# 第 2 章 一元函数微分学

**（一）选择题**

1、设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于

（A） $f'(a)$ （B）$2f'(a)$

（C）$0$ （D） $f'(2a)$

2、设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充要条件是

（A） $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)\right]$ 存在 （B）$\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}\right]$ 存在

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}\right]$ 存在 （D）$\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}\right]$ 存在

3、设函数 $f(x)$ 对任意的 $x$ 满足 $f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 $a$，$b$ 为非零的常数，则

（A） $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$

（B） $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导

（C） $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$

（D） $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$

4、设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|x|)$，若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有

（A） $f(0)=0$ （B） $f'(0)=0$

（C） $f(0)+f'(0)=0$ （D） $f(0)-f'(0)=0$

5、设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $\varphi(x)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的

（A）充分必要条件 （B）必要但非充分条件

（C）充分但非必要条件 （D）既非充分也非必要条件

6、若函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点可导，且 $f'(x_0)=2$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $dy$ 是

（A）与 $\Delta x$ 等价的无穷小 （B）与 $\Delta x$ 同阶的无穷小

（C）比 $\Delta x$ 低阶的无穷小 （D）比 $\Delta x$ 高阶的无穷小

7、设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2x^3, & x>1 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处

（A）左右导数均存在　　（B）左导数存在，但右导数不存在

（C）左导数不存在，但右导数存在　　（D）左右导数都不存在

8、已知曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，则

（A）$a=0,b=-2$　　（B）$a=1,b=-3$

（C）$a=-3,b=1$　　（D）$a=-1,b=-1$

9、设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^3}=1$，则在点 $x=x_0$ 处

（A）$f(x)$ 的导数存在，且 $f'(x_0)\neq 0$　　（B）$f(x)$ 取得极大值

（C）$f(x)$ 取得极小值　　（D）$f(x)$ 不取得极值

10、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对任意 $x_1$，$x_2$，当 $x_1>x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则

（A）对任意 $x$，$f'(x)>0$　　（B）对任意 $x$，$f'(-x)\le 0$

（C）函数 $f(-x)$ 单调增加　　（D）函数 $-f(-x)$ 单调增加

11、已知函数 $f(x)$ 对一切的 $x$ 满足 $f''(x)+xf'^2(x)=e^x$，若 $f'(x_0)=0$，则

（A）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

（B）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

（C）$(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0,f(x_0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

12、设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，则 $f'(x)$ 零点个数为

（A）1 个　　（B）2 个

（C）3 个　　（D）4 个

13、曲线 $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$ 的渐近线条数为

（A）0　　（B）1

（C）2　　　　　　　　　　　　　　（D）3

**（二）填空题**

14、设 $f(x)=\dfrac{(x-a)(x^2-1)}{x^2+1}$，则 $f'(a)=$

15、设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，$f(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n=$

16、已知奇函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$，$g(x)=\begin{cases} f(x)\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则 $g'(0)=$

17、设函数 $f(x)$ 有连续的导数，$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$，若函数 $F(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ A, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$

18、曲线 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 上对应于 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 处的法线方程是

19、设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为

20、对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程为

21、设 $y=\ln(1+2^{-x})$，则 $dy=$

22、设 $\begin{cases} x=2+t^2 \\ y=\sin t \end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$

23、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$

24、已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 所确定，则 $y''(0)=$

25、设 $f(x)$ 为连续函数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，则曲线 $y=f(x)$ 上对应点 $x=0$ 处的切线方程为

26、已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$

27、设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$

28、设 $f(x)=\dfrac{1}{3x+2}$，则 $f^{(n)}(0)=$

29、设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-t}{x+t}\right)^{x}$，则 $f'(t)=$

30、$\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$

31、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$

32、曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})(x>0)$ 的渐近线方程为

**（三）解答题**

33、设 $f(x)=\ln(2+x)$，求 $f^{(n)}(x)$.

34、设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，求 $f^{(n)}(x)$.

35、设 $f(x)=\sin^2 x$，求 $f^{(n)}(x)$.

36、求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

37、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

38、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}$.

39、设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

40、证明方程 $x^3+x^2+x=1$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个实根.

41、设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为任意实数，求证方程 $a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx=0$ 在 $[0,\pi]$ 内必有实根.

42、试证当 $x>1$ 时，$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$.

43、设 $p$，$q$ 是大于 1 的常数，并且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，证明：对于任意的 $x>0$，有 $\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}\geq x$.

44、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=f(c)$，其中 $a<c<b$，试证 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$.

45、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且不恒为常数，在 $(a,b)$ 内可导. $f(a)=f(b)$，证明在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $f'(\xi)>0$.

46、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，试证明：

（1）$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+f(\xi)=0$；

（2）$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)-f(\xi)=0$；

（3）$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$.

47、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，试证明 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $\xi f'(\xi)=-f(\xi)$.