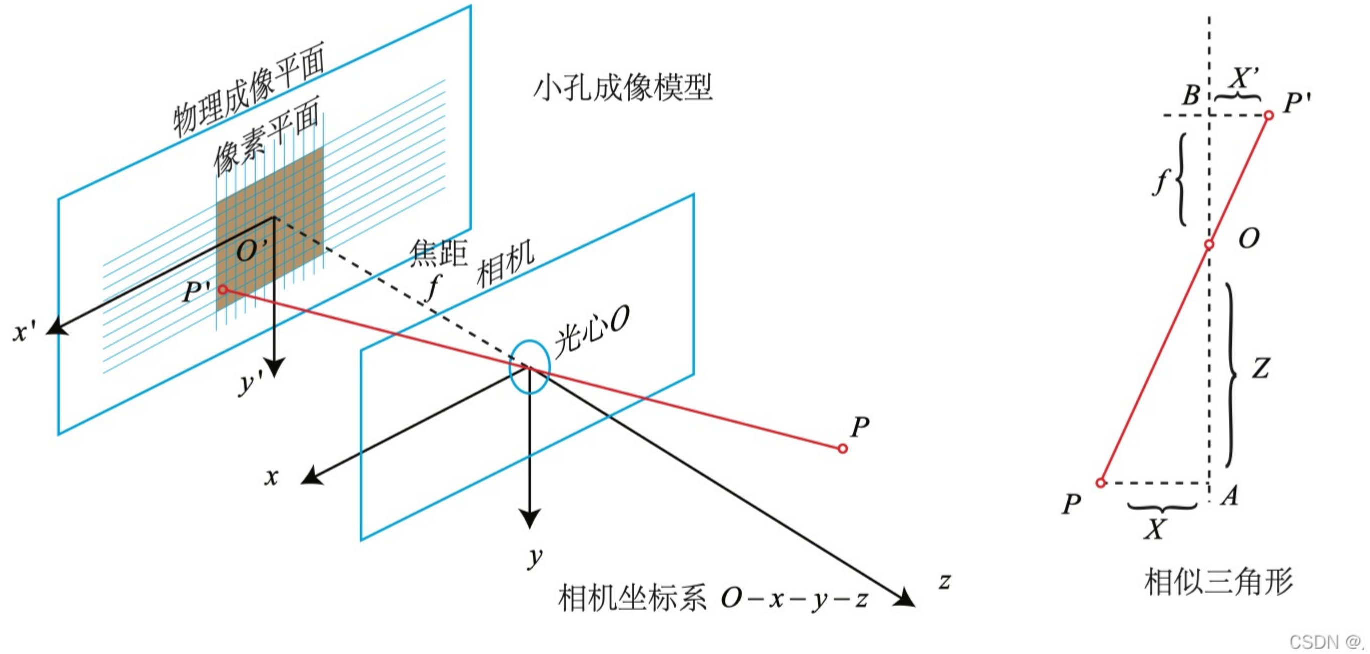


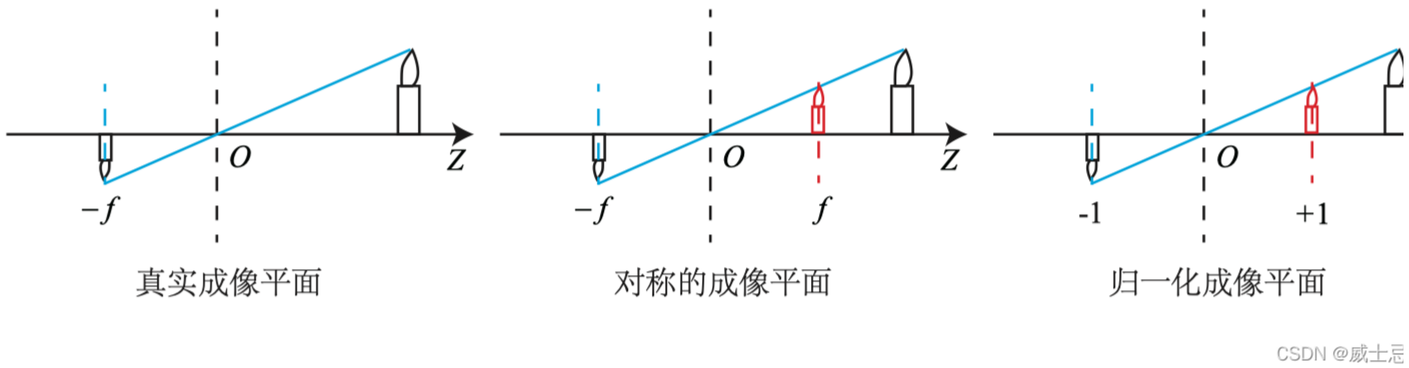
上图为针孔相机模型的成像原理图。

设 O − x − y − zO-x-y-zO − x − y − z 为相机坐标系， O O O 为相机的光心（同样也是针孔模型中的针孔）。现实世界的空间点 P P P ，经过光心 O O O 投影之后，落在了物理成像平面 O ′ − x ′ − y ′ O^{\prime}-x^{\prime}-y^{\prime} O′ − x′ − y′ 上，成像点为 P ′ P′ P ′ 。

设空间点 P P P 的坐标为 [X , Y , Z] T [X, Y, Z]^{T} [X, Y, Z]T， P ′ P′ P ′ 的坐标为 [X ′ , Y ′ , Z ′] T [X', Y', Z']^{T} [X′, Y′, Z′]T，并且设物理成像平面到光心的距离（即焦距）为 f f f 。那么由三角形相似关系有：

Z f = − X X ′ = − Y Y ′ (1) \frac{Z}{f}=-\frac{X}{X^{\prime}}=-\frac{Y}{Y^{\prime}} \tag{1} fZ = −X′X = −Y ′Y (1)

其中负号表示成的像是倒立的。为了简化模型，我们可以把成像平面对称到相机前方，和三维空间点一起放在摄像机坐标系的同一侧（如下图所示）。



简化之后去掉负号，便可以得到：

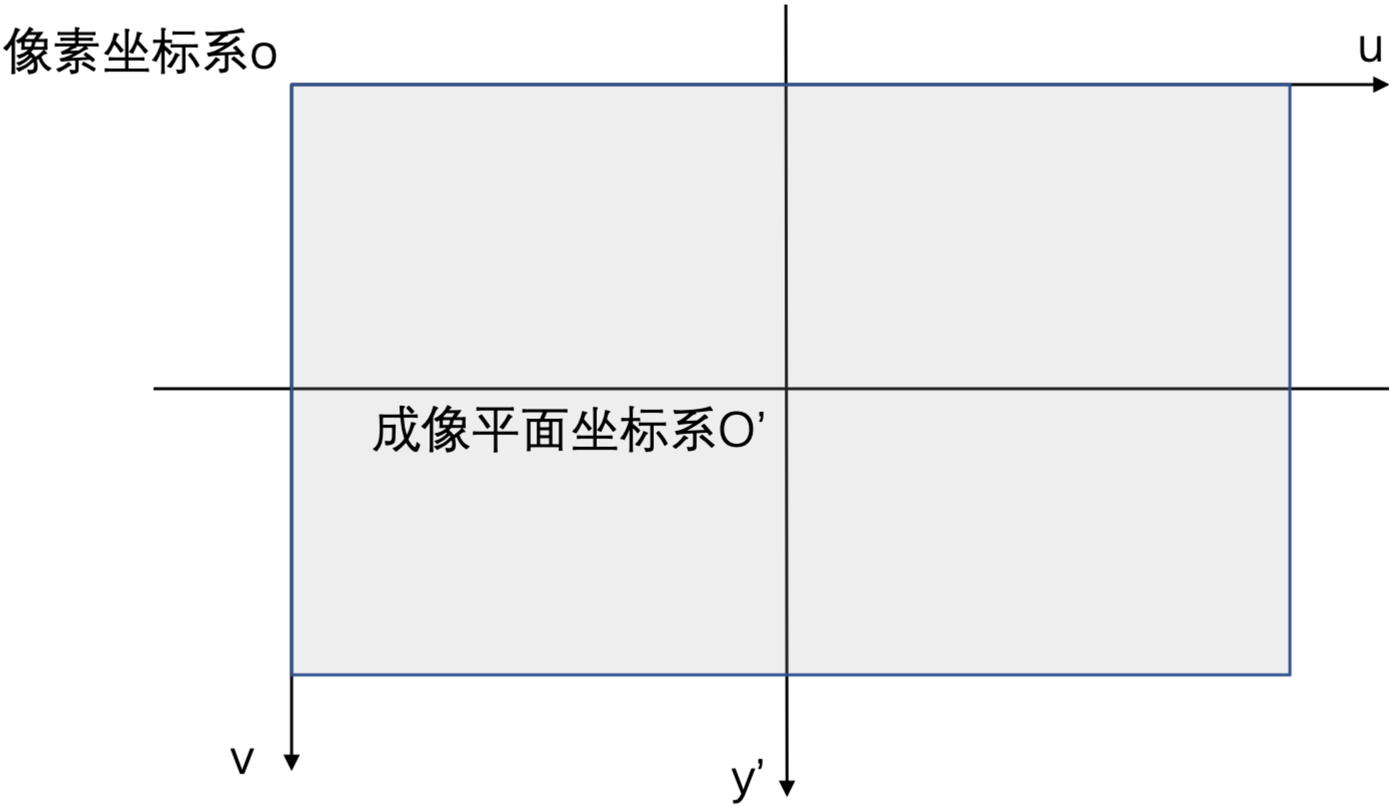
Z f = X X ′ = Y Y ′ (2) \frac{Z}{f}=\frac{X}{X^{\prime}}=\frac{Y}{Y^{\prime}} \tag{2} fZ = X′X = Y ′Y (2)

整理之后，有：

X ′ = f X Z Y ′ = f Y Z (3) \begin{aligned} &X^{\prime}=f \frac{X}{Z} \\ &Y^{\prime}=f \frac{Y}{Z} \end{aligned} \tag{3} X′ = fZXY ′ = fZY (3)

上面公式表示的是空间中的点 P P P 和它在成像平面对应的点 P ′ P′ P ′ 之间的几何关系。当时在相机中，图片是由一个个像素表示的，因此还需要在成像平面上进行采样和量化。下图是成像平面坐标系和像素平面坐标系的图示，两者有以下区别：

- 单位不一样：成像平面坐标系的单位是米，像素坐标系的单位是像素
- 坐标系原点的位置不一样：成像平面坐标系的原点在中心，像素坐标系的原点在左上方



因此，为了将成像平面上的点转换到像素坐标系上，需要进行单位之间转换的缩放和原点的平移。

假设成像平面坐标系为 O ′ − x ′ − y ′ O^{\prime}-x^{\prime}-y^{\prime} O′−x′−y′，像素坐标系为 o − u − v o-u-v o − u − v。假设成像平面坐标系转换到像素坐标系 u u u 轴上缩放了 α \alpha α 倍，转换到像素坐标系 v v v 轴上缩放了 β \beta β 倍，原点平移了 [c x , c y] T \left[c_{x}, c_{y}\right]^{T} [cx, cy]T（单位：像素）。那么 P ′ P' P ′ 的坐标与像素坐标 [u , v] T [u, v]^{T} [u, v]T 的关系为：

{ u = α X ′ + c x v = β Y ′ + c y (4) \left\{\begin{array}{l} u=\alpha X^{\prime}+c_{x} \\ v=\beta Y^{\prime}+c_{y} \end{array}\right. \tag{4} {u = αX′ + cxv = βY ′ + cy(4)

将 (3) 式代入 (4) 中，并将 α f \alpha f αf 记为 f x f_x fx， β f \beta f βf 记为 f y f_y fy，可得：

{ u = f x X Z + c x v = f y Y Z + c y (5) \left\{\begin{array}{l} u=f_{x} \frac{X}{Z}+c_{x} \\ v=f_{y} \frac{Y}{Z}+c_{y} \end{array}\right. \tag{5} {u = fxZX + cxv = fyZY + cy(5)

其中， f f f 的单位是米， α \alpha α 、 β \beta β 的单位是像素/米，所以 f x f_x fx 和 f y f_y fy 的单位为像素。

为了使得公式更加简洁，可以将该式写成矩阵形式，不过左侧需要用到齐次坐标：

(u v 1) = 1 Z (f x 0 c x 0 f y c y 0 0 1) (X Y Z) ≜ 1 Z K P (6) \left(\begin{array}{l} u \\ v \\ 1 \end{array}\right)=\frac{1}{Z}\left(\begin{array}{ccc} f_{x} & 0 & c_{x} \\ 0 & f_{y} & c_{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array}\right) \triangleq \frac{1}{Z} \boldsymbol{K} \boldsymbol{P} \tag{6} □□uv1□□ = Z1 □□fx000fy0cxcy1□□ □□XYZ□□ ≜ Z1KP(6)

按照传统习惯，可以将 Z Z Z 移到等式左边，则有：

Z (u v 1) = (f x 0 c x 0 f y c y 0 0 1) (X Y Z) ≜ K P (7) Z\left(\begin{array}{l} u \\ v \\ 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} f_{x} & 0 & c_{x} \\ 0 & f_{y} & c_{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array}\right) \triangleq \boldsymbol{K} \boldsymbol{P} \tag{7} Z □□uv1□□ = □□fx000fy0cxcy1□□ □□XYZ□□ ≜ KP(7)

上式中，中间的量组成的矩阵 K \boldsymbol{K} K 被称为相机的内参矩阵（Camera Intrinsics）。

参考文献：视觉SLAM十四讲