复赛专题上

微积分进阶 1

单元函数和微分方程 1

单元函数 1

微分方程及其应用 4

多元函数、重积分和高斯积分 9

多元函数问题 9

重积分 15

高斯积分 17

曲线曲面积分和矢量分析 19

曲线曲面积分 19

矢量分析 22

复数和线性代数 27

复数 27

线性代数 30

运动与静力进阶 33

微元法进阶 33

平动系与转动系 33

微元法的本质 35

各种坐标系与导数运用 35

运动的关联 39

矢量的空间坐标表达及运用 39

关联与约束 40

相图的应用 45

相图的含义 45

静力学临界问题分析 46

运动相关问题 47

与能量有关的相图 48

运动知识补充 50

三维运动与理论力学初步 51

立体运动学 . . . 51
自由度与能量分析法 . . . 53
虚功原理 . . . 55
自由度、能量和静力学进阶 . . . 57
自由度、能量解法 . . . 57
能量与量子力学 . . . 58
图解静力学 . . . 60
动力学综合 . . . 64
能量微分方程和条件约束 . . . 64
质心动能定理 . . . 64
约束 . . . 64
变质量问题 . . . 67
能量微分和多自由度 . . . 70
能量微分解法 . . . 70
惯性力 . . . 72
存在约束的多自由度问题 . . . 72
振动和简正模 . . . 74
振动 . . . 74
简正模问题 . . . 75
简正模/振动拉式方程法 . . . 77
复杂简正模和自由两体 . . . 79
复杂简正模：一维无线振子链 . . . 79
自由两体问题 . . . 79
转动惯量与刚体进动 . . . 81
转动惯量的计算 . . . 81
刚体进动 . . . 83
刚体与连续体动力学 . . . 85
刚体碰撞 . . . 85
刚体动力学综合 . . . 86
连续体问题 . . . 87
瞬时轴转动定理 . . . 88
模量 . . . 89

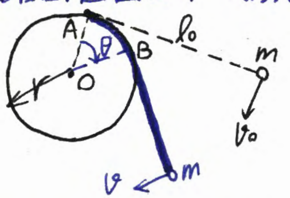
杨氏模量 89
粘滞系数 89
剪切模量 90
万有引力与天体运动 91
椭圆运动 91
天体进动 92
万有引力 93
静电静磁进阶 94
场的分布和电偶极子 94
电荷、电场、电势 94
电场线形状 95
电偶极子 95
导体问题 96
电像法与电场能量 98
电像法 98
静电能量问题 100
磁学体系与通电线圈问题 102
磁学理论体系 102
通电线圈问题 103
带电粒子在磁场中的运动 106
洛伦兹力与一般运动形成 106
对称性与正则守恒 106
相对论下的带电粒子运动 108
电路进阶 109
线性系统的处理 109
电介质问题 109
线性统一处理 112
电路中的线性 113
分离对称性 115
对称性化简 115
恢复对称性 116
化简：应用自相似 119

自相似性与多端接口（不含源） 119
有源线性网络处理 121
非线性电路 123
暂态电路 123
复数法解交流电 123
电容器充放电问题 125
三相交流电 126
电磁感应进阶 127
动生电动势与感生电动势的统一理解 127
电磁感应的统一性 127
感应电动势的计算 127
磁矢势与自感互感问题 130
磁矢势 130
自感互感问题 133
电磁动力学 136
杆为U型杆 136
电磁场相对论变换 138
四维矢量 138
电磁场变换的推导 138
热学进阶 140
新热力学模型 140
输运过程 140
热传导 140
热辐射 142
熵、循环和相变 144
熵 144
循环过程与热机（制冷机） 146
相变 147
光子气体 148
分子统计力学 149
玻尔兹曼分布 149
麦克斯韦分布 150

热学综合 155
理想气体综合问题 155
热力学第一定律 157
光学进阶 158
几何光学 158
透镜几何作图 158
折射 159
近轴成像 159
非近轴成像 159
反射 160
全反射 160
虹和霓 161
波动光学基础 162
波动基础 162
干涉问题 162
复振幅与光波的数学计算 166
复振幅 166
能流密度 166
复杂干涉问题 166
衍射 167
偏振、复杂光学问题 170
斯托克斯倒逆关系 170
光栅 170
偏振 171
菲涅尔公式 172
菲涅尔衍射 173
反射率和透射率 173
近代物理进阶 174
狭义相对论时空观 174
正三观 174
原理与变换 174
洛伦兹变换 176

坐标变换 177
洛伦兹变换下的物理量 180
变换不变量：四维标量 180
满足洛伦兹变换：四维矢量 180
能动量、四维动力学 184
能动量四维矢量 184
相对论碰撞问题 185
原子物理 189
量子化 189
原子与原子核 190

☆[例]圆柱固定，求绕上时间.

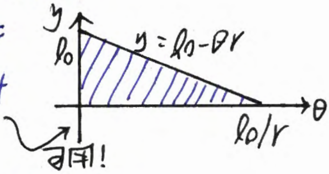


解：拉力不做功：$v(t)=v_0$

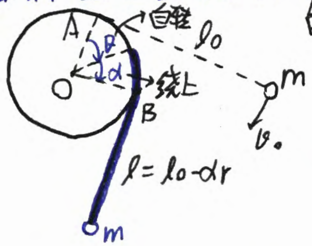
有：$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{v_0}{l_0-\theta r}$

$\rightarrow (l_0-\theta r)d\theta=v_0dt$

$\Rightarrow T=\frac{\ell^2}{2v_0r}$



☆[例]不固定圆桶(m)，绕轴光滑转动，求绕上时间.



解：在桶转动系中：

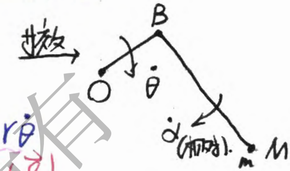
$v'=l\cdot\dot\alpha$ (切向).

$\Rightarrow$地系中：

☆ $v_t=l(\dot\alpha+\dot\theta)$；$v_n=r\dot\theta$

☆ $\vec v_{牵}=\vec\omega\times\vec r=\vec\omega\times(\vec r+\vec l)$

这是可以分开写的!



有：$\Delta L=0$；$\Delta E=0$

即 $\begin{cases} m l_0 v_0=(mr^2\dot\theta)+(ml^2(\dot\alpha+\dot\theta)+mr^2\dot\theta) & \cdots\cdots ① \\ \frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2+(\frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2+\frac{1}{2}ml^2(\dot\theta+\dot\alpha)^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

同时有：$l=l_0-\alpha r$；$\dot l=-\dot\alpha r$

有$\boxed{目标}$：表示出仅有$\dot\alpha$的方程.

由①：$\dot\theta=\frac{l_0v_0-l^2\dot\alpha}{2r^2+l^2}\rightarrow\dot\theta+\dot\alpha=\frac{l_0v_0+2r^2\dot\alpha}{2r^2+l^2}$

代入②：$v_0^2=r^2\dot\theta^2+r^2\dot\theta^2+l^2(\dot\theta+\dot\alpha)^2$

$\rightarrow (2r^2+l^2)^2v_0^2=2r^2(l_0v_0-l^2\dot\alpha)^2+l^2(l_0v_0+2r^2\dot\alpha)^2$

$\rightarrow (2r^2+l^2)^2v_0^2=2r^2l_0^2v_0^2-\cancel{4l_0v_0r^2l^2\dot\alpha}+2r^2l^4\dot\alpha^2+l^2l_0^2v_0^2+\cancel{4l_0v_0r^2l^2\dot\alpha}+4r^4l^2\dot\alpha^2$

$\rightarrow (2r^2+l^2)^{\cancel{2}}v_0^2=\cancel{(2r^2+l^2)}l_0^2v_0^2+\cancel{(2r^2+l^2)}2r^2l^2\dot\alpha^2$

$\Rightarrow \dot\alpha=\sqrt{\frac{2r^2+l^2-l_0^2}{2r^2l^2}}v_0=\sqrt{\frac{2r^2-2l_0r\alpha+\alpha^2r^2}{2r^2(l_0-\alpha r)^2}}v_0=f(\alpha)$

$\rightarrow \frac{d\alpha}{f(\alpha)}=dt\Rightarrow T=\int_0^{l_0/r}\frac{d\alpha}{f(\alpha)}$

• 一般微分方程：

□线性：出现的$y, y', y''\cdots\cdots$为一次或零次.

□常系数：出现的$y, y', y''\cdots\cdots$系数为常数.

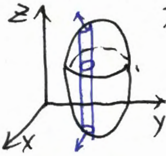
□齐次：如$y''\cdot f(x)+y'\cdot g(x)+y\cdot h(x)=k(x)$，$k(x)\equiv0$则为齐次.

①线性、常系数、齐次微分方程：

1° 一阶：$y'+ay=0$

有：$\frac{dy}{y}=-a\cdot dx$ 猜：$y=A\cdot e^{\lambda x}$ 代入：$\lambda\cdot Ae^{\lambda x}+aAe^{\lambda x}=0\Rightarrow\lambda=-a$.

□高斯定理：



对于：$\oiint \vec{A}\cdot d\vec{s}$

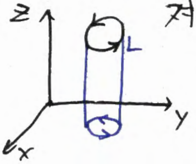
有：$\iint A_z\, dS_z = \int [A_z(x,y,z_上) - A_z(x,y,z_下)]\, dxdy$

又：$\int_{z_下}^{z_上} \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \Big|_{x,y} = A_z \Big|_{x,y,z_下}^{x,y,z_上}$

$\Rightarrow$有：$\iint A_z\, dS_z = \iiint \frac{\partial A_z}{\partial z} dxdydz$，其余两次同理可证.

即：$\boxed{\iiint\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy}$

□斯托克斯定理：



对于：$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}$

有：$\oint_L A_x(x,y,z(x,y))dx = -\iint\left(\frac{\partial A_x(x,y,z(x,y))}{\partial y}\right)dxdy$

$= \iint\left(-\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$

又：$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dS_z = -dS_y$

$\Rightarrow$有：$\oint_L A_x dx = \iint\left(-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dxdy + \iint \frac{\partial A_x}{\partial z} dxdz$，其余两次同理可证.

即：
$$\boxed{\iint_{\Sigma} \underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)}_{(\nabla\times\vec{A})_x} dydz + \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)}_{(\nabla\times\vec{A})_y} dzdx + \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{(\nabla\times\vec{A})_z} dxdy = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz}$$

可记为：
$$\boxed{\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz}$$

△矢量分析

·散度：

对高斯定理取极限：

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

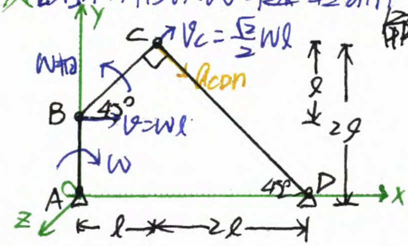
若为正：发源；若为负：汇聚.

☆例：$\vec{E} = (xy, yz, zx)$ 求 $\rho(x,y,z)$　　☆这不一定是静电场！

解：$\rho = \varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \varepsilon_0(x+y+z)$

分析：$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \iiint \nabla\cdot\vec{E}\cdot dV = \frac{Q_内}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho dV \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

双[例] 杆AB以ω匀速转动，求此刻C点的速度和加速度.



解：(1) $v_B=\omega l$，$v_C\perp CD$

有：$v_B\cos45^\circ=v_C$

$\Rightarrow v_C=\frac{\sqrt2}{2}\omega l$ 垂直于CD向右上.

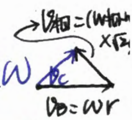
(2) $\boxed{解一}$ [关联方法]

1° 以D为参照系：

$a_{CDn}=v_C^2/2\sqrt2 l=\frac{\sqrt2}{8}\omega^2 l$

2° 计算沿CB方向的加速度.

□〈处理一：平动系〉有：$(\omega_{相}-\omega)\times\sqrt2 l=\frac{\sqrt2}{2}\omega l\rightarrow\omega_{相}=\frac32\omega$



∴ $a_{CBn}=\underbrace{(\omega_{相}-\omega)^2\times\sqrt2 r}_{C在B系中加速度}+\underbrace{\omega^2 r\times\frac{\sqrt2}{2}}_{a_B沿CB分量}=\frac34\sqrt2\omega^2 r$ 双这里a_{CBn}即是$v_{相}^2/\sqrt2 r$!

□〈处理二：转动系〉以A为原点，AD为x轴，AB为y轴建立空间直角坐标系

设 $\vec\omega_{相}=\omega_{相}\hat k$ 有：$\vec\omega=-\omega\hat k$，$\vec{AC}=(1,2,0)$，$\vec{BC}=(1,1,0)$ (单位l)

则 $\vec v_C=\vec\omega\times\vec{AC}+\vec\omega_{相}\times\vec{BC}$

$$=\begin{vmatrix}\hat i&\hat j&\hat k\\0&0&-\omega\\1&2&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\hat i&\hat j&\hat k\\0&0&\omega_{相}\\1&1&0\end{vmatrix}=-\omega\hat j+2\omega\hat i+\omega_{相}\hat j-\omega_{相}\hat i$$

$$=(2\omega-\omega_{相})\hat i+(\omega_{相}-\omega)\hat j$$

满足：$2\omega-\omega_{相}=\omega_{相}-\omega\Rightarrow\omega_{相}=\frac32\omega$.

∴ $\vec\omega_{相}\times\vec{BC}=\vec v_{相}=-\frac32\omega\hat i+\frac32\omega\hat j$

$\vec a_C-\vec\beta\times\vec{BC}=\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec{AC})+2\vec\omega\times(\vec\omega_{相}\times\vec{BC})+\vec\omega_{相}\times(\vec\omega_{相}\times\vec{BC}$

$=\vec\omega\times(2\omega\hat i-\omega\hat j)+2\vec\omega\times(-\frac32\omega\hat i+\frac32\omega\hat j)+\vec\omega_{相}\times(-\frac32\omega\hat i+\frac32\omega$

$$=\begin{vmatrix}\hat i&\hat j&\hat k\\0&0&-\omega\\2\omega&-\omega&0\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}\hat i&\hat j&\hat k\\0&0&-\omega\\-\frac32\omega&\frac32\omega&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\hat i&\hat j&\hat k\\0&0&\frac32\omega\\-\frac32\omega&\frac32\omega&0\end{vmatrix}$$

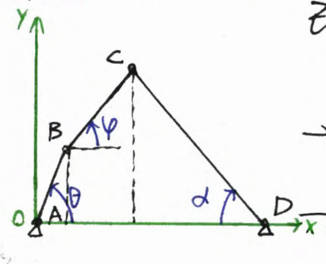
$$=-2\omega^2\hat j-\omega^2\hat i+3\omega^2\hat j+3\omega^2\hat i-\frac94\omega^2\hat j-\frac94\omega^2\hat i$$

$$=-\frac14\omega^2\hat j-\frac54\omega^2\hat i$$

∴ $a_{CBn}=\frac34\sqrt2\omega^2 r$

$\Rightarrow a_n=\sqrt{a_{CBn}^2+a_{CDn}^2}=\frac{\sqrt{74}}{8}\omega^2 l.$

$\boxed{解二}$ [求导方法]



已知：$\dot\theta=-\omega$，$\ddot\theta=0$，$\theta=90^\circ$，$\varphi=45^\circ$ (单位l)

$$\begin{cases}x_C=\cos\theta+\sqrt2\cos\varphi\\y_C=\sin\theta+\sqrt2\sin\varphi\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\dot x_C=-\sin\theta\cdot\dot\theta-\sqrt2\sin\varphi\cdot\dot\varphi\\\dot y_C=\cos\theta\cdot\dot\theta+\sqrt2\cos\varphi\cdot\dot\varphi\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\ddot x_C=-\cos\theta\cdot\dot\theta^2-\cancel{\sin\theta\cdot\ddot\theta}-\sqrt2\cos\varphi\dot\varphi^2-\sqrt2\sin\varphi\ddot\varphi\\\ddot y_C=-\sin\theta\cdot\dot\theta^2+\cancel{\cos\theta\cdot\ddot\theta}-\sqrt2\sin\varphi\dot\varphi^2+\sqrt2\cos\varphi\ddot\varphi\end{cases}$$

△自由度、能量解法：

利用一个或多个自由度描述能量

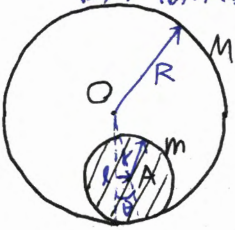
→对空间求导：求解静力平衡问题

→对时间求导：求解微小扰动问题

☆[例]图示是定轴转动圆筒内的圆柱，求：

(1)大筒固定时小柱作微小振动的周期 T_1.

(2)大筒不固定时的周期 T_2



解：(1) $\boxed{\text{选取自由度 }\theta\text{:}}$

有：$E_k=\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot\theta^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot(\dot\alpha-\dot\theta)^2$ 角位移的叠加性

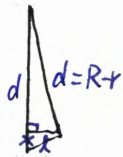
其中相对转角 α 满足 $\alpha r=\theta R\rightarrow\dot\alpha=\frac{R}{r}\dot\theta$

故：$E_k=\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot\theta^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2(\frac{R}{r}-1)^2\dot\theta^2$

又：$E_p=-mg(R-r)(\cos\theta-1)\approx\frac{1}{2}mg(R-r)\theta^2$

$\Rightarrow T_1=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}\cancel{m}(R-r)^{\cancel{2}}}{\cancel{mg}(\cancel{R-r})}}=2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$

$\boxed{\text{选取自由度 }\ell\text{:}}$



有：$E_k=\frac{1}{2}m\dot\ell^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2(\frac{R}{r}\frac{\dot\ell}{R-r}-\frac{\dot\ell}{R-r})^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}m\dot\ell^2$

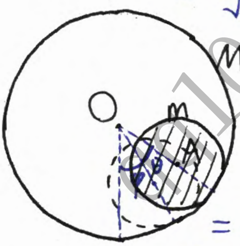
$E_p=mgx$

其中上升高度 x 满足：$d^2-(d-x)^2=\ell^2-x^2\rightarrow x=\frac{\ell^2}{2d}$

故：$E_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}m\dot\ell^2$

$E_p=\frac{1}{2}\cdot\frac{g}{R-r}\ell^2$

$\Rightarrow T_2=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}m}{\frac{mg}{R-r}}}=2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$



(2)选取自由度：θ(小柱)、φ(大筒)：

有：$E_k=\frac{1}{2}m(R-r)^2(\dot\theta+\dot\varphi)^2+\frac{1}{2}MR^2\dot\varphi^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2(\frac{R}{r}\dot\theta-\dot\theta-\dot\varphi)^2$

$E_p=mg(R-r)(1-\cos(\theta+\varphi))$

拉氏量：$L=T-V$ 又角动量不守恒！

$=\frac{1}{2}m(R-r)^2(\dot\theta+\dot\varphi)^2+\frac{1}{2}MR^2\dot\varphi^2+\frac{1}{4}mr^2(\frac{R}{r}\dot\theta-\dot\theta-\dot\varphi)^2-\frac{1}{2}mg(R-r)(\theta+\varphi)^2$

$\Rightarrow\begin{cases}m(R-r)^2(\ddot\theta+\ddot\varphi)+\frac{1}{2}mr^2(\ddot\varphi-\frac{R-r}{r}\ddot\theta)\frac{r-R}{r}=-mg(R-r)(\theta+\varphi)\\ MR^2\ddot\varphi+m(R-r)^2(\ddot\theta+\ddot\varphi)+\frac{1}{2}mr^2(\ddot\varphi-\frac{R-r}{r}\ddot\theta)=-mg(R-r)(\theta+\varphi)\end{cases}$

$\rightarrow\begin{cases}\underbrace{\frac{3}{2}m(R-r)^2}_{A}\ddot\theta+\underbrace{[mR^2-\frac{5}{2}mRr+\frac{3}{2}mr^2]}_{B}\ddot\varphi=\underbrace{-mg(R-r)}_{C}(\theta+\varphi)\\ \underbrace{[mR^2-\frac{5}{2}mRr+\frac{3}{2}mr^2]}_{B}\ddot\theta+\underbrace{[MR^2+mR^2-2mRr+\frac{3}{2}mr^2]}_{D}\ddot\varphi=\underbrace{-mg(R-r)}_{C}(\theta+\varphi)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}A\ddot\theta+B\ddot\varphi=C\theta+C\varphi\\ B\ddot\theta+D\ddot\varphi=C\theta+C\varphi\end{cases}\Rightarrow\ddot\varphi=\frac{A-B}{D-B}\ddot\theta;\ \varphi=\frac{A-B}{D-B}\theta$

$\Rightarrow(A(D-B)+B(A-B))\ddot\theta=C(D-B+A-B)\theta$

其中：$D-B=MR^2+\frac{1}{2}mRr$，$A-B=\frac{1}{2}mR^2-\frac{1}{2}mRr=\frac{1}{2}mR(R-r)$

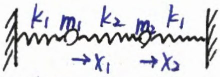
代入有：$\ddot\theta+\frac{2M+m}{3M+m}\cdot\frac{g}{R-r}\theta=0\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{3M+m}{2M+m}\cdot\frac{R-r}{g}}$

R57

复杂简正模和自由两体(4)

△复杂简正模：一维无限振子链：

·有限振子：

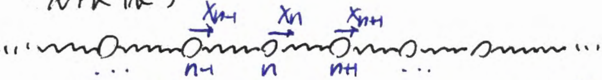


$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\ E_p = \underbrace{\frac{1}{2}k_1(x_1^2+x_2^2)}_{\text{外界}} + \underbrace{\frac{1}{2}k_2(x_1-x_2)^2}_{\text{内部}} \end{cases}$$

$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1(x_1^2+x_2^2) - \frac{1}{2}k_2(x_1-x_2)^2$

有：$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}$ ⇒代入求解.

·无限振子：



原长a且在平衡位置. k.m.

$\begin{cases} E_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}m_n\dot{x}_n^2 \\ E_p = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}k_n(x_{n+1}-x_n)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} m_n = m \\ k_n = k \end{cases}$ 有$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_n} \Rightarrow m\ddot{x}_n = k(x_{n+1}+x_{n-1}-2x_n)$

★这也可用牛二直接写出!

→已知对应简谐波：设$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ∴ $\omega_0^2(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) + \ddot{x}_n = 0$

设$x_n = \tilde{A}_n e^{i\omega t}$ 有：$\omega_0^2(2\tilde{A}_n e^{i\omega t} - \tilde{A}_{n+1}e^{i\omega t} - \tilde{A}_{n-1}e^{i\omega t}) - \omega^2\tilde{A}_n e^{i\omega t} = 0$

$\Rightarrow \omega_0^2[2\tilde{A}_n - \tilde{A}_{n+1} - \tilde{A}_{n-1}] - \omega^2\tilde{A}_n = 0$ 注：$|\tilde{A}_n|$都一样.

→猜行波解：$Ae^{-i(\omega t+kx)} = Ae^{-ikx}e^{i\omega t}$ ⇒ kx用$na\pi$替换(π为系数,称:波数)

有：$\tilde{A}_n = A\cdot e^{-i(na\pi)}$、$\tilde{A}_{n+1} = \tilde{A}_n e^{-ia\pi}$、$\tilde{A}_{n-1} = \tilde{A}_n\cdot e^{+ia\pi}$

$\Rightarrow \omega_0^2(2 - e^{-ia\pi} - e^{ia\pi}) = \omega^2$ ∴ $\omega_0^2(2-2\cos a\pi) = \omega^2 \Rightarrow \omega = 2\sin\frac{a\pi}{2}\omega_0$

$\Rightarrow x_n = A\cdot e^{-ina\pi}\cdot e^{-i\omega t}$，$\mathrm{Re}(x_n) = \underbrace{A}_{\text{初始位}}\cos(\underbrace{\omega t}_{\text{时间项}} + \underbrace{na\pi}_{\text{空间项}})$

a小 不太大

□波速：$u = \frac{\omega}{\pi}$，一般$a\pi \ll 1$ ∴ $\omega = 2\sin\frac{a\pi}{2}\cdot\omega_0 \approx a\pi\omega_0$ ∴ $u = a\sqrt{\frac{k}{m}}$

□某一振子某一时刻的运动：$x_n = A\cos(\omega t + na\pi)$

★这里是猜解代入，实则需严格解$\omega_0^2[2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}] + \ddot{x}_n = 0$!

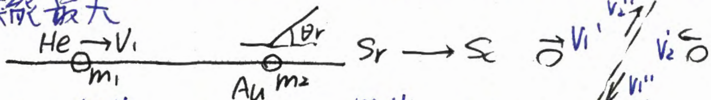
△自由两体问题：

★核心：用好质心系

★[例]粒子散射.

(1)已知θ_c,求θ_r、(2)质子中子散射,求θ_r、(3)利用μ求何时m_2获能最大

解：(1)



$V_c = \frac{m_1v_1}{m_1+m_2}$; $v_1' = v_1 - V_c = \frac{m_2v_1}{m_1+m_2}$; $v_2' = V_c = \frac{m_1v_1}{m_1+m_2}$

$\begin{cases} \text{柯尼希}/S_c\text{系能量守恒：} \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}m_1v_1''^2 + \frac{1}{2}m_2v_2''^2 \\ \text{相对速不变：} |\vec{v}_1' - \vec{v}_2'| = |\vec{v}_1'' - \vec{v}_2''| \end{cases}$

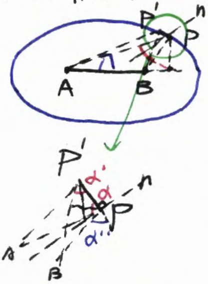
$\Rightarrow v_1' = v_1''$、$v_2' = v_2''$、v_1'&v_2'共线. 是$\Delta E=0$.$\Delta p=0$两式唯一解!

∴ $\tan\theta_r = v_1'\sin\theta_c/(v_c + v_1'\cos\theta_c)$

$= \frac{m_2\sin\theta_c}{m_1 + m_2\cos\theta_c}$ ⟶ 当$m_2 \gg m_1$，$\theta_r \approx \theta_c$!

R81

·导体椭球:



有: $\begin{cases} AP-AP'=PP'\cos\alpha \\ BP'-BP=PP'\cos\alpha' \end{cases}$

又: n 为$\angle APB$平分线: $\alpha''=\alpha$

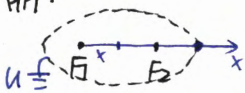
同时: $\alpha'=\alpha''$

$\Rightarrow AP+BP=BP'+AP'$

⇒等势线为椭球,电场线为双曲面

☆[例] 求长轴旋转椭球的电容.

解:



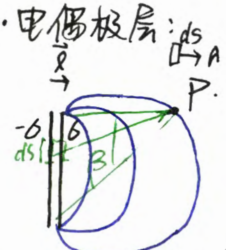
$$\varphi=U=\int_0^{2c}\frac{k\cdot\lambda dx}{a+c-x}=k\lambda\ln\frac{a+c}{a-c}\Rightarrow\lambda=\frac{U}{k\ln\frac{a+c}{a-c}}$$

再求Q: 考虑用的界面,对像空间有:

$\oiint_S\vec E\cdot d\vec S=\frac{1}{\varepsilon_0}\lambda\cdot 2c$; 真实空间有: $\oiint_S\vec E\cdot d\vec S=\frac{Q}{\varepsilon_0}\Rightarrow Q=\lambda\cdot 2c$

$$\Rightarrow C=\frac{2c}{k\ln\frac{a+c}{a-c}}$$

·电偶极层:



(上,下底面无限延伸)

在 $r_P\gg l$ 处:

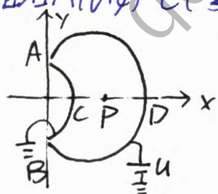
$$d\varphi_P=d\varphi_{+\sigma\to P}+d\varphi_{-\sigma\to P}=-(\nabla\varphi(\vec r))\cdot\vec l=\frac{k\sigma dS}{r^2}\hat r\cdot\vec l$$

$$=\frac{k\sigma l}{r^2}d\vec S\cdot\hat r=\frac{k\sigma l\,dS_\perp}{r^2}=k\sigma l\,d\Omega$$

$\Rightarrow\varphi_P=k\sigma l\Omega$ 又: $\frac{\Omega}{4\pi}=\frac{\beta}{2\pi}\Rightarrow\Omega=2\beta$

$\Rightarrow\boxed{\varphi_P=k\sigma l2\beta}$ (圆柱面)

☆[例] $A(0,l)$ $C(\frac{\sqrt3}{3}l,0)$ $D(\sqrt3 l,0)$ $P(l,0)$ 求P点电场



解: $\varphi_D-\varphi_C=U=k\sigma d\cdot\frac{2}{3}\pi-k\sigma d\cdot\frac{4}{3}\pi\Rightarrow k\sigma d=-\frac{3U}{2\pi}$

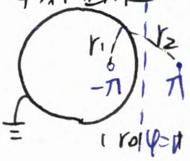
$\Rightarrow\varphi_x-\varphi_C=2k\sigma d(2\arctan\frac{l}{x}-\beta_C)$

$\Rightarrow E_x=-\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}=-\frac{6}{\pi}U\cdot\frac{l}{l^2+x^2}$

$\Rightarrow E_P=-\frac{3}{\pi}U\cdot\frac{1}{l}$

注: $\frac{d\arctan x}{dx}$: $y=\arctan x\to\tan y=x\to\frac{dy}{\cos^2y}=dx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\cos^2y$

·导体圆柱:



取中面$\varphi=0$,有: $\varphi=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2}\Rightarrow\frac{r_2}{r_1}=C\Rightarrow$等势面为圆

故若要使柱面$\varphi=U$,应整体提升电势,不可在中点加另一根导线,因为这将使$\varphi_{中}\neq0$!

疑: r_2还是r_1在分母上面? r_2小时$\varphi>0$ 是$\frac{r_1}{r_2}$.

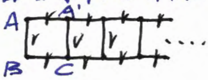
化简：应用自相似(3)

△自相似性与多端接口：(不含源)

·自相似性：

"无穷"属性使其本身与本身一部分完全等价.

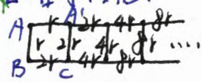
☆[例] 求 R_{AB}, R_{AC}.



解：(1) $R_{AB}=(2r+R_{AB})//r \Rightarrow R_{AB}=(\sqrt{3}-1)r$

(2) $R_{AC}=2r//(R_{A'C}+r)=2r//(\sqrt{3})r=(4\sqrt{3}-6)r$

☆[例] 求 R_{AB}.



解：$R_{A'C}=2R_{AB}$ ($R_{AB}=\alpha R_0^{\gamma}$ 量纲分析 $\to \gamma=1 \to R_{AB}=\alpha\cdot r$ $\to R_{A'C}=2\alpha\cdot 2r$)

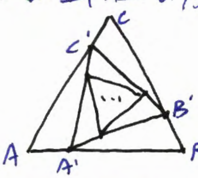
$\Rightarrow R_{AB}=(3r+R_{AB})//r$

$\Rightarrow R_{AB}=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-1)$

·三端接口：(线性)

三端接口有3个自由度. 只用没成Y/△型.

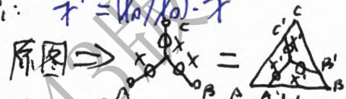
☆[例] 单位长度 r, 最外边长 l_0, 内层均1/4等分. 求 R_{AB}.



量纲分析：$R_x=\alpha r^{\beta} l^{\gamma} \to \beta=\gamma=1$

几何关系：$x'=(l_0'/l_0)\cdot x$

$\boxed{\text{方法一}}$：原图 ⇒



⇒ 算两次 R_{AB}

(方法不好，因为失掉了对称性)

$\boxed{\text{方法二}}$：原图：⇒

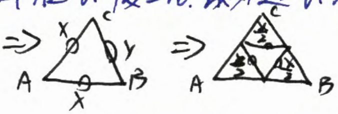
☆2种接口选方便的使用!

有：$R_1=\dfrac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}r^2l_0^2}{rl_0+y'}$, $R_2=\dfrac{\frac{1}{4}rl_0y'}{rl_0+y'}$, $R_3=\dfrac{\frac{3}{4}rl_0y'}{rl_0+y}$

$\Rightarrow R_{AB}=2R_1+\frac{2}{3}(R_2+R_3)=\frac{2}{3}y \Rightarrow y \Rightarrow R_{AB}$.

☆[例] AB, AC单位长度 r_0. BC单位长度 $2r_0$. 最外边长 l_0. 求 R_{AB}.

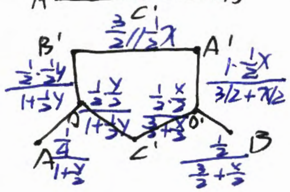
解：原图 ⇒



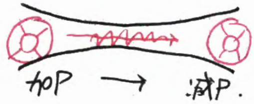
① 方程一：$R_{AB}=x//(x+y)=R_{AO}+R_{BO'}+R_{OO'}$

② 方程二：$R_{BC}=2x//y=[(\frac{y}{2}//x//r_0l_0)+r_0l_0]//2r_0l_0$

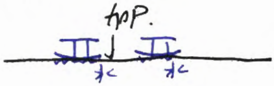
$\Rightarrow \begin{cases} x \\ y \end{cases} \Rightarrow R_{AB}$



▫应用：①血红细胞过毛细血管：

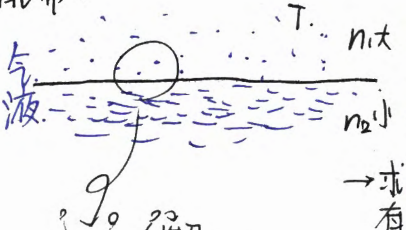


②滑冰：



熔点 0°C，加压使减 15°C → −10°C，可滑
↘ −30°C，不可滑.

·能带：



逃逸 · 有可能被拉回去满足条件才能逃出.

$n=n_2\cdot e^{-\varepsilon/kT}$

流量：$Q=\frac{dV}{dt}=\frac{\vec{v}\cdot dt\,n\vec{S}}{dt}=\vec{v}\cdot\vec{S}\times n$

流密度：$j=\frac{dV}{dt\,dS}=\vec{v}\times n$

→ 求 $P_S(T,E)$

有：$J_\text{入}=J_\text{出}$，$\bar{v}n_1=\bar{v}n_2e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$ ↙ 也可用液体求出

→ $P_S=NkT/V=n_1kT=n_2kTe^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$

$\Rightarrow \boxed{P_S=\frac{\rho_\text{液}\cdot RT}{M}e^{-\varepsilon/kT}}$

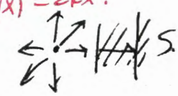
注：①单个分子：$\bar{\varepsilon}_k=\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ → 总：$E_k=\frac{1}{2}nRT$（热运动 $V_\text{气}=V_\text{液}$）

② $\rho=\frac{nM}{N_A}$ → $n_1/\rho_\text{气}=n_2/\rho_\text{液}$

△光子气体：

·理想气体压强的快速推导：

$P\cdot S\cdot\Delta t=\frac{1}{6}n\cdot v\Delta t\cdot S\cdot 2mv$ 若不平均分：认为 $\frac{1}{2}m(\bar{v}_x)^2=\bar{\varepsilon}_{kx}$！



$\Rightarrow P=\frac{1}{3}nmv^2=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_k \Rightarrow E_k=\frac{3}{2}PV$（仅平动）

·光子气体：$\varepsilon=h\nu$，$p=\frac{h\nu}{c}$

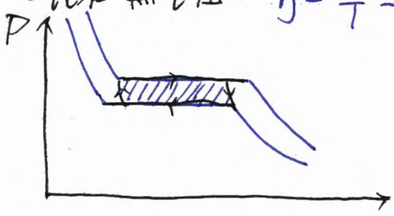
▫压强：$P\cdot S\cdot\Delta t=\frac{1}{6}\cdot n\cdot c\Delta t\cdot S\cdot 2\frac{h\nu}{c}$ 也是 $\Rightarrow \boxed{P=\frac{1}{3}n\bar{\varepsilon}_k}$ 之间关系

▫总能量：$E(P,V)=N\cdot\bar{\varepsilon}_k=N\frac{3P}{n}=3PV \Rightarrow \boxed{E=3PV}$ 之间关系

▫饱和蒸气压：$\eta=\frac{dT}{T}=\frac{dW}{dQ}=\frac{dP_S\,\Delta V}{4P\Delta V}\Rightarrow \boxed{P=P_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^4}$

$dQ=dE+PdV=4PdV$

要考虑做功!!!



R153

有：$x=0$处：$n_{8}(0):n_{9.5}(0) = 98\%:2\%$

$x=l$处：$n_{8}(l):n_{9.5}(l)=\frac{1}{\eta}$ $\Rightarrow \eta = \frac{1}{49}e^{\frac{(m_2-m_1)}{?0}\cdot\frac{\omega^2 l^2}{2kT}}$

$\downarrow$ ω大, η大.

△麦克斯韦分布：（n与E_k的关系）

·数学知识：

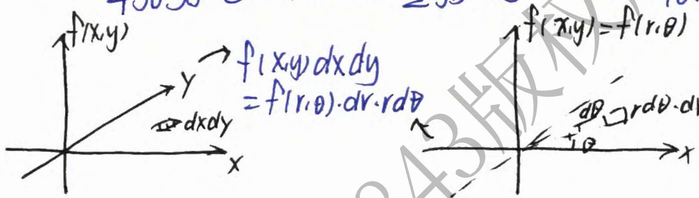
高斯积分：$G_n(\alpha)=\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2}dx$

$\rightarrow \frac{dG_n(\alpha)}{d\alpha} = -\int_0^\infty x^{n+2}e^{-\alpha x^2}dx = -G_{n+2}(\alpha)$

□ $G_1(\alpha)=\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2 = -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}$

□ $[G_0(\alpha)]^2 = \underbrace{\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}dy}_{x,y\text{独立}\ \ \text{第一象限}} = \frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(x^2+y^2)}dxdy}_{\text{全平面}}$

$=\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}e^{-\alpha r^2}rdrd\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty re^{-\alpha r^2}dr = \frac{\pi}{4\alpha}$



$\Rightarrow G_0(\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad G_1(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha^{-1}$

$G_2(\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\alpha^{-\frac{3}{2}}$ $\qquad G_3(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha^{-2}$

$G_4(\alpha)=\frac{3}{8}\sqrt{\pi}\alpha^{-\frac{5}{2}}$ $\qquad G_5(\alpha)=\alpha^{-3}$

·分布律的推导：

□假设：

① x,y,z独立.

x方向：$v_x - v_x+dv_x$. $dp=f(v_x)\cdot dv_x$ （↗概率 ↗概率密度）

y方向：$v_y - v_y+dv_y$. $dp=f(v_y)\cdot dv_y$

z方向：$v_z - v_z+dv_z$. $dp=f(v_z)\cdot dv_z$

② 记 $\vec{v}$ 在 $v_x - v_x+dv_x;\ v_y - v_y+dv_y;\ v_z - v_z+dv_z$ 内概率：

$dp=f(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_xdv_ydv_z \xlongequal{\text{记为}} f(\vec{v})dv_xdv_ydv_z$.

性质：(1) 考虑 $g(x^2)=f(x)=Ax^4+Bx^2+C \rightarrow f(\vec{v})$

则 $g(x)=Ax^2+Bx+C$

则有 $g(\vec{v}^2)=f(\vec{v})=g(v_x^2)g(v_y^2)g(v_z^2)$

仍写成概率密度函数的形式：

$\Rightarrow f(\vec{v}^2)=f(v_x^2)f(v_y^2)f(v_z^2)$

换函数符号用f表示（尽管映射不同）有因变量&函数值改变

类比数学期望：x_i^2的P_i与x_i的是相同的.

R156

△洛伦兹变换:

取一个对齐在O点的变换:

·模方不变的变换即称洛伦兹变换.

包括:
- 平动变换(boost): 沿一个方向平动
- 转动变换(rotation): 沿一个坐标轴转动
- 时间反演(T): $t' \leftrightarrow -t$
- 空间反演(P): $x' \leftrightarrow -x$、$y' \leftrightarrow -y$、$z' \leftrightarrow -z$ (仅变一个也可以)

+各自的组合.

·x向boost: (沿x有v_0)

$$\boxed{\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

有: $[(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2] - [(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2]$

$= (\gamma ct - \gamma\beta x)^2 - (\gamma x - \beta\gamma ct)^2 - (ct)^2 + x^2 = (\gamma^2 - \gamma^2\beta^2)(ct)^2 - (ct)^2 - (\gamma^2 - \gamma^2\beta^2)x^2 + x^2 = 0$

即模方 $\sum_{i=0}^{3} x^i x_i \overset{\text{记}}{\equiv} \boxed{x^\mu x_\mu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = Const}$.

注: 两个事件间隔: $\Delta S = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta r)^2$ 也不变. ∴满足变换

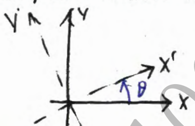
·y向boost: (沿y有v_0)

$$\boxed{\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

·z向boost: (沿z有v_0)

$$\boxed{\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

·xoy面rotation: (绕z轴转)

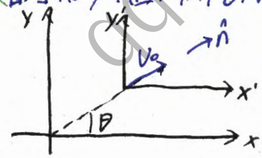


$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

☆[例] xoy平面内作出以v_0的方向的变换.



解: $\vec{r} = \underbrace{(\vec{r}\cdot\hat{n})\hat{n}}_{\text{沿变换方向}} + \underbrace{(\vec{r} - (\vec{r}\cdot\hat{n})\hat{n})}_{\text{垂直方向}}$.

有 $\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta\, \underline{\vec{r}\cdot\hat{n}}_x) \\ \underline{r_{\parallel}'} = \gamma(\underline{\vec{r}\cdot\hat{n}}_x - \beta ct) \\ \vec{r}_{\perp}' = \vec{r}_{\perp} \end{cases}$

故沿n垂方向不变(如同沿x轴垂直不变,
坐标不变+杆方向不变 (x'&x的

∴有: $ct' = \gamma ct - \beta\gamma(\cos\theta x + \sin\theta y)$

$\vec{r}' = r_{\parallel}'\hat{n} + \vec{r}_{\perp}' = \gamma(\vec{r}\cdot\hat{n} - \beta ct)\hat{n} + \vec{r}_{\perp}$

$= (\cos\theta, \sin\theta, 0)\cdot(\gamma(\cos\theta x + \sin\theta y) - \gamma\beta ct) + \vec{r} - (\vec{r}\cdot\hat{n})\hat{n}$

分量 $\begin{cases} x' = \cos\theta[\gamma(\cos\theta x + \sin\theta y) - \gamma\beta ct] - (\cos\theta x + \sin\theta y)\cos\theta + x = (\gamma - 1)\cos\theta(\cos\theta x + \sin\theta y) + x - \gamma\cos\theta\beta ct \\ y' = \sin\theta[\gamma(\cos\theta x + \sin\theta y) - \gamma\beta ct] - (\cos\theta x + \sin\theta y)\sin\theta + y = (\gamma - 1)\sin\theta(\cos\theta x + \sin\theta y) + y - \gamma\sin\theta\beta ct \\ z' = z \end{cases}$