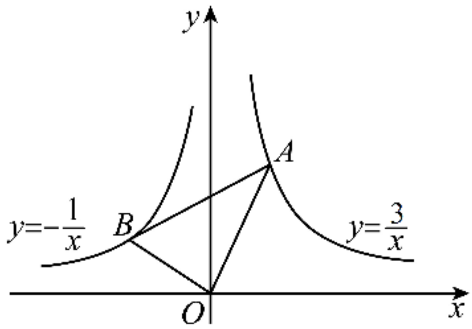
2024年06月30日初中数学作业

一、单选题

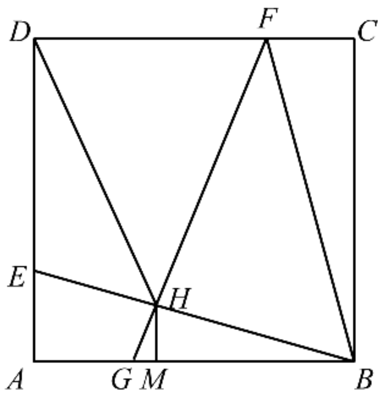
1．(辽宁省营口市2018届九年级中考模拟(四)数学试题) 如图，在 x 轴上方，$\angle BOA=90°$ 且其两边分别与反比例函数 $y=-\frac{1}{x}$、$y=\frac{3}{x}$ 的图象交于 B、A 两点，则 $\angle OAB$ 的正切值为( )



A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{1}{6}$

2．(2022年广东省深圳市27校九年级4月联考(二模)数学试题) 如图，正方形 $ABCD$ 中，E、F分别为边 AD、DC 上的点，且 $AE=FC$，过 F作 $FH\perp BE$，交 AB 于 G，过 H作 $HM\perp AB$ 于 M，若 $AB=9, AE=3$，则下列结论中：

①$\angle BGF=\angle CFB$；②$\sqrt{2}DH=EH+FH$；③$\frac{HM}{AE}=\frac{3}{5}$，其中结论正确的是( )



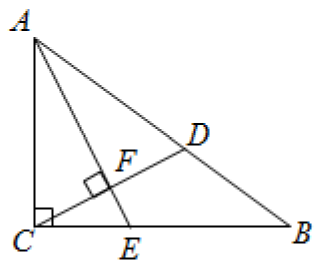
A．只有①②　　B．只有①③　　C．只有②③　　D．①②③

3．([首发]安徽省阜阳市第九中学2017-2018学年八年级上学期期中考试数学试题) 等腰三角形一腰上的高等于这个三角形一条边长度的一半，则其顶角为( )

A．30°　　B．30°或150°　　C．120°或150°　　D．30°或120°或150°

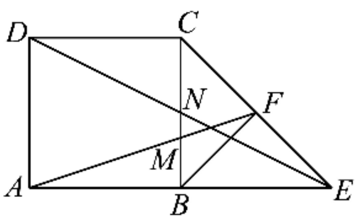
4．(2021年辽宁省本溪市中考数学二模试题) 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=3$，$BC=4$，点 D 在边 AB 上，$AD=AC$，$AE\perp CD$，垂足为 F，与 BC 相交于点 E，则 $\tan\angle CAE$

的值为（　）



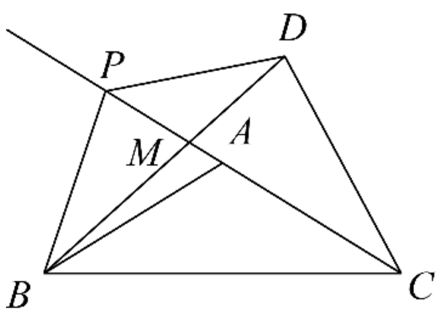
A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

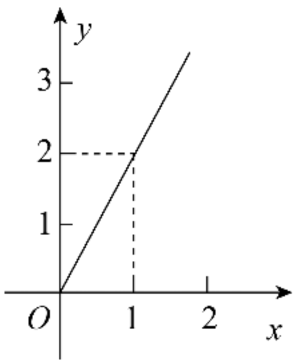
5.（辽宁省营口市鲅鱼圈区第二十九初级中学2023-2024学年九年级上学期12月月考数学试题）如图，已知 E 是正方形 $ABCD$ 中 AB 边延长线上一点，且 $AB=BE$，连接 CE、DE，DE 与 BC 交于点 N，F 是 CE 的中点，连接 AF 交 BC 于点 M，连接 BF．有如下结论：① $DN=EN$；② $\triangle ABF\backsim\triangle ECD$；③ $\frac{BM}{AB}=\frac{1}{3}$ ④ $S_{四边形BEFM}=2S_{\triangle CMF}$，其中正确的是（　　）

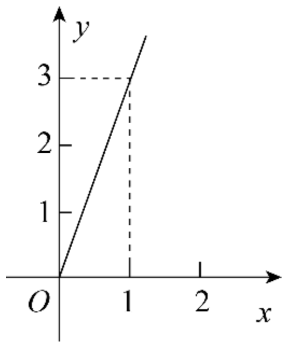


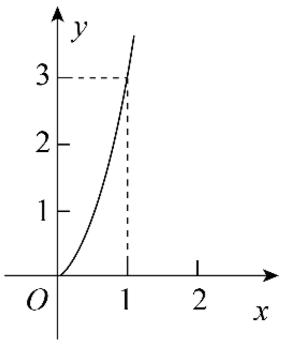
A．①②③　　B．①②④　　C．②③④　　D．①②③④

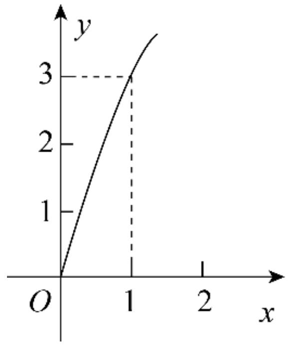
6．（2022年辽宁省抚顺市顺城区初中毕业生第二次质量调查数学试题）在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$BC=4$，$\angle BAC=120°$，P为线段CA延长线上一动点，连接PB，将线段PB绕点P逆时针旋转$120°$，得到线段PD，连接DB、DC、DB交PC于点M，设线段$AP=x$，$\triangle BCD$的面积为y，则能反映y与x之间函数关系的图象是（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

7．(2023年辽宁省大连市初中毕业升学模拟考试数学模拟预测题）如图1，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，点P是斜边AB上一动点过点P作$PQ\perp AB$，垂足为P，交边AC（或边CB）于点Q，设$AP=x$，$\triangle APQ$的面积为y，y关于x的函数图象如图2所示．下列结论：①点M的横坐标是$2\sqrt{3}$；②$a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$；③当$x=4$时，$y=16-8\sqrt{3}$．其中正确的是（ ）

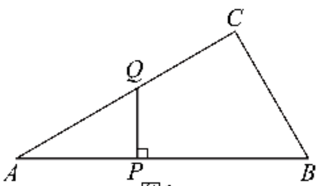


图1

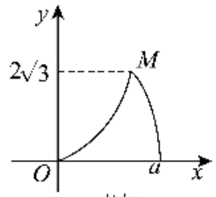
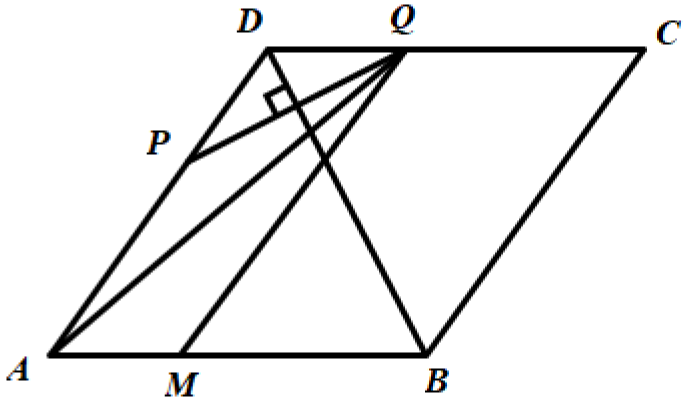
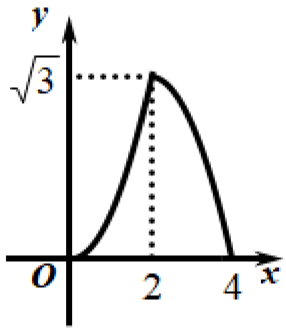


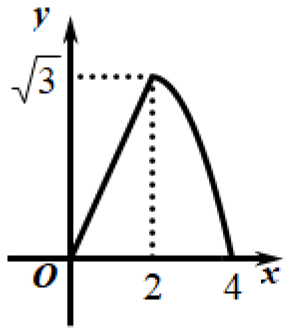
图2

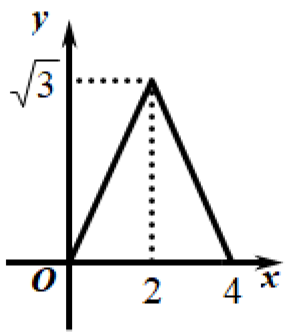
A．①② B．①③ C．②③ D．①②③

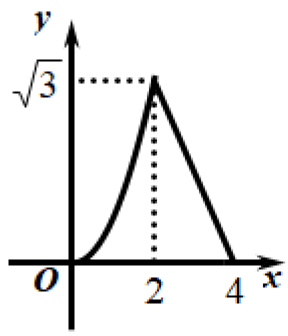
8．(2020年辽宁省葫芦岛市九年级中考三模数学试题）如图，在边长为$2cm$且一个内角为$60°$的菱形$ABCD$中，点P以每秒$1cm$的速度从点A出发，沿$AD\to DC$的路径运动，到点C停止，点M也以每秒$1cm$的速度从点A出发，沿AB方向运动，到点B停止，两点同时出发，过点P作$PQ\perp BD$，PQ与边CD（或边AD）交于点Q，ΔAMQ的面积$y(cm^2)$与点P的运动时间x（秒）的函数图象大致是（ ）



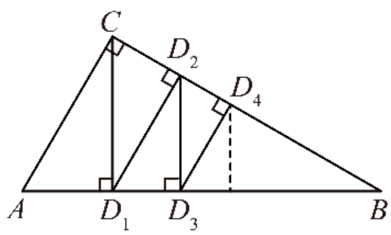
A. 

B. 

C. 

D. 

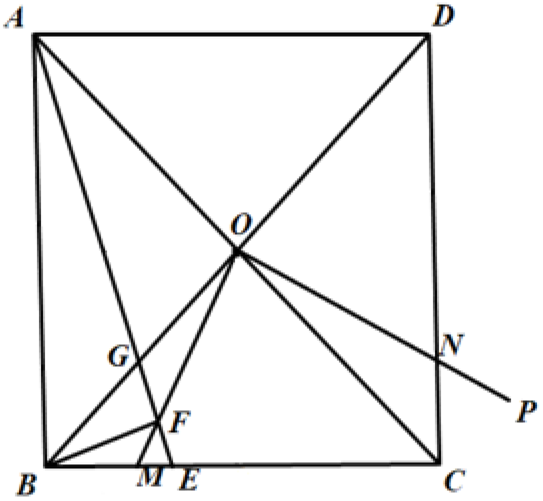
9.（中考数学图形的性质过关演练（二））如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle B=30°$，$AC=1$，过点 C 作 $CD_1\perp AB$ 于 D_1，过点 D_1 作 $D_1D_2\perp BC$ 于 D_2，过点 D_2 作 $D_2D_3\perp AB$ 于 D_3，这样继续作下去，线段 D_nD_{n+1}（n 为正整数）等于（　）.



A. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$　　B. $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$　　C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$　　D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

10.（辽宁省朝阳市 2020 年中考数学试题）如图，在正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 相交

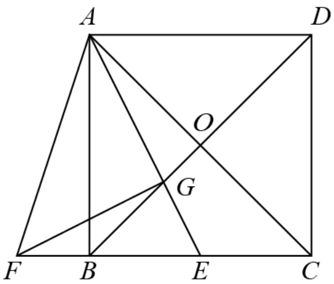
于点 O，点 E 在 BC 边上，且 $CE=2BE$，连接 AE 交 BD 于点 G，过点 B 作 $BF\perp AE$ 于点 F，连接 OF 并延长，交 BC 于点 M，过点 O 作 $OP\perp OF$ 交 DC 于占 N，$S_{四边形MONC}=\frac{9}{4}$，现给出下列结论：①$\frac{GE}{AG}=\frac{1}{3}$；②$\sin\angle BOF=\frac{3\sqrt{10}}{10}$；③$OF=\frac{3\sqrt{5}}{5}$；④$OG=BG$；其中正确的结论有（　）



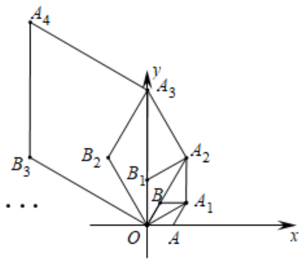
A．①②③　　B．②③④　　C．①②④　　D．①③④

二、填空题

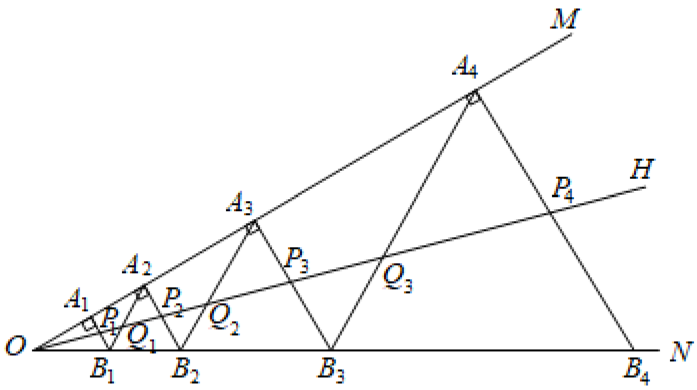
11．(湖北省襄阳市 2021 年中考数学真题) 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 E 在边 BC 上，点 F 在 CB 的延长线上，$\angle EAF=45°$，AE 交 BD 于点 G，$\tan\angle BAE=\frac{1}{2}$，$BF=2$，则 $FG=$______．



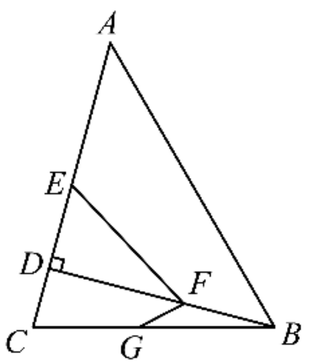
12．（辽宁省丹东市 2019 年中考数学试题）如图，在平面直角坐标系中，OA＝1，以 OA 为一边，在第一象限作菱形 OAA_1B，并使∠AOB＝60°，再以对角线 OA_1 为一边，在如图所示的一侧作相同形状的菱形 $OA_1A_2B_1$，再依次作菱形 $OA_2A_3B_2$，$OA_3A_4B_3$，……，则过点 B_{2018}，B_{2019}，A_{2019} 的圆的圆心坐标为_____．



13．(辽宁省锦州市2021年中考真题数学试卷）如图，∠MON＝30°，点 A_1在射线 OM 上，过点 A_1作 A_1B_1⊥OM 交射线 ON 于点 B_1，将△A_1OB_1沿 A_1B_1折叠得到△$A_1A_2B_1$，点 A_2落在射线 OM 上;过点 A_2作 A_2B_2⊥OM 交射线 ON 于点 B_2,将△A_2OB_2沿 A_2B_2折叠得到△$A_2A_3B_2$,点 A_2落在射线 OM 上;…按此作法进行下去,在∠MON 内部作射线 OH,分别与 A_1B_1,A_2B_2,A_3B_3，…，$AnBn$ 交于点 P_1，P_2，P_3，…Pn，又分别与 A_2B_1，A_3B_2，A_4B_3，…，$An_{+1}Bn$，交于点 Q_1，Q_2，Q_3，…，Qn．若点 P_1为线段 A_1B_1的中点，OA_1＝$\sqrt{3}$，则四边形 $AnPnQnAn_{+1}$的面积为___________________（用含有 n 的式子表示）．

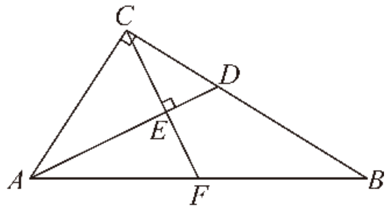


14．(2022年辽宁省沈阳市第七中学九年级下学期线上教学质量检测数学试题)如图，$\triangle ABC$中，$\angle A=45°$，$\angle B=60°$，$AB=2$，$BD\perp AC$，点 E、F、G 分别是 AD、BD、BC 上的动点，且 $BF=DE$，则 $\frac{\sqrt{2}}{2}EF+FG$ 的最小值为_________．

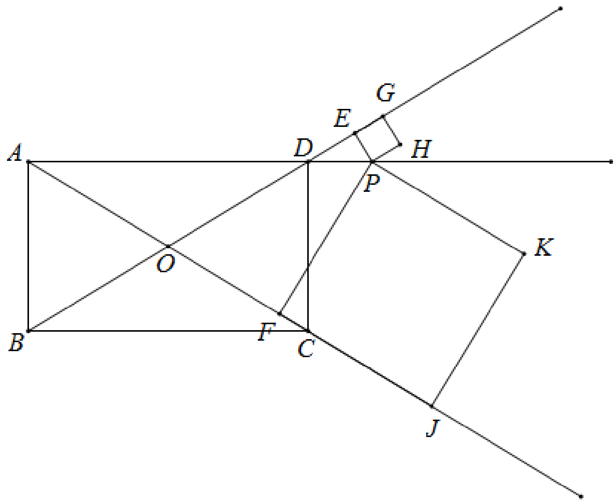


15．(辽宁省鞍山市立山区2023-2024学年九年级上学期12月月考数学试题）如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为射线 BC 上的动点（点 D 不与 B，C 重合)，直线 $CE\perp AD$

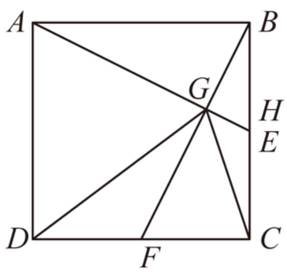
于点 E ，交直线 AB 于点 F ．若 $\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{DB}=\frac{2}{3}$，则 $\frac{AF}{FB}=$______．



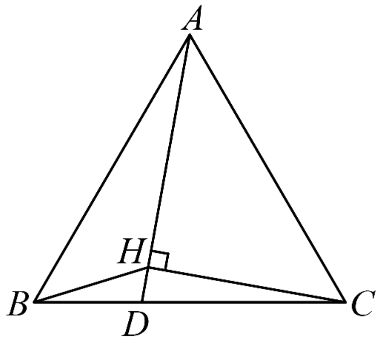
16．(辽宁省沈阳市和平区2022-2023学年九年级上学期期末数学试题)如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=1$， $AD=\sqrt{3}$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，点 P 为线段 AD 延长线上一动点， $PE\perp$ 射线 BD 于点 E ， $PF\perp$ 射线 AC 于点 F ，分别在 PE ， PF 的右侧，以 PE ， PF 为边作正方形 $PEGH$ 和正方形 $PFJK$ ，面积分别为 S_1 ， S_2 ．则下列结论：①$\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{3}}{2}$；②点 P 在运动过程中， $PF-PE$ 的值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$；③若 $S_1:S_2=1:8$ ，则 $AJ:DG=2\sqrt{2}:1$；④ $PF\cdot PE$ 没有最大值．其中正确的结论有______（填写序号即可）．



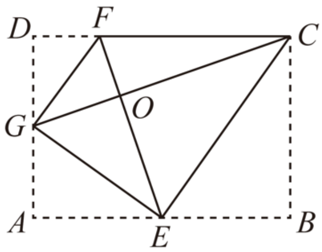
17．(2023年辽宁省葫芦岛市建昌县中考一模数学试题）如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F分别是边 BC，CD 的中点，连接 AE，BF 交于点 G，连接 GC，GD ，则 $\frac{GC}{AG}$ 的值为_________.



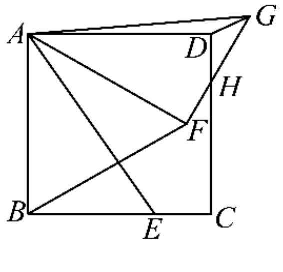
18．（辽宁省沈阳市2018年中考数学试卷）如图，△ABC是等边三角形，AB=$\sqrt{7}$，点D是边BC上一点，点H是线段AD上一点，连接BH、CH．当∠BHD=60°，∠AHC=90°时，DH=_____．



19．（2023年山东省济南市槐荫区中考一模数学试卷）如图，将矩形$ABCD$沿着GE、EC、GF翻折，使得点A、B、D恰好都落在点O处，且点G、O、C在同一条直线上，同时点E、O、F在另一条直线上，小炜同学得出以下结论：①$GF \parallel EC$；②$\triangle COF \sim \triangle CEG$；③$AB=\frac{3}{2}AD$；④$GE=\sqrt{6}DF$；⑤$OC=2\sqrt{2}OF$，其中正确的是______．

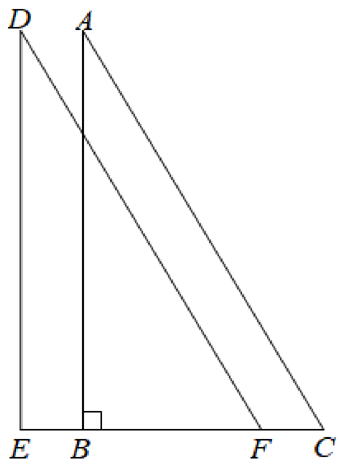


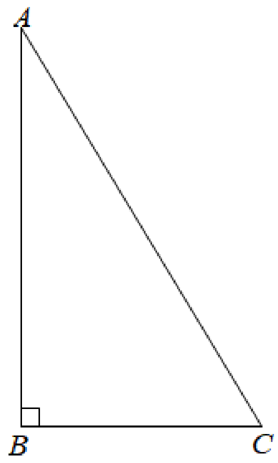
20．（2024学年辽宁省丹东市凤城市九年级下学期成绩监测数学模拟预测题）如图，点E为正方形$ABCD$边BC上一点，连接AE，将$\triangle ABE$绕点A逆时针方向旋转60°得到$\triangle AFG$，点B对应点为F，点E对应点为G，FG交CD于点H，连接DG．下列结论：①$\triangle ABE \cong \triangle AFG$；②$\angle DHG=30^{\circ}$；③当点$E$与点$C$重合时$\angle AGD=30^{\circ}$；④当点$G$落在$CD$边上时，$\frac{AB}{EB}=\sqrt{3}+2$；⑤当$DG$最短时，$AB=2BE$．其中正确的是______（填写序号）



三、解答题

21．（2022年辽宁省沈阳市和平区九年级中考一模数学试卷）如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^{\circ}$，$BC=4$，$\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，将$\triangle ABC$沿$CB$方向平移得到$\triangle DEF$.





备用图

(1)当$\triangle ABC$与$\triangle DEF$重叠部分的面积是$\triangle ABC$面积一半时，求$\triangle ABC$平移的距离；

(2)当DF的中点M恰好落在$\angle ACB$的平分线上时，

①求$\triangle ABC$平移距离；

②将$\triangle DEF$绕点E旋转后得到$\triangle GEH$（点D的对应点是点G，点F对应点是点H），在旋转过程中，直线GH与直线AB交于点K，与直线AC交于点J，当$\triangle AKJ$是以AJ为底边的等腰三角形时，请直接写出此时AJ的长为______.

22．(2024年辽宁省丹东市东港市中考数学二模试题）在正方形$ABCD$中，点M是边CD上一点，点N是边AD上一点，连接BM，CN交于点P，且$CM=DN$．

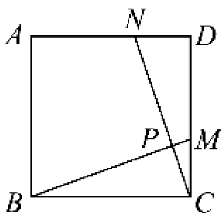


图1

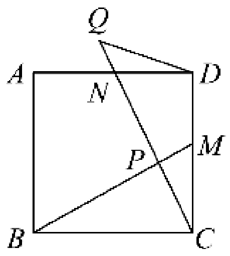


图2

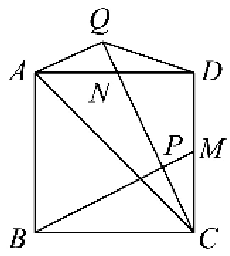


图3

(1)如图1，判断线段BM与CN的数量关系和位置关系，并证明.

(2)如图2，延长CN到点Q，连接DQ，当$\angle CQD=45^{\circ}$时，请求出BP，CP，CQ之间满足的数量关系.

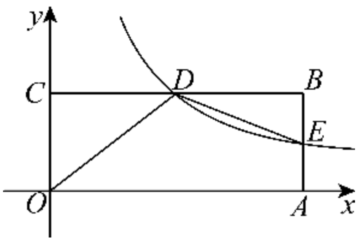
(3)如图3在（2）的条件下，连接AC，AQ，当$BP=2CP$，$\triangle ACQ$的面积是12时，请直接写出NQ的长.

23．（2015届广东省汕头市潮阳区初中毕业生学业考试模拟数学试卷（带解析））如图，在平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $OABC$ 的顶点 A 在 x 轴上，顶点 C 在 y 轴上，D 是 BC 的中点，过点 D 的反比例函数图象交 AB 于 E 点，连接 DE．若 $OD=5$，$\tan\angle COD=\frac{4}{3}$．

(1)求过点 D 的反比例函数的解析式；

(2)求△DBE 的面积；

(3)x 轴上是否存在点 P 使△OPD 为直角三角形？若存在，请直接写出 P 点的坐标；若不存在，请说明理由．



24．（2021年辽宁省沈阳市和平区中考数学一模试题）在正方形 $ABCD$ 中，点 M 是边 CD 上一点，点 N 是边 AD 上一点，连接 BM，CN 相交于点 P，且 $CM=DN$.

（1）如图1，请判断线段 BM 与 CN 的数量关系和位置关系，并证明你的结论；

（2）如图2，延长 CN 到点 Q，连接 DQ，且∠CQD=45°．

①请直接写 BP，CP，CQ 之间的数量关系为____；

②连接 AC，AQ，当 BP=2CP，△ACQ 的面积是6时，请直接写出 NQ 的长为____；

（3）点 E 在线段 CN 上，连接 BE，DE，当 $AB=\sqrt{6}$，∠BED=135°，$BE+\sqrt{2}DE=3\sqrt{2}$ 时，请直接写出 NE 的长为____．

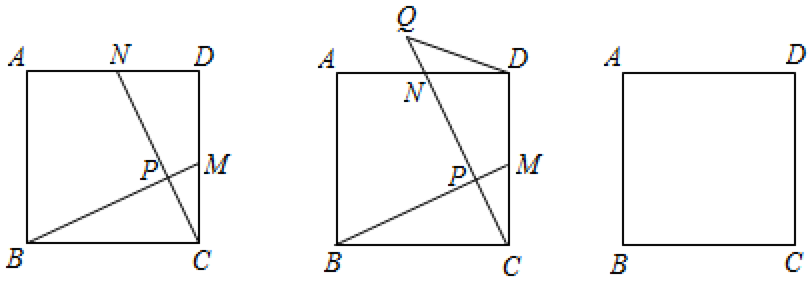


图1　　　图2　　　备用图

25．（辽宁省沈阳市第一三四中学2021-2022学年九年级上学期11月月考数学试题）如图1，在 Rt△ABC 中，$AC=8$cm，$BC=6$cm，点 P 从点 A 出发，沿斜边 AB 向点 B 匀速运动，速度为4cm/s，过点 P 作 $PQ\perp AB$ 交 AC 于点 Q，以 PQ 为一边作正方形 $PQMN$，使点 N 落在射线 PB 上，连接CM，设运动时间为 x（s）$(0<x<\frac{8}{5})$．

（1）当 $x=1$ 时，点 P 到 AC 的距离为 ___cm，点 M 到 AC 的距离为 _____cm；

（2）如图 2，过点 P 作 $PD\perp AC$ 于点 D.

①用含 x 的代数式表示 CD 的长，并写出求解过程；

②当点 P、M、C 三点共线时，直接写出此时正方形的边长；

（3）若△CMQ 是等腰三角形，直接写出 x 的值.

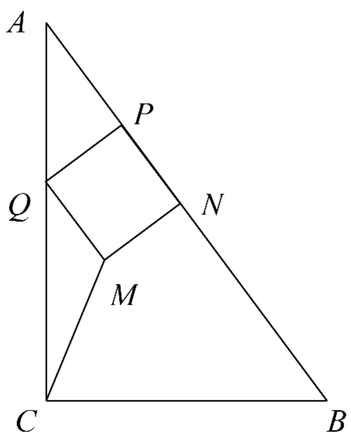


图 1

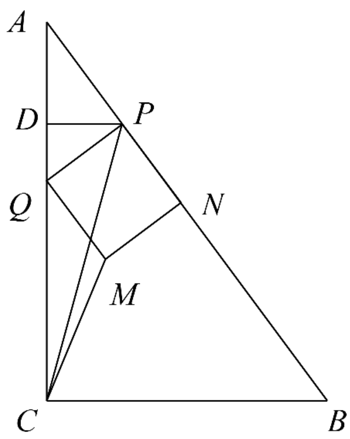
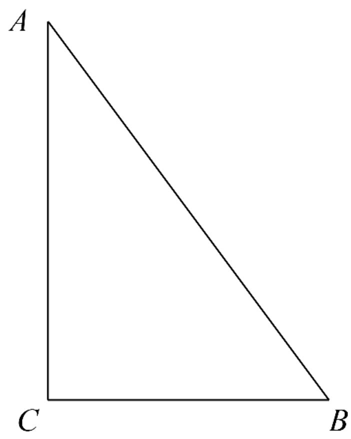


图 2



备用图

26．（2021 年山东省济南市中考数学试题）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，点 D 在边 BC 上，$BD=\frac{1}{3}BC$，将线段 DB 绕点 D 顺时针旋转至 DE，记旋转角为 α，连接 BE，CE，以 CE 为斜边在其一侧制作等腰直角三角形 CEF．连接 AF．

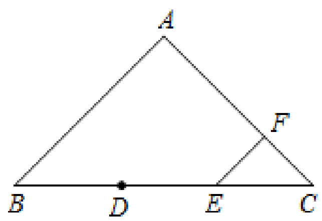


图1

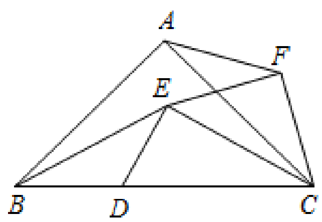


图2

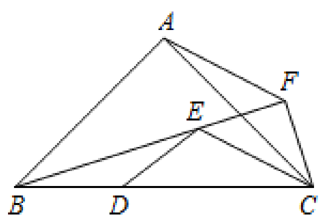


图3

（1）如图 1，当 $\alpha=180°$ 时，请直接写出线段 AF 与线段 BE 的数量关系；

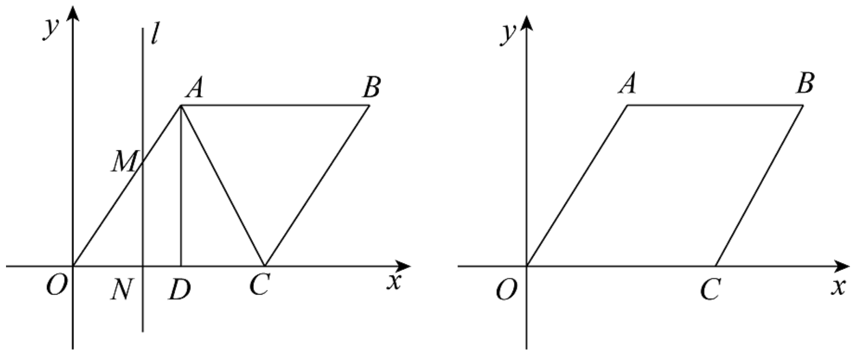
（2）当 $0°<\alpha<180°$ 时，

①如图 2，（1）中线段 AF 与线段 BE 的数量关系是否仍然成立？请说明理由；

②如图 3，当 B，E，F 三点共线时，连接 AE，判断四边形 $AECF$ 的形状，并说明理由．

27．（2022 年辽宁省沈阳市于洪区中考数学一模试题）如图，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 为菱形，点 A 的坐标为 $(2,2\sqrt{3})$，垂直于 x 轴的直线 l 从 y 轴出发，沿 x 轴正方向以每秒 1 个单位长度的速度运动，设直线 l 与菱形 $OABC$ 的两边分别交于点 M、N（点 M 在

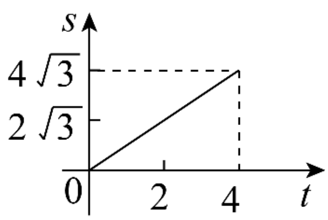
点 N 的上方）.

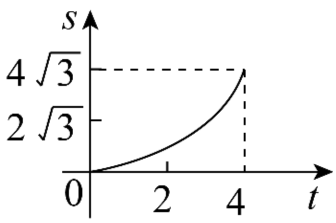


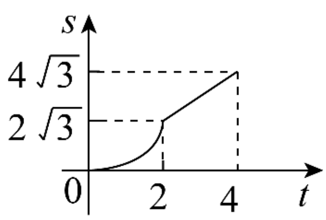
(1)求 B 点的坐标及$\angle AOC$ 度数；

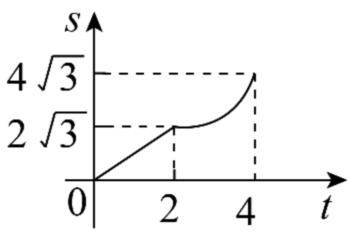
(2)设$\triangle OMN$ 的面积为 S，直线 l 运动时间为 t 秒（$0 \le t \le 6$）

①当$0 \le t \le 4$，则能大致反映 S 与 t 的函数关系的图象是（　）

A．

B．

C．

D．

②当$4 < t \le 6$ 时，直接写出 S 与 t 的函数表达式；

(3)在题（2）的条件下，是否存在某一时刻，使得$\triangle OMN$ 的面积与菱形 $OABC$ 的面积之比为$5:16$．如果存在，直接写出 t 值；如果不存在，请说明理由．

28．（2020 年辽宁省沈阳中考数学评价检测试题（一））如图将正方形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转角度α（0°＜α＜90°）得到正方形 $AB'C'D'$．

（1）如图 1，$B'C'$与 AC 交于点 M，$C'D'$与 AD 所在直线交于点 N，若 MN∥$B'D'$，求α；

（2）如图 2，$C'B'$与 CD 交于点 Q，延长 $C'B'$与 BC 交于点 P，当α＝30°时．

①求$\angle DAQ$ 的度数；

②若 AB＝6，求 PQ 的长度．

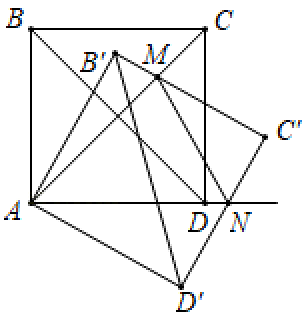


图1

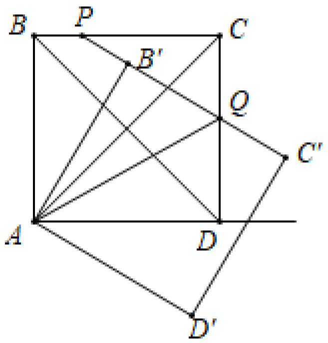


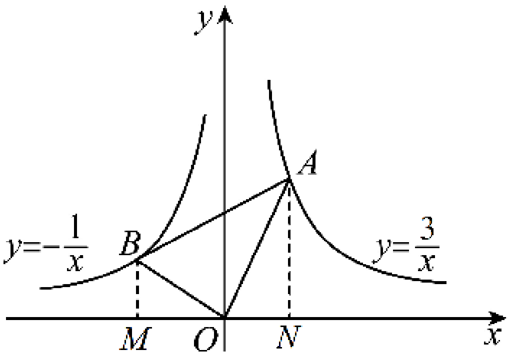
图2

参考答案：

1．B

【分析】分别过点A、B作$AN\perp x$轴、$BM\perp x$轴，首先证明$\triangle BOM\backsim\triangle OAN$，得到$\frac{BM}{ON}=\frac{OM}{AN}$，设设$B\left(-m,\frac{1}{m}\right)$，$A\left(n,\frac{3}{n}\right)$，得到$BM=\frac{1}{m}$，$AN=\frac{3}{n}$，$OM=m$，$ON=n$，进而得到$mn=\frac{3}{mn}$，$mn=\sqrt{3}$，运用三角函数的定义即可求出$\tan\angle OAB=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

【详解】如图，分别过点A、B作$AN\perp x$轴、$BM\perp x$轴，



$\because\angle AOB=90^\circ$，

$\therefore\angle BOM+\angle AON=\angle AON+\angle OAN=90^\circ$，

$\therefore\angle BOM=\angle OAN$，

$\because\angle BMO=\angle ANO=90^\circ$，

$\therefore\triangle BOM\backsim\triangle OAN$，

$\therefore\frac{BM}{ON}=\frac{OM}{AN}$，

$\therefore BM\cdot AN=ON\cdot OM$，

设$B\left(-m,\frac{1}{m}\right)$，$A\left(n,\frac{3}{n}\right)$，

则$BM=\frac{1}{m}$，$AN=\frac{3}{n}$，$OM=m$，$ON=n$，

$\therefore mn=\frac{3}{mn}$，

$\therefore mn=\sqrt{3}$，

$\because\angle AOB=90^\circ$，

$\therefore\tan\angle OAB=\frac{OB}{OA}$①；

$\because\triangle BOM\backsim\triangle OAN$，

$\therefore \frac{OB}{AO}=\frac{BM}{ON}=\frac{1}{mn}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$②，

由①②知 $\tan\angle OAB=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

故选：B．

【点睛】本题主要考查了反比例函数图象上点的坐标特征、相似三角形的判定等知识点及其应用问题；解题的方法是作辅助线；解题的关键是灵活运用相似三角形的判定等知识点来分析、判断、推理或解答．

2．D

【分析】①根据∠*ABE*的余角是∠*BGF*和∠*AEB*，得到∠*BGF*=∠*AEB*，根据SAS证明△*ABE*≌△*CBF*，得到∠*AEB*=∠*CFB*，即可得到∠*BGF*=∠*CFB*；②将△*DFH*绕点*D*顺时针旋转90°，得到△*DEN*，证明*N*，*E*，*H*三点共线，根据$\sqrt{2}$ *DH*=*HN*即可得到答案；③连接*EF*，证明*EF*=$\sqrt{2}DE=6\sqrt{2}$，*BE*=*BF*= $3\sqrt{10}$，根据$FH^2=EF^2-EH^2=BF^2-BH^2$求出$BH=\frac{9\sqrt{10}}{5}$，根据$\sin\angle ABE=\frac{HM}{BH}=\frac{AE}{BE}$求出$HM=\frac{9}{5}$，即可得到答案．

【详解】①∵正方形*ABCD*中，*AB*=*BC*=9，∠*A*=∠*C*=90°，且*AE*=*CF*=3，

∴△*ABE*≌△*CBF*(SAS)，

∴∠*CFB*=∠*AEB*，

∵*FG*⊥*BE*，

∴∠*BHG*=90°，

∴∠*BGH*+∠*ABE*=90°，

∵∠*AEB*+∠*ABE*=90°，

∴∠*BGH*=∠*AEB*，

∴$\angle BGF=\angle CFB$，正确；

②∵*AD*=*CD*，*AE*=*CF*，

∴*DE*=*DF*,

将△*DFH*绕点*D*顺时针旋转90°，得到△*DEN*，点*F*的对应点为点*E*，

则∠*HDN*=90°，∠*DFH*=∠*DEN*，*DH*=*DN*，*FH*=*EN*，

∵∠*EDF*+∠*EHF*=180°，

∴∠*DEH*+∠*DFH*==180°，

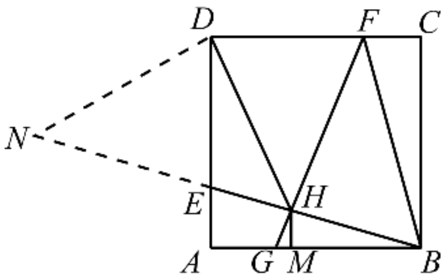
∴$\angle DEH+\angle DEN=180°$,

∴N,E,H三点在同一条直线上,

∴$\angle N=\angle DHN=\frac{1}{2}(180°-\angle HDN)=45°$,

∴$\sqrt{2}DH=HN=EH+EN=EH+FH$,

∴$\sqrt{2}DH=EH+FH$,正确;



③连接EF,

∵$AD=CD=9$,$AE=CF=3$,,

∴$DE=DF=6$,

∴$EF=\sqrt{2}DE=6\sqrt{2}$,

∵$BF=\sqrt{BC^{2}+CF^{2}}=\sqrt{9^{2}+3^{2}}=3\sqrt{10}$,

∴$BE=3\sqrt{10}$,

设$BH=x$,则$EH=BE-BH=3\sqrt{10}-x$,

∵$FH^{2}=EF^{2}-EH^{2}=BF^{2}-BH^{2}$,

∴$(6\sqrt{2})^{2}-(3\sqrt{10}-x)^{2}=(3\sqrt{10})^{2}-x^{2}$,

∴$x=\frac{9\sqrt{10}}{5}$,即$BH=\frac{9\sqrt{10}}{5}$,

∵$HM\perp AB$,

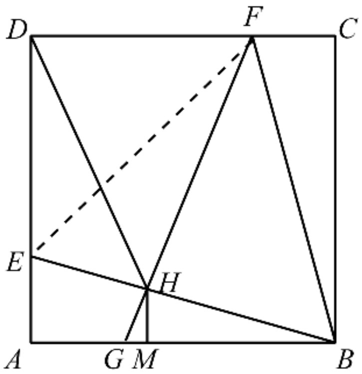
∴$\sin\angle ABE=\frac{HM}{BH}=\frac{AE}{BE}$,

∴$\frac{HM}{\frac{9\sqrt{10}}{5}}=\frac{3}{3\sqrt{10}}$,

∴$HM=\frac{9}{5}$,

$\therefore \frac{HM}{AE}=\frac{\frac{9}{5}}{3}=\frac{3}{5}$

故 $\frac{HM}{AE}=\frac{3}{5}$ 正确.



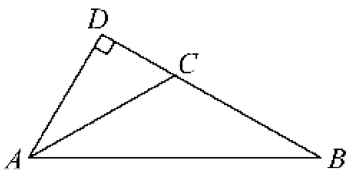
∴正确的结论为①②③，

故选 D．

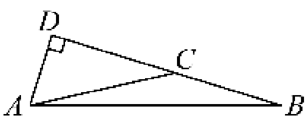
【点睛】本题综合考查了正方形和三角形，解决问题的关键是添加辅助线，熟练掌握正方形的边角性质，三角形全等的判定定理和性质定理，勾股定理，旋转的性质，锐角三角函数定义．

3．D

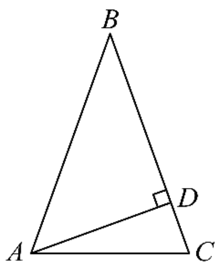
【详解】本题分三种情况进行讨论: ①如图,因为$\angle ADB$＝90°,$AD=\frac{1}{2}AB$,所以$\angle B$＝30°,因为$AB=AC$,所以$\angle ACB$＝180°－2×30°=120°,



②如图,因为$\angle ADB$＝90°,$AD=\frac{1}{2}AC$,所以$\angle ACD$＝30°,所以$\angle ACB$＝180°－30°=150°,



③如图,因为$\angle ADB$＝90°,$AD=\frac{1}{2}AB$,所以$\angle B$＝30°.

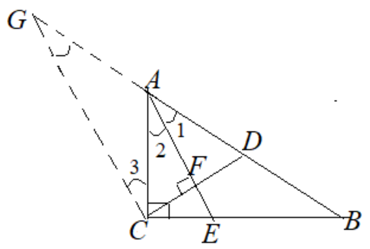


故选 D.

4．A

【分析】根据勾股定理可求得 AB=5;求 tan∠CAE 的值,只需求出 CE 的长即可;根据 AD=AC 和 AE⊥CD 的条件，可得出 AE 平分∠BAC；为此，过点 C 作 CG∥EA 交 BA 的延长线于点 G，利用平行线条件下 $\triangle BAE\sim\triangle BGC$ 可求出 CE 的长．

【详解】：过点 C 作 CG∥EA 交 BA 的延长线于点 G，如图所示．



$Rt\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$．

∵AD=AC，AE⊥CD 于点 F，

∴AF 是等腰△ACD 底边 CD 上的高．

∴AE 平分∠DAC，即∠1=∠2．

∵EA∥CG，

∴∠3=∠2，∠1=∠G.

∴∠3=∠G.

∴AG=AC=3．

∵EA∥CG，

∴ $\triangle BAE\sim\triangle BGC$ ．

∴ $\frac{BE}{BC}=\frac{BA}{BG}$ ．

设 CE=x，则有 $\frac{4-x}{4}=\frac{5}{5+3}$ ．

解得，x=1.5.

∴在 $Rt\triangle AEC$ 中，$\tan\angle CAE=\frac{CE}{AC}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$.

故选：A.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质、勾股定理、相似三角形的判定和性质、锐角三角函数等知识点．根据已知条件构造出相似三角形是解决本题的关键．

5．D

【分析】根据"角角边"，证明$\triangle NCD\cong\triangle NBE$，根据全等三角形的性质，得到$DN=EN$，判断①；根据两边对应成比例、夹角相等的两个三角形相似判断②；作$FG\perp AE$于G，根据等腰直角三角形的性质、正切的定义求出$\tan\angle FAG$，即可判断③；根据三角形的面积公式计算，判断④．

【详解】解：∵四边形$ABCD$为正方形，$AB=BE$，

∴$AB=CD=BE$，$AB\parallel CD$，

∴$\angle CDN=\angle BEN$，

又∵$\angle DNC=\angle BNE$

∴$\triangle NCD\cong\triangle NBE(\mathrm{AAS})$，

∴$DN=EN$，故①结论正确；

∵$\angle CBE=90°$，$BC=BE$，F 是CE的中点，

∴$\angle BCE=45°, BF=\frac{1}{2}CE=\frac{\sqrt{2}}{2}BE, FB=FE, BF\perp EC$，

∴$\angle DCE=90°+45°=135°$，$\angle FBE=45°$，

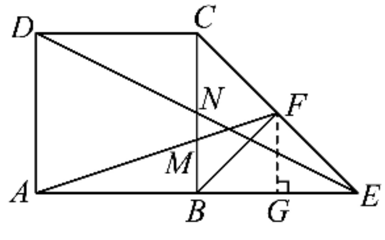
∴$\angle ABF=135°$，

∴$\angle ABF=\angle ECD$，

∵$\frac{DC}{CE}=\frac{BF}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$\triangle ABF\backsim\triangle ECD$，故②结论正确；

作$FG\perp AE$于 G，则$FG=BG=GE$，



$\therefore \frac{FG}{AG}=\frac{1}{3}$，

$\therefore \tan\angle FAG=\frac{FG}{AG}=\frac{1}{3}$，

$\therefore \frac{BM}{AB}=\frac{1}{3}$，故③结论正确；

$\therefore \frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$，

$\therefore S_{\triangle FBM}=\frac{1}{2}S_{\triangle FCM}$，即$S_{\triangle FCM}=2S_{\triangle FBM}$，

$\because F$是CE的中点，

$\therefore S_{\triangle FBC}=S_{\triangle FBE}=3S_{\triangle FBM}$，

$\therefore S_{\text{四边形}BEFM}=4S_{\triangle FBM}$，

$\therefore S_{\text{四边形}BEFM}=2S_{\triangle CMF}$，故④结论正确；

故选：D．

【点睛】本题主要考查了正方形的性质、等腰直角三角形的性质、相似三角形的判定、全等三角形的判定与性质，正确证明两三角形相似和全等是解答本题的关键．

6．B

【分析】过点P作PE垂直于AB于E，PF垂直于BD于F，过点D作DG垂直于BC于G，由等腰三角形性质即锐角三角函数，可得$PE=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，$\frac{BP}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，再证$\triangle PBE\backsim\triangle DBG$，由对应线段成比例可得高$DG=\frac{3}{2}x$，用三角形面积公式即可求解．

【详解】解：过点P作PE垂直于AB于E，PF垂直于BD于F，过点D作DG垂直于BC于G，

$\because \angle BAC=120°$，

$\therefore \angle PAE=60°$，

$\because \angle AEP=90°$，$AP=x$

$\therefore PE=AP\bullet\sin\angle PAE=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$\because$线段PB绕点P逆时针旋转120°，得到线段PD，

$\therefore BP=PD, \angle BPD=120°$，

$\therefore \angle PBD=30°, BF=DF=\frac{1}{2}BD$，

在 $Rt\triangle BPF$ 中，$\cos\angle PBF=\frac{BF}{BP}=\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore\frac{BP}{BD}=\frac{BP}{2BF}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$\because AB=AC,\angle BAC=120°$ ，

$\therefore\angle ABC=30°=\angle PBF$ ，

$\therefore\angle BPF+\angle DBA=\angle ABC+\angle DBA$ ，

即：$\angle PBE=\angle DBC$ ，

$\because\angle PEB=\angle DGB=90°$ ，

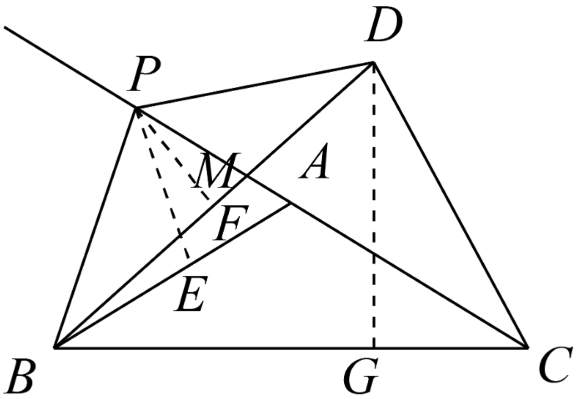
$\therefore\triangle PBE\backsim\triangle DBG$ ，

$\therefore\frac{PE}{DG}=\frac{BP}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore DG=\frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\sqrt{3}}=\frac{3}{2}x$ ，

$\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}DG\bullet BC=\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}x=3x$ ，

即：$y=3x$.



故选 B．

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，相似三角形的判定与性质，锐角三角函数，三角形面积，函数图像等知识，作辅助线构造直角三角形以及相似三角形是解题的关键．

7．D

【分析】本题考查的是动点图象问题，涉及到二次函数、解直角三角形等知识，此类问题关键是，要弄清楚不同时间段，图象和图形的对应关系，进而求解．

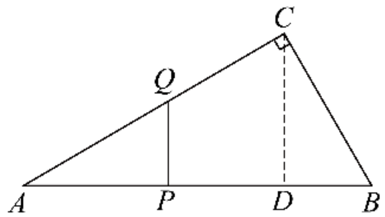
①过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，求出 $y=\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2$ ，当点 P 运动到点 D 时，面积最

大，将 $y=2\sqrt{3}$ 代入得：$\frac{\sqrt{3}}{6}x^2=2\sqrt{3}$，解得 $x=2\sqrt{3}$；

②在 Rt△BCD 中，$BD=\frac{CD}{\tan 60^\circ}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，$AB=2\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$，即 $a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$；

③ $BP=\frac{8}{3}\sqrt{3}-4$，在 Rt△BPQ 中，$PQ=\sqrt{3}BP=8-4\sqrt{3}$，代入面积公式求解即可.

【详解】解：过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D,



当点 P 在 AD 上时,

在 Rt△ APQ 中，$\angle A=30^\circ$，$AP=x$，

$\therefore PQ=AP\cdot\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

$\therefore y=\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2$，

当点 P 运动到点 D 时，面积最大，

将 $y=2\sqrt{3}$ 代入得：$\frac{\sqrt{3}}{6}x^2=2\sqrt{3}$，解得 $x=2\sqrt{3}$，即 $AD=2\sqrt{3}$，

∴点 M 的横坐标是 $2\sqrt{3}$ 正确的，故①正确;

在 Rt♀ ACD 中，$\angle A=30^\circ$，

$\therefore CD=AD\cdot\tan A=2$，

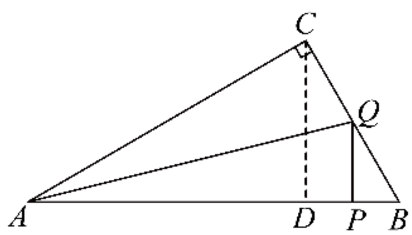
$\angle ACB=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，

$\therefore \angle B=60^\circ$，

∴在 Rt△BCD 中，$BD=\frac{CD}{\tan 60^\circ}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，

$\therefore AB=2\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$，即 $a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，故②正确;

当 $x=4$ 时，点 P 在 BD 上,



此时 $BP=\frac{8}{3}\sqrt{3}-4$，

在 $Rt\triangle BPQ$ 中，$PQ=\sqrt{3}BP=8-4\sqrt{3}$，

$\therefore y=\frac{1}{2}\times 4\times(8-4\sqrt{3})=16-8\sqrt{3}$，故③正确，

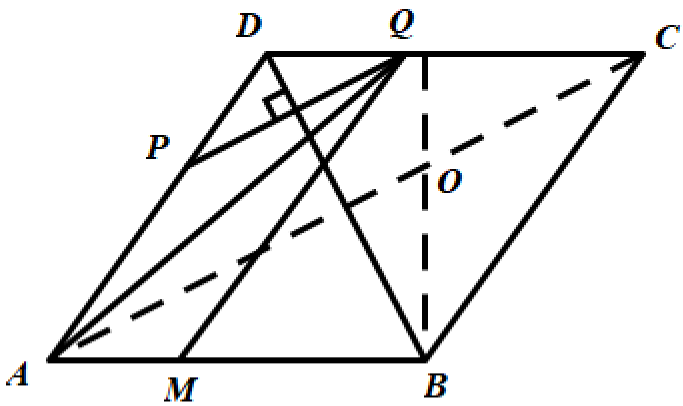
综上所述，①②③都正确，

故选：D．

8．C

【分析】分两个时间段讨论，分别得出 ΔAMQ 的面积的表达式，依次进行判断即可得到答案；

【详解】解：过点 B 作 BO⊥DC 于点 O，连接 AC，



$\because ABCD$ 是边长为 $2cm$ 且一个内角为 60° 的菱形，

∴以 AB 为底的菱形的高为 BO，

$\therefore BO=\sin 60^{\circ}\times BC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$，

当 P 点由 A 出发向 D 运动，假设运动时间为 x，$0<x\le 2$ 时，P 点由 A 出发向 D 运动，

∵点 M 也以每秒 $1cm$ 的速度从点 A 出发，沿 AB 方向运动，到点 B 停止，

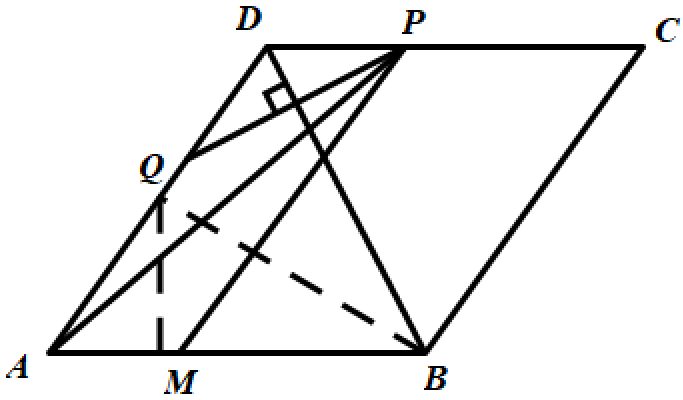
$\therefore y=S_{\Delta AMQ}=\frac{1}{2}\times AM\times BO=\frac{\sqrt{3}}{2}AM=\frac{\sqrt{3}}{2}t$，

∴当 $0<x\le 2$ 时 ΔAMQ 的面积匀速递增，当 $x=2$ 时面积达到最大，此时面积为：

$y=S_{\Delta AMQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$，故排除 A、D；

当 P 点由 D 出发向 C 运动时，$2<x\le 4$ 时 M 点停在 B 点，

此时 Q 点在 AD 上，作 QR⊥AB 于点 R，



此时 $y=S_{\triangle AMQ}=\frac{1}{2}\times AB\times QM=\frac{1}{2}\times 2\times QM=\sqrt{3}QM=(4-t)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}t$，

故 $\triangle AMQ$ 的面积递减且符合一次函数的图像，排除 B 选 C，

故选：C；

【点睛】本题主要考查了函数图像的识别、菱形的性质以及三角形的面积计算，正确得到三角形面积的表达式是解题的关键；

9．D

【分析】根据三角形的正弦定理、余弦定理的公式可以求得 CD_1、D_1D_2、D_2D_3、D_3D_4 *D3D4*……，然后归纳这个数列的规律，可以得到 D_nD_{n+1} 的长度.

【详解】 $AC=1$，$\angle CAD_1=60°$，$CD_1=1\times\sin 60°=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

$CD_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle D_1CD_2=60^\circ$，$D_1D_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$；

$D_1D_2=\frac{3}{4}$，$\angle D_2D_1D_3=60^\circ$，$D_2D_3=\frac{3}{4}\times\sin 60^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$；

$D_2D_3=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，$\angle D_3D_2D_4=60^\circ$，$D_3D_4=\frac{3\sqrt{3}}{8}\times\sin 60^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$；

根据规律可知，$D_nD_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

【点睛】本题综合考查三角形的正弦定理公式和数列的规律.

10．D

【分析】①直接根据平行线分线段成比例即可判断正误；

②过点 O 作 $OH//BC$ 交 AE 于点 H，过点 O 作 $OQ\perp BC$ 交 BC 于点 Q，过点 B 作 $BK\perp OM$

交 OM 的延长线于点 K，首先根据四边形 MONC 的面积求出正方形的边长，利用勾股定理求出 AE,AF,EF 的长度，再利用平行线分线段成比例分别求出 OM,BK 的长度，然后利用 $\sin\angle BOF=\frac{BK}{OB}$ 即可判断；

③利用平行线分线段成比例得出 $\frac{OF}{FM}=4$，然后利用勾股定理求出 OM 的长度，进而 OF 的长度可求；

④直接利用平行线的性质证明 $\triangle HOG\cong\triangle EBG$，即可得出结论.

【详解】∵ $CE=2BE$，

∴ $CB=2BE$,

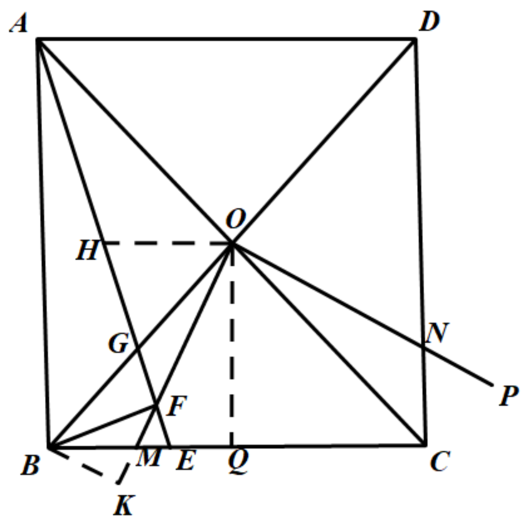
又∵ $CB=AD$

∴ $\frac{BE}{AD}=\frac{1}{3}$,

∵ $AD//BC$ ，

∴ $\frac{GE}{AG}=\frac{BE}{AD}=\frac{1}{3}$，故①正确；

如图,过点 O 作 $OH//BC$ 交 AE 于点 H,过点 O 作 $OQ\perp BC$ 交 BC 于点 Q,过点 B 作 $BK\perp OM$ 交 OM 的延长线于点 K，



∵四边形 ABCD 是正方形，

∴ $OB=\frac{1}{2}BD, OC=\frac{1}{2}AC, AC=BD, \angle OBM=\angle OCN=45°, OB\perp OC, AD//BC$ ，

∴ $OB=OC, \angle BOC=90°$ ，

∴ $\angle BOM+\angle MOC=90°$.

∵ $OP\perp OF$,

$\therefore \angle MON=90^{\circ}$ ，

$\therefore \angle CON+\angle MOC=90^{\circ}$ ，

$\therefore \angle BOM=\angle CON$ ，

$\therefore \triangle BOM\cong \triangle CON$ ，

$\therefore S_{\triangle BOM}=S_{\triangle CON}$ ，

$\therefore S_{四边形MONC}=S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OB\cdot OC=\frac{9}{4}$ ，

$\therefore OB=OC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore BC=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times \sqrt{2}=3$ ．

$\because \frac{1}{2}OM\cdot BK=\frac{1}{2}BM\cdot OQ$ ，

即$\frac{1}{2}\times \frac{3\sqrt{5}}{4}\cdot BK=\frac{1}{2}\times \frac{3}{4}\times \frac{3}{2}$ ，

$\therefore BK=\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ，

$\therefore \sin \angle BOF=\frac{BK}{OB}=\frac{\sqrt{10}}{10}$ ，故②错误；

$\because CE=2BE$ ，

$\therefore BE=\frac{1}{3}BC=1$ ，

$\therefore AE=\sqrt{AB^{2}+BE^{2}}=\sqrt{10}$ ．

$\because BF\perp AE$ ，

$\therefore \frac{1}{2}AE\cdot BF=\frac{1}{2}AB\cdot BE$ ，

$\therefore BF=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ，

$\therefore AF=\sqrt{AB^{2}-BF^{2}}=\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ，

$\therefore HF=\frac{2\sqrt{10}}{5},EF=\frac{\sqrt{10}}{10}$ ，

$\therefore \frac{OF}{FM}=\frac{HF}{EF}=\frac{OH}{ME}=4$ ，

$\therefore ME=\frac{1}{4}OH=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$ ，

$\therefore BM=\frac{3}{4},MQ=\frac{3}{4}$ ．

$\because OQ^{2}+MQ^{2}=OM^{2}$ ，

$\therefore OM=\sqrt{OQ^2+MQ^2}=\frac{3\sqrt{5}}{4}$，

$\therefore OF=\frac{3\sqrt{5}}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，故③正确；

$\because OH//BC$，

$\therefore \frac{OH}{EC}=\frac{AO}{AC}=\frac{AH}{AE}=\frac{1}{2},\angle HOG=\angle GBE$，

$\therefore OH=BE, AH=HE$．

$\because \angle HGO=\angle EGB$，

$\therefore \triangle HOG\cong\triangle EBG$，

$\therefore OG=BG$，故④正确；

∴正确的有①③④，

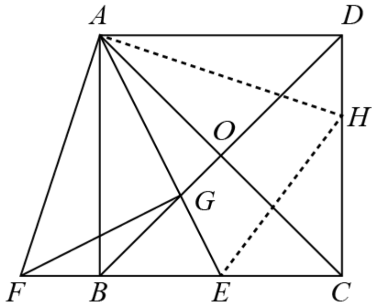
故选：D．

【点睛】本题主要考查四边形综合，掌握正方形的性质，全等三角形的判定及性质，平行线分线段成比例和锐角三角函数是解题的关键．

11．$2\sqrt{5}$

【分析】作出如图所示的辅助线，利用 *SAS* 证明△*ADH*≌△*ABF* 以及△*EAF*≌△*EAH*，在 *Rt*△*ABE* 中，利用勾股定理求得正方形的边长，再证明△*BAF*∽△*OAG*，即可求解．

【详解】解：如图，在 *CD* 上取点 *H*，使 *DH*=*BF*=2，连接 *EH*、*AH*，



∵四边形 *ABCD* 是正方形，

∴∠*ADH*=∠*ABC*=∠*ABF*=90°，*AD*=*AB*，∠*BAC*=∠*DAC*=45°，

∴△*ADH*≌△*ABF*(*SAS*)，

∴∠*DAH*=∠*BAF*，*AH*=*AF*，

∵∠*EAF*=45°，即∠*BAF*+∠*EAB*=45°，

∴∠*DAH*+∠*EAB*=45°，则∠*EAH*=45°，

∴∠*EAF*=∠*EAH*=45°，

∴△EAF≌△EAH(SAS),

∴$EF=EH$,

∵$\tan\angle BAE=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{2}$,

设 $BE=a$，则 $AB=2a$，$EC=a$，$CH=2a-2$，$EF=EH=a+2$，

在 $Rt\triangle CEH$ 中，$EC^2+CH^2=EH^2$,即 $a^2+(2a-2)^2=(a+2)^2$，

解得：$a=3$，

则 $AB=AD=6$，$BE=EC=3$，

在 $Rt\triangle ABE$ 中，$AB^2+BE^2=AE^2$，

∴$AE=3\sqrt{5}$，

同理 $AF=2\sqrt{10}$，

$AO=AB\sin45°=3\sqrt{2}$，

∵$BE\parallel AD$,

∴$\frac{EG}{AG}=\frac{BE}{AD}=\frac{1}{2}$，

∴$AG=2\sqrt{5}$，

∴$\frac{AO}{AG}=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\frac{AB}{AF}=\frac{6}{2\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

∴$\frac{AO}{AG}=\frac{AB}{AF}$，

∵$\angle EAF=\angle BAC=45°$,

∴$\angle BAF=\angle OAG$,

∴△BAF∽△OAG,

∴$AG:AF=AO:AB=1:\sqrt{2}$，

∵$\angle GAF=\angle OAB=45°$,

∴△GAF是等腰直角三角形,

∴$FG=AG=2\sqrt{5}$，

故答案为：$2\sqrt{5}$．

【点睛】本题主要考查了四边形综合题，熟练掌握正方形的性质，全等三角形的判定及性质，

相似三角形的判定和性质，锐角三角函数是解题的关键．

12．(-（$\sqrt{3}$）^{2018}，（$\sqrt{3}$）^{2019})

【分析】过 A_1 作 $A_1C\perp x$ 轴于 C，由菱形的性质得到 $OA=AA_1=1$，$\angle A_1AC=\angle AOB=60°$，根据勾股定理得到 $OA_1=\sqrt{OC^2+A_1C^2}=\sqrt{3}$，求得 $\angle A_2B_1A_3=60°$，解直角三角形得到 $B_1A_3=2\sqrt{3}$，$A_2A_3=3$，求得 $OA_3=OB_1+B_1A_3=3\sqrt{3}=(\sqrt{3})^3$ 得到菱形 $OA_2A_3B_2$ 的边长 $=3=(\sqrt{3})^2$，设 B_1A_3 的中点为 O_1，连接 O_1A_2，O_1B_2，推出过点 B_1，B_2，A_2 的圆的圆心坐标为 O_1（0，$2\sqrt{3}$），以此类推，于是得到结论．

【详解】解：过 A_1 作 $A_1C\perp x$ 轴于 C，

∵四边形 OAA_1B 是菱形，

∴$OA=AA_1=1$，$\angle A_1AC=\angle AOB=60°$，

∴$A_1C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AC=\frac{1}{2}$，

∴$OC=OA+AC=\frac{3}{2}$，

在 Rt△OA_1C 中，$OA_1=\sqrt{OC^2+A_1C^2}=\sqrt{3}$，

∵$\angle OA_2C=\angle B_1A_2O=30°$，$\angle A_3A_2O=120°$，

∴$\angle A_3A_2B_1=90°$，

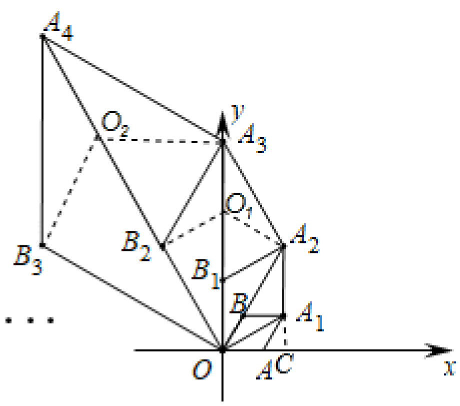
∴$\angle A_2B_1A_3=60°$，

∴$B_1A_3=2\sqrt{3}$，$A_2A_3=3$，

∴$OA_3=OB_1+B_1A_3=3\sqrt{3}=(\sqrt{3})^3$

∴菱形 $OA_2A_3B_2$ 的边长 $=3=(\sqrt{3})^2$，

设 B_1A_3 的中点为 O_1，连接 O_1A_2，O_1B_2，



于是求得，$O_1A_2=O_1B_2=O_1B_1=\sqrt{3}=(\sqrt{3})^1$，

∴过点 B_1，B_2，A_2 的圆的圆心坐标为 O_1（0，$2\sqrt{3}$），

∵菱形 $OA_3A_4B_3$ 的边长为 $3\sqrt{3}=(\sqrt{3})^3$，

∴$OA_4=9=(\sqrt{3})^4$，

设 B_2A_4 的中点为 O_2，

连接 O_2A_3，O_2B_3，

同理可得，$O_2A_3=O_2B_3=O_2B_2=3=(\sqrt{3})^2$，

∴过点 B_2，B_3，A_3 的圆的圆心坐标为 O_2（－3，$3\sqrt{3}$），…以此类推，菱形 $OA_{2019}A_{2020}B_{2019}$ 的边长为 $(\sqrt{3})^{2019}$，

$OA_{2020}=(\sqrt{3})^{2020}$，

设 $B_{2018}A_{2020}$ 的中点为 O_{2018}，连接 $O_{2018}A_{2019}$，$O_{2018}B_{2019}$，

求得，$O_{2018}A_{2019}=O_{2018}B_{2019}=O_{2018}B_{2018}=(\sqrt{3})^{2018}$，

∴点 O_{2018} 是过点 B_{2018}，B_{2019}，A_{2019} 的圆的圆心，

∵2018÷12＝168…2，

∴点 O_{2018} 在射线 OB_2 上，

则点 O_{2018} 的坐标为（$-(\sqrt{3})^{2018}$，$(\sqrt{3})^{2019}$），

即过点 B_{2018}，B_{2019}，A_{2019} 的圆的圆心坐标为：（$-(\sqrt{3})^{2018}$，$(\sqrt{3})^{2019}$），

故答案为（$-(\sqrt{3})^{2018}$，$(\sqrt{3})^{2019}$）．

【点睛】本题考查了菱形的性质，解直角三角形，勾股定理，正确的作出辅助线是解题的关键．

13．$\dfrac{5\sqrt{3}\cdot 4^{n-2}}{3}$

【分析】先证明$\triangle OA_1P_1\backsim\triangle OA_2P_2$，$\triangle OP_1B_1\backsim\triangle OP_2B_2$，又点 P_1 为线段 A_1B_1 的中点，从而可得 P_2 为线段 A_2B_2 的中点，同理可证 P_3、P_4、P_n 依次为线段 A_3B_3、A_4B_4、$\cdots A_nB_n$ 的中点．结合相似三角形的性质可得$\triangle P_1B_1Q_1$ 的 P_1B_1 上的高与$\triangle P_2A_2O_1$ 的 A_2P_2 上的高之比为 1：2,所以$\triangle P_1B_1Q_1$ 的 P_1B_1 上的高为 $\frac{1}{3}A_1A_2$，同理可得$\triangle P_2B_2Q_2$ 的 P_2B_2 上的高为 $\frac{1}{3}A_2A_3\cdots$，从而 $S_{四边形A_1P_1Q_1A_2}=S_{\triangle A_1B_1A_2}-S_{\triangle P_1B_1Q_1}$，以此类推来求 $S_{四边形A_2P_2Q_2A_3}$，从而找到 $S_{四边形AnPnQnAn}$ 的面积规律．

【详解】解：由折叠可知，$OA_1=A_1A_2=\sqrt{3}$，

由题意得：$A_1B_1//A_2B_2$，

$\therefore \triangle OA_1P_1 \backsim \triangle OA_2P_2$，$\triangle OP_1B_1 \backsim \triangle OP_2B_2$，

$\therefore \frac{A_1P_1}{A_2P_2}=\frac{OA_1}{OA_2}=\frac{OP_1}{OP_2}=\frac{P_1B_1}{P_2B_2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$，

又∵点 P_1 为线段 A_1B_1 的中点，

$\therefore A_1P_1=P_1B_1$，

$\therefore A_2P_2=P_2B_2$，

则点 P_2 为线段 A_2B_2 的中点，

同理可证，P_3、P_4、…P_n 依次为线段 A_3B_3、A_4B_4、…A_nB_n 的中点．

$\because A_1B_1//A_2B_2$，

$\therefore \triangle P_1B_1Q_1 \backsim \triangle P_2A_2O_1$，

$\therefore \frac{P_1B_1}{P_2A_2}=\frac{A_1P_1}{P_2A_2}=\frac{1}{2}$，

则$\triangle P_1B_1Q_1$ 的 P_1B_1 上的高与$\triangle P_2A_2O_1$ 的 A_2P_2 上的高之比为 1∶2，

$\therefore \triangle P_1B_1Q_1$ 的 P_1B_1 上的高为 $\frac{1}{3}A_1A_2$，

同理可得$\triangle P_2B_2Q_2$ 的 P_2B_2 上的高为 $\frac{1}{3}A_2A_3$，……，

由折叠可知 $A_2A_3=2\sqrt{3}$，$A_3A_4=4\sqrt{3}$，

$\because \angle MON=30°$，

$\therefore A_1B_1=\tan30°\times OA_1=1$，

$\therefore A_2B_2=2$，$A_3B_3=4$，……，

$\therefore S_{四边形A_1P_1Q_1A_2}=S_{\triangle A_1B_1A_2}-S_{\triangle P_1B_1Q_1}$

$=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot A_1B_1-\frac{1}{2}A_1P_1\cdot\frac{1}{3}A_1A_2$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\sqrt{3}$，

同理，$S_{四边形A_2P_2Q_2A_3}=S_{\triangle A_2B_2A_3}-S_{\triangle P_2B_2Q_2}$

$=\frac{1}{2}A_2A_3\cdot A_2B_2-\frac{1}{2}A_2P_2\cdot\frac{1}{3}A_2A_3$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}$，

……

$S_{四边形A_nP_nQ_nA_{n+1}}=S_{\triangle A_nB_nA_{n+1}}-S_{\triangle P_nB_nQ_n}$

$=\frac{1}{2}\times 2^{n-1}\sqrt{3}\times 2^{n-1}-\frac{1}{2}\times\frac{2^{n-1}}{2}\times\frac{1}{3}\times 2^{n-1}\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}(2^{n-1}-\frac{2^{n-2}}{3})$

$=\frac{5\sqrt{3}\cdot 4^{n-2}}{3}$.

故答案为：$\frac{5\sqrt{3}\cdot 4^{n-2}}{3}$.

【点睛】本题考查了规律型：图形的变化类，相似三角形的判定与性质，折叠的性质，锐角三角函数等知识，解决本题的关键在根据图形的变化找到规律.

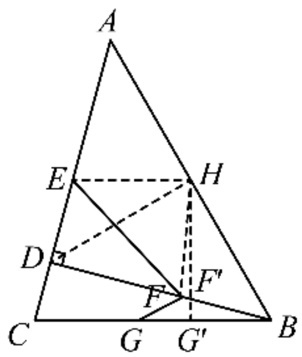
14．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】取 AB 中点 H，连接 EH、FH，根据等腰三角形三线合一，可知 $DH=BH$，可证△DHE≌△BHF，进一步证明△EHF 为等腰直角三角形，得到 $HF=\frac{\sqrt{2}}{2}EF$，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}EF+FG=HF+FG$，过点 H 作 HG' 交 BD 于点 F'，此时 $HF'+F'G$ 最小等于 HG'，求出 HG' 的长度即为 $\frac{\sqrt{2}}{2}EF+FG$ 的最小值.

【详解】解：∵ $\angle A=45°$，$BD\perp AC$，

∴△ABD 为等腰直角三角形，

取 AB 中点 H，连接 EH、FH，如图所示，



∴ $\angle ADH=\frac{1}{2}\angle ADB=45^{\circ}$（等腰三角形三线合一），$DH=AH=BH$，

∵在△DHE 和△BHF 中

$$\begin{cases}DE=BF\\ \angle EDH=\angle FBH=45^{\circ},\\ DH=BH\end{cases}$$

∴△DHE≌△BHF（SAS）

∴$EH=FH$，$\angle EHD=\angle FHB$，

∵$\angle FHB+\angle DHF=\angle DHB=90°$，

∴$\angle EHD+\angle DHF=90°$，即$\triangle EHF$为等腰直角三角形，

∴$\angle HEF=45°$，

∵$\sin\angle HEF=\frac{HF}{EF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$HF=\frac{\sqrt{2}}{2}EF$，

∴$\frac{\sqrt{2}}{2}EF+FG=HF+FG$，

过点H作HG'交BD于点F'，此时$HF'+F'G$最小等于HG'，

∵$AB=2$，H为BD的中点，

∴$BH=1$，

∴$\sin\angle HBG'=\frac{HG'}{HB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$HG'=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$\frac{\sqrt{2}}{2}EF+FG$的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

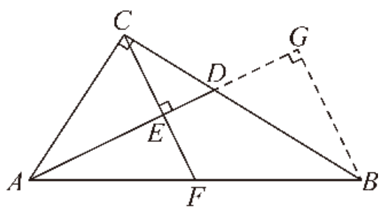
故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】本题主要考查了等腰三角形三线合一的性质、三角形全等的判定及性质以及解直角三角形，正确判断最短距离时各点的位置是解答本题的关键.

15．$\frac{2}{9}$或$\frac{10}{9}$

【分析】本题考查了解直角三角形，平行线分线段成比例，相似三角形的性质与判定，分当点D在线段BC上时，当点D在线段BC的延长线上时，分别画出图形，根据相似三角形的性质，即可求解.

【详解】解：当点D在线段BC上时，如图所示，过点B作$BG\perp AD$于点G，



∵$CE\perp AD$

∴$BG\parallel EF$

∵$\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{DB}=\frac{2}{3}$

设$DC=2k$，则$DB=3k$，$BC=5k$，

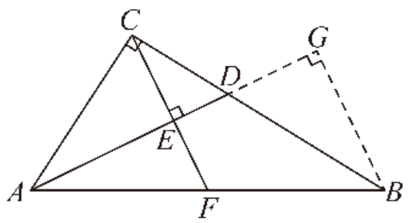
$\therefore AC=\frac{2}{3}BC=\frac{10k}{3}$，

$\because \angle ACB=90°, CE\perp AD$

$\because \cos\angle CAE=\frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AD}$， $\cos\angle CDE=\frac{CD}{AD}=\frac{ED}{CD}$

$\therefore AC^{2}=AE\cdot AD$， $CD^{2}=AD\cdot ED$

$\therefore \frac{AE}{ED}=\frac{AC^{2}}{CD^{2}}=\frac{\left(\frac{10}{3}k\right)^{2}}{(2k)^{2}}=\frac{25}{9}$，则 $DE=\frac{9}{25}AE$



$\because BG\parallel EF$

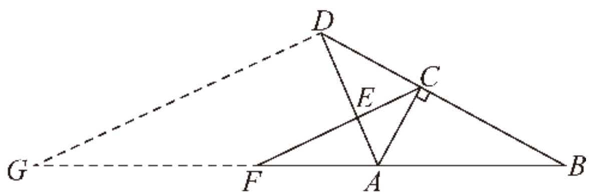
$\therefore \triangle DCE\backsim\triangle DBG$，

$\therefore \frac{DE}{DG}=\frac{CD}{DB}=\frac{2}{3}$，则 $DG=\frac{3}{2}DE=\frac{3}{2}\times\frac{9}{25}AE=\frac{27}{50}AE$

$\because BG\parallel EF$

$\therefore \frac{AF}{FB}=\frac{AE}{EG}=\frac{AE}{DE+DG}=\frac{AE}{\frac{9}{25}AE+\frac{27}{50}AE}=\frac{1}{\frac{18+27}{50}}=\frac{50}{45}=\frac{10}{9}$；

当点 D 在线段 BC 的延长线上时，如图所示，过点 D 作 $DG\parallel CF$ 交 BA 的延长线于点 G，



$\because \frac{AC}{BC}=\frac{DC}{DB}=\frac{2}{3}$

设 $DC=2k$，则 $DB=3k$， $BC=k$，

$\therefore AC=\frac{2}{3}BC=\frac{2k}{3}$，

$\because \angle ACB=90°, CE\perp AD$

$\because \cos\angle CAE=\frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AD}$， $\cos\angle CDE=\frac{CD}{AD}=\frac{ED}{CD}$

$\therefore AC^{2}=AE\cdot AD$， $CD^{2}=AD\cdot ED$

$\therefore \frac{AE}{ED}=\frac{AC^2}{CD^2}=\frac{\left(\frac{2}{3}k\right)^2}{(2k)^2}=\frac{1}{9}$，则 $DE=9AE$

$\because DG \parallel CF$

$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{AE}{DE}=\frac{AE}{9AE}=\frac{1}{9}$，则 $AF=\frac{1}{9}FG$

$\because DG \parallel CF$

$\therefore \frac{FG}{BF}=\frac{CD}{BC}=\frac{2k}{k}=2$

$\therefore BF=\frac{1}{2}FG$

$\therefore \frac{AF}{FB}=\frac{\frac{1}{9}FG}{\frac{1}{2}FG}=\frac{2}{9}$

综上所述，$\frac{AF}{FB}=\frac{2}{9}$ 或 $\frac{10}{9}$，

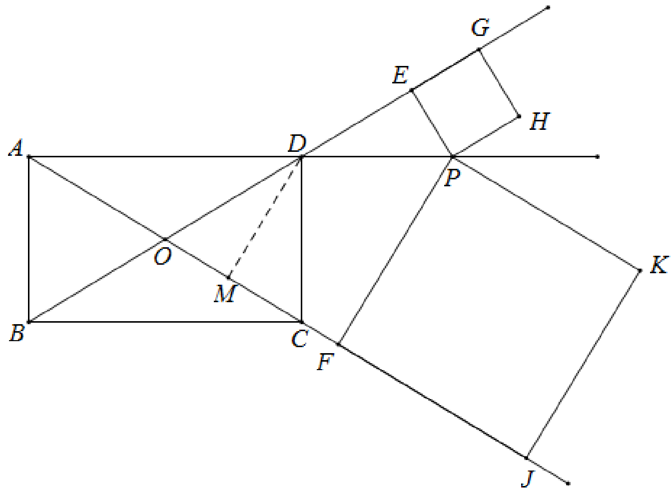
故答案为：$\frac{2}{9}$ 或 $\frac{10}{9}$．

16．①②③④

【分析】根据正方形的性质，过点 D 作 $DM\perp AC$，易得 $\triangle ODC$ 是等边三角形，求出 $\sin\angle DOM=\frac{DM}{OC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，过点 A 作 $AN\perp BD$ 于 N，根据相似三角形的性质即可求解，$PF=2\sqrt{2}PE$，求出 $\frac{AJ}{DG}=\frac{AF+PF}{DE+PE}=\frac{\sqrt{3}PF+PF}{\sqrt{3}PE+PE}=\frac{(\sqrt{3}+1)PF}{(\sqrt{3}+1)PE}=\frac{PF}{PE}$，$y=PE^2+\frac{\sqrt{3}}{2}PE$，由此即可求解．

【详解】解：结论①，

如图所示，过点 D 作 $DM\perp AC$，



∵矩形 $ABCD$ 中，$AB=DC=1$，$AD=BC=\sqrt{3}$，对角线 AC，BD 交于点 O，

∴ $AC=BD=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，

∴ $OA=OB=OC=OD=1=DC$，

∴ $\triangle ODC$ 是等边三角形，即 $OD=OC=1$，

∵ $DM\perp AC$，

∴ $OM=CM=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$，

在 $Rt\triangle ODM$ 中，$DM=\sqrt{OD^2-OM^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

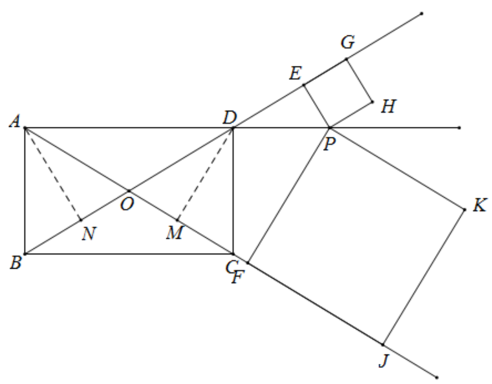
∴ $\sin\angle DOM=\frac{DM}{OC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∵ $\angle AOB=\angle ODM$，

∴ $\sin\angle AOB=\sin\angle DOM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故结论①正确；

结论②，

如图所示，过点 A 作 $AN\perp BD$ 于 N，



$\therefore \triangle DEP \backsim \triangle DNA$，$AN=DM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$AM=DN=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，$AB=DC=1$，$AD=BC=\sqrt{3}$，

$\therefore \dfrac{PE}{PD}=\dfrac{AN}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}:\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$，则 $PE=\dfrac{1}{2}PD$，

由结论①可知，$DM \parallel PF$，

$\therefore \dfrac{DM}{AD}=\dfrac{PF}{AP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}:\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$，则 $PF=\dfrac{1}{2}AP$，且 $AP=AD+PD$，

$\therefore PF-PE=\dfrac{1}{2}(AD+PD)-\dfrac{1}{2}PD=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故结论②正确；

结论③，

由结论②正确可知，$PF-PE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，正方形 $PEGH$ 中，$PE=\dfrac{1}{2}PD$；正方形 $PFJK$ 中，

$PF=\dfrac{1}{2}AP$，$S_1:S_2=1:8$，即 $S_1=PE^2$，$S_2=PF^2$，

$\because \triangle ODC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ODC=60°$，则 $\angle EDP=\angle ADB=30°$，

$\therefore \left(\dfrac{PE}{PF}\right)^2=\dfrac{1}{8}$，$PF=2\sqrt{2}PE$，

$\because \dfrac{AJ}{DG}=\dfrac{AF+PF}{DE+PE}=\dfrac{\sqrt{3}PF+PF}{\sqrt{3}PE+PE}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)PF}{(\sqrt{3}+1)PE}=\dfrac{PF}{PE}$

$\therefore \dfrac{AJ}{DG}=\dfrac{PF}{PE}=\dfrac{2\sqrt{2}PE}{PE}=2\sqrt{2}:1$，故结论③正确；

结论④，

由结论②正确可知，$PF-PE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $PF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+PE$

$\therefore PF \bullet PE=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+PE\right)\bullet PE=PE^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}PE$，设 $y=PE^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}PE$，

$\therefore PF\cdot PE$ 没有最大值，故结论④正确，

综上所述，正确的有：①②③④，

故答案为：①②③④．

【点睛】本题主要考查正方形的性质，等边三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、平行线分线段成比例、含特殊角的直角三角形的性质，掌握正方形的性质，含特殊角的直角三角形的性质，相似三角形的性质是解题的关键．

17．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ / $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

【分析】设 $AB=a$，根据SAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$，得 $\angle AEB=\angle BFC$，再证明 $\angle BGE=90°$，由

勾股定理得出 $AE=\frac{\sqrt{5}}{2}a$,利用面积法求出 $BG=\frac{\sqrt{5}}{5}a$，过点 G 作 $GH\perp BC$ 于点 H，证明 $\triangle BGH\sim\triangle BFC$,得 $BH=2GH$,由勾股定理得 $GH=\frac{a}{5}$, $BH=\frac{2a}{5}$, $CG=\frac{\sqrt{10}}{5}a$, $\sin\angle GBH=\frac{\sqrt{5}}{5}$,延长 BF 交 AD 的延长线于点 M，证明 $\triangle MDF\cong\triangle BCF(AAS)$，可得 $AM=2a$，由 $\sin\angle M=\sin\angle FBC$ 求出 $AG=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$，进一步可求出 $\frac{GC}{AG}$ 的值.

【详解】解：设 $AB=a$,

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=BC=CD=DA=a,\angle ABC=\angle BCD=\angle ADC=90^{\circ}$,

∵ $E.F$ 分别是 BC,CD 的中点，

$\therefore BE=\frac{1}{2}BC,CF=\frac{1}{2}CD$，

$\therefore BE=CF=\frac{a}{2}$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中，

$\begin{cases}AB=BC\\ \angle ABE=\angle BCF\\ BE=CF\end{cases}$，

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle BCF(SAS)$.

$\therefore \angle AEB=\angle BFC$,

又∵ $\angle BFC+\angle CBF=90^{\circ}$

$\therefore \angle AEB+\angle CBF=90^{\circ}$,

$\therefore \angle BGE=90^{\circ}$,

∵ $AB=a,BE=\frac{a}{2}$,

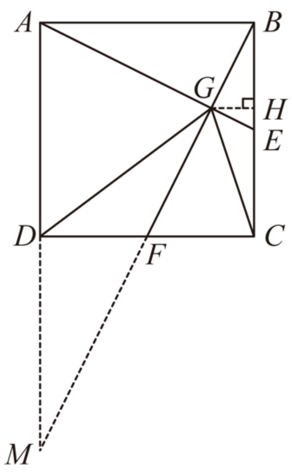
$\therefore AE=\sqrt{AB^{2}+BE^{2}}=\sqrt{a^{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{5}a}{2}$,

$\therefore S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}AB\cdot BE=\frac{1}{2}AE\cdot BG$,

$\therefore \frac{1}{2}\times a\times\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\times BG\times\frac{\sqrt{5}a}{2}$

$\therefore BG=\frac{\sqrt{5}}{5}a$,

过点 G 作 $GH\perp BC$ 于点 H，如图，



$\therefore GH \parallel FC$,

$\therefore \triangle BGH \sim \triangle BFC$,

$\therefore \dfrac{GH}{BH}=\dfrac{FC}{BC}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore BH=2GH$,

在 $Rt\triangle BHG$ 中，$BH^2+GH^2=BG^2$,

$\therefore 4GH^2+GH^2=\dfrac{a^2}{5}$,

$\therefore GH=\dfrac{a}{5}$ 或 $-\dfrac{a}{5}$ （会去）

$\therefore BH=\dfrac{2}{5}a$,

$\therefore CH=BC-BH=a-\dfrac{2}{5}a=\dfrac{3}{5}a$,

$\therefore CG=\sqrt{GH^2+CH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{5}\right)^2+\left(\dfrac{3}{5}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}a$,

$\because BG=\dfrac{\sqrt{5}}{5}a, GH=\dfrac{a}{5}$,

$\therefore \sin\angle GBH=\dfrac{GH}{BG}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

延长 BF 交 AD 的延长线于点 M ，

$\because$点 F 是 DC 的中点，

$\therefore CF=DF$,

又 $DM \parallel BC$,

$\therefore \angle M=\angle FBC$,

在$\triangle MDF$ 和$\triangle BCF$ 中，

$$\begin{cases} \angle M = \angle FBC, \\ \angle DFM = \angle CFB, \\ FD = FC \end{cases}$$

$\therefore \triangle MDF \cong \triangle BCF(AAS)$

$\therefore MD = BC = a$,

$\therefore AM = AD + DM = 2a$,

$\because AG \perp BM$,

$\therefore \sin\angle M = \sin\angle FBC = \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore AG = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$,

$\therefore \dfrac{GC}{AG} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{10}}{5}a}{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【点睛】本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质，勾股定理，相似三角形的判定与性质以及求锐角正弦值等知识，正确作出辅助线构造直角三角形是解答本题的关键.

18．$\dfrac{1}{3}$

【分析】如图，作 AE⊥BH 于 E，BF⊥AH 于 F，利用等边三角形的性质得 AB=AC，∠BAC=60°，再证明∠ABH=∠CAH，则可根据“AAS”证明△ABE≌△CAH，所以 BE=AH，AE=CH，在 Rt△AHE 中利用含 30 度的直角三角形三边的关系得到 HE=$\dfrac{1}{2}$AH，AE=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$AH，则 CH=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$AH，于是在 Rt△AHC 中利用勾股定理可计算出 AH=2，从而得到 BE=2，HE=1，AE=CH=$\sqrt{3}$，BH=1，接下来在 Rt△BFH 中计算出 HF=$\dfrac{1}{2}$，BF=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，然后证明△CHD∽△BFD，利用相似比得到 $\dfrac{HD}{FD}$=2，从而利用比例性质可得到 DH 的长.

【详解】作 AE⊥BH 于 E，BF⊥AH 于 F，如图，

∵△ABC 是等边三角形，

∴AB=AC，∠BAC=60°，

∵∠BHD=∠ABH+∠BAH=60°，∠BAH+∠CAH=60°，

∴∠ABH=∠CAH，

在△ABE 和△CAH 中$\begin{cases}\angle AEB=\angle AHC\\ \angle ABE=\angle CAH\\ AB=CA\end{cases}$，

∴△ABE≌△CAH，

∴BE=AH，AE=CH，

在 Rt△AHE 中，∠AHE=∠BHD=60°，

∴sin∠AHE=$\frac{AE}{AH}$，HE=$\frac{1}{2}$AH，

∴AE=AH•sin60°=$\frac{\sqrt{3}}{2}$AH，

∴CH=$\frac{\sqrt{3}}{2}$AH，

在 Rt△AHC 中，AH^2+（$\frac{\sqrt{3}}{2}$AH）^{2}=AC^2=（$\sqrt{7}$）^{2}，解得 AH=2，

∴BE=2，HE=1，AE=CH=$\sqrt{3}$，

∴BH=BE﹣HE=2﹣1=1，

在 Rt△BFH 中，HF=$\frac{1}{2}$BH=$\frac{1}{2}$，BF=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

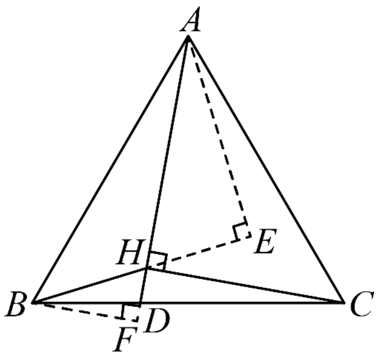
∵BF∥CH，

∴△CHD∽△BFD，

∴$\frac{HD}{FD}=\frac{CH}{BF}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$=2，

∴DH=$\frac{2}{3}$HF=$\frac{2}{3}$×$\frac{1}{2}$=$\frac{1}{3}$，

故答案为：$\frac{1}{3}$.



【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、解直角三角形等，解题的关键是明确在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐

含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形．

19．①④⑤

【分析】根据折叠的性质和矩形的性质分析判断①；通过点 G 为 AD 中点，点 E 为 AB 中点，设 $AD=2a$，$AB=2b$，利用勾股定理分析求得 AB 与 AD 的数量关系，从而判断③；利用相似三角形的判定和性质分析判断 GE 和 DF、OC 和 OF 的数量关系，从而判断④和⑤；根据相似三角形的判定分析判断②．

【详解】解：由折叠性质可得：$DG=OG=AG$，$AE=OE=BE$，$OC=BC$，$\angle DGF=\angle FGO$，$\angle AGE=\angle OGE$，$\angle AEG=\angle OEG$，$\angle OEC=\angle BEC$，

$\therefore \angle FGE=\angle FGO+\angle OGE=90^\circ$，$\angle GEC=\angle OEG+\angle OEC=90^\circ$，

$\therefore \angle FGE+\angle GEC=180^\circ$，

$\therefore GF \parallel CE$，故①正确；

设 $AD=2a$，$AB=2b$，则 $DG=OG=AG=a$，$AE=OE=BE=b$，

$\therefore CG=OG+OC=3a$，

在 Rt♀CGE 中，$CG^2=GE^2+CE^2$，

$\therefore (3a)^2=a^2+b^2+b^2+(2a)^2$，

解得：$b=\sqrt{2}a$，

$\therefore AB=\sqrt{2}AD$，故③错误；

在 Rt♀COF 中，设 $OF=DF=x$，则 $CF=2b-x=2\sqrt{2}a-x$，，

$\therefore x^2+(2a)^2=(2\sqrt{2}a-x)^2$，

解得：$x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore \sqrt{6}DF=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\sqrt{3}a$，$2\sqrt{2}OF=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=2a$，

在 Rt△AGE 中，$GE=\sqrt{AG^2+AE^2}=\sqrt{3}a$，

$\therefore GE=\sqrt{6}DF$，$OC=2\sqrt{2}OF$，故④⑤正确；

$\because \tan\angle FCO=\frac{OF}{OC}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{2a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\tan\angle GCE=\frac{GE}{CE}=\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{(2a)^2+(\sqrt{2}a)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \angle FCO \neq \angle GCE$

$\therefore \triangle COF, \triangle CEG$ 不相似，故②错误；

综上，正确的是①④⑤，

故答案为：①④⑤.

【点睛】本题考查勾股定理，相似三角形的判定和性质，掌握折叠的性质和勾股定理是解题关键.

20．①②③④⑤

【分析】根据旋转的性质判断①；根据正方形的性质可得 $\angle BAD=\angle ABE=\angle ADC=90°$.再由旋转可知 $\angle BAF=60°$，可得 $\angle DAF=30°$，进而得出 $\angle DHF$，可判断②；先连接 CG，再说明 $\triangle EAG$ 是等边三角形，然后证明 $\triangle ADG \cong \triangle EDG$，可判断③；作图，并连接 AC，交 EG 于点 K，先证明 $Rt\triangle ABE \cong \triangle ADG$，可求出 $\angle BAE=\angle DAG=15°$，再构造特殊的直角三角形，并表示 AB 和 BE，即可得出答案；先确定当 $DG\perp FG$ 时，DG 最短，过点 A 作 $AK\perp DG$，交 DG 的延长线于点 K，可知四边形 $AFGK$ 是矩形，再根据含 $30°$ 直角三角形的性质和矩形的性质判断⑤.

【详解】根据旋转的性质可知 $\triangle ABE \cong \triangle AFG$，

所以①正确；

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle BAD=\angle ABE=\angle ADC=90°$.

由旋转可知 $\angle BAF=60°$，

$\therefore \angle DAF=30°$，

$\therefore \angle DHF=360°-\angle DAF-\angle AFH-\angle ADH=150°$，

$\therefore \angle DHG=30°$.

所以②正确；

如图所示，连接 CG，

根据旋转的性质可知 $AE=AG$，$\angle EAG=60°$，

$\therefore \triangle EAG$ 是等边三角形，

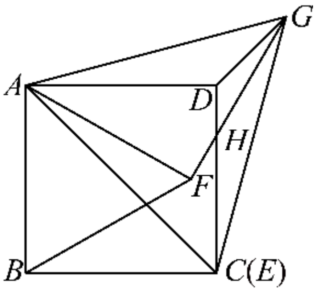
$\therefore AG=EG$，$\angle AGE=60°$.

$\because AD=DE$，$DG=DG$，

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle EDG$，

$\therefore \angle AGD=\angle DGE=30°$.

所以③正确;



如图所示，点 G 与点 H 重合，连接 AC，交 EG 于点 K.

$\because AB=AD$，$AE=AG$，$\angle ABE=\angle D=90°$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\triangle ADG$，

$\therefore \angle BAE=\angle DAG=\dfrac{90°-60°}{2}=15°$.

根据正方形和等边三角形的对称性可知 $AC\perp EG$，$\angle EAK=30°$，$\angle ACE=45°$，

设 $CK=a$，则 $EK=a$，$CE=\sqrt{2}a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEK$ 中，$\tan 30°=\dfrac{EK}{AK}$，

$\therefore AK=\sqrt{3}a$，

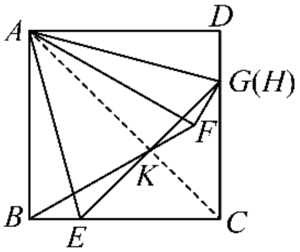
$\therefore AC=(\sqrt{3}+1)a$，

$\therefore AB=BC=AC\cdot\tan 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)a=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore BE=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-\sqrt{2}a=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore \dfrac{AB}{BE}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}$.

所以④正确;



如图所示，当 $DG\perp FG$ 时，DG 最短，过点 A 作 $AK\perp DG$，交 DG 的延长线于点 K,

$\therefore$四边形 $AFGK$ 时矩形,

$\therefore AK = FG = BE$.

由②知 $\angle DHG = 30°$，

$\therefore \angle GDH = 60°$.

$\because \angle ADC = 90°$ ，

$\therefore \angle ADK = 30°$.

在Rt♀ ADK 中， $AK = \frac{1}{2}AD$.

$\because AD = AB$ ，

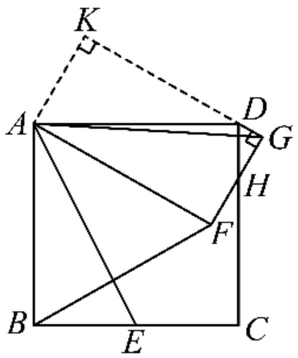
$\therefore BE = \frac{1}{2}AB$ ，

即 $AB = 2BE$.

所以⑤正确.

则正确有①②③④⑤.

故答案为：①②③④⑤.



【点睛】本题主要考查了正方形的性质，矩形的性质和判定，等边三角形的性质和判定，旋转的性质，全等三角形的性质和判定等，准确的作出图形并作出辅助线是解题的关键.

21．(1) $4-2\sqrt{2}$

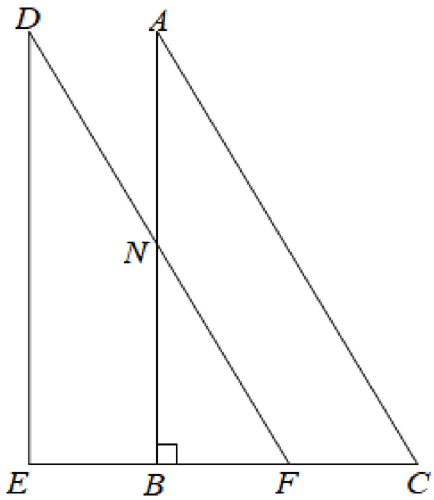
(2)①4；② $16+4\sqrt{3}$ 或 $16-4\sqrt{3}$

【分析】(1) 根据 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 求得 BC ，根据平移的性质可得 $DE = AB, DE // AB$ ， $EF = BC = 2$ ，平移距离即为 BE 的长，证明 $\triangle FBN \backsim \triangle FED$ ，根据面积比等于相似比的平方即可求得 BF 的长，进而求得 BE 的长，即平移的距离；

（2）①连接 EM ，证明 $\triangle MEF$ 是等边三角形，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，以及含 30 度角的直角三角形的性质，从而可得△ABC 平移距离；

②根据题意作出图形，分情况讨论，当 J 在 AC 的延长线上时，根据等腰三角形的性质即可求解；当 J 在 CA 的延长线上时，△AKJ是以 AJ 为底边的等腰三角形,根据平行四边形的性质即可求解.

【详解】(1）如图，设 AB, DF 交于点 N ，



∵在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^{\circ}$， $BC=4$， $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴ $AB=\frac{BC}{\tan A}=4\sqrt{3}$

∵将△ABC 沿 CB 方向平移得到△DEF.

∴ $DE=AB, DE//AB$， $EF=BC=4$，平移距离即为 BE 的长，

∴$\triangle FBN \backsim \triangle FED$

∵△ABC 与△DEF 重叠部分的面积是△ABC 面积一半

∴ $\frac{S_{\triangle NBF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}=\left(\frac{BF}{EF}\right)^{2}$

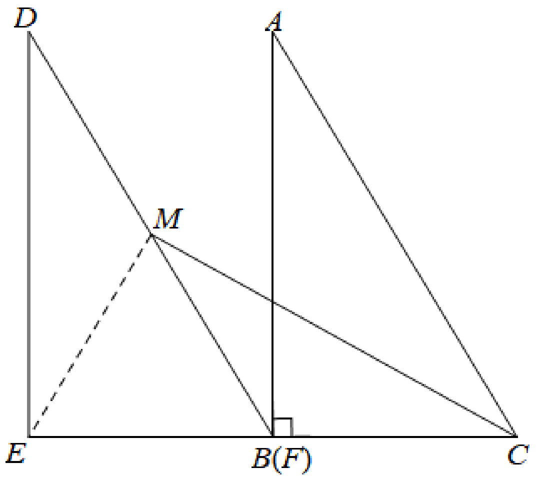
∵ $EF=4$

∴ $BF=2\sqrt{2}$

∴ $BE=EF-BF=4-2\sqrt{2}$

∴△ABC 平移距离为 $4-2\sqrt{2}$

(2）①如图，连接 EM ，



$\because \tan\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \angle BAC=30°$，

$\because \angle ABC=90°$，

$\therefore \angle ACB=60°$，

当 DF 的中点 M 恰好落在 $\angle ACB$ 的平分线上时，

$\therefore\ \angle MCB=30°$

$\because \angle DEF=90°$， M 是 DF 的中点 M，

$\therefore EM=\frac{1}{2}DF=MF$

$\because \angle DFE=\angle ACB=60°$

$\therefore \triangle MEF$ 是等边三角形

$\therefore \angle EMB=60°$

$\because DF\parallel AC$

$\therefore \angle BMC=\angle ACM=30°$

$\therefore \angle EMC=90°$

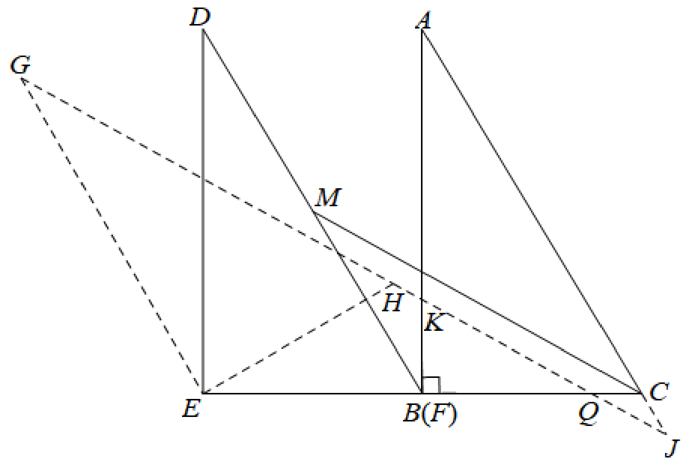
$\therefore EC=2EM=8$

$\therefore EF=EC-BC=8-4=4$

即△ABC 平移距离为 4

②将△DEF 绕点 E 旋转后得到△GEH（点 D 的对应点是点 G，点 F 对应点是点 H）

当△AKJ 是以 AJ 为底边的等腰三角形时，如图，



$\because \mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC=4, \angle A=30^{\circ}$

$\therefore AB=4\sqrt{3}, AC=8$

$\because \angle BAC=30^{\circ}$

$\therefore \angle AJK=30^{\circ}$

$\because$ 当$\triangle AKJ$是以 AJ 为底边的等腰三角形

$\therefore \angle J=\angle KAJ=30^{\circ}$

$\because \angle ACB=60^{\circ}$

$\therefore \angle CQJ=\angle ACB-\angle J=30^{\circ}$

$\therefore QC=CJ$

$\therefore \angle EQG=30^{\circ}$

$\because \angle G=\angle D=30^{\circ}$

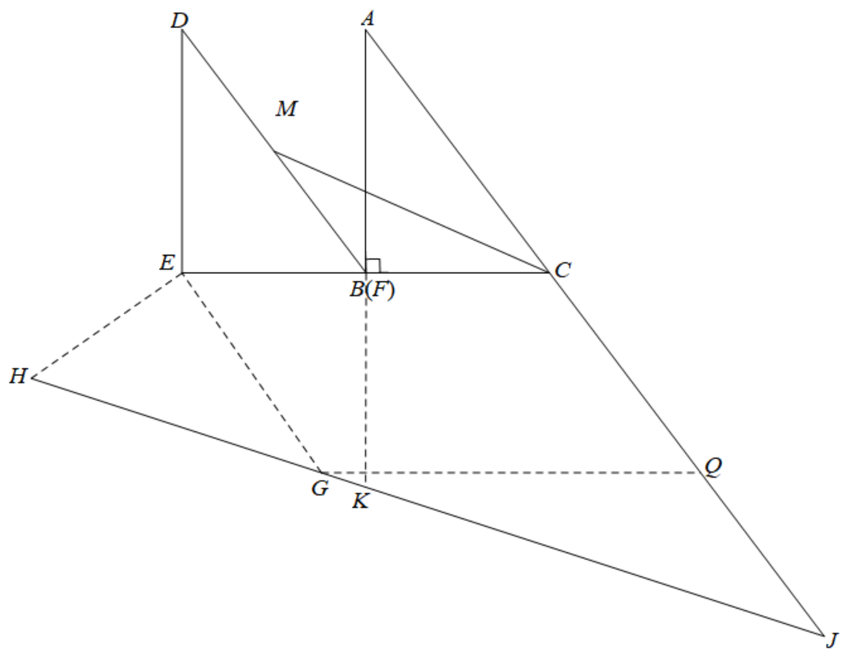
$\therefore \angle G=\angle EQG$

$\therefore EQ=EG=4\sqrt{3}$

$\therefore QC=CJ=8-4\sqrt{3}$

$\therefore AJ=AC+CJ=8+8-4\sqrt{3}=16-4\sqrt{3}$

当旋转到如图位置，$\triangle AKJ$是以 AJ 为底边的等腰三角形，过点G，作$GQ \parallel EC$



$\because \angle EGH = \angle J = 30°$

$\therefore EG \parallel AJ$

$\therefore$ 四边形 $EGQC$ 是平行四边形

$\therefore CQ = EG = 4\sqrt{3}$

$\because GQ \parallel EC$

$\therefore \angle JQG = \angle JCE = 120°$

$\therefore \angle QGJ = 30°$

$\therefore GQ = QJ = EC = 8$

$\therefore AJ = AC + CQ + QJ = 8 + 4\sqrt{3} + 8 = 16 + 4\sqrt{3}$

故答案为：$16 + 4\sqrt{3}$ 或 $16 - 4\sqrt{3}$

【点睛】本题考查了解直角三角形，平移的性质，旋转的性质，等边三角形的性质，平行四边形的性质与判定，角平分线的定义，含 30 度角的直角三角形的性质，根据题意作出图形，分类讨论是解题的关键．

22．(1) $BM = CN$， $BM \perp CN$，证明见解析

(2) $BP + CP = CQ$

(3) $NQ = \sqrt{2}$

【分析】（1）证明$\triangle BCM \cong \triangle CDN$，得 $BM = CN$， $\angle CBM = \angle DCN$，再导出

$\angle CBM+\angle PCB=90^{\circ}$，从而得到$\angle BPC=90^{\circ}$，$BM\perp CN$；

（2）作$DF\perp CQ$于点 F，得到等腰直角三角形DFQ，再证明♀BPC≌♀CFD，推得$BP+CP=CQ$；

（3）由题意可得♀ANQ∽♀CND∽♀BCP，可知 N 为AD的中点，$AQ=2NQ$，设正方形的边长为$2a$，将AQ、CQ用含 a 的代数式表示，由相似三角形的性质可以推得$\angle AQN=90^{\circ}$，由$\triangle ACQ$的面积是12列方程求出 a 的值，再转化为NQ的长．

【详解】（1）解：$BM=CN$，$BM\perp CN$，证明如下；

∵正方形$ABCD$，

∴$\angle BCM=\angle CDN=90^{\circ}$，$BC=CD$，

又∵$CM=DN$，

∴$\triangle BCM\cong\triangle CDN(\text{SAS})$，

∴$BM=CN$，$\angle CBM=\angle DCN$，

∴$\angle CBM+\angle PCB=\angle DCN+\angle PCB=90^{\circ}$，

∴$\angle BPC=90^{\circ}$，

∴$BM\perp CN$．

∴$BM=CN$，$BM\perp CN$；

（2）解：$BP+CP=CQ$，理由如下：

如图 2，作$DF\perp CQ$于点 F，

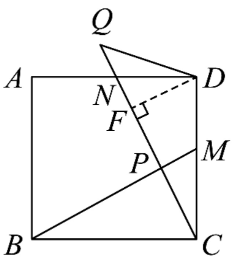


图2

∴$\angle CFD=\angle DFQ=90^{\circ}$，

∵$\angle CQD=45^{\circ}$，

∴$\angle FDQ=45^{\circ}=\angle CQD$，

∴$DF=QF$．

由（1）得$\angle PBC=\angle FCD$，$\angle BPC=90^{\circ}$，

∴$\angle BPC=\angle CFD$，

又∵$BC=CD$，

$\therefore \triangle BPC \cong \triangle CFD(\mathrm{AAS})$，

$\therefore BP = CF$， $CP = DF = QF$，

$\therefore BP + CP = CF + QF = CQ$；

（3）解：如图 3，设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$．

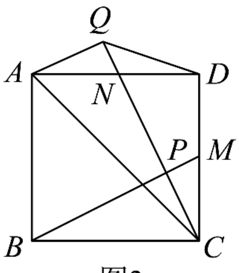


图3

$\because AD = CD$， $\angle ADC = 90^{\circ}$， $\angle CQD = 45^{\circ}$， $BP = 2CP$， $\triangle ACQ$ 的面积是 12，

$\therefore \angle CAN = 45^{\circ} = \angle CQD$，

又 $\because \angle ANC = \angle QND$，

$\therefore \triangle ACN \sim \triangle QDN$，

$\therefore \dfrac{AN}{QN} = \dfrac{CN}{DN}$，

$\therefore \dfrac{AN}{CN} = \dfrac{QN}{DN}$，

$\because \angle ANQ = \angle CND$，

$\therefore \triangle ANQ \sim \triangle CND$，

$\therefore \angle AQN = \angle CDN = \angle BPC = 90^{\circ}$， $\angle QAN = \angle DCN = \angle CBM$，

$\therefore \dfrac{NQ}{AQ} = \dfrac{ND}{CD} = \dfrac{CP}{BP} = \tan \angle CBM = \dfrac{CP}{2CP} = \dfrac{1}{2}$，

$\because CD = AD = 2a$，

$\therefore DN = \dfrac{1}{2}CD = a$， $AN = a$，

设 $NQ = x$，则 $AQ = 2x$，

$\therefore x^{2} + (2x)^{2} = a^{2}$，

解得 $x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}a$，

$\therefore NQ = \dfrac{1}{2}AQ = x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}a$，

$\because CN = \sqrt{CD^{2} + DN^{2}} = \sqrt{(2a)^{2} + a^{2}} = \sqrt{5}a$，

$\therefore CQ = CN + QN = \sqrt{5}a + \frac{\sqrt{5}}{5}a = \frac{6\sqrt{5}}{5}a$ ，

$\because S_{\text{♀} ACQ} = 12$ ，

$\therefore \frac{1}{2}CQ \cdot AQ = 12$ ，即 $\frac{1}{2} \times \frac{6\sqrt{5}}{5}a \times \frac{2\sqrt{5}}{5}a = 12$ ，

解得 $a = \sqrt{10}$ 或 $a = -\sqrt{10}$ （不符合题意，舍去），

$\therefore NQ = \frac{\sqrt{5}}{5}a = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \sqrt{10} = \sqrt{2}$ ，

$\therefore NQ$ 的长为 $\sqrt{2}$ ．

【点睛】本题考查了正方形的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理的应用，正切等知识，解题的关键是正确地作出所需要的辅助线，构造特殊角和含有特殊角的直角三角形．

23．（1） $y = \frac{12}{x}$ （2）3（3）P 点的坐标是（4，0）或（$\frac{25}{4}$，0）．

【分析】(1) 由四边形 OABC 是矩形，得到 BC=OA，AB=OC，根据 tan∠COD=$\frac{4}{3}$，设 OC=3x，CD=4x，求出 OD=5x=5，OC=3，CD=4，得到 D（4，3），代入反比例函数的解析式即可．

（2）根据 D 点的坐标求出点 B，E 的坐标即可求出结论；

（3）分类讨论：当∠OPD=90°时，过 D 作 PD⊥x 轴于 P，点 P 即为所求，当∠ODP=90°时，根据射影定理即可求得结果．

【详解】（1）∵四边形 OABC 是矩形，

∴BC=OA，AB=OC，

∵tan∠COD=$\frac{4}{3}$，

∴设 OC=3x，CD=4x，

∴OD=5x=5，

∴x=1，

∴OC=3，CD=4，

∴D（4，3），

设过点 D 的反比例函数的解析式为：y=$\frac{k}{x}$，

∴k=12，

∴反比例函数的解析式为：y=$\frac{12}{x}$；

（2）∵点 D 是 BC 的中点，

∴B（8，3），

∴BC=8，AB=3，

∵E 点在过点 D 的反比例函数图象上，

∴E（8，$\frac{3}{2}$），

∴$S_{\triangle DBE}=\frac{1}{2}$BD•BE=$\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}$=3；

（3）存在，

∵△OPD 为直角三角形，

∴当∠OPD=90°时，PD⊥x 轴于 P，

∴OP=4，

∴P（4，0），

当∠ODP=90°时，

如图，过 D 作 DH⊥x 轴于 H，

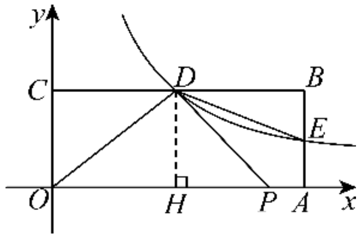
∴OD^2=OH•OP，

∴OP=$\frac{OD^2}{OH}=\frac{25}{4}$．

∴P（$\frac{25}{4}$，O），

∴存在点 P 使△OPD 为直角三角形，

∴P（4，O），（$\frac{25}{4}$，O）．



24．(1) $BM=CN$ 且 $BM\perp CN$，证明见解析；(2) ①$BP+CP=CQ$；②1；(3) $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$ 或 $3-\sqrt{3}$

【分析】(1) 结论为：$BM=CN$，且 $BM\perp CN$，由四边形 $ABCD$ 正方形，可得 $BC=CD$，$\angle BCD=\angle CDA=90°$，即$\angle BCM=\angle CDN=90°$，可证$\triangle BCM\cong\triangle CDN$（SAS），$BM=CN$，$\angle MBC=\angle NCD$，可求$\angle MPC=90°$即可；

(2) ①BP，CP，CQ 之间的数量关系为 $CQ=CP+BP$；过 D 作 $DE\perp CQ$ 于 E，先证 $QE=DE$，再证$\triangle BCP\cong\triangle CDE$（AAS），可得 $BP=CE$，$CP=DE$，可证 $CQ=QE+CE=CP+BP$；

②连接 AC，AQ，过 Q 作 $QF\perp AD$ 于 F，由 $BP=2CP$，利用 $\tan\angle PBC$，求出 $MC=\frac{1}{2}BC$，再由 $\tan\angle PBC=\tan\angle DCN$，可求点 N 为 AD 中点，设 $DE=x$,则 $BP=CE=2x$,$QE=DE=x$，由勾股定理得 $CD=\sqrt{CE^2+DE^2}=\sqrt{5}x$，$AN=DN=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}\sqrt{5}x$，由勾股定理求 $CN=\frac{5}{2}x$，$CQ=3x$，$QN=\frac{1}{2}x$，可证 $QF\parallel DC$，$\angle FQN=\angle DCN$，可求 $QF=\frac{\sqrt{5}}{5}x$，利用面积

$S_{\triangle}AQC=S_{\triangle}AQN+S_{\triangle}ANC=\frac{3}{2}x^2=6$，即可求出；

（3）连结 BD，延长 DE 与过 B 作 DE 的垂线交于 H，分两种情况，当点 E 在 BD 上方，由勾股定理得 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2\sqrt{3}$，可求 $HB=HE=BE\times\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}BE$ 由 $BE+\sqrt{2}DE=3\sqrt{2}$，可求 $HE+DE=3$；由勾股定理 $BH=\sqrt{3}$，由三角函数 $\sin\angle HDB=\frac{1}{2}$ 可求 $\angle HDB=30°$，求出 $BE=BH\div\sin45°=\sqrt{6}$，可证 $\triangle EBC$ 为等边三角形，再求 $CN=\sqrt{6}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{2}$，当点 E 在 BD 下方时，连结 AE，求出 $BE=AB=BC=\sqrt{6}$，可得 $\angle ABE=60°$，可证 $\triangle EBC$ 为等边三角形，可求 $DE=3-\sqrt{3}$，再证 $NE=DE=3-\sqrt{3}$ 即可．

【详解】（1）证明：结论为： $BM=CN$，且 $BM\perp CN$，

∵四边形 $ABCD$ 正方形，

∴$BC=CD$，$\angle BCD=\angle CDA=90°$，即$\angle BCM=\angle CDN=90°$，

∴在$\triangle BCM$和$\triangle CDN$中，

$$\begin{cases}BC=CD\\ \angle BCM=\angle CDN\\ CM=DN\end{cases},$$

∴$\triangle BCM\cong\triangle CDN$（$SAS$），

∴$BM=CN$，$\angle MBC=\angle NCD$，

∵$\angle MBC+\angle CMB=90°$

∴$\angle NCD+\angle CMB=90°$

∴$\angle MPC=180°-\angle NCD-\angle CMB=90°$

∴$BM\perp CN$，

∴线段 BM 与 CN 的数量关系和位置关系为：$BM=CN$，且 $BM\perp CN$；

（2）证明①BP，CP，CQ 之间的数量关系为 $CQ=CP+BP$；

过 D 作 $DE\perp CQ$ 于 E，

$\because \angle CQD=45°$，

$\therefore \angle QDE=90°-\angle CQD=45°=\angle CQD$，

$\therefore QE=DE$，

由（1）知$\angle MBC=\angle MCD$，$\angle BPC=90°$，

在$\triangle BCP$和$\triangle CDE$中，

$$\begin{cases}\angle BPC=\angle CED=90° \\ \angle BCP=\angle CDE \\ BC=CD\end{cases}，$$

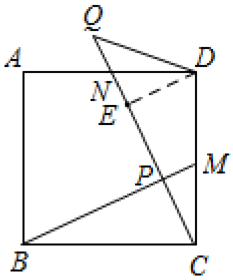
$\therefore \triangle BCP \cong \triangle CDE$（$AAS$），

$\therefore BP=CE$，$CP=DE$，

$\therefore CP=DE=QE$，

$\therefore CQ=QE+CE=CP+BP$，

故答案为：$CQ=CP+BP$；



解：②连接AC，AQ，过Q作$QF\perp AD$于F，

$\because BP=2CP$，

$\therefore \tan\angle PBC=\frac{PC}{PB}=\frac{1}{2}=\frac{MC}{BC}$，

$\therefore MC=\frac{1}{2}BC$，

由（1）知$\angle DCN=\angle MBC$，

$\therefore \tan\angle PBC=\tan\angle DCN=\frac{1}{2}=\frac{DN}{CD}$，

$\therefore DN=\frac{1}{2}DC$，

$\therefore$点N为AD中点，

设$DE=x$,则$BP=CE=2x$,$QE=DE=x$，

在$Rt\triangle EDC$中，由勾股定理得$CD=\sqrt{CE^2+DE^2}=\sqrt{(2x)^2+x^2}=\sqrt{5}x$，

$\therefore AN=DN=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}\sqrt{5}x$，

在 $Rt\triangle NDC$ 中，由勾股定理 $CN=\sqrt{DN^2+DC^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}x}{2}\right)^2+(\sqrt{5}x)^2}=\sqrt{\frac{5x^2}{4}+5^2}=\frac{5}{2}x$，

$\therefore CQ=QE+CE=ED+CE=3x$，

$\therefore QN=QC-CN=3x-\frac{5}{2}x=\frac{1}{2}x$，

$\because QF\perp AD$，$CD\perp AD$，

$\therefore QF\parallel DC$，

$\therefore \angle FQN=\angle DCN$，

$\therefore \cos\angle NQF=\cos\angle NCD=\frac{QF}{QN}=\frac{CD}{CN}=\frac{\sqrt{5}x}{\frac{5x}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

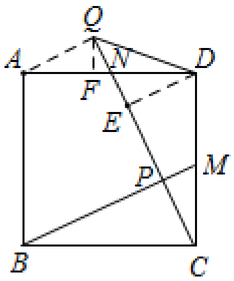
$\therefore \frac{QF}{QN}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即 $QF=\frac{2\sqrt{5}}{5}QN=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{2}x=\frac{\sqrt{5}}{5}x$，

$\therefore S_{\triangle AQC}=S_{\triangle AQN}+S_{\triangle ANC}=\frac{1}{2}AN\cdot QF+\frac{1}{2}AN\cdot CD=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}x}{2}\times\frac{\sqrt{5}x}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}x}{2}\times\sqrt{5}x=\frac{3}{2}x^2=6$，

解得 $x=2$，$x=-2$（舍去），

$\therefore QN=\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\times2=1$，

故答案为：1；



（3）连结 BD，延长 DE 与过 B 作 DE 的垂线交于 H，分两种情况：

当点 E 在 BD 上方，

$\because AB=\sqrt{6}$，$AD=AB=\sqrt{6}$，

在 $Rt\triangle ADB$ 中，由勾股定理得 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2\sqrt{3}$，

又$\because \angle BED=135°$，

$\therefore \angle HEB=180°-\angle BED=180°-135°=45°$，

$\therefore HB=HE=BE\times\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}BE$，

$\because BE+\sqrt{2}DE=3\sqrt{2}$，

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}BE+DE=3$，

$\therefore HE+DE=3$，

在 $Rt\triangle HBD$ 中由勾股定理 $BH=\sqrt{BD^2-HD^2}=\sqrt{12-3}=\sqrt{3}$，

$\therefore \sin\angle HDB=\frac{BH}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \angle HDB=30°$，

又$\because BE=BH\div\sin45°=\sqrt{6}$，

$\therefore BE=AB=BC=\sqrt{6}$，

$\therefore \angle EBD=180°-\angle BED-\angle EDB=180°-135°-30°=15°$，

$\therefore \angle EBC=\angle EBD+\angle DBC=15°+45°=60°$，

$\therefore\triangle EBC$ 为等边三角形，

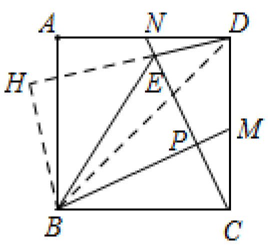
$\therefore CE=BC=\sqrt{6}$，$\angle ECB=60°$，

$\therefore \angle NCD=90°-\angle ECB=90°-60°=30°$，

$\therefore CD=CN\times\cos30°$，

$\therefore CN=\sqrt{6}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore NE=2\sqrt{2}-\sqrt{6}$，



当点 E 在 BD 下方时，连结 AE，

$\because BE+\sqrt{2}DE=3\sqrt{2}$，

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}BE+DE=3$，

$\therefore HE+DE=3$；

在 $Rt\triangle HBD$ 中由勾股定理 $BH=\sqrt{BD^2-HD^2}=\sqrt{12-3}=\sqrt{3}$，

$\therefore \sin\angle HDB=\frac{BH}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \angle HDB=30°$，

又$\because BE=BH\div\sin45°=\sqrt{6}$，

$\therefore BE=AB=BC=\sqrt{6}$，

$\therefore \angle ABE=60°$，

$\therefore DE==3-\frac{\sqrt{2}}{2}BE=3-\sqrt{3}$，

$\therefore \angle EBC=90°-\angle ABE=90°-60°=30°$，

$\therefore \angle BCE=\frac{1}{2}(180°-\angle CBE)=75°$，

$\therefore \angle ECD=90°-\angle BCE=15°=\angle BDC-\angle BDH=\angle EDC$,

$\therefore ED=EC$,

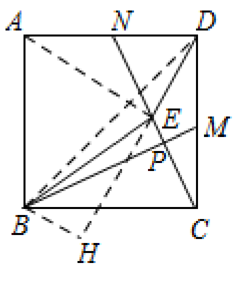
又$\because \angle EDN=90°-\angle EDC=90°-15°=75°$，$\angle DNE=90°-\angle ECD=90°-15°=75°$,

$\therefore \angle EDN=\angle DNE=75°$，

$\therefore NE=DE=3-\sqrt{3}$，

NE 的长为 $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$ 或 $3-\sqrt{3}$．

故答案为：$2\sqrt{2}-\sqrt{6}$ 或 $3-\sqrt{3}$．



【点睛】本题考查正方形的性质，三角形全等判定与性质，锐角三角函数定义求值和求角，勾股定理，用三角形面积构造方程，等边三角形判定与性质，等腰三角形判定与性质，本题难度较大，应用知识较多，通过辅助线构造图形是难点，也解题关键.

25.（1）$\frac{12}{5}$，$\frac{9}{5}$；（2）①$CD=(8-\frac{16}{5}x)$，见解析；②正方形的边长为$\frac{6}{5}$cm；（3）当 x 为

$\frac{40}{49}s$或$1s$或$\frac{64}{55}s$时，$\triangle MCQ$是等腰三角形

【分析】（1）如图1，过点P作$PR\perp AC$于R，过点M作$MT\perp AC$于T，先求解AB，再利用锐角三角函数分别求解PR，AR，AQ，再证明$\triangle PRQ\cong\triangle QTM$，再利用全等三角形的性质证明$MT=RQ$，从而可得答案；

（2）如图2，过点M作$MF\perp AC$于F．由（1）知，$\triangle PDQ\cong\triangle QFM$，$AD=AP\bullet cosA=\frac{4}{5}\times 4x=\frac{16}{5}x$ cm，$PD=AP\bullet sinA=\frac{12}{5}x$ cm，$DQ=\frac{9}{5}x$ cm，①由$CD=AC-AD$，可得答案；②由$FM\parallel PD$，可得$\frac{FM}{PD}=\frac{CF}{CD}$，再建立方程求解即可；

（3）如图3中，当$MQ=MC$时，作$MF\perp CQ$于F．由$cos\angle A=cos\angle FQM$，建立方程求解，如图4中，当$QC=QM$时，由$8-5x=3x$，求解即可，如图5中．当$CQ=CM$时，作$CF\perp MQ$于$F$．由$cos\angle CQF=\frac{4}{5}$，再建立方程求解即可．

【详解】解：（1）如图1，过点P作$PR\perp AC$于R，过点M作$MT\perp AC$于T，

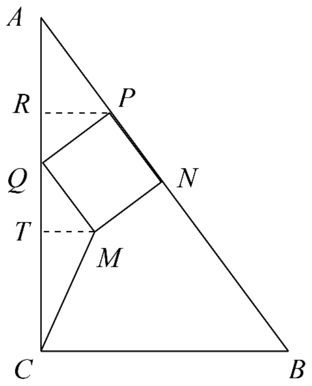


图1

当$x=1$时，$AP=4$，

在$Rt\triangle ABC$中，$AC=8$cm，$BC=6$cm，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$cm，

$\therefore sinA=\frac{BC}{AB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，$cosA=\frac{AC}{AB}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$，

$\therefore PR=AP\bullet sinA=\frac{12}{5}$cm，$AR=AP\bullet cosA=\frac{16}{5}$cm，$AQ=\frac{AP}{\cos A}=5$cm，

$\because$四边形$PQMN$为正方形，

$\therefore PQ=QM$，$\angle PQR+\angle MQT=90°$，

$\because \angle PQR+\angle RPQ=90°$，

$\therefore \angle RPQ=\angle MQT$，

$\because \angle PRQ = \angle QTM = 90°$，

$\therefore \triangle PRQ \cong \triangle QTM$（$AAS$），

$\therefore TM = RQ = AQ - AR = \frac{9}{5}$cm，

故答案为：$\frac{12}{5}$，$\frac{9}{5}$；

（2）如图 2，过点 M 作 $MF \perp AC$ 于 F.

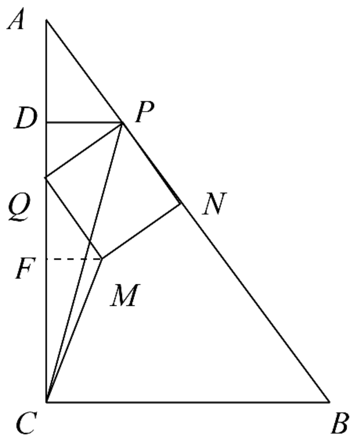


图 2

由（1）知，$\triangle PDQ \cong \triangle QFM$，$AD = AP \cdot cosA = \frac{4}{5} \cdot 4x = \frac{16}{5}x$ cm，

$PD = AP \cdot sinA = \frac{12}{5}x$ cm，$DQ = \frac{9}{5}x$ cm，

①$\because CD = AC - AD$，

$\therefore CD = \left(8 - \frac{16}{5}x\right)$cm，

②当点 P、M、C 三点共线时，

$\because \triangle PDQ \cong \triangle QFM$，

$\therefore PD = FQ = \frac{12}{5}x$ cm，$DQ = FM = \frac{9}{5}x$ cm，

$\therefore CF = 8 - \frac{16}{5}x - \frac{9}{5}x - \frac{12}{5}x = 8 - \frac{37}{5}x, CD = 8 - \frac{16}{5}x,$

$\because FM \parallel PD$，

$\therefore \frac{FM}{PD} = \frac{CF}{CD}$，

$\therefore \frac{\frac{9}{5}x}{\frac{12}{5}x} = \frac{8 - \frac{37}{5}x}{8 - \frac{16}{5}x}$，

$\therefore x=\frac{2}{5}$，

经检验，$x=\frac{2}{5}$是分式方程的解，

$\therefore PQ=\sqrt{PD^{2}+DQ^{2}}=3x=\frac{6}{5}$ （cm），

$\therefore$正方形的边长为$\frac{6}{5}$cm；

（3）如图3中，当$MQ=MC$时，作$MF\perp CQ$于F.

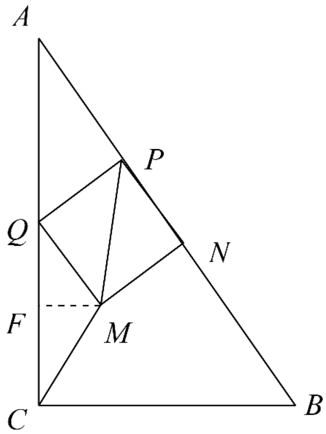


图3

$\because QM\parallel AB$，

$\therefore \angle A=\angle FQM$，

$\therefore \cos\angle A=\cos\angle FQM$，

$\therefore \frac{FQ}{QM}=\frac{4}{5}$，而$AQ=\frac{AP}{\cos A}=\frac{4x}{\frac{4}{5}}=5x$，

$\therefore \frac{\frac{1}{2}(8-5x)}{3x}=\frac{4}{5}$，

$\therefore x=\frac{40}{49}$，

经检验，$x=\frac{40}{49}$是分式方程的解.

如图4中，当$QC=QM$时，

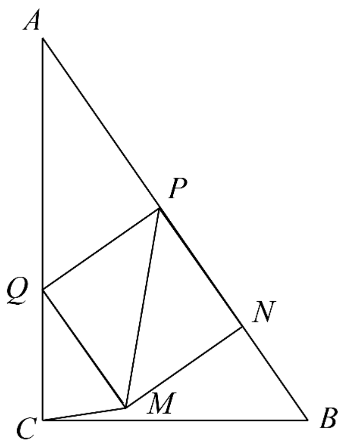


图4

则有 $8-5x=3x$，解得 $x=1$．

如图 5 中．当 $CQ=CM$ 时，作 $CF\perp MQ$ 于 F．

$\therefore QF=FM=\frac{1}{2}QM$，

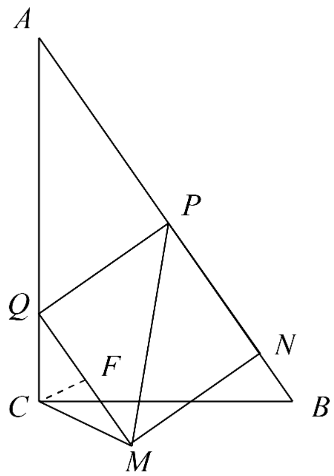


图 5

$\because \cos\angle CQF=\frac{4}{5}$，

$\therefore \frac{QF}{QC}=\frac{4}{5}$，

$\therefore \frac{\frac{3}{2}x}{8-5x}=\frac{4}{5}$，

$\therefore t=\frac{64}{55}$，

综上所述，当运动时间为 $\frac{40}{49}s$ 或 $1s$ 或 $\frac{64}{55}s$ 时，$\triangle MCQ$ 是等腰三角形．

【点睛】本题属于四边形综合题，考查了正方形的性质，锐角三角函数，全等三角形的判定

和性质，相似三角形的判定和性质，平行线的性质等知识，解题的关键是学会利用等腰三角形的性质以及三角函数构建方程解决问题，属于中考压轴题.

26.（1）$BE=\sqrt{2}AF$；（2）① $BE=\sqrt{2}AF$ 成立，理由见解析；②平行四边形，理由见解析；

【分析】（1）如图 1，证明 $AB//EF$，由平行线分线段成比例可得 $\frac{FC}{EC}=\frac{AF}{BE}$，由 $45°$ 的余弦值可得 $BE=\sqrt{2}AF$；

（2）①根据两边成比例，夹角相等，证明 $\triangle ABC\backsim\triangle FEC$，即可得 $\frac{BE}{AF}=\frac{BC}{AC}=\sqrt{2}$；

②如图 3，过 A 作 $AM\perp BC$，连接 MF，AC,EF 交于点 N，根据已知条件证明 $ED//FM$，根据平行线分线段成比例可得 $BE=2EF$，根据锐角三角函数以及①的结论可得 $AF=EC$，根据三角形内角和以及 $\triangle ABC\backsim\triangle FEC$ 可得 $\angle AFE=\angle FEC$，进而可得 $AF//EC$，即可证明四边形 $AECF$ 是平行四边形.

【详解】（1）如图 1，

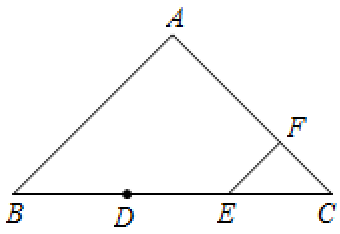


图1

$\because\angle BAC=90°$，$AB=AC$，

$\therefore\angle B=\angle C=45°$，

$\because\triangle CEF$ 是以 EC 为斜边等腰直角三角形，

$\therefore\angle FEC=45°,\angle EFC=90°$，

$\therefore\angle B=\angle FEC$，

$\therefore AB//EF$，

$\therefore\frac{FC}{EC}=\frac{AF}{BE}$，

$\because\cos C=\frac{FC}{EC}=\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\frac{AF}{BE}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即 $BE=\sqrt{2}AF$；

（2）① $BE=\sqrt{2}AF$ 仍然成立，理由如下：

如图 2，

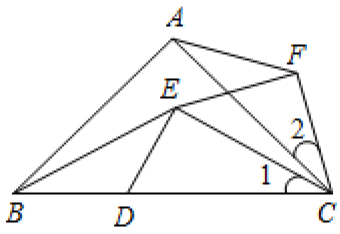


图2

∵ $\angle BAC = 90^{\circ}$， $AB = AC$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^{\circ}$，

∵ $\triangle CEF$ 是以 EC 为斜边等腰直角三角形，

$\therefore \angle FCE = 45^{\circ}$，$\angle EFC = 90^{\circ}$，

$\therefore \angle FCE = \angle ACB$ ，

$\therefore \cos\angle FCE = \cos\angle ACB$ ，

即 $\frac{FC}{EC} = \frac{AC}{BC} = \cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

∵ $\angle FCE = \angle ACB$，

$\therefore \angle 1 + \angle ACE = \angle 2 + \angle ACE$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

$\therefore \triangle FCA \backsim \triangle ECB$ ，

$\therefore \frac{AF}{BE} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

即 $BE = \sqrt{2} AF$ ；

②四边形 $AECF$ 是平行四边形，理由如下：

如图 3，过 A 作 $AM \perp BC$ ，连接 MF， AC, EF 交于点 N ，

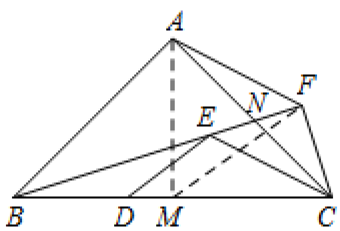


图3

∵ $\angle BAC = 90^{\circ}$， $AB = AC$ ，

$\therefore BM = MC = \frac{1}{2}BC$ ，

$\because DB = DE$ ，

$\therefore \angle EBD = \angle DEB$ ，

$\therefore \angle EDC = 2\angle EBD$ ，

$\because \triangle CEF$ 是以 EC 为斜边等腰直角三角形，

$\therefore \angle EFC = 90^{\circ}$，

$\because B$ ， E ， F 三点共线，

$\because BM = MC$ ，

$\therefore MF = \frac{1}{2}BC = BM$ ，

$\therefore \angle FBC = \angle BFM$ ，

$\therefore \angle FMC = 2\angle FBC$ ，

$\therefore \angle FMC = \angle EDC$ ，

$\therefore ED // FM$ ，

$\therefore \frac{BE}{EF} = \frac{BD}{DM}$，

$\because BD = \frac{1}{3}BC$ ，

$\therefore DM = BM - BD = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC = \frac{1}{6}$，

$\therefore \frac{BD}{DM} = \frac{2}{1}$，

$\therefore \frac{BE}{EF} = \frac{BD}{DM} = \frac{2}{1}$，

$\therefore BE = 2EF$ ，

由①可知 $BE = \sqrt{2}AF$ ，

$\therefore AF = \sqrt{2}EF$ ，

$\because \triangle CEF$ 是以 EC 为斜边等腰直角三角形，

$\therefore EF = FC$, $EC = \sqrt{2}EF$ ，

$\therefore AF = EC$ ，

$\because$ ♀ $FCA \backsim$ ♀ ECB ，

$\therefore \angle EBC = \angle FAC$ ，

$\because \angle BNC = \angle ANF$ ，

$\therefore \angle AFN=180^\circ-\angle FAC-\angle ANF, \angle NCB=180^\circ-\angle FBC-\angle BNC$，

$\therefore \angle AFN=\angle NCB$，

即$\angle AFE=\angle ACB=45^\circ$，

$\because \angle FEC=45^\circ$，

$\therefore \angle AFE=\angle FEC$，

$\therefore AF // EC$，

$\therefore$四边形$AECF$是平行四边形.

【点睛】本题考查了等腰三角形性质，直角三角形斜边上的中线等于斜边，平行线分线段成比例，相似三角形的性质与判定，平行四边形的判定，熟练掌握平行线分线段成比例以及相似三角形的性质与判定是解题的关键.

27．(1) $B(6,2\sqrt{3})$，$\angle AOC=60^\circ$

(2)①C， ② $S=-\frac{\sqrt{3}}{2}t^2+3\sqrt{3}t$

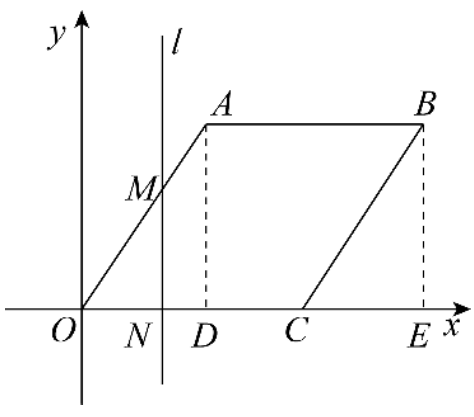
(3) $t=\frac{5}{2}$或者$t=5$

【分析】(1)、过点A、B作$AD\perp OC$，$BE\perp OC$分别交OC于D、E，利用菱形性质和矩形性质，可证得$\triangle AOD\cong\triangle BCE$，即可求得；

(2)、①分为两种情况进行讨论，分别画出图求解即可；②设直线MN交OC于H，求出直线BC解析式，进而表示出MN的长，即可求解；

(3)、分三种情况分别进行讨论即可求解.

【详解】(1) 解：如图：过点A、B作$AD\perp OC$，$BE\perp OC$分别交OC于D、E，



$\because$点A的坐标为$(2,2\sqrt{3})$，

$\therefore OD=2, AD=2\sqrt{3}$,

$\therefore OA=\sqrt{OD^2+AD^2}=4$,

$\therefore \tan\angle AOD=\dfrac{AD}{OD}=\sqrt{3}$,

$\therefore \frown AOD=60^\circ$,

∵四边形 $OABC$ 为菱形，

$\therefore AO=OC=BC=4$ ， $OA\,/\!/\,BC$ ，

$\therefore \angle AOD=\angle BCE=60^\circ$

$\because \angle ADO=\angle BEC=90^\circ$ ， $AO=BC$ ，

$\therefore \triangle AOD\cong\triangle BCE$ ，

$\therefore BE=AD=2\sqrt{3}, CE=OD=2$ ，

$\therefore OE=OC+CE=6$ ，

$\therefore B(6,2\sqrt{3})$ ；

故答案为： $B(6,2\sqrt{3})$ ， $\angle AOC=60^\circ$；

（2）①由题意可分为两种情况：

当 $0\le t\le 2$ 时，如图 1 所示：

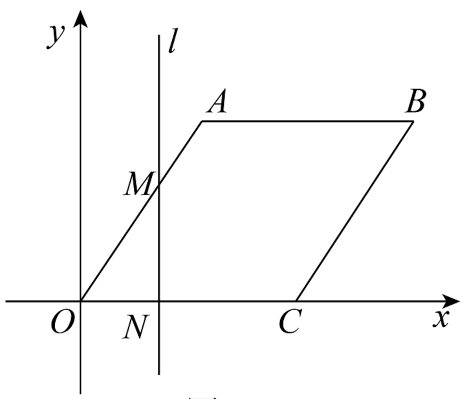


图 1

由题意可得； $MN\perp OC, ON=t$ ，

$\tan\angle MON=\dfrac{MN}{ON}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ ，

$\therefore MN=\sqrt{3}t$ ，

$S_{\triangle MON}=\dfrac{1}{2}\bullet ON\bullet MN=\dfrac{1}{2}\bullet t\bullet\sqrt{3}t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2$ ；

当 $2<t\le 4$ 时，如图 2 所示：过点 A 作 $AD\perp OC$ 交 OC 于 D，

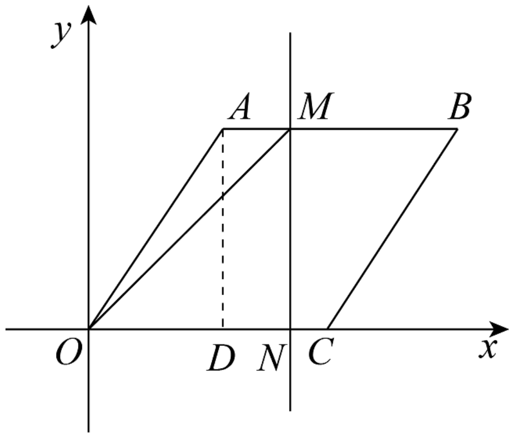


图 2

则可得四边形 $ADNM$ 为矩形，

$\therefore MN=AD=2\sqrt{3}$

$\because ON=t$，

$\therefore S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}ON\bullet MN=\sqrt{3}t$，

$\therefore S=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}t^2(0\le t\le 2)\\ \sqrt{3}t(2<t\le 4)\end{cases}$，

故 S 与 t 的函数关系的图象为 C 选项；

故选 C；

②当 $4<t\le 6$ 时，如图 3 所示：设直线 MN 交 OC 于 H，

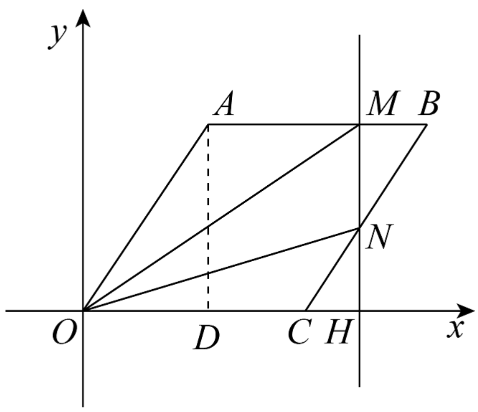


图 3

则可知 $MH\perp OC$，

$\because AD\perp OC, AB\parallel OC$，

$\therefore \angle ADC=\angle MHD=\angle DAM=90°$，

$\therefore ADHM$ 为矩形，

$\therefore AD = MH = 2\sqrt{3}$ ，

设直线 BC 解析式为：$y = kx + b$ ，

将 $B(6, 2\sqrt{3}), C(4, 0)$ 代入得：

$\begin{cases} 6k + b = 2\sqrt{3} \\ 4k + b = 0 \end{cases}$ ，

解得：$\begin{cases} k = \sqrt{3} \\ b = -4\sqrt{3} \end{cases}$ ，

$\therefore y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$ ，

$\therefore M(t, 2\sqrt{3}), H(t, 0), N(t, \sqrt{3}t - 4\sqrt{3})$ ，

$\therefore MN = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3}t - 4\sqrt{3}) = -\sqrt{3}t + 6\sqrt{3}$ ，

$\therefore S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} \bullet MN \bullet OH = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}t + 6\sqrt{3}) \bullet t = -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 3\sqrt{3}t$ ，

$\therefore S = -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 3\sqrt{3}t(4 < t \le 6)$ ；

（3）存在，

菱形 $OABC$ 的面积$= AD \bullet OC = 2\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}$ ，

$\because \triangle OMN$ 的面积与菱形 $OABC$ 的面积之比为 $5:16$，

$\therefore \triangle OMN$ 的面积为：$\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ，

①当 $0 \le t \le 2$ 时，可得 $\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ，

解得：$t = \pm\sqrt{5}$ ，都不符合，所以都舍去；

②当 $2 < t \le 4$ 时，可得 $\sqrt{3}t = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ，

解得：$t = \frac{5}{2}$ ，符合，

③当 $4 < t \le 6$ 时，可得：$-\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 3\sqrt{3}t = \frac{5\sqrt{3}}{2}$，

化简得：$t^2 - 6t + 5 = 0$ ，

解得：$t_1 = 5$ ，$t_2 = 1$ （不符合，舍去），

综上所述：当 $t=\frac{5}{2}$ 或者 $t=5$ 时，$\triangle OMN$ 的面积与菱形 $OABC$ 的面积之比为 $5:16$.

【点睛】本题考查了菱形的性质，矩形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，特殊角的锐角三角函数值，面积公式，待定系数法求一次函数的解析式，函数的图像，分类讨论的方法等知识，综合运用以上知识是解题的关键.

28．(1) α＝22.5°；(2) ①30°；②$12-4\sqrt{3}$.

【分析】(1) 先根据正方形的性质、旋转的性质、平行线的性质得出 $\angle C'MN=\angle C'NM$ ，再根据等腰三角形的性质、线段的和差可得 $MB'=ND'$，然后根据三角形全等的判定定理与性质可得 $\angle B'AM=\angle D'AN$ ，最后根据正方形的性质、角的和差即可得；

(2) ①先根据旋转的性质可得 $\angle BAB'=\alpha=30°$，再根据正方形的性质、三角形全等的判定定理与性质可得 $\angle QAB'=\angle QAD$ ，然后根据角的和差即可得；

②如图 2（见解析），设 $PB=a$ ，先根据三角形全等的判定定理与性质得出 $\angle BAP=\angle PAB'=15°$，再根据直角三角形的性质、平角的定义得出 $\angle CPQ=30°$，又根据等腰三角形的性质、三角形的外角性质得出 $\angle BEP=30°$，从而可得 $AE=2a$ ， $BE=\sqrt{3}a$，然后根据线段的和差可求出 a 的值，从而可得 PC 的长，最后在 $Rt\triangle CPQ$ 中，利用 $\angle CPQ$ 的余弦值即可得.

【详解】(1) 如图 1，由旋转的性质得：$\angle BAB'=\alpha$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore \angle BAD=90°, \angle MAN=45°$

$\because$ 四边形 $AB'C'D'$ 是正方形

$\therefore \angle C'B'D'=\angle C'D'B'=45°$， $\angle B'AD'=\angle AB'M=\angle AD'N=90°$， $C'B'=C'D'=AB'=AD'$

$\because MN//B'D'$

$\therefore \angle C'MN=\angle C'B'D'=45°$， $\angle C'NM=\angle C'D'B'=45°$

$\therefore \angle C'MN=\angle C'NM$

$\therefore C'M=C'N$

$\because C'B'=C'D'$，

$\therefore C'B'-C'M=C'D'-C'N$ ，即 $MB'=ND'$

$\because AB'=AD'$， $\angle AB'M=\angle AD'N=90°$

$\therefore \triangle AB'M\cong\triangle AD'N(SAS)$

$\therefore \angle B'AM=\angle D'AN$

∵ $\angle B'AD'=90°, \angle MAN=45°$

∴ $\angle B'AM=\angle D'AN=22.5°$

∴ $\angle BAB'=\angle BAD-\angle B'AM-\angle MAN=90°-22.5°-45°=22.5°$

即 $\alpha=22.5°$；

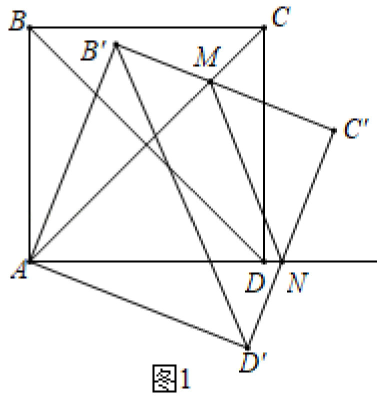


图1

（2）①如图 2，由旋转的性质和题意得：$\angle BAB'=\alpha=30°$

∵ $\angle AB'Q=\angle ADQ=90°, AQ=AQ, AB'=AD$

∴ $Rt\triangle AQB'\cong Rt\triangle AQD(HL)$

∴ $\angle QAB'=\angle QAD$

∵ $\angle BAB'=30°, \angle BAD=90°$

∴ $\angle B'AD=60°$

∴ $\angle QAD=\frac{1}{2}\angle B'AD=30°$；

②如图 2，连接 AP，在 AB 上取一点 E，使得 $AE=EP$，连接 EP

设 $PB=a$

∵ $\angle ABP=\angle AB'P=90°$， $AP=AP$， $AB=AB'$

∴ $Rt\triangle APB\cong Rt\triangle APB'(HL)$

∴ $\angle BAP=\angle PAB'=\frac{1}{2}\angle BAB'=15°$

∴ $\angle BPA=\angle B'PA=90°-15°=75°$

∴ $\angle CPQ=180°-\angle BPA-\angle B'PA=30°$

∵ $EA=EP$

∴ $\angle EAP=\angle EPA=15°$

∴ $\angle BEP=\angle EAP+\angle EPA=30°$

∴ $AE=EP=2PB=2a$， $BE=\sqrt{3}a$

$\because AB=AE+BE=6$

$\therefore 2a+\sqrt{3}a=6$

$\therefore a=12-6\sqrt{3}$，即 $PB=12-6\sqrt{3}$

$\therefore PC=BC-PB=AB-PB=6\sqrt{3}-6$

在 $Rt\triangle CPQ$ 中，$\cos\angle CPQ=\dfrac{PC}{PQ}$，即 $\cos30^\circ=\dfrac{6\sqrt{3}-6}{PQ}$

解得 $PQ=\dfrac{6\sqrt{3}-6}{\cos30^\circ}=12-4\sqrt{3}$．

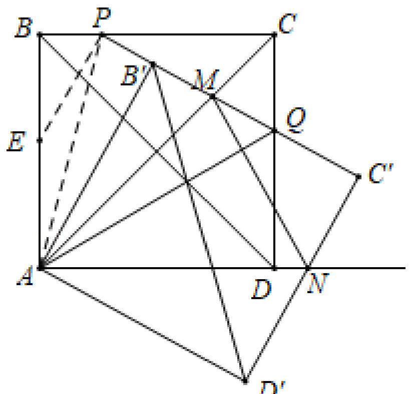


图2

【点睛】本题考查了正方形的性质、旋转的性质、三角形全等的判定定理与性质、余弦三角函数值等知识点，较难的是题（2）②，通过作辅助线，构造全等三角形和等腰三角形是解题关键．