

复赛专题上

微积分进阶	1
单元函数和微分方程	1
单元函数	1
微分方程及其应用	4
多元函数、重积分和高斯积分	9
多元函数问题	9
重积分	15
高斯积分	17
曲线曲面积分和矢量分析	19
曲线曲面积分	19
矢量分析	22
复数和线性代数	27
复数	27
线性代数	30
运动与静力进阶	33
微元法进阶	33
平动系与转动系	33
微元法的本质	35
各种坐标系与导数运用	35
运动的关联	39
矢量的空间坐标表达及运用	39
关联与约束	40
相图的应用	45
相图的含义	45
静力学临界问题分析	46
运动相关问题	47
与能量有关的相图	48
运动知识补充	50
三维运动与理论力学初步	51

立体运动学	51
自由度与能量分析法	53
虚功原理.	55
自由度、能量和静力学进阶	57
自由度、能量解法	57
能量与量子力学	58
图解静力学.	60
动力学综合	64
能量微分方程和条件约束	64
质心动能定理	64
约束.	64
变质量问题	67
能量微分和多自由度.	70
能量微分解法	70
惯性力.	72
存在约束的多自由度问题	72
振动和简正模	74
振动.	74
简正模问题	75
简正模/振动拉式方程法	77
复杂简正模和自由两体	79
复杂简正模：一维无线振子链.	79
自由两体问题.	79
转动惯量与刚体进动.	81
转动惯量的计算	81
刚体进动.	83
刚体与连续体动力学.	85
刚体碰撞.	85
刚体动力学综合	86
连续体问题	87
瞬时轴转动定理	88
模量	89

杨氏模量	89
粘滞系数	89
剪切模量	90
万有引力与天体运动	91
椭圆运动	91
天体进动	92
万有引力	93
静电静磁进阶	94
场的分布和电偶极子	94
电荷、电场、电势	94
电场线形状	95
电偶极子	95
导体问题	96
电像法与电场能量	98
电像法	98
静电能量问题	100
磁学体系与通电线圈问题	102
磁学理论体系	102
通电线圈问题	103
带电粒子在磁场中的运动	106
洛伦兹力与一般运动形成	106
对称性与正则守恒	106
相对论下的带电粒子运动	108
电路进阶	109
线性系统的处理	109
电介质问题	109
线性统一处理	112
电路中的线性	113
分离对称性	115
对称性化简	115
恢复对称性	116
化简：应用自相似	119

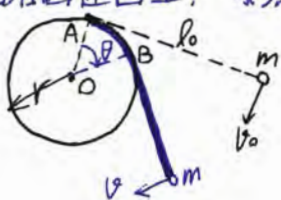
自相似性与多端接口 (不含源)	119
有源线性网络处理	121
非线性电路	123
暂态电路	123
复数法解交流电	123
电容器充放电问题	125
三相交流电	126
电磁感应进阶	127
动生电动势与感生电动势的统一理解	127
电磁感应的统一性	127
感应电动势的计算	127
磁矢势与自感互感问题	130
磁矢势	130
自感互感问题	133
电磁动力学	136
杆为U型杆	136
电磁场相对论变换	138
四维矢量	138
电磁场变换的推导	138
热学进阶	140
新热力学模型	140
输运过程	140
热传导	140
热辐射	142
熵、循环和相变	144
熵	144
循环过程与热机 (制冷机)	146
相变	147
光子气体	148
分子统计力学	149
玻尔兹曼分布	149
麦克斯韦分布	150

热学综合	155
理想气体综合问题	155
热力学第一定律	157
光学进阶	158
几何光学	158
透镜几何作图	158
折射	159
近轴成像	159
非近轴成像	159
反射	160
全反射	160
虹和霓	161
波动光学基础	162
波动基础	162
干涉问题	162
复振幅与光波的数学计算	166
复振幅	166
能流密度	166
复杂干涉问题	166
衍射	167
偏振、复杂光学问题	170
斯托克斯倒逆关系	170
光栅	170
偏振	171
菲涅尔公式	172
菲涅尔衍射	173
反射率和透射率	173
近代物理进阶	174
狭义相对论时空观	174
正三观	174
原理与变换	174
洛伦兹变换	176

坐标变换.177
洛伦兹变换下的物理量.	180
变换不变量：四维标量180
满足洛伦兹变换：四维矢量.180
能动量、四维动力学.	184
能动量四维矢量184
相对论碰撞问题185
原子物理.	189
量子化.189
原子与原子核190

991005315843版权所有

☆例圆柱固定，求绕上时间。

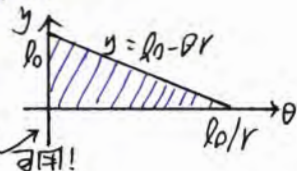


解：拉力不做功： $v_{\text{rel}} = v_0$

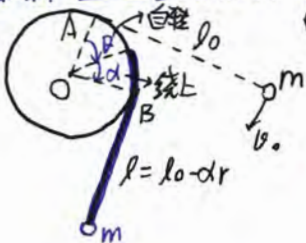
$$\text{有：} \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{l_0 - \theta r}$$

$$\rightarrow (l_0 - \theta r) d\theta = v_0 dt$$

$$\Rightarrow T = \frac{r^2}{2v_0 r}$$



☆例不固定圆桶(m)，定轴光滑转动，求绕上时间。



解：在桶转动系中：

$$v' = l \cdot \dot{\alpha} \quad (\text{切向})$$

$$\Rightarrow \text{地系中：}$$

$$v_c = l(\dot{\alpha} + \dot{\theta}); v_n = r\dot{\theta}$$

$$\star \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{l})$$

这是可以分开做的！

$$\text{有：} \Delta L = 0; \Delta E = 0$$

$$\text{则 } m l_0 v_0 = (m r^2 \dot{\theta}) + (m l^2 (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) + m r^2 \dot{\theta})$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2$$

同时有： $l = l_0 - \alpha r$; $\dot{l} = -\dot{\alpha} r$

有图相：表示出仅有 α 的方程。

$$\text{由①：} \dot{\theta} = \frac{l_0 v_0 - l^2 \dot{\alpha}}{2r^2 + l^2} \rightarrow \dot{\theta} + \dot{\alpha} = \frac{l_0 v_0 + 2r^2 \dot{\alpha}}{2r^2 + l^2}$$

$$\text{代 入 ②：} v_0^2 = r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + l^2 (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2$$

$$\rightarrow (2r^2 + l^2)^2 v_0^2 = 2r^2 (l_0 v_0 - l^2 \dot{\alpha})^2 + l^2 (l_0 v_0 + 2r^2 \dot{\alpha})^2$$

$$\rightarrow (2r^2 + l^2)^2 v_0^2 = 2r^2 l_0^2 v_0^2 - 4l_0 v_0 l^2 \dot{\alpha} + 2r^2 l^4 \dot{\alpha}^2 + l^2 l_0^2 v_0^2 + 4l_0 v_0 l^2 \dot{\alpha} + 4r^2 l^2 \dot{\alpha}^2$$

$$\rightarrow (2r^2 + l^2)^2 v_0^2 = (2r^2 + l^2) l_0^2 v_0^2 + (2r^2 + l^2) 2r^2 l^2 \dot{\alpha}^2$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2r^2 + l^2 - l_0^2}{2r^2 l^2}} v_0 = \sqrt{\frac{2r^2 - 2l_0 r \alpha + \alpha^2 r^2}{2r^2 (l_0 - \alpha r)^2}} v_0 = f(\alpha)$$

$$\rightarrow \frac{d\alpha}{f(\alpha)} = dt \Rightarrow T = \int_0^{l_0/r} \frac{d\alpha}{f(\alpha)}$$

一般微分方程：

□ 线性：出现的 y, y', y'', \dots 为一次或零次。

□ 常系数：出现的 y, y', y'', \dots 系数为常数。

□ 齐次： $y^{(n)} + y^{(n-1)} + \dots + y' + y = k(x)$, $k(x) \equiv 0$ 则为齐次。

① 线性、常系数、齐次微分方程：

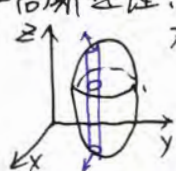
$$1^\circ \text{ 一阶：} y' + ay = 0$$

$$\text{有：} \frac{dy}{y} = -a dx$$

$$\text{猜：} y = A \cdot e^{\pi x} \quad \text{代 入：}$$

$$\pi \cdot A e^{\pi x} + a A e^{\pi x} = 0 \Rightarrow \pi = -a.$$

高斯定理:

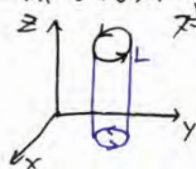


对于: $\oint \vec{A} \cdot d\vec{S}$
 有: $\oint A_z dS_z = \int [A_z(x, y, z_1) - A_z(x, y, z_2)] dx dy$
 又: $\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \Big|_{xy} = A_z \Big|_{z_1}^{z_2}$

\Rightarrow 有: $\oint A_z dS_z = \iiint \frac{\partial A_z}{\partial z} dx dy dz$, 其余两次同理可证.

即: $\iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint P dy dz + Q dx dz + R dx dy$

斯托克斯定理:



对于: $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r}$
 有: $\oint_L A_x(x, y, z(x, y)) dx = - \iint \left(\frac{\partial A_x(x, y, z(x, y))}{\partial y} \right) dy dz$
 $= \iint \left(- \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy dz$
 又: $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot dS_z = -dS_y$

\Rightarrow 有: $\oint_L A_x dx = \iint \left(- \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dy dz + \iint \frac{\partial A_x}{\partial z} dx dz$, 其余两次同理可证.

即: $\iint \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$
 $= \oint_L P dx + Q dy + R dz$

可记为:

$$\iint \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_L P dx + Q dy + R dz$$

矢量分析

· 散度:

对高斯定理取极限:

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

若为正: 发源; 若为负: 汇聚.

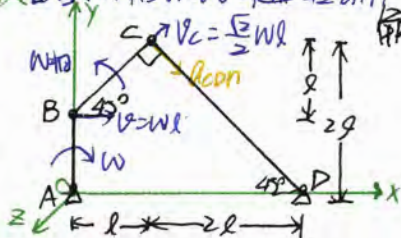
★ 例 $\vec{E} = (x, y, z, x)$ 求 $P(x, y, z)$

★ 这不一定是静电场!

解: $P = \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \epsilon_0 (1 + 1 + 1) = 3\epsilon_0$

分析: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \cdot \vec{E} \cdot dV = \frac{Q_{\text{总}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint P dV \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0}$

例1 杆AB以 ω 匀速转动，求此刻C点的速度和加速度。



解: (1) $v_B = \omega l$, $v_C \perp CD$

有: $v_B \cos 45^\circ = v_C$

$\Rightarrow v_C = \frac{\omega}{2} l$ 垂直于CD向右。

(2) 解一 [关联方法]

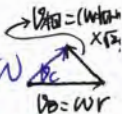
1° 以D为参照系:

$$a_{CDn} = v_C^2 / 2l = \frac{\omega^2}{8} l$$

2° 计算沿CB方向的加速度。

□ 处理一: 平动系 有: $(\omega_{\text{相}} - \omega) \times \sqrt{2}l = \frac{\omega}{2} l \rightarrow \omega_{\text{相}} = \frac{3}{2}\omega$

$$\therefore a_{CBn} = \frac{(\omega_{\text{相}} - \omega)^2 \times \sqrt{2}l}{C \text{ 在 } B \text{ 系中加速度}} + \omega^2 l \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4} \sqrt{2} \omega^2 l$$



□ 处理二: 转动系 以A为原点, AD为x轴, AB为y轴建立坐标系

设 $\omega_{\text{相}} = \omega_{\text{相}} \hat{k}$ 有: $\vec{\omega} = -\omega \hat{k}$, $\vec{AC} = (1, 2, 0)$, $\vec{BC} = (1, 1, 0)$

$$\text{则 } \vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{AC} + \omega_{\text{相}} \times \vec{BC}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_{\text{相}} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\omega \hat{j} + 2\omega \hat{i} + \omega_{\text{相}} \hat{j} - \omega_{\text{相}} \hat{i}$$

$$= (2\omega - \omega_{\text{相}}) \hat{i} + (\omega_{\text{相}} - \omega) \hat{j}$$

$$\text{满足: } 2\omega - \omega_{\text{相}} = \omega_{\text{相}} - \omega \Rightarrow \omega_{\text{相}} = \frac{3}{2}\omega$$

$$\therefore \vec{\omega}_{\text{相}} \times \vec{BC} = \vec{\omega}_{\text{相}} \times \vec{BC} = \frac{3}{2}\omega \hat{i} + \frac{3}{2}\omega \hat{j}$$

$$\vec{a}_C - \vec{\beta} \times \vec{BC} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AC}) + 2\vec{\omega} \times (\vec{\omega}_{\text{相}} \times \vec{BC}) + \vec{\omega}_{\text{相}} \times (\vec{\omega}_{\text{相}} \times \vec{BC})$$

$$= \vec{\omega} \times (2\omega \hat{i} - \omega \hat{j}) + 2\vec{\omega} \times (\frac{3}{2}\omega \hat{i} + \frac{3}{2}\omega \hat{j}) + \vec{\omega}_{\text{相}} \times (\frac{3}{2}\omega \hat{i} + \frac{3}{2}\omega \hat{j})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\omega \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

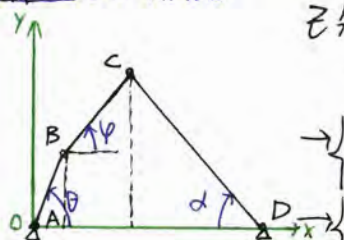
$$= -2\omega^2 \hat{j} - \omega^2 \hat{i} + 3\omega^2 \hat{i} + 3\omega^2 \hat{j} - \frac{9}{4}\omega^2 \hat{i} - \frac{9}{4}\omega^2 \hat{j}$$

$$= -\frac{1}{4}\omega^2 \hat{j} - \frac{1}{4}\omega^2 \hat{i}$$

$$\therefore a_{CBn} = \frac{3}{4} \sqrt{2} \omega^2 l$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{a_{CBn}^2 + a_{CDn}^2} = \frac{\sqrt{24}}{8} \omega^2 l$$

解二 [求导方法]



已知: $\dot{\theta} = -\omega$, $\ddot{\theta} = 0$, $\theta = 90^\circ$, $\varphi = 45^\circ$ (单位 l)

$$\begin{cases} x_C = \cos\theta + \sqrt{2}\cos\varphi \\ y_C = \sin\theta + \sqrt{2}\sin\varphi \end{cases}$$

$$\dot{x}_C = -\sin\theta \cdot \dot{\theta} - \sqrt{2}\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\dot{y}_C = \cos\theta \cdot \dot{\theta} + \sqrt{2}\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\ddot{x}_C = -\cos\theta \cdot \ddot{\theta} - \sin\theta \cdot \ddot{\theta} - \sqrt{2}\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} - \sqrt{2}\sin\varphi \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\ddot{y}_C = -\sin\theta \cdot \ddot{\theta} + \cos\theta \cdot \ddot{\theta} - \sqrt{2}\sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} + \sqrt{2}\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi}$$

△自由度、能量解法:

利用一个或多个自由度描述能量

→对空间求导: 求解静力学平衡问题

→对时间求导: 求解微小扰动问题

☆[例] 图示是定轴转动圆筒内的圆柱, 求:

(1) 大筒固定时小柱作微小振动的周期 T_1 .

(2) 大筒不固定时的周期 T_2 .



解: (1) 选取自由度 θ

有: $E_k = \frac{1}{2} m(R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 (\dot{\theta} - \dot{\phi})^2$ 角位移的叠加性

其中相对转角 α 满足 $d\alpha = R d\theta \rightarrow \alpha = R\theta$

故: $E_k = \frac{1}{2} m(R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 (R-1)^2 \dot{\theta}^2$

又: $E_p = -mg(R-r)(\cos\theta - 1) \approx \frac{1}{2} mg(R-r)\theta^2$

$$\Rightarrow T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2}m(R-r)^2}{mg(R-r)}} = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

选取自由度 x

有: $E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 (\frac{R}{r} \frac{\dot{x}}{R} - \frac{\dot{x}}{R})^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m \dot{x}^2$

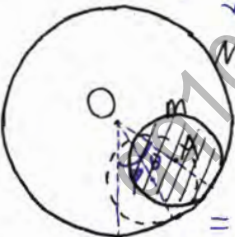
$E_p = mgx$

其中上升高度 x 满足: $d^2 - (d-x)^2 = r^2 - r^2 \rightarrow x = \frac{r^2}{2d}$

故: $E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m \dot{x}^2$

$E_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m \frac{r^2}{R} x$

$$\Rightarrow T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2}m}{\frac{3}{2}m \frac{r^2}{R}}} = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$



(2) 选取自由度: θ (小柱), ϕ (大筒):

有: $E_k = \frac{1}{2} m(R-r)^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} MR^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 (\frac{R}{r} \dot{\theta} - \dot{\phi})^2$

$E_p = mg(R-r)(1 - \cos(\theta + \phi))$

拉氏量: $L = T - V$

文角动量不守恒!

$$= \frac{1}{2} m(R-r)^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} MR^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m r^2 (\frac{R}{r} \dot{\theta} - \dot{\phi})^2 - \frac{1}{2} mg(R-r)(\theta + \phi)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m(R-r)^2 (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + \frac{1}{2} m r^2 (\ddot{\phi} - \frac{R}{r} \ddot{\theta}) \frac{r}{R} = -mg(R-r)(\theta + \phi) \\ MR^2 \ddot{\phi} + m(R-r)^2 (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + \frac{1}{2} m r^2 (\ddot{\phi} - \frac{R}{r} \ddot{\theta}) = -mg(R-r)(\theta + \phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} m(R-r)^2 \ddot{\theta} + [MR^2 - \frac{5}{2} mRr + \frac{3}{2} m r^2] \ddot{\phi} = -mg(R-r)(\theta + \phi) \\ [mR^2 - \frac{5}{2} mRr + \frac{3}{2} m r^2] \ddot{\theta} + [MR^2 + mR^2 - 2mRr + \frac{3}{2} m r^2] \ddot{\phi} = -mg(R-r)(\theta + \phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \ddot{\theta} + B \ddot{\phi} = C\theta + C\phi \\ B \ddot{\theta} + D \ddot{\phi} = C\theta + C\phi \end{cases} \Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{A-B}{D-B} \ddot{\theta}; \phi = \frac{A-B}{D-B} \theta$$

$$\Rightarrow (A(D-B) + B(A-B)) \ddot{\theta} = C(D-B + A-B) \theta$$

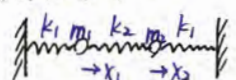
其中: $D-B = MR^2 + \frac{1}{2} mRr$, $A-B = \frac{1}{2} mR^2 - \frac{1}{2} mRr = \frac{1}{2} mR(R-r)$

$$\text{代几有: } \ddot{\theta} + \frac{2M+m}{3M+m} \cdot \frac{g}{R-r} \theta = 0 \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{3M+m}{2M+m} \cdot \frac{R-r}{g}}$$

复杂简正模和自由两体(4)

△复杂简正模：一维无限振子链：

·有限振子：

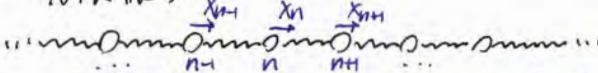


$$\left\{ \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \\ E_p &= \frac{1}{2} k_1 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2$$

有： $\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \Rightarrow$ 代入求解。

·无限振子：



原长 a 且各平衡位。k, m.

$$\left\{ \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 \\ E_p &= \frac{1}{2} k (x_{n-1} - x_n)^2 \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} mn &= m \\ kn &= k \end{aligned} \right. \quad \text{有 } \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial x_n} \Rightarrow m \ddot{x}_n = k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)$$

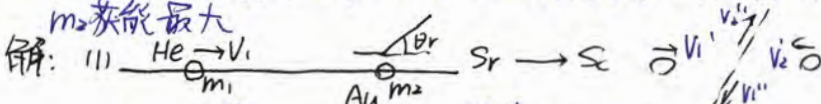
★这也可用牛顿定律直接写出！

→已知对应简谐波：设 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ $\therefore \omega_0^2 (2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) + \ddot{x}_n = 0$ 设 $x_n = \tilde{A}_n e^{i\omega t}$ 有： $\omega_0^2 (2\tilde{A}_n e^{i\omega t} - \tilde{A}_{n+1} e^{i\omega t} - \tilde{A}_{n-1} e^{i\omega t}) - \omega^2 \tilde{A}_n e^{i\omega t} = 0$ $\Rightarrow \omega_0^2 [2\tilde{A}_n - \tilde{A}_{n+1} - \tilde{A}_{n-1}] - \omega^2 \tilde{A}_n = 0$ 注： $|\tilde{A}_n|$ 都一样。→猜行波解： $\tilde{A}_n = A e^{-i(na\pi)} = A e^{-ikx}$ $\Rightarrow kx$ 用 $na\pi$ 替换 (为系数称：波数)有： $\tilde{A}_{n+1} = \tilde{A}_n e^{-ian}$ $\tilde{A}_{n-1} = \tilde{A}_n e^{ian}$ $\Rightarrow \omega_0^2 (2 - e^{-ian} - e^{ian}) = \omega^2$ $\therefore \omega_0^2 (2 - 2\cos a\pi) = \omega^2 \Rightarrow \omega = 2\sin \frac{a\pi}{2} \omega_0$ $\Rightarrow x_n = A \cdot e^{-ian\pi} \cdot e^{-i\omega t}$ $\text{Ref}(x_n) = A \cos(\omega t + na\pi)$ □波速： $u = \frac{\omega}{k}$ ，一般 $a\pi < 1$ ， $\omega = 2\sin \frac{a\pi}{2} \cdot \omega_0 \approx a\pi \omega_0$ $\therefore u = a\sqrt{\frac{k}{m}}$ □某一振子某一时刻的运动： $x_n = A \cos(\omega t + na\pi)$ ★这里是猜解代入，实用率与格解 $\omega_0^2 [2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}] + \ddot{x}_n = 0$ ！

△自由两体问题：

★[例]粒子散射。

(1) 已知 E ，求 θ_r 、(2) 原子中子散射，求 θ_r 、(3) 利用 m 求何时 m_2 获能最大

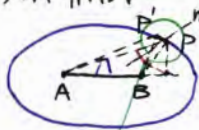
解：(1) 

$$v_c = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad v_1' = v_1 - v_c = \frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2} \quad v_2' = v_c = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

柯尼希/Sc系能量守恒： $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$ 相对速不变： $|v_1 - v_2| = |v_1' - v_2'|$ $\Rightarrow v_1 = v_1'$ 、 $v_2 = v_2'$ 、 v_1 与 v_2 共线。 $\therefore \tan \theta_r = v_2' \sin \theta_c / (v_1 + v_1' \cos \theta_c)$

$$= \frac{m_2 \sin \theta_c}{m_1 + m_2 \cos \theta_c} \longrightarrow \text{当 } m_2 \gg m_1, \theta_r \approx \theta_c!$$

· 导体椭圆:



有: $\begin{cases} AP - AP' = PP' \cos \alpha \\ BP - BP' = PP' \cos \alpha \end{cases}$

又: n 为 $\angle APB$ 平分线: $\alpha' = \alpha$

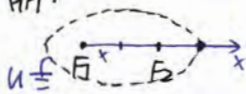
同时: $\alpha' = \alpha''$

$\Rightarrow AP + BP = BP' + AP'$

\Rightarrow 椭圆为椭圆求电场线为双曲线

★ [例] 求长轴旋转椭球的电容.

解:



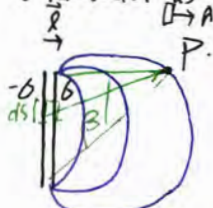
$\varphi = U = \int_0^{2\pi} \frac{k \cdot \pi d \tau}{a + c - \tau} = k\pi \ln \frac{a+c}{a-c} \Rightarrow \pi = \frac{U}{k \ln \frac{a+c}{a-c}}$

再求 Q : 共用的界面对像空间有:

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \pi \cdot 2c$; 真实空间有: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow Q = \pi \cdot 2c$

$\Rightarrow C = \frac{2c}{k \ln \frac{a+c}{a-c}}$

· 电偶极层:



(1) 任意无限延伸

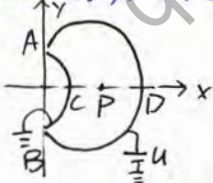
在 $r_p \gg R$ 处:

$d\varphi = d\varphi_{\text{cylinder}} + d\varphi_{\text{image}} = -(\nabla \varphi_{\text{cylinder}}) \cdot \vec{r} = \frac{k\sigma ds}{r^2} \vec{r} \cdot \vec{r}$
 $= \frac{k\sigma L}{r^2} d\vec{S} \cdot \vec{r} = \frac{k\sigma L ds}{r^2} = k\sigma L d\Omega$

$\Rightarrow \varphi_p = k\sigma L \Omega$ 又: $\frac{\Omega}{4\pi} = \frac{\beta}{2\pi} \Rightarrow \Omega = 2\beta$

$\Rightarrow \varphi_p = k\sigma L 2\beta$ (圆柱面)

★ [例] A(0,1) C($\frac{\sqrt{3}}{2}$,0) D(1,0) P(1,0) 求 P 点电场



解: $\varphi_A - \varphi_C = U = k\sigma \cdot \frac{2}{3}\pi - k\sigma \cdot \frac{4}{3}\pi \Rightarrow k\sigma L = -\frac{3U}{2\pi}$

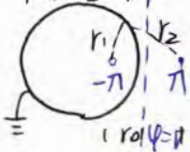
$\Rightarrow \varphi_A - \varphi_C = 2k\sigma L (2\arctan \frac{\sqrt{3}}{1} - \beta_C)$

$\Rightarrow E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{k}{2\pi} U \cdot \frac{1}{1+\pi}$

$\Rightarrow E_p = -\frac{3}{2\pi} U \cdot \frac{1}{1+\pi}$

注: $\frac{d\arctan x}{dx} = y = \arctan x \rightarrow \tan y = x \rightarrow \frac{dy}{\cos^2 y} = dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos^2 y$

· 导体圆柱:



取中面 φ_0 有: $\varphi = \frac{\pi}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = C \Rightarrow$ 中面为圆

若要使柱面 $\varphi = U$, 应整体提升电势, 不可在中点加另一根导线, 因为这将使 $\varphi \neq U$!

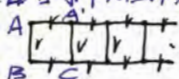
化简：应用自相似(3)

△自相似性与多端接口：(不含源)

·自相似性：

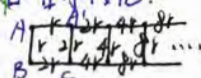
“无穷”属性使其本身与本身一部分完全等价。

★例求 R_{OB}, R_{AC} .



解：(1) $R_{AB} = (2r + R_{AB}) // r \Rightarrow R_{AB} = (\sqrt{3} - 1)r$
 (2) $R_{AC} = 2r // (R_{AC} + r) = 2r // (\sqrt{3})r = (4\sqrt{3} - 6)r$

★例求 R_{AB} .



解： $R_{AC} = 2R_{AB}$ ($R_{AB} = \alpha R_0$ 量纲分析 $\rightarrow r=1 \rightarrow R_{AB} = \alpha \cdot r$
 $\Rightarrow R_{AB} = (2r + R_{AB}) // r$
 $\Rightarrow R_{AB} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$
 $\rightarrow R_{AC} = 2\alpha \cdot r$

·三端接口：(线性)

三端接口有3个自由度。只用设成Y/△型。

★例单位长度 r , 最外边长 l_0 , 内层均 $1/4$ 求 R_{AB} .

量纲分析： $R_{AB} = \alpha r l_0 \rightarrow \beta = r=1$

几何关系： $r' = l_0 / l_0 \cdot r$

方法一：原图 \Rightarrow \Rightarrow 算两次 R_{AB}

(方法不好，因为破坏了对称性)

方法二：

原图 \Rightarrow

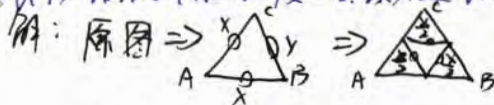


有：

$$R_1 = \frac{\frac{1}{3}r \cdot \frac{2}{3}l_0}{\frac{1}{3}l_0 + y}, R_2 = \frac{\frac{1}{3}r \cdot l_0 y}{\frac{1}{3}l_0 + y}, R_3 = \frac{\frac{2}{3}r \cdot l_0 y}{\frac{1}{3}l_0 + y}$$

$$\Rightarrow R_{AB} = 2R_1 + \frac{2}{3}(R_2 + R_3) = \frac{2}{3}y \Rightarrow y \Rightarrow R_{AB}$$

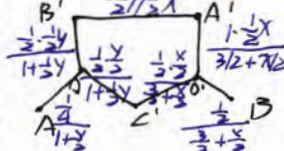
★例 AB, AC 单位长度 r_0 , BC 单位长度 $2r_0$, 最外边长 l_0 , 求 R_{AB} .

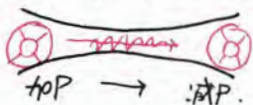


① 方程一： $R_{AB} = x // (y + l_0) = R_{AO} + R_{BO'} + R_{OO'}$

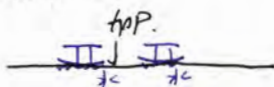
② 方程二： $R_{BC} = 2x // y = [(\frac{1}{2} // x // r_0 l_0) + r_0 l_0] // 2r_0 l_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \\ y \end{cases} \Rightarrow R_{AB}$$





② 滑冰：



熔点 0°C ，加压使减 $15^{\circ}\text{C} \rightarrow -10^{\circ}\text{C}$ ，可滑
 $\rightarrow -30^{\circ}\text{C}$ ，不可滑。

能带：



流量： $Q = \frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{S} \cdot n$

流密度： $\vec{j} = \frac{dV}{dA \cdot dt} = \vec{v} \cdot n$

求 $P_s(T, E)$

有： $J_n = J_{n1} = J_{n2} = v_{n1} n_1 = v_{n2} n_2 = n_2 v_{n2} e^{-\frac{E}{kT}}$

$\rightarrow P_s = NkT/V = n_1 \cdot kT = n_2 kT e^{-\frac{E}{kT}}$

$\Rightarrow P_s = \frac{P_s}{M} \cdot \frac{RT}{M} e^{-\frac{E}{kT}}$

注：① 单个分子： $\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 \rightarrow E_k = \frac{1}{2} n RT$ (热运动 $v_k = v_{\text{热}}$)

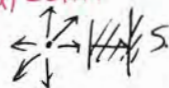
② $P = \frac{nM}{NA} \rightarrow n_1/P_{\text{气}} = n_2/P_{\text{液}}$

△ 光子气体：

理想气体压强的快速推导：

$P \cdot \Delta x = \frac{1}{6} n \cdot \Delta x \cdot 2mv$

但不严谨：认为 $\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \bar{\epsilon}_k$!



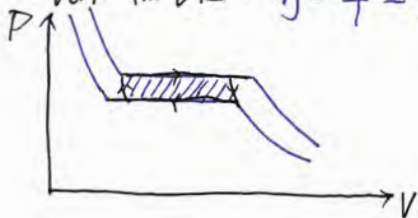
$\Rightarrow P = \frac{1}{3} n m v^2 = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_k \Rightarrow E_k = \frac{3}{2} PV$ (仅平动)

光子气体： $\epsilon = h\nu, p = \frac{h\nu}{c}$

压强： $P \cdot \Delta x = \frac{1}{6} n \cdot \Delta x \cdot 2 \frac{h\nu}{c} \Rightarrow P = \frac{1}{3} n \bar{\epsilon}_k$

总能量： $E(P, V) = N \cdot \bar{\epsilon}_k = N \cdot \frac{3P}{n} = 3PV \Rightarrow E = 3PV$

饱和蒸气压： $\eta = \frac{dT}{T} = \frac{dW}{dQ} = \frac{dP_s \Delta V}{4P_s \Delta V} \Rightarrow P = P_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^4$



有: $x=0$ 处: $n(0,0): n(0,1) = 98\%:2\%$

$$x=1$$
 处: $n(1,0): n(1,1) = \frac{1}{\eta}$

$$\Rightarrow \eta = \frac{1}{49} e^{\frac{(m_2 - m_1) \omega^2}{2kT}}$$

\downarrow
wt. η 大.

△麦克斯韦分布: (n 与 E_k 的关系)

数学知识:

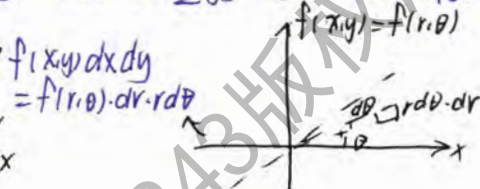
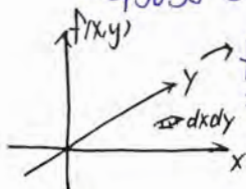
高斯积分: $G_n(\alpha) = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx$

$$\rightarrow \frac{dG_n(\alpha)}{d\alpha} = - \int_0^\infty x^{n+2} e^{-\alpha x^2} dx = -G_{n+2}(\alpha)$$

$$\square G_1(\alpha) = \int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cdot \frac{1}{2} dx^2 = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\begin{aligned} [G_0(\alpha)]^2 &= \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx \int_0^\infty e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\alpha r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r e^{-\alpha r^2} dr = \frac{\pi}{4\alpha} \end{aligned}$$

x, y 独立 \rightarrow 第一象限 \rightarrow 全平面.



$$\Rightarrow G_0(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$G_2(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}$$

$$G_4(\alpha) = \frac{3}{8\sqrt{\pi}} \alpha^{-\frac{5}{2}}$$

$$G_1(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}$$

$$G_3(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$G_5(\alpha) = \frac{15}{8\sqrt{\pi}} \alpha^{-\frac{7}{2}}$$

分布律的推导:

假设:

① x, y, z 独立.

\rightarrow 概率 \rightarrow 概率密度.

x 方向: $V_x - V_x + dV_x, dp = f(V_x) dV_x$

y 方向: $V_y - V_y + dV_y, dp = f(V_y) dV_y$

z 方向: $V_z - V_z + dV_z, dp = f(V_z) dV_z$

② 记 \vec{V} 在 $V_x - V_x + dV_x; V_y - V_y + dV_y; V_z - V_z + dV_z$ 内概率:

$$dp = f(V_x) f(V_y) f(V_z) dV_x dV_y dV_z \stackrel{\text{记为}}{=} f(\vec{V}) dV_x dV_y dV_z$$

性质(1) 考虑 $S(x^2) = f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C \rightarrow f(\vec{V})$

$$\text{则 } S(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\text{则有 } S(\vec{V}^2) = f(\vec{V}) = g(V_x^2) g(V_y^2) g(V_z^2)$$

仍写成概率密度函数的形式:

$$\Rightarrow f(\vec{V}^2) = f(V_x^2) f(V_y^2) f(V_z^2)$$

换函数并用 f 表示 (尽管映射不同) 有因变量函数值被

★类似数学期望:

x^2 的 $P(S, X)$ 的是相同的.

△洛伦兹变换:

取一个对齐在O点的变换:

· 模方不变的变换即称洛伦兹变换.

包括: { 平动变换(boost): 沿一个方向平动

{ 转动变换(rotation): 沿一个坐标轴转动

{ 时间反演(T): $t' \leftrightarrow -t$

{ 空间反演(P): $x' \leftrightarrow -x, y' \leftrightarrow -y, z' \leftrightarrow -z$ (仅变一个也可以)

+ 各自的组合.

· X向boost: (沿X有 V_0)

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma - \gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\text{有: } [(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2] = [(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2]$$

$$= (\gamma ct - \gamma\beta x)^2 - (\gamma x - \gamma\beta ct)^2 - y^2 - z^2 = (\gamma^2 - \gamma^2\beta^2)(ct)^2 - (\gamma^2 - \gamma^2\beta^2)x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

$$\text{即模方} \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{dz^2}{dt^2} = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \text{Const.}$$

注: 两个事件间隔: $\Delta S = (ct)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ 也不变: 满足变换

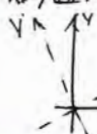
· Y向boost: (沿Y有 V_0)

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

· Z向boost: (沿Z有 V_0)

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

· xoy面rotation: (绕z轴转)

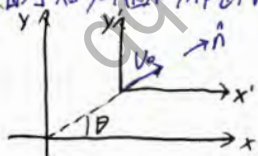


$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta$$

$$y' = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

☆ [例] xoy平面内作出以 V_0 的方向的变换.



$$\text{解: } \vec{r} = (\vec{r} \cdot \hat{n}) \hat{n} + (\vec{r} - (\vec{r} \cdot \hat{n}) \hat{n})$$

沿变换方向 垂直方向.

$$\text{有: } ct' = \gamma(ct - \beta \vec{r} \cdot \hat{n})$$

$$\begin{cases} r_{\parallel}' = \gamma(\vec{r} \cdot \hat{n} - \beta ct) \\ r_{\perp}' = \vec{r}_{\perp} \end{cases}$$

故沿n法方向不变! 如同沿x轴不变
坐标不变+杆方向不变($r_{\perp}' = r_{\perp}$)

$$\therefore \text{有: } ct' = \gamma ct - \beta \gamma (\cos\theta x + \sin\theta y)$$

$$\vec{r}' = r_{\parallel}' \hat{n} + \vec{r}_{\perp}' = \gamma(\vec{r} \cdot \hat{n} - \beta ct) \hat{n} + \vec{r}_{\perp}'$$

$$= (\cos\theta, \sin\theta, 0) \cdot (\gamma(\cos\theta x + \sin\theta y) - \beta ct) + \vec{r} - (\vec{r} \cdot \hat{n}) \hat{n}$$

$$\begin{cases} x' = \cos\theta [\gamma(\cos\theta x + \sin\theta y) - \beta ct] - \sin\theta (\cos\theta x + \sin\theta y) = (\gamma - 1) \cos\theta (\cos\theta x + \sin\theta y) + x - \gamma \beta \cos\theta ct \\ y' = \sin\theta [\gamma(\cos\theta x + \sin\theta y) - \beta ct] + (\cos\theta x + \sin\theta y) \sin\theta = (\gamma - 1) \sin\theta (\cos\theta x + \sin\theta y) + y - \gamma \beta \sin\theta ct \\ z' = z \end{cases}$$