∴每平方米种植 5 株时,能获得最大的产量,最大产量为 12.5 千克.

【解】(1)500 【点拨】当 $200\leq x\leq 600$ 时,设甲种蔬菜种植成本 y(单位:元/m^2)与其种植面积x(单位:m^2)的函数关系式为 $y=kx+b$.

把(200,20),(600,40)代入,得

$\begin{cases}200k+b=20,\\600k+b=40,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{20},\\b=10,\end{cases}$

$\therefore y=\frac{1}{20}x+10$.

当 $600<x\leq 700$ 时,$y=40$.

$\therefore$ 当 $y=35$ 时,$35=\frac{1}{20}x+10$,

解得 $x=500$.

(2)当 $200\leq x\leq 600$ 时,$W=x\left(\frac{1}{20}x+10\right)+50(1\ 000-x)=\frac{1}{20}(x-400)^2+42\ 000$.

$\because \frac{1}{20}>0$,

$\therefore$ 抛物线开口向上,

$\therefore$ 当 $x=400$ 时,W有最小值,最小值为 42 000,

此时,$1\ 000-x=1\ 000-400=600$.

当 $600\leq x\leq 700$ 时,

$W=40x+50(1\ 000-x)=-10x+50\ 000$.

$\because -10<0$,

$\therefore$ 当 $x=700$ 时,W有最小值,最小值为 $-10\times 700+50\ 000=43\ 000$,

$\therefore 42\ 000<43\ 000$,

$\therefore$ 当甲种蔬菜的种植面积为 400 m^2,乙种蔬菜的种植面积为 600 m^2 时,W最小.

(3)由(2)可知,甲、乙两种蔬菜总种植成本为 42 000 元,且乙种蔬菜的种植成本为 $50\times 600=30\ 000$(元),则甲种蔬菜的种植成本为 $42\ 000-30\ 000=12\ 000$(元).

由题意,得 $12\ 000(1-10\%)^2+30\ 000(1-a\%)^2=28\ 920$.

设 $a\%=m$,

整理,得$(1-m)^2=0.64$,

解得 $m_1=0.2=20\%$,$m_2=1.8$(不符合题意,舍去),

$\therefore a\%=20\%$,$\therefore a=20$.

答:当 a 为 20 时,2025 年的总种植成本为28 920 元.

第 4 课时 实际应用中的最值

1.【解】(1)当 $22\leq x\leq 30$ 时,设函数表达式为 $y=kx+b$,

将(22,48),(30,40)代入表达式得,

$\begin{cases}22k+b=48,\\30k+b=40,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=70\end{cases}$

$\therefore$ 函数表达式为 $y=-x+70$;

当 $30<x\leq 45$ 时,

设函数表达式为 $y=mx+n$,

将(30,40),(45,10)代入表达式,得

$\begin{cases}30m+n=40,\\45m+n=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-2,\\n=100,\end{cases}$

$\therefore$ 函数表达式为 $y=-2x+100$.

综上,y 关于 x 的函数表达式为

$y=\begin{cases}-x+70(22\leq x\leq 30),\\-2x+100(30<x\leq 45).\end{cases}$

(2)设利润为 w 元,当 $22\leq x\leq 30$ 时,

$w=(x-20)(-x+70)=-x^2+90x-1\ 400=-(x-45)^2+625$.

$\because$ 在 $22\leq x\leq 30$ 范围内,w 随着 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x=30$ 时,w 取得最大值为 400;

当 $30<x\leq 45$ 时,$w=(x-20)(-2x+100)=-2x^2+140x-2\ 000=-2(x-35)^2+450$,

当 $x=35$ 时,w 取得最大值为 450.

$\because 450>400$,

$\therefore$ 当销售价格为 35 元/kg 时,利润最大为 450 元.

2.【解】(1)设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$.

依题意得$\begin{cases}840=160k+b,\\960=190k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=4,\\b=200.\end{cases}$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数表达式为 $y=4x+200$.

(2)设老张明年种植该作物的总利润为 w 元.

依题意得 $w=[2\ 160-(4x+200)+120]\cdot x=-4x^2+2\ 080x=-4(x-260)^2+270\ 400$.

$\because -4<0$,$\therefore$ 当 $x<260$ 时,w 随 x 的增大而增大.

由题意知 $x\leq 240$,

$\therefore$ 当 $x=240$ 时,w 最大,最大值为 $-4\times(240-260)^2+270\ 400=268\ 800$.

答:当种植面积为 240 亩时总利润最大,最大利润是 268 800 元.

点方法 在实际问题中求最值时,解题思路是列二次函数表达式,用配方法把函数表达式化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式求函数的最值,或者利用函数的增减性求函数的最值.

3.【解】(1)由题图可知二次函数图象经过原点.

设二次函数表达式为 $s=at^2+bt$,一次函数表达式为 $v=kt+c$.

$\because$ 一次函数图象经过点(0,16),(8,8),

$\therefore \begin{cases}8=8k+c,\\16=c,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\c=16.\end{cases}$

$\therefore$ 一次函数表达式为 $v=-t+16$.

令 $v=9$,则 $t=7$.

$\because$ 二次函数图象经过点(2,30),(4,56),

$\therefore \begin{cases}4a+2b=30,\\16a+4b=56,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=16.\end{cases}$

$\therefore$ 二次函数表达式为 $s=-\frac{1}{2}t^2+16t$.

令 $t=7$,则 $s=-\frac{49}{2}+16\times 7=87.5$.

答:当甲车减速至 9 m/s 时,它行驶的路程是 87.5 m.

(2)设 t s 时两车相距 w m,则 $w=20+10t-\left(-\frac{1}{2}t^2+16t\right)=\frac{1}{2}(t-6)^2+2$,

$\because \frac{1}{2}>0$,$\therefore$ 当 $t=6$ 时,w 有最小值,最小值为 2,

$\therefore$ 6 s 时两车相距最近,最近距离是 2 m.

答:6 s 时两车相距最近,最近距离是 2 m.

4.【解】(1)由题易知抛物线的顶点坐标为(8,8),则抛物线对应的函数表达式可设为 $y=a(x-8)^2+8(a\neq 0)$.

将点 $O(0,0)$ 的坐标代入 $y=a(x-8)^2+8$ 中,得 $0=64a+8$,解得 $a=-\frac{1}{8}$.

故这条抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{8}(x-8)^2+8$ $(0\leq x\leq 16)$.

(2)$\because$ 隧道下的公路是双向行车道,正中间是一条宽 1 米的隔离带,

$\therefore$ 每个车道的宽为 7.5 米.

假设车在左车道,并沿着隔离带边缘行驶,车远离隔离带一侧距离该车道外侧边缘的距离为 $7.5-3.5=4$(米).

当 $x=4$ 时,$y=-\frac{1}{8}(x-8)^2+8=6$,

$\because 5.8<6$,$\therefore$ 其中的一条行车道能行驶宽 3.5 米、高 5.8 米的特种车辆.

(3)易知点 A,D 关于抛物线的对称轴对称,设 $AD=2m$ $(m>0)$米,

则易得 A 的横坐标为 $8-m$,纵坐标为 $-\frac{1}{8}(8-m-8)^2+8=8-\frac{1}{8}m^2$,

即 $AB=\left(8-\frac{1}{8}m^2\right)$米$=CD$.

设三根木杆的长度和为 w 米,

则 $w=-\frac{1}{4}m^2+2m+16=-\frac{1}{4}(m-4)^2+20$.

$\because -\frac{1}{4}<0$,$\therefore$ 当 $m=4$ 时,w 有最大值,最大值为 20.

$\therefore AB$,AD,DC 的长度之和的最大值为 20 米.

集训课堂

练素养

1.【解】(1)根据题意可知点 F 的坐标为 $(6,-1.5)$,可设桥拱所在抛物线的函数表达式为 $y_1=a_1x^2$.

将点 $F(6,-1.5)$ 的坐标代入 $y_1=a_1x^2$,得 $-1.5=36a_1$,

解得 $a_1=-\frac{1}{24}$,$\therefore y_1=-\frac{1}{24}x^2$.

当 $x=12$ 时,$y_1=-\frac{1}{24}\times12^2=-6$.

答:桥拱顶部 O 与水面之间的距离为 6 m.

(2)①由题意可知右边钢缆所在抛物线的顶点坐标为 $(6,1)$,设其表达式为 $y_2=a_2(x-6)^2+1$.

将点 $H(0,4)$ 的坐标代入 $y_2=a_2(x-6)^2+1$,

得 $4=a_2(0-6)^2+1$,解得 $a_2=\frac{1}{12}$.

$\therefore$ 右边钢缆所在抛物线的函数表达式为 $y_2=\frac{1}{12}(x-6)^2+1$.

易知左边钢缆所在抛物线的函数表达式为 $y_3=\frac{1}{12}(x+6)^2+1$.

②设彩带的长度为 L m,则 $L=y_2-y_1=\frac{1}{12}(x-6)^2+1-\left(-\frac{1}{24}x^2\right)=\frac{1}{8}x^2-x+4=\frac{1}{8}(x-4)^2+2$,

$\because \frac{1}{8}>0$,

$\therefore$ 当 $x=4$ 时,$L_{最小}=2$.

答:彩带长度的最小值是 2 m.

2.【解】(1)$\because 8-6=2$,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(2,3)$,

设抛物线的表达式为 $y=a(x-2)^2+3$,

把点 $A(8,0)$ 的坐标代入得 $36a+3=0$,

解得 $a=-\frac{1}{12}$,

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{12}(x-2)^2+3=-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$;

当 $x=0$ 时,$y=\frac{8}{3}>2.44$,

$\therefore$ 球不能射进球门.

(2)设小明带球向正后方移动 m m,则移动后的抛物线表达式为 $y=-\frac{1}{12}(x-2-m)^2+3$,

把点 $(0,2.25)$ 的坐标代入得 $2.25=-\frac{1}{12}(0-2-m)^2+3$,

解得 $m=-5$(舍去)或 $m=1$,

$\therefore$ 当时他应该带球向正后方移动 1 m 射门,才能让足球经过点 O 正上方 2.25 m 处.

3.【解】(1)设垂直于墙的边长为 x 米,围成的矩形花园的面积为 S 平方米,则平行于墙的边长为 $(120-3x)$ 米,

根据题意得 $S=x(120-3x)=-3x^2+120x=-3(x-20)^2+1\,200$,

$\because -3<0$,

$\therefore$ 当 $x=20$ 时,S 取最大值 1 200,

此时 $120-3x=120-3\times20=60$,

$\therefore$ 当垂直于墙的边长为20 米,平行于墙的边长为60 米时,花园面积最大,为 1 200 平方米;

(2)设购买牡丹 m 株,则购买芍药 $1\,200\times2-m=(2\,400-m)$ 株,

$\because$ 学校计划购买费用不超过 5 万元,

$\therefore 25m+15(2\,400-m)\leqslant50\,000$,

解得 $m\leqslant1\,400$,

$\therefore$ 最多可以购买 1 400 株牡丹.

4.【解】(1)根据题意,得

$w_1=(8-m)x-30(0\leqslant x\leqslant500)$,

$w_2=(20-12)x-(80+0.01x^2)$

$=-0.01x^2+8x-80(0\leqslant x\leqslant300)$.

(2)$\because 8-m>0$,$\therefore w_1$ 随 x 的增大而增大.

又 $0\leqslant x\leqslant500$,

$\therefore$ 当 $x=500$ 时,w_1 有最大值,即 $w_{1最大}=-500m+3\,970$(元).

$\because w_2=-0.01x^2+8x-80=-0.01(x-400)^2+1\,520$.

又$\because -0.01<0$,对称轴为直线 $x=400$,

$\therefore$ 当 $0\leqslant x\leqslant300$ 时,w_2 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x=300$ 时,

$w_{2最大}=-0.01\times(300-400)^2+1\,520=1\,420$(元).

(3)①若 $w_{1最大}=w_{2最大}$,

即 $-500m+3\,970=1\,420$,解得 $m=5.1$;

②若 $w_{1最大}>w_{2最大}$,

即 $-500m+3\,970>1\,420$,解得 $m<5.1$;

③若 $w_{1最大}<w_{2最大}$,

即 $-500m+3\,970<1\,420$,解得 $m>5.1$.

又 $4\leqslant m\leqslant6$,综上可得,为获得最大日利润:

当 $m=5.1$ 时,选择 A,B 产品产销均可;

当 $4\leqslant m<5.1$ 时,选择 A 种产品产销;

当 $5.1<m\leqslant6$ 时,选择 B 种产品产销.

答:$m=5.1$ 时,工厂选择 A 或 B 产品产销日利润一样大;当 $4\leqslant m<5.1$ 时,工厂选择 A 产品产销日利润最大;当 $5.1<m\leqslant8$ 时,工厂选择 B 产品产销日利润最大.

5.【解】(1)①由题意得 $A(2,2)$ 是上边缘抛物线的顶点.

$\therefore$ 设上边缘抛物线的函数表达式为 $y=a(x-2)^2+2$.

又$\because$ 抛物线过点$(0,1.5)$，

$\therefore 1.5=4a+2$，解得 $a=-\frac{1}{8}$.

$\therefore$ 上边缘抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{8}(x-2)^2+2$.

当 $y=0$ 时，$0=-\frac{1}{8}(x-2)^2+2$，

解得 $x_1=6$，$x_2=-2$(舍去).

$\therefore$ 喷出水的最大射程 OC 为 6 m.

②$\because$ 上边缘抛物线的对称轴为直线 $x=2$，

$\therefore$ 点$(0,1.5)$关于直线 $x=2$ 的对称点为$(4,1.5)$.

$\therefore$ 下边缘抛物线是由上边缘抛物线向左平移 4 m 得到的.

$\therefore$ 点 B 的坐标为$(2,0)$.

③$\because EF=0.5$ m，$\therefore$ 点 F 的纵坐标为 0.5.

将 $y=0.5$ 代入上边缘抛物线的函数表达式，

得 $0.5=-\frac{1}{8}(x-2)^2+2$，解得 $x=2\pm2\sqrt{3}$.

$\because x>0$，$\therefore x=2+2\sqrt{3}$.

$\because$ 当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $2\leqslant x\leqslant6$ 时，要使 $y\geqslant0.5$，则 $2\leqslant x\leqslant2+2\sqrt{3}$.

$\because$ 当 $0\leqslant x<2$ 时，y 随 x 的增大而增大，且 $x=0$ 时，$y=1.5>0.5$，

$\therefore$ 当 $0\leqslant x\leqslant6$ 时，要使 $y\geqslant0.5$，则 $0\leqslant x\leqslant2+2\sqrt{3}$.

$\because DE=3$ m，要使灌溉车行驶时喷出的水能浇灌到整个绿化带，

$\therefore d$ 的最大值为 $2+2\sqrt{3}-3=2\sqrt{3}-1$.

再看下边缘抛物线，喷出的水能浇灌到绿化带底部的条件是 $OB\leqslant d$，

$\therefore d$ 的最小值为 2.

综上所述，d 的取值范围是 $2\leqslant d\leqslant2\sqrt{3}-1$.

(2)h 的最小值为$\frac{65}{32}$.

测素质

一、1. **C**

2. **C** 【点拨】$y=-x^2+100x+28\,400=-(x^2-100x+50^2-50^2)+28\,400=-(x-50)^2+30\,900$，$\therefore$ 当 $x=50$ 时，所获营业额最大.

3. **D** 【点拨】当 $y=1$ 时，$x_1=0$，$x_2=2$，

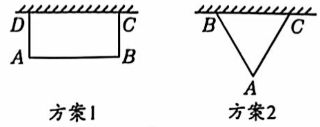
$\because$ 当 $a\leqslant x\leqslant a+1$ 时，函数值有最小值 1，

$\therefore a=2$ 或 $a+1=0$，$\therefore a=2$ 或 $a=-1$.

4. **B** 【点拨】设一条直角边长为 x cm，面积为 y cm^2，则另一条直角边长为$(20-x)$ cm，$\therefore y=\frac{1}{2}x(20-x)=-\frac{1}{2}(x-10)^2+50$，$\therefore$ 这个直角三角形的最大面积为 50 cm^2.

5. **B** 【点拨】在几何动态问题中建立二次函数模型，然后利用二次函数的性质求最值.

6. **C** 【点拨】如图，方案1：设 $AD=x$ 米，则 $AB=(8-2x)$米，则菜园面积



为 $x(8-2x)=-2x^2+8x=-2(x-2)^2+8$(平方米)，当 $x=2$ 时，此时菜园面积最大为 8 平方米；

方案2：当 $\angle BAC=90°$ 时，菜园面积最大为 $\frac{1}{2}\times4\times4=8$(平方米)；

方案3：易得半圆形的半径为$\frac{8}{\pi}$米，

$\therefore$ 此时菜园面积为$\frac{\pi\times\left(\frac{8}{\pi}\right)^2}{2}=\frac{32}{\pi}$(平方米).

$\because \frac{32}{\pi}>8$，$\therefore$ 最佳方案是方案 3.

二、7. 16 【点拨】$\because s=16t-4t^2=-4(t-2)^2+16$，

$\therefore$ 当 $t=2$ 时，汽车停下来，滑行了 16 m.

8. $(4\sqrt{2}-4)$ 【点拨】以拱顶为原点建立平面直角坐标系，设抛物线的表达式为 $y=ax^2$，将$(2,-2)$代入 $y=ax^2$，可得 $a=-\frac{1}{2}$. 所以 $y=-\frac{1}{2}x^2$. 当 $y=-4$ 时，$x=\pm2\sqrt{2}$. 故水面宽度增加$(4\sqrt{2}-4)$m.

点方法 先建立适当的直角坐标系，再利用待定系数法求出抛物线的表达式，进而即可求出水面宽度.

9. $0\leqslant w\leqslant5$；$5\leqslant w\leqslant20$ 【点拨】$\because$ 物体运动的最高点离地面 20 米，物体从发射到落地的运动时间为 3 秒，

$\therefore$ 抛物线 $h=-5t^2+mt+n$ 的顶点的纵坐标为 20，且经过点$(3,0)$，$\therefore \begin{cases}\frac{4\times(-5)n-m^2}{4\times(-5)}=20,\\ -5\times3^2+3m+n=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m_1=10,\\ n_1=15,\end{cases}\begin{cases}m_2=50,\\ n_2=-105\end{cases}$(不合题意，舍去).

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $h=-5t^2+10t+15$.

$\because h=-5t^2+10t+15=-5(t-1)^2+20$，

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为$(1,20)$.

$\because 20-15=5$，

$\therefore$ 当 $0\leqslant t\leqslant1$ 时，w 的取值范围是 $0\leqslant w\leqslant5$.

当 $t=2$ 时，$h=15$；当 $t=3$ 时，$h=0$.

$\because 20-15=5$，$20-0=20$，

$\therefore$ 当 $2\leqslant t\leqslant3$ 时，w 的取值范围是 $5\leqslant w\leqslant20$.

10. 7 【点拨】将原图逆时针旋转 90°，以正方形 $ABCD$ 的中心为原点，平行于 BE 的直线为 y 轴建立直角坐标系，求出曲线 CF 所在抛物线的表达式，问题便迎刃而解.

三、11. 【解】(1)设这个二次函数的表达式是 $y=a(x-$