■矩阵傅立叶光学实现紧凑型全斯托克斯偏振相机｜Matrix Fourier optics enables a compact full-Stokes polarization camera

◆摘要与引入｜Abstract and Introduction

△摘要：

最近发展出可以**使光的偏振在空间上变化**的光学元件

本文提出傅里叶光学的拓展：**矩阵傅里叶光学**，用于理解这些设备，并指导设计能够实施**任意偏振并行分析**的**超构表面光栅**

基于此设计一种**紧凑的全斯托克斯偏振相机**，仅用单镜头，不需要传统偏振元件、移动组件、特殊图案像素，能够应用于偏振成像相关的机器学习、遥感等领域

△背景：

▫偏振：(Polarization)

偏振指光的电场矢量穿过的路径

→传统：是光的基础属性，偏振及其测量在科学和成像技术领域引起极大兴趣

→现代：随着近年来在全息介质、微纳制造及其他领域的进步，使得定制的、偏振特性空间变化的、光频率下的、亚波长尺度的器件成为可能

在这些设备上，光的偏振态可以实现**点对点可控变化**

▫相关工作：

衍射光学[1,2]、偏振全息[3-6]、纳米光学[7,8]、液晶光学[9,10]

这些器件依赖入射光的偏振，产生不同的行为

想法：如何设计一种器件，能**并行地实现许多偏振相关的功能**

▫本文工作：

提出矩阵傅立叶光学，对此领域的工作做一个概括，并指导相关器件的设计

特别应用于**超构表面衍射光栅**的设计——能**并行分析几个任意指定的偏振态**

◆矩阵傅立叶光学｜Matrix Fourier Optics

提出一种分析偏振依赖衍射光栅的一般方法

△傅立叶光学｜Fourier Optics：

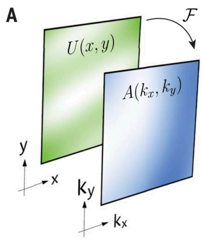
一个平面上的电磁场（光场）分布 $U(x,y)$ 可以被视为由许多不同角度入射的平面波干涉得到：

$$U(x,y)=\iint_{-\infty}^{+\infty}A(k_x,k_y)e^{-i(k_x x+k_y y)}d\frac{k_x}{2\pi}d\frac{k_y}{2\pi}$$

即光场的平面波展开(plane-wave expansion)或角谱(angular spectrum)

→这些独立的平面波以其平面内波矢标记 (k_x,k_y)，实际上也是按平面波方向标记

→其权重（复振幅）由逆傅立叶变换给出：



$$A(k_x,k_y)=\iint_{-\infty}^{+\infty}U(x,y)e^{i(k_x x+k_y y)}dxdy$$

每个平面波能独立的继续向前传播，形成空间中的光场：

$$U(x,y,z)=\iint_{-\infty}^{+\infty}A(k_x,k_y)e^{-i(k_x x+k_y y)}e^{-ik_z z}d\frac{k_x}{2\pi}d\frac{k_y}{2\pi}$$

这样的理论可以用于分析光与一些简单的光学元件的相互作用：

对具有透过率函数 $t(x,y)$ 的平面障碍物（如杨氏双缝、衍射光栅）

考虑入射光场 E_0（可能空间变化），则被平面障碍物作用后的光场分布为: $t(x,y)E_0$ 即: $U(x,y)$

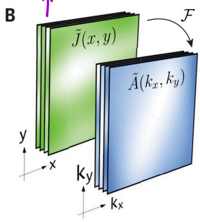
这样的审视光的传播、与元件相互作用的视角即傅立叶光学[11]，是很多现代光学技术的基础
→如成像、全息

但是注意：**这是标量光学理论，不包含光的偏振态——要求偏振性质不能随空间变化**

△**矩阵傅立叶光学｜Matrix Fourier Optics**：

障碍物透过率考虑为矩阵值函数 $\tilde{J}(x,y)$ → 2×2，即**局部琼斯矩阵(local Jones matrix)**，能够局部调制光偏振的**琼斯矢量(Jones vector)** $|E_0\rangle$ → 2×1

4层指矩阵4分量



则出射光场为：$\tilde{J}(x,y)|E_0\rangle$

→傅立叶展开：

（矢量的傅立叶变换）

$$\begin{cases} \tilde{J}(x,y)|E_0\rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} |A(k_x,k_y)\rangle e^{-i(k_x x+k_y y)} dxdy \\ |A(k_x,k_y)\rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}(x,y)|E_0\rangle e^{i(k_x x+k_y y)} d\frac{k_x}{2\pi} d\frac{k_y}{2\pi} \end{cases}$$

→对**均匀场**、**正入射**情况，琼斯矢量空间上均匀，可以提出：

（矩阵的傅立叶变换）

$$\begin{cases} \tilde{J}(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k_x,k_y) e^{-i(k_x x+k_y y)} dxdy \\ \tilde{A}(k_x,k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}(x,y) e^{i(k_x x+k_y y)} d\frac{k_x}{2\pi} d\frac{k_y}{2\pi} \end{cases}$$

这实际上是琼斯矩阵的四个分量分别做傅立叶变换

注意：这里涉及自由度从2变成4的问题。实际上，满足矩阵运算后得到的矢量满足矢量的傅立叶变换即可，这里相当于取更强的要求：矩阵的每个分量都要满足傅立叶变换关系

→物理意义：

不仅仅是传统傅立叶光学中的振幅和相位依赖，每个给定的方向 (k_x,k_y) 将与一个影响偏振行为的琼斯矩阵算符联系起来 $\tilde{A}(k_x,k_y)$

——由此，对光场的分析将解耦为对各个平面波分量的分析

本工作：特别关注**偏振衍射光栅**，其透过率矩阵 $\tilde{J}(x,y)$ 为周期性函数

→角谱 $\tilde{A}(k_x,k_y)$ 离散化，形成衍射阶：

$$\begin{cases} \tilde{J}(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k_x,k_y) e^{-i(k_x x+k_y y)} dxdy \\ \tilde{A}(k_x,k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}(x,y) e^{i(k_x x+k_y y)} d\frac{k_x}{2\pi} d\frac{k_y}{2\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{J}(x,y) = \sum_{\vec{k}} \tilde{J}_{\vec{k}} e^{i(k_x x+k_y y)} \\ \tilde{J}_{\vec{k}} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}(x,y) e^{-i(k_x x+k_y y)} d\frac{k_x}{2\pi} d\frac{k_y}{2\pi} \end{cases}$$

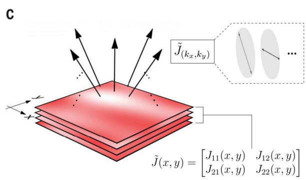
这里正负号弄反了

→一种应用：设计多功能偏振器件

考虑一组想要同时实现的功能，需能被琼斯矩阵描述（偏振片、波片、光学活性元件……）

将他们 $\{\tilde{J}_{\vec{k}}\}$ 安排到不同的衍射阶，这些衍射阶属于集合 $\{\ell\}$，即：

$$\tilde{J}(x,y) = \sum_{\vec{k}\in\{\ell\}} \tilde{J}_{\vec{k}} e^{i(k_x x+k_y y)}$$



表明一个元件并行地实现了这些偏振相关的功能

称为**矩阵衍射光栅(matrix diffraction grating)**

涉及相关思想工作：

衍射光学[13,14]、偏振光线追迹[15,16]、超构表面

→在超构表面领域，通常设计思路：

①当给定偏振入射时，输出偏振态在整个元件上是均匀的，并得到标量相位函数

②当正交偏振入射时，输出偏振态再次均匀，并得到另一个标量相位函数

通过这种方式，可以实现对线、圆和任意椭圆偏振基[7,8,17]的具有不同功能的光学元件

特别是用于产生圆偏振光的标量相位函数的几何相位的方法[2,9,18-21]

→其他工作中，偏振随空间变化，但假设了特定的入射偏振态[22,23]

以上均为矩阵方法的子类

◆酉偏振光栅的偏振并行分析｜Parallel Polarization Analysis by Unitary Polarization Gratings

前文指出的理论是一般性的，但没有给出具体的函数形式，即$\{\tilde{J}_k\}$或$\tilde{J}(x,y)$，以及该如何实现

△酉偏振光栅的设计：

研究光栅各衍射阶的效果为偏振分析器的情况

→这并不是最基础的偏振器件，但是是和实际应用联系最紧密的：

分析偏振、将光投影到不同的偏振态（旋光等）、测量偏振[24]……

作为偏振分析器，每一阶应该满足：$\tilde{J}_k = a_k|p_k\rangle\langle q_k|$　严格说，这里的k都应为$\vec{k}$. 此处向后从简.

理解：实际上是广义马吕斯定律的表述

入射角度：

①入射$|q_k\rangle$，透过率达到最大值

②正交入射$|q_k^\perp\rangle$，满足$\langle q_k^\perp|q_k\rangle=0$，透过率为0

→Jones向量都是归一化的

③一般的入射偏振，透过率为与$\langle q_k|$的内积，实数情况下（线偏振）为余弦值

出射角度：

复标量

为偏振态$|p_k\rangle$，其强度取决于入射偏振，具体为权重因子a_k乘以入射偏振与$\langle q_k|$的内积

→对传统的偏振器件，通常有$|p_k\rangle=\langle q_k|$

确定$\{\tilde{J}_k\}$后，$\tilde{J}(x,y)$便由傅立叶级数确定

推荐的实现方法是使用超构表面[25,26]，亚波长间隔的纳米光子相移器——由具有双折射能力的介电柱组成[7,8]，其局部琼斯矩阵可以良好地用线性双折射波片表示[8]：

$$\tilde{J}(x,y) = \underbrace{R(\theta(x,y))}_{2\times2\text{旋转矩阵}}\begin{pmatrix} e^{i\phi_x(x,y)} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_y(x,y)} \end{pmatrix}R(-\theta(x,y))$$

超表面可以容易地**采样**实现**矩阵光栅**：

ϕ_x、ϕ_y和θ可以通过改变电介质柱的尺寸和角度来连续调整，且易于光刻制造

局部琼斯矩阵的性质：

①酉矩阵：在所有的(x,y)处有：$\tilde{J}^\dagger\tilde{J}=I$

②在所有的(x,y)处，其特征向量为线偏振光

证：记$\begin{pmatrix} e^{i\phi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_y} \end{pmatrix}=M$，易证其特征值为$e^{i\phi_x}$、$e^{i\phi_y}$，对应特征向量$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，有：$M\eta_i=\lambda_i\eta_i$

$$\Rightarrow MR^{-1}R\eta_i=\lambda_i R^{-1}R\eta_i \Rightarrow (RMR^{-1})(R\eta_i)=(R\lambda_i R^{-1})(R\eta_i) \Rightarrow J(R\eta_i)=\lambda_i(R\eta_i)$$

故$\tilde{J}$特征值仍为λ_i，特征向量变为$R\eta_i$（转了θ角），仍为线偏振.

我们目前做了两种选择：

波矢空间，也就是衍射阶，想要实现偏振分析器

坐标空间，使用线性双折射的超构表面离散采样实现

问题：对一般选取的衍射阶集合$\{k\}$，具有$\tilde{J}_k=a_k|p_k\rangle\langle q_k|$，其导致的$\tilde{J}(x,y)=\sum_{k\in\{k\}}\tilde{J}_k e^{i(k_x x+k_y y)}$能满足上述的线性双折射的形式吗?

这个问题和之前对纯相位光栅的研究有关，在这里拓展到矩阵情况[27,28]

①坐标空间的**线性双折射**要求$\tilde{J}_k$ 必须是**对称的**，要求衍射阶具有此形式：$\tilde{J}_k=a_k|q_k^*\rangle\langle q_k|$

琼斯矩阵角度：分析光与出射光的偏振态应当满足共轭关系

庞加莱球角度：两个代表点关于赤道面对称

偏振椭圆角度：椭球保持不变但旋转角度反号

斯托克斯参数角度：描述手性的第三项反号

——这也是对[7,8]的关键结论的概括

②更进一步，要求$\tilde{J}_k$还是酉的

则严格来说只有**n=2**即**2**阶衍射，且两分析光正交时，才能严格实现

△**设计策略与优化｜Design Strategy and Optimization**：

总的想法：允许少量光漏到其他阶，不严格要求只有**n**阶衍射，从而实现处处酉

换句话说：光栅可以作为一个耦合系统，用相邻衍射级的补偿来实现整体的酉

现在的问题变成一个优化问题：

设计一个光栅$\tilde{J}(x,y)$，满足坐标空间的要求；在选择的特定衍射阶$\tilde{J}_k$和分析光$\langle q_k|$后，使得最少的光漏入其他阶

定义以分析光偏振入射后$\vec{k}$阶出射光的光强：$I_q^k=\langle q_k|\tilde{J}_k^\dagger\tilde{J}_k|q_k\rangle$

定义其正交偏振入射后$\vec{k}$阶出射光的光强：$I_{q\perp}^k=\langle q_k^\perp|\tilde{J}_k^\dagger\tilde{J}_k|q_k^\perp\rangle$　　　$\langle q_k^\perp|q_k\rangle=0$

优化目标是使得$\sum_{k\in\{k\}}I_q^k$达到最大值——**高效性**要求

同时每一阶的对比度$\eta=(I_q^k-I_{q\perp}^k)/(I_q^k+I_{q\perp}^k)$应尽可能接近**1**——**理想性**要求

→以上优化可以用梯度下降方法实现，也有使用变分法得到解析解的方法[17,27,28]

以前的很多工作都尝试分离出光的偏振来分析，但是通常采用标量衍射理论，使用闪耀光栅在正交偏振态上施加相反的相位曲线。因此几个单独设计的光栅必须是交错的，或称**空间复用(spatial multiplexing)**、**共享孔径(shared aperture)**[29-32]，或等效地级联[1,33]，从而实现对超过两个偏振态的分析。

这本身就是一个问题：这些配置无法实现少于六个测量值的偏振测量（而四个是所需的最小值），从而影响传感器空间。此外，分析仪的偏振状态不能被严格规定。

交错不同的光栅也会引入不必要的周期性，导致平面外衍射的光损失。

本工作表明，交错是不必要的——所有的函数都可以集成到一个光栅中——而且，能实现交错方法无法实现的功能。如将介绍的四面体光栅——不可能通过简单的交错来实现，因为它的四个偏振态中没有一个与其他任何态正交。

◆数学阐述｜Mathematical Exposition

本节从标量衍射理论出发，详细展现研究思路的数学基础部分

△标量衍射光栅分束｜Beam Splitting by Scalar Diffraction Gratings：

衍射光栅是一种随空间周期性变化的障碍物，能将光分裂为有限数量的衍射级

记衍射光栅的周期性透过率函数为$\tilde{t}(x)$，周期为$d \overset{取为}{=} 2\pi$

单位振幅均匀平面波正入射，波长为λ

则第**k**阶衍射阶的衍射角为：$\theta_k = \arcsin\frac{k\lambda}{d}$，每个衍射级的复标量权重：$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{t}(x)e^{-ikx}dx$

问题：如何设计光栅，使得**入射平面波**后，投射到**特定有限**衍射阶的光有**相等**（或**其他设定**）的振幅？

逆问题：如何由**有限**的光束**组合**成一个**平面波**？

一个平凡的例子：闪耀光栅(blazed grating)，将入射的平面波投射到一个衍射级

傅立叶光学视角下，是一个平移元件

两个同振幅出射衍射级的情况：取第**0**和**1**级衍射 $t(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+e^{ikx})$ →取 $kd=2\pi \Rightarrow k=2\pi$

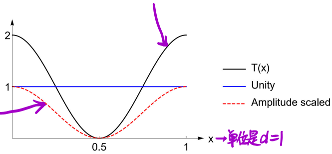
此时将会输出等振幅平面波，但是在输出端，强度并不均匀：$T(x) = t^*(x)t(x) = 1+\cos kx$

能量守恒要求：$\int_0^{d=1}T(x)dx = 1$（得到满足）

→但能量不是局部守恒的，存在重新分配的问题（**>1/<1**）

→如果只存在损耗会怎样？乘以**1/2**的损耗因子$\int_0^{d=1}T(x)dx = \frac{1}{2}$

（这是因为调制局部增益比局部吸收困难很多）



→单位是$d=1$

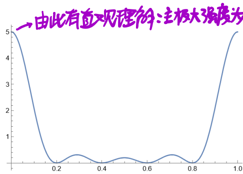
→问题：高阶时(**N**)能量效率极低，只有$\eta = \frac{1}{N}$

例：$N=5$ $\quad t(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{-i2kx}+e^{-ikx}+1+e^{ikx}+e^{i2kx})$ 几何意义直接得

$$T(x) = t^*(x)t(x) = \frac{1}{5}(1+2\cos kx+2\cos 2kx)^2 = \frac{1}{5}(1+2\cos 2\pi x+2\cos 4\pi x)^2$$

有：$\int_0^1 T(x) = 1 \Rightarrow T'(x) = \frac{1}{5}T(x) \Rightarrow \eta = \frac{1}{5} = \frac{1}{N}$

→由此有直观理解：主极大强度为N



△纯相位标量光栅分束｜Beam Splitting by Phase-only Scalar Gratings：

问题：有没有可能在没有局部增益/损耗的情况下，100%效率将光衍射到有限的衍射级?

这意味着光栅是纯相位的：$\tilde{t}(x) = e^{i\phi(x)}$ ——这是衍射光学的重要课题[27,28,53]

可以证明[28,54]，**纯相位光栅只能有1个或无穷多个衍射级**，故不能解决我们的问题

证：(反证)假设衍射级在$k=m$和$k=n$之间，$n>m$，$n-m=N$，有：$e^{i\phi(x)} = \sum_{k=m}^{n}a_k e^{ikx}$

由$e^{-i\phi(x)}e^{i\phi(x)} = 1 = \sum_{k=m}^{n}\sum_{l=m}^{n}a_l^* a_k e^{i(k-l)x}$ 右边不应为x的函数：

$$\begin{cases} a_m^* a_n = 0 \\ a_m^* a_{n-1} + a_{m+1}^* a_n = 0 \\ a_m^* a_{n-2} + a_{m+1}^* a_{n-1} + a_{m+2}^* a_n = 0 \\ \vdots \\ a_m^* a_{m+1} + a_{m+1}^* a_{m+2} + \cdots + a_{n-1}^* a_n = 0 \\ a_m^* a_m + a_{m+1}^* a_{m+1} + \cdots + a_n^* a_n = \sum_{k=m}^{n}|a_k|^2 = 1 \\ \vdots \\ a_n^* a_m = 0 \end{cases}$$

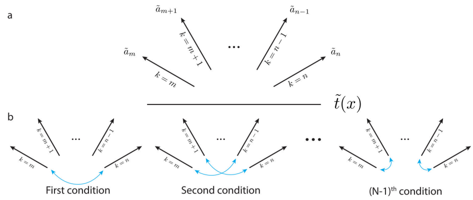
互为共轭，不为独立

⇒约束条件：

$$\begin{cases} a_m^* a_n = 0 \\ a_m^* a_{n-1} + a_{m+1}^* a_n = 0 \\ a_m^* a_{n-2} + a_{m+1}^* a_{n-1} + a_{m+2}^* a_n = 0 \\ \vdots \\ a_m^* a_{m+1} + a_{m+1}^* a_{m+2} + \cdots + a_{n-1}^* a_n = 0 \leftarrow \text{最近邻} \\ a_m^* a_m + a_{m+1}^* a_{m+1} + \cdots + a_n^* a_n = \sum_{k=m}^{n} |a_k|^2 = 1 \end{cases}$$

↳能量守恒/帕塞瓦尔定理

共$N+1$个约束方程. = 阶数



☆其意义为各阶之间的耦合要求

第一式要求二者其一为0，不妨取$|a_m|=0$ ⇒第二式要求$|a_{m+1}|=0$ ⇒ ⋯ ⇒ $|a_{n-1}|=0$
则只有$|a_n| \neq 0$

对无穷衍射级情况，显然不受此约束，可以实现

☆这里的证明基于衍射级连续分布！但对有限、不连续情况，也可类似排序证明.

可能出现"简并"现象，即某一e^{iDx}贡献来自多项
但从视缺级加的角度，就可归入此类情况了

△纯相位光栅的优化｜**Optimization of Phase-only Gratings**：

以上的证明表明效率不可能达到100%，但是不代表不可以比1/N更好

对纯相位光栅，我们允许尽可能少的光漏到其他衍射级，能够做到尽可能优化

此问题的特殊情况三阶衍射在[53]中被解决，而一般证明在[27,28]

优化问题：给定一组衍射级$\{l\}$，找到以d为周期的周期函数$\phi(x)$，使得效率函数达到最大：

$$\eta(\phi(x)) = \frac{\sum_{k\in\{l\}} |a_k|^2}{\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |a_k|^2}$$

$$a_k = \frac{1}{2d}\int_{-d}^{d} e^{i\phi(x)} e^{-ikx} dx$$

限制条件是振幅因子a_k及由此导致的各级衍射功率，其相对比率被给定

采用[28]的记法，取$|a_k| = c\gamma_k$，其中c为常数、$\{\gamma_k\}$为给定的权重