}$，即$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$。

4、证明：由$x\le f(x)\le x^{3}+x,0\le x\le 1$可知当$x=0$时，$0\le f(0)\le 0$，即$f(0)=0$。又

$$\frac{x}{x}\le\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{x^{3}+x}{x}(0\le x\le 1)$$

已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x}{x}=1$，由两边夹定理可得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$。

5、证明：令 $g(x)=\left(1+x\right)\ln^2\left(1+x\right)-x^2, g(0)=0$，

$$g'(x)=\ln^2\left(1+x\right)+2\ln\left(1+x\right)-2x, g'(0)=0$$

$$g''(x)=\frac{2}{1+x}[\ln\left(1+x\right)-x], g''(0)=0$$

$$g'''(x)=-\frac{2\ln(1+x)}{\left(1+x\right)^2}<0, x\in\left(0,1\right)$$

故可得$g(x)$在$\left(0,1\right)$上严格单调递减，则有$g(x)<g\left(0\right)$，即$\left(1+x\right)\ln^2\left(1+x\right)<x^2$。

第三章　　微分中值定理与导数的应用练习题

一、选择题

1、设函数 $f(x)$ 在区间 $\left[1,+\infty\right)$ 内二阶可导，且满足条件 $f(1)=f'(1)=0, x>1$ 时 $f''(x)<0$

则 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 内（ ）

(A) 曲线是向上凹的　　　　(B) 曲线是向上凸的

(C) 单调减少　　　　(D) 单调增加

2、已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处某邻域内连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在 $x=0$ 处 $f(x)$（ ）

(A) 不可导　　　　(B) 可导且 $f'(0)=2$

(C) 取得极大值　　　　(D) 取得极小值

3、若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处都取得极小值，则函数 $F\left(x\right)=f(x)+g(x)$ 在 $x=x_0$ 处（ ）

(A) 必取得极小值　　　　(B) 必取得极大值

(C) 不可能取得极值　　　　(D) 可能取得极小值，也可能取得极大值

4、奇函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-1,1\right]$ 上可导，且 $\left|f'(x)\right|\le M$（M 为正常数），则必有（ ）

(A) $\left|f(x)\right|\ge M$　　(B) $\left|f(x)\right|>M$　　(C) $\left|f(x)\right|\le M$　　(D) $\left|f(x)\right|<M$

5、设 $y=y\left(x\right)$ 由方程 $x^3-ax^2y^2+by^3=0$ 确定，且 $y(1)=1, x=1$ 是驻点，则（ ）

(A) $a=b=3$　　　　(B) $a=\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{5}{2}$

(C) $a=\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{1}{2}$　　　　(D) $a=-2, b=-3$

6、设曲线 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t} \\ y=\dfrac{1}{t+1} \end{cases}$ 则曲线（ ）

(A) 只有垂直渐近线　　　　(B) 只有水平渐近线

(C) 无渐近线　　　　(D) 有一条水平渐近线和一条垂直渐近线

7、设 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f(x_0)=g(x_0)=0$，$f'(x_0)=g'(x_0)>0$，$f''(x_0)$、$g''(x_0)$ 存在，则（ ）

(A) x_0 不是 $f(x)g(x)$ 的驻点

(B) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点，但不是它的极值点

(C) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点，且是它的极大值点

(D) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点，且是它的极小值点

8、设函数 $f(x)$，$g(x)$ 是大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有（ ）

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

9、函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $f(0)<0$，$f'(x)\geq k>0$，则在 $(0,+\infty)$ 内 $f(x)$（ ）

(A) 没有零点　　(B) 至少有一个零点

(C) 只有一个零点　　(D) 有无零点不能确定

10、设 $f(x)=|x(1-x)|$，则（ ）

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

二、填空题

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=$____________。

2、曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})$ 的渐近线为____________________。

3、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 则 $f^{(100)}(0)=$____________。

4、若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+a\cos x-b\sin x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，则 $a=$__________，$b=$___________。

5、设 $y=\dfrac{4x+4}{x^2}-2$，则曲线在拐点处的切线方程为________________。

6、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=$ _____________。

7、函数 $y=x^3-3x$ 的极大值点是 _________，极大值是 __________。

8、 $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是_____________。

9、设 $f(x)=xe^x$，则函数 $f^{(n)}(x)$ 在 $x=$_______处取极小值____________。

三、简答题

1、若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a, f(b)>b$ 则在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$。

2、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $f(x)+f'(x)\neq 0$，证明：$f(x)$ 至多有一个零点。

3、证明：设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$。则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$。

4、已知 $e<a<b$，证明：$a^b>b^a$。

5、证明：设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $2\xi\left[f(b)-f(a)\right]=\left(b^2-a^2\right)f'(\xi)$。

第三章　　微分中值定理与导数的应用练习题答案

一、选择题

1、(C)

分析：$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，设$F(x)=xf'(x)-f(x)$，则$F'(x)=xf''(x)<0$

$(\because f''(x)<0)$，故$F(x)$单调减少，$F(x)<F(1)=0$，知$g'(x)<0$

2、(D)

分析：因$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$，由保号定理知，$\exists\delta>0$，使$x\in(-\delta,\delta)$时，$\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$。

而$1-\cos x>0$，故$f(x)>0$又因$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$（$f(x)$连续）

则当$x\in(-\delta,\delta)$时，$f(x)>f(0)=0$，即$f(x)$在$x=0$处取得极小值。

3、(A)

分析：由极值的定义，必$\exists\delta_1>0$，使$x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$时$f(x)>f(x_0)$，$\exists\delta_2>0$，使

$x\in(x_0-\delta_2,x_0+\delta_2)$时$g(x)>g(x_0)$，取$\delta=\min[\delta_1,\delta_2]$，则$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，

$f(x)+g(x)>f(x_0)+g(x_0)$。

4、(C)

分析：因$f(x)$为奇函数，故$f(0)=0$，由拉格朗日中值定理知，$\exists\xi$介于0与1之间，使

$$|f(x)-f(0)|=|f'(\xi)||x|\le M\ (|x|\le 1)\Rightarrow|f(x)|\le M$$

5、(C)

分析：　方程两边对x求导得$3x^2-a(2xy^2+2x^2y\cdot y')+3by^2\cdot y'=0$因$x=1$为驻点，故

$y'(1)=0$，代入上式得$3-2ay^2=0$。又$y(1)=1$，故$1-a+b=0$，分析得$a=\dfrac{3}{2},b=\dfrac{1}{2}$。

6、(D)

分析：因$\lim\limits_{t\to -1}y=\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{1}{t+1}=\infty$，故$x=-1$为曲线的垂直渐近线

因$\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t+1}=1$，故$y=1$是曲线的水平渐近线

7、(D)

分析：设$\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$，则　　$\varphi'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$\varphi''(x)=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$$

故$\varphi'(x_0)=0$，x_0是$\varphi(x)$的驻点，又由$\varphi''(x_0)=2f'(x_0)g'(x_0)>0$知$\varphi(x)$在$x_0$点取得极小值。

8、(A)

分析：$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则$\varphi'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$，故$\varphi(x)$单调减少$\varphi(x)>\varphi(b)$

即$\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(b)}{g(b)}$，则$f(x)g(b)>g(x)f(b)$　　　　$(g(x)>0)$

9、(C)

分析：根据拉格朗日中值定理，有$f(x)=f(0)+f'(\xi)x\quad(0<\xi<x)$，因$f'(x)\ge k>0$，故$f(x)\ge f(0)+kx$。显然当$x>-\dfrac{f(0)}{k}$时，$f(x)>0$。又$f(0)<0$，因此$f(x)$在$(0,\ x)$内存在零点。由$f'(x)>0$知$f(x)$单调增加，从而零点唯一。故选C。

10、(C)

分析：$f(x)=\begin{cases}-x(1-x) & -1<x\le 0\\ x(1-x) & 0<x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases}2x-1 & -1<x<0\\ \text{不存在} & x=0\\ 1-2x & 0<x<\dfrac{1}{2}\end{cases}\qquad f''(x)=\begin{cases}2 & -1<x<0\\ -2 & 0<x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

由充分条件知$x=0$是$f(x)$的极值点，$(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点。

二、填空题

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\underline{-\dfrac{1}{2}}$

分析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\ln(1+x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x}}{2}=-\dfrac{1}{2}$

2、$\underline{x=-\dfrac{1}{e},y=x+\dfrac{1}{e}}$

分析：因 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{e}} f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{e}} x\ln(e+\frac{1}{x})=\infty$，故 $x=-\frac{1}{e}$ 是曲线的垂直渐近线。又

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x})=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln(e+{}^{1}\!/_{x})-x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln(e+{}^{1}\!/_{x})-1}{{}^{1}\!/_{x}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e+{}^{1}\!/_{x}}=\frac{1}{e}$$

故 $y=x+\frac{1}{e}$ 为曲线的斜渐近线。

3、$f^{(100)}\left(0\right)=$ $\underline{\frac{1}{101}}$

分析：用间接法将 $f(x)$ 展开成麦克劳林公式得：

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^{99}}{100!}+\frac{x^{100}}{101!}+R_{100}\left(x\right)$$

而 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(100)}(0)}{100!}x^{100}+R_{100}\left(x\right)$

由 x^{100} 的系数相等,得 $\frac{f^{(100)}(0)}{100!}=\frac{1}{101!}$,即 $f^{(100)}\left(0\right)=\frac{1}{101}$

4、$a=$ $\underline{\ -1\ }$，$b=$ $\underline{\ 0\ }$

分析：因 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+a\cos x-b\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to0}(1+a\cos x-b\sin x)=0$ 分析得 $a=-1$，

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x-b\sin x)'}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-b\cos x}{2x}=\frac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin x-b\cos x\right)=0$ 则 $b=0$。

5、$\underline{y+\frac{26}{9}=-\frac{4}{27}\left(x+3\right)}$

分析：由 $y'=-\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3},y''=\frac{8}{x^3}+\frac{24}{x^4}=0$ 得 $x=-3,y'\left(-3\right)=-\frac{4}{27},y\left(-3\right)=-\frac{26}{9}$，故该点处的切线方程为 $y+\frac{26}{9}=-\frac{4}{27}\left(x+3\right)$。

6、$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=$ $\underline{\ -\frac{e}{2}\ }$

分析：

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e)'}{x'}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}\right]'}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\ln(1+x-)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x}$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2}=-\frac{e}{2}$$

7、极大值点是$\underline{x=-1}$，极大值是 $\underline{y=2}$

分析：$y'=3x^2-3$，令$y'=0$得$x=\pm1$；$y''(-1)=-6<0$，故$x=-1$是极大值点，此时$y=2$。

8、$\underline{\frac{(\ln 2)^n}{n!}}$。

分析：因为$(2^x)^{(n)}=2^x(\ln 2)^n$，所以2^x的麦克劳林公式中x^n项的系数为$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(\ln 2)^n}{n!}$。

或$2^x=e^{x\ln 2}=1+x\ln 2+\frac{(x\ln 2)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x\ln 2)^n}{n!}+o(x^n)$。$\therefore x^n$项的系数是$\frac{(\ln 2)^n}{n!}$

9、$\underline{x=-(n+1)}$处取极小值$\underline{-e^{-(n+1)}}$

分析：$f^{(n)}(x)=(n+x)e^x, f^{(n+1)}(x)=(n+1+x)e^x$

令$\left[f^{(n)}(x)\right]'=f^{(n+1)}(x)=(n+1+x)e^x=0$得$x_0=-(n+1)$，此时$f^{(n)}(x_0)=-e^{-(n+1)}$。

三、简答题

1、证明：设$g(x)=f(x)-x$，则$g(x)$在$[a,b]$上连续，由条件可得$g(a)=f(a)-a<0, g(b)=f(b)-b>0$即$g(a)g(b)<0$。根据零点定理可知，在$(a,b)$内至少有一点$\xi$，使$g(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$。

2、证明：用反证法。假设$f(x)$有两个零点a,b，其中$-\infty<a<b<+\infty$。考虑函数$F(x)=f(x)e^x$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且

$$F'(x)=e^x\left(f(x)+f'(x)\right)$$

$F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理,有$\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=e^{\xi}\left(f(\xi)+f'(\xi)\right)=0$$

从而$f(\xi)+f'(\xi)=0$，这与条件$f(x)+f'(x)\neq 0$矛盾。因此，$f(x)$至多只有一个零点。

3、证明：由于$f(a)=f(b)$，$f(x)$不恒为常数，从而至少存在一点$c\in(a,b)$，使得$f(c)\neq f(a)=f(b)$。若$f(c)>f(a)$，则对$f(x)$在$[a,c]$上应用拉格朗日中值定理，有

$\xi \in \left(a,c\right) \subset \left(a,b\right)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$。若 $f(c)<f(b)$，则对 $f(x)$ 在 $\left[c,b\right]$ 上应用拉格朗日中值定理，有 $\xi \in \left(c,b\right) \subset \left(a,b\right)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}>0$，总之，在 $\left(a,b\right)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$。

4、证明：原不等式等价于 $b\ln a > a\ln b$，即 $\dfrac{\ln a}{a}>\dfrac{\ln b}{b}$，因此，可设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0\left(x>e\right)$$

$f(x)$ 为单调减函数，因此，当 $e<a<b$ 时，有 $f(a)>f(b)$ 即 $a^b>b^a$。

5、证明：取 $g(x)=x^2$，则由柯西中值定理，有 $\xi \in \left(a,b\right)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$，

即 $2\xi\left[f(b)-f(a)\right]=\left(b^2-a^2\right)f'(\xi)$。

第四章　不定积分练习题

一、选择题

1、已知 $y'=x$，且 $x=1$ 时 $y=2$，则 $y=$（ ）

(A) x^2+2　　(B) x^2+1　　(C) $\frac{1}{2}x^2+2$　　(D) $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$

2、设 $f(x)$ 的一个原函数为 2^x，则 $f'(x)=$（ ）

(A) $2^x(\ln 2)^2$　　(B) $2^x\ln 2$　　(C) 2^x　　(D) $\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x$

3、若 $\int f(x)dx=F(x)+C$，则 $\int f\left(ax^2+b\right)xdx=$（ ）

(A) $F\left(ax^2+b\right)+C$　　(B) $\frac{1}{2a}F\left(ax^2+b\right)+C$

(C) $\frac{1}{a}F\left(ax^2+b\right)+C$　　(D) $2aF\left(ax^2+b\right)+C$

4、$\int xf''(x)dx=$（ ）

(A) $xf'(x)-f(x)+C$　　(B) $xf'(x)-f'(x)+C$

(C) $xf''(x)-f'(x)+C$　　(D) $xf(x)-f(x)+C$

5、已知 $f'(e^x)=1+x$，则 $f(x)=$（ ）

(A) $x+\frac{1}{2}x^2+C$　　(B) $e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$　　(C) $x\ln x+x+C$　　(D) $x\ln x+C$

6、设 $f(x)$ 是连续的偶函数，则其原函数 $F(x)$ 一定是（ ）

(A) 偶函数　　(B) 奇函数　　(C) 非奇非偶函数　　(D) 有一个是奇函数

7、设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数，$F(x)$ 是它的一个原函数，则（ ）

(A) $F(x)=-F(-x)$　　(B) $F(-x)=F(x)$

(C) $F(x)=-F(-x)+C$　　(D) $F(x)=F(-x)+C$

8、若 $\int df(x)=\int dg(x)$，则下列结论错误的是（ ）

(A) $f(x)=g(x)$　　(B) $f'(x)=g'(x)$

(C) $df(x)=dg(x)$　　(D) $d\int f'(x)dx=d\int g'(x)dx$

9、若 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数，则其原函数（　　）

(A) 是以 l 为周期的函数　　　　(B) 是周期函数，但周期不是 l

(C) 不是周期函数　　　　(D) 不一定是周期函数

10、设 $f(x)=e^{-x}$，则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx=$（ ）

$(A)\ -\frac{1}{x}+C$　　$(B)\ -\ln x+C$　　$(C)\ \frac{1}{x}+C$　　$(D)\ \ln x+C$

二、计算题

1、求 $\int |x|dx$

2、求 $\int \frac{x}{(1-x)^3}dx$

3、求 $\int x\sqrt[3]{(x+2)^2}dx$

4、求 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$

5、求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$

6、求 $\int \ln^2 xdx$

7、求 $\int \frac{x^3}{x+3}dx$

8、求 $\int \frac{3}{x^3+1}dx$

9、求 $\int \frac{dx}{3+\cos x}$

10、求 $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}}$

11、已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，求 $f(x)$。

12、设 $f(x)$ 是单调连续函数，$f^{-1}(x)$ 是它的反函数，且 $\int f(x)dx=F(x)+C$，求 $\int f^{-1}(x)dx$。

第四章　不定积分练习题答案

一、选择题

1、(D)

分析：因为 $y=\int y'dx=\int xdx=\frac{1}{2}x^2+C$，将 $x=1$，$y=2$ 代入得 $2=\frac{1}{2}\times 1^2+C \Rightarrow C=\frac{3}{2}$，故 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$。

2、(A)

分析：因为 $f(x)=\left(2^x\right)'=2^x\ln 2$，所以 $f'(x)=(2^x\ln 2)'=2^x(\ln 2)^2$。

3、(B)

分析：因为 $\int f\left(ax^2+b\right)xdx=\frac{1}{2a}\int f\left(ax^2+b\right)d(ax^2+b)=\frac{1}{2a}F\left(ax^2+b\right)+C$

4、(A)

分析：因为 $\int xf''(x)dx=xf'(x)-\int f'(x)dx=xf'(x)-f(x)+C$

5、(D)

分析：因为 $f'(e^x)=1+x$，设 $u=e^x$，则 $x=\ln u \Rightarrow f'(u)=1+\ln u \Rightarrow f(u)=\int f'(u)du$ $=\int(1+\ln u)du=u\ln u+C$，所以 $f(x)=x\ln x+C$

6、(D)

分析：因奇函数的导函数是偶函数，但偶函数积分后要加一个常数 C，当 $C=0$ 时的原函数为奇函数，而 $C\neq 0$ 时为非奇非偶函数。

7、(D)

分析：因为 $\int f(x)dx=\int f(-x)d\left(-x\right)=F\left(-x\right)+C$。

8、(A)

分析：因为 $\int df(x)=f(x)+C_1,\int dg(x)=g(x)+C_2$，所以 $f'(x)=g'(x)$，$df(x)=dg(x)$，因此 (B)，(C) 正确。又因 $d\int f'(x)dx=f'(x)dx, d\int g'(x)dx=g'(x)dx$，故 (D) 也是正确的，从而错误的为 (A)。

9、(D)

分析：例如，$f(x)=\cos x$ 是以 2π 为周期的函数，$\int f(x)dx=\int \cos xdx=\sin x+C$ 是周期函数；$f(x)=1+\cos x$ 是以 2π 为周期的函数，而 $\int f(x)dx=\int (1+\cos x)dx=x+\sin x+C$ 不是周期函数。

10、(C)

分析：因为 $f(x)=e^{-x}$，所以 $f'(x)=-e^{-x}$，$f'(\ln x)=-e^{-\ln x}=-\dfrac{1}{x}$。故

$$\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx=\int (-\frac{1}{x^2})dx=\frac{1}{x}+C$$

二、计算题

1、分析：$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases} \Rightarrow \int |x|dx=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+C_1, & x>0 \\ -\frac{1}{2}x^2+C_2, & x<0 \end{cases}$ 由于 $|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，

因此在 $(-\infty,+\infty)$ 存在原函数，由 $\lim\limits_{x\to 0+0}(\frac{1}{2}x^2+C_1)=\lim\limits_{x\to 0-0}(-\frac{1}{2}x^2+C_2)$ 分析得

$$C_1=C_2=C\Rightarrow \int |x|dx=\frac{1}{2}x|x|+C$$

2、分析：原式$=\int \dfrac{x-1+1}{(1-x)^3}dx=\int \dfrac{-dx}{(1-x)^2}+\int \dfrac{dx}{(1-x)^3}=-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{2(1-x)^2}+C$

3、分析：令 $\sqrt[3]{(x+2)}=t$，则 $x=t^3-2, dx=3t^2dt$，

$$\int x\sqrt[3]{(x+2)^2}dx=\int (t^3-2)t^2\cdot 3t^2dt=3\int (t^7-2t^4)dt=\frac{3}{8}t^8-\frac{6}{5}t^5+C$$
$$=\frac{3}{8}(x+2)^{\frac{8}{3}}-\frac{6}{5}(x+2)^{\frac{5}{3}}+C$$

4、分析：令 $x=a\sin t$，则 $dx=a\cos tdt$，
原式

$$=a^2\int \sin^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int (1-\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}t-\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

5、 分析：令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$，则 $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$，所以

原式$=\dfrac{1}{2}\int (t+2+\dfrac{1}{t})dt=\dfrac{1}{4}t^2+t+\dfrac{1}{2}\ln|t|+C=\dfrac{1}{4}\tan^2\dfrac{x}{2}+\tan\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|+C$

6、分析：原式$=x\ln^2 x-2\int \ln xdx=x\ln^2 x-2x\ln x+2\int dx=x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$

7、分析：当分子中 x 的最高次数大于或等于分母中 x 的最高次数时，需用除法。

原式$=\int[(x^2-3x+9)-\frac{27}{x+3}]dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$

8、分析：令$\frac{3}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$，通分后比较两边的系数可得$A=1,B=-1,C=2$。

原式$=\int(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1})dx$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

9、分析：

原式$=\int\frac{dx}{2+2\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}(\sec^2\frac{x}{2}+1)}=\int\frac{d(\tan\frac{x}{2})}{\tan^2\frac{x}{2}+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C$

10、分析：对于多层根号的积分，往往先略加变形，以便寻找简便的途径，不宜盲目采用去根号的方法。此题略加变形可得

原式$=\int\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{d\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C$

11、分析：令$e^x=t$，则$x=\ln t$，$f'(t)=\frac{1}{t}\ln t$，即$f'(x)=\frac{1}{x}\ln x$

$\therefore$ $$f(x)=\int\frac{1}{x}\ln xdx=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

由$f(1)=0$得$C=0$，　故$f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$。

12、分析：因为$x=f[f^{-1}(x)]=F'[f^{-1}(x)]$，所以

$$\int f^{-1}(x)dx=xf^{-1}(x)-\int xd[f^{-1}(x)]$$

$$=xf^{-1}(x)-\int f[f^{-1}(x)]d[f^{-1}(x)]$$

$$=xf^{-1}(x)-F[f^{-1}(x)]+C$$

第五章　定积分练习题

一、选择题

1、函数 $f(x)=\int_0^x t(t-1)dt$ 的极小值点 x_0 是（ ）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 不存在

2、设 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos xdx$，则 $\int_0^1 f(x)dx$ 等于（ ）

(A) $\frac{5}{2}-\pi$　　(B) $\pi-\frac{5}{2}$　　(C) $1-\frac{\pi}{2}$　　(D) $\frac{\pi}{2}-1$

3、已知 $f(x)$ 为非负连续函数，且当 $x>0$ 时，$\int_0^x f(x)f(x-t)dt=x^3$，则 $f(x)$ 等于（ ）

(A) $2x$　　(B) $\frac{1}{2}x^2$　　(C) $\sqrt{2}x$　　(D) $\sqrt{2}x^2$

4、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F'(x)=f(x), a\neq 0$，则 $\int_0^1 f(ax)dx=$（ ）

(A) $F(1)-F(0)$　　(B) $F(a)-F(0)$

(C) $\frac{1}{a}\left[F(a)-F(0)\right]$　　(D) $a\left[F(a)-F(0)\right]$

5、设 $\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{2}x^4$，则 $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})dx=$（ ）

(A) 16　　(B) 8　　(C) 4　　(D) 2

6、设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，

则（ ）成立。

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$　　(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

7、下列各式不等于零的是（ ）

(A) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\ln\frac{1-x}{1+x}dx$　　(B) $\int_{-3}^{3}\frac{x^5\cos^2 x}{x^4+3x^2+2}dx$

(C) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dx$　　(D) $\int_1^3\frac{dx}{(x-1)(3-x)}$

8、设 $f(x)$，$g(x)$ 在[a，b]上连续，且 $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx$，则 $\int_a^b |f(x)|dx>\int_a^b |g(x)|dx$

（ ）

(A) 一定成立

(B) 在[a，b]上 $g(x)<0$ 时一定不成立

(C) 在[a，b]上 $g(x)>0$ 时一定成立

(D) 只有在[a，b]上，$f(x)>0$，$g(x)>0$ 时成立

9、$f(x)$ 在[a，b]上连续且 $\int_a^b f(x)dx=0$，则（ ）

(A) $\int_a^b [f(x)]^2 dx=0$ 一定成立

(B) $\int_a^b [f(x)]^2 dx=0$ 不可能成立

(C) $\int_a^b [f(x)]^2 dx=0$ 当且仅当 $f(x)$ 单调时成立

(D) $\int_a^b [f(x)]^2 dx=0$ 仅当 $f(x)\equiv 0$ 时成立

10、设在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，$f(0)=0$，则曲线 $F(x)=x\int_0^x f(t)dt$ 在 $(0,+\infty)$ 内为（ ）

(A) 向上凹的　　(B) 向上凸的　　(C) 凹凸性不确定　　(D) 以上都不对

二、填空题

1、设 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)dx=$______________。

2、若 $|y|\le 1$，则 $\int_{-1}^{1}|x-y|e^x dx=$ ______________。

3、在 $(-\infty,+\infty)$ 内，设 $f(-x)=-f(x),\varphi(-x)=\varphi(x)$，则 $\int_{-a}^{a} f[\varphi'(x)]dx=$______________，其中 $\varphi(x)$ 可导，$f(x)$ 连续。

4、设 n 和 k 为正整数，则 $I=\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx=$______________。

5、设 $x\ge 0$ 时，$f(x)$ 满足 $\int_0^{x^2(1+x)} f(x)dx=\lim\limits_{t\to x}\frac{t\sin(x-t)}{x-t}$，则 $f(12)=$______________。

6、$\int_{-1}^{1}(|x|+x)e^{-|x|}dx=$______________。

7、设实数 $a>0$，则当 $a=$______________时，积分 $\int_a^{2a}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ 最大。

8、$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=$______________。

9、$\int_{-2}^{3}\min\{1,x^2\}dx=$____________。

10、$\int_0^{2\pi}|\sin x-\cos x|dx=$________________。

三、简答题

1、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\le M,f(a)=0$。证明：

$$\int_a^b f(x)dx \le \frac{M}{2}(b-a)^2$$

2、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调减少，证明：当 $0<\lambda<1$ 时，有

$$\int_0^\lambda f(x)dx \ge \lambda\int_0^1 f(x)dx$$

3、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx = f(0)$。证明：在 $(0,1)$ 内存在一点 C，使 $f'(C)=0$。

4、若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调减少的连续函数，令 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt$。证明：$F(x)$ 是单调增加函数。

5、若 $f(t)$ 是连续函数且为奇函数，证明：$\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数。

第五章　定积分练习答案

一、选择题

1、(B)

分析：因为 $f'(x)=x(x-1)$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=0$ 和 $x=1$。又 $f''(x)=2x-1$，$f''(1)>0, f''(0)<0$，因此 $x=1$ 为极小值点。

2、(A)

分析：令 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx = l$，则 $f(x)=x+2l$，$f(x)\cos x = x\cos x + 2l\cos x$，于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx + 2l\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + 2l$$

$$=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2l=\frac{\pi}{2}-1+2l$$

$$\Rightarrow l=\frac{\pi}{2}-1+2l \Rightarrow l=1-\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x)=x+2-\pi$$
$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x+2-\pi)dx=\frac{5}{2}-\pi$$

3、(C)

分析：$\int_0^x f(x)f(x-t)dt = f(x)\int_0^x f(x-t)dt \underline{\underline{x-t=u}} f(x)\int_0^x f(u)du$

令 $F(x)=\int_0^x f(u)du$，则 $F'(x)=f(x)$，于是有 $F'(x)F(x)=x^3$，两端积分，得

$$\frac{1}{2}F^2(x)=\frac{1}{4}x^4+C$$

又 $F(0)=0$，代入上式有 $C=0$，于是 $F^2(x)=\frac{1}{2}x^4, F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}x^2\left(F(x)>0\right)$，从而有 $f(x)=F'(x)=\sqrt{2}x$。

4、(C)

分析：$\int_0^1 f(ax)dx \underline{\underline{令u=ax}} \int_0^a f(u)\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int_0^a f(u)du$，因 $F'(x)=f(x) \Rightarrow \int_0^a f(x)dx=$

$\int_0^a F'(x)dx = F(x)\Big|_0^a = F(a)-F(0)$，故$\int_0^1 f(ax)dx = \frac{1}{a}\left[F(a)-F(0)\right]$。

5、(A)

分析：由$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}x^4$，知$f(x)=2x^3$，于是

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})dx = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot 2(\sqrt{x})^3 dx = \int_0^4 2xdx = x^2\Big|_0^4 = 16$$

6、(D)

分析：由奇函数的积分性质，有$M=0, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx>0, P=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx<0$

因此$P<M<N$

7、(D)

分析：因(A)、(B)的被积函数都是奇函数且它们都是在关于原点对称区间上的定积分，故其积分值都是 0，故排除(A)、(B)。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{|\sin x|}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{\sin x}dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{-\sin x}dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-1)dx = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0 \qquad \text{故排除C}$$

8、(C)

分析：若$g(x)>0$，则由$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx > 0$知

$$\int_a^b |f(x)|dx \ge \int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx = \int_a^b |g(x)|dx$$

9、(D)

分析：若$f(x)=\sin x$，则$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx \ne 0$，故排除$(A)$；

若$f(x)\equiv 0$，则$\int_a^b f(x)dx = 0$，且$\int_a^b f^2(x)dx = 0$，故排除(B)；

若$y=x^3$，则$\int_{-1}^1 x^3dx = 0$，但$\int_{-1}^1 (x^3)^2 dx \ne 0$，故排除$(C)$。

10、(A)

分析：$F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)$　　　　$F''(x)=2f(x)+xf'(x)$

因 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调增加，则当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，知 $F''(x)>0$，故曲线为向上凹的。

二、填空题

1、$\underline{-1+\dfrac{4}{\pi}}$。

分析：$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xd\left[f(x)\right]=\left[xf(x)\right]_{\pi/2}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$

$$=\left[x(\frac{\sin x}{x})'\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\left[\frac{\sin x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\left[x\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{2}{\pi}$$

$$=\left[\cos x-\frac{\sin x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{2}{\pi}=-1+\frac{4}{\pi}$$

2、$\underline{2e^y-y(e+e^{-1})-2e^{-1}}$

分析：原式$=\int_{-1}^{y}(y-x)e^x dx+\int_y^1 (x-y)e^x dx$

$$=y\int_{-1}^{y}e^x dx-\int_{-1}^{y}xe^x dx+\int_y^1 xe^x dx-y\int_y^1 e^x dx$$

$$=y(e^y-e^{-1})-\left[xe^x\right]_{-1}^{y}+\int_{-1}^{y}e^x dx+\left[xe^x\right]_y^1-\int_y^1 e^x dx-y(e-e^y)$$

$$=ye^y-\frac{y}{e}-ye^y-e^{-1}+e^y-e^{-1}+e-ye^y-\left[e^x\right]_y^1-ey+ye^y$$

$$=2e^y-y(e+e^{-1})-2e^{-1}$$

3、$\underline{0}$

分析：因 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数。因 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，故 $\varphi(x)$ 是偶函数，$\varphi'(x)$ 为奇函数，$f\left[\varphi'(-x)\right]=f\left[-\varphi'(x)\right]=-f\left[\varphi'(x)\right]$，即 $f\left[\varphi'(x)\right]$ 为奇函数，故 $\int_{-a}^{a} f\left[\varphi'(x)\right]dx=0$。

4、$\underline{\dfrac{2}{n}}$

分析：设 $t=nx$，则 $\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}\left|\sin nx\right|dx=\frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\sin t\right|dt=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin t dt=\frac{2}{n}$（周期函数在每一个周期的定积分相等）

5、$\underline{1/16}$

分析：因为 $\lim\limits_{t\to x}\dfrac{t\sin(x-t)}{x-t}=x$，所以 $\int_0^{x^2(1+x)} f(x)dx=x$，两边对 x 求导得

$$f\left[x^2(1+x)\right]\cdot(2x+3x^2)=1$$

令 $x=2$ 得 $f(12)\cdot 16=1$，故 $f(12)=\dfrac{1}{16}$。

6、$\underline{2(1-2e^{-1})}$。

分析：$\int_{-1}^{1}(|x|+x)e^{-|x|}dx=\int_{-1}^{1}|x|e^{-|x|}dx+\int_{-1}^{1}xe^{-|x|}dx$

$=2\int_{0}^{1}xe^{-x}dx+0=2(-xe^{-x}-e^{-x})_0^1=2(1-2e^{-1})$

7、$\underline{\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}}$

分析：令 $I(a)=\int_a^{2a}\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$，故 $I'(a)=\dfrac{2}{\sqrt{1+(2a)^3}}-\dfrac{1}{\sqrt{1+a^3}}=0$，得

$$\frac{4}{1+8a^3}=\frac{1}{1+a^3}\quad\Rightarrow a=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

8、$\underline{1}$

分析：$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x d\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\ln x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}=-(0-1)=1$

9、$\underline{\dfrac{11}{3}}$

分析:由于函数 $\min\{1,x^2\}$ 的分界点为-1 与 1，所以

$$\int_{-2}^{3}\min\{1,x^2\}dx=\int_{-2}^{-1}dx+\int_{-1}^{1}x^2dx+\int_1^3dx=1+\frac{2}{3}+2=\frac{11}{3}$$

10、$\underline{4\sqrt{2}}$

分析：为了便于计算，首先由三角函数公式改写被积函数得 $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$。则

$$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\left|\sin(x-\frac{\pi}{4})\right|dx\ \underline{\underline{t=x-\frac{\pi}{4}}}\ \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{2\pi-\frac{\pi}{4}}|\sin t|dt\text{（周期函数积分性质）}$$

$$\sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin t|dt=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin t|dt=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin tdt=2\sqrt{2}\left(-\cos t\right)\Big|_0^{\pi}=4\sqrt{2}$$

三、简答题

1、证明：任取 $x\in(a,b)$，由微分中值定理有

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\xi\in(a,x)$$

由 $f(a)=0$，所以 $f(x)=f'(\xi)(x-a),\xi\in(a,x)$，故有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f'(\xi)\left(x-a\right)dx\le M\int_a^b\left(x-a\right)dx=\frac{M}{2}\left(b-a\right)^2$$

2、证明：
$$\int_0^{\lambda} f(x)dx-\lambda\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_0^{\lambda} f(x)dx-\lambda\int_0^{\lambda} f(x)dx-\lambda\int_{\lambda}^1 f(x)dx=\left(1-\lambda\right)\int_0^{\lambda} f(x)dx-\lambda\int_{\lambda}^1 f(x)dx$$
$$=\lambda\left(1-\lambda\right)f(\xi_1)-\lambda\left(1-\lambda\right)f(\xi_2)=\lambda\left(1-\lambda\right)\left[f(\xi_1)-f(\xi_2)\right]$$

其中$0\le\xi_1\le\lambda\le\xi_2\le1$。因为$f(x)$单调减少，则有$f(\xi_1)\ge f(\xi_2)$。又因$0<\lambda<1$时，$1-\lambda>0$，所以$\lambda\left(1-\lambda\right)\left[f(\xi_1)-f(\xi_2)\right]\ge0$，故原不等式成立。

3、证明：由积分中值定理知，在$\left[\frac{2}{3},1\right]$上存在一点$C_1$，使$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx=\frac{1}{3}f(C_1)$，又已知$3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx=f(0)$，即$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx=\frac{1}{3}f(0)$，从而有$f(C_1)=f(0)$。故$f(x)$在区间$\left[0,C_1\right]$上满足罗尔定理条件。因此存在一点$C\in\left(0,C_1\right)\subset\left(0,1\right)$，使$f'(C)=0$。

4、证明：$F\left(x\right)=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$

$$F'\left(x\right)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(x)=f(\xi)x-xf(x)=x\left[f(\xi)-f(x)\right]$$

其中ξ在 0 与x之间。

若$x>0$，则$0<\xi<x$，有$f(\xi)\ge f(x)$，故$F'\left(x\right)\ge0$；

若$x<0$，则$x<\xi<0$，且$f(\xi)\le f(x)$，故$F'\left(x\right)\ge0$。

综上，$F(x)$为单调增加函数。

5、证明：记$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$，令$t=-u$，则

$$\varphi(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt=-\int_0^x f(-u)du$$

若$f(t)$是奇函数，则$f(-t)=-f(t)$，因此

$$\varphi(-x)=-\int_0^x f(-u)du=\int_0^x f(u)du=\int_0^x f(t)dt=\varphi\left(x\right)$$

则当$f(t)$是奇函数时，$\int_0^x f(t)dt$是偶函数。

第六章　定积分的应用练习题

一、选择题

1、曲线 $y=\sin^{3/2}x\left(0\le x\le\pi\right)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为（ ）

(A) $4/3$　　(B) $4\pi/3$　　(C) $2\pi^2/3$　　(D) $2\pi/3$

2、摆线 $x=a\left(t-\sin t\right),y=a\left(1-\cos t\right)$ 的一拱 $\left(0\le t\le 2\pi\right)$ 与 x 轴所围图形的面积为( )

(A) $2\pi a^2$　　(B) $3\pi a^2$　　(C) πa^2　　(D) πa

3、对数螺线 $r=e^{a\theta}$ 自 $\theta=0$ 到 $\theta=\varphi$ 一段的弧长 $s=$（ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(e^{a\varphi}-1\right)$　　(B) $\sqrt{1+a^2}\left(e^{a\varphi}-1\right)$

(C) $\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(e^{a\varphi}+1\right)$　　(D) $\sqrt{1+a^2}\left(e^{a\varphi}+1\right)$

4、曲线 $y=e^x,y=e^{-x},x=1$ 所围成的图形面积为 A，则 $A=$（ ）

(A) $e+\dfrac{1}{e}+2$　　(B) $e+\dfrac{1}{e}-2$

(C) $e-\dfrac{1}{e}+2$　　(D) $e-\dfrac{1}{e}+2$

5、由曲线 $x^2=ay$ 与 $y^2=ax\left(a>0\right)$ 所围平面图形的质心为（ ）

(A) $(\dfrac{9}{20}a,\dfrac{3}{20}a)$　　(B) $(\dfrac{3}{20}a,\dfrac{9}{20}a)$　　(C) $(\dfrac{3}{20}a,\dfrac{3}{20}a)$　　(D) $(\dfrac{9}{20}a,\dfrac{9}{20}a)$

6、设 $f(x),g(x)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $g(x)<f(x)<m$（m 为常数），则曲线 $y=g(x),y=f(x),x=a$ 及 $x=b$ 所围平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体体积为（ ）

(A) $\int_a^b\pi\left[2m-f(x)+g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx$

(B) $\int_a^b\pi\left[2m-f(x)-g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx$

(C) $\int_a^b\pi\left[m-f(x)+g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx$

(D) $\int_a^b\pi\left[m-f(x)-g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx$

二、填空题

1、位于曲线 $y=xe^{-x}\left(0\le x<+\infty\right)$ 下方，x 轴上方的无界图形的面积是________。

2、曲线 $\rho=e^{a\theta}\left(a>0\right)$ 上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围图形的面积为 ______。

3、抛物线 $y^2=4ax$ 与直线 $x=x_0\left(>0\right)$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所产生的立体的体积为__

4、求由抛物线 $y^2=x$ 与 $y^2=-x+4$ 围成图形的面积。

三、简答题

1、由曲线 $y=x^3$ 与直线 $x=2, y=0$ 所围图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转，计算所得两个旋转体的体积。

2、设函数 $y=f(x)$ 在 $\left[a,b\right]\left(a>0\right)$ 连续非负，由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转一周得旋转体，试导出该旋转体的体积公式。

3、求由 $y=\sin x\left(0\le x\le\pi\right), y=0$ 围成的图形绕 x 轴旋转所得曲面的面积。

4、求曲线 $r=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$ 的全长。

5、一平面经过半径为 R 的圆柱体的底面交成角 α，计算圆柱体被这平面截割下的那部分体积。

第六章　定积分的应用练习题答案

一、选择题

1、(B)

分析：$$V=\int_0^{\pi}\pi(\sin^{3/2}x)^2dx=\pi\int_0^{\pi}(\sin x)^3dx=-\pi\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2x\right)d\cos x$$
$$=-\pi\left(\cos x-\frac{1}{3}\cos^3x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4}{3}\pi$$

2、(B)

分析：当$t=0$时，$x=0,t=2\pi$时，$x=2\pi a$。所以
$$S=\int_0^{2\pi a}ydx=\int_0^{2\pi}a\left(1-\cos t\right)da\left(t-\sin t\right)=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos t\right)^2dt=3\pi a^2$$

3、(A)

分析：极坐标系中弧长的计算公式为$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2\left(\theta\right)+r'^2\left(\theta\right)}d\theta$，将$r=e^{a\theta},r'=ae^{a\theta}$代入

得$l=\int_0^{\varphi}\sqrt{e^{2a\theta}+a^2e^{2a\theta}}d\theta=\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(e^{a\varphi}-1\right)$

4、(B)

分析：曲线$y=e^x$与$y=e^{-x}$的交点为$\left(0,1\right)$，故$A=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx=e+\dfrac{1}{e}-2$。

5、(D)

分析：两曲线的交点是$\left(0,0\right),\left(a,a\right)$。设该平面图形的质心为$\left(\overline{x},\overline{y}\right)$，则由质心公式有
$$\overline{x}=\frac{\int_0^a x\left(y_2-y_1\right)dx}{\int_0^a\left(y_2-y_1\right)dx}=\frac{\int_0^a x(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a})dx}{\int_0^a(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a})dx}$$
$$=\frac{(\frac{2}{5}\sqrt{a}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{4a}x^4)\Big|_0^a}{(\frac{2}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3a}x^3)\Big|_0^a}=\frac{\frac{3}{20}a^3}{\frac{1}{3}a^2}=\frac{9}{20}a$$

同样计算或由对称性可知$\overline{y}=\dfrac{9}{20}a$。

6、(B)

分析：由旋转体的体积公式得
$$V=\pi\int_a^b\{\left[m-g(x)\right]^2-\left[m-f(x)\right]^2\}dx$$
$$=\pi\int_a^b\left[f(x)+g(x)-2m\right]\left[g(x)-f(x)\right]dx$$
$$=\int_a^b\pi\left[2m-f(x)-g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

二、填空题

1、<u>1</u>

分析：$A=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}xde^{-x}=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$

2、$\underline{\left(e^{4\pi a}-1\right)\big/4a}$

分析：$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(e^{a\theta})^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}e^{2a\theta}d\theta=\frac{1}{4a}e^{2a\theta}\Big|_0^{2\pi}=\left(e^{4\pi a}-1\right)\big/4a$

3、$\underline{2\pi a{x_0}^2}$

分析：$V=\pi\int_0^{x_0}4axdx=2\pi a{x_0}^2$

4、分析：两条抛物线交点为$\begin{cases}y^2=-x+4\\ y^2=x\end{cases}$即$\left(2,-\sqrt{2}\right),\left(2,\sqrt{2}\right)$。则

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left[\left(-y^2+4\right)-y^2\right]dy=2\int_0^{\sqrt{2}}(4-2y^2)dy$$
$$=4(2y\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}y^3\Big|_0^{\sqrt{2}})=\frac{16}{3}\sqrt{2}$$

三、简答题

1、分析：$V_x=\pi\int_0^2x^6dx=\frac{128}{7}\pi$，$V_y=\pi\int_0^8(2^2-y^{\frac{2}{3}})dy=\frac{64}{5}\pi$

2、分析：用微元法。任取$\left[a,b\right]$上小区间$\left[x,x+dx\right]$，相应得到小曲边梯形，它绕y轴旋转所成立体的体积为$dV=f(x)2\pi xdx$，于是积分得旋转体的体积为$V=2\pi\int_a^bxf(x)dx$。

3、求由$y=\sin x\left(0\le x\le\pi\right),y=0$围成的图形绕$x$轴旋转所得曲面的面积。

分析：该旋转面的面积为

$$F=2\pi\int_0^{\pi}y\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2x}dx=-2\pi\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2x}d\cos x$$
$$=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+u^2}du=4\pi\int_0^1\sqrt{1+u^2}du$$
$$=4\pi[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)]\Big|_0^1=2\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$

4、分析：$r=a\sin^3\frac{\theta}{3}$以$6\pi$为周期，$\theta\in\left[0,3\pi\right]\Leftrightarrow\frac{\theta}{3}\in\left[0,\pi\right],r\ge0$；$\theta\in(3\pi,6\pi)\Leftrightarrow$ $\frac{\theta}{3}\in(\pi,2\pi)$，$r<0$，只需考虑$\theta\in\left[0,3\pi\right]$。

$$r'=3a\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{3}=a\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3},r^2+r'^2=a^2\sin^4\frac{\theta}{3}$$

则$L=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta=3a\int_0^{\pi}\sin^2tdt=\frac{3a}{2}\pi$。

5、分析：底圆方程：$x^2+y^2=R^2$在x处用垂直于x轴的平面截割形体所得截面为一直角三角形ABC，其面积$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}y\cdot y\tan\alpha=\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)\tan\alpha$，故所求形体体积为$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)\tan\alpha dx=\int_0^R\left(R^2-x^2\right)\tan\alpha dx=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$

第七章 微分方程练习题

一、选择题

1、设微分方程 $y''+2y'+y=0$，则 $y=cxe^{-x}$（其中 c 为任意常数）（ ）

(A) 是这个方程的通分析

(B) 是这个方程的特分析

(C) 不是这个方程的分析

(D) 是这个方程的分析，但既非它的通分析也非它的特分析

2、微分方程 $y''-3y'+2y=3x-2e^{x}$ 的特分析形式为（ ）

(A) $(ax+b)e^{x}$　　(B) $(ax+b)xe^{x}$　　(C) $(ax+b)+ce^{x}$　　(D) $(ax+b)+cxe^{x}$

3、二阶常系数线性微分方程 $y''+8y'+25y=0$ 满足初值 $y(0)=1$ 与 $y'(0)=-4$ 的特分析 $y^{*}=$（ ）

(A) $e^{-3x}\cos 4x$　　(B) $e^{3x}\cos 4x$　　(C) $e^{-4x}\cos 3x$　　(D) $e^{4x}\cos 3x$

4、设曲线 L 的方程为 $y=y(x)$，在 L 上任一点 $P(x,y)$ 处的切线与点 P 到原点 O 的连线垂直。若 c 为任意正数，则 L 的方程为（ ）

(A) $xy=c$　　(B) $x^{2}-xy+y^{2}=c$　　(C) $x^{2}-y^{2}=c$　　(D) $x^{2}+y^{2}=c$

5、设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是微分方程

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$$

的 3 个分析,其中 $a_1(x)$、$a_2(x)$、$f(x)$ 均为连续函数,且 $f(x)\not\equiv 0$，则该方程必定有分析

(A) $y_1(x)+y_2(x)+y_3(x)$　　(B) $y_1(x)+y_2(x)-y_3(x)$

(C) $y_1(x)-y_2(x)-y_3(x)$　　(D) $-y_1(x)-y_2(x)-y_3(x)$

6、设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

的分析，C_1,C_2 是任意常数，则该非齐次方程的通分析是（ ）

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$ (B) $C_1y_1+C_2y_2+(C_1+C_2)y_3$

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$ (D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

7、微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特分析应具有形式（其中 a,b 为常数）（ ）

(A) ae^x+b (B) axe^x+b (C) ae^x+bx (D) axe^x+bx

8、方程 $y'\sin x=y\ln y$ 满足定分析条件 $y(\frac{\pi}{2})=e$ 的特分析是（ ）

(A) $\frac{e}{\sin x}$ (B) $e^{\sin x}$ (C) $\frac{e}{\tan\frac{x}{2}}$ (D) $e^{\tan\frac{x}{2}}$

9、设 $f_1(x),f_2(x)$ 为二阶常系数线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个特分析，C_1,C_2 是两个任意常数，则 $C_1f_1(x)+C_2f_2(x)$ 是该方程通分析的充分条件是（ ）

(A) $f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x)=0$ (B) $f_1(x)f_2'(x)+f_2(x)f_1'(x)=0$

(C) $f_1(x)f_2'(x)+f_2(x)f_1'(x)\neq 0$ (D) $f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x)\neq 0$

10、已知曲线 $y=y(x)$ 经过原点，且在原点的切线平行于直线 $2x-y-5=0$，而 $y(x)$ 满足微分方程 $y''-6y'+9y=e^{3x}$，则此曲线的方程为（ ）

(A) $y=\sin 2x$ (B) $y=\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\sin 2x$

(C) $y=\frac{x}{2}(x+4)e^{3x}$ (D) $y=(x^2\cos x+\sin 2x)e^{3x}$

二、填空题

1、微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通分析为 $y=$____________

2、微分方程 $y'=(1-y^2)\tan x, y(0)=2$ 的特分析为 $y=$____________

3、已知某一阶微分方程的通分析为 $y=Cx^3$，其中 C 为任意常数，则该微分方程为______

4、设 C_1,C_2 为任意常数，$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$ 为首项系数为 1 的某二阶常系数线性齐次微分方程的通分析，则该微分方程为_________

5、设 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ 是 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个分析，则 $\alpha=$_____，$\beta=$_____，$\gamma=$______

6、设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内可导，且满足 $f'(x)=g(x),g'(x)=f(x)$， $f(0)=0$，

$g(0)=2$，则 $f(x)=$ __________，$g(x)=$ ____________

7、微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通分析为___________

三、简答题

1、分析微分方程 $xy'-y[\ln\left(xy\right)-1]=0$。

2、分析微分方程 $y''=\dfrac{1+y'^2}{2y}$。

3、设 z 为二元函数 $z=z\left(x,y\right)$，满足

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{xy}+xy \qquad x>0,y>0$$

求 $z=z\left(x,y\right)$。

4、设 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=e^x+\int_0^x f(x-t)dt$，求 $f(x)$

5、设函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,+\infty\right)$ 上可导， $f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$。若

$$\int_0^{f(x)} g\left(t\right)dt+\int_0^x f(t)dt=xe^x-e^x+1$$

求 $f(x)$。

第七章 微分方程练习题答案

一、选择题

1、(D)

分析：因为二阶方程的通分析需含两个任意常数，所以不是通分析，又因为特分析不含任意常数，所以不是特分析，最后因为 $y=cxe^{-x}$ 代入方程成为关于 x 的恒等式，所以 $y=cxe^{-x}$ 是方程的分析，所以应选 (D)。

2、(D)

分析：微分方程的对应齐次微分方程是：$y''-3y'+2y=0$，其特征方程为 $r^2-3r+2=0$，其特征根为 $r_1=1,r_2=2$。因此微分方程 $y''-3y'+2y=-2e^x$ 有形如 $y_1^*=cxe^x$ 的特分析。又微分方程 $y''-3y'+2y=3x$ 有形如 $y_2^*=ax+b$ 的特分析。所以，原方程 $y''-3y'+2y=3x-2e^x$ 有形如 $y^*=y_1^*+y_2^*=cxe^x+(ax+b)$ 的特分析，应选 (D)

3、(C)

分析：$y''+8y'+25y=0$ 的特征方程是 $\lambda^2+8\lambda+25=0$，它有特征根 $\lambda_1=-4+3i$，$\lambda_2=-4-3i$，从而 $y''+8y'+25y=0$ 的通分析是 $y=e^{-4x}\left(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x\right)$ 其中 c_1 与 c_2 是任意常数。由于

$$1=y(0)=c_1$$

$$-4=y'(0)=e^{-4x}\left[-3c_1\sin 3x+3c_2\cos 3x-4\left(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x\right)\right]\Big|_{x=0}$$

$$=3c_2-4c_1$$

故 $c_1=1,c_2=0$。应选 (C)。

4、(D)

分析；曲线 L 上点 $P(x,y)$ 处的切线斜率 $k_1=y'(x)$，连线 OP 的斜率 $k_2=\frac{y(x)}{x}$。由题设知 $k_1k_2=-1$，即 $\frac{yy'}{x}=-1\Leftrightarrow yy'+x=0$。分离变量得 $ydy+xdx=0$，积分即得 $x^2+y^2=c$

5、(B)

分析：非齐次方程的两个分析的差，是对应的齐次方程的分析，齐次方程的分析与非齐次方程的分析的和是非齐次方程的分析。按此，故知应选(B)。

6、(D)

分析：$C_1y_1+C_2y_2+\left(1-C_1-C_2\right)y_3=C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3$

y_1-y_3,y_2-y_3为对应齐次方程的两个线性无关的分析。(D)为非齐次方程的通分析。

7、(B)

分析：特征方程为$r^2-1=0$，其根$r_{1,2}=\pm1$，故特分析形式为$y^*=axe^x+b$，应选(B)

8、(D)

分析：这是变量分离的方程

$\dfrac{dy}{y\ln y}=\dfrac{dx}{\sin x},\dfrac{d\ln y}{\ln y}=\dfrac{d\tan\dfrac{x}{2}}{\tan\dfrac{x}{2}},\ln\ln y=\ln\tan\dfrac{x}{2}+C$，又因为$y(\dfrac{\pi}{2})=e$，则$C=0$。

$y=e^{\tan\frac{x}{2}}$，选(D)

9、(D)

分析：由线性微分方程分析的结构知$f_1(x),f_2(x)$线性无关是$C_1f_1(x)+C_2f_2(x)$为方程通分析的充分必要条件，即$\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\neq C$，从而$(\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)})'=\dfrac{f_1'(x)f_2(x)-f_1(x)f_2'(x)}{f_2^2(x)}\neq0$，从而应选$(D)$。

10、(C)

分析：由题设知$y=y\left(x\right)$是$y''-6y'+9y=e^{3x}$满足$y\left(0\right)=0,y'\left(0\right)=2$的特分析。对应的特征方程为$r^2-6r+9=0$，特征根$r_1=r_2=3$。从而对应的齐次微分方程的通分析为$y=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$。因非齐次项$f(x)=e^{3x}$，从而可设非齐次微分方程$y''-6y'+9y=e^{3x}$具有形式为$y^*=Ax^2e^{3x}$的特分析。代入原方程可确定常数$A=\dfrac{1}{2}$，即原方程的通分析为

$$y=(c_1+c_2x+\frac{1}{2}x^2)e^{3x}$$

由 $y(0)=0, y'(0)=2$ 可确定 $c_1=0, c_2=2$。故所求曲线的方程为 $y=\frac{x}{2}(x+4)e^{3x}$。

二、填空题

1、 $y=(x+C)\cos x$

分析：

$$y=e^{-\int \tan x dx}\left[\int \cos x \cdot e^{\int \tan x dx} dx+C\right]=e^{\ln|\cos x|}\left[\int \cos x \cdot e^{-\ln|\cos x|} dx+C\right]$$

$$=|\cos x|\left[\int \frac{\cos x}{|\cos x|} dx+C\right]$$

当 $\cos x>0$ 时， $y=\cos x\left[\int 1 dx+C\right]=(x+C)\cos x$，当 $\cos x<0$ 时，

$y=-\cos x\left[\int(-1) dx+C\right]=(x-C)\cos x$。由于 C 是任意常数，故两式可以写成一样，

$y=(x+C)\cos x$

2、 $y=\frac{3+\cos^2 x}{3-\cos^2 x}$

分析：分离变量，两边积分，有

$$\int \frac{dy}{1-y^2}=\int \tan x dx+C, \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|=-\ln|\cos x|+C$$

改写任意常数并化简，得 $y=\frac{1-C\cos^2 x}{1+C\cos^2 x}$。由初始条件 $y(0)=2$，得 $C=-\frac{1}{3}$，特分析

$y=\frac{3+\cos^2 x}{3-\cos^2 x}$

3、 $\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x}$

分析：由 $y=Cx^3$，得 $\frac{dy}{dx}=3Cx^2$，两式消去 C，得 $\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x}$。

4、 $y''-2y'+2y=0$

分析：设所求的微分方程为

$$y''+by'+cy=0$$

将 $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$ 代入，得

$$e^x\sin x\cdot\left[b(C_2-C_1)+cC_2-2C_1\right]+e^x\cos x\cdot\left[b(C_1+C_2)+cC_1+2C_2\right]=0$$

因 $e^x\sin x$ 与 $e^x\cos x$ 的线性无关，由上式为零推知

$$b(C_2-C_1)+cC_2-2C_1=b(C_1+C_2)+cC_1+2C_2=0$$

分析之，由 $C_1^2+C_2^2\neq 0$，得 $b=-2,c=2$ 。

5、$\alpha=-3,\beta=2,\gamma=-1$

分析：将 $y=e^{2x}+\left(1+x\right)e^x$ 代入 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$，经计算，得

$$\left(4+2\alpha+\beta\right)e^{2x}+\left(3+2\alpha+\beta\right)e^x+\left(1+\alpha+\beta\right)xe^x=\gamma e^x$$

即 $$\left(4+2\alpha+\beta\right)e^{2x}+\left(3+2\alpha+\beta-\gamma\right)e^x+\left(1+\alpha+\beta\right)xe^x=0$$

由于 e^x， e^{2x}， xe^x 线性无关，故由上式推知

$$4+2\alpha+\beta=0,3+2\alpha+\beta-\gamma=0,1+\alpha+\beta=0$$

分析之得 $\alpha=-3,\beta=2,\gamma=-1$ 。

6、$f(x)=e^x-e^{-x},g(x)=e^x+e^{-x}$

分析：因为 $g(x)$ 可导且 $f'(x)=g(x)$，所以 $f(x)$ 二阶可导：$f''(x)=g'(x)=f(x)$，分析之

$$f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

又 $f(0)=0$， $f'(0)=g(0)=2$，于是 $C_1+C_2=0,C_1-C_2=2$ 。所以

$$f(x)=e^x-e^{-x},g(x)=f'(x)=e^x+e^{-x}$$

7、$y=\dfrac{C_1}{x^2}+C_2$

分析：设 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$，方程化为

$$x\frac{dp}{dx}+3p=0\Rightarrow\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{3dx}{x}\Rightarrow p=\frac{C}{x^3}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{C}{x^3}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{C}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+C_2=\frac{C_1}{x^2}+C_2\text{（其中 }C_1=-\frac{C}{2}\text{）}$$

三、简答题

1、

分析：令 $u=xy$，则 $u'=y+xy'$，代入方程得

$$u'-y-y\left[\ln u-1\right]=0$$
$$\Rightarrow u'=y\ln u\Rightarrow u'=\frac{u}{x}\ln u$$
$$\Rightarrow \frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln\ln u=\ln x+\ln C\Rightarrow \ln u=Cx\Rightarrow \ln\left(xy\right)=Cx$$

2、

分析：这是不显含 x 的方程，令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}$，代入方程，得

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{1+p^2}{2y}\Rightarrow \frac{2pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y}\Rightarrow \ln\left(1+p^2\right)=\ln y+\ln C_1$$
$$\Rightarrow 1+p^2=C_1y\Rightarrow p=\pm\sqrt{C_1y-1}$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1y-1}\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{C_1y-1}}=\pm dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}=\pm x+C_2$$

3、

分析：将 y 看作常数，这是 z 关于 x 的一阶线性方程，由通分析公式，得

$$z=e^{\int\frac{1}{xy}dx}[\int xye^{-\int\frac{1}{xy}dx}dx+C\left(y\right)]=e^{\frac{1}{y}\ln x}[\int xye^{-\frac{1}{y}\ln x}dx+C\left(y\right)]$$
$$=x^{\frac{1}{y}}[y\int x^{1-\frac{1}{y}}dx+C\left(y\right)]=x^{\frac{1}{y}}[\frac{yx^{2-\frac{1}{y}}}{2-\frac{1}{y}}+C\left(y\right)]$$
$$=\frac{x^2y^2}{2y-1}+C\left(y\right)x^{\frac{1}{y}}$$

因为在整个过程中，将 y 看作常数，所以对 x 分析方程时，任意常数 C 也应该认为是 y 的任意函数 $C\left(y\right)$（它对 x 的导数为 0）

4、

分析:作积分变量变换，命 $x-t=u$

$$f(x)=e^x+\int_0^x f(x-t)dt=e^x+\int_x^0 f(u)(-du)=e^x+\int_0^x f(u)du \qquad (*)$$

两边对 x 求导，得

$$f'(x)=e^x+f(x)$$

这是一阶线性微分方程，由通分析公式，得通分析

$$f(x)=e^{\int 1dx}\left[\int e^x e^{-\int 1dx}dx+C\right]=e^x\left(x+C\right)$$

又由$\left(*\right)$式知，$f(0)=1$，代入上式，$1=f(0)=0+C,C=1$，所以$f(x)=e^x\left(x+1\right)$。

5、

分析：两边对 x 求导，得

$$g\left(f(x)\right)f'(x)+f(x)=xe^x$$

即 $xf'(x)+f(x)=xe^x$，为代通分析公式，应将 $f'(x)$ 前的系数改变为 1，当 $x>0$ 时，方程可改写为 $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=e^x$。通分析为

$$f(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}[\int e^x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C]=\frac{1}{x}\left[\int xe^x dx+C\right]=e^x+\frac{C-e^x}{x}\left(x>0\right)$$

$$0=f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}（e^x+\frac{C-e^x}{x})=1+\lim_{x\to 0^+}\frac{C-e^x}{x}$$

所以$C=1$。于是求得

$$f(x)=\begin{cases}e^x+\dfrac{1-e^x}{x},当x>0\\ \quad 0,\quad 当x=0\end{cases}$$