二次函数综合二

一、解答题：本题共 8 小题，共 64 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

1. (本小题 8 分)

定义：对于二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，我们称函数$y=\begin{cases}-ax^2+bx-c(x\leq\frac{b}{2})\\ax^2+bx+c(x>\frac{b}{2})\end{cases}$为它的相关函数.

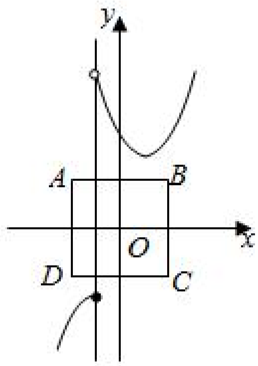
(1)已知二次函数$y=-2x^2+x+3$，

①直接写出它的相关函数的解析式；

②设它的相关函数的图象与x轴交于点A、B(点A在点B的左边)，与y轴交于点C，求$\triangle ABC$的面积；

(2)已知二次函数$y=x^2+mx+2$ 的图象经过点$(1,1)$.求其相关函数的解析式．并直接写出当$-2\leq x\leq 0$ 时相关函数y的取值范围；

(3)如图，正方形$ABCD$的边长为 4，$AB//x$轴、$AD//y$轴，点A的坐标是$(-2,2)$，当二次函数$y=x^2-2x+1+c$的相关函数的图象与正方形$ABCD$的边有 3 个交点时．直接写出c的取值范围.



2. (本小题 8 分)

定义：如果在给定的自变量取值范围内，函数既有最大值，又有最小值，那么称该函数在此范围内有界，函数的最大值与最小值的差叫做该函数在此范围内的界值.

(1)有下列函数：①$y=2x-1$；②$y=-\frac{2}{x}$；③$y=-x^2+2x+3$.其中，当$-2\leq x\leq 1$时，函数有界的是______(填序号).

(2)当$m\leq x\leq m+2$时，一次函数$y=(k+1)x-2$的界值不大于 2，求k的取值范围.

(3)当$a\leq x\leq a+2$时，二次函数$y=x^2+2ax-3$的界值为$\frac{9}{4}$，求a的值.

3. (本小题 8 分)

定义：若函数T在$m\leq x\leq n(m<n)$上的最大值记为y_{max}，最小值记为y_{min}，且满足$y_{max}-y_{min}=1$，则称函数T是在$m\leq x\leq n$上的“极差函数”.

已知函数T：$y=ax^2-4ax+3a(a>0)$.

(1)求证：函数T与x轴有两个不同的交点；

(2)当$a=1$时，函数T是在$m\leq x\leq m+1$(m为整数)上的“极差函数”，求m的值；

(3)若函数T是在$m+2\leq x\leq 2m+1$上的“极差函数”，且存在整数k，使得$k=\frac{y_{\max}}{y_{\min}}$，求$a$的值.

4. (本小题 8 分)

新定义：若函数图象恒过点(m,n)，我们称(m,n)为该函数的“永恒点”.如：一次函数$y=k(x-1)(k\neq 0)$，无论k值如何变化，该函数图象恒过点$(1,0)$，则点$(1,0)$称为这个函数的“永恒点”.

【初步理解】一次函数$y_1=mx+3m(m>0)$的定点的坐标是__________；

【理解应用】二次函数$y_2=-mx^2-2mx+3m(m>0)$落在x轴负半轴的定点A的坐标是__________，落在x轴正半轴的定点B的坐标是__________；

【知识迁移】点P为抛物线$y_2=-mx^2-2mx+3m(m>0)$的顶点，设点B到直线$y_1=mx+3m(m>0)$的距离为d_1，点P到直线$y_1=mx+3m(m>0)$的距离为d_2，请问$\frac{d_1}{d_2}$是否为定值？如果是，请求出$\frac{d_1}{d_2}$的值；如果不是，请说明理由.

5. (本小题 8 分)

我们定义：若点P在一次函数$y=ax+b(a\neq 0)$图象上，点Q在反比例函数$y=\frac{c}{x}(c\neq 0)$图象上，且满足点P与点Q关于y轴对称，则称二次函数$y=ax^2+bx+c$为一次函数$y=ax+b$与反比例函数$y=\frac{c}{x}$的“衍生函数”，点P称为“基点”，点Q称为“靶点”．

(1)若二次函数$y=x^2+2x+1$ 是一次函数$y=ax+b$与反比例函数$y=\frac{c}{x}$的“衍生函数”，则$a=$_，$b=$_，$c=$_；

(2)若一次函数$y=x+b$和反比例函数$y=\frac{c}{x}$的“衍生函数”的顶点在x轴上，且“基点”P的横坐标为 1，求“靶点”的坐标；

(3)若一次函数$y=ax+2b(a>b>0)$和反比例函数$y=-\frac{2}{x}$的“衍生函数”经过点(2,6). ①试说明一次函数$y=ax+2b$图象上存在两个不同的“基点”；②设一次函数$y=ax+2b$图象上两个不同的“基点”的横坐标为x_1、x_2，求$|x_1-x_2|$的取值范围.

6. (本小题 8 分)

定义：在平面直角坐标系xOy中，对于点$P(x_1,y_1)$与某函数图像上的一点$Q(x_2,y_2)$，若$y_1-y_2=x_2-x_1$，则称点Q为点P在该函数图像上的“直差点”．

(1)已知点$P(2,0)$，求点P在函数$y=2x+2$ 图像上“直差点”的坐标；

(2)若点$P(m,0)$在函数$y=\frac{m}{x}(m\neq 0)$的图像上恰好存在唯一的“直差点”，求m的值；

(3)若点$P(m,n)$在函数$y=\left|x^2-2x-3\right|$的图像上有且只有 2 个“直差点”，求$m+n$的取值范围．

7. (本小题 8 分)

定义：在平面直角坐标系xOy中，函数图象上到一条坐标轴的距离等于$a(a\geq 0)$，到另一条坐标轴的距离不大于a的点叫做该函数图象的“a级方点”．

例如，点(2,3)为双曲线$y=\frac{6}{x}$的“3 级方点”，点$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$为直线$y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$的“$\frac{1}{2}$级方点”．

(1)下列函数中，其图象的“1 级方点”恰有两个的是______(只填序号)；①$y=x$；②$y=-\frac{4}{x}$；③$y=-x^2+\frac{1}{2}$.

(2)判断直线$y=kx+k+\frac{1}{2}$的“2 级方点”的个数，并说明理由；

(3)已知y关于x的二次函数$y=-(x-a+1)^2+3(a-1)^2-3(a-1)+2$，当该函数图象的“$a$级方点”恰有三个时，求$a$的值．

8. (本小题 8 分)

在平面直角坐标系中，点A的坐标为$(m,2)$(其中m为常数)，点B与点A关于y轴对称.在实数范围内定义函数$y=\begin{cases}x^2+x-m(x\geq 1)\\x^2+x+m(x<1)\end{cases}$(其中$m$为常数)的图象为$G$.

(1)当点$(-1,2)$在G上时，则m的值是______；

(2)求点B在G上时，求m的值；

(3)当y最小值的取值范围是$-2\leq y\leq -1$ 时，请直接写出m的取值范围.

9．已知y_1是自变量x的函数，当$y_2 = xy_1$时，称函数y_2为函数y_1的“升幂函数”．在平面直角坐标系中，对于函数y_1图象上任意一点$A(m,n)$，称点$B(m,mn)$为点A“关于y_1的升幂点”，点B在函数y_1的“升幂函数”y_2的图象上. 例如：函数$y_1 = 2x$，当$y_2 = xy_1 = x\cdot 2x = 2x^2$时，则函数$y_2 = 2x^2$是函数$y_1 = 2x$的“升幂函数”．在平面直角坐标系中，函数$y_1 = 2x$的图象上任意一点$A(m,2m)$，点$B\left(m,2m^2\right)$为点A“关于$y_1$的升幂点”，点$B$在函数$y_1 = 2x$的“升幂函数”$y_2 = 2x^2$的图象上.

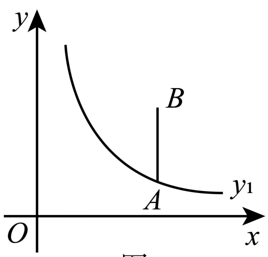


图1

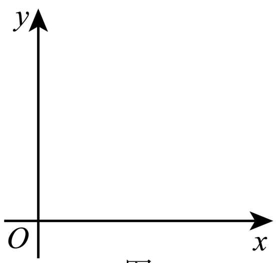


图2

(1)求函数$y_1 = \frac{1}{2}x$的“升幂函数”y_2的函数表达式；

(2)如图 1，点A在函数$y_1 = \frac{3}{x}(x>0)$的图象上，点A“关于y_1的升幂点”B在点A上方，当$AB = 2$时，求点A的坐标；

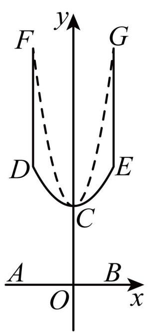
(3)点A在函数$y_1 = -x+4$的图象上，点A“关于y_1的升幂点”为点B，设点A的横坐标为m.

①若点B与点A重合，求m的值；

②若点B在点A的上方，过点B作x轴的平行线，与函数y_1的“升幂函数”y_2的图象相交于点C，以AB，BC为邻边构造矩形$ABCD$，设矩形$ABCD$的周长为y，求y关于m的函数表达式；

③在②的条件下，当直线$y = t_1$与函数y的图象的交点有 3 个时，从左到右依次记为E，F，G，当直线$y = t_2$与函数y的图象的交点有 2 个时，从左到右依次记为M，N，若$EF = MN$，请直接写出$t_2 - t_1$的值.

10．某厂家特制了一批高脚杯，分为男士杯和女士杯（如图 1），相关信息如下：

素材	内容
素材1	如图 1，这种高脚杯从下往上分为三部分： 杯托，杯脚，杯体．杯托为一个圆，水平放置时候，杯脚经过杯托圆心，并垂直任意直径，杯体的水平横截面都为圆，这些圆的圆心都在杯脚所在直线上．  男士杯　　女士杯 图1
素材2	图 2 坐标系中，特制男士杯可以看作由线段 AB，OC，抛物线 DCE（实线部分），线段 DF，线段 EG 绕 y 轴旋转形成的立体图形（不考虑杯子厚度，下同）；特制女士杯可以看作由线段 AB，OC，抛物线 FCG（虚线部分）绕 y 轴旋转形成的立体图形 
素材3	已知，图 2 坐标系中，$OC=5\text{cm}$，记为 $C(0,5),D\left(-\frac{5}{2},\frac{15}{2}\right),E\left(\frac{5}{2},\ \frac{15}{2}\right),F\left(-\frac{5}{2},15\right),G\left(\frac{5}{2},15\right)$.

根据以上素材内容，尝试求解以下问题：

(1)求抛物线 DCE 和抛物线 FCG 的解析式；

(2)当杯子水平放置及杯内液体静止时，若男士杯中的液体与女士杯中的液体深度均为 4cm，求两者液体最上层表面圆面积之差；（结果保留 π ）

(3)当杯子水平放置及杯内液体静止时，若男士杯中的液体与女士杯中的液体深度相等，两者液体最上层表面圆面积相差 $4\pi\text{cm}^2$，求杯中液体的深度．