

第五章 一元一次方程

一、一元一次方程的定义：只含有一个未知数，并且未知数的次数是 1 的整式方程

二、一元一次方程的解：

使一元一次方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做一元一次方程的解。

三、等式的基本性质

等式的性质 1：等式两边加（或减）同一个数（或式子），结果仍相等。

如果 $a = b$ ，那么 $a \pm c = b \pm c$ ；（ c 为一个数或一个式子）。

等式的性质 2：等式两边乘同一个数，或除以同一个不为 0 的数，结果仍相等。

如果 $a = b$ ，那么 $ac = bc$ ；如果 $a = b (c \neq 0)$ ，那么 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

要点诠释：

分数的分子、分母同时乘以或除以同一个不为 0 的数，分数的值不变。

即： $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a \div m}{b \div m}$ （其中 $m \neq 0$ ）

特别须注意：分数的基本的性质主要是用于将方程中的小数系数（特别是分母中的小数）化为整数，

如方程： $\frac{x-3}{0.5} - \frac{x+4}{0.2} = 1.6$ ，将其化为： $\frac{10x-30}{5} - \frac{10x+40}{2} = 1.6$ 。方程的右边没有变化，这要与“去分母”区别开。

四、一元一次方程的解法：

解一元一次方程的一般步骤

变形步骤	具体方法	变形根据	注意事项
去分母	方程两边都乘以各个分母的最小公倍数	等式性质 2	1. 不能漏乘不含分母的项； 2. 分数线起到括号作用，去掉分母后，如果分子是多项式，则要加强括号
去括号	先去小括号，再去中括号，最后去大括号	乘法分配律、去括号法则	1. 分配律应满足分配到每一项 2. 注意符号，特别是去掉括号
移项	把含有未知数的项移到方程的一边，不含有未知数的项移到另一边	等式性质 1	1. 移项要变号； 2. 一般把含有未知数的项移到方程左边，其余项移到右边
合并同类项	把方程中的同类项分别合并，化成“ $ax = b$ ”的形式（ $a \neq 0$ ）	合并同类项法则	合并同类项时，把同类项的系数相加，字母与字母的指数不变

未知数的系数化成“1”	方程两边同除以未知数的系数 a ，得 $x = \frac{b}{a}$	等式性质 2	分子、分母不能颠倒
-------------	---	--------	-----------

要点诠释：

理解方程 $ax=b$ 在不同条件下解的各种情况，并能进行简单应用：

$$x = \frac{b}{a}$$

① $a \neq 0$ 时，方程有唯一解

② $a=0, b=0$ 时，方程有无数个解；

③ $a=0, b \neq 0$ 时，方程无解。温馨提示：解完方程，若要验证所求解是否正确，则可将所得解代入原方程、检验等式是否成立即可

五、列一元一次方程解决实际问题：

- 1、审：审清题意，明确已知量、未知量，找到两者之间的等量关系
- 2、设：设关键未知数（一般求什么就设什么），注意带单位
- 3、列：根据题意所得等量关系，列出一元一次方程
- 4、解：解所列方程
- 5、验：是否为所列方程的解
- 6、答：规范作答，注意单位名称

二、经典例题透析

类型一：一元一次方程的相关概念

例

1、已知下列各式：

① $2x-5=1$ ；② $8-7=1$ ；③ $x+y$ ；④ $\frac{1}{2}x-y=x^2$ ；⑤ $3x+y=6$ ；⑥ $5x+3y+4z=0$ ；⑦ $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=8$ ；⑧ $x=0$ 。其中方程的个数是（ ）A、5 B、6 C、7 D、8

2. 判断下列方程是否是一元一次方程：

(1) $-2x^2+3=x$ (2) $3x-1=2y$ (3) $x+\frac{1}{x}=2$ (4) $2x^2-1=1-2(2x-x^2)$

3. 已知 3 是关于 x 的方程 $2x-a=1$ 的解，则 a 的值是（ ）

- A. -5 B. 5 C. 7 D. 2

类型二：一元一次方程的解法

1. $\frac{x}{0.07} - \frac{1.3-2x}{0.7} = 1$ 2. $\frac{1}{3} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{3x-5}{2} + 4 \right) - 6 \right] = 1$

$$3. \frac{0.4x+0.9}{0.05} - \frac{0.04+0.3x}{0.02} = 2x-5$$

$$4. \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}x - 2 \right) - 2 \right] - 2 \right\} - 2 = 2$$

$$5. \quad 5|x| - 16 = 3|x| - 4$$

$$6. \quad \frac{|3x-1|}{2} = 4$$

三。一元一次方程应用题（找出等量关系）

1. 机械厂加工车间有 85 名工人，平均每人每天加工大齿轮 16 个或小齿轮 10 个，已知 2 个大齿轮与 3 个小齿轮配成一套，问需分别安排多少名工人加工大、小齿轮，才能使每天加工的大小齿轮刚好配套？

2. 甲、乙两站相距 480 公里，一列慢车从甲站开出，每小时行 90 公里，一列快车从乙站开出，每小时行 140 公里。

- (1) 慢车先开出 1 小时，快车再开。两车相向而行。问快车开出多少小时后两车相遇？
- (2) 两车同时开出，相背而行多少小时后两车相距 600 公里？
- (3) 两车同时开出，慢车在快车后面同向而行，多少小时后快车与慢车相距 600 公里？
- (4) 两车同时开出同向而行，快车在慢车的后面，多少小时后快车追上慢车？
- (5) 慢车开出 1 小时后两车同向而行，快车在慢车后面，快车开出后多少小时追上慢车？

3. 某商场购进了 40 台甲型号和 20 台乙型号的扫地机器人，已知每台甲型号扫地机器人的进价比乙型号扫地机器人的进价便宜 15%，甲型号扫地机器人每台售价 1800 元，乙型号扫地机器人每台售价 2400 元。“春节”期间商场促销，甲型号扫地机器人按原售价销售，乙型号扫地机器人按原售价九折出售。

(1) 某公司一共花了 13680 元买了甲、乙两种型号扫地机器人共 7 台。问该公司甲、乙两种型号扫地机器人各买了多少台？

(2) 在促销期间，甲、乙两种型号扫地机器人销售一空，甲型号扫地机器人的总利润是乙型号扫地机器人总利润的 1.25 倍。问甲、乙两种型号扫地机器人每台进价各是多少元？

单元综合知识点分类练习题

一. 方程

1. 下列各式中：① $x=0$ ；② $2x>3$ ；③ $x^2+x-2=0$ ；④ $\frac{y}{x}+2=0$ ；⑤ $3x-2$ ；⑥ $x=x-1$ ；⑦ $x-y=0$ ；⑧ $xy=4$ ，是方程的有（ ） A. 3个 B. 4个 C. 5个 D. 6个

二. 一元一次方程

2. 已知下列方程：① $3x=6y$ ；② $2x=0$ ；③ $\frac{x}{3}=4x+x-1$ ；④ $x^2+2x-5=0$ ；⑤ $3x=1$ ；⑥ $\frac{3}{x}-2=2$ 。其中一元一次方程的个数是（ ） A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个
3. 若 $(m+1)x^{|m|}=6$ 是关于 x 的一元一次方程，则 m 等于_____。
4. 关于 x 的方程 $a-3x=bx+2$ 是一元一次方程，则 b 的取值情况是（ ）
- A. $b \neq -3$ B. $b = -3$ C. $b = -2$ D. b 为任意数

三. 方程的解

5. 已知 $x=5$ 是方程 $ax-8=20+a$ 的解，则 a 的值是（ ）
- A. 2 B. 3 C. 7 D. 8
6. 如果方程 $(a-b)x=|a-b|$ 的解是 $x=-1$ ，那么（ ）
- A. $a=b$ B. $a>b$ C. $a \neq b$ D. $a<b$
7. 已知关于 x 的方程 $ax+b=c$ 的解是 $x=1$ ，则 $|c-a-b-1|$ =_____。
8. 关于 x 的方程 $2(x-a)=x-1$ 的解为 $4a+b$ ，则关于 x 的方程 $2(ax-b)-1978=-bx+4a+44$ 的解为 x =_____。
9. 已知关于 x 的一元一次方程 $\frac{1}{2021}x-3=2x+b$ 的解为 $x=999$ ，那么关于 y 的一元一次方程 $\frac{1}{2021}(y-1)-3=2(y-1)+b$ 的解为 y =_____。
10. 已知关于 x 的一元一次方程 $\frac{x}{2020}+3=2020x+n$ ①与关于 y 的一元一次方程 $\frac{3y-2}{2020}-3=2020(3y-2)-n$ ②，若方程①的解为 $x=2020$ ，那么方程②的解为_____。
11. 整式 $mx+2n$ 的值随 x 的取值不同而不同，下表是当 x 取不同值时对应的整式的值，则关于 x 的方程 $-mx-2n=2$ 的解为（ ）

x	-2	-1	0	1	2
$mx+2n$	2	0	-2	-4	-6

- A. -1 B. -2 C. 0 D. 无法计算
12. 小成心里想了两个数字 a, b ，满足下列三个方程，那么不满足的那个方程是（ ）
- A. $a-b=3$ B. $2a+3b=1$ C. $3a-b=7$ D. $2a+b=5$

四. 等式的基本性质

13. 若 $2y - 7x = 0$ ($xy \neq 0$), 则 $x: y$ 等于 ()

A. 7: 2

B. 4: 7

C. 2: 7

D. 7: 4

14. 下列利用等式的性质, 错误的是 ()

A. 由 $a=b$, 得到 $1-a=1-b$

B. 由 $\frac{a}{2}=\frac{b}{2}$, 得到 $a=b$

C. 由 $a=b$, 得到 $ac=bc$

D. 由 $ac=bc$, 得到 $a=b$

15. 运用等式性质进行的变形, 正确的是 ()

A. 如果 $a=b$, 那么 $a+c=b-c$

B. 如果 $a^2=b^2$, 那么 $a=b$

C. 如果 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$, 那么 $a=b$

D. 如果 $a=b$, 那么 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$

五. 解一元一次方程

16. 解方程:

$$(1) \frac{x}{2} - \frac{5x+11}{6} = 1 + \frac{2x-4}{3};$$

$$(2) \frac{3+0.2x}{0.2} - \frac{0.2+0.03x}{0.01} = 0.75.$$

17. 若 a, b 是互为相反数 ($a \neq 0$), 则关于 x 的一元一次方程 $ax+b=0$ 的解是 ()

A. 1

B. -1

C. -1 或 1

D. 任意有理数

18. 已知关于 x 的方程 $2(x+1) - m = -\frac{m-2}{2}$ 的解比方程 $5(x-1) - 1 = 4(x-1) + 1$ 的解大 2, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

19. 方程 $kx=3$ 的解为自然数, 则整数 k 等于 ()

A. 0, 1

B. 1, 3

C. -1, -3

D. $\pm 1, \pm 3$

20. 关于 x 的方程 $\frac{mx-3}{3} = 1 - \frac{x}{2}$ 的解是整数, 则整数 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

21. 王涵同学在解关于 x 的方程 $7a+x=18$ 时, 误将 $+x$ 看作 $-x$, 得方程的解为 $x=-4$, 那么原方程的解为 () A. $x=4$ B. $x=2$ C. $x=0$ D. $x=-2$

22. 小明解方程 $\frac{2x-1}{3} = \frac{x+a}{2} - 3$ 去分母时, 方程右边的 -3 忘记乘 6, 因而求出的解为 $x=2$, 则原方程正确的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

23. 已知关于 x 的方程 $5x-2=3x+16$ 的解与方程 $4a+1=4(x+a)-5a$ 的解相同, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$; 若 $[m]$ 表示不大于 m 的最大整数, 那么 $[\frac{a}{2} - 1] = \underline{\hspace{2cm}}$.

24. 已知关于 x 的方程 $3[x - 2(x - \frac{a}{3})] = 4x$ 和 $\frac{3x+a}{12} - \frac{1-5x}{8} = 1$ 有相同的解, 求 a 的值和这个解.

25. 一列方程如下排列:

$$\frac{x}{4} + \frac{x-1}{2} = 1 \text{ 的解是 } x=2;$$

$$\frac{x}{6} + \frac{x-2}{2} = 1 \text{ 的解是 } x=3;$$

$$\frac{x}{8} + \frac{x-3}{2} = 1 \text{ 的解是 } x=4; \dots$$

根据观察得到的规律, 写出其中解是 $x=2020$ 的方程: _____.

26. 现定义运算 “ $*$ ”, 对于任意有理数 a, b , 满足 $a*b = \begin{cases} 2a-b & (a \geq b) \\ a-2b & (a < b) \end{cases}$. 如 $5*3 = 2 \times 5 - 3 = 7$, $\frac{1}{2}*1 =$

$$\frac{1}{2} - 2 \times 1 = -\frac{3}{2}.$$

(1) 计算: $(2*3) - (4*3)$.

(2) 若 $x*3=5$, 求有理数 x 的值.

27. 一般情况下 $\frac{m}{3} - \frac{n}{2} = \frac{m-n}{3-2}$ 不成立, 但有些数可以使得它成立, 例如: $m=n=0$ 时, 我们称使得 $\frac{m}{3} - \frac{n}{2} =$

$\frac{m-n}{3-2}$ 成立的一对数 m, n 为 “相伴数对”, 记为 (m, n)

(1) 若 $(m, 1)$ 是 “相伴数对”, 则 $m =$ _____;

(2) 若 (m, n) 是 “相伴数对”, 请写出 m, n 满足的关系式 _____;

(3) 在 (2) 的条件下, 求代数式 $\frac{5}{4}n+m - \frac{1}{2}(6+12m-5n)$ 的值.

28. 关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解的情况如下：当 $a \neq 0$ 时，方程有唯一解 $x = -\frac{b}{a}$ ；当 $a=0, b \neq 0$ 时，方程无解；当 $a=0, b=0$ 时，方程有无数解. 若关于 x 的方程 $mx+\frac{2}{3}=\frac{n}{3}-x$ 有无数解，则 $m+n$ 的值为 () A. -1 B. 1 C. 2 D. 以上答案都不对

29. 已知 a, b 为定值，关于 x 的方程 $\frac{kx+a}{3}=1-\frac{2x+bk}{6}$ ，无论 k 为何值，它的解总是 1，则 $a+b=$ _____.

六. 一元一次方程的应用

30. 某车间有 25 名工人，每人每天可生产 100 个螺钉或 150 个螺母，若 1 个螺钉需要配两个螺母，现安排 x 名工人生产螺钉，则下列方程正确的是 ()

- A. $2 \times 100(25-x) = 150x$ B. $100(25-x) = 2 \times 150x$
C. $2 \times 100x = 150(25-x)$ D. $100x = 2 \times 150(25-x)$

31. 整理一批图书，由一个人做要 $40h$ 完成，现计划由一部分人先做 $4h$ ，然后增加 2 人与他们一起做 $8h$ ，完成这项工作，假设这些人的工作效率相同，具体应先安排多少人工作？如果设安排 x 人先做 $4h$ ，下列四个方程中正确的是 ()

- A. $\frac{4(x+2)}{40} + \frac{8x}{40} = 1$ B. $\frac{4x}{40} + \frac{8(x+2)}{40} = 1$
C. $\frac{4x}{40} + \frac{8(x-2)}{40} = 1$ D. $\frac{4x}{40} + \frac{8x}{40} = 1$

32. “中国竹乡”福建省安吉县有丰富的毛竹资源，某企业已收购毛竹 $52.5t$ ，根据市场信息，将毛竹直接销售，每吨可获利 100 元；对毛竹进行粗加工，每天可加工 $8t$ ，每吨可获利 1000 元；对毛竹进行精加工，每天可加工 $0.5t$ ，每吨可获利 5000 元，由于受条件限制，在同一天只能采用一种加工方式，并且必须在一个月（按 30 天计算）内将这批毛竹全部销售完，为此研究了两种方案：

方案一：30 天内对毛竹全部进行粗加工后销售，则可获利 _____元；

方案二：3 天都进行精加工，未来得及加工的毛竹，在市场上直接销售，则一共可获利 _____元；

问：是否存在第三种方案，对部分毛竹进行精加工，其余毛竹进行粗加工，且恰好在 30 天内完成？若存在，求出销售后所获得的利润；若不存在，请说明理由.

33. 为发展足球运动，某区决定购买一批足球运动装备. 市场调查发现：甲、乙两商场以同样的价格出售同种品牌的足球服和足球，已知每套足球服比每个足球多 40 元，三套足球服与四个足球的费用相等. 经洽谈，甲商场优惠方案是：每购买十套足球服，送一个足球；乙商场优惠方案是：若购买足球服超过 50 套，则不超过 50 套的部分不打折，超过 50 套的部分与足球一起打八折.

(1) 求每套足球服和每个足球的价格是多少元；

(2) 若购买 m 套足球服 (m 为 10 的整数倍，且 $m > 50$) 和 n 个足球 (n 为大于 $\frac{m}{10}$ 的整数)，请用含 m 和 n 的式子分别表示出到甲商场和乙商场购买装备所需花的费用；

(3) 在 (2) 的条件下，若需购买 70 套足球服，30 个足球，假如你是本次购买任务的负责人，你认为到甲、乙哪家商场购买比较合算？

34. 我们知道数轴上两点间的距离等于这两点所表示数的差的绝对值，例如：点 A , B 在数轴上分别对应的数为 a , b ，则 A , B 两点间的距离表示为 $AB = |a - b|$.

根据以上知识解决问题：

(1) 如图 1 所示，在数轴上点 E , F 表示的数分别为 -5, 3，则 $EF =$ _____；

(2) ①如图 2 所示，点 P 表示数 x ，点 M 表示数 -2，点 N 表示数 $2x+14$ ，且 $MN = 2PM$ ，求：点 P 和点 N 表示的数.

②在上述①的条件下，数轴上是否存在点 Q ，使 $PQ + QN = \frac{5}{2}QM$ ？若存在，请直接写出点 Q 所表示的数；若不存在，请说明理由.

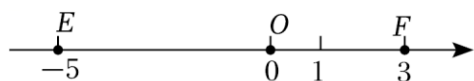


图1

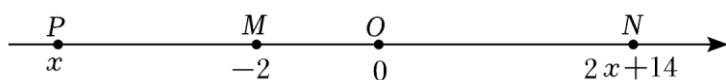


图2