# 第1章　函数 极限 连续

**（一）选择题**

1、下列极限中等于$e$的是

（A）$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$　　（B）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

（C）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{x}$　　（D）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^{x}$

2、下列极限存在的是

（A）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$　　（B）$\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x}$

（C）$\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\frac{1}{x}$　　（D）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x}$

3、当$x\to 1$时，函数$\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限

（A）等于 2　　（B）等于 0

（C）为$\infty$　　（D）不存在但不是$\infty$

4、当$x\to 0$时，变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是

（A）无穷小量　　（B）无穷大量

（C）有界但非无穷小量　　（D）无界但非无穷大量

5、下列命题中正确的是

（A）若$f(x)$和$g(x)$是无穷大量，则$f(x)+g(x)$是无穷大量

（B）若$f(x)g(x)$是无穷大量，则$f(x)$和$g(x)$中至少有一个是无穷大量

（C）若$f(x)$是无穷小量，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大量

（D）若$f(x)g(x)$是无穷大量，则$f(x)$和$g(x)$中至少有一个为无界变量

6、若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，则

（A）$a=1,b=1$　　（B）$a=-1,b=1$

（C）$a=1,b=-1$　　（D）$a=-1,b=-1$

7、设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中$a^2+c^2\neq 0$，则必有

（A）$b=4d$　　（B）$b=-4d$

（C）$a=4c$　　（D）$a=-4c$

8、已知$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，则

（A）$a=1,b=\dfrac{1}{2}$　　（B）$a=1,b=-\dfrac{1}{2}$

（C）$a=-1,b=\dfrac{1}{2}$　　（D）$a=-1,b=-\dfrac{1}{2}$

9、已知当$x\to 0$时，$e^{\sin x}-e^{\tan x}$是$x$的$n$阶无穷小，则$n$等于

（A）1　　（B）2

（C）3　　（D）4

10、当$x\to 0^+$时，与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$　　（B）$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　（D）$1-\cos\sqrt{x}$

11、当$x\to 0$时，下列无穷小中最低阶的是

（A）$3^{x^3}-1$　　（B）$\sqrt[3]{1+x^2}-1$

（C）$x^{100}+x$　　（D）$\tan x-\sin x$

12、已知$f(x)$在$x_0$的某去心邻域有定义，且$x_0$为$f(x)$的间断点，则在$x_0$处必间断的函数是

（A）$f^2(x)$　　（B）$|f(x)|$

（C）$f(x)\sin x$　　（D）$f(x)+\sin x$

13、设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则

（A）$x=0$必是$g(x)$的第一类间断点

（B） $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

（C） $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

（D） $g(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与 $a$ 的取值有关

14、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=$

（A） $e$　　（B） $e^{\frac{1}{2}}$

（C） $e^{-\frac{1}{2}}$　　（D） 1

15、极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)}\right)^x=$

（A） 1　　（B） $e$

（C） $e^{a-b}$　　（D） $e^{b-a}$

16、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1^x+2^x+\cdots+n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=$

（A） 1　　（B） $\sqrt[n]{n}$

（C） $\sqrt[n]{n!}$　　（D） $e^n$

17、设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n=\infty$，则下列结论错误的是

（A） $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$ 至少有一个成立

（B） $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 中至少有一个为无界变量

（C）若 $\{x_n\}$ 是无穷小量，则 $\{y_n\}$ 必为无界变量

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\neq\infty$，则 $\{y_n\}$ 必为无穷大量

18、设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

（A）可去间断点　　（B）跳跃间断点

（C）振荡间断点　　（D）无穷间断点

19、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}, & x\neq 1, x\neq -2\\ 2, & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则

（A）$a=2,b=3$　　（B）$a=-3,b=3$

（C）$a=-2,b=3$　　（D）$a=2,b=-3$

**（二）填空题**

20、已知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$，$\varphi(x)=1-\ln x$，则 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为

21、已知 $f(x)=\sin x$， $f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)$ 的定义域为

22、设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$，则 $f(-x)=$

23、设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$

24、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n+2^n}=$

25、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=$

26、设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{\frac{x}{3}}=8$，则 $a=$

27、$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}})=$

28、已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\dfrac{f(x)}{x})}{2^x-1}=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}-1}=$

29、$\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{8}{5}}(\sqrt[5]{x^2+2}-\sqrt[5]{x^2+1})=$

**（三）解答题**

30、设 $f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ x^2, & 1\le x\le 4\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$，求 $f^{-1}(x)$.

31、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$.

32、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)})$.

33、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

34、设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,m)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$ .

35、设 $a\neq\dfrac{1}{2}$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2an+1}{n(1-2a)}\right)^n$ .

36、设 $a>0$，$b>0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ .

37、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$ .

38、求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ .

39、求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-2x}}{x}$ .

40、求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$ .

41、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n})$.

42、求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-xe^{\frac{1}{x}})$.

43、求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{2x}-1}{x\ln x}$ .

44、求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

45、求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点并指出类型.

46、求函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{1-x}}-1}$ 的间断点并指出类型.

47、求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2-1} & x\le 0\\ \dfrac{x}{\sin \pi x} & x>0\end{cases}$ 的间断点并指出类型.

48、求函数 $f(x)=\dfrac{1-2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\arctan\dfrac{1}{x}$ 的间断点并指出类型.

49、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $f(a)<a$ ， $f(b)>b$ ，求证：存在 $\varepsilon\in(a,b)$，使 $f(\varepsilon)=\varepsilon$ .

50、设 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上连续， $a<x_1<x_2<b$ ，求证：存在 $\varepsilon\in(a,b)$，使 $5f(\varepsilon)=2f(x_1)+3f(x_2)$ .

51、证明方程 $\sin x-x\cos x=0$ 在 $\left(\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right)$ 内至少有一个实根.

52、设 $x_1>0$ ， $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)(n=1,2,\cdots)$ ，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ .

53、设 $x_1=\sqrt{2}$ ， $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$ ，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.