

第五章 一元一次方程

一、一元一次方程的定义：只含有一个未知数，并且未知数的次数是 1 的整式方程

二、一元一次方程的解：

使一元一次方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做一元一次方程的解。

三、等式的基本性质

等式的性质 1：等式两边加（或减）同一个数（或式子），结果仍相等。

如果 $a = b$ ，那么 $a \pm c = b \pm c$ ；（ c 为一个数或一个式子）。

等式的性质 2：等式两边乘同一个数，或除以同一个不为 0 的数，结果仍相等。

如果 $a = b$ ，那么 $ac = bc$ ；如果 $a = b (c \neq 0)$ ，那么 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

要点诠释：

分数的分子、分母同时乘以或除以同一个不为 0 的数，分数的值不变。

即： $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a \div m}{b \div m}$ （其中 $m \neq 0$ ）

特别须注意：分数的基本的性质主要是用于将方程中的小数系数（特别是分母中的小数）

化为整数，如方程： $\frac{x-3}{0.5} - \frac{x+4}{0.2} = 1.6$ ，将其化为： $\frac{10x-30}{5} - \frac{10x+40}{2} = 1.6$ 。方程的右边没有变化，这要与“去分母”区别开。

四、一元一次方程的解法：

解一元一次方程的一般步骤

变形步骤	具体方法	变形根据	注意事项
去分母	方程两边都乘以各个分母的最小公倍数	等式性质 2	1. 不能漏乘不含分母的项； 2. 分数线起到括号作用，去掉分母后，如果分子是多项式，则要加强括号

去括号	先去小括号，再去中括号，最后去大括号	乘法分配律、去括号法则	1. 分配律应满足分配到每一项 2. 注意符号，特别是去掉括号
移项	把含有未知数的项移到方程的一边，不含有未知数的项移到另一边	等式性质 1	1. 移项要变号； 2. 一般把含有未知数的项移到方程左边，其余项移到右边
合并同类项	把方程中的同类项分别合并，化成“ $ax=b$ ”的形式（ $a \neq 0$ ）	合并同类项法则	合并同类项时，把同类项的系数相加，字母与字母的指数不变
未知数的系数化成“1”	方程两边同除以未知数的系数 a ，得 $x = \frac{b}{a}$	等式性质 2	分子、分母不能颠倒

要点诠释：

理解方程 $ax=b$ 在不同条件下解的各种情况，并能进行简单应用：

$$x = \frac{b}{a}$$

① $a \neq 0$ 时，方程有唯一解

② $a=0$ ， $b=0$ 时，方程有无数个解；

③ $a=0$ ， $b \neq 0$ 时，方程无解。温馨提示：解完方程，若要验证所求解是否正确，则可将所得解代入原方程、检验等式是否成立即可

五、列一元一次方程解决实际问题：

- 1、审：审清题意，明确已知量、未知量，找到两者之间的等量关系
- 2、设：设关键未知数（一般求什么就设什么），注意带单位
- 3、列：根据题意所得等量关系，列出一元一次方程
- 4、解：解所列方程
- 5、验：是否为所列方程的解
- 6、答：规范作答，注意单位名称

二、经典例题透析

类型一：一元一次方程的相关概念



1、已知下列各式：

① $2x-5=1$; ② $8-7=1$; ③ $x+y$; ④ $\frac{1}{2}x-y=x^2$; ⑤ $3x+y=6$; ⑥ $5x+3y+4z=0$; ⑦ $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=8$; ⑧ $x=0$ 。其中方程的个数是()
A、5 B、6 C、7 D、8

解：是方程的是①④⑤⑥⑦⑧，共六个，所以选 B

2. 判断下列方程是否是一元一次方程：

(1) $-2x^2+3=x$ (2) $3x-1=2y$ (3) $x+\frac{1}{x}=2$ (4) $2x^2-1=1-2(2x-x^2)$

答案：(1)(2)(3) 不是，(4) 是

3. 已知 3 是关于 x 的方程 $2x-a=1$ 的解, 则 a 的值是()

A. -5 B. 5 C. 7 D. 2

答案：B

类型二：一元一次方程的解法

1. $\frac{x}{0.07} - \frac{1.3-2x}{0.7} = 1$

原方程化为 $\frac{100x}{7} - \frac{13-20x}{7} = 1$

去分母，得 $100x - (13 - 20x) = 7$

去括号、移项、合并同类项，得 $120x = 20$

两边同除以 120，得 $x = \frac{1}{6}$

\therefore 原方程的解为 $x = \frac{1}{6}$

2.. $\frac{1}{3} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{3x-5}{2} + 4 \right) - 6 \right] = 1$

$$\text{去括号, 得 } \frac{1}{4} \left(\frac{3x-5}{2} + 4 \right) - 2 = 1$$

$$\text{去小括号, 得 } \frac{3x-5}{8} + 1 - 2 = 1$$

$$\text{去分母, 得 } (3x-5) - 8 = 8$$

$$\text{去括号、移项、合并同类项, 得 } 3x = 21$$

$$\text{两边同除以 3, 得 } x = 7$$

$$\therefore \text{原方程的解为 } x = 7$$

$$3. \quad \frac{0.4x+0.9}{0.05} - \frac{0.04+0.3x}{0.02} = 2x-5$$

原方程可变形为

$$\frac{(0.4x+0.9) \times 20}{0.05 \times 20} - \frac{(0.04+0.3x) \times 50}{0.02 \times 50} = 2x-5$$

$$\text{整理, 得 } 8x+18 - (2+15x) = 2x-5,$$

$$\text{去括号, 得 } 8x+18-2-15x=2x-5$$

$$\text{移项, 得 } 8x-15x-2x=-5-18+2$$

$$\text{合并同类项, 得 } -9x=-21$$

$$\text{系数化为 1, 得 } x = \frac{7}{3}.$$

$$4. \quad \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}x - 2 \right) - 2 \right] - 2 \right\} - 2 = 2$$

依次移项、去分母、去大括号, 得

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}x - 2 \right) - 2 \right] - 2 = 8$$

依次移项、去分母、去中括号, 得

$$\left(\frac{1}{2}x - 2 \right) - 2 = 20$$

依次移项、去分母、去小括号，得

$$\frac{1}{2}x - 2 = 22, \therefore x = 48$$

5. $5|x| - 16 = 3|x| - 4$

解: $5|x| - 3|x| = 16 - 4$

$$2|x| = 12$$

$$|x| = 6$$

$$x = \pm 6$$

6. $\frac{|3x-1|}{2} = 4$ 解: $|3x-1| = 8$

$$3x-1 = \pm 8$$

$$3x = 1 \pm 8$$

$$3x = 9 \text{ 或 } 3x = -7$$

$$x = 3 \text{ 或 } x = -\frac{7}{3}$$

三. 一元一次方程应用题（找出等量关系）

1. 机械厂加工车间有 85 名工人，平均每人每天加工大齿轮 16 个或小齿轮 10 个，已知 2 个大齿轮与 3 个小齿轮配成一套，问需分别安排多少名工人加工大、小齿轮，才能使每天加工的大小齿轮刚好配套？

分析：列表法。

	每人每天	人数	数量
大齿轮	16 个	x 人	16x
小齿轮	10 个	(85-x) 人	10(85-x)

等量关系：小齿轮数量的 2 倍 = 大齿轮数量的 3 倍

解：设分别安排 x 名、(85-x) 名工人加工大、小齿轮
 $3(16x) = 2[10(85-x)]$

$$48x = 1700 - 20x$$

$$68x = 1700$$

$$x = 25$$

$$\therefore 85 - x = 60 \text{人}$$

答：略.

2. 甲、乙两站相距 480 公里，一列慢车从甲站开出，每小时行 90 公里，一列快车从乙站开出，每小时行 140 公里。

(1) 慢车先开出 1 小时，快车再开。两车相向而行。问快车开出多少小时后两车相遇？

(2) 两车同时开出，相背而行多少小时后两车相距 600 公里？

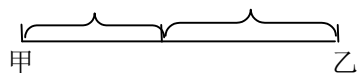
(3) 两车同时开出，慢车在快车后面同向而行，多少小时后快车与慢车相距 600 公里？

(4) 两车同时开出同向而行，快车在慢车的后面，多少小时后快车追上慢车？

(5) 慢车开出 1 小时后两车同向而行，快车在慢车后面，快车开出后多少小时追上慢车？

此题关键是要理解清楚相向、相背、同向等的含义，弄清行驶过程。故可结合图形分析。

(1) 分析：相遇问题，画图表示为：



等量关系是：慢车走的路程+快车走的路程=480 公里。

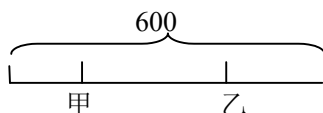
解：设快车开出 x 小时后两车相遇，由题意得， $140x + 90(x+1) = 480$

解这个方程， $230x = 390$

$$\therefore x = 1\frac{16}{23}$$

答：略.

(2) 分析：相背而行，画图表示为：



等量关系是：两车所走的路程和+480 公里=600 公里。

解：设 x 小时后两车相距 600 公里，

由题意得， $(140+90)x+480=600$ 解这个方程， $230x=120$

$$\therefore x = \frac{12}{23}$$

答：略。

(3) 分析：等量关系为：快车所走路程—慢车所走路程+480 公里=600 公里。

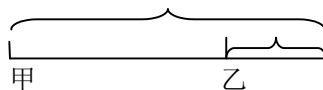
解：设 x 小时后两车相距 600 公里，由题意得， $(140-90)x+480=600$

$$50x=120$$

$$\therefore x=2.4$$

答：略。

(4) 分析：追及问题，画图表示为：



等量关系为：快车的行程=慢车走的行程+480 公里。

解：设 x 小时后快车追上慢车。

由题意得， $140x=90x+480$

解这个方程， $50x=480 \quad \therefore x=9.6$

答：略。

(5) 分析：追及问题，等量关系为：快车的行程=慢车走的行程+480 公里。

解：设快车开出 x 小时后追上慢车。由题意得， $140x=90(x+1)+480$

$$50x=570 \quad \text{解得, } x=11.4$$

3.某商场购进了 40 台甲型号和 20 台乙型号的扫地机器人，已知每台甲型号扫地机器人的进价比乙型号扫地机器人的进价便宜 15%，甲型号扫地机器人每台售价 1800 元，乙型号扫地机器人每台售价 2400 元。“春节”期间商场促销，甲型号扫地机器人按原售价销售，乙型号扫地机器人按原售价九折出售。

(1) 某公司一共花了 13680 元买了甲、乙两种型号扫地机器人共 7 台。问该公司甲、乙两种型号扫地机器人各买了多少台？

(2) 在促销期间，甲、乙两种型号扫地机器人销售一空，甲型号扫地机器人的总利润是乙型号扫地机器人总利润的 1.25 倍。问甲、乙两种型号扫地机器人每台进价各是多少元？

【解答】解：(1) 设该公司买了甲种型号的机器人 x 台，则买了乙种型号的机器人 $(7-x)$ 台，

$$\text{依题意, 得: } 1800x+2400\times 0.9(7-x)=13680,$$

$$\text{解得: } x=5,$$

$$\therefore 7-x=3.$$

答：该公司买了甲种型号的机器人 5 台，买了乙种型号的机器人 3 台；

(2) 设乙型号机器人进价为 y 元，则甲型号机器人的进价为 $0.85y$ 元，

$$\text{依题意, 得: } 40\times (1800-0.85y)=2\times 20(2400\times 0.9-y),$$

$$\text{解得: } y=1000,$$

$$\therefore 0.85y=850.$$

答：乙型号机器人进价为 1000 元，则甲型号机器人的进价为 850 元

单元综合知识点分类练习题

参考答案

一. 方程

1. 解：(1) 根据方程的定义可得①③④⑦⑧是方程；

(2) ② $2x > 3$ 是不等式，不是方程；

(3) ⑤ $3x - 2$ 不是等式，就不是方程.

(4) ⑥ $x = x - 1$ ，不是方程，

故有 5 个式子是方程.

故选：C.

二. 一元一次方程

2. 解：一元一次方程指只含有一个未知数、未知数的最高次数为 1 且两边都为整式的等式.

\therefore ② $2x = 0$ ；③ $\frac{x}{3} = 4x + x - 1$ ；⑤ $3x = 1$ 是一元一次方程，

故选：B.

3. 解：根据题意得： $m+1 \neq 0$ 且 $|m| = 1$ ，

解得： $m = 1$.

故答案是：1.

4. 解：由 $a - 3x = bx + 2$ ，得 $(3+b)x = a - 2$.

\because 关于 x 的方程 $a - 3x = bx + 2$ 是一元一次方程，

$\therefore 3+b \neq 0$.

$\therefore b \neq -3$.

故选：A.

三. 方程的解

5. 解：把 $x=5$ 代入方程 $ax - 8 = 20 + a$ ，

得： $5a - 8 = 20 + a$ ，

解得： $a = 7$ ，

故选：C.

6. 解：依题意，得

$$-(a-b)=|a-b|,$$

则 $a-b<0$,

所以 $a<b$.

故选: D .

7. 解: 根据题意得: $a+b=c$, 即 $c-a-b=0$

$$\therefore |c-a-b-1|=|0-1|=1.$$

故答案为: 1.

8. 解: 把 $x=4a+b$ 代入 $2(x-a)=x-1$, 可得: $2(4a+b-a)=4a+b-1$,

可得: $2a+b=-1$,

$$2(ax-b)-1978=-bx+4a+44 \text{ 化简为: } (2a+b)x-2(2a+b)-2022=0,$$

把 $2a+b=-1$ 代入 $(2a+b)x-2(2a+b)-2022=0$,

$$\text{可得: } -x+2-2022=0,$$

解得: $x=-2020$,

故答案为: -2020 .

9. 解: \because 关于 x 的一元一次方程 $\frac{1}{2021}x-3=2x+b$ 的解为 $x=999$,

$$\therefore \text{关于 } y \text{ 的一元一次方程 } \frac{1}{2021}(y-1)-3=2(y-1)+b \text{ 中 } y-1=999,$$

解得: $y=1000$,

故答案为: 1000.

10. 解: \because 关于 x 的一元一次方程 $\frac{x}{2020}+3=2020x+n$ ① 的解为 $x=2020$,

$$\therefore \text{关于 } y \text{ 的一元一次方程 } \frac{3y-2}{2020}-3=2020(3y-2)-n$$
 ② 中 $-(3y-2)=2020$,

$$\text{解得: } y=-\frac{2018}{3}.$$

$$\text{故答案为: } y=-\frac{2018}{3}.$$

11. 解: $\because -mx - 2n = 2$,

$$\therefore mx + 2n = -2,$$

根据表可以得到当 $x=0$ 时, $mx+2n=-2$, 即 $-mx-2n=2$.

故选: C.

12. 解: 假设满足选项 A、B 两个方程, 则

$$\begin{cases} a-b=3 \\ 2a+3b=1 \end{cases}.$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}.$$

把 $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$ 代入选项 C 的方程, 满足选项 C 的方程,

说明不满足的那个方程是选项 D 的方程,

故选: D.

四. 等式的基本性质

13. 解: 根据等式性质 1, 等式两边同加上 $7x$ 得: $2y=7x$,

$$\because 7y \neq 0,$$

$$\therefore \text{根据等式性质 2, 两边同除以 } 7y \text{ 得, } \frac{x}{y} = \frac{2}{7}.$$

故选: C.

14. 解: 当 $c=0$ 时, $ac=bc=0$,

但 a 不一定等于 b

故 D 错误

故选: D.

15. 解: A、利用等式性质 1, 两边都加 c , 得到 $a+c=b+c$, 原变形错误, 故此选项不符合题意;

B、如果 $a^2=b^2$, 那么 $a=b$ 或 $a=-b$, 原变形错误, 故此选项不符合题意;

C、利用等式性质 2, 两边都乘 c , 得到 $a=b$, 原变形正确, 故此选项符合题意;

D、成立的条件是 $c \neq 0$ ，原变形错误，故此选项不符合题意；

故选：C.

五. 解一元一次方程

16. 解 (1) $\frac{x}{2} - \frac{5x+11}{6} = 1 + \frac{2x-4}{3},$

$$6x - 2(5x+11) = 12+4(2x-4),$$

$$6x - 10x - 22 = 12+8x - 16,$$

$$6x - 10x - 8x = 12 - 16+22,$$

$$-12x = 18,$$

$$x = -\frac{3}{2};$$

(2) $\frac{3+0.2x}{0.2} - \frac{0.2+0.03x}{0.01} = 0.75,$

$$\frac{30+2x}{2} - \frac{20+3x}{1} = 0.75,$$

$$2(30+2x) - 4(20+3x) = 3,$$

$$60+4x - 80 - 12x = 3,$$

$$4x - 12x = 3 - 60+80,$$

$$-8x = 23,$$

$$x = -\frac{23}{8}.$$

17. 解：移项得， $ax = -b,$

系数化为1得， $x = -\frac{b}{a},$

$\because a, b$ 是互为相反数 ($a \neq 0$),

$$\therefore \frac{b}{a} = -1,$$

$$\therefore x = -\frac{b}{a} = 1.$$

故选：A.

18. 解: $5(x-1) - 1 = 4(x-1) + 1$,

$$5x - 5 - 1 = 4x - 4 + 1,$$

$$5x - 4x = -4 + 1 + 1 + 5,$$

$$x = 3;$$

根据 $x=3$ 的值可得方程: $2(x+1) - m = -\frac{m-2}{2}$ 的解为 $x=3+2=5$,

把 $x=5$ 代入方程 $2(x+1) - m = -\frac{m-2}{2}$ 得:

$$2(5+1) - m = -\frac{m-2}{2},$$

$$12 - m = -\frac{m-2}{2},$$

$$m = 22.$$

19. 解: 系数化为 1 得, $x = \frac{3}{k}$.

\because 关于 x 的方程 $kx=3$ 的解为自然数,

$\therefore k$ 的值可以为: 1、3.

故选: B.

20. 解: $\frac{mx-3}{3} = 1 - \frac{x}{2},$

$$2(mx-3) = 6 - 3x$$

$$2mx - 6 = 6 - 3x$$

$$(2m+3)x = 12$$

$$x = \frac{12}{2m+3},$$

\because 关于 x 的方程 $\frac{mx-3}{3} = 1 - \frac{x}{2}$ 的解是整数,

$\therefore 2m+3 = \pm 1$ 或 ± 12 或 ± 2 或 ± 3 或 ± 4 或 ± 6 ,

$\because m$ 为整数,

$\therefore m = -1$ 或 -2 或 0 或 -3 ,

故答案为：-1 或 -2 或 0 或 -3.

21. 解：把 $x = -4$ 代入方程 $7a - x = 18$ 得： $7a + 4 = 18$,

解得： $a = 2$,

即原方程为 $14 + x = 18$,

解得： $x = 4$.

故选：A.

22. 解：根据小明的错误解法得： $4x - 2 = 3x + 3a - 3$,

把 $x = 2$ 代入得： $6 = 3a + 3$,

解得： $a = 1$,

正确方程为： $\frac{2x-1}{3} = \frac{x+1}{2} - 3$,

去分母得： $4x - 2 = 3x + 3 - 18$,

解得： $x = -13$,

故答案为： $x = -13$

23. 解：解方程 $5x - 2 = 3x + 16$, 得 $x = 9$,

将 $x = 9$ 代入 $4a + 1 = 4(x + a) - 5a$,

得 $a = 7$,

所以 $[\frac{7}{2} - 1] = 2$.

故答案为：7; 2.

