

分式和一元二次方程测试

一、选择题

1. 在式子 $\frac{1}{a}$, $\frac{2xy}{\pi}$, $\frac{3a^2b^3c}{4}$, $\frac{5}{5+x}$, $\frac{x}{7} + \frac{y}{8}$, $\frac{x^2}{x}$ 中, 分式的个数是()
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
2. 把分式 $\frac{xy}{x+y}$ ($x+y \neq 0$) 中的 x , y 都扩大 3 倍, 那么分式的值()
A. 扩大为原来的 3 倍 B. 缩小为原来的 $\frac{1}{3}$ C. 扩大为原来的 9 倍 D. 不变
3. 要使分式 $\frac{3x^2-6x+3}{(x-1)^3}$ 的值为整数, 则整数 x 的取值的个数为()
A. 5 B. 2 C. 3 D. 4
4. 已知 x 为整数, 且 $\frac{2}{x+3} + \frac{2}{3-x} + \frac{2x+18}{x^2-9}$ 为整数, 则所有符合条件的 x 的值之和为()
A. 12 B. 16 C. 18 D. 20
5. 对于正数 x , 规定 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 例如 $f(2) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$, $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$, 则 $f(2016) + f(2015) + \dots + f(2) + f(1) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2015}) + f(\frac{1}{2016})$ 的值是()
A. 2015 B. 2016 C. 2015.5 D. 2016.5
6. 已知三个数 a , b , c 满足 $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{3}$, $\frac{bc}{b+c} = \frac{1}{4}$, $\frac{ac}{a+c} = \frac{1}{5}$, 则 $\frac{abc}{ab+bc+ac}$ 的值为()
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{1}{20}$
7. 已知实数 a , b , c 均不为零, 且满足 $a+b+c=0$, 则 $\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2}$ 的值()
A. 为正 B. 为负 C. 为 0 D. 与 a , b , c 的取值有关
8. 关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-2} - \frac{3}{2-x} = 1$ 有增根, 则 m 的值()
A. $m=2$ B. $m=1$ C. $m=3$ D. $m=-3$
9. 某工程队承接了 80 万平方米的荒山绿化任务, 为了迎接雨季的到来, 实际工作时每天的工作效率比原计划提高了 35%, 结果提前 40 天完成了这一任务. 设实际工作时每天绿化的面积为 x 万平方米, 则下面所列方程中正确的是()
A. $\frac{80(1+35\%)}{x} - \frac{80}{x} = 40$ B. $\frac{80}{(1+35\%)x} - \frac{80}{x} = 40$
C. $\frac{80}{x} - \frac{80}{(1+35\%)x} = 40$ D. $\frac{80}{x} - \frac{80(1+35\%)}{x} = 40$
10. 若关于 x 的方程 $\frac{1}{x-1} - \frac{a}{2-x} = \frac{2(a+1)}{(x-1)(x-2)}$ 无解, 则 a 的值为()
A. $-\frac{3}{2}$ 或 -2 B. $-\frac{3}{2}$ 或 -1 C. $-\frac{3}{2}$ 或 -2 或 -1 D. -2 或 -1

11. 阅读下面的解题过程:

已知 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值.

解: 由 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$ 知 $x \neq 0$, 所以 $\frac{x^2+1}{x} = 2$, 即 $x + \frac{1}{x} = 2$.

于是有 $\frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2$, 故 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值为 $\frac{1}{2}$.

解答下面的题目: 已知 $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{7}$, 则 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值为().

A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{49}$ D. $\frac{1}{63}$

12. 若关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases} x - \frac{1}{4}(4a-2) \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3x-1}{2} < x+2 \end{cases}$ 的解集是 $x \leq a$, 且关于 y 的分式

方程 $\frac{2y-a}{y-1} - \frac{y-4}{1-y} = 1$ 有非负整数解, 则符合条件的所有整数 a 的和为()

A. 0 B. 1 C. 4 D. 6

13. 若数 a 使关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{1+x}{3} \\ 5x-2 \geq x+a \end{cases}$ 有且只有四个整数解, 且使关于 y 的方

程 $\frac{y+a}{y-1} + \frac{2a}{1-y} = 2$ 的解为非负数, 则符合条件的所有整数 a 的和为()

A. -3 B. -2 C. 1 D. 2

14. 若关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 + 2x - 2 = 0$ 没有实数根, 则实数 m 的取值范

围是() A. $m < \frac{1}{2}$ B. $m > \frac{1}{2}$ C. $m > \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 1$ D. $m \neq 1$

15. 若关于 x 的一元二次方程 $(k+2)x^2 + 3x + k^2 - k - 6 = 0$ 必有一根为 0, 则 k 的值

是() A. 3 或 -2 B. -3 或 2 C. 3 D. -2

16. 已知关于 x 的方程 $(1-2k)x^2 - 2\sqrt{k+1}x - 1 = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是()

A. $k \geq 2$ B. $k \leq 2$ C. $-1 \leq k \leq 2$ D. $-1 \leq k \leq 2$ 且 $k \neq \frac{1}{2}$

17. 关于 x 的方程 $x^2 + 2(m-1)x + m^2 - m = 0$ 有两个实数根 α, β , 且 $\alpha^2 + \beta^2 = 12$,

那么 m 的值为() A. -1 B. -4 C. -4 或 1 D. -1 或 4

18. 有两个一元二次方程: $M: ax^2 + bx + c = 0$; $N: cx^2 + bx + a = 0$, 下列错误的是

() A. 如果方程 M 有两个相等的实数根, 那么方程 N 也有两个相等的实数根

B. 如果方程 M 有两根都是正数, 那么方程 N 的两根也都是正数

C. 如果 5 是方程 M 的一个根, 那么 $\frac{1}{5}$ 是方程 N 的根

D. 如果方程 M 和方程 N 有一个相同的根, 那么这个根必是 $x = 1$

二、填空题（本大题共 18 小题，共 54.0 分）

19. 如果 $a + \frac{1}{b} = 1$, $b + \frac{2}{c} = 1$, 那么 $c + \frac{2}{a}$ 的值为_____.
20. 已知 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$, 则分式 $\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$ 的值为_____.
21. 已知实数 a, b 满足 $ab = 1$, 那么 $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1}$ 的值为_____.
22. 已知实数 x, y, z 满足 $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 1$, 则分式 $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}$ 的值为_____.
23. 若 $a + b + c = 0$, 且 $abc \neq 0$, 则 $a(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + b(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}) + c(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ 的值为_____.
24. 关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x-2} + 2 = \frac{1-k}{2-x}$ 的解为正实数, 则 k 的取值范围是_____.
25. 定义: $a * b = \frac{a}{b}$, 则方程 $2 * (x + 3) = 1 * (2x)$ 的解为_____.
26. 如果方程 $kx^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数根, 则实数 k 的取值范围是_____.
27. 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围是_____.
28. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 + (3k + 1)x + 2k^2 + 1 = 0$ 的两个不相等实数根, 且满足 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 8k^2$, 则 k 的值为_____.
29. 已知关于 x 的方程 $(m - 1)x^{m^2+1} + 2x - 3 = 0$ 是一元二次方程, 则 m 的值为_____.此时方程根的情况为_____.
30. 已知关于 x 的一元二次方程: $x^2 - 2x - a = 0$, 有下列结论:
- ①当 $a > -1$ 时, 方程有两个不相等的实根;
 - ②当 $a > 0$ 时, 方程不可能有两个异号的实根;
 - ③当 $a > -1$ 时, 方程的两个实根不可能都小于 1;
 - ④当 $a > 3$ 时, 方程的两个实根一个大于 3, 另一个小于 3.
- 以上 4 个结论中, 正确的个数为_____.
31. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k + 1)x + k^2 - 2 = 0$ 的两根 x_1 和 x_2 , 且 $x_1^2 - 2x_1 + 2x_2 = x_1x_2$, 则 k 的值是_____.
32. 设 a, b 是方程 $x^2 + 4x - 2017 = 0$ 的两个实数根, 则 $a^2 + 5a + b$ 的值为_____.
33. 已知 $m^2 - 2m - 1 = 0$, $n^2 + 2n - 1 = 0$ 且 $mn \neq 1$, 则 $\frac{mn+n+1}{n}$ 的值为_____.
34. 设 $a^2 + 2a - 1 = 0$, $b^4 - 2b^2 - 1 = 0$, 且 $1 - ab^2 \neq 0$, 则 $(\frac{ab^2+b^2-3a+1}{a})^5 =$ _____.
35. 设 α, β 是方程 $x^2 - x - 2018 = 0$ 的两根, 则 $\alpha^3 + 2019\beta - 2018$ 的值为_____.
36. 如果方程 $(x - 1)(x^2 - 2x + m) = 0$ 的三个根可以作为一个三角形的三边之长, 则实数 m 的取值范围_____.

答题区

一、选择题 1--6、_____ 7--12、_____ 13--18 _____

二、填空题

19、_____ 20、_____ 21、_____ 22、_____ 23、_____

24、_____ 25、_____ 26、_____ 27、_____ 28、_____

29、_____ 30、_____ 31、_____ 32、_____ 33、_____

34、_____ 35、_____ 36、_____

三、计算题（本大题共 1 小题，共 6.0 分）

37. (1) $(1 - \frac{1}{1-x}) \div \frac{x}{x-1}$. (2) $(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}) \div (1 - \frac{a^2+b^2}{a^2-2ab+b^2})$

四、解答题（本大题共 7 小题，共 56.0 分）

38. 解方程: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x}{x+2} = \frac{16}{x^2-4}$ （切记一定要检验）.

39. 自从湖南与欧洲的“湘欧快线”开通后，我省与欧洲各国经贸往来日益频繁，某欧洲客商准备在湖南采购一批特色商品，经调查，用 16000 元采购 A 型商品的件数是用 7500 元采购 B 型商品的件数的 2 倍，一件 A 型商品的进价比一件 B 型商品的进价多 10 元. (1)求一件 A, B 型商品的进价分别为多少元？

(2)若该欧洲客商购进 A, B 型商品共 250 件进行试销，其中 A 型商品的件数不大于 B 型的件数，且不小于 80 件. 已知 A 型商品的售价为 240 元/件，B 型商品的售价为 220 元/件，且全部售出. 设购进 A 型商品 m 件，求该客商销售这批商品的利润 v 与 m 之间的函数关系式，并写出 m 的取值范围；

(3)在(2)的条件下，欧洲客商决定在试销活动中每售出一件 A 型商品，就从一件 A 型商品的利润中捐献慈善资金 a 元，求该客商售完所有商品并捐献慈善资金后获得的最大收益.

40. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个实数根，且其中一个根为另一个根的 2 倍，那么称这样的方程为“倍根方程”.例如，一元二次方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的两个根是 2 和 4，则方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 就是“倍根方程”.

(1)若一元二次方程 $x^2 - 3x + c = 0$ 是“倍根方程”，则 $c =$ _____；

(2)若 $(x - 2)(mx - n) = 0 (m \neq 0)$ 是“倍根方程”，求 $4m^2 - 5mn + n^2$ 的值；

(3)若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 是“倍根方程”，求 a, b, c 之间的关系.

41. 已知关于 x 的方程 $mx^2 - (2m - 1)x + m - 2 = 0$.

(1) 当 m 取何值时, 方程有两个不相等的实数根;

(2) 若 x_1 、 x_2 为方程的两个不等实数根, 且满足 $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 2$, 求 m 的值.

42. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 6mx + 9m^2 - 9 = 0$.

(1) 求证: 此方程有两个不相等的实数根;

(2) 若此方程的两个根分别为 x_1 , x_2 , 其中 $x_1 > x_2$, 若 $x_1 = 2x_2$, 求 m 的值.

43. 某水果批发商经销一种高档水果, 如果每千克盈利 5 元, 每天可售出 200 千克, 经市场调查发现, 在进价不变的情况下, 若每千克涨价 0.1 元, 销售量将减少 1 千克

(1) 现该商场保证每天盈利 1500 元, 同时又要照顾顾客, 那么每千克应涨价多少元?

(2) 若该商场单纯从经济利益角度考虑, 这种水果每千克涨价多少元, 使该商场获利最大?

44. 重庆实验外国语学校初 2017 级学生会进行了爱心义卖活动，准备将义卖获得的利润全部用于易书吧购买图书，免费借阅给全校学生，首次购进的义卖商品单价为 25 元，共卖出 120 件，第二次购进的义卖商品的单价是 20 元，共卖出 150 件.已知首次义卖的每件售价比第二次多 20 元，但第二次比第一次少获得 600 元.
- (1)求第二次义卖的商品每件售价是多少元?
- (2)为了让全校更多同学借阅到图书，初 2017 级学生会决定再进行一次义卖活动，此次义卖购进的商品单价为 15 元，每件售价比第二次上调了 $a\%$ ，则卖出的件数比第二次减少 $2a\%$ ，若第三次获利 4500 元，求 a 的值.