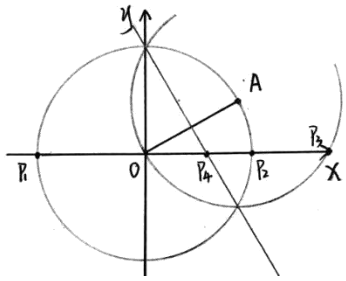
二次函数与等腰三角形问题　　导学案

类型 1：　“两定一动”型等腰三角形存在性问题

【知识点睛】

❖ 如图，已知定点 A、O，在 x 轴上找点 P，使△OAP 为等腰三角形则 P_1、P_2、P_3、P_4 即为符合题意的点 P



解决策略：$\begin{cases}\text{“两圆一线”找点}\\\text{“勾股定理”求点}\end{cases}$（有时也可用两点间距离公式求值）

即：①当 OA=OP 时，以 O 点为圆心，OA 长为半径画圆，与目标直线 x 轴的交点即为所求点

②当 OA=AP 时，以 A 点为圆心，OA 长为半径画圆，与目标直线 x 轴的交点即为所求点

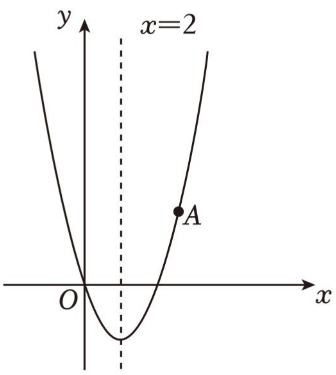
③当 AP=OP 时，线段 OA 的中垂线与目标直线 x 轴的交点即为所求点

【类题训练】

1．如图，已经抛物线经过点 O（0，0），A（5，5），且它的对称轴为 $x=2$．

（1）求此抛物线的解析式；

（2）若点 B 是 x 轴上的一点，且△OAB 为等腰三角形，请直接写出 B 点坐标．



【分析】（1）由抛物线经过点 O（0，0），对称轴为直线 $x=2$，知抛物线经过点（4，0），设抛物线的解析式为 $y=ax(x-4)$，用待定系数法可得抛物线的解析式为 $y=x^2-4x$；

（2）设 B（m，0），有 $OA^2=50$，$OB^2=m^2$，$AB^2=(m-5)^2+25$，分三种情况：①若 $OA=OB$，则 $50=m^2$，②若 $OA=AB$，则 $50=(m-5)^2+25$，③若 $OB=AB$，则 $m^2=(m-5)^2+25$，分别解方程可得答案．

【解答】解：（1）∵抛物线经过点 O（0，0），对称轴为直线 $x=2$，

∴抛物线经过点（4，0），

设抛物线的解析式为 $y=ax(x-4)$，

把 A（5，5）代入得：$5=5a$，

解得：$a=1$，

∴$y=x(x-4)=x^2-4x$，

∴抛物线的解析式为 $y=x^2-4x$；

（2）设 $B(m，0)$，

∵$O(0，0)$，$A(5，5)$，

∴$OA^2=50$，$OB^2=m^2$，$AB^2=(m-5)^2+25$，

①若 $OA=OB$，则 $50=m^2$，

解得 $m=5\sqrt{2}$ 或 $m=-5\sqrt{2}$，

∴$B(5\sqrt{2}，0)$ 或 $(-5\sqrt{2}，0)$；

②若 $OA=AB$，则 $50=(m-5)^2+25$，

解得 $m=0$（与 O 重合，舍去）或 $m=10$，

∴$B(10，0)$；

③若 $OB=AB$，则 $m^2=(m-5)^2+25$，

解得 $m=5$，

∴$B(5，0)$；

综上所述，B 的坐标为 $(5\sqrt{2}，0)$ 或 $(-5\sqrt{2}，0)$ 或 $(10，0)$ 或 $(5，0)$．

.

2．如图，二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴相交于点 A 和点 $C(1，0)$，交 y 轴于点 $B(0，3)$．

（1）求此二次函数的解析式；

（2）设二次函数图象的顶点为 P，对称轴与 x 轴交于点 Q，求四边形 $AOBP$ 的面积（请在图 1 中探索）；

（3）二次函数图象的对称轴上是否存在点 M，使得△AMB 是以 AB 为底边的等腰三角形？若存在，请求出满足条件的点 M 的坐标；若不存在，请说明理由（请在图 2 中探索）．

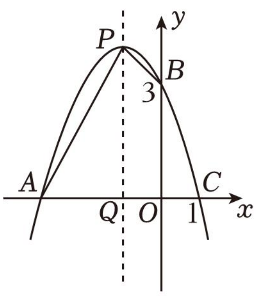


图 1

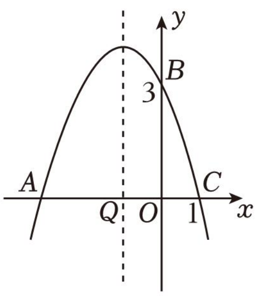


图 2

【分析】（1）将 B，C 两点坐标代入抛物线的解析式，进一步得出结果；

（2）连接 OP，将二次函数的解析式配方求得顶点的坐标，令 $y=0$ 求得 A 的坐标，从而求得 OQ，PQ，OA 的长，再根据 $S_{四边形AOBP}=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle BOP}$ 求得结果；

（3）设 M（-1，m），表示出 AM 和 BM，根据 $AM^2=BM^2$ 列出方程求得 m 的值，进而求得结果．

【解答】解：（1）由题意得，

$$\begin{cases}-1+b+c=0\\c=3\end{cases},$$

$$\therefore\begin{cases}b=-2\\c=3\end{cases},$$

$\therefore y=-x^2-2x+3$；

（2）如图，

连接 OP，

$\because y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$，

$\therefore P(-1,4)$，

$\therefore PQ=4$，$OQ=1$，

由 $-x^2-2x+3=0$ 得，

$x_1=1$，$x_2=-3$，

$\therefore OA=3$，

$\therefore S_{四边形AOBP}=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle BOP}=\frac{1}{2}OA\cdot PQ+\frac{1}{2}OB\cdot OQ=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{15}{2}$；

（3）设 M（-1，m），

由 $AM^2=BM^2$ 得，

$[(-3)-(-1)]^2+m^2=(-1)^2+(m-3)^2$，

$\therefore m=1$，

$\therefore M(-1,1)$．

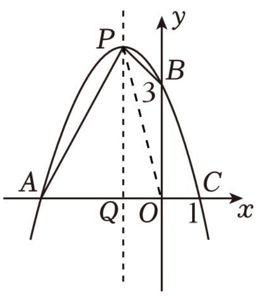
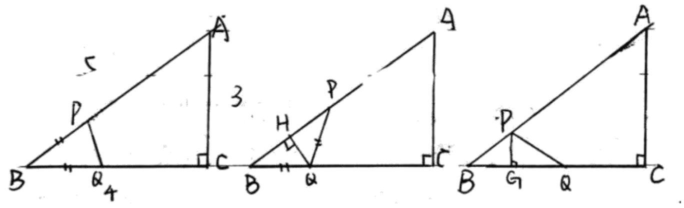


图 1

类型 2 “一定两动”型等腰三角形存在性问题

【知识点睛】

❖ 如图，P、Q 分别为 AB、CB 上一动点，当△BPQ 是等腰三角形时，有以下几种情况：



①BP=BQ ②BQ=PQ ③BP=PQ

解决策略：$\begin{cases}\text{分类讨论}\\ \text{转化或找与定点有关系的线段间的等量关系}\end{cases}$

即 BQ=PQ 可转化为: $\frac{BQ}{BP}=\frac{5}{8}$;BP=PQ 可转化为: $\frac{BP}{BQ}=\frac{5}{8}$

☆特别地：当题目给出的数据还好时，也可选择用代数法来分类讨论等腰三角形

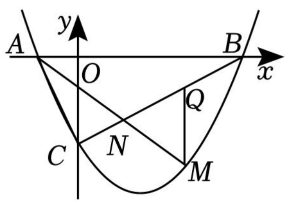
步骤如下：①根据点的坐标，表示出三边的平方

②根据等腰三角形的性质，可得到两两相等的的三个方程

③分别解出这三个方程，再依据结果判断是否存在

【类题训练】

3．如图，二次函数 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-4$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C，则 $\angle ACB=$ __90__°；M 是二次函数在第四象限内图象上一点，作 $MQ\parallel y$ 轴交 BC 于 Q，若△NQM 是以 NQ 为腰的等腰三角形，则线段 NC 的长为 __$5-\sqrt{5}$ 或 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$__.



【分析】由 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-4$ 可得 $A(-2,0)$，$B(8,0)$，$C(0,-4)$，即得 $AB^2=100$，$AC^2=20$，$BC^2=80$，故 $AB^2=AC^2+BC^2$，从而 $\angle ACB=90°$；当 $NQ=MQ$ 时，过 N 作 $NH\perp x$ 轴于 H，设 AM 交 y 轴于 K，可证△AHN≌△ACN（AAS），即得 $AH=AC=\sqrt{20}=$

$2\sqrt{5}$，$NC=HN$，有 $BH=AB-AH=10-2\sqrt{5}$，由△BHN∽△BCA，得$\frac{HN}{2\sqrt{5}}=\frac{10-2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}$，求出 $HN=5-\sqrt{5}$，故 $NC=5-\sqrt{5}$；当 $NQ=NM$ 时，过 N 作 $NT\perp y$ 轴于 T，可证△AOK∽△COA，得$\frac{OK}{2}=\frac{2}{4}$，$OK=1$，$CK=OC-OK=3$，$AK=\sqrt{OA^2+OK^2}=\sqrt{5}$，求出 $TK=CT=\frac{1}{2}CK=\frac{3}{2}$，由△$AOK$∽△$NTK$，可得$\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{NK}$，求得 $NK=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，故 $NC=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

【解答】解：在 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-4$ 中，令 $x=0$ 得 $y=-4$，令 $y=0$ 得 $x=8$ 或 $x=-2$，

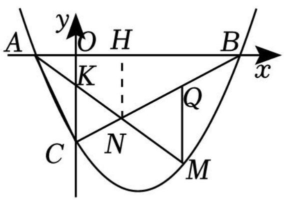
∴A（-2，0），B（8，0），C（0，-4），

∴$AB^2=100$，$AC^2=20$，$BC^2=80$，

∴$AB^2=AC^2+BC^2$，

∴$\angle ACB=90°$；

当 $NQ=MQ$ 时，过 N 作 $NH\perp x$ 轴于 H，设 AM 交 y 轴于 K，如图：



∴$\angle QMN=\angle QNM=\angle ANC$，

∵$QM\parallel y$ 轴，

∴$\angle QMN=\angle NKC=\angle AKO$，

∴$\angle ANC=\angle AKO$，

∴$\angle OAK=90°-\angle AKO=90°-\angle ANC=\angle CAN$，

∵$\angle AHN=90°=\angle ACN$，$AN=AN$，

∴△AHN≌△ACN（AAS），

∴$AH=AC=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$，$NC=HN$，

∴$BH=AB-AH=10-2\sqrt{5}$，

∵$\angle HBN=\angle CBA$，$\angle NHB=90°=\angle ACB$，

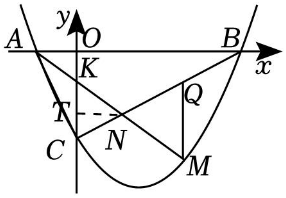
∴△BHN∽△BCA，

∴$\frac{HN}{AC}=\frac{BH}{BC}$，即$\frac{HN}{2\sqrt{5}}=\frac{10-2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}$，

∴$HN=5-\sqrt{5}$，

∴$NC=5-\sqrt{5}$；

当 $NQ=NM$ 时，过 N 作 $NT\perp y$ 轴于 T，如图：



$\therefore \angle NQM=\angle NMQ$，

$\because QM\parallel y$ 轴，

$\therefore \angle NKC=\angle NCK$，

$\therefore NK=NC$，

$\because \angle AKO=\angle NKC$，

$\therefore \angle AKO=\angle NCK$，

$\therefore \angle OAK=90^\circ-\angle AKO=90^\circ-\angle NCK=\angle ACO$，

$\because \angle AOK=90^\circ=\angle COA$，

$\therefore \triangle AOK\backsim\triangle COA$，

$\therefore \frac{OK}{OA}=\frac{OA}{OC}$，即 $\frac{OK}{2}=\frac{2}{4}$，

$\therefore OK=1$，

$\therefore CK=OC-OK=4-1=3$，$AK=\sqrt{OA^2+OK^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore TK=CT=\frac{1}{2}CK=\frac{3}{2}$，

$\because \angle AKO=\angle TKN$，$\angle AOK=90^\circ=\angle NTK$，

$\therefore \triangle AOK\backsim\triangle NTK$，

$\therefore \frac{OK}{TK}=\frac{AK}{NK}$ 即 $\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{NK}$，

$\therefore NK=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore NC=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore$ 线段 NC 的长为 $5-\sqrt{5}$ 或 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

故答案为：90，$5-\sqrt{5}$ 或 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

4．如图 1，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+bx+4$ 经过 A（-1，3），与 y 轴交于点 C，经过点 C 的直线与抛物线交于另一点 E（6，m），点 M 为抛物线的顶点，抛物线的对

称轴与 x 轴交于点 D.

（1）求直线 CE 的解析式；

（2）如图 2，点 P 为直线 CE 上方抛物线上一动点，连接 PC，PE．当△PCE 的面积最大时，求点 P 的坐标以及△PCE 面积的最大值．

（3）如图 3，将点 D 右移一个单位到点 N，连接 AN，将（1）中抛物线沿射线 NA 平移得到新抛物线 y'，y' 经过点 N，y' 的顶点为点 G，在新抛物线 y' 的对称轴上是否存在点 H，使得△MGH 是等腰三角形？若存在，请直接写出点 H 的坐标；若不存在，请说明理由．

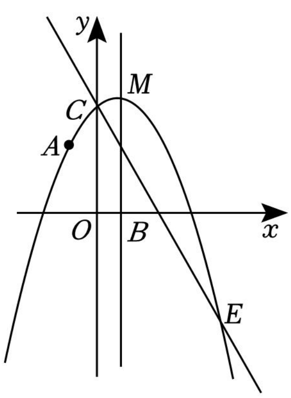


图1

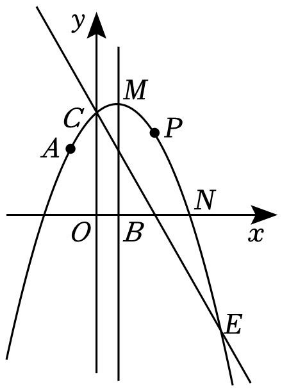


图2

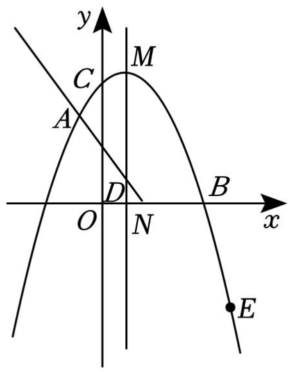


图3

【分析】（1）把点 A 的坐标代入抛物线，即可求出抛物线解析式，再分别求出点 C，点 E，待定系数法

即可求得直线 CE 解析式；

（2）过点 P 作 PH∥y 轴交 CE 于点 H，设 P 为（t，$-\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{3}t+4$），则 H 为（t，$-\frac{4}{3}t+4$），由铅垂法求得△PCE 面积的表达式，最后求其最大值及 P 点坐标；

（3）先求出直线 AN 的解析式，反向延长射线 NA 与抛物线的另一个交点记为点 Q，求出点 Q 的坐标，根据点 Q 到点 N 的运动，可求出抛物线 y' 的顶点 G 的坐标，再进行分类讨论：分点 M，点 G，点 H 为顶点的三种情况，分别进行计算求解即可．

【解答】解：（1）把点 A（－1，3）代入抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+bx+4$，

得 $-\frac{1}{3}-b+4=3$，

∴$b=\frac{2}{3}$，

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4$，

∵在 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4$ 中，令 $x=0$，得 $y=4$，

∴C（0，4），

∵点 E 在抛物线上，

∴把 E（6，m）代入 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4$，

得 $m=-\frac{1}{3}\times36+\frac{2}{3}\times6+4=-4$，

∴E（6，－4），

设直线 CE 的解析式为 $y=kx+b_1$ 则，

∵C（0，4），E（6，－4），

∴$\begin{cases}6k+b_1=-4\\ b_1=4\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}k=-\frac{4}{3}\\ b_1=4\end{cases}$，

∴直线 CE 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$．

（2）过点 P 作 PH∥y 轴，交直线 CE 于点 H，

设 P 为（t，$-\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{3}t+4$），则 H 为（t，$-\frac{4}{3}t+4$），

∴$PH=-\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{3}t+4-(-\frac{4}{3}t+4)=-\frac{1}{3}t^2+2t$，

∴△PCE 面积：$S=\frac{1}{2}\times6\times(-\frac{1}{3}t^2+2t)=-(t-3)^2+9$，

∵$a<0$，

∴当 $t=3$ 时，△PCE 面积的最大值为 9，

此时，点 P 的坐标为（3，3）．

（3）∵抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4=-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{13}{3}$，

∴当 $x=1$ 时，y 有最大值 $\frac{13}{3}$，

∴M（1，$\frac{13}{3}$），

∴抛物线对称轴为 $x=1$，

∴D（1，0），

∵点 D 右移一个单位到点 N，

∴N（2，0），

∵A（-1，3），N（2，0），

∴直线 AN 解析式为 $y=-x+2$，

∴直线 AN 与抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4$ 的交点为 A（-1，3），

另一交点设为 Q，则 Q（6，-4），

∵抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4$ 沿射线 NA 平移得到新抛物线 y'，y' 经过点 N（2，0），

∴抛物线向左平移了 4 个单位，向上平移了 4 个单位，

∴新抛物线 $y'=-\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{16}{3}$，

∴对称轴为 $x=-3$，

顶点 G（-3，$\frac{25}{3}$），

设 H（-3，h），

则 $MG=4\sqrt{2}$，$MH=\sqrt{4^2+(h-\frac{13}{3})^2}$，$GH=|h-\frac{25}{3}|$，

假设△MGH 是等腰三角形，则分三种情况讨论：

当 M 为顶点时，由 $MG=MH$ 得，

$4\sqrt{2}=\sqrt{4^2+(h-\frac{13}{3})^2}$，

∴$h=\frac{25}{3}$ 或 $\frac{1}{3}$，

∴H（-3，$\frac{25}{3}$）或（-3，$\frac{1}{3}$），

当 G 为顶点时，由 $MG=GH$ 得，

$4\sqrt{2}=|h-\frac{25}{3}|$，

∴$h=\frac{25}{3}+4\sqrt{2}$ 或 $\frac{25}{3}-4\sqrt{2}$，

∴H（-3，$\frac{25}{3}+4\sqrt{2}$）或（-3，$\frac{25}{3}-4\sqrt{2}$），

当 H 为顶点时，由 $MH=GH$ 得，

$\sqrt{4^2+(h-\frac{13}{3})^2}=|h-\frac{25}{3}|$，

∴$h=\frac{13}{3}$，

∴H（－3，$\frac{13}{3}$），

∴存在点 H，使得△MGH 是等腰三角形，点 H 的坐标为（－3，$\frac{25}{3}$）或（－3，$\frac{1}{3}$）或（－3，$\frac{25}{3}+4\sqrt{2}$）或（－3，$\frac{25}{3}-4\sqrt{2}$）或（－3，$\frac{13}{3}$）.