$-1<2<3$,$\therefore y_1>y_2$.

12.【解】(1)$\because B(1,0)$,点 A 在抛物线 $y=x^2$ 上,

$\therefore A(1,1)$.$\therefore AD=AB=1$.$\therefore D(2,1)$.

(2)$\because$ 原抛物线 $y=x^2$ 经过点 $O(0,0)$,

$\therefore$ 原抛物线向右平移 1 个单位长度得到的抛物线 $y=(x-1)^2$ 经过点 $B(1,0)$.

在 $y=(x-1)^2$ 中,令 $x=2$,则 $y=(2-1)^2=1$,

$\therefore$ 点 D 在新抛物线上.

13.【解】(1)在 $y=(x+2)^2$ 中,令 $y=0$,得 $x=-2$;

令 $x=0$,得 $y=4$,

$\therefore$ 点 A,B 的坐标分别为 $(-2,0),(0,4)$.

(2)$\because$ 点 A,B 的坐标分别为 $(-2,0),(0,4)$,

$\therefore OA=2,OB=4$.

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times2\times4=4$.

(3)抛物线的对称轴为直线 $x=-2$.

(4)存在.

①以 OA 和 OB 为邻边可作平行四边形 $PAOB$,易求得 $P(-2,4)$;

②以 AB 和 OB 为邻边可作平行四边形 $PABO$,易求得 $P(-2,-4)$.

综上,点 P 的坐标为 $(-2,4)$ 或 $(-2,-4)$.

第 5 课时　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质

1.C

2.C 【点拨】由题图可知 $m<0,n<0$,故一次函数 $y=mx+n$ 的图象经过第二、三、四象限.

3.D 【点拨】由 $y=(x-1)^2-2$,可知该抛物线的对称轴为直线 $x=1$,抛物线开口向上,当 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $x<1$ 时,y 随 x 的增大而减小.

$\because$ 点 $A(a,2),B(b,2),C(c,7)$ 都在抛物线 $y=(x-1)^2-2$ 上,点 A 在点 B 左侧,

$\therefore$ 若 $c<0$,则 $c<a<b$,故选项 A,B 均不符合题意;

若 $c>0$,则 $a<b<c$,故选项 C 不符合题意,选项 D 符合题意.

4.B 【点拨】把点 A,B 的坐标代入函数表达式,根据 $y_1<y_2$ 列出关于 m 的不等式,求解即可.

5.A

6.B 【点拨】将二次函数 $y=(x+1)^2+3$ 的图象向右平移 2 个单位长度,再向下平移 1 个单位长度,所得抛物线对应的函数表达式为 $y=(x+1-2)^2+3-1$,即 $y=(x-1)^2+2$.

故选 B.

7.D 【点拨】求出①②③④中图象的函数表达式分别为 $y=(x-2)^2$;$y=(x-1)^2-1$;$y=x^2-4$;$y=-x^2+4$.将点 $(2,0)$ 的坐标代入验证即可得解.

8.D 【点拨】分两种情况讨论:当 $a>0$ 时,$-a=-4$,解得 $a=4$;当 $a<0$ 时,$9a-a=-4$,解得 $a=-\frac{1}{2}$.

9.2 或 4 【点拨】抛物线 $y=(x+3)^2$ 向下平移 1 个单位长度后的解析式为 $y=(x+3)^2-1$,

设抛物线向右平移 h 个单位长度后,得到的新抛物线经过原点,则新抛物线的解析式为 $y=(x+3-h)^2-1$,

$\because$ 抛物线经过原点,

$\therefore (3-h)^2-1=0$,

解得 $h=2$ 或 4.

10.【解】(1)$\because$ 抛物线 C:$y=4-(6-x)^2=-(x-6)^2+4$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=6$,y 的最大值为 4.

当 $y=3$ 时,$3=-(x-6)^2+4$,

解得 $x_1=5,x_2=7$.

$\because$ 点 $P(a,3)$ 在对称轴的右侧,

$\therefore a>6$.$\therefore a=7$.

(2)$\because$ 平移后的抛物线的表达式为 $y=-x^2+6x-9=-(x-3)^2$,

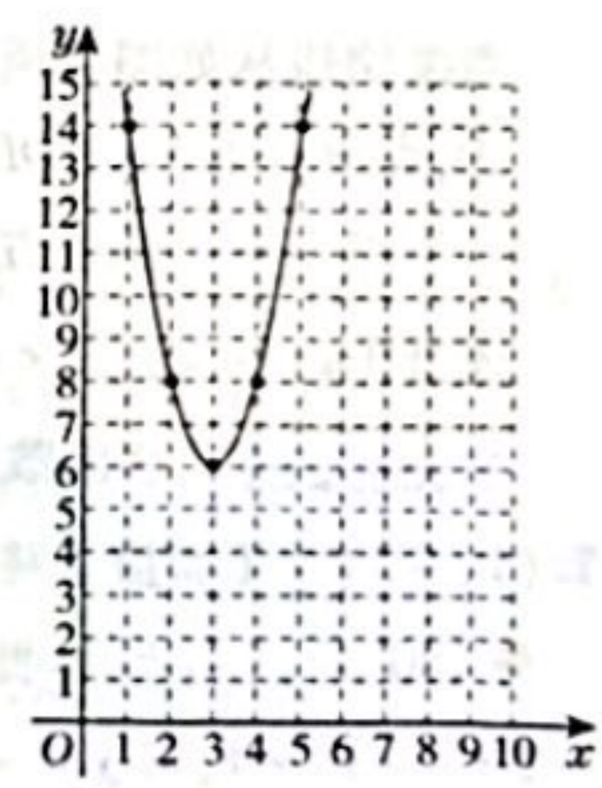
$\therefore$ 平移后抛物线的顶点坐标为 $(3,0)$.

$\because$ 平移前抛物线的顶点坐标为 $(6,4)$,

$\therefore$ 点 P' 移动的最短路程为 $\sqrt{(6-3)^2+(4-0)^2}=5$.

11.【解】(1)6

(2)平移后的函数图象如图.



联立得方程组

$$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x^2+5,\\ y=\frac{1}{2}x^2,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x_1=\sqrt{5},\\ y_1=\frac{5}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=-\sqrt{5},\\ y_1=\frac{5}{2},\end{cases}$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x^2+5$ 与 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象的交点坐标为 $\left(\sqrt{5},\frac{5}{2}\right),\left(-\sqrt{5},\frac{5}{2}\right)$.

(3)$\because$ 点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 在平移后的函数图象上,且 P,Q 两点均在对称轴同一侧,$\therefore$ 当 P,Q 两点同在对称轴左侧时,若 $y_1>y_2$,则 $x_1<x_2$,当 P,Q 两点同在对称轴右侧时,若 $y_1>y_2$,则 $x_1>x_2$.

12.【解】(1)当 $m=5$ 时,$y=-\frac{1}{2}(x-5)^2+4$.

当 $x=1$ 时,$y=-\frac{1}{2}\times(1-5)^2+4=-4$,

$\therefore n=-4$.

(2)当 $n=2$ 时,将点 $C(1,2)$ 的坐标代入函数表达式 $y=-\frac{1}{2}(x-m)^2+4$,得 $2=-\frac{1}{2}(1-m)^2+4$,

解得 $m=3$ 或 $m=-1$(舍去).

$\therefore$ 此时抛物线的对称轴为直线 $x=3$.

根据抛物线的对称性可知,当 $y=2$ 时,$x=1$ 或 $x=5$,

$\therefore$ 当 $y\geqslant2$ 时,自变量 x 的取值范围为 $1\leqslant x\leqslant5$.

(3)$\because$ 点 A 与点 C 不重合,$\therefore m\neq1$.

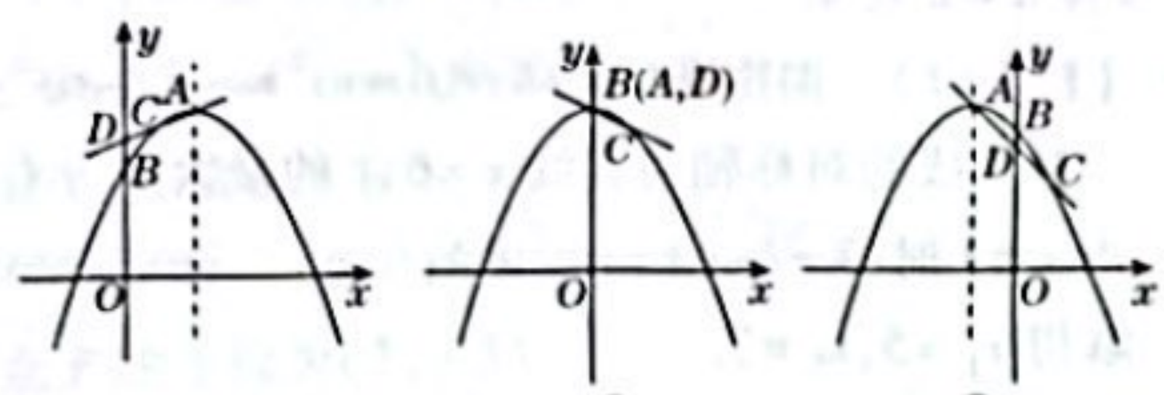
$\because$ 抛物线的顶点 A 的坐标是 $(m,4)$,

$\therefore$ 抛物线的顶点在直线 $y=4$ 上.

在 $y=-\frac{1}{2}(x-m)^2+4$ 中,当 $x=0$ 时,$y=-\frac{1}{2}m^2+4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $\left(0,-\frac{1}{2}m^2+4\right)$.

抛物线从如图①所示的位置向左平移到如图②所示的位置,m 逐渐减小,且 $m\geqslant 0$,点 B 沿 y 轴向上移动.



① ② ③

当点 B 与点 O 重合时,$-\frac{1}{2}m^2+4=0$,

解得 $m=2\sqrt{2}$ 或 $m=-2\sqrt{2}$(不合题意,舍去);

当点 B 与点 D 重合时,如图②,顶点 A 也与点 D 重合,点 B 到达最高点,

$\therefore$ 点 $B(0,4)$,$\therefore -\frac{1}{2}m^2+4=4$,解得 $m=0$.

当抛物线从如图②所示的位置继续向左平移时,如图③,点 B 不在线段 OD 上.

$\therefore$ 当点 B 在 x 轴上方,且在线段 OD 上时,m 的取值范围是 $0\leqslant m<1$ 或 $1<m<2\sqrt{2}$.

第6课时 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

1. $(1,-3)$ 【点拨】将抛物线 $y=x^2+2x-1$ 绕原点旋转 $180°$ 后所得到的抛物线表达式为 $-y=(-x)^2+2\cdot(-x)-1$,即 $y=-x^2+2x+1$.

再将抛物线 $y=-x^2+2x+1$ 向下平移 5 个单位长度,得抛物线 $y=-x^2+2x+1-5=-(x-1)^2-3$,

$\therefore$ 所得到的抛物线的顶点坐标是 $(1,-3)$.

2. D 【点拨】$\because$ 二次函数图象的开口方向向上,对称轴在 y 轴的右侧,

$\therefore a>0,x=-\frac{b}{2a}>0,\therefore b<0$,

$\therefore P(a,b)$ 在第四象限. 故选 D.

3. C 【点拨】$\because$ 直线 l 为二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象的对称轴,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}>0$,

当 $a<0$ 时,则 $b>0$,当 $a>0$ 时,则 $b<0$,

$\therefore a,b$ 异号,故选 C.

4. D 【点拨】$\because y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

$\because a=1>0$,

$\therefore$ 抛物线的开口向上,

$\therefore$ 当 $0\leqslant x<1$ 时,y 随 x 的增大而减小,

当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时,y 随 x 的增大而增大,

$\because$ 当 $x=0$ 时,$y=-1$,当 $x=3$ 时,$y=9-6-1=2$.

$\therefore$ 当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时,函数的最大值为 2,

故选 D.

5. D 【点拨】由题意可得 $6=m^2-m$,解得 $m_1=3,m_2=-2$. $\because$ 二次函数图象的对称轴在 y 轴左侧,$\therefore -\frac{m}{2}<0$,

$\therefore m>0,\therefore m=3$,

$\therefore y=x^2+3x+6$,$\therefore$ 二次函数有最小值,最小值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times 1\times 6-3^2}{4\times 1}=\frac{15}{4}$. 故选 D.

6. B 【点拨】$\because a>0$,$\therefore$ 抛物线开口向上. $\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-2}{2a}=\frac{1}{a}>0$,$\therefore$ 当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小,当 $x>\frac{1}{a}$ 时,y 随 x 的增大而增大. 易知函数图象一定不经过第三象限,函数图象可能经过第一、二、四象限.

故选 B.

7. D 【点拨】由函数图象可得,$a<0,-\frac{b}{2a}>0,\therefore b>0$,

$\therefore y=x+b$ 的图象经过第一、二、三象限,不经过第四象限,故选 D.

8. D 【点拨】$\because$ 二次函数图象开口向下,$\therefore a<0$,

$\because$ 二次函数图象的对称轴为直线 $x=1$,$\therefore -\frac{b}{2a}=1$,

$\therefore b=-2a,\therefore b>0,\therefore ab<0$,故①正确;

$\because$ 二次函数图象过点 $(-1,0)$,对称轴为直线 $x=1$,

$\therefore$ 二次函数图象与 x 轴的另一交点为 $(3,0)$,

结合函数图象可得 $x=2$ 时 $y>0$,

$\therefore 4a+2b+c>0$,故②正确;

$\because x=-1$ 时 $y=0$,

$\therefore a-b+c=0$,

将 $b=-2a$ 代入得 $3a+c=0$,故③错误;

$\because$ 抛物线的对称轴是直线 $x=1,x_1<x_2$,

$\therefore$ 当 $x_1+x_2>2$ 时,点 $A(x_1,y_1)$ 到对称轴的距离小于点 $B(x_2,y_2)$ 到对称轴的距离,

$\because$ 二次函数图象开口向下,

$\therefore y_1>y_2$,故④正确.

综上所述,正确的结论是①②④.

故选 D.

9. $y=-2(x+1)^2+7$ 【点拨】将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 时,易在配方时漏掉二次项系数而出错.

10. 【解】(1)在 $y=\frac{3}{4}x+6$ 中,令 $x=0$ 得 $y=6$,

$\therefore B(0,6)$,

令 $y=0$ 得 $\frac{3}{4}x+6=0$,解得 $x=-8$,

$\therefore A(-8,0)$.

(2) 设 $C\left(m,\frac{3}{4}m+6\right)$，设抛物线的表达式为 $y=a(x-m)^2+\frac{3}{4}m+6$，

$\because$ 抛物线 M 经过点 B，

$\therefore$ 将 $B(0,6)$ 的坐标代入得 $am^2+\frac{3}{4}m+6=6$，

解得 $m_1=0,m_2=-\frac{3}{4a}$. 易得 $m\neq0$，

$\therefore m=-\frac{3}{4a}$，

将 $m=-\frac{3}{4a}$ 代入 $y=a(x-m)^2+\frac{3}{4}m+6$，

整理得 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+6$，

$\therefore b=\frac{3}{2},c=6$.

(3) $\because CD/\!/x$ 轴，点 P 在 x 轴上，$C\left(m,\frac{3}{4}m+6\right)$，

$\therefore$ 设 $P(p,0)$，点 D 的纵坐标为 $\frac{3}{4}m+6$，

$\because$ 点 C,B 分别平移至点 P,D，

$\therefore$ 点 B，点 C 向下平移的距离相等，

$\therefore \frac{3}{4}m+6=6-\left(\frac{3}{4}m+6\right)$，解得 $m=-4$，

由(2)知 $m=-\frac{3}{4a}$，$\therefore a=\frac{3}{16}$，

$\therefore$ 抛物线 N 的函数表达式为 $y=\frac{3}{16}(x-p)^2$，

将 $B(0,6)$ 的坐标代入解得 $p=\pm4\sqrt{2}$，

$\therefore$ 抛物线 N 的函数表达式为 $y=\frac{3}{16}(x-4\sqrt{2})^2$ 或 $y=\frac{3}{16}(x+4\sqrt{2})^2$.

11. (1)【解】当 $m=-1$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+3$ 的图象过点 $(1,0)$ 和 $(-3,0)$，

$\therefore \begin{cases}a+b+3=0,\\9a-3b+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\end{cases}$

$\therefore a$ 的值是 -1，b 的值是 -2.

(2)【解】$\because$ 二次函数 $y=ax^2+bx+3$ 的图象过点 $(-m,0)$ 和 $(3m,0)$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=m$，

$\because$ 当 $x=0$ 时，$y=3$，

$\therefore$ 二次函数 $y=ax^2+bx+3$ 的图象过点 $(0,3)$，

又 $\because A(n,3)$ 在抛物线上，且点 A 不在坐标轴上，

$\therefore m=\frac{n}{2}$，

$\because -2<m<-1$，$\therefore -2<\frac{n}{2}<-1$，

$\therefore -4<n<-2$.

(3)【证明】由(2)知抛物线的对称轴为直线 $x=m$，

$\therefore -\frac{b}{2a}=m$，$\therefore b=-2am$，

把点 $(-m,0)$，$(3m,0)$ 的坐标代入 $y=ax^2+bx+3$ 得

$\begin{cases}am^2-bm+3=0①,\\9am^2+3bm+3=0②,\end{cases}$

①×3+②得 $12am^2+12=0$，

$\therefore am^2+1=0$，

$\therefore b^2+4a=(-2am)^2+4a=4a(am^2+1)=4a\times0=0$.

12.【解】(1) $\because$ 对于 $x_1=1,x_2=2$，有 $y_1=y_2$，

$\therefore a+b+c=4a+2b+c$，$\therefore 3a+b=0$，

$\therefore \frac{b}{a}=-3$.

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}$，$\therefore t=\frac{3}{2}$.

(2) $\because 0<x_1<1,1<x_2<2$，

$\therefore \frac{1}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{3}{2}$，$x_1<x_2$.

$\because y_1<y_2,a>0$，

$\therefore$ 点 $M(x_1,y_1)$ 离对称轴更近.

$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}>t$，$\therefore t\leqslant\frac{1}{2}$.

13.【解】(1) 把点 $(0,-3)$，$(-6,-3)$ 的坐标分别代入 $y=-x^2+bx+c$，解得 $b=-6,c=-3$.

(2) $y=-x^2-6x-3=-(x+3)^2+6$.

$\because -4\leqslant x\leqslant0$，

$\therefore$ 当 $x=-3$ 时，y 取得最大值，最大值为 6.

(3) ①若 $-3<m\leqslant0$，

当 $x=0$ 时，y 取得最小值，最小值为 -3；

当 $x=m$ 时，y 取得最大值，最大值为 $-m^2-6m-3$，

$\therefore -m^2-6m-3+(-3)=2$，

解得 $m=-2$ 或 $m=-4$（舍去）.

②若 $m\leqslant-3$，

当 $x=-3$ 时，y 取得最大值，最大值为 6.

$\because y$ 的最大值与最小值之和为 2，

$\therefore y$ 的最小值为 -4.

$\therefore -(m+3)^2+6=-4$，

解得 $m=-3-\sqrt{10}$ 或 $m=-3+\sqrt{10}$（舍去）.

综上所述，$m=-2$ 或 $m=-3-\sqrt{10}$.

3 确定二次函数的表达式

1.【解】(1) ①由题意得 $\begin{cases}a-b+1=4,\\4a+2b+1=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2,\end{cases}$

$\therefore$ 二次函数的表达式是 $y=x^2-2x+1$；

② $\because y=x^2-2x+1=(x-1)^2$，

$\therefore$ 抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=1$，

$\therefore$ 当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而减小.

(2) ∵ $x=0$ 和 $x=2$ 时的函数值都是 1，

∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}=1$，

∴ $(1,n)$ 是抛物线的顶点，$(-1,m)$ 和 $(3,p)$ 关于对称轴对称，

若在 m,n,p 这三个实数中，只有一个是正数，则抛物线必须开口向下，且 $m\leqslant 0$，

∵ $-\dfrac{b}{2a}=1$，∴ $b=-2a$，

∴ 二次函数为 $y=ax^2-2ax+1$，

∴ $m=a+2a+1\leqslant 0$，∴ $a\leqslant -\dfrac{1}{3}$.

2. A 【点拨】设抛物线的表达式为 $y=a(x-1)^2-4$ $(a\neq 0)$，将点 $(0,-3)$ 的坐标代入，得 $-3=a(0-1)^2-4$，解得 $a=1$，∴ 抛物线的表达式为 $y=(x-1)^2-4=x^2-2x-3$.

3. C 【点拨】由题意，得顶点坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},3\right)$. 设这个喷泉对应的函数表达式为 $y=a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+3\ (a\neq 0)$.

∵ 抛物线经过点 $(0,0)$，∴ $0=a\left(0-\dfrac{1}{2}\right)^2+3$，∴ $a=-12$，∴ 这个喷泉对应的函数表达式为 $y=-12\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+3$.

故选 C.

4. A 【点拨】令 $y=0$，则 $a(x-m)(x-m-k)=0$，

∴ $x_1=m$，$x_2=m+k$，

∴ 二次函数 $y=a(x-m)(x-m-k)$ 的图象与 x 轴的交点坐标是 $(m,0)$，$(m+k,0)$，

∴ 二次函数图象的对称轴是直线 $x=\dfrac{m+m+k}{2}=\dfrac{2m+k}{2}$，

∵ $a>0$，∴ y 有最小值，即当 $x=\dfrac{2m+k}{2}$ 时，y 最小，

当 $k=2$ 时，$\dfrac{2m+k}{2}=m+1$，此时函数 y 的最小值为 $a(m+1-m)(m+1-m-2)=-a$；

当 $k=4$ 时，$\dfrac{2m+k}{2}=m+2$，此时函数 y 的最小值为 $a(m+2-m)(m+2-m-4)=-4a$.

故选 A.

5. 【解】(1) 由题意可得 $m_1=\dfrac{5+1}{2}=3$，$m_2=\dfrac{2+10}{2}=6$，

∴ $EF=6-3=3$.

(2) $>$ 【点拨】由题意，设抛物线 L_1：$y_1=a_1(x-1)\cdot(x-5)$，抛物线 L_2：$y_2=a_2(x-2)(x-10)$，

由 (1) 得 $E(3,k)$，$F(6,k)$，

∴ $a_1(3-1)(3-5)=a_2(6-2)(6-10)$，

∴ $a_1=4a_2$，

∴ $y_1=4a_2(x-1)(x-5)$

把 $M(-7,d_1)$ 的坐标代入抛物线 L_1 的表达式得 $d_1=4a_2(-7-1)(-7-5)=384a_2$，

把 $N(16,d_2)$ 的坐标代入抛物线 L_2 的表达式得 $d_2=a_2(16-2)(16-10)=84a_2$，

∵ 抛物线 L_2 的开口向上，∴ $a_2>0$，

∴ $d_1>d_2$.

(3) ∵ $f_1<f_2$，点 $P(n+3,f_1)$，$Q(2n-1,f_2)$ 在抛物线 L_1 上，

∴ 点 P 比点 Q 离对称轴近，

∴ $|n+3-3|<|2n-1-3|$，即 $|n|<|2n-4|$，

∴ $n^2-(2n-4)^2<0$，

∴ $(3n-4)(n-4)>0$，解得 $n<\dfrac{4}{3}$ 或 $n>4$.

6. 【解】(1) 设抛物线的函数表达式为 $y=ax^2\ (a\neq 0)$.

将点 $(3,-27)$ 的坐标代入，解得 $a=-3$，

∴ 抛物线的函数表达式为 $y=-3x^2$.

(2) 设抛物线的函数表达式为 $y=ax^2+k\ (a\neq 0)$.

把点 $(2,2)$ 和 $(1,1)$ 的坐标代入，得 $\begin{cases}4a+k=2,\\ a+k=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{3},\\ k=\dfrac{2}{3},\end{cases}$ ∴ 抛物线的函数表达式为 $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}$.

(3) 设抛物线的函数表达式为 $y=a(x-2)^2\ (a\neq 0)$.

将点 $(-3,5)$ 的坐标代入，得 $5=25a$，解得 $a=\dfrac{1}{5}$.

∴ 抛物线的函数表达式为 $y=\dfrac{1}{5}(x-2)^2$.

7. 【解】(1) ① ∵ $b=4$，$c=3$，

∴ $y=-x^2+4x+3=-(x-2)^2+7$，

∴ 该函数图象的顶点坐标为 $(2,7)$.

② ∵ $-1\leqslant x\leqslant 3$，

∴ 当 $x=2$ 时，y 有最大值 7，

∵ $2-(-1)>3-2$，

∴ 当 $x=-1$ 时，y 有最小值 -2，

∴ 当 $-1\leqslant x\leqslant 3$ 时，$-2\leqslant y\leqslant 7$.

(2) ∵ $x\leqslant 0$ 时，y 的最大值为 2；

$x>0$ 时，y 的最大值为 3，

∴ 抛物线的对称轴 $x=\dfrac{b}{2}$ 在 y 轴的右侧，

∴ $b>0$，

∵ $a=-1<0$，$x\leqslant 0$ 时，y 的最大值为 2，

∴ $c=2$，

易得 $\dfrac{4\times(-1)\times c-b^2}{4\times(-1)}=3$，

解得 $b=\pm 2$，

∵ $b>0$，∴ $b=2$.

8.【解】(1)把 $A(1,-2)$ 和 $B(0,-5)$ 的坐标代入 $y=x^2+bx+c$ 得 $\begin{cases}1+b+c=-2,\\c=-5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\c=-5,\end{cases}$

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=x^2+2x-5$,

$\because y=x^2+2x-5=(x+1)^2-6$,

$\therefore$ 顶点坐标为 $(-1,-6)$.

(2)当 $y\leqslant -2$ 时,x 的取值范围是 $-3\leqslant x\leqslant 1$.

9.【解】(1)$\because A(m-1,m^2)$,$B(m+3,m^2)$ 的纵坐标相等,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=\dfrac{m-1+m+3}{2}=m+1$,

则 $m+1=-\dfrac{-2}{2\times 1}$,

$\therefore m=0$,$\therefore A(-1,0)$,$B(3,0)$. 将 $A(-1,0)$ 的坐标代入 $y=x^2-2x+c$,

得 $0=(-1)^2-2\times(-1)+c$,$\therefore c=-3$,

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=x^2-2x-3$.

(2)$\because y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时,$y_{\text{最小值}}=-4$,

$\therefore n\leqslant 1\leqslant n+3$,解得 $-2\leqslant n\leqslant 1$.

(3)令 $y=x^2-2x-3=-3$,解得 $x=0$ 或 $x=2$,

$\therefore$ 存在 n 值,使得当 $n\leqslant x\leqslant n+3$ 时,y 有最小值 -3,此时 $n+3=0$ 或 $n=2$,即 $n=-3$ 或 $n=2$;

$\because 2-0<n+3-n$,

$\therefore$ 不存在 n,使得当 $n\leqslant x\leqslant n+3$ 时,y 有最大值为 -3.

综上,结论①正确,n 的值为 -3 或 2.

集训课堂

练素养 1

1.【解】(1)由抛物线与 x 轴交于 $A(-3,0)$,$B(1,0)$ 两点,得 $\begin{cases}(-3)^2\cdot a-3b+3=0,\\a+b+3=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-x^2-2x+3$.

(2)存在,点 P 的坐标为 $(-2,3)$ 或 $(3,-12)$.

2.【解】(1)$\because$ 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$,$B(3,0)$ 两点,

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-(x+1)(x-3)$,

即 $y=-x^2+2x+3$.

(2)$\sqrt{5}$ 【点拨】$\because y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$,

$\therefore D(1,4)$.

又 $\because P$ 为 BD 的中点,$B(3,0)$,$\therefore P(2,2)$.

把 $x=0$ 代入 $y=-x^2+2x+3$,得 $y=3$,$\therefore C(0,3)$.

$\therefore CP=\sqrt{(2-0)^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$.

3.【解】(1)$\because$ 抛物线 $y=ax^2-2ax-3+2a^2=a(x-1)^2+2a^2-a-3$

$\therefore$ 这条抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

(2)$\because$ 抛物线的顶点在 x 轴上,

$\therefore 2a^2-a-3=0$,解得 $a=\dfrac{3}{2}$ 或 $a=-1$.

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=\dfrac{3}{2}x^2-3x+\dfrac{3}{2}$ 或 $y=-x^2+2x-1$.

(3)$\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$,

$\therefore Q(3,y_2)$ 关于直线 $x=1$ 的对称点的坐标为 $(-1,y_2)$.

$\therefore$ 当 $a>0$ 时,若 $y_1<y_2$,则 $-1<m<3$;

当 $a<0$,若 $y_1<y_2$,则 $m<-1$ 或 $m>3$.

4.【解】(1)把点 $A(-2,0)$,$C(0,3)$ 的坐标代入 $y=ax^2+x+c$ 中,得 $\begin{cases}4a-2+c=0,\\c=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{4},\\c=3.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线 L 的表达式为 $y=-\dfrac{1}{4}x^2+x+3$.

(2)$\because$ 抛物线 L 的表达式为 $y=-\dfrac{1}{4}x^2+x+3=-\dfrac{1}{4}(x-2)^2+4$,

$\therefore D(2,4)$,抛物线 L 的对称轴为直线 $x=2$.

$\because A(-2,0)$,$\therefore B(6,0)$,$\therefore AB=8$.

设抛物线 L 向右平移 $m(m>0)$ 个单位长度得到抛物线 L',

$\therefore A'(-2+m,0)$,$B'(6+m,0)$,$D'(2+m,4)$,抛物线 L' 的表达式为 $y=-\dfrac{1}{4}(x-2-m)^2+4$,

$\therefore A'B'=8$.

在 $y=-\dfrac{1}{4}(x-2-m)^2+4$ 中,令 $x=0$,则 $y=-\dfrac{1}{4}(0-2-m)^2+4=-\dfrac{1}{4}(m+2)^2+4=-\dfrac{1}{4}m^2-m+3$,

$\therefore C'\left(0,-\dfrac{1}{4}m^2-m+3\right)$.

$\because S_{\triangle A'B'C'}=\dfrac{7}{16}S_{\triangle ABD'}$,

$\therefore \dfrac{1}{2}A'B'\cdot|y_{C'}|=\dfrac{7}{16}\times\dfrac{1}{2}AB\cdot|y_{D'}|$,

$\therefore \dfrac{1}{2}\times 8\left|-\dfrac{1}{4}m^2-m+3\right|=\dfrac{7}{16}\times\dfrac{1}{2}\times 8\times 4$,

$\therefore \left|-\dfrac{1}{4}m^2-m+3\right|=\dfrac{7}{4}$,

$\therefore -\dfrac{1}{4}m^2-m+3=\dfrac{7}{4}$ 或 $-\dfrac{1}{4}m^2-m+3=-\dfrac{7}{4}$,

$\therefore m^2+4m-5=0$ 或 $m^2+4m-19=0$,

解得 $m=1$ 或 $m=-5$(舍去)或 $m=-2+\sqrt{23}$ 或 $m=-2-\sqrt{23}$(舍去).

$\therefore$ 抛物线 L' 的表达式为 $y=-\dfrac{1}{4}(x-2-1)^2+4=-\dfrac{1}{4}(x-3)^2+4$ 或 $y=-\dfrac{1}{4}(x-2+2-\sqrt{23})^2+4=$

$-\frac{1}{4}(x-\sqrt{23})^2+4$.

练素养2

1. A 【点拨】根据二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象可得 $a>0,c>0,-\frac{b}{2a}>0$，从而得到 $b<0,-c<0$，进而得到一次函数 $y=ax$ 经过第一、三象限，一次函数 $y=bx-c$ 经过第二、三、四象限，即可求解.

2.【解】(1)∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $A(2,0)$，

∴ $0=4a+2b+c$. ①

∵对称轴是直线 $x=1$，∴ $-\frac{b}{2a}=1$. ②

∵关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=x$ 有两个相等的实数根，

∴ $(b-1)^2-4ac=0$. ③

由①②③可得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\ b=1,\\ c=0,\end{cases}$

∴抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+x$.

(2)∵ $n<-5$，∴ $3n-4<-19$，$5n+6<-19$.

∴点 B，点 C 在直线 $x=1$ 的左侧.

∵ $-\frac{1}{2}<0$，∴当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而增大.

∵ $(3n-4)-(5n+6)=-2n-10=-2(n+5)>0$，

∴ $3n-4>5n+6$. ∴ $y_1>y_2$.

(3)当点 B 在直线 $x=1$ 的左侧，点 C 在直线 $x=1$ 的右侧时，由题意可得 $\begin{cases}3n-4<1,\\ 5n+6>1,\\ 1-(3n-4)<5n+6-1,\end{cases}$

∴ $0<n<\frac{5}{3}$.

当点 C 在直线 $x=1$ 的左侧，点 B 在直线 $x=1$ 的右侧时，

由题意可得 $\begin{cases}3n-4>1,\\ 5n+6<1,\\ 3n-4-1<1-(5n+6),\end{cases}$

不等式组无解.

综上所述，$0<n<\frac{5}{3}$.

3. B 【点拨】∵抛物线的函数表达式为 $y=(x-2)^2-9$，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=2$，开口向上，顶点坐标为 $(2,-9)$.

∴当 $x=2$ 时，y 取得最小值 -9，①正确.

∵当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而增大，且 $2<3<4$，

∴ $y_2>y_1$，②正确.

将函数图象向左平移3个单位长度，再向上平移4个单位长度，所得抛物线的函数表达式为 $y=(x+1)^2-5$，③错误.

令 $(x-2)^2-9=0$，解得 $x_1=-1,x_2=5$，

$5-(-1)=6$，④正确.

4.【解】(1)∵ $OA=OB=3$，

∴ $A(3,0)$，$B(0,3)$.

∵抛物线 $y_1=-x^2+bx+c$ 经过 A,B 两点，

∴ $\begin{cases}-3^2+3b+c=0,\\ c=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\ c=3.\end{cases}$

∴抛物线的表达式为 $y_1=-x^2+2x+3$.

(2)∵ $y_1=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$.

∴抛物线 y_1 的对称轴为直线 $x=1$，有最大值为4.

∵ $P(m,n)$ 在抛物线 y_1 上，

∴当 $m<2$ 时，n 的取值范围为 $n\leqslant4$.

(3)根据题意，得抛物线 y_1 向右平移 $|k|$ 个单位长度得到抛物线 $y_2=-(x-1-|k|)^2+4$，向左平移 $|k|$ 个单位长度得到抛物线 $y_2=-(x-1+|k|)^2+4$，

∵ $A(3,0)$，$B(0,3)$，

∴ AB 的中点的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，

∴ $\frac{3}{2}=-\left(\frac{3}{2}-1-|k|\right)^2+4$，或 $\frac{3}{2}=-\left(\frac{3}{2}-1+|k|\right)^2+4$，

解得 $|k|=\frac{1+\sqrt{10}}{2}$ 或 $|k|=\frac{-1+\sqrt{10}}{2}$.

∴ k 的值为 $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$ 或 $\frac{-1-\sqrt{10}}{2}$ 或 $\frac{1-\sqrt{10}}{2}$ 或 $\frac{-1+\sqrt{10}}{2}$.

5.【解】(1)∵抛物线 $y=2x^2+mx$ 与 x 轴交于点 $A(2,0)$，∴ $2\times2^2+2m=0$.

∴ $m=-4$. ∴ $y=2x^2-4x=2(x-1)^2-2$.

∴抛物线顶点 M 的坐标为 $(1,-2)$.

(2)设直线 AM 的表达式为 $y=kx+b\ (k\neq0)$.

∵直线 AM 经过点 $A(2,0)$，$M(1,-2)$，

∴ $\begin{cases}2k+b=0,\\ k+b=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=-4.\end{cases}$

∴直线 AM 的表达式为 $y=2x-4$.

6.【解】(1)∵抛物线过点 $O(0,0)$，且它的对称轴为直线 $x=2$，

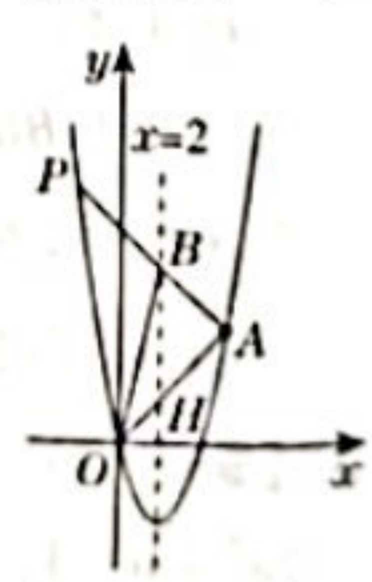
∴抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为 $(4,0)$.

∴设抛物线的表达式为 $y=ax(x-4)$，

把点 $A(5,5)$ 的坐标代入，得 $5a=5$，解得 $a=1$.

∴ $y=x(x-4)=x^2-4x$.

(2)如图，∵点 B 是抛物线对称轴上的一点，且点 B 在第一象限，



∴设 $B(2,m)(m>0)$.

设直线 OA 的表达式为 $y=kx$，将点 $A(5,5)$ 的坐标代入，得 $5k=5$，解得 $k=1$.

∴直线 OA 的表达式为 $y=x$.

设直线 OA 与抛物线的对称轴交于点 H，则 $H(2,2)$.

$\therefore BH=|m-2|$.

$\because S_{\triangle OAB}=15$，$\therefore \frac{1}{2}\times|m-2|\times5=15$，

解得 $m=8$ 或 $m=-4$（舍去）.

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(2,8)$.

(3) 设直线 AB 的表达式为 $y=cx+d$，把点 $A(5,5)$，$B(2,8)$ 的坐标分别代入，得 $\begin{cases}5c+d=5,\\2c+d=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}c=-1,\\d=10.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y=-x+10$.

当 $PA-PB$ 的值最大时，点 A,B,P 在同一条直线上，如图.

由 $\begin{cases}y=-x+10,\\y=x^2-4x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=-2,\\y_1=12,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=5,\\y_2=5\end{cases}$（舍去）.

$\therefore P(-2,12)$.

此时，$PA-PB=AB=\sqrt{(5-2)^2+(5-8)^2}=3\sqrt{2}$.

7.【解】(1) 由题意得 $y=-(x+1)(x-3)$，

$\therefore y=-x^2+2x+3$.

(2) 由 (1) 可得该抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

令 $x=0$，则 $y=3$，$\therefore C(0,3)$.

设 $P(1,m)$.

$\because PB=PC$，$\therefore PB^2=PC^2$.

$\therefore (3-1)^2+m^2=1^2+(m-3)^2$，解得 $m=1$.

$\therefore P(1,1)$.

(3) 存在.

假设存在点 M 满足条件，作 $PQ\parallel BC$，PQ 交 y 轴于点 Q，作 $MN\parallel BC$ 交 y 轴于点 N.

设直线 BC 的表达式为 $y=kx+n$，将点 $B(3,0)$，点 $C(0,3)$ 的坐标分别代入，得直线 BC 的表达式为 $y=-x+3$.

又 $\because P(1,1)$，

$\therefore$ 直线 PQ 的表达式为 $y=-x+2$.

$\therefore Q(0,2)$.

$\because C(0,3)$，$S_{\triangle BCM}=S_{\triangle BCP}$，$\therefore N(0,4)$.

$\therefore$ 直线 MN 的表达式为 $y=-x+4$.

解 $-x^2+2x+3=-x+4$，得 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore$ 点 M 的横坐标为 $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

8.【解】(1) 将点 A,C 的坐标分别代入 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$，

得 $\begin{cases}\frac{1}{2}\times16-4b+c=0,\\\frac{1}{2}\times4+2b+c=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\c=0.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2+2x$.

(2) 由题易知点 A' 的坐标为 $(4,0)$，点 M 的坐标为 $(-2,-2)$.

设直线 $A'M$ 的表达式为 $y=kx+b'$，

则 $\begin{cases}4k+b'=0,\\-2k+b'=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{3},\\b'=-\frac{4}{3}.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 $A'M$ 的表达式为 $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$.

令 $x=0$，则 $y=-\frac{4}{3}$，$\therefore$ 点 $Q\left(0,-\frac{4}{3}\right)$.

(3) 存在.

点 N 的坐标为 $(6,6)$ 或 $(-6,-6)$ 或 $(-2,6)$.

9. C 【点拨】由题意得 $\begin{cases}ak+3=b,①\\4k+3=c.②\end{cases}$

由①可得 $ab=a(ak+3)=ka^2+3a=k\left(a+\frac{3}{2k}\right)^2-\frac{9}{4k}$.

$\because ab$ 的最大值为 9，

$\therefore k<0$，$-\frac{9}{4k}=9$，解得 $k=-\frac{1}{4}$.

把 $k=-\frac{1}{4}$ 代入②，易求得 $c=2$.

10.【解】(1) 由题意可设抛物线的表达式为 $y=a(x+1)(x-2)$.

将点 $C(0,4)$ 的坐标代入，得 $4=-2a$，

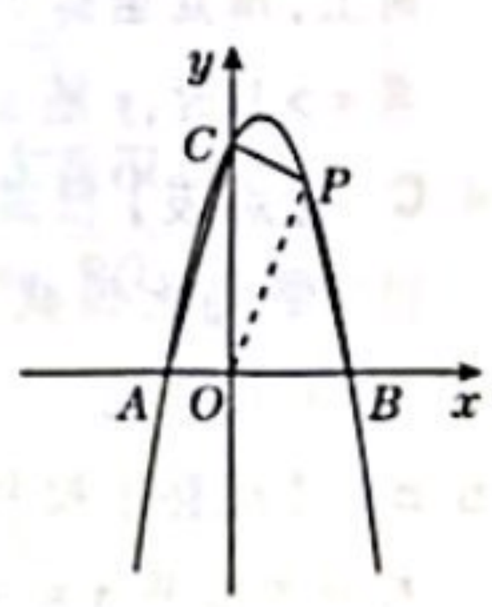
解得 $a=-2$，

$\therefore$ 该抛物线所对应的函数表达式为 $y=-2(x+1)\cdot(x-2)$，即 $y=-2x^2+2x+4$.

(2) 如图，连接 OP，设点 P 的坐标为 $(m,-2m^2+2m+4)(0<m<2)$.

$\because A(-1,0)$，$B(2,0)$，$C(0,4)$，

$\therefore OA=1$，$OC=4$，$OB=2$.



$\therefore S=S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OCP}+S_{\triangle OPB}=\frac{1}{2}\times1\times4+\frac{1}{2}\times4m+\frac{1}{2}\times2\times(-2m^2+2m+4)=-2m^2+4m+6=-2(m-1)^2+8$.

$\therefore$ 当 $m=1$ 时，S 最大，最大值为 8.

点方法 求解图形面积的最值问题时，若是规则几何图形，则可依据几何图形的面积公式建立函数关系；若是不规则图形，则要用割补图形的方法，将不规则的几何图形转化成规则的几何图形，然后通过计算规则几何图形的面积和（或面积差）建立函数关系.

11.【解】(1) $\because$ 抛物线 $y=x^2-2mx+m^2+2m-1$ 过点 $B(3,5)$，

$\therefore$ 把点 $B(3,5)$ 的坐标代入 $y=x^2-2mx+m^2+2m-1$，整理得 $m^2-4m+3=0$，解得 $m_1=1$，$m_2=3$.

当 $m=1$ 时，$y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$，顶点 A 的坐标为 $(1,1)$；

当 $m=3$ 时，$y=x^2-6x+14=(x-3)^2+5$，顶点 A 的坐标为 $(3,5)$.

综上，顶点 A 的坐标为 $(1,1)$ 或 $(3,5)$.

(2) $\because y=x^2-2mx+m^2+2m-1=(x-m)^2+2m-1$，

$\therefore$ 顶点 A 的坐标为 $(m,2m-1)$.

$\because$ 点 A 的坐标记为 (x,y)，

$\therefore x=m,y=2m-1$.

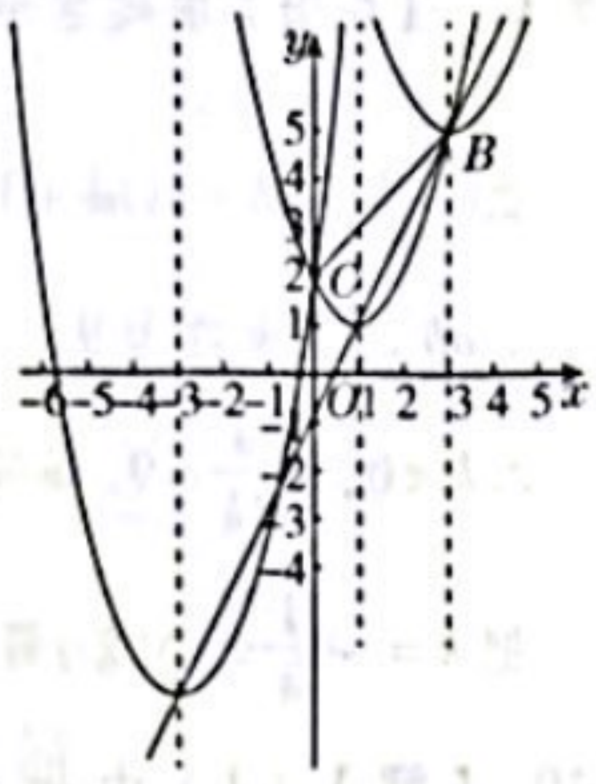
$\therefore y=2x-1$，

即 y 与 x 的函数表达式为 $y=2x-1$.

(3) 由 (2) 可知，抛物线的顶点在直线 $y=2x-1$ 上运动，且形状不变.

由 (1) 知，当 $m=1$ 或 3 时，抛物线过点 $B(3,5)$.

把 $C(0,2)$ 的坐标代入 $y=x^2-2mx+m^2+2m-1$，得 $m^2+2m-1=2$，解得 $m=1$ 或 $m=-3$.



$\therefore$ 当 $m=1$ 或 $m=-3$ 时，抛物线经过点 $C(0,2)$.

如图，当 $m=-3$ 或 $m=3$ 时，抛物线与线段 BC 只有一个交点（即线段 CB 的端点）；

当 $m=1$ 时，抛物线同时过点 B,C，不合题意.

$\therefore m$ 的取值范围是 $-3\leqslant m\leqslant 3$ 且 $m\neq 1$.

测素质

一、1. C　2. B

3. D 【点拨】二次函数 $y=(x-1)^2+5$ 的图象的开口向上，顶点坐标为 $(1,5)$，函数有最小值，最小值为 5，当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大，故 D 正确.

4. C 【点拨】根据图象可知 $a>0,c<0$，当 $x<-2$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>-2$ 时，y 随 x 的增大而增大，故 C 正确.

5. B 【点拨】抛物线 $y=-3x^2-12x+m$ 开口向下，对称轴为直线 $x=-2$，$\therefore$ 当 $x=-2$ 时 y 取最大值 y_2. 又 $\because$ 点 $(-3,y_1)$，点 $(1,y_3)$ 在抛物线上，$\therefore$ 根据二次函数的性质可得 $y_3<y_1<y_2$.

点方法 比较抛物线上两点对应的函数值大小的方法：

①如果两点在对称轴的同侧，可以用二次函数的增减性比较大小；

②如果两点在对称轴的两侧，可以利用二次函数图象的对称性将对称轴两侧的函数值大小比较问题转化为同侧的函数值大小比较问题.

6. A 【点拨】由抛物线 $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ 知，抛物线的顶点坐标是 $(2,1)$，$C(0,5)$，

$\therefore$ 该抛物线关于点 C 成中心对称的抛物线的顶点坐标是 $(-2,9)$.

$\therefore$ 所求抛物线的表达式为 $y=-(x+2)^2+9=-x^2-4x+5$.

7. D 【点拨】A. 由抛物线可知，$b<0,x=-\dfrac{a}{2b}>0$，得 $a>0$，由直线可知，$a<0,b>0$，故本选项不符合题意；

B. 由抛物线可知，$b<0,x=-\dfrac{a}{2b}>0$，得 $a>0$，由直线可知，$a<0,b<0$，故本选项不符合题意；

C. 由抛物线可知，$b>0,x=-\dfrac{a}{2b}>0$，得 $a<0$，由直线可知，$a>0,b<0$，故本选项不符合题意；

D. 由抛物线可知，$b>0,x=-\dfrac{a}{2b}<0$，得 $a>0$，由直线可知，$a>0,b>0$，故本选项符合题意，故选 D.

点方法 逐一分析四个选项，根据二次函数图象的开口方向以及对称轴与 y 轴的关系即可得出 a,b 的正负，根据一次函数图象经过的象限也可得出 a,b 的正负，再进行对比即可得出结论.

8. B 【点拨】$\because$ 抛物线 $y=ax^2+4ax+3$ 的对称轴为直线 $x=-\dfrac{4a}{2a}=-2$，$\therefore$ ①正确.

当 $x=0$ 时，$y=3$，则点 $(0,3)$ 在抛物线上，$\therefore$ ②正确.

当 $a>0$ 时，若 $x_1>x_2>-2$，则 $y_1>y_2$；

当 $a<0$ 时，若 $x_1>x_2>-2$，则 $y_1<y_2$.

$\therefore$ ③错误.

若 $y_1=y_2$，则 $x_1+x_2=-4$，$\therefore$ ④错误.

故正确结论有 2 个，故选 B.

二、9. $\dfrac{25}{4}$ 【点拨】$y=-x^2-3x+4=-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$，

$\because a=-1<0$，

$\therefore$ 当 $x=-\dfrac{3}{2}$ 时，y 取最大值，最大值为 $\dfrac{25}{4}$.

10. ④②①③ 【点拨】$\because$ 二次函数的二次项系数的绝对值越小，其图象的开口越大，且 $\left|\dfrac{1}{3}\right|<|-1|<|2|<|-3|$，$\therefore$ 开口从大到小的排列顺序为④②①③.

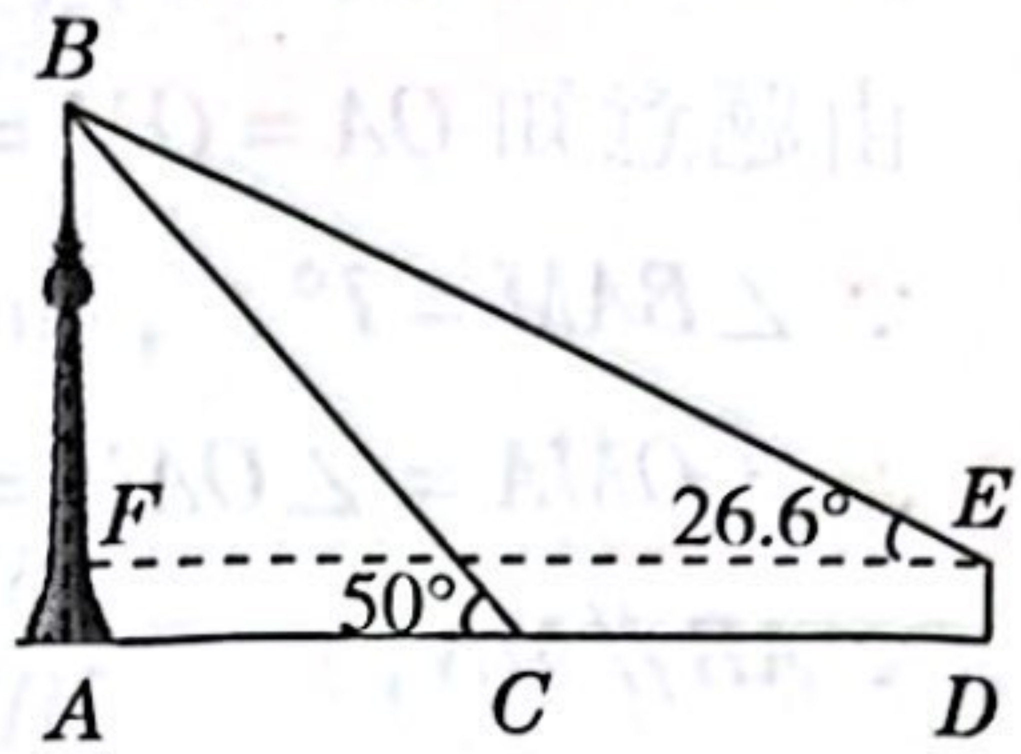
11. 6 【点拨】根据表中的数据可知二次函数图象的对称轴为直线 $x=1$，所以 $(-1,a)$ 与 $(3,6)$ 关于直线 $x=1$ 对称，所以 $a=6$.

12. $-2+2\sqrt{5}$ 【点拨】将点 $A(2,4)$ 的坐标代入 $y=ax^2$ 可求出 $a=1$. 设 E 点的坐标为 (m,m^2) $(m>0)$，$\therefore EF=2m,CE=4-m^2$. $\because EF=CE$，$\therefore 2m=4-m^2$，解得 $m_1=-1+\sqrt{5},m_2=-1-\sqrt{5}$（舍去）. $\therefore CD=EF=-2+2\sqrt{5}$.

13. $-1<n<0$ 【点拨】由题意得抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-2a}{2a}=1$，$\because a>0$，$\therefore$ 抛物线开口向上.

$\because y_1<y_2$，$\therefore$ 若点 A 在对称轴 $x=1$ 的左侧，点 B 在对

1. 55 【点拨】如图,过点 E 作 $EF\perp AB$,垂足为点 F,



由题意得 $AF=DE=2$ m,$EF=AD$,$BA\perp DA$,

设 $AC=x$ m,

$\because CD=60$ m,

$\therefore EF=AD=AC+CD=(x+60)$m.

在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle BCA=50°$,

$\therefore AB=AC\cdot\tan 50°\approx1.2x$ m.

在 Rt$\triangle FBE$ 中,$\angle BEF=26.6°$,

$\therefore BF=EF\cdot\tan 26.6°\approx0.5(x+60)$m.

$\therefore AB=AF+BF\approx[2+0.5(x+60)]$m.

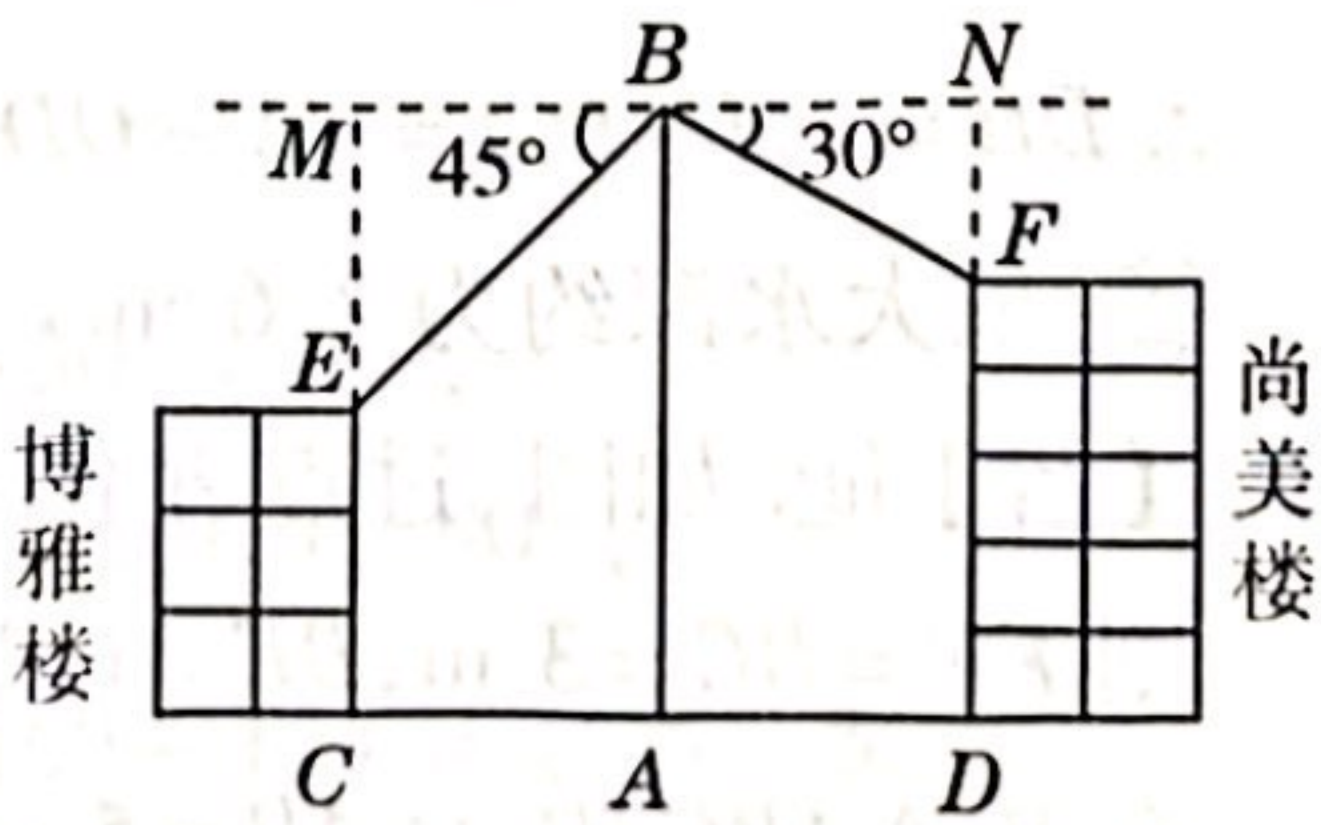
$\therefore 1.2x\approx2+0.5(x+60)$,

解得 $x\approx\frac{320}{7}$.

$\therefore AB\approx1.2\times\frac{320}{7}\approx55$ m.

$\therefore$ 该电视发射塔的高度 AB 约为 55 m.

2. $(30-5\sqrt{3})$ 【点拨】如图,过点 E 作 $EM\perp$ 过点 B 的水平线于点 M,过点 F 作 $FN\perp$ 过点 B 的水平线于点 N,



由题意可知 $CM=DN=AB=30$ 米,

$\because CE=15$ 米，

$\therefore EM=15$ 米.

在 Rt△EBM 中，$\angle EBM=45°$，

$\therefore BM=EM=15$ 米.

又$\because A$ 是 CD 的中点，

$\therefore BN=AD=AC=BM=15$ 米.

在 Rt△BFN 中，$\tan\angle FBN=\frac{FN}{BN}$，

$\because \angle FBN=30°$，$BN=15$ 米，

$\therefore \frac{FN}{15}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\therefore FN=5\sqrt{3}$ 米. $\therefore DF=(30-5\sqrt{3})$ 米.

3. 13.8 【点拨】由题意可得在 Rt△ABD 中，$\tan 30°=\frac{BD}{AD}=\frac{BD}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

解得 $BD=2\sqrt{3}$ m.

在 Rt△ADC 中，$\tan 60°=\frac{CD}{AD}=\frac{CD}{6}=\sqrt{3}$，

解得 $DC=6\sqrt{3}$ m.

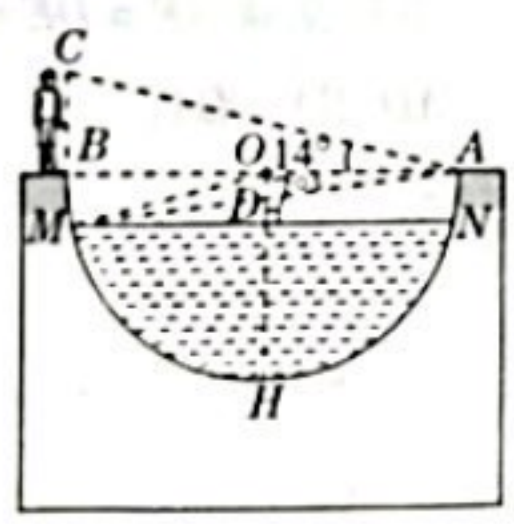
$\therefore BC=BD+DC=8\sqrt{3}\approx 13.8$ (m).

4. 【解】(1)$\because$ 嘉琪在 A 处测得垂直站立于 B 处的爸爸头顶 C 的仰角为 14°，$\therefore \angle CAB=14°$，$\angle CBA=90°$.

$\therefore \angle C=90°-\angle CAB=76°$.

$\because \tan C=\frac{AB}{BC}$，$BC=1.7$ m，$\therefore AB=1.7\times\tan 76°\approx 6.8$ (m).

(2) 过圆心 O 作 $OD\perp MN$ 并延长，交半圆于点 H，线段 DH 的长度为最大水深，连接 MO，如图.



由题意知 $OA=OM=OH$，

$\because \angle BAM=7°$，

$\therefore \angle OMA=\angle OAM=7°$.

$\because AB /\!/ MN$，

$\therefore \angle AMD=\angle BAM=7°$.

$\therefore \angle OMD=14°$，

$\therefore \angle MOD=76°$.

在 Rt△MOD 中，$\tan\angle MOD=\frac{MD}{OD}$，

即 $\tan 76°=\frac{MD}{OD}\approx 4$，$\therefore MD\approx 4OD$.

设 $OD=x$ m，则 $MD\approx 4x$ m.

在 Rt△MOD 中，$OM=OA=\frac{1}{2}AB\approx 3.4$ m，

$\therefore x^2+(4x)^2\approx 3.4^2$.

$\because x>0$，$\therefore x\approx\frac{\sqrt{17}}{5}\approx 0.82$. 即 $OD\approx 0.82$ m.

$\therefore DH=OH-OD=OA-OD\approx 3.4-0.82\approx 2.6$ (m).

答：最大水深约为 2.6 m.

5. 【解】能. 如图，过点 B 作 $BF\perp DE$ 于点 F，

则 $EF=BC=3$ m，$BF=CE$.

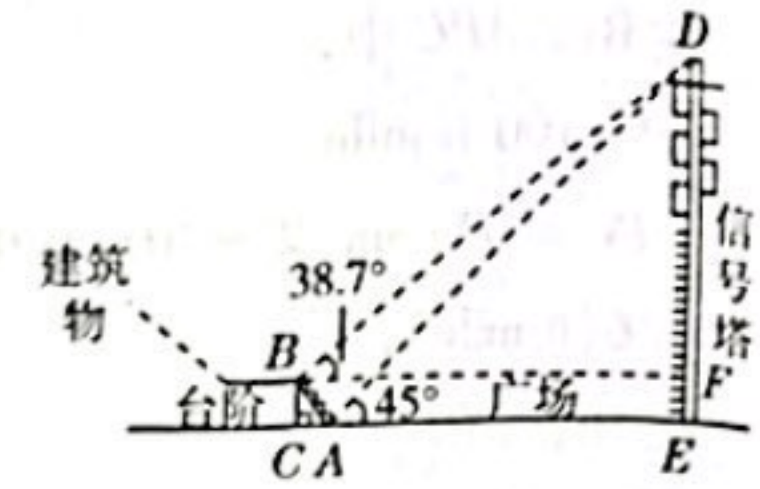
在 Rt△ABC 中，$\because AB=5$ m，$BC=3$ m，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=4$ m

在 Rt△ADE 中，

$\because \angle DAE=45°$，

$\therefore AE=DE$.



设 $AE=DE=x$ m，

$\therefore BF=(4+x)$ m，

$DF=(x-3)$ m.

在 Rt△BDF 中，$\tan 38.7°=\frac{DF}{BF}=\frac{x-3}{4+x}\approx 0.80$，

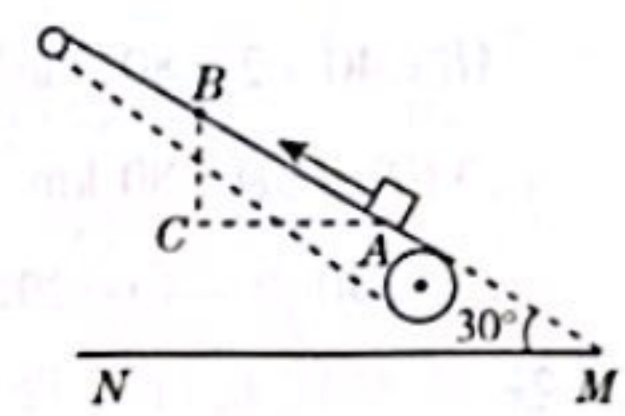
解得 $x\approx 31$.

$\therefore DE\approx 31$ m.

答：信号塔 DE 的高约为 31 m.

第3课时 利用解直角三角形解坡角中的应用问题

1. 【解】如图，设传送带上点 A 处的粮袋上升到点 B，过点 A 作 MN 的平行线，过点 B 作 MN 的垂线，两线交于点 C，易知△ABC 为直角三角形.



由题意得 $AB=\frac{140\pi\times 10}{180}=\frac{70}{9}\pi$ (cm).

$\because AC /\!/ MN$，

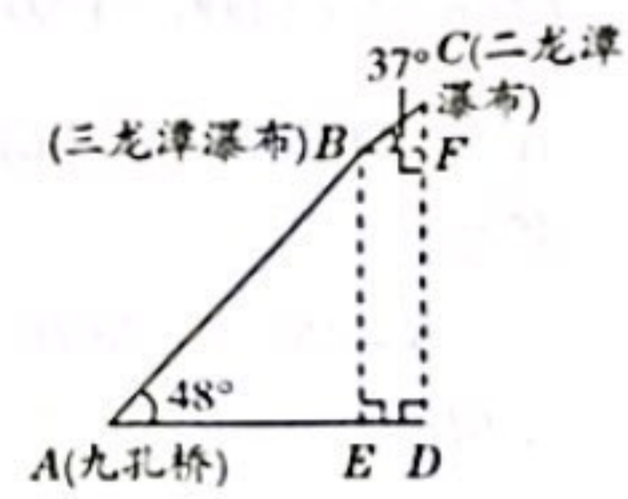
$\therefore \angle BAC=\angle NMA=30°$.

在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，

$\therefore BC=\frac{1}{2}AB=\frac{35\pi}{9}$ cm.

答：传送带上点 A 处的粮袋上升的高度是 $\frac{35\pi}{9}$ cm.

2. 【解】如图，过点 B 作 $BE\perp AD$，$BF\perp CD$，垂足分别为 E，F.



由题意得，$AB=92$ m，

$BC=30$ m，$\angle BAE=48°$，

$\angle CBF=37°$.

在 Rt△ABE 中，

$\sin\angle BAE=\frac{BE}{AB}$，

$\therefore BE=AB\cdot\sin\angle BAE=92\times\sin 48°\approx 92\times 0.74=68.08$ (m).

在 Rt△CBF 中，$\sin\angle CBF=\frac{CF}{BC}$，

$\therefore CF=BC\cdot\sin\angle CBF\approx 30\times 0.60=18.00$ (m).

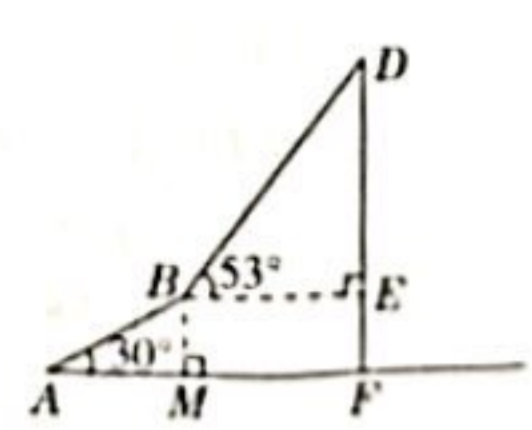
$\because FD=BE\approx 68.08$ m，

$\therefore DC=FD+CF\approx 68.08+18.00=86.08\approx 86.1$ (m).

答：从 A 处的九孔桥到 C 处的二龙潭瀑布上升的高度 DC 约为 86.1 m.

3. 【解】(1) 如图，过点 B 作 $BM\perp AF$ 于点 M，

则 $BM=EF$.



在 Rt△ABM 中，$\angle A=30°$，$AB=300$ m，

$\therefore BM=\frac{1}{2}AB=150$ m $=EF$.

$\therefore DE=DF-EF=600-150=$

450(m).

答:登山缆车上升的高度 DE 为 450 m.

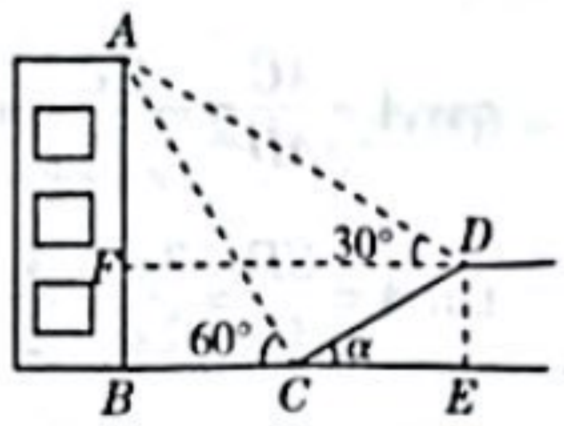
(2)在 $Rt\triangle BDE$ 中,$\angle DBE=53°$,$DE=450$ m,

$\therefore BD=\dfrac{DE}{\sin\angle DBE}\approx\dfrac{450}{0.80}=562.5(m)$.

$\therefore$ 需要的时间 $t=t_{步行}+t_{缆车}\approx\dfrac{300}{30}+\dfrac{562.5}{60}\approx19.4(min)$.

答:从山底 A 处到达山顶 D 处大约需要 19.4 min.

4.【解】(1)如图,过点 D 作 $DE\perp BC$,交 BC 的延长线于点 E,



在 $Rt\triangle CDE$ 中,

$\because \cos\alpha=\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{CE}{10}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore CE=5\sqrt{3}$ m.

$\therefore DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=5$ m.

$\therefore$ 点 D 到地面 BC 的距离为 5 m.

(2)如图,过点 D 作 $DF\perp AB$ 于点 F,

则 $BF=DE=5$ m,$DF=BE$.

设 $BC=x$ m,则 $BE=DF=(5\sqrt{3}+x)$m,

在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\tan 60°=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AB}{x}=\sqrt{3}$,

$\therefore AB=\sqrt{3}x$ m,$\therefore AF=(\sqrt{3}x-5)$m.

在 $Rt\triangle ADF$ 中,$\tan 30°=\dfrac{AF}{DF}=\dfrac{\sqrt{3}x-5}{5\sqrt{3}+x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

解得 $x=5\sqrt{3}$,

$\therefore AB=\sqrt{3}\times5\sqrt{3}=15(m)$.

$\therefore$ 该建筑物的高度 AB 为 15 m.

6 利用三角函数测高

1.【解】由题意可知,$\angle BAE=\angle MAF=\angle BAD=90°$,$FG=1.8$ m,则$\angle EAF+\angle BAF=\angle BAF+\angle BAH=90°$,

$\therefore \angle EAF=\angle BAH$. $\therefore \tan\angle EAF=\tan\angle BAH$.

$\because AB=30$ cm,$BH=20$ cm,

$\therefore \tan\angle BAH=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{2}{3}$,

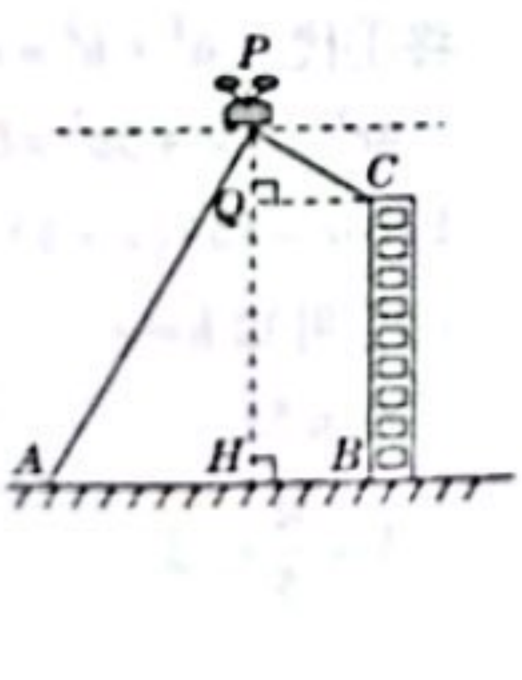
$\therefore \tan\angle EAF=\dfrac{EF}{AF}=\dfrac{2}{3}$.

$\because AF=11$ m,$\therefore \dfrac{EF}{11}=\dfrac{2}{3}$,$\therefore EF=\dfrac{22}{3}$ m,

$\therefore EG=EF+FG=\dfrac{22}{3}+1.8\approx9.1(m)$.

答:树 EG 的高度约为 9.1 m.

2.【解】如图,过点 P 作 $PH\perp AB$ 于点 H,过点 C 作 $CQ\perp PH$ 于点 Q,



易得四边形 $CQHB$ 是矩形.

$\therefore QH=BC$,$BH=CQ$.

在 $Rt\triangle APH$ 中,$AP=80$ 米,$\angle PAH=60°$.

$\therefore PH=AP\cdot\sin 60°=80\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$(米),$AH=AP\cdot\cos 60°=80\times\dfrac{1}{2}=40$(米).

$\therefore CQ=BH=70-40=30$(米).

在 $Rt\triangle CPQ$ 中,$\angle PCQ=30°$,

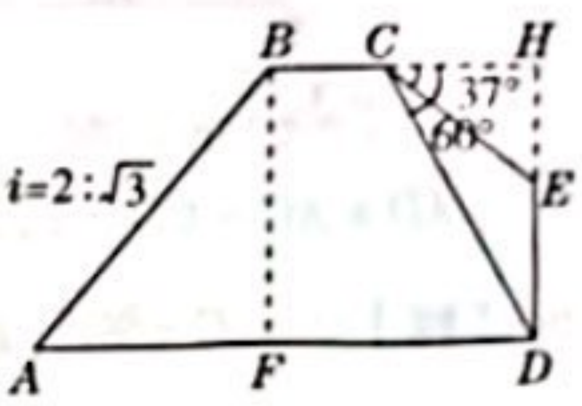
$\therefore PQ=CQ\cdot\tan 30°=30\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=10\sqrt{3}$(米).

$\therefore BC=QH=40\sqrt{3}-10\sqrt{3}=30\sqrt{3}$(米).

$\therefore$ 大楼的高度 BC 为 $30\sqrt{3}$米.

3. $\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

4.【解】如图,过点 B 作 $BF\perp AD$ 于点 F,



在 $Rt\triangle ABF$ 中,

$\because i=2:\sqrt{3}$,

$\therefore$ 可设 $BF=2k$ m,$AF=\sqrt{3}k$ m.

$\because AB=20\sqrt{7}$ m,$BF^2+AF^2=AB^2$,

$\therefore (2k)^2+(\sqrt{3}k)^2=(20\sqrt{7})^2$,

解得 $k=20$(负值已舍),

$\therefore BF=2\times20=40(m)$,

延长 BC, DE 交于点 H,

易知四边形 $BFDH$ 是矩形,$\therefore DH=BF=40$ m,

在 $Rt\triangle CDH$ 中,$\because \tan\angle DCH=\dfrac{DH}{CH}$,

$\therefore CH=\dfrac{DH}{\tan\angle DCH}=\dfrac{40}{\sqrt{3}}=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}(m)$,

在 $Rt\triangle CEH$ 中,$\because \tan\angle ECH=\dfrac{EH}{CH}$,

$\therefore EH=CH\cdot\tan\angle ECH=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\cdot\tan 37°\approx\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{3}{4}=10\sqrt{3}(m)$,

$\therefore DE=DH-EH\approx(40-10\sqrt{3})$m.

答:古树 DE 的高度约为$(40-10\sqrt{3})$m.

集训课堂

练素养1

1.【解】$\because a=2\sqrt{3}$,$b=6$,$\angle C=90°$,

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12+36}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

$\because \tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle A=30°$.

$\therefore \angle B=90°-\angle A=90°-30°=60°$.

2.【解】$\because AB=13$,$AC=12$,$\angle ACB=90°$,

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$.

$\therefore \sin\angle BAC=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5}{13}$.

过点 B 作 $BD\perp MC$ 于点 D.

$\because \angle BCM=\angle BAC$,

$\therefore \sin\angle BCM=\sin\angle BAC$.

$\therefore \sin\angle BCM=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{5}{13}$,即$\dfrac{BD}{5}=\dfrac{5}{13}$.

$\therefore BD=\dfrac{25}{13}$,即点 B 到直线 MC 的距离为$\dfrac{25}{13}$.

3.【解】(1)由题意知 $\sin C=\dfrac{AB}{AC}$,即$\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{AC}$,则 $AC=6$.

(2)由题意知 $\tan C=\dfrac{AB}{BC}$,即$\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{3}{BC}$,则 $BC=3\sqrt{3}$.

4.【解】$\because \angle C=90°,\angle BDC=45°,BC=3,\therefore CD=3$.

$\because \angle A=30°,BC=3$,

$\therefore \tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{3}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore AC=3\sqrt{3}$.

$\therefore AD=AC-CD=3\sqrt{3}-3$.

5.【解】$\because \angle C=90°,\angle B=30°,AB=4\sqrt{3}$,

$\therefore \angle CAB=60°,AC=AB\cdot\sin 30°=4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=2\sqrt{3}$.

又$\because AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线,

$\therefore \angle CAD=30°$.

$\therefore \cos\angle CAD=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{2\sqrt{3}}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore AD=4$.

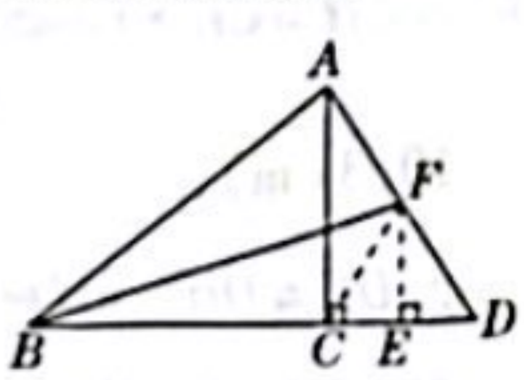
6.【解】(1)$\because AC\perp BD,\cos\angle ABC=\dfrac{4}{5},BC=8$,

$\therefore \cos\angle ABC=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{8}{AB}=\dfrac{4}{5}$.

$\therefore AB=10$.

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

(2)如图,连接 CF,过点 F 作 $FE\perp BD$,垂足为点 E.



在 $Rt\triangle ACD$ 中,$\because BF$ 为 AD 边上的中线,即 F 为 AD 的中点,

$\therefore CF=\dfrac{1}{2}AD=FD$.

又$\because AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$,

$\therefore CF=\sqrt{13}$.

$\because CF=FD,FE\perp CD$,

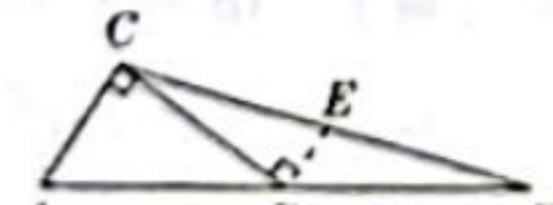
$\therefore CE=\dfrac{1}{2}CD=2$.

在 $Rt\triangle EFC$ 中,

$EF=\sqrt{CF^2-CE^2}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-2^2}=3$,

$\therefore \tan\angle FBD=\dfrac{FE}{BE}=\dfrac{FE}{BC+CE}=\dfrac{3}{8+2}=\dfrac{3}{10}$.

7.【解】如图,过点 D 作 CD 的垂线交 BC 于点 E.



在 $Rt\triangle CDE$ 中,

$\because \tan\angle BCD=\dfrac{1}{3}=\dfrac{DE}{CD}$,

$\therefore$ 可设 $DE=x$,则 $CD=3x$.

$\because CD\perp AC$,

$\therefore DE/\!/AC$.

又$\because$ 点 D 为 AB 的中点,

$\therefore$ 点 E 为 BC 的中点.

$\therefore AC=2DE=2x$.

在 $Rt\triangle ACD$ 中,$\angle ACD=90°,AC=2x,CD=3x$,

$\therefore AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{4x^2+9x^2}=\sqrt{13}x$.

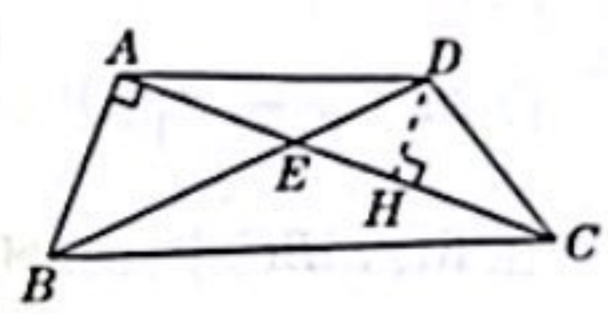
$\therefore \sin A=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{3x}{\sqrt{13}x}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$,

$\cos A=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{2x}{\sqrt{13}x}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$,

$\tan A=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

点方法 题中出现 $\tan\angle BCD=\dfrac{1}{3}$,由于$\angle BCD$ 所在的三角形并非直角三角形,因此应用正切的定义,构造出一个与之相关的直角三角形进行求解.

8.【解】如图,作 $DH\perp AC$ 于点 H.



$\because \angle CED=45°,DH\perp EC,DE=\sqrt{2}$,

$\therefore EH=DE\cdot\cos 45°=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$,

$DH=DE\cdot\sin 45°=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$.

又$\because \angle DCE=30°$,

$\therefore HC=\dfrac{DH}{\tan 30°}=\sqrt{3},CD=\dfrac{DH}{\sin 30°}=2$.

$\because \angle AEB=\angle CED=45°,\angle BAC=90°,BE=2\sqrt{2}$,

$\therefore AB=AE=2$.

$\therefore AC=AE+EH+HC=2+1+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\times 2\times(3+\sqrt{3})+\dfrac{1}{2}\times 1\times(3+\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{3}+9}{2}$.

9.【解】(1)方程整理得$(c-a)x^2+2bx+(a+c)=0$,

则$\Delta=(2b)^2-4(c-a)(a+c)=4(b^2+a^2-c^2)$.

$\because$ 方程有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta=0$,即 $b^2+a^2=c^2$.

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形,且$\angle C=90°$.

(2)由 $3c=a+3b$,得 $a=3c-3b$. ①

将①代入 $a^2+b^2=c^2$,得$(3c-3b)^2+b^2=c^2$.

$\therefore 4c^2-9bc+5b^2=0$,

即$(4c-5b)(c-b)=0$.

由①可知 $b\neq c$,

$\therefore 4c=5b$.

将②代入①，得 $a=\frac{3}{5}c$.

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\sin A+\sin B=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$.

点方法 解决本题的突破口是由一元二次方程根与判别式的关系得到一个关于 a,b,c 的等式. 从解题过程可以看出，求三角函数值时，只分析出直角三角形中三边的比例关系即可求出其值.

练素养2

1. 【解】(1) 根据题意得，四边形 $CDFE$ 是矩形，$\angle CAD=30°$，$\angle EBF=45°$，

$\therefore DF=CE=895\ \text{m}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle EBF$ 中，$BF=\frac{EF}{\tan\angle EBF}=\frac{7}{1}=7(\text{m})$，

$\therefore DB=DF-BF=895-7=888(\text{m})$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，

$AD=\frac{CD}{\tan\angle CAD}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=7\sqrt{3}(\text{m})$，

$\therefore AB=AD+BD=7\sqrt{3}+888\approx900(\text{m})$，