

分式

一、定义：整式A除以B可以表示为 $\frac{A}{B}$ ，B中含字母， $\frac{A}{B}$ 为分式

二、当B $\neq 0$ 时， $\frac{A}{B}$ 有意义

当B=0时， $\frac{A}{B}$ 无意义

当 $\begin{cases} A=0 \\ B \neq 0 \end{cases}$ 时， $\frac{A}{B}$ 值为0

三、基本性质

分式的分子、分母都乘以同(或除以)同一个不为零的整式，分式值不变

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} = \frac{A \div M}{B \div M} \quad (M \neq 0)$$

四、符号法则

$$-\frac{-A}{-B} = -\frac{A}{B} = \frac{-A}{B}$$

分式乘除法

约分：将分式的分子、分母中的公因式约去

目的：将分式化为最简分式或整式

分式方程：分母中含有未知数的方程是分式方程

一元二次方程

定义：只含有一个未知数，并且未知数的次数为2，这样的整式方程是一元二次方程

一般形式： $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c为常数且 $a \neq 0$)

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

解： $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$$\therefore x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\therefore \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

① $b^2 - 4ac > 0$ ，方程有两个不等实数根

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{求根公式}$$

② $b^2 - 4ac = 0$ ，方程有两个相等实根

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

③ $b^2 - 4ac < 0$ ，方程无实根

根的判别式: $\Delta = b^2 - 4ac$

对于 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 前提

① $\Delta \geq 0 \iff$ 方程有两个实数根

② $\Delta > 0 \iff$ 方程有两个不相等的实根

③ $\Delta = 0 \iff$ 方程有两个相等的实根

④ $\Delta < 0 \iff$ 无实根

例: 方程 $kx^2 - 6x + 1 = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围?

① 当 $k=0$ 时, 方程为 $-6x + 1 = 0$

有一个实根

$\therefore k=0$ 符合

② 当 $k \neq 0$ 时, 为一元二次方程

$$\Delta = 36 - 4k \geq 0$$

$$\therefore k \leq 9 \text{ 且 } k \neq 0$$

综上, $k \leq 9$

根与系数的关系

韦达定理: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 前提, 当 $\Delta \geq 0$ 时有两个实根 x_1, x_2

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

比例线段

(一) 线段的比: 线段 AB, CD 的长分别为 m, n , 则线段的比就是长度的比

$$\text{即 } AB:CD = 2:3 \left(\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3} \right)$$

$AB:CD$
前项 后项

(二) 比例线段

定义: 若线段 a, b, c, d 满足 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($a:b=c:d$), 就称 a, b, c, d 是(成)比例线段

内项 第四比例项
外项

(三) 1. 基本性质

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \therefore ad = bc$$

比例式 \implies 等积式

$$\therefore ad = bc \therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

2. 合比性质

$$\text{若 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 则 } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \left(\frac{a}{b} + 1 \right), \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

3. 等比性质

若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{m}{n}$ ($b+d+f+\dots+n \neq 0$), 则 $\frac{a+c+e+\dots+m}{b+d+f+\dots+n} = \frac{a}{b} = \dots$

证明: 设 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{m}{n} = k$

则 $a=bk, c=dk, \dots, m=nk$

$$\therefore \frac{a+c+e+\dots+m}{b+d+f+\dots+n}$$

$$= \frac{bk+dk+\dots+nk}{b+d+f+\dots+n}$$

$$= \frac{k(b+d+f+\dots+n)}{b+d+f+\dots+n}$$

$$= k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

比例中项: 若 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ($b^2=ac$), 则 b 为 a, c 的比例中项

例: 线段 4, 9 的比例中项 6

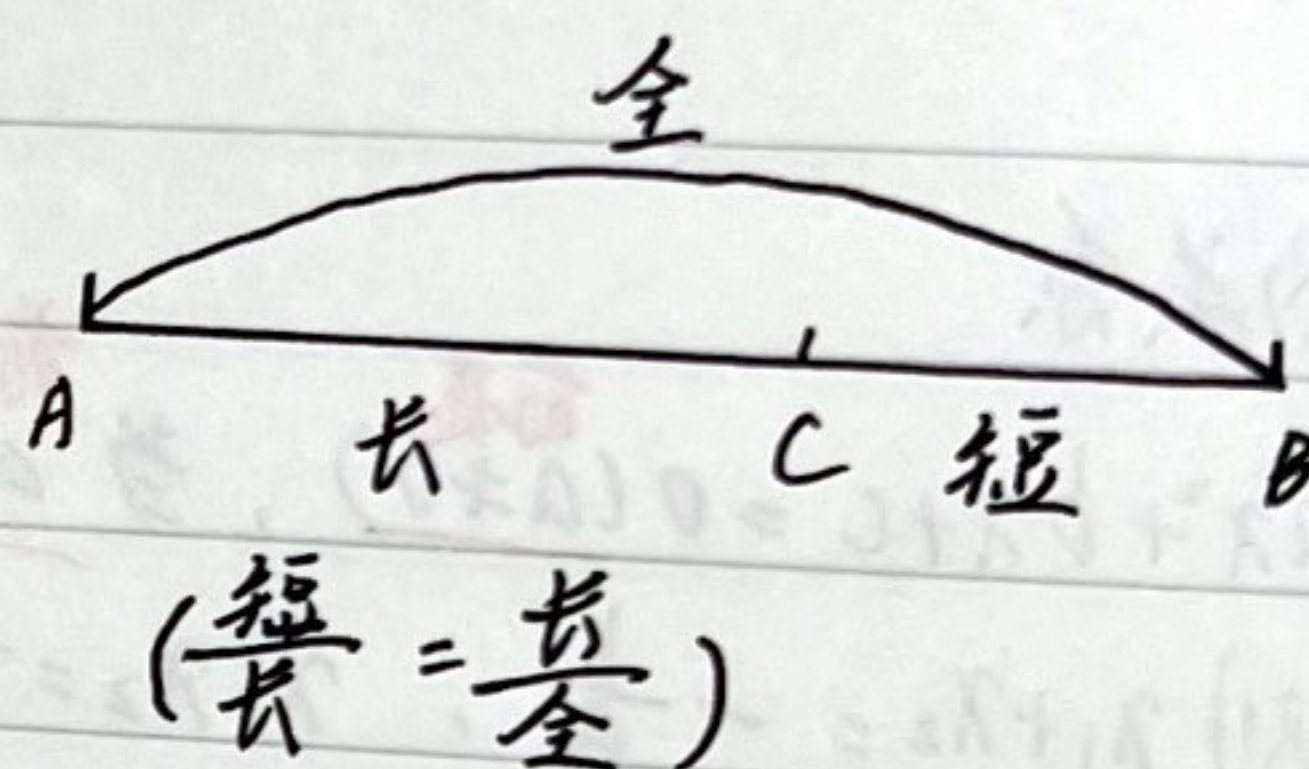
4, 9 的比例中项 ± 6

黄金分割

定义: 点 C 在线段 AB 上, 若 $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$, 则 C 为 AB 的黄金分割点,

黄金比是 AC 与 AB 的比。

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

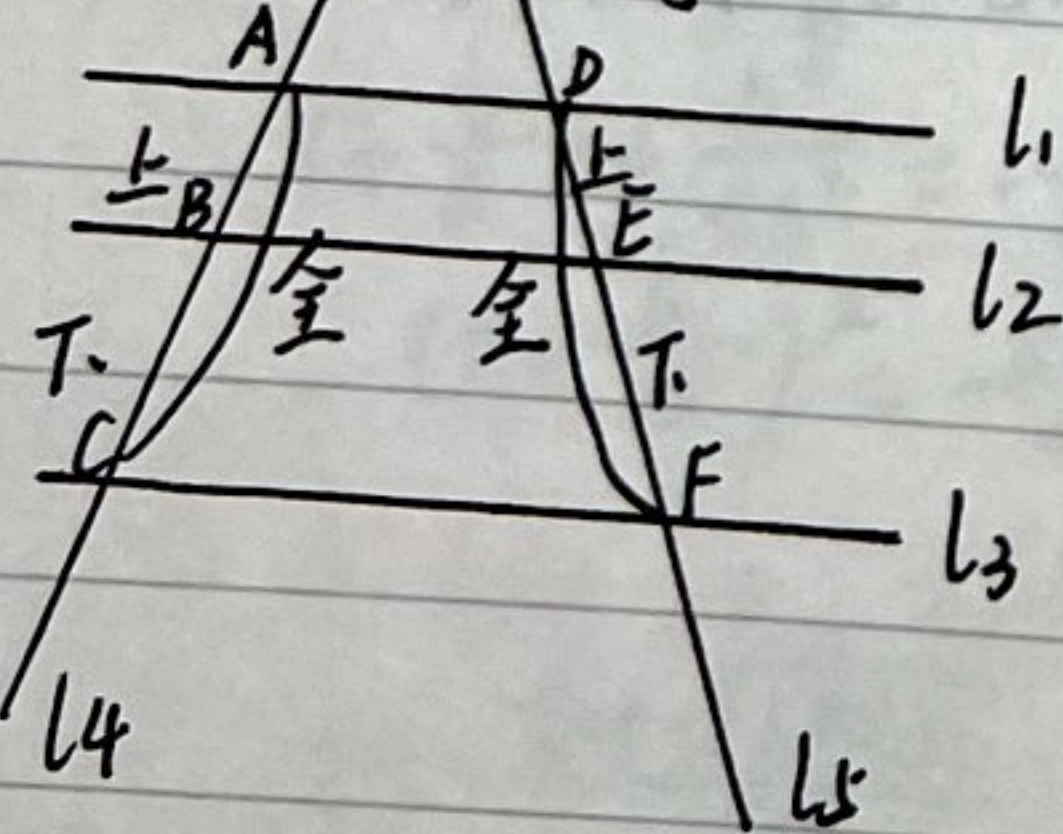


等价定义: ① 若 $AC^2=BC \cdot AB$ ($AC>BC$), 则 C 为 AB 的黄金分割点

② 若 AC 是 BC 和 AB 的比例中项, 则 C 为 ~

③ 若 $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 则 C 为 AB 的 ~

平行线分线段成比例



定理: 两条直线被一组平行线所截, 截得的对应线段成比例,

推论: $DE \parallel BC$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$\therefore DE \parallel BC$

$$\therefore \frac{DA}{AB} = \frac{EA}{AC}$$

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$$

平行于三角形一边的直线与其他两边 (或两边的延长线) 相交, 截得的对应线段成比例

推论 2: 平行于... 相交, 截得的三角形与原三角形三边对应成比例

相似多边形

一、定义：形状相同，大小不一定相同的图形相似。 “相似”

二、相似多边形性质

(一) 相似多边形的对应角相等，对应边成比例；

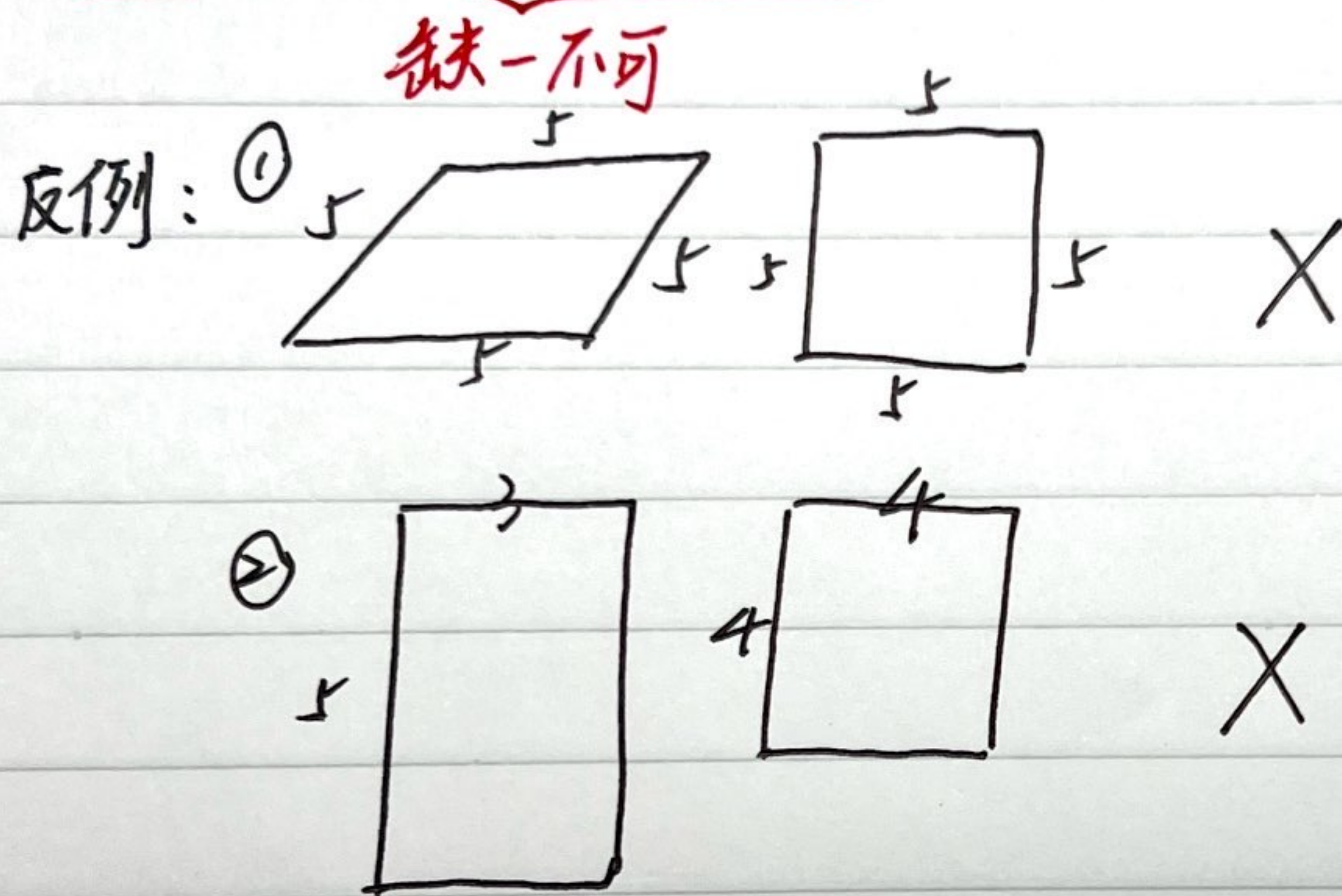
相似比：对应边的比
(有顺序)

(二) 相似多边形周长之比等于相似比；

面积之比等于相似比的平方。

全等是特殊的相似 (相似比 1:1)

三、判定：对应边成比例，对应角相等的两个多边形相似；



相似判定(一)

判定一：两角对应相等的两个三角形相似

二：两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似

三：三边对应成比例的两个三角形相似