贝叶斯滤波器

定义以下运动和观测模型：

$$\begin{aligned}&\text{运动方程：}\boldsymbol{x}_{k}=f\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{v}_{k},\boldsymbol{w}_{k}\right), \quad k=1, \cdots, K \\&\text{观测方程：}\boldsymbol{y}_{k}=g\left(\boldsymbol{x}_{k}, \boldsymbol{n}_{k}\right), \quad k=0, \cdots, K\end{aligned}$$

变量和符号定义如下：

- $\boldsymbol{x}_{k} \in \mathbb{R}^{N}$ 表示系统状态
- $\boldsymbol{x}_{0} \in \mathbb{R}^{N}$ 表示初始状态
- $\boldsymbol{v}_{k} \in \mathbb{R}^{N}$ 表示输入
- $\boldsymbol{w}_{k} \in \mathbb{R}^{N}$ 表示过程噪声
- $\boldsymbol{y}_{k} \in \mathbb{R}^{M}$ 表示测量
- $\boldsymbol{n}_{k} \in \mathbb{R}^{M}$ 表示测量噪声
- k 为时间下标，最大值为 K
- 函数 $f(\cdot)$ 为非线性的运动模型
- 函数 $g(\cdot)$ 为非线性的观测模型

贝叶斯滤波仅使用过去以及当前的测量，通过构造一个完整的概率密度函数PDF，来计算当前状态 $\boldsymbol{x}_{k}$ 的置信度：

$$P\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k}\right) \tag{1}$$

其中，$\check{\boldsymbol{x}}_{0}$ 表示 0 时刻系统状态的先验。

贝叶斯滤波器可以用下面公式表示：

$$\begin{aligned}& \underbrace{p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k}\right)}_{\text {后验置信度 }} \\=& \eta \underbrace{p\left(\boldsymbol{y}_{k} \mid \boldsymbol{x}_{k}\right)}_{\text {利用 } \boldsymbol{g}(\cdot) \text { 进行更新 }} \int \underbrace{p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{v}_{k}\right)}_{\text {利用 } \boldsymbol{f}(\cdot) \text { 进行预测 }} \underbrace{p\left(\boldsymbol{x}_{k-1} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k-1}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right)}_{\text {先验置信度 }} \mathrm{d} \boldsymbol{x}_{k-1}\end{aligned}\tag{2}$$

推导过程

对（1）式进行贝叶斯展开，有：

$$\begin{aligned}& p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k}\right) \\&= \frac{p\left(\boldsymbol{x}_{k}, \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k}\right)}{p\left(\check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k}\right) } \\&= \frac{p\left(\boldsymbol{y}_{ k} \mid \boldsymbol{x}_{k}, \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right)p\left(\check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right)}{p\left(\boldsymbol{y}_{ k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) p\left(\check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right)} \\&=\frac{p\left(\boldsymbol{y}_{ k} \mid \boldsymbol{x}_{k}, \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right)}{p\left(\boldsymbol{y}_{ k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) }\end{aligned}\tag{3}$$

由于 $\boldsymbol{y}_k$ 的状态只与 $\boldsymbol{x}_k$ 相关，所以上式可化简为：

$$\begin{aligned}& p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k}\right) \\&= \frac{p\left(\boldsymbol{y}_{ k} \mid \boldsymbol{x}_{k}\right) p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right)}{p\left(\boldsymbol{y}_k\right) }\end{aligned}\tag{4}$$

令 $p^{-1}\left(\boldsymbol{y}_k\right) = \eta$，则有：

$$\begin{aligned}& p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k}\right) = \eta p\left(\boldsymbol{y}_{ k} \mid \boldsymbol{x}_{k}\right) p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) \end{aligned}\tag{5}$$

由**全概率公式**和**贝叶斯公式**有：

$$\begin{aligned}& p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right)\\=&\int p\left(\boldsymbol{x}_{k}, \boldsymbol{x}_{k-1} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) \mathrm{d} \boldsymbol{x}_{k-1} \\=& \int p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \boldsymbol{x}_{k-1}, \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) p\left(\boldsymbol{x}_{k-1} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) \mathrm{d} \boldsymbol{x}_{k-1}\end{aligned}\tag{6}$$

然后，由**一阶马尔可夫性假设**（k 时刻的状态只和 k - 1 时刻状态有关）有：

$$p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \boldsymbol{x}_{k-1}, \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right)=p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \boldsymbol{x}_{k-1},\boldsymbol{v}_{k}\right)\tag{7}$$

并且 k - 1 时刻的状态与 k 时刻的输入无关，即：

$$p\left(\boldsymbol{x}_{k-1} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) = p\left(\boldsymbol{x}_{k-1} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k-1}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) \tag{8}$$

结合 (5)、(6)、(7)、(8) 式，即可得到：

$$\begin{aligned}& p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k}\right) \\=& \eta p\left(\boldsymbol{y}_{ k} \mid \boldsymbol{x}_{k}\right) \int p\left(\boldsymbol{x}_{k} \mid \boldsymbol{x}_{k-1},\boldsymbol{v}_{k}\right)p\left(\boldsymbol{x}_{k-1} \mid \check{\boldsymbol{x}}_{0}, \boldsymbol{v}_{1:k-1}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) \mathrm{d} \boldsymbol{x}_{k-1}\end{aligned}\tag{9}$$

即证。