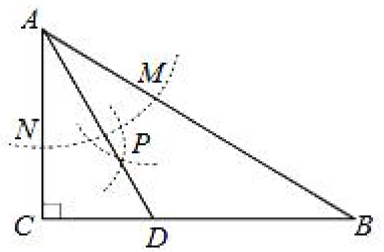
三角形专项练习

一、单选题

4．如图，在△*ABC* 中，∠*C*=90°，∠*B*=30°，以 *A* 为圆心，任意长为半径画弧分别交 *AB*、*AC* 于点 *M* 和 *N*，再分别以 *M*、*N* 为圆心，大于$\frac{1}{2}MN$的长为半径画弧，两弧交于点 *P*，连结 *AP* 并延长交 *BC* 于点 *D*，则下列说法中正确的个数是（　　）.

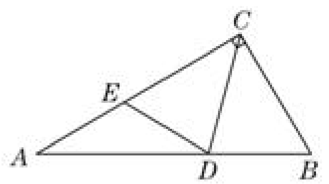
①作出 *AD* 的依据是 SAS；②∠*ADC*=60°

③点 *D* 在 *AB* 的中垂线上；④$S_{\triangle DAC}$：$S_{\triangle ABD}$=1：2.



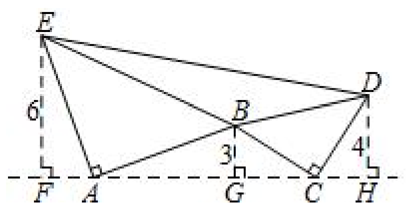
A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

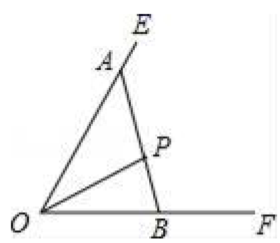
5．如图，在△ABC 中，AC⊥CB，CD 平分∠ACB，点 E 在 AC 上，且 CE＝CB，则下列结论：①DC 平分∠BDE；②BD＝DE；③∠B＝∠CED；④∠A＋∠CED＝90°，其中正确的有(　　)



A．1 个　　　　B．2 个　　　　C．3 个　　　　D．4 个

6．如图所示，AE⊥AB，且 AE=AB，BC⊥CD 且 BC=CD，若点 E、B、D 到直线 AC 的距离分别为 6，3，4，则图中实线所围成的图像面积是（　　）





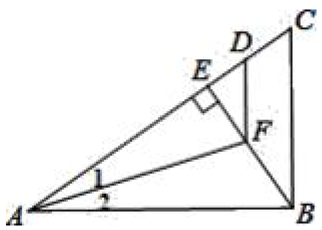
A．50　B．44　　　C．38　　D．32

7．如图，∠EOF 内有一定点 P，过点 P 的一条直线分别交射线 OE 于 A，射线 OF 于 B．当满足下列哪个条件时，△AOB 的面积一定最小（　　）

A．OA=OB　　　　　　　B．OP 为△AOB 的角平分线

C．OP 为△AOB 的高　　　D．OP 为△AOB 的中线

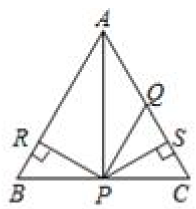
8．如图，△ABC 中，$AB\perp BC$，$BE\perp AC$，∠1=∠2，$AD=AB$，则下列结论不正确的是



A．$BF=DF$　　　B．$\angle 1=\angle EFD$　　　C．$BF>EF$　　　D．$FD\parallel BC$

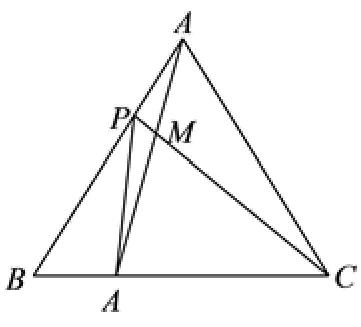
9．如图，△ABC 是等边三角形，$AQ=PQ$，$PR\perp AB$ 于点 R，$PS\perp AC$ 于点 S，$PR=PS$.下列结论：①点 P 在∠A 的角平分线上；②$AS=AR$；③$QP\parallel AR$；④△BRP≌△QSP．其中，正确的有（　　）

A．1 个　B．2 个　　C．3 个　D．4 个



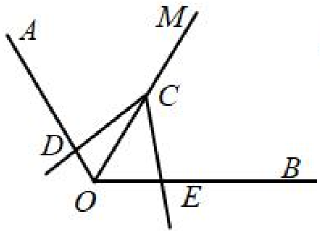
10．如图，点 P、Q 分别是边长为 6cm 的等边△ABC 边 AB、BC 上的动点，点 P 从顶点 A，点 Q 从顶点 B 同时出发，且它们的速度都为 1cm/s，下面四个结论：

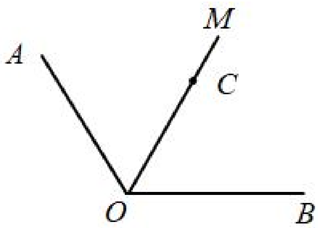
①$BQ=AM$ ②△ABQ≌△CAP ③$\angle CMQ$ 的度数不变，始终等于 60° ④当第 2 秒或第 4 秒时，△PBQ 为直角三角形，正确的有（　　）个．



A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

11．如图，已知$\angle AOB=120°$，在$\angle AOB$的平分线OM上有一点C，将一个$60°$角的顶点与点C重合，它的两条边分别与直线OA，OB相交于点D，E．下列结论：（1）$CD=CE$；（2）$OE+OD=OC$；（3）$OE-OD=OC$；（4）$OC=a$，$OD=b$，则$OE=|a-b|$；其中正确的有（　　）．

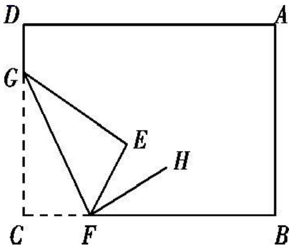




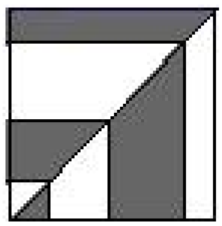
A．1 个　　　　B．2 个　　　　C．3 个　　　　D．4 个

二、填空题

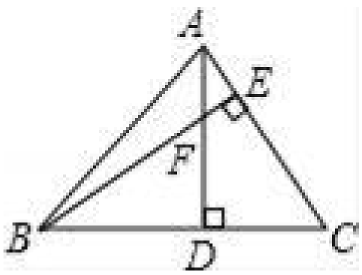
12．如图,将长方形纸片 ABCD 的∠C 沿着 GF 折叠(点 F 在 BC 上,不与 B,C 重合),使点 C 落在长方形内部的点 E 处,若 FH 平分∠BFE,则∠GFH 的度数是____.

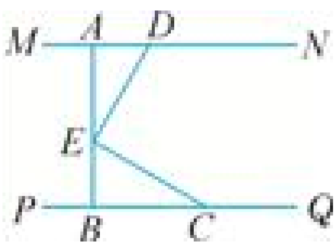


13．如图，已知正方形中阴影部分的面积为 3，则正方形的面积为________.



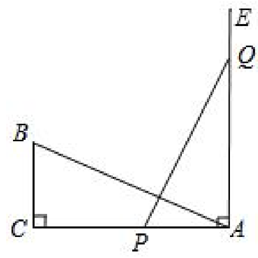
14．如图，在△*ABC* 中，*AD*⊥*BC* 于 *D*，*BE*⊥*AC* 于 *E*，*AD* 与 *BE* 相交于点 *F*，若 *BF*＝*AC*，则∠*ABC*＝_____度.





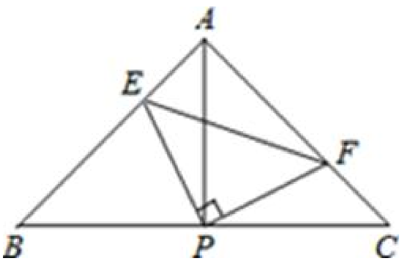
15．如图，MN∥PQ，AB⊥PQ，点 A，D，B，C 分别在直线 MN 和 PQ 上，点 E 在 AB 上，AD＋BC＝7，AD＝EB，DE＝EC，则 AB＝_____.

16．如图，$Rt\Delta ABC$中，$\angle C=90°, AC=8, BC=3$，$AE\perp AC, P, Q$分别是AC, AE上动点，且$PQ=AB$，当$AP=$______时，才能使ΔABC和ΔPQA全等.

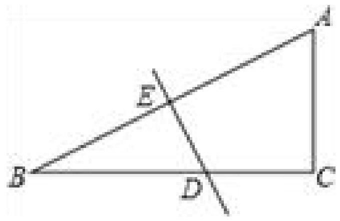


17．如图：已知△*ABC*中，*AB*=*AC*，∠*BAC*=90°，直角∠*EPF*的顶点*P*是*BC*边上的中点，两边*PE*，*PF*分别交*AB*，*AC*于点*E*，*F*，给出以下四个结论：

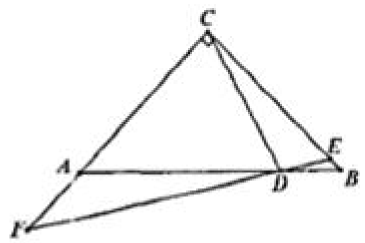
①*AE*=*CF*；②*EF*=*AP*；③$2S_{四边形AEPF}=S_{\triangle ABC}$；④当∠*EPF*在△*ABC*内绕顶点*P*旋转时（点*E*不与*A*，*B*重合）有*BE*+*CF*=*EF*；上述结论中始终正确的序号有________.



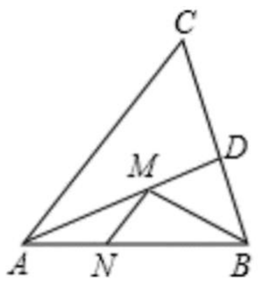
18．已知：如图，在△ABC中，∠C=90°，∠B=30°，AB的垂直平分线交BC于D，垂足为E，BD=4cm，则DC=______



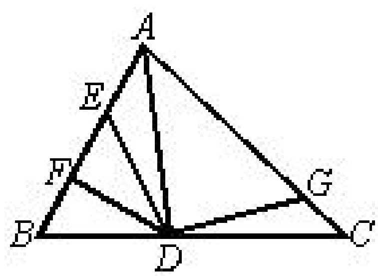
19. 如图，在△ABC中，$\angle ACB=90^{\circ}, CA=CB$.点D在AB上，点F在CA的延长线上，连接FD并延长交BC于点E，若∠BED=2∠ADC，AF=2，DF=7，则△ABC的面积为______.



20．如图，在锐角△ABC中，AC＝10，$S_{\triangle ABC}=25$，∠BAC的平分线交BC于点D，点M，N分别是AD和AB上的动点，则BM＋MN的最小值是____________



21．如图，AD是△ABC的角平分线，DF⊥AB，垂足为点F，DE＝DG，△ADG和△AED的面积分别为65和33，则△EDF的面积为__________.

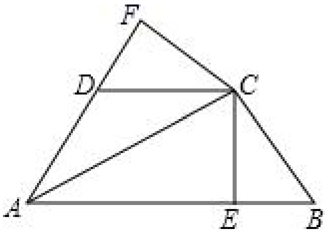


三、解答题

22．如图，已知 AC 平分∠BAD，CE⊥AB 于 E，CF⊥AD 于 F，且 BC=CD．

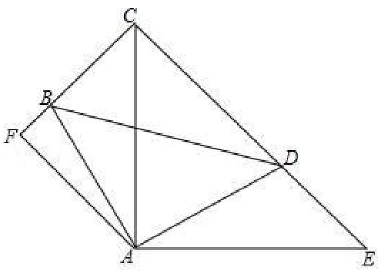
（1）求证：△BCE≌△DCF；

（2）求证：AB+AD=2AE.



24．如图，∠BAD=∠CAE=90°，AB=AD，AE=AC，AF⊥CB，垂足为 F．

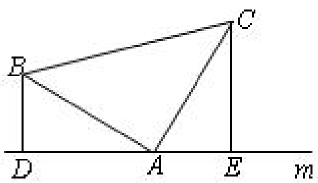
（1）求证：△ABC≌△ADE；（2）求∠FAE 的度数；（3）求证：CD=2BF+DE．



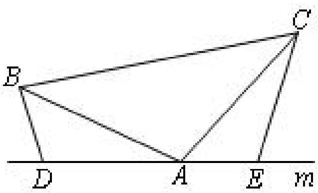
25．（1）如图（1)，已知：在△ABC 中，∠BAC＝90°，AB=AC，直线 m 经过点 A，BD⊥直线 m, CE⊥直线 m,垂足分别为点 D、E.证明:DE=BD+CE.

（2）如图（2)，将（1）中的条件改为：在△ABC 中，AB=AC，D、A、E 三点都在直线 m 上,并且有∠BDA=∠AEC=∠BAC=α ,其中α 为任意锐角或钝角.请问结论 DE=BD+CE 是否成立?如成立,请你给出证明;若不成立,请说明理由.

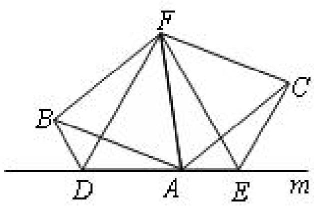
（3）拓展与应用：如图（3)，D、E 是 D、A、E 三点所在直线 m 上的两动点（D、A、E 三点互不重合）,点 F 为∠BAC 平分线上的一点,且△ABF 和△ACF 均为等边三角形，连接 BD、CE,若∠BDA=∠AEC=∠BAC，试判断△DEF 的形状.



（图1）



（图2）



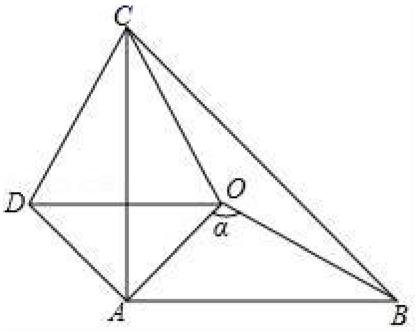
（图3）

26．如图，△ABC 和△AOD 是等腰直角三角形，$AB=AC$，$AO=AD$，∠BAC=∠OAD=90°，点 O 是△ABC 内的一点，∠BOC=130°．

（1）求证：$OB=DC$；

（2）求∠DCO 的大小；

（3）设∠$AOB=\alpha$，那么当α为多少度时，△COD 是等腰三角形．



27. 已知 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle C=90°$，D 为 AB 边的中点，$\angle EDF=90°$，$\angle EDF$ 绕 D 点旋转，它的两边分别交 AC 、CB（或它们的延长线）于 E、F.

（1）当 $\angle EDF$ 绕 D 点旋转到 $DE\perp AC$ 于 E 时（如图①），求证：$S_{\triangle DEF}+S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$；

（2）当 $\angle EDF$ 绕 D 点旋转到 DE 和 AC 不垂直时，在图②和图③这两种情况下，上述结论是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，$S_{\triangle DEF}$、$S_{\triangle CEF}$、$S_{\triangle ABC}$ 又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，不需要证明.

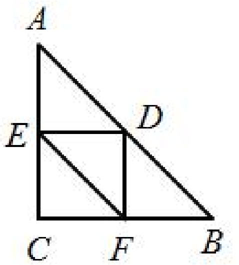


图1

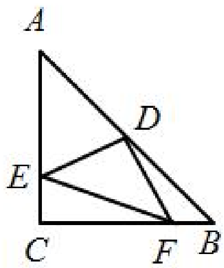


图2

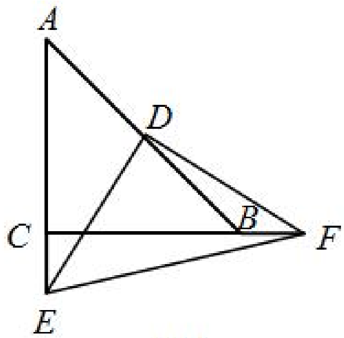


图3

参考答案

1．C

【分析】

判定三条线段能否构成三角形，只要两条较短的线段长度之和大于第三条线段的长度即可判定这三条线段能构成一个三角形.

【详解】

解：设三角形的第三边为x，则

9-4＜x＜4+9

即5＜x＜13，

∴当x=7时，能与4cm、9cm长的两根木棒钉成一个三角形，

故选：C.

【点拨】

本题考查了三角形的三边关系的运用，解题时注意：三角形两边之和大于第三边，三角形的两边差小于第三边.

2．B

【分析】

根据平行线的性质得出∠B=∠D，求出BC=DF，根据全等三角形的判定定理逐个判断即可.

【详解】

解：AB=DE，

理由是：∵AB∥DE，

∴∠B=∠D，

∵BF=DC，

∴BC=DF，

在△ABC和△DEF中 $\begin{cases} BC = DF \\ \angle B = \angle D \\ AB = DE \end{cases}$，

∴△ABC≌△EDF（SAS），即选项B正确，

选项A、C、D都不能推出△ABC≌△EDF，即选项A、C、D都错误，

故选B.

【点拨】本题考查了平行线的性质，全等三角形的判定定理的应用，能熟练地运用全等三角

形的判定定理进行推理是解此题的关键.

3．D

【解析】

【分析】判定直角三角形全等的判定定理有 SAS，ASA，AAS，SSS，HL，根据以上定理逐个判断即可.

解：A、根据 SAS 能推出△APB≌△CPD，故本选项错误；

B、根据 HL 能推出△APB≌△CPD，故本选项错误；

C、∵AB∥CD，∴∠A=∠C，∴根据 ASA 能推出△APB≌△CPD，故本选项错误；

D、根据∠APB=∠DPC=90°，AP=CP 和∠A=∠D 不能能推出△APB≌△CPD，故本选项符合题意；

故选 D.

【点拨】本题考查了全等三角形的判定定理的应用，注意：全等三角形的判定定理有 SAS，ASA，AAS，SSS，直角三角形除了具有以上定理外，还有 HL 定理.

4．C

【分析】①根据作图的过程可以判定作出 AD 的依据；

②利用角平分线的定义可以推知$\angle CAD$=30°，则由直角三角形的性质来求$\angle ADC$ 的度数；

③利用等角对等边可以证得$\triangle ADB$ 的等腰三角形，由等腰三角形的“三合一”的性质可以证明点 D 在 AB 的中垂线上；

④利用 30 度角所对的直角边是斜边的一半、三角形的面积计算公式来求两个三角形的面积之比.

解：①根据作图的过程可知，作出 AD 的依据是 SSS；

故①错误；

②如图，∵在$\triangle ABC$ 中，$\angle C$=90°，$\angle B$=30°，

∴$\angle CAB$=60°.

又∵AD 是$\angle BAC$ 的平分线，

∴$\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle CAB$=30°，

∴$\angle 3$=90°﹣$\angle 2$=60°，即$\angle ADC$=60°.

故②正确；

③∵$\angle 1=\angle B=30°$，

∴$AD=BD$，

∴点 D 在 AB 的中垂线上.

故③正确；

④∵如图，在直角△ACD 中，$\angle 2=30°$，

∴$AD=2CD$，

∴$BD=2CD$，

∵$S_{\triangle DAC}=\frac{1}{2}AC \cdot CD$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AC \cdot BD$，

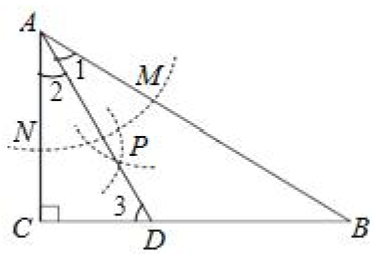
∴$S_{\triangle DAC}: S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AC \cdot CD: \frac{1}{2}AC \cdot BD=CD: BD=1:2$，

即 $S_{\triangle DAC}: S_{\triangle ABD}=1:2$.

故④正确.

综上所述，正确的结论是：②③④，共有 3 个.

故选 C.



【点拨】此题主要考查的是作图-基本作图，涉及到角平分线的作法以及垂直平分线的性质，熟练根据角平分线的性质得出$\angle ADC$ 度数是解题关键.

5．D

【解析】

【分析】根据题目中的已知信息，可以判定出△CDB 和△CDE 全等，根据全等的性质可以

判断四个结论是否成立.

解：在△CDB 和△CDE 中有

$$\begin{cases}\angle DCE=\angle DEB\\ CD=CD\\ CE=CB\end{cases}$$

所以两个三角形全等，根据三角形的性质可以得出①②③成立，由于∠B=∠CED，而∠B+∠A=90°，所以④也成立.

故答案为 D.

【点拨】

本题考查三角形全等的判定和性质，熟练掌握判定和性质是解题的关键.

6．A

【分析】由全等三角形的判定定理可得出△*EFA*≌△*AGB*，同理可证△*BGC*≌△*CHD*，从而得出 *FA*、*AG*、*GC*、*CH* 的长度，用割补法求出实线所围成的图像面积.

【详解】

∵$EA\perp AB$，∴$\angle EAF+\angle BAG=90°$，

∵$EF\perp AF$，$BG\perp AG$，∴$\angle FEA+\angle EAF=90°$，$\angle EFA=\angle BGA=90°$，

∴$\angle BAG=\angle FEA$，

∵在△*EFA* 与△*AGB* 中，

$$\begin{cases}\angle EFA=\angle BGA\\ \angle BAG=\angle FEA\\ EA=AB\end{cases},$$

∴△*EFA*≌△*AGB*，

∴$BG=AF=3$，$EF=AG=6$，

同理可证：△*BGC*≌△*CHD*，

∴$GC=4$，$CH=3$，

∴$S=S_{梯形EFHD}-2S_{\triangle AEF}-2S_{\triangle CHD}=\frac{1}{2}$（4+6）×（3+6+3+4）－$\frac{1}{2}$×6×3×2－$\frac{1}{2}$×4×3×2=50.

故选 A.

【点拨】本题考查全等三角形的判定与性质以及利用割补法求图形面积的方法.

7．D

解：当点 P 是 AB 的中点时 $S_{\triangle AOB}$ 最小；

如图，过点 P 的另一条直线 CD 交 OE、OF 于点 C、D，设 PD＜PC，过点 A 作 AG∥OF 交 CD 于 G，

在△APG 和△BPD 中，

$$\begin{cases}\angle GAP=\angle DBP\\ AP=BP\\ \angle APG=\angle BPD\end{cases},$$

∴△APG≌△BPD（ASA），

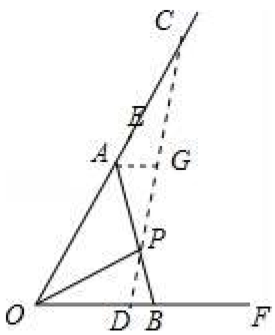
$S_{四边形AODG}=S_{\triangle AOB}$.

∵$S_{四边形AODG}<S_{\triangle COD}$，

∴$S_{\triangle AOB}<S_{\triangle COD}$，

∴当点 P 是 AB 的中点时 $S_{\triangle AOB}$ 最小.

故选 D.



8．B

【分析】根据余角的性质得到$\angle C=\angle ABE$，$\angle EBC=\angle BAC$．根据 SAS 推出$\triangle ABF\cong\triangle ADF$，根据全等三角形的性质得到 $BF=DF$，故 A 正确；由全等三角形的性质得到$\angle ABE=\angle ADF$，等量代换得到$\angle ADF=\angle C$，根据平行线的判定得到 $DF\parallel BC$，故 D 正确；根据直角三角形的性质得到 $DF>EF$，等量代换得到 $BF>EF$；故 C 正确；根据平行线的性质得到$\angle EFD=\angle EBC=\angle BAC=2\angle 1$，故 B 错误.

【详解】

∵$AB\perp BC$，$BE\perp AC$，∴$\angle C+\angle BAC=\angle ABE+\angle BAC=90°$，∴$\angle C=\angle ABE$．同理：$\angle EBC=\angle BAC$.

在$\triangle ABF$ 与$\triangle ADF$ 中，∵$\begin{cases}AD=AB\\ \angle 1=\angle 2\\ AF=AF\end{cases}$，∴$\triangle ABF\cong\triangle ADF$，∴$BF=DF$，故 A 正确，

∵$\triangle ABF\cong\triangle ADF$，∴$\angle ABE=\angle ADF$，∴$\angle ADF=\angle C$，∴$DF\parallel BC$，故 D 正确；

∵∠FED=90°，∴DF＞EF，∴BF＞EF；故 C 正确；

∵DF∥BC，∴∠EFD=∠EBC．∵∠EBC=∠BAC=∠BAC=2∠1，∴∠EFD=2∠1，故 B 错误．

故选 B．

【点拨】本题考查了全等三角形的判定和性质，平行线的判定和性质，证得△ABF≌△ADF是解题的关键．

9．D

【解析】

∵△ABC 是等边三角形，PR⊥AB，PS⊥AC，且 PR=PS，∴P 在∠A 的平分线上，故①正确；

由①可知，PB=PC，∠B=∠C，PS=PR，∴△BPR≌△CPS，∴AS=AR，故②正确；

∵AQ=PQ，∴∠PQC=2∠PAC=60°=∠BAC，∴PQ∥AR，故③正确；

由③得，△PQC 是等边三角形，∴△PQS≌△PCS，又由②可知，④△BRP≌△QSP，故④也正确，∵①②③④都正确，故选 D．

点拨：本题考查了角平分线的性质与全等三角形的判定与性质，准确识图并熟练掌握全等三角形的判定方法与性质是解题的关键．

10．C

【解析】

∵点 P、Q 速度相同，

∴ $AP=BQ$．

在△ACP 和△ABQ 中，

$$\begin{cases} AP=BQ \\ \angle CAP=ABQ=60^\circ \\ AC=BA \end{cases},$$

∴ $\triangle ACP\cong\triangle BAQ$，故②正确．

则 $\angle AQC=\angle CPB$．

即 $\angle B+\angle BAQ=\angle BAQ+\angle AMP$．

∴ $\angle AMP=\angle B=60^\circ$．

则 $\angle CMQ=\angle AMP=60^\circ$，故③正确．

∵ $\angle APM$ 不一定等于 60°．

∴ $AP\neq AM$．

∴ $BQ \neq AM$ ． 故①错误.

设时间为 t，则 $AP=BQ=t$，$PB=4-t$

①当$\angle PQB=90°$时，

∵$\angle B=60°$，

∴$PB=2BQ$，得 $6-t=2t$，$t=2$ ；

②当$\angle BPQ=90°$时，

∵$\angle B=60°$，

∴$BQ=2BP$，得 $t=2$（$6-t$），$t=4$；

∴当第 2 秒或第 4 秒时，$\triangle PBQ$ 为直角三角形.

∴④正确.

故选 C.

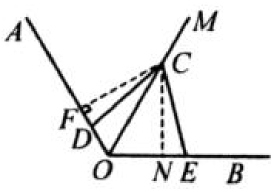
点拨：本题考查了等边三角形的性质、全等三角形的判定与性质、直角三角形的性质等知识点，综合性强，难度较大.

11．A

【分析】过C点作$CN \perp OB$于N点，$CF \perp OA$于F点，根据$\angle AOB$的平分线OM上有一点C，得$\angle AOC = \angle BOC = 60°$，$CF = CN$，从而得$ON = \frac{1}{2}OC$，$OF = \frac{1}{2}OC$，$\angle FCN = 360° - \angle AOB - \angle CFO - \angle CNO = 60°$；当$D$，$E$在射线$OA$，$OB$上时，通过证明$\triangle CFD \cong \triangle CNE$，得$OE + OD = OC$；当$D$，$E$在直线$OA$，射线$OB$上时，通过$\triangle CFD \cong \triangle CNE$，得$OE - OD = OC$；当$D$，$E$在直线$OA$、$OB$上时，得$OD - OE = OC$，即可完成求解.

【详解】

过C点作$CN \perp OB$于N点，$CF \perp OA$于F点



∵OC平分$\angle AOB$

又∵$\angle AOB = 120°$

∴$\angle AOC = \angle BOC = 60°$，$CF = CN$，

∴$\angle OCF = \angle OCN = 30°$

$\therefore ON=\frac{1}{2}OC$， $OF=\frac{1}{2}OC$， $\angle FCN=360^{\circ}-\angle AOB-\angle CFO-\angle CNO=60^{\circ}$

①当 D， E 在射线 OA， OB 上时

$\angle FCN=\angle DCE=60^{\circ}$

$\therefore \angle FCD=\angle ECN$

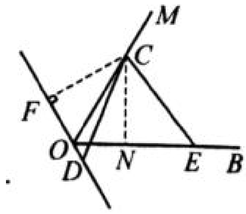
$\because CF=CN$， $\angle CFD=\angle CNE=90^{\circ}$

$\therefore \triangle CFD\cong\triangle CNE$

$\therefore CD=CE$， $FD=NE$

$\therefore OE+OD=ON+NE+OD=ON+DF+OD=ON+OF=OC$．

②如图，当 D， E 在直线 OA，射线 OB 上时

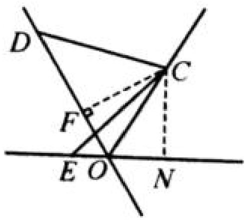


$\triangle CFD\cong\triangle CNE$

$OE=ON+NE=ON+DF=ON+OF+OD=OC+OD$

$\therefore OE-OD=OC$；

③如图，当 D， E 在直线 OA、 OB 上时



$\triangle CFD\cong\triangle CNE$

$\therefore OD-OE=OC$

综上：②③④错误；

故选：A．

【点拨】本题考查了角平分线、全等三角形、直角三角形两锐角互余的知识；解题的关键是熟练掌握角平分线、全等三角形的性质，从而完成求解.

12．90°

【解析】

【分析】根据折叠求出$\angle CFG=\angle EFG=\frac{1}{2}\angle CFE$，根据角平分线定义求出$\angle HFE=\frac{1}{2}\angle BFE$，即可求出$\angle GFH=\angle GFE+\angle HFE=\frac{1}{2}\angle CFB$.

解：∵将长方形纸片 ABCD 的角 C 沿着 GF 折叠（点 F 在 BC 上，不与 B，C 重合），使点 C 落在长方形内部点 E 处，

∴$\angle CFG=\angle EFG=\frac{1}{2}\angle CFE$，

∵FH 平分∠BFE，

∴$\angle HFE=\frac{1}{2}\angle BFE$，

∴$\angle GFH=\angle GFE+\angle HFE=\frac{1}{2}(\angle CFE+\angle BFE)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$ ，

故答案为：90°.

【点拨】本题考查了角的计算，折叠的性质，角平分线定义的应用，主要考查学生的推理和计算能力.

13．6

【分析】利用割补法，把阴影部分移动到一边.

【详解】把阴影部分移动到正方形的一边，恰好是正方形的一半，故正方形面积是 6.

【点拨】割补法，等面积转换,可以简便运算，化复杂为简单.

14．45

【分析】根据三角形全等的判定和性质，先证△ADC≌△BDF，可得 BD=AD，可求∠ABC=∠BAD=45°.

【详解】∵AD⊥BC 于 D，BE⊥AC 于 E

∴∠EAF+∠AFE=90°，∠DBF+∠BFD=90°，

又∵∠BFD=∠AFE（对顶角相等）

∴∠EAF=∠DBF，

在 Rt△ADC 和 Rt△BDF 中，

$$\begin{cases}\angle CAD=\angle FBD\\ \angle BDF=\angle ADC\\ BF=AC\end{cases},$$

∴△ADC≌△BDF（AAS），

∴BD=AD，

即∠ABC=∠BAD=45°.

故答案为 45.

【点拨】三角形全等的判定是中考的热点，一般以考查三角形全等的方法为主，判定两个三角形全等，先根据已知条件或求证的结论确定三角形，然后再根据三角形全等的判定方法，看缺什么条件，再去证什么条件.

15．7

【解析】由 MN∥PQ，AB⊥PQ，可知∠DAE=∠EBC=90°，可判定△ADE≌△BCE，从而得出 AE=BC，则 AB=AE+BE=AD+BC=7.

故答案为：7.

点拨：本题考查了直角三角形全等的判定和性质以及平行线的性质，是基础知识，比较简单.

16．3 或 8

【解析】试题解析：分为两种情况：①当 AP=3 时，

∵BC=3，

∴AP=BC，

∵∠C=90°，AE⊥AC，

∴∠C=∠QAP=90°，

∴在 Rt△ABC 和 Rt△QAP 中，

$$\begin{cases} AB=PQ \\ BC=AP \end{cases}$$

∴Rt△ABC≌Rt△QAP（HL），

②当 AP=8 时，

∵AC=8，

∴AP=AC，

∵∠C=90°，AE⊥AC，

∴∠C=∠QAP=90°，

∴在 Rt△ABC 和 Rt△QAP 中，

$$\begin{cases} AB=PQ \\ AC=AP \end{cases}$$

∴Rt△ABC≌Rt△QAP（HL），

故答案为 3 或 8.

17．①③

【分析】根据题意，容易证明△AEP≌△CFP，然后能推理得到①③都是正确.

【详解】

∵AB=AC，∠BAC=90°，点 P 是 BC 的中点，

∴$\angle EAP=\frac{1}{2}\angle BAC=45°$，$AP=\frac{1}{2}BC=CP$.

①在△AEP 与△CFP 中，

∵∠EAP=∠C=45°，AP=CP，∠APE=∠CPF=90°-∠APF，

∴△AEP≌△CFP，

∴AE=CF．正确；

②只有当 F 在 AC 中点时 EF=AP，故不能得出 EF=AP，错误；

③∵△AEP≌△CFP，同理可证△APF≌△BPE.

∴$S_{\text{四边形}AEPF}=S_{\triangle AEP}+S_{\triangle APF}=S_{\triangle CPF}+S_{\triangle BPE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，即 $2S_{\text{四边形}AEPF}=S_{\triangle ABC}$；正确；

④根据等腰直角三角形的性质，$EF=\sqrt{2}PE$，

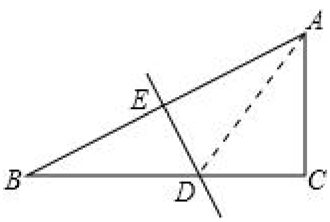
所以，EF 随着点 E 的变化而变化，只有当点 E 为 AB 的中点时，$EF=\sqrt{2}PE=AP$，在其它位置时 EF≠AP，故④错误；

故答案为：①③.

【点拨】本题考查了全等三角形的判定与性质，等腰直角三角形的判定与性质，证得△AEP 和△CFP 全等是解题的关键，也是本题的突破点.

18．2cm

【解析】试题解析：



解：连接 *AD*，

∵*ED* 是 *AB* 的垂直平分线，

∴$BD=AD=4$cm，

∴$\angle BAD=\angle B=30°$，

∵$\angle C=90°$，

∴$\angle BAC=90°-\angle B=90°-30°=60°$，

∴$\angle DAC=60°-30°=30°$，

在 Rt△ACD 中，

∴$DC=\frac{1}{2}AD==\frac{1}{2}\times 4=2$cm．

故答案为 2cm．

点拨：本题考查了线段垂直平分线，在直角三角形中 30 度角所对的边等于斜边的一半，三角形内角和定理，主要考查学生运用性质进行计算的能力．

19．$\frac{25}{2}$

【解析】

【分析】作 CD 的垂直平分线交 AD 于 M，交 CD 与 N，根据垂直平分线的性质可得 MC=MD，进而可得∠MDC=∠MCD，根据已知及外角性质可得∠AMC=∠BED，由等腰直角三角形的性质可得∠B=∠CAB=45°，根据三角形内角和定理可得∠ACM=∠BDE，进而可证明∠ADF=∠ACM，进而即可证明∠FCD=∠FDC，根据等腰三角形的性质可得 CF=DF，根据已知可求出 AC 的长，根据三角形面积公式即可得答案.

【详解】

作 CD 的垂直平分线交 AD 于 M，交 CD 与 N，

∵MN 是 CD 的垂直平分线，

∴MC=MD，

∴∠MDC=∠MCD，

∵∠AMC=∠MDC=∠MCD，

∴∠AMC=2∠ADC，

∵∠BED=2∠ADC，

∴∠AMC=∠BED，

∵∠ACB=90°，AC=BC，

∴∠B=∠CAB=45°，

∵∠ACM=180°-∠CAM-∠AMC，∠BDE=180°-∠B-∠BED，

∴∠ACM=∠BDE，

∵∠BDE=∠ADF，

∴∠ADF=∠ACM，

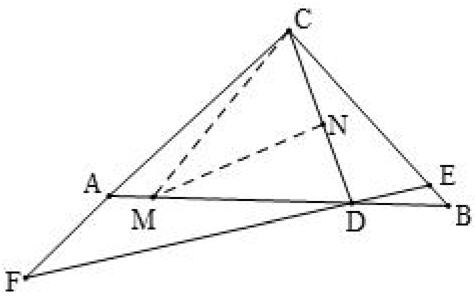
∴∠ADF+∠ADC=∠ACM+∠MCD，即∠FCD=∠FDC，

∴FC=FD，

∵AF=2，FD=7，

∴AC=FC-AF=7-2=5，

∴S△ABC=$\frac{1}{2}$×5×5=$\frac{25}{2}$.



故答案为：$\frac{25}{2}$

【点拨】本题考查了等腰三角形的判定与性质及线段垂直平分线的性质，线段垂直平分线上的点，到线段两端的距离相等；等腰三角形的两个底角相等；熟练掌握相关的定理及性质是解题关键.

20．5

【分析】如图（见解析），先根据三角形全等的判定定理与性质可得 $ME=MN$，再根据两点之间线段最短可得 $BM+MN$ 的最小值为 BE，然后根据垂线段最短可得当 $BE\perp AC$ 时，BE 取得最小值，最后利用三角形的面积公式即可得.

证明：如图，在 AC 上取一点 E，使 $AE=AN$，连接 ME，

∵ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle EAM=\angle NAM$，

在$\triangle AEM$ 和 $\triangle ANM$ 中，$\begin{cases} AE=AN \\ \angle EAM=\angle NAM \\ AM=AM \end{cases}$，

$\therefore \triangle AEM\cong\triangle ANM(SAS)$，

$\therefore ME = MN$，

$\therefore BM + MN = BM + ME$，

由两点之间线段最短得：当点B, M, E共线时，$BM + ME$取最小值，最小值为 BE，

又由垂线段最短得：当$BE \perp AC$时，BE 取得最小值，

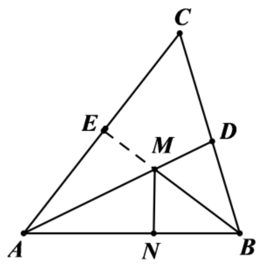
$\because AC = 10, S_{\triangle ABC} = 25$，

$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} \times 10 BE = 25$，

解得$BE = 5$，

即$BM + MN$的最小值为 5，

故答案为：5．



【点拨】本题考查了角平分线的定义、三角形全等的判定定理与性质、两点之间线段最短、垂线段最短等知识点，正确找出$BM + MN$取得最小值时 BE 的位置是解题关键．

21．16

【解析】

过 *D* 作 $DN \perp AC$ 于 *N*,在 *AC* 上找一点 *M*，令 *AM=AE,*

AE=AM,∠EAD=∠MAD,AD=AD,

∴ $\triangle AED \cong \triangle AMD$，

△*ADG* 和△*AED* 的面积分别为 65 和 33,

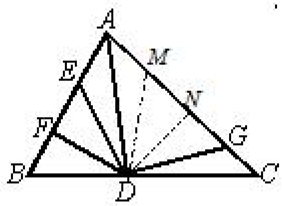
∴ $S_{\triangle MDG} = 65 - 33 = 32$，

∵*DE=DG*, ∴*DM=DG,*所以△*DMG* 是等腰三角形，

∵*DF=DN,DE=DM,*

∴ $\triangle EFD \cong \triangle NMD$，

∴ $S_{\triangle EDF} = \frac{1}{2} S_{\triangle MDG} = 16.$



点拨：证明三角形全等的方法：

（1）三组对应边分别相等的两个三角形全等(简称 SSS).

（2）有两边及其夹角对应相等的两个三角形全等(SAS).

（3）有两角及其夹边对应相等的两个三角形全等(ASA) .

（4）有两角及一角的对边对应相等的两个三角形全等(AAS).

（5）直角三角形全等条件有：斜边及一直角边对应相等的两个直角三角形全等(HL) .

注:S 是边的英文缩写,A 是角的英文缩写，其中证明直角三角形所有 5 种方法都可以用;一般三角形 SSA 不能证明三角形的全等.

22．详见解析

【分析】（1）由角平分线定义可证△BCE≌△DCF（HL）;（2）先证 Rt△FAC≌Rt△EAC，得 AF=AE，由（1）可得 AB+AD=（AE+BE）+（AF﹣DF）=AE+BE+AE﹣DF=2AE.

【详解】

（1）证明：∵AC 是角平分线，CE⊥AB 于 E，CF⊥AD 于 F，

∴CE=CF，∠F=∠CEB=90°，

在 Rt△BCE 和 Rt△DCF 中，$\begin{cases}BC=DC\\CE=CF\end{cases}$

∴△BCE≌△DCF;

（2）解：∵CE⊥AB 于 E，CF⊥AD 于 F，

∴∠F=∠CEA=90°，

在 Rt△FAC 和 Rt△EAC 中，$\begin{cases}AC=AC\\CE=CF\end{cases}$，

∴Rt△FAC≌Rt△EAC，

∴AF=AE，

∵△BCE≌△DCF，

∴BE=DF，

∴AB+AD=（AE+BE）+（AF﹣DF）=AE+BE+AE﹣DF=2AE.

【点拨】

本题考查了全等三角形的判定、性质和角平分线定义，注意：全等三角形的对应角相等，对应边相等，直角三角形全等的判定定理有 SAS，ASA，AAS，SSS，HL．

23．（1）证明见解析；（2）37°

【解析】

分析：（1）先证明 AC=DF，再运用 SSS 证明△ABC≌△DEF；

（2）根据三角形内角和定理可求∠ACB=37°，由（1）知∠F=∠ACB，从而可得结论.

解析：（1）∵AC=AD+DC， DF=DC+CF，且 AD=CF

∴AC=DF

在△ABC 和△DEF 中，

$$\begin{cases} AB = DE \\ BC = EF \\ AC = DF \end{cases}$$

∴△ABC≌△DEF（SSS）

（2）由（1）可知，∠F=∠ACB

∵∠A=55°，∠B=88°

∴∠ACB=180°－（∠A+∠B）=180°－（55°+88°）=37°

∴∠F=∠ACB=37°

点拨：本题考查三角形全等的判定方法和全等三角形的性质，判定两个三角形全等的一般方法有：SSS、SAS、ASA、AAS、HL．

注意：AAA、SSA 不能判定两个三角形全等，判定两个三角形全等时，必须有边的参与，若有两边一角对应相等时，角必须是两边的夹角．

24．（1）证明见解析；（2）∠FAE=135°；（3）证明见解析.

【分析】

（1）根据已知条件易证∠BAC=∠DAE，再由 AB=AD，AE=AC，根据 SAS 即可证得△ABC≌△ADE；

（2）已知∠CAE=90°，AC=AE，根据等腰三角形的性质及三角形的内角和定理可得∠E=45°，由（1）知△BAC≌△DAE，根据全等三角形的性质可得∠BCA=∠E=45°，再求得∠CAF=45°，由∠FAE=∠FAC+∠CAE 即可得∠FAE 的度数；

（3）延长 BF 到 G，使得 FG=FB，易证△AFB≌△AFG，根据全等三角形的性质可得 AB=AG，∠ABF=∠G，再由△BAC≌△DAE，可得 AB=AD，∠CBA=∠EDA，CB=ED，所以 AG=AD，

∠ABF=∠CDA，即可得∠G=∠CDA，利用 AAS 证得△CGA≌△CDA，由全等三角形的性质可得 CG=CD，所以 CG=CB+BF+FG=CB+2BF=DE+2BF．

【详解】（1）∵∠BAD=∠CAE=90°，

∴∠BAC+∠CAD=90°，∠CAD+∠DAE=90°，

∴∠BAC=∠DAE，

在△BAC 和△DAE 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAC = \angle DAE \\ AC = AE \end{cases},$$

∴△BAC≌△DAE（SAS）;

（2）∵∠CAE=90°，AC=AE，

∴∠E=45°，

由（1）知△BAC≌△DAE，

∴∠BCA=∠E=45°，

∵AF⊥BC，

∴∠CFA=90°，

∴∠CAF=45°，

∴∠FAE=∠FAC+∠CAE=45°+90°=135°;

（3）延长 BF 到 G，使得 FG=FB，

∵AF⊥BG，

∴∠AFG=∠AFB=90°，

在△AFB 和△AFG 中，

$$\begin{cases} BF = GF \\ \angle AFB = \angle AFG \\ AF = AF \end{cases},$$

∴△AFB≌△AFG（SAS），

∴AB=AG，∠ABF=∠G，

∵△BAC≌△DAE，

∴AB=AD，∠CBA=∠EDA，CB=ED，

∴AG=AD，∠ABF=∠CDA，

∴∠G=∠CDA，

在△CGA 和△CDA 中，

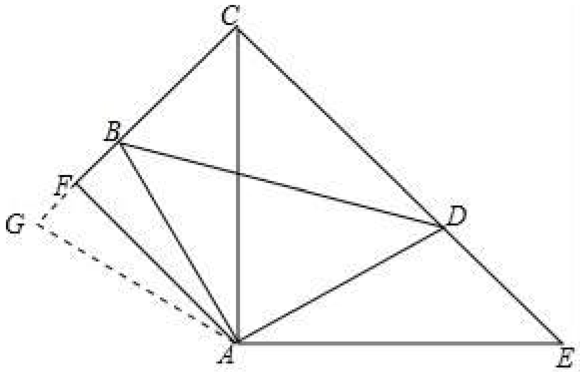
$$\begin{cases}\angle GCA=\angle DCA\\ \angle CGA=\angle CDA\\ AG=AD\end{cases},$$

∴△CGA≌△CDA，

∴CG=CD，

∵CG=CB+BF+FG=CB+2BF=DE+2BF，

∴CD=2BF+DE．



【点拨】本题考查全等三角形的判定与性质，解决第 3 问需作辅助线，延长 BF 到 G，使得 FG=FB，证得△CGA≌△CDA 是解题的关键．

25．（1）见解析（2）成立（3）△DEF 为等边三角形

【分析】

（1）因为 DE=DA+AE，故由 AAS 证△ADB≌△CEA，得出 DA=EC，AE=BD，从而证得 DE=BD+CE．

（2）成立，仍然通过证明△ADB≌△CEA，得出 BD=AE，AD=CE，所以 DE=DA+AE=EC+BD．

（3）由△ADB≌△CEA 得 BD=AE，∠DBA =∠CAE，由△ABF 和△ACF 均等边三角形，得∠ABF=∠CAF=60^0，FB=FA，所以∠DBA+∠ABF=∠CAE+∠CAF，即∠DBF=∠FAE，所以△DBF≌△EAF，所以 FD=FE，∠BFD=∠AFE，再根据∠DFE=∠DFA+∠AFE=∠DFA+∠BFD=60^0 得到△DEF 是等边三角形．

解：（1）证明：∵BD⊥直线 m，CE⊥直线 m，∴∠BDA＝∠CEA=90^0．

∵∠BAC＝90^0，∴∠BAD+∠CAE=90^0．

∵∠BAD+∠ABD=90^0，∴∠CAE=∠ABD．

又 AB="AC"，∴△ADB≌△CEA（AAS）．∴AE=BD，AD=CE．

∴DE="AE+AD=" BD+CE．

（2）成立．证明如下：

∵∠BDA =∠BAC=α，∴∠DBA+∠BAD=∠BAD +∠CAE=180^0—α．∴∠DBA=∠CAE．

∵∠BDA=∠AEC=α，AB=AC，∴△ADB≌△CEA（AAS）．∴AE=BD，AD=CE．

∴DE=AE+AD=BD+CE．

（3）△DEF 为等边三角形．理由如下：

由（2）知，△ADB≌△CEA，BD=AE，∠DBA =∠CAE，

∵△ABF 和△ACF 均为等边三角形，∴∠ABF=∠CAF=60^0．

∴∠DBA+∠ABF=∠CAE+∠CAF．∴∠DBF=∠FAE．

∵BF=AF，∴△DBF≌△EAF（ASA）．∴DF=EF，∠BFD=∠AFE．

∴∠DFE=∠DFA+∠AFE=∠DFA+∠BFD=60^0．

∴△DEF 为等边三角形．

26．（1）证明见解析；（2）40°；（3）当α的度数为 115°或 85°或 145°时，△AOD 是等腰三角形．

【分析】

（1）由已知证明△AOB≌△ADC，根据全等三角形的性质即可证得；

（2）由∠BOC=130°，根据周角的定义可得∠BOA+∠AOC=230°，再根据全等三角形的性质继而可得∠ADC+∠AOC=230°，由∠DAO=90°，在四边形 AOCD 中，根据四边形的内角和即可求得∠DCO 的度数；

（3）分三种情况进行讨论即可得．

【详解】

（1）∵∠BAC=∠OAD=90°，

∴∠BAC﹣∠CAO=∠OAD﹣∠CAO，

∴∠DAC=∠OAB，

在△AOB 与△ADC 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle OAB = \angle DAC \\ AO = AD \end{cases},$$

∴△AOB≌△ADC，

∴OB=DC；

（2）∵∠BOC=130°，

∴∠BOA+∠AOC=360° - 130°=230°，

∵△AOB≌△ADC

∠AOB=∠ADC，

∴∠ADC+∠AOC=230°，

又∵△AOD 是等腰直角三角形，

∴∠DAO=90°，

∴四边形 AOCD 中，∠DCO=360° - 90° - 230°=40°；

（3）当 CD=CO 时，

∴∠CDO=∠COD=$\dfrac{180°-\angle DCO}{2}=\dfrac{180°-40°}{2}$=70°，

∵△AOD 是等腰直角三角形，

∴∠ODA=45°，

∴∠CDA=∠CDO+∠ODA=70°+45°=115°，

又∠AOB=∠ADC=α，

∴α=115°；

当 OD=CO 时，

∴∠DCO=∠CDO=40°，

∴∠CDA=∠CDO+∠ODA=40°+45°=85°，

∴α=85°；

当 CD=OD 时，

∴∠DCO=∠DOC=40°，

∠CDO=180° - ∠DCO - ∠DOC=180° - 40° - 40°=100°，

∴∠CDA=∠CDO+∠ODA=100°+45°=145°，

∴α=145°，

综上所述：当α的度数为 115°或 85°或 145°时，△AOD 是等腰三角形.

【点拨】本题考查了全等三角形的判定与性质、四边形的内角和、等腰三角形的判定等，综合性较强，熟练掌握和灵活运用相关性质和定理是解题的关键.

27.（1）见解析；（2）图 2 成立，图 3 不成立：$S_{\triangle DEF}-S_{\triangle CEF}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

【分析】

（1）根据等腰直角三角形和正方形的性质得到$\triangle AED$、$\triangle DFB$、$\triangle EDF$、$\triangle ECF$为全等的等腰直角三角形，据此即可证明；

（2）对于图2：过点D作$DM\perp AC$，$DN\perp BC$，根据中位线的性质和等量代换证得$MD=ND$和$\angle MDE=\angle NDF$，结合$\angle DME=\angle DNF=90^{\circ}$，证得$\Delta DME\cong\Delta DNF$，根据全等三角形的性质即可求证；对于图3：根据ASA证明$\Delta DME\cong\Delta DNF$，根据全等三角形的性质即可求证．

【详解】

（1）证明：连接CD

∵D为AB边的中点，$AC=BC$

∴AD=CD=BD

∴$\angle DAC=\angle DCA=\angle DCB=\angle DBC=45^{\circ}$

又∵$DE\perp AC$，$\angle EDF=90^{\circ}$，$\angle C=90^{\circ}$，

∴四边形ECFD为矩形

∴∠CFD=90°

又∵∠DCF=45°

∴CF=DF

∴四边形ECFD是正方形

∴DE=DF

∴$S_{\triangle DEF}+S_{\triangle CEF}=S_{\triangle DEC}+S_{\triangle DFC}$

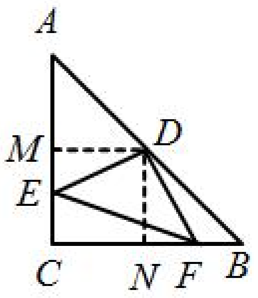
又∵$S_{\triangle DCF}+S_{\triangle DBF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，且$S_{\triangle DCF}=S_{\triangle DBF}$

∴$S_{\triangle DEF}+S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

（2）图2成立，图3不成立

对于图2：

过点D作$DM\perp AC$，$DN\perp BC$，如图2，则$\angle DME=\angle DNF=\angle MDN=90^{\circ}$



又$\because \angle C = 90°$

$\therefore DM \parallel BC$， $DN \parallel AC$

$\because D$ 为 AB 边的中点

$\therefore$根据中位线定理得到：$DN = \frac{1}{2}AC$， $MD = \frac{1}{2}BC$

$\because$AC=BC

$\therefore$MD=ND

$\because \angle EDF = 90°$

$\therefore \angle MDE + \angle EDN = 90°$， $\angle NDF + \angle EDN = 90°$

$\therefore \angle MDE = \angle NDF$

在 ΔDME 与 ΔDNF 中

$$\begin{cases} \angle DME = \angle DNF \\ MD = ND \\ \angle MDE = \angle NDF \end{cases}$$

$\therefore \Delta DME \cong \Delta DNF$

$\therefore S_{\Delta DME} = S_{\Delta DNF}$

$\therefore S_{\text{四边形}DMCN} = S_{\text{四边形}DECF} = S_{\Delta DEF} + S_{\Delta CEF}$

$\therefore S_{DMCN} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

$\therefore S_{\triangle DEF} + S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

对于图 3：

连接 DC，

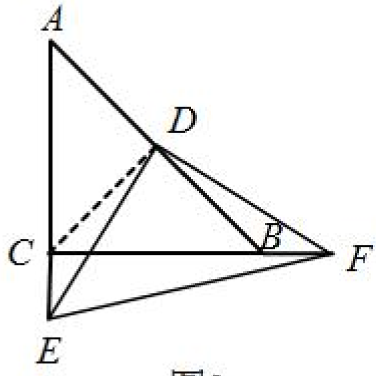


图3

在 ΔDEC 与 ΔDBF 中

$$\begin{cases} \angle DCE = \angle DBF = 135^\circ \\ DC = DB \\ \angle CDE = \angle BDF \end{cases}$$

$\therefore \Delta DEC \cong \Delta DBF$

$\therefore S_{\Delta DEF} = S_{五边形DBFEC} = S_{\Delta CFE} + S_{\Delta DBC} = S_{\Delta CFE} + \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}$

$\therefore S_{\Delta DEF} - S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}$．

【点拨】本题考查了全等三角形的判定和性质，中位线的性质，等腰直角三角形的性质，题目较为综合，利用作出的辅助线将不规则的三角形转化为直角三角形进行解决.