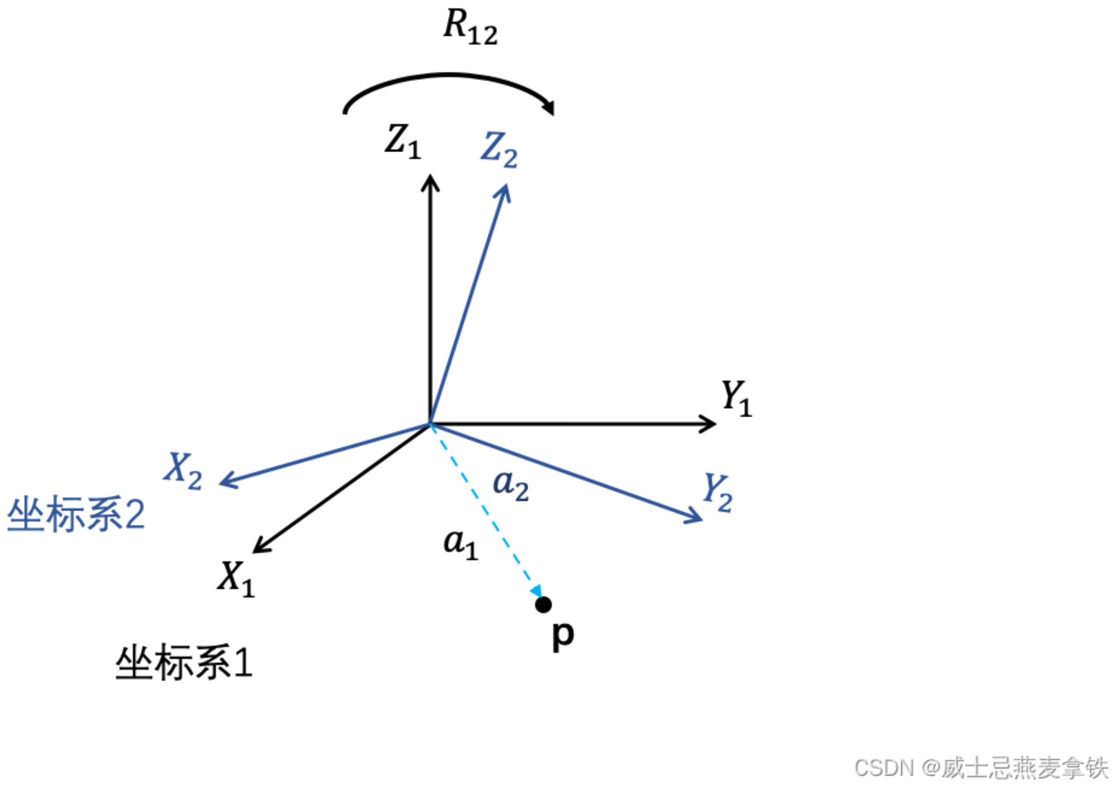
旋转矩阵R



首先，只考虑旋转。

假设坐标系1： { X 1 , Y 1 , Z 1 } \{X_1, Y_1, Z_1\} {X1, Y1, Z1} 经过**纯旋转**之后得到坐标系2： { X 2 , Y 2 , Z 2 } \{X_2, Y_2, Z_2\} {X2, Y2, Z2} （如上图），其中坐标系1对应的单位正交基为 (e 1 , e 2 , e 3) \left(e_{1}, e_{2}, e_{3}\right) (e1, e2, e3)，坐标系2对应的单位正交基为 (e 1 ′ , e 2 ′ , e 3 ′) \left(e_{1}^{\prime}, e_{2}^{\prime}, e_{3}^{\prime}\right) (e1′, e2′, e3′)。 对于空间中的同一个点 p \boldsymbol{p} p ，假设点 p \boldsymbol{p} p 在坐标系1和坐标系2下的坐标分别为 a 1 = [a 1 , a 2 , a 3] T \boldsymbol{a_1} = \left[a_{1}, a_{2}, a_{3}\right]^{T} a1 = [a1, a2, a3]T， a 2 = [a 1 ′ , a 2 ′ , a 3 ′] T \boldsymbol{a_2} = \left[a_{1}^{\prime}, a_{2}^{\prime}, a_{3}^{\prime}\right]^{T} a2 = [a1′, a2′, a3′]T。由于点 p \boldsymbol{p} p 并没有随着坐标系的旋转而发生运动，根据坐标的定义，有：

[e 1 , e 2 , e 3] [a 1 a 2 a 3] = [e 1 ′ , e 2 ′ , e 3 ′] [a 1 ′ a 2 ′ a 3 ′] (1) \left[\boldsymbol{e}_{1}, \boldsymbol{e}_{2}, \boldsymbol{e}_{3}\right]\left[\begin{array}{c}a_{1} \\a_{2} \\a_{3}\end{array}\right]=\left[\boldsymbol{e}_{1}^{\prime}, \boldsymbol{e}_{2}^{\prime}, \boldsymbol{e}_{3}^{\prime}\right]\left[\begin{array}{c}a_{1}^{\prime} \\a_{2}^{\prime} \\a_{3}^{\prime}\end{array}\right]\tag{1} [e1, e2, e3] □□a1a2a3□□ = [e1′, e2′, e3′] □□a1′a2′a3′□□(1)

为了描述两个坐标之间的关系，我们对上面等式左右同时左乘 [e 1 T , e 2 T , e 3 T] T \left[\boldsymbol{e}_{1}^{T}, \boldsymbol{e}_{2}^{T}, \boldsymbol{e}_{3}^{T}\right]^{T} [e1T, e2T, e3T]T，那么左边的系数变成了单位矩阵，所以有：

[a 1 a 2 a 3] = [e 1 T e 1 ′ e 1 T e 2 ′ e 1 T e 3 ′ e 2 T e 1 ′ e 2 T e 2 ′ e 2 T e 3 ′ e 3 T e 1 ′ e 3 T e 2 ′ e 3 T e 3 ′] [a 1 ′ a 2 ′ a 3 ′] (2) \left[\begin{array}{c}a_{1} \\a_{2} \\a_{3}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc}\boldsymbol{e}_{1}^{T} \boldsymbol{e}_{1}^{\prime} & \boldsymbol{e}_{1}^{T} \boldsymbol{e}_{2}^{\prime} & \boldsymbol{e}_{1}^{T} \boldsymbol{e}_{3}^{\prime} \\\boldsymbol{e}_{2}^{T} \boldsymbol{e}_{1}^{\prime} & \boldsymbol{e}_{2}^{T} \boldsymbol{e}_{2}^{\prime} & \boldsymbol{e}_{2}^{T} \boldsymbol{e}_{3}^{\prime} \\\boldsymbol{e}_{3}^{T} \boldsymbol{e}_{1}^{\prime} & \boldsymbol{e}_{3}^{T} \boldsymbol{e}_{2}^{\prime} & \boldsymbol{e}_{3}^{T} \boldsymbol{e}_{3}^{\prime}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}a_{1}^{\prime} \\a_{2}^{\prime} \\a_{3}^{\prime}\end{array}\right]\tag{2} □□a1a2a3□□ = □□e1Te1′e2Te1′e3Te1′e1Te2′e2Te2′e3Te2′e1Te3′e2Te3′e3Te3′□□ □□a1′a2′a3′□□(2)

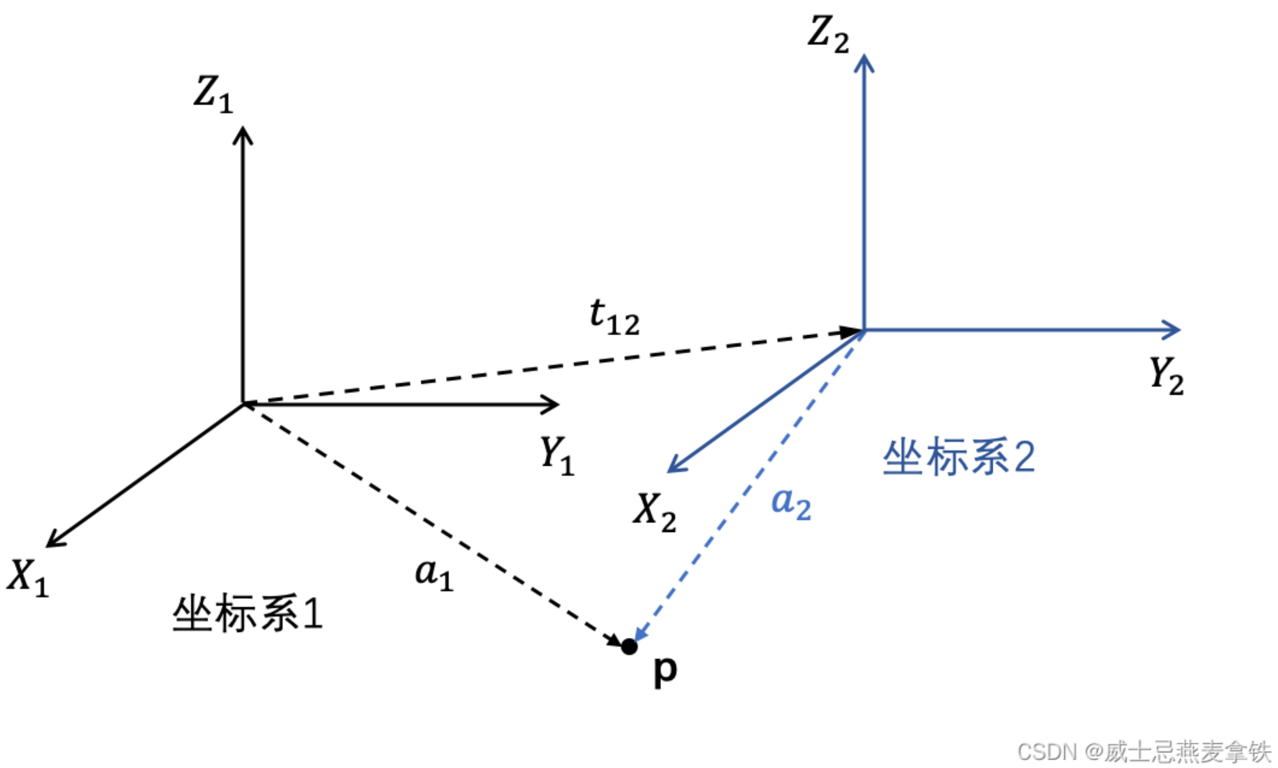
将等式右边的矩阵记做 R 12 \boldsymbol{R}_{12} R12，即有：

a 1 = R 12 a 2 (3) \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{R}_{12} \boldsymbol{a}_2 \tag{3} a1 = R12a2(3)

矩阵 R 12 \boldsymbol{R}_{12} R12便是**旋转矩阵**，其描述了坐标系1到坐标系2的旋转。矩阵 R 12 \boldsymbol{R}_{12} R12 的下标有两个含义：

1. 表示坐标系1到坐标系2的旋转
2. 表示将坐标系2中点的坐标通过旋转变换，从而得到同一个点在坐标系1中的坐标

平移向量t



然后，只考虑平移。

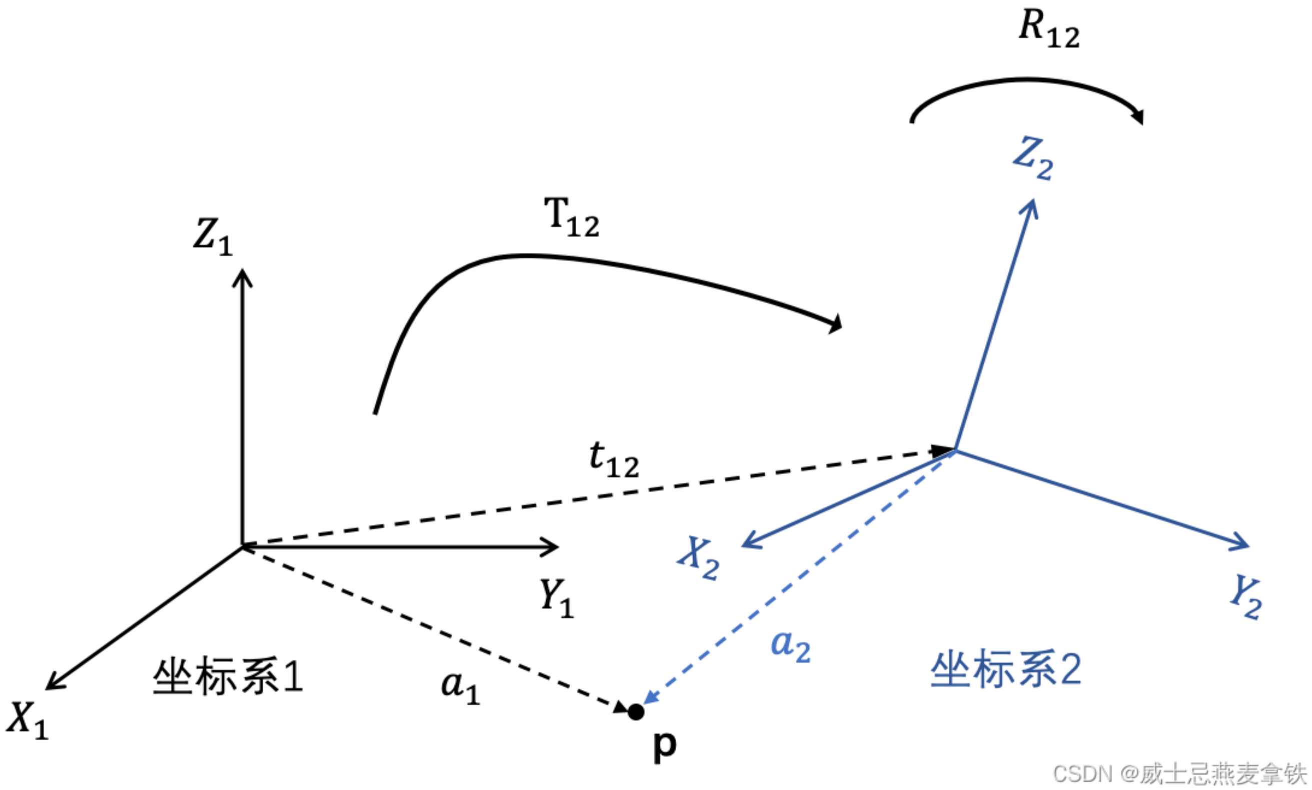
假设坐标系1： { X 1 , Y 1 , Z 1 } \{X_1, Y_1, Z_1\} {X1,Y1,Z1} 经过**纯平移**之后得到坐标系2： { X 2 , Y 2 , Z 2 } \{X_2, Y_2, Z_2\} {X2,Y2,Z2} （如上图）。 对于空间中的同一个点 p \boldsymbol{p} p ，假设其在两个坐标系下对应的坐标表示分别为 a 1 = [a 1 , a 2 , a 3] T \boldsymbol{a_1} = \left[a_{1}, a_{2}, a_{3}\right]^{T} a1 = [a1, a2, a3]T， a 2 = [a 1 ′ , a 2 ′ , a 3 ′] T \boldsymbol{a_2} = \left[a_{1}^{\prime}, a_{2}^{\prime}, a_{3}^{\prime}\right]^{T} a2 = [a1′, a2′, a3′]T。由几何关系，很显然有：

a 1 = a 2 + t 12 (4) \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{t}_{12}\tag{4} a1 = a2 + t12(4)

向量 t 12 \boldsymbol{t}_{12} t12便是**平移向量**，其描述了坐标系1到坐标系2的平移。其下标同样也有两个含义：

1. 表示坐标系1到坐标系2的平移（对应坐标系1的原点指向坐标系2的原点的向量）
2. 表示将坐标系2中点的坐标通过平移变换，从而得到同一个点在坐标系1中的坐标

变换矩阵T



最后同时考虑选择和平移，也就是坐标系之间的刚体运动。

假设坐标系1：$\{X_1, Y_1, Z_1\}$ 经过旋转和平移之后得到坐标系2：$\{X_2, Y_2, Z_2\}$（如上图）。对于空间中的同一个点 $\boldsymbol{p}$，假设其在两个坐标系下对应的坐标表示分别为 $\boldsymbol{a_1} = \left[a_{1}, a_{2}, a_{3}\right]^{T}$，$\boldsymbol{a_2} = \left[a_{1}^{\prime}, a_{2}^{\prime}, a_{3}^{\prime}\right]^{T}$。

通过将上述的旋转和平移合到一起，则有：

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{R}_{12} \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{t}_{12}\tag{5}$$

为了简化形式，引入齐次坐标有：

$$\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{a}_1 \\1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}\boldsymbol{R}_{12} & \boldsymbol{t}_{12} \\\mathbf{0}^{T} & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{a}_2 \\1\end{array}\right]\tag{6}$$

同样为了保持简洁，我们将 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 的齐次坐标简写成 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$，并将等式右边的矩阵记做 $\boldsymbol{T}_{12}$，则有：

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{T}_{12} \boldsymbol{a}_2\tag{7}$$

其中，$\boldsymbol{T}_{12}$为坐标系1 转换到坐标系2的变换矩阵，包含了旋转和平移。其下标对应的也有两个含义：

1. 表示坐标系1到坐标系2的变换（包含旋转和平移）
2. 表示将坐标系2中点的坐标通过旋转和平移变换，从而得到同一个点在坐标系1中的坐标