数学分析原理笔记

Le Yang
yangle0125@qq.com

目录

第一章　实数系和复数系

1.1　导引

例 1.1. 我们现在证明方程

$$p^2 = 2 \tag{1.1}$$

不能被任何有理数 p 满足。倘若存在那样一个 p，我们可以把它写成 $p = m/n$，其中 m 和 n 都是整数[1]，而且可以选得不都是偶数[2]。于是由(1.1)式得出

$$m^2 = 2n^2 \tag{1.2}$$

这表明 m^2 是偶数，因此 m 是偶数（如果 m 是奇数，那么 m^2 将是奇数[3]），因而 m^2 能被 4 整除。于是(1.2)式右边能被 4 整除，因而 n^2 是偶数，这又说明 n 是偶数。

假定(1.1)式成立，就导致 m 和 n 都是偶数的结论，这与 m 及 n 的选择相矛盾。因此，对于有理数 p，(1.1)式不能成立。

现在我们把这种情况考察的更严密一些。令 A 是使 $p^2 < 2$ 的一切正有理数 p 的集，B 是使 $p^2 > 2$ 的一切正有理数 p 的集。我们来证明 A 里没有最大数，B 里没有最小数[4]。

更明确地说，对于 A 中的每一个 p，能在 A 中找到一个有理数 q，而 $p < q$，并且对于 B 中的每一个 p，能在 B 中找到一个有理数 q，而 $q < p$。

为了做这件事，给每一个有理数 $p > 0$，配置一个数[5]

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2} \tag{1.3}$$

于是

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2} \tag{1.4}$$

---

[1] 根据有理数的定义。

[2] 否则我们可以一直约分，即分子分母都除以 2，如此这样一直进行下去，直到其中一个不是偶数。

[3] 反证法中的反证法。

[4] rudin 先生显然觉得前面的证明太简单了，不够过瘾。

[5] 对于 A 中的情况，就是我们要找这样一个 q，使得 $q = p + x$，$x > 0$，$q < \sqrt{2}$。因此 $x < \sqrt{2} - p = (2 - p^2)/(\sqrt{2} + p)$。可令 $x = (2 - p^2)/(2 + p)$，就得到下面的式子。对于 B 中的情况也会得到同样的式子。

如果 p 在 A 中，那么 $p^2-2<0$，(1.3)式说明 $q>p$，而(1.4)式说明 $q^2<2$，因而 q 在 A 中。

如果 p 在 B 中，那么 $p^2-2>0$，(1.3)式说明 $0<q<p$，而(1.4)式说明 $q^2>2$，因而 q 在 B 中。

1.2　有序集

定义 1.1 (序关系). 设 S 是一个集。S 上的序是一种关系，记作 $<$，它有下面的两个性质：

1. 如果 $x\in S$，并且 $y\in S$，那么在

$$x<y, x=y, y<x$$

三种述语之中，有且只有一种成立。

2. 如果 $x,y,z\in S$，又如果 $x<y$ 且 $y<z$，那么 $x<z$。

定义 1.2 (有序集). 在集 S 里定义了一种序，便是一个有序集。

定义 1.3 (上有界). 设 S 是有序集，而 $E\subset S$。如果存在 $\beta\in S$，而每个 $x\in E$，满足 $x\leqslant\beta$，我们就说 E 上有界，并称 β 为 E 的一个上界。

用类似的方法定义下界（把 $\leqslant$ 换成 $\geqslant$ 就行了）。

定义 1.4 (最小上界). 设 S 是有序集，$E\subset S$，且 E 上有界。设存在一个 $\alpha\in S$，它具有以下性质：

1. α 是 E 的上界。

2. 如果 $\gamma<\alpha$，γ 就不是 E 的上界。

便把 α 叫做 E 的最小上界（由 2来看，显然[6]最多有一个这样的 α）或 E 的上确界，而记作

$$\alpha=\sup E$$

类似地可以定义下有界集 E 的最大下界或下确界。述语

$$\alpha=\inf E$$

表示 α 是 E 的一个下界，而任何合于 $\beta>\alpha$ 的 β，不能是 E 的下界。

例 1.2.

[6] 假设有 α_1,α_2（$\alpha_1\neq\alpha_2$）都是 E 的最小上界，根据序的性质，要么 $\alpha_1<\alpha_2$，要么 $\alpha_2<\alpha_1$，根据 2，这就表明或者 α_1 不是 E 的上界，或者 α_2 不是 E 的上界，这与我们的假设矛盾。

a 把例 *1.1*中的集 A 与集 B 看作有序集 Q 的子集。集 A 上有界。实际上，A 的那些上界，刚好就是 B 的那些元。因为 B 没有最小的元，所以 A 在 Q 中没有最小上界。

b 如果 $\alpha = \sup E$ 存在。这 α 可以是 E 的元，也可以不是 E 的元。例如，假设 E_1 是所有合于 $r \in Q$ 及 $r < 0$ 的集。假设 E_2 是所有合于 $r \in Q$ 及 $r \leqslant 0$ 的集。于是

$$\sup E_1 = \sup E_2 = 0,$$

而 $0 \notin E_1$，$0 \in E_2$。

定义 1.5 (最小上界性)**.** 有序集 S，如果具有性质：若 $E \subset S$，E 不空，且 E 上有界时，$\sup E$ 便在 S 里。就说 S 有最小上界性。

例 1.2 a说明 Q 没有最小上界性。

定理 1.1 (有最小上界性的有序集也有最大下界性)**.** 设 S 是具有最小上界性的有序集，$B \subset S$，B 不空且 B 下有界。令 L 是 B 的所有下界的集。那么

$$\alpha = supL$$

在 S 存在，并且 $\alpha = \inf B$。

特别地说就是 $\inf B$ 在 S 存在。

证.（证明 α 存在）因为 B 下有界，L 不空。L 刚好由这样一些 $y \in S$ 组成，他们对于每个 $x \in B$，满足不等式 $y \leqslant x$。可见每个 $x \in B$ 是 L 的上界。于是 L 上有界，因而我们对 S 的假定意味着 S 里有 L 的上确界[7]；把它叫做 α。

（证明 α 是 B 的下界）如果 $\gamma < \alpha$，那么 γ 不是 L 的上界，因此 $\gamma \notin B$。由此对于每个 $x \in B$，$\alpha \leqslant x$。所以 $\alpha \in L$。

（证明 α 是 B 的最大下界）如果 $\alpha < \beta$，由于 α 是 L 的上界，必然 $\beta \notin L$。我们已证明了：$\alpha \in L$。而当 $\beta > \alpha$ 时，就有 $\beta \notin L$。换句话说，α 是 B 的下界，但若 $\beta > \alpha$，β 就不是 B 的下界。这就是说 $\alpha = \inf B$。 □

1.3 域

[7]这里还需要保证 $L \subset S$。根据 L 的定义，若 $x \in L$，那么 x 就是 B 的下界。而根据下界的定义，就有 $x \in S$。所以 $L \subset S$ 是成立的。rudin 先生是觉得这些太显然了就没有把它们写出来吗？