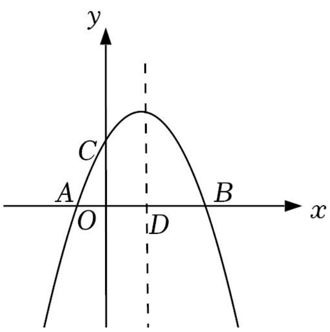
二次函数与等腰三角形问题　　作业卷

1.如图，抛物线 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c(a\neq 0)$与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，抛物线的对称轴交 x 轴于点 D，已知点 A 的坐标为（－1，0），点 C 的坐标为（0，2）.

（1）求抛物线的解析式；

（2）在抛物线的对称轴上是否存在点 P，使△PCD 是以 CD 为腰的等腰三角形？如果存在，请直接写出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由.



【教师备课提示】典例 1 非常简单，利用此题带着学生回忆等腰三角形存在性问题的轨迹：两圆一线，以及在抛物线中的算点坐标的过程.

【思路引领】（1）代入点 A、C 的坐标求出解析式；

（2）利用勾股定理和等腰三角形的性质求点 P 的坐标.

【解答】解：（1）将点 A（－1，0），C（0，2）代入抛物线的解析式得，

$\begin{cases}a-\frac{3}{2}+c=0\\c=2\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\c=2\end{cases}$，

故二次函数的解析式为$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$；

（2）存在.

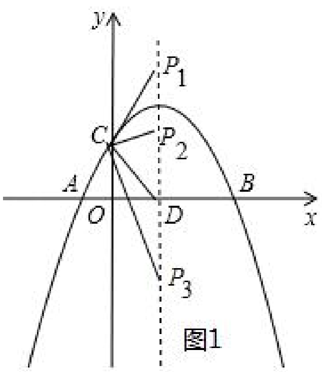


图1

由二次函数的解析式可知，其对称轴为$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{3}{2}}{2\times(-\frac{1}{2})}=\frac{3}{2}$，则点 D 的坐标为$D(\frac{3}{2}$，0)，

可设点 P 坐标为$(\frac{3}{2}，m)$，

由勾股定理得，$CD=\sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{5}{2}$，

由等腰三角形的定义，分以下 2 种情况：

①当 $CP=CD$ 时，则$\sqrt{(\frac{3}{2}-0)^2+(m-2)^2}=\frac{5}{2}$，

解得 $m=4$ 或 $m=0$（不符题意，舍去），

∴点 P 坐标为$(\frac{3}{2}，4)$，

②当 $DP=CD$ 时，$|m|=\frac{5}{2}$，

解得$m=\pm\frac{5}{2}$，

∴点 P 坐标为$(\frac{3}{2}，\frac{5}{2})$或$(\frac{3}{2}，-\frac{5}{2})$.

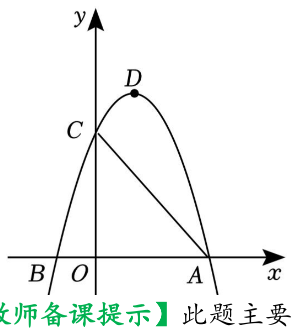
综上，存在满足条件的点 P，点 P 坐标为$(\frac{3}{2}，4)$或$(\frac{3}{2}，\frac{5}{2})$或$(\frac{3}{2}，-\frac{5}{2})$.

【总结提升】本题考查了二次函数的性质、一次函数与坐标轴的交点、二次函数的解析式、等腰三角形的性质、勾股定理，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

2．如图，在平面直角坐标系中，抛物线 C_1：$y=ax^2+bx+3$（a、b 为常数，且 $a\neq0$）与 x 轴交于 A（3，0）、B（－1，0）两点，与 y 轴交于点 C，点 D 为抛物线 C_1 的顶点.

（1）求抛物线 C_1 的函数表达式和点 D 的坐标；

（2）将抛物线 C_1 向右平移 m（$m>0$）个单位得到抛物线 C_2，抛物线 C_2 的顶点为 E，请问在平移过程中，是否存在 m 的值，使得以点 A、C、E 为顶点的三角形是以 AC 为腰的等腰三角形？若存在，请求出所有符合条件的 m 的值；若不存在，请说明理由.



【教师备课提示】此题主要考查点在一般的直线上的等腰三角形存在性问题.

【思路引领】(1）将点 A（3，0）、B（－1，0）代入 $y=ax^2+bx+3$ 可得抛物线 C_1 的函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$；即可得顶点点 D 的坐标为（1，4）；

(2)过点 D 作 x 轴的平行线 l 交 y 轴于点 F，求出 $C(0,3)$，可得 $AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=3\sqrt{2}$，以点 A、C、E 为顶点的三角形是以 AC 为腰的等腰三角形，分 $CE=AC$ 和 $AE=AC$；①

当 $CE=AC$ 时，求出 $CE_1=AC=3\sqrt{2}$，$CF=4-3=1$，得 $E_1F=\sqrt{CE_1{}^2-CF^2}=\sqrt{17}$，故 $DE_1=\sqrt{17}-1$，此时 m 的值为 $\sqrt{17}-1$，②当 $AE=AC$ 时，过点 A 作 $AG\perp l$ 于点 G，则 G（3，4），求出 $AE_2=AC=3\sqrt{2}$，$AG=4$，$E_2G=\sqrt{AE_2{}^2-AG^2}=\sqrt{2}$，得 $DE_2=2-\sqrt{2}$；$AE_3=AC=3\sqrt{2}$，$AG=4$，故 $E_3G=\sqrt{AE_3{}^2-AG^2}=\sqrt{2}$，此时 m 的值为 $2+\sqrt{2}$.

【解答】解：（1）将点 A（3，0）、B（－1，0）代入 $y=ax^2+bx+3$ 得：

$\begin{cases}9a+3b+3=0\\a-b+3=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases}$，

∴抛物线 C_1 的函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$；

∵$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，

∴点 D 的坐标为（1，4）；

（2）存在 m 的值，使得以点 A、C、E 为顶点的三角形是以 AC 为腰的等 腰三角形，理由如下：

过点 D 作 x 轴的平行线 l 交 y 轴于点 F，如图，

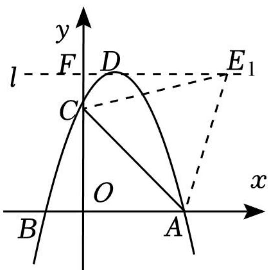


图1

根据题意可得，抛物线 C_2 的顶点 E 在直线 l 上，

∵抛物线 C_1：$y=-x^2+2x+3$ 与 y 轴交于点 C，

∴C（0，3），

∴$OA=OC=3$，

∴$AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=3\sqrt{2}$，

∵D（1，4），

∴F（0，4），

∵直线 1∥x 轴，

∴直线 $l\perp y$ 轴，

∴$\angle DFC=90°$，

∵以点 A、C、E 为顶点的三角形是以 AC 为腰的等腰三角形，

∴需分 $CE=AC$ 和 $AE=AC$；

①当 $CE=AC$ 时，如图 1，点 E 在 E_1 的位置，

在 Rt△E_1FC 中，$CE_1=AC=3\sqrt{2}$，$CF=4-3=1$，

∴$E_1F=\sqrt{{CE_1}^2-CF^2}=\sqrt{17}$，

∴$DE_1=\sqrt{17}-1$，

∴此时 m 的值为 $\sqrt{17}-1$，

②当 $AE=AC$ 时，如图 2，点 E 在 E_2 或 E_3 的位置

过点 A 作 $AG\perp l$ 于点 G，则 G（3，4），

∴$AG=4$，$DG=2$．

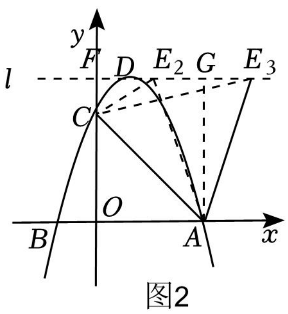


图2

在 Rt△AGE_2 中，$AE_2=AC=3\sqrt{2}$，$AG=4$，

∴$E_2G=\sqrt{{AE_2}^2-AG^2}=\sqrt{2}$，

∴$DE_2=2-\sqrt{2}$；

在 Rt△AGE_3 中，$AE_3=AC=3\sqrt{2}$，$AG=4$，

∴$E_3G=\sqrt{{AE_3}^2-AG^2}=\sqrt{2}$，

∴$DE_3=2+\sqrt{2}$；

∴此时 m 的值为 $2-\sqrt{2}$ 或 $2+\sqrt{2}$．

综上可知，存在 m 的值，使得以点 A、C、E 为顶点的三角形是以 AC 为腰的等 腰三角形，m 的值为$\sqrt{17}-1$ 或 $2-\sqrt{2}$或 $2+\sqrt{2}$．

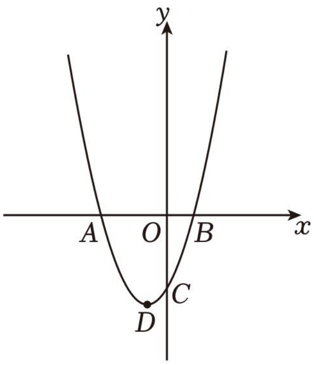
【总结提升】本题考查二次函数综合应用，涉及待定系数法，等腰三角形的性质及应用，勾股定理等知识，解题的关键是分类讨论思想的应用．

3．（2024•东明县一模）已知二次函数 $y=ax^2+bx-3a$ 经过点 B（1，0）、C（0，－3），与 x 轴交于另一点 A，抛物线的顶点为 D．

（1）求此二次函数解析式；

（2）连接 DC、AC、DA，求证：$\triangle ACD$ 是直角三角形；

（3）在 x 轴是否存在一点 P，使得$\triangle POD$ 为等腰三角形？若存在，请直接写出符合条件的点 P 的坐标．



【思路引领】（1）将 B（1，0）、C（0，﹣3），代入二次函数 $y=ax^2+bx-3a$，求得 a、b 的值即可确定二次函数的解析式；

（2）分别求得线段 AC、CD、AD 的长，利用勾股定理的逆定理进行判定即可；

（3）分 $OD=OP$，$DO=PD$，$OP=DP$ 三种情况讨论．根据等腰三角形的性质，建立方程，解方程，即可求解．

【解答】（1）解：∵二次函数 $y=ax^2+bx-3a$ 经过点 B（1，0）、C（0，﹣3），

$\therefore\begin{cases}a+b-3a=0\\-3a=-3\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为 $y=x^2+2x-3$；

（2）证明：由 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$ 得，D 点坐标为（﹣1，﹣4），

∵$y=x^2+2x-3$ 与 x 轴交于另一点 A，

∴令 $y=0$，$x^2+2x-3=0$，解得 $x=1$ 或﹣3，

∴A（﹣3，0），B（1，0），

$\therefore CD=\sqrt{(0+1)^2+(-3+4)^2}=\sqrt{2}$，

$AC=\sqrt{(0+3)^2+(-3-0)^2}=3\sqrt{2}$，

$AD=\sqrt{(-3+1)^2+(0+4)^2}=2\sqrt{5}$，

$\because CD^2+AC^2=(\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2=20$，$AD^2=(2\sqrt{5})^2=20$，

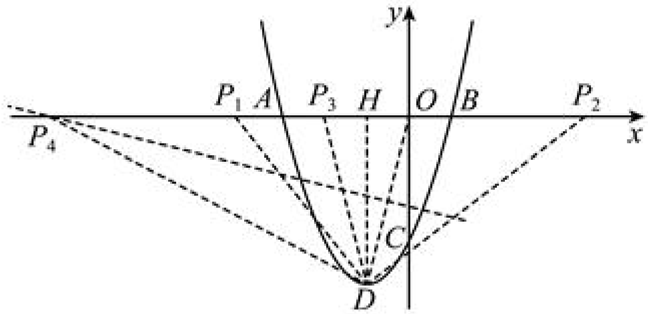
$\therefore CD^2+AC^2=AD^2$，

∴$\triangle ACD$ 是直角三角形；

（3）解：∵D 点坐标为（﹣1，﹣4），点 O（0，0），

∴$OD=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$，

如图，当$OD=OP=\sqrt{17}$时，则点$P(\sqrt{17}，0)$或$(-\sqrt{17}，0)$；



当 $DO=PD$ 时，过点 D 作 $DH\perp x$ 轴，

∵D（﹣1，﹣4），

∴$OH=PH=1$，$DH=4$，

∴点 P（﹣2，0）；

当 $OP=DP$ 时，

∵$DP^2=DH^2+HP^2$，

∴$OP^2=16+（OP﹣1）^2$，

∴$OP=\frac{17}{2}$，

∴点$P(-\frac{17}{2}，0)$，

综上所述：点 P 坐标为$(\sqrt{17}，0)$或$(-\sqrt{17}，0)$或（﹣2，0）或$(-\frac{17}{2}，0)$．

【总结提升】本题考查了二次函数图象的性质，等腰三角形的性质，勾股定理及其逆定理的应用，利用分类讨论的数学思想是解决问题的关键．

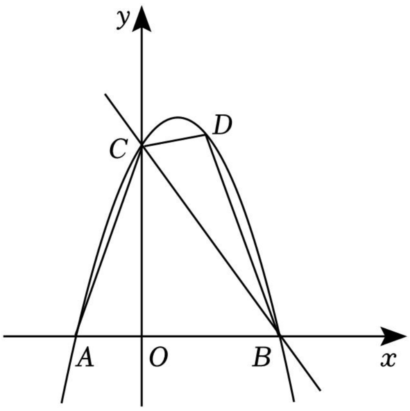
4．（2024•运城模拟）综合与探究

如图，抛物线$y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+6$ 与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C，D 是第一象限抛物线上的一个动点，若点 D 的横坐标为 m，连接 AC，BC，BD，CD．

（1）求 A，B，C 三点的坐标，并直接写出直线 BC 的函数表达式．

（2）当四边形 $ACDB$ 的面积有最大值时，求出 m 的值．

（3）在（2）的条件下，在 x 轴上是否存在一点 M，使△ADM 是等腰三角形？若存在，请直接写出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．



【思路引领】（1）解方程得到 $x=-2$ 或 $x=4$，求得 A（﹣2，0），B（4，0），C（0，6）；设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$，把（2）B（4，0），C（0，6）代入即可得到直线 BC 的解析式为 $y=-\frac{3}{2}x+6$；

（2）如图，过 D 作 x 轴的垂线交 BC 于 P，设 $D(m,-\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{2}m+6)$，则 $P(m,-\frac{3}{2}m+6)$，根据三角形的面积公式得到四边形 $ACDB$ 的面积$=-\frac{3}{2}m^2+6m+18$，根据二次函数的性质即可得到结论；

（3）根据勾股定理得到 $AD=\sqrt{(2+2)^2+6^2}=2\sqrt{13}$，设 M（a，0），求得 $AM=|a-2|$，当 $AD=AM=2\sqrt{13}$，得到 M（$2+2\sqrt{13}$，0）或 M（$2-2\sqrt{13}$，0）；当 $AM=DM$ 时，则点 M 在 AD 的垂直平分线上，作 AD 的垂直平分线交 x 轴于 M，交 AD 于 H，则 $AH=\frac{1}{2}AD=\sqrt{13}$，过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E，根据相似三角形的性质得到 M（$\frac{9}{2}$，0）.

【解答】解：（1）令 $y=0$，得 $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+6=0$，

解得 $x=-2$ 或 $x=4$，

∴A（﹣2，0），B（4，0），

令 $x=0$，得 $y=6$，

∴C（0，6）；

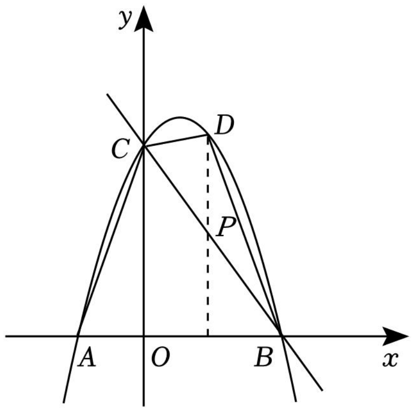
设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$，

把（2）B（4，0），C（0，6）代入得 $\begin{cases}4k+b=0\\b=6\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}k=-\frac{3}{2},\\b=6\end{cases}$

∴直线 BC 的解析式为 $y=-\frac{3}{2}x+6$；

（2）如图，过 D 作 x 轴的垂线交 BC 于 P，



设 D（m，$-\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{2}m+6$），则 P（m，$-\frac{3}{2}m+6$），

∴四边形 $ACDB$ 的面积 $=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}AB\cdot OC+\frac{1}{2}PD\cdot OB=\frac{1}{2}\times 6\times 6+\frac{1}{2}[-\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{2}m+6-(-\frac{3}{2}m+6)]\times 4=-\frac{3}{2}m^2+6m+18$，

∵$-\frac{3}{2}<0$，

∴当 $m=-\frac{6}{2\times(-\frac{3}{2})}=2$ 时，四边形 $ACDB$ 的面积最大，

∴当四边形 $ACDB$ 的面积最大时，m 的值为 2；

（3）∵$m=2$，

∴D（2，6），

∴$AD=\sqrt{(2+2)^2+6^2}=2\sqrt{13}$，

设 M（a，0），

∴$AM=|a-2|$，

当 $AD=AM=2\sqrt{13}$，

∴$|a-2|=2\sqrt{13}$，

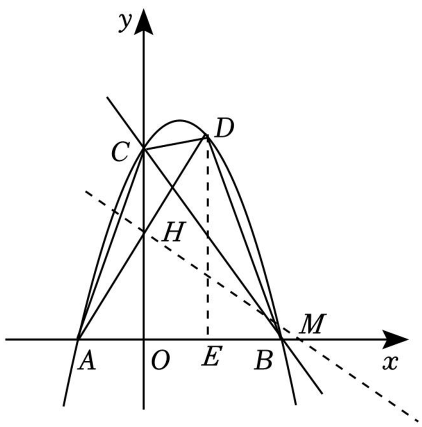
解得 $a=2+2\sqrt{13}$ 或 $a=2-2\sqrt{13}$，

∴M（$2+2\sqrt{13}$，0）或 M（$2-2\sqrt{13}$，0）；

当 $AM=DM$ 时，则点 M 在 AD 的垂直平分线上，

作 AD 的垂直平分线交 x 轴于 M，交 AD 于 H，则 $AH=\frac{1}{2}AD=\sqrt{13}$，

过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E，



∴$\angle AHM=\angle AED=90^\circ$，$OE=2$，$DE=6$，

∵$\angle DAE=\angle MAH$，

∴$\triangle ADE\backsim\triangle AMH$，

∴$\frac{AD}{AM}=\frac{AE}{AH}$，

∴$\frac{2\sqrt{13}}{AM}=\frac{4}{\sqrt{13}}$，

∴$AM=\frac{13}{2}$，

∴$OM=\frac{13}{2}-2=\frac{9}{2}$，

∴M（$\frac{9}{2}$，0），

综上所述，M（$2+2\sqrt{13}$，0）或（$2-2\sqrt{13}$，0）或（$\frac{9}{2}$，0）.

【总结提升】本题是二次函数综合题，考查了全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，待定系数法求函数的解析式，等腰三角形的性质，正确地作出辅助线是解题的关键.

5.（2024•海南区一模）如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=-3x-3$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 C．抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 A、C 两点，且与 x 轴交于另一点 B（点 B 在点 A 右侧）.

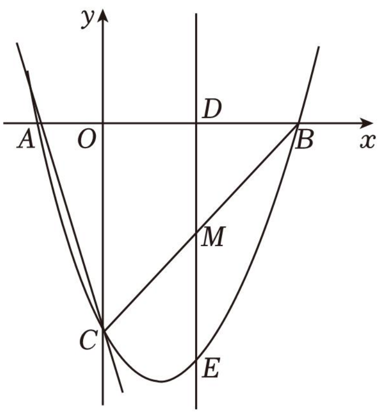
（1）求抛物线的解析式；

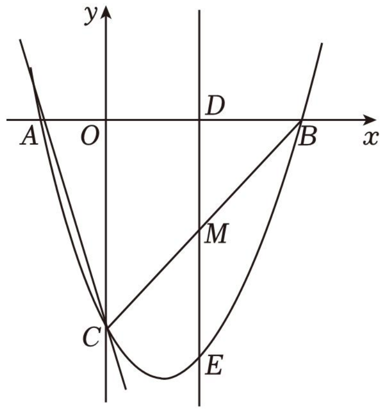
（2）设该抛物线的顶点为点 H，求△BCH 的面积；

（3）若点 M 是线段 BC 上一动点，过点 M 的直线 ED 平行 y 轴交 x 轴于点 D，交抛物线于点 E，求 ME 长的最大值及点 M 的坐标；

（4）在（3）的条件下：当 ME 取得最大值时，在 x 轴上是否存在这样的点 P，使得以点

M、点 B、点 P 为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，请直接写出所有点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．





备用图

【思路引领】（1）由直线 $y=-3x-3$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 C，得 $A(-1,0)$、$C(0,-3)$，将 $A(-1,0)$、$C(0,-3)$ 代入 $y=x^2+bx+c$，列方程组求 b、c 的值；

（2）设抛物线的对称轴交 BC 于点 F，求直线 BC 的解析式及抛物线的顶点坐标，再求出点 F 的坐标，推导出 $S_{\triangle BCH}=\frac{1}{2}FH\bullet OB$，可求出△$BCH$ 的面积；

（3）设点 E 的横坐标为 x，用含 x 的代数式表示点 E、点 M 的坐标及线段 ME 的长，再根据二次函数的性质求出线段 ME 的最大值及点 M 的坐标；

（4）在 x 轴上存在点 P，使以点 M、B、P 为顶点的三角形是等腰三角形．由（3）得 $D(\frac{3}{2},0)$，$M(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$，由勾股定理求出 $OM=BM=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，由等腰三角形 PBM 的腰长为 $\frac{3}{2}$或$\frac{3\sqrt{2}}{2}$求出 OP 的长即可得到点 P 的坐标．

【解答】解：（1）∵直线 $y=-3x-3$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、C，如图 1，

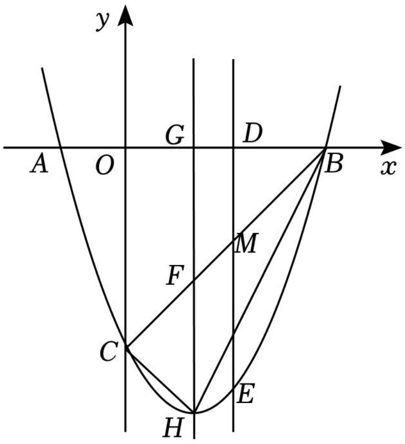


图1

∴$A(-1,0)$，$C(0,-3)$，

∵抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 A（﹣1，0），C（0，﹣3），代入得：

$\begin{cases}1-b+c=0\\c=-3\end{cases}$，

解得$\begin{cases}b=-2\\c=-3\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-3$；

（2）设抛物线的对称轴交 BC 于点 F，交 x 轴于点 G．如图 2，

设直线 BC 的解析式为 $y=kx-3$，则 $3k-3=0$，

解得 $k=1$，

∴$y=x-3$；

∵$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

∴抛物线的顶点 H（1，﹣4），

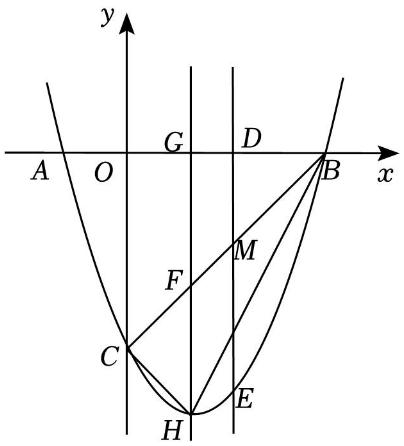


图2

当 $x=1$ 时，$y=1-3=-2$，

∴F（1，﹣2），

∴$FH=-2-(-4)=2$，

∴$S_{\triangle BCH}=\frac{1}{2}FH\bullet OG+\frac{1}{2}FH\bullet BG=\frac{1}{2}FH\bullet OB=\frac{1}{2}\times2\times3=3$；

（3）设 E（x，x^2-2x-3）（$0<x<3$），则 M（x，$x-3$），

∴$ME=x-3-(x^2-2x-3)=-x^2+3x=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$，

∴当 $x=\frac{3}{2}$时，$ME_{最大}=\frac{9}{4}$，此时 M（$\frac{3}{2}$，$-\frac{3}{2}$）；

（4）存在．理由如下：

如图 3，由（2）得，当 ME 最大时，则 D（$\frac{3}{2}$，0），M（$\frac{3}{2}$，$-\frac{3}{2}$），

$\therefore DO=DB=DM=\frac{3}{2}$;

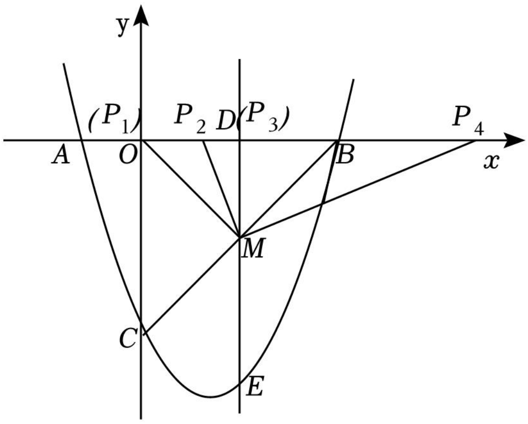


图3

$\because \angle BDM=90°$，

$\therefore OM=BM=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

点 P_1、P_2、P_3、P_4 在 x 轴上，

当点 P_1 与原点 O 重合时，则 $P_1M=BM=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$P_1$（0，0）；

当 $BP_2=BM=\frac{3\sqrt{2}}{2}$时，则 $OP_2=3-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore P_2$（$\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$，0）；

当点 P_3 与点 D 重合时，则 $P_3M=P_3B=\frac{3}{2}$，P_3（$\frac{3}{2}$，0）；

当 $BP_4=BM=\frac{3\sqrt{2}}{2}$时，则 $OP_4=3+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore P_4$（$\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$，0）.

综上所述，P_1（0，0），P_2（$\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$，0），P_3（$\frac{3}{2}$，0），P_4（$\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$，0）.

【总结提升】此题属于二次函数综合题，考查二次函数的图象与性质、等腰三角形的判定、用待定系数法求函数解析式、求抛物线的顶点坐标以及勾股定理、二次根式的化简等知识和方法，解答本题的关键是注意分类讨论的使用，求出所有符合条件的点 P 的坐标.