二次函数与面积学案 1 答案

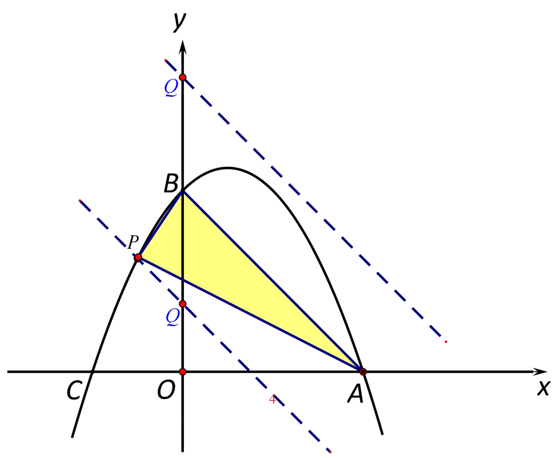
1 简析：

①在y轴上找一点Q，使△QAB面积为5

Q（$0,\frac{3}{2}$）或（$0,\frac{13}{2}$）

②过点Q作AB的平行线

③联立解析式求交点



答案：（$-1,\frac{5}{2}$）或（$5,-\frac{7}{2}$）

答案：同理可得 P 点坐标为：（$2,4$）或（$2\sqrt{2}+2,-2\sqrt{2}$）或（$-2\sqrt{2}+2,2\sqrt{2}$）

练一练：已知直线$y=x-1$与 x 轴交于点 A，过 x 轴上 A，C 两点的抛物线$y=ax^2+bx+3$ 与 y 轴交于点 B，与直线$y=x-1$交于 D 且$OB=OC$，

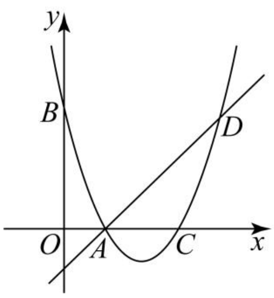


图1

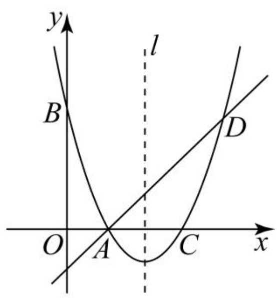


图2

（1）直接写出 A，B，C 三点的坐标；

（2）求抛物线的解析式；

（3）若点 M 是抛物线对称轴 l 上一动点，当$\triangle CDM$的周长最小时，求$\triangle CDM$的面积；

（4）点 P 是抛物线上一动点（点 P 不与 B，C 重合），连接AP，DP，若$\triangle ADP$的面积等于3，求点 P 的坐标.

【思路点拨】

（1）先求出点 C 的坐标，进而求出点 B 的坐标，在$y=x-1$中，当$y=0$时，$x=1$，即可求出点 A 的坐标；

（2）利用待定系数法求解即可；

（3）先求出$D(4,3)$；设直线AD与直线 l 交于点 H，连接AM、CM，CH，由对称性可知$AM=CM$，则当A、M、D三点共线时，$AM+DM$最小，即此时$\triangle CDM$的周长最小，最小值为$AD+CD$，此时点 M 与点 H 重合，根据$S_{\triangle CDH}=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle ACH}$进行求解即可；

（4）先求出过点 C 且与AD平行的直线解析式为$y=x-3$，再证明$S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ADP}$，则由平行线间的距离处处相等可得点 P 在直线$y=x-3$或在直线$y=x+1$上，据此求解即可.

【解题过程】

（1）解：在$y=ax^2+bx+3$中，当$x=0$时，$y=3$，

$\therefore C(3,0)$，

$\therefore OB=OC=3$，

$\therefore B(0,3)$，

在$y=x-1$中，当$y=0$时，$x=1$，

$\therefore A(1,0)$；

（2）解：设抛物线解析式为$y=a(x-1)(x-3)$，

把$C(0,3)$代入$y=a(x-1)(x-3)$中得 $3=a(0-1)(0-3)$，

解得$a=1$，

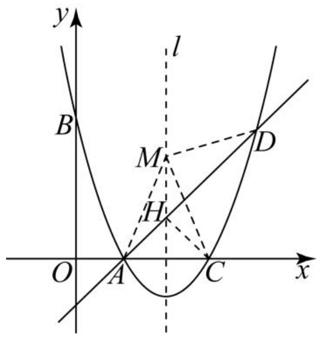
$\therefore$抛物线解析式为$y=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$；

（3）解：联立$\begin{cases} y=x-1 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$或$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$，

$\therefore D(4,3)$；

设直线AD与直线 l 交于点 H，连接AM、CM，CH，



由对称性可知$AM = CM$，

∴$\triangle CDM$的周长$= CM + DM + CD = AM + DM + CD$，

∵CD是定值，

∴当A、M、D三点共线时，$AM + DM$最小，即此时$\triangle CDM$的周长最小，最小值为$AD + CD$，此时点 M 与点 H 重合，

∵$A(1，0)$，$B(3，0)$，

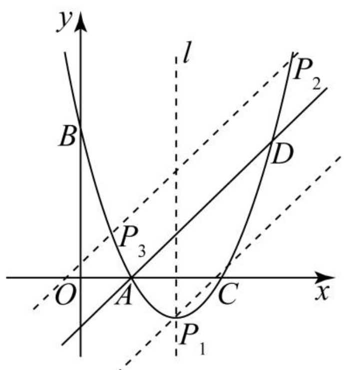
∴抛物线对称轴为直线$x = 2$，

在$y = x - 1$ 中，当$x = 2$ 时，$y = 1$，

∴$H(2，1)$，

∴$S_{\triangle CDH} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle ACH} = \frac{1}{2} \times (3 - 1) \times 3 - \frac{1}{2} \times (3 - 1) \times 1 = 2$；

（4）解：设过点 C 且与AD平行的直线解析式为$y = x + b_1$，



∴$0 = 3 + b_1$，

∴$b_1 = -3$，

∴过点 C 且与AD平行的直线解析式为$y = x - 3$，

∵$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times (3 - 2) \times 3 = 3$，

∴$S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ADP}$，

∴由平行线间的距离处处相等可得点 P 在直线$y=x-3$ 或在直线$y=x+1$ 上，

联立$\begin{cases} y=x-3 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$或$\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$，

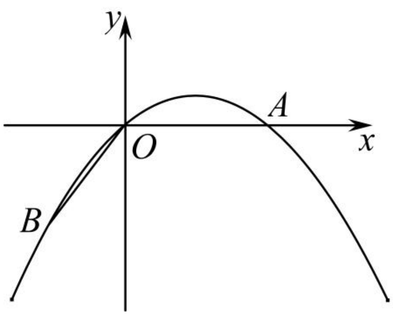
∴$P_1(2,\ -1)$；

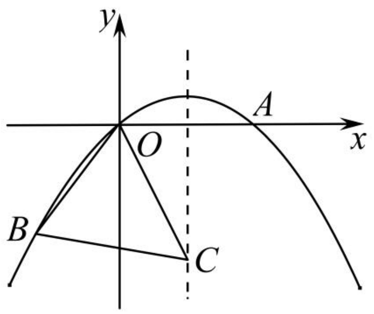
联立$\begin{cases} y=x+1 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=\frac{5+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{7+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$或$\begin{cases} x=\frac{5-\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{7-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$，

∴$P_2\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2},\ \frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$或$P_3\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2},\ \frac{7-\sqrt{17}}{2}\right)$；

综上所述，点 P 的坐标为$P_1(2,\ -1)$或$P_2\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2},\ \frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$或$P_3\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2},\ \frac{7-\sqrt{17}}{2}\right)$.

典例 2.如图，在平面直角坐标系中，点 B 的坐标为$(-3,-4)$，线段OB绕原点逆时针旋转后与 x 轴的正半轴重合，点 B 的对应点为点 A.





（1）直接写出点 A 的坐标，并求出经过 A、O、B 三点的抛物线的解析式.

（2）在抛物线的对称轴上是否存在点 C，使$BC+OC$的值最小？若存在，求出点 C 的坐标；若不存在，请说明理由.

（3）点 P 是抛物线上的一个动点，且在 x 轴的上方，当点 P 运动到什么位置时，$\triangle PAB$的面积最大？求出此时点 P 的坐标和$\triangle PAB$的最大面积.

【思路点拨】

（1）首先求出OB的长，由旋转的性质知$OB=OA$，即可得到A点的坐标，然后用待定系数法即可求得该抛物线的解析式；

（2）由于O、A关于抛物线的对称轴对称，若连接AB，则AB与抛物线对称轴的交点即为所求的C点，可先求出直线AB的解析式，联立抛物线对称轴方程即可求得C点的坐标；

（3）可过P作y轴的平行线，交直线AB于M；可设出P点的横坐标（根据P点的位置可确定其横坐标的取值范围），根据抛物线和直线AB的解析式，可表示出P、M的纵坐标，即可得到PM

的长，以PM为底，A、B纵坐标差的绝对值为高即可得到$\triangle PAB$的面积，从而得出关于$\triangle PAB$的面积与P点横坐标的函数关系式，根据所得函数的性质及自变量的取值范围，即可求得$\triangle PAB$的最大面积及对应的P点坐标.

【解题过程】

（1）解：点A的坐标$(5,0)$，

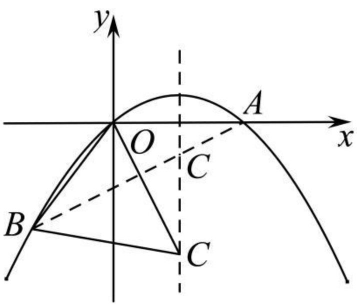
设抛物线的解析式为$y=ax^2+bx$，

$\therefore \begin{cases} -4=a\times(-3)^2+b\times(-3) \\ 0=25a+5b \end{cases}$，

$\therefore a=-\frac{1}{6}$，$b=\frac{5}{6}$，

$\therefore y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x$；

（2）由于A、O关于抛物线的对称轴对称，连接AB，



则AB与抛物线对称轴的交点即为所求的C点；

设直线AB的解析式为$y=mx+n$，

则$\begin{cases} 0=5m+n \\ -4=-3m+n \end{cases}$，解得：$\begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ n=-\frac{5}{2} \end{cases}$，

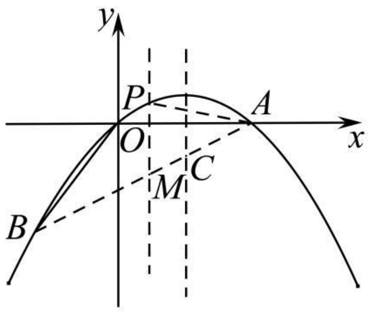
$\therefore$直线AB的解析式为：$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$，

$\because$抛物线的对称轴为直线$x=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}$，

当$x=\frac{5}{2}$时，$y=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{5}{4}$；

$\therefore$点C的坐标为$(\frac{5}{2}，-\frac{5}{4})$；

（3）过P作直线$PM\parallel y$轴，交AB于M，



设$P(x,-\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x)$，则$M(x,\frac{1}{2}x-\frac{5}{2})$，

$\therefore PM=-\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x-(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2})=-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{5}{2}$,

$\therefore\triangle PAB$的面积：$S=S_{\triangle PAM}+S_{\triangle PBM}$

$=\dfrac{1}{2}PM\cdot(5-x)+\dfrac{1}{2}PM\cdot(x+3)$

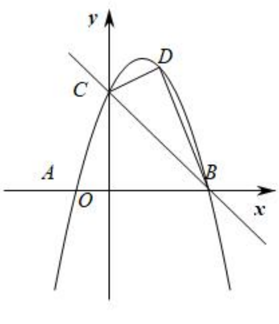
$=\dfrac{1}{2}\times(-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{2})\times(5+3)$

$=-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+10$

$=-\frac{2}{3}(x-1)^2+\frac{32}{3}$,

$\therefore$当$x=1$，即$P(1,\frac{2}{3})$时，$\triangle PAB$的面积最大，且最大值为$\frac{32}{3}$.

练一练：如图，抛物线$y=-x^2+2x+3$与x轴相交于A，B两点，与y轴相交于点C，直线$y=kx+b$经过C，B两点．



(1)直接写出各点坐标：A：__________，B：__________，C：__________；

(2)直线$y=kx+b$的解析式是：__________；

(3)如图，D是第一象限内抛物线上的一点，连接CD,BD．若点D的横坐标为m，$\triangle DBC$的面积是S，求m为何值时，$\triangle DBC$的面积最大？最大面积是多少？

(4)当$\triangle DBC$的面积最大时，在如图所示的抛物线上是否还存在不同于D的点Q，使得

$S_{\triangle DBC}=S_{\triangle QBC}$？若存在直接写出点$Q$的坐标，若不存在，请说明理由____________.

【分析】(1) 对于抛物线解析式，令 $y=0$ 求出 x 的值，确定出 A，B 的坐标，令 $x=0$ 求出 y 的值，得出 C 的坐标；

(2) 用待定系数法求解即可；

(3) 过点 D 作 x 轴的垂线，交 BC 于点 E，表示出 DE 的长，根据面积公式列函数解析式求解即可；

(4) 作 $QF \parallel AB$ 交 BC 于点 F，表示出 QF 的长，根据，$S_{\triangle DBC}=S_{\triangle QBC}=\frac{3}{2}$ 列方程求出 n 的值，进而可求出点 Q 的坐标.

(1)

解：当 $y=0$ 时，$-x^2+2x+3=0$，

解得 $x_1=-1$ 或 $x_2=3$，

∴ $A(-1,0)$，$B(3,0)$，

在 $y=-x^2+2x+3$ 中，当 $x=0$ 时，$y=3$，

∴ $C(0,3)$，

故答案为：$(-1,0),(3,0),(0,3)$；

(2)

解：把 $B(3,0)$，$C(0,3)$ 代入 $y=kx+b$，得

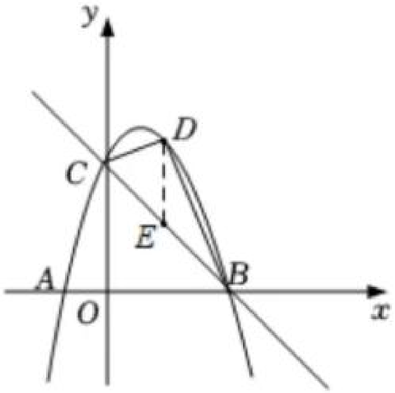
$\begin{cases}3k+b=0\\b=3\end{cases}$，

∴ $\begin{cases}k=-1\\b=3\end{cases}$，

∴ $y=-x+3$.

故答案为：$y=-x+3$.

（3）作$DE//y$轴交BC于点E，



则点D坐标为（$m,-m^2+2m+3$），点E坐标为（$m,-m+3$），

$\therefore DE=$（$-m^2+2m+3$）－（$-m+3$）$=-m^2+3m=-$（$m-\frac{3}{2}$）$^2+\frac{9}{4}$，

$\therefore S_{\triangle BCD}=S_{\triangle CDE}+S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}DE$（$x_D-x_C$）$+\frac{1}{2}DE$（$x_B-x_D$）$=\frac{1}{2}DE$（$x_B-x_C$）$=\frac{3}{2}DE$，

$\therefore$当DE最大时，$S_{\triangle BCD}$最大，

即$m=\frac{3}{2}$时，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times3=\frac{27}{8}$为最大值．

（4）存在，

将$x=\frac{3}{2}$代入$y=-x+3$得$y=\frac{3}{2}$,

$\therefore$点E坐标为（$\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2}$），

$\because DE=\frac{9}{4}$,

$\therefore$将点E向下移动$\frac{9}{4}$个单位得到点（$\frac{3}{2}$，$-\frac{3}{4}$），

设点Q所在直线为$y=-x+c$,

将（$\frac{3}{2}$，$-\frac{3}{4}$）代入$y=-x+c$得$-\frac{3}{4}=-\frac{3}{2}+c$,

解得$c=\frac{3}{4}$,

$\therefore y=-x+\frac{3}{4}$,

令$-x^2+2x+3=-x+\frac{3}{4}$,

解得$x_1=\frac{3-3\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore$点Q坐标为（$\frac{3-3\sqrt{2}}{2}$，$\frac{9}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$）或（$\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$，$\frac{9}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$）．

故答案为：（$\frac{3-3\sqrt{2}}{2}$，$\frac{9}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$）或（$\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$，$\frac{9}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$）．