迭代扩展卡尔曼滤波IEKF

预测

迭代扩展卡尔曼滤波（IEKF）的预测部分和扩展卡尔曼滤波基本相同。直接给出结论：

$$\check{\boldsymbol{x}}_{k} =\boldsymbol{f}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{v}_{k}, \mathbf{0}\right)$$

$$\check{\boldsymbol{P}}_{k} =\boldsymbol{F}_{k-1} \hat{\boldsymbol{P}}_{k-1} \boldsymbol{F}_{k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_{k}^{\prime}$$

更新

非线性观测模型为：

$$\boldsymbol{y}_{k}=g\left(\boldsymbol{x}_{k}, \boldsymbol{n}_{k}\right)$$

对其中任意一个点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}$ 进行线性化，可得：

$$\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_{k}, \boldsymbol{n}_{k}\right) \approx \boldsymbol{y}_{\mathrm{op}, k}+\boldsymbol{G}_{k}\left(\boldsymbol{x}_{k}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}\right)+\boldsymbol{n}_{k}^{\prime}$$

其中：

- $\boldsymbol{y}_{\mathrm{op}, k}=\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}, \mathbf{0}\right)$
- $\boldsymbol{G}_{k}=\left.\frac{\partial \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_{k}, \boldsymbol{n}_{k}\right)}{\partial \boldsymbol{x}_{k}}\right|_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}, \mathbf{0}}$
- $\boldsymbol{n}_{k}^{\prime}=\left.\frac{\partial \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_{k}, \boldsymbol{n}_{k}\right)}{\partial \boldsymbol{n}_{k}}\right|_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}, \mathbf{0}} \boldsymbol{n}_{k}$

任意一个点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}$ 进行线性化，可得：

需要注意的是，观测模型和雅可比矩阵均在 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}$ 处计算。（在EKF中， $\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}=\check{\boldsymbol{x}}_{k}$）

使用上面的线性化模型，我们可以将时刻 k 处的状态和测量的联合概率近似为高斯分布，即：

$$\begin{aligned}& p\left(\boldsymbol{x}_{k}, \boldsymbol{y}_{k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1: k}, \boldsymbol{y}_{0: k-1}\right) \approx \mathcal{N}\left(\left[\begin{array} {c}\boldsymbol{\mu}_{x, k} \\\boldsymbol{\mu}_{y, k}\end{array}\right],\left[\begin{array} {cc}\boldsymbol{\Sigma}_{x x, k} & \boldsymbol{\Sigma}_{x y, k} \\\boldsymbol{\Sigma}_{y x, k} & \boldsymbol{\Sigma}_{y y, k}\end{array}\right]\right) \\=& \mathcal{N}\left(\left[\begin{array} {cc}\check{\boldsymbol{x}}_{k} \\\boldsymbol{y}_{\mathrm{op}, k}+\boldsymbol{G}_{k}\left(\check{\boldsymbol{x}}_{k}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}\right)\end{array}\right],\left[\begin{array} {cc}\check{\boldsymbol{P}}_{k} & \check{\boldsymbol{P}}_{k}\boldsymbol{G}_{k}^{\mathrm{T}} \\\boldsymbol{G}_{k} \check{\boldsymbol{P}}_{k} & \boldsymbol{G}_{k} \check{\boldsymbol{P}}_{k} \boldsymbol{G}_{k}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_{k}^{\prime}\end{array}\right]\right)\end{aligned}$$

如果测量值 $\boldsymbol{y}_{k}$ 已知，我们可以利用高斯推断得到 $\boldsymbol{x}_{k}$ 的条件概率密度（即后验）：

$$\begin{aligned}& p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1: k}, \boldsymbol{y}_{0: k}\right) \\=& \mathcal{N}(\underbrace{\boldsymbol{\mu}_{x, k}+\boldsymbol{\Sigma}_{x y, k} \boldsymbol{\Sigma}_{y y, k}^{-1}\left(\boldsymbol{y}_{k}-\boldsymbol{\mu}_{y, k}\right)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_{k}}, \underbrace{\boldsymbol{\Sigma}_{x x, k}-\boldsymbol{\Sigma}_{x y, k} \boldsymbol{\Sigma}_{y y, k}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{y x, k}}_{\hat{\boldsymbol{P}}_{k}})\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{K}_{k}=\boldsymbol{\Sigma}_{x y,k} \boldsymbol{\Sigma}_{y y,k}^{-1}=\check{\boldsymbol{P}}_{k} \boldsymbol{G}_{k}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{G}_{k} \check{\boldsymbol{P}}_{k} \boldsymbol{G}_{k}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_{k}^{\prime}\right)^{-1}$（卡尔曼增益），则得到：

$$\hat{\boldsymbol{P}}_{k} =\left(\mathbf{1}-\boldsymbol{K}_{k} \boldsymbol{G}_{k}\right) \check{\boldsymbol{P}}_{k}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k} =\check{\boldsymbol{x}}_{k}+\boldsymbol{K}_{k}\left(\boldsymbol{y}_{k}-\boldsymbol{y}_{\mathrm{op}, k}-\boldsymbol{G}_{k}\left(\check{\boldsymbol{x}}_{k}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}\right)\right)$$

可以看出，IEKF中的卡尔曼增益和更新方程与EKF非常相似，唯一的区别在于线性化的工作点。**如果将线性化的工作点设置为预测先验的均值（即 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}=\check{\boldsymbol{x}}_{k}$），那么IEKF就等价于EKF。**

然而，如果我们迭代的重新计算 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k}$， 并且在每一次迭代中将工作点设置为上一次迭代的后验均值（即令 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k}$ ），将得到更好的结果。

在第一次迭代中, 我们令 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}=\check{\boldsymbol{x}}_{k}$，这使得我们能够对更好的估计进行线性化, 从而改进每次迭代的近似程度。在迭代的过程中，若 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}$ 的改变足够小就终止迭代。

注意，卡尔曼增益方程和更新方程收敛之后，协方差方程只需要计算一次。