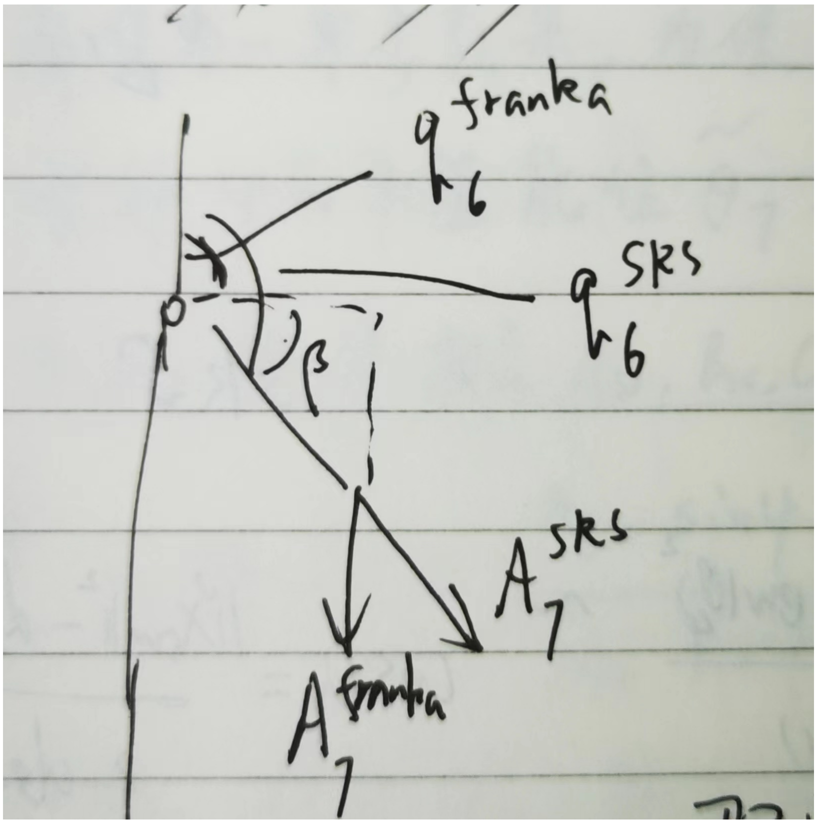
已知，对于SRS构型的七轴机械臂，如kuka iiwa，可以有解析反解[[1]](#ref1)，记此解析解为$ik_{SRS}(T,\phi)$。其中，T是末端执行器的位姿矩阵，ϕ是自由度参数。

对于franka emika七轴机械臂，由于SRS构型的条件不满足，以上算法失效。以下，我们提出一种方法，将franka机械臂等效为SRS构型机械臂，并以此为依据提出franka机械臂的一种解析反解。

STEP1，将末端化为SRS构型末端。



如图所示，在末端坐标相同时，q_6^{franka}和q_6^{SRS}相差一个固定角度$\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$，而不难计算出

$\alpha=arctan(\frac{offset}{d_{wt}})=arctan(\frac{88}{107})$

$q_6^{franka}=q_6^{SRS}-\alpha$

在$q_7=0$时，两种构型的姿态关系为：

$R_0^{SRS}=R_0^{franka}\cdot R_y(-\alpha)$

而当q_7 不为0时，若令$q_7^{SRS}=q_7^{franka}$则有：

$R_0^{franka}=R^{franka}\cdot R_z(-q_7)$

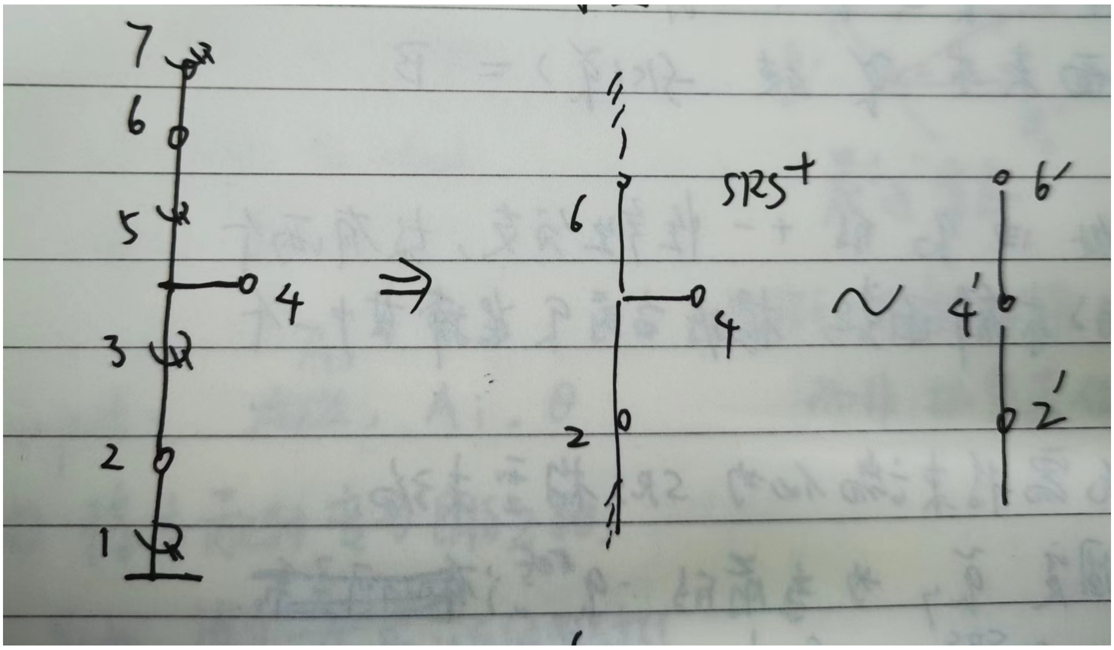
$R^{SRS}=R_0^{SRS}\cdot R_z(q_7)$

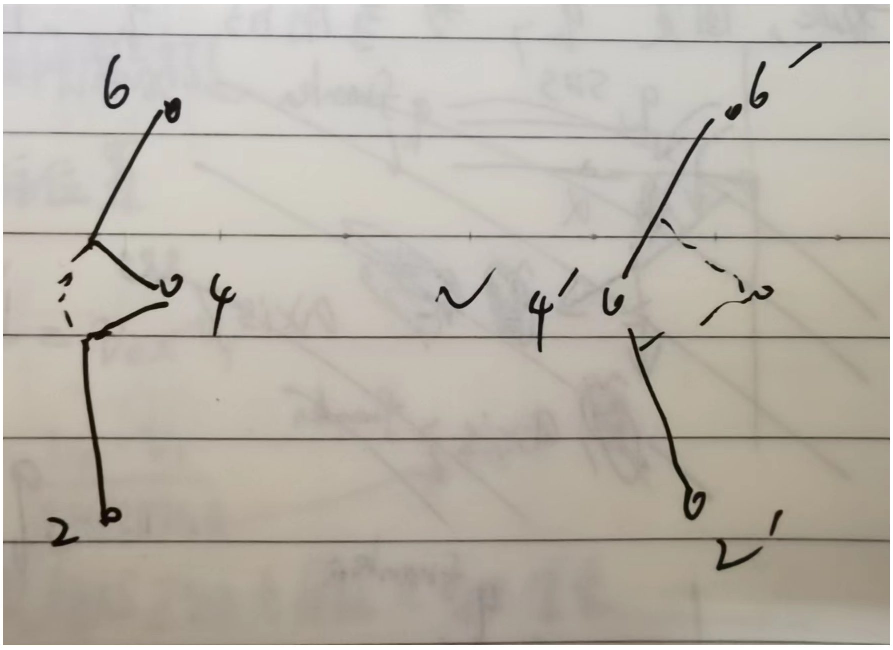
从而得到：

$R^{SRS}=R^{franka}\cdot R_z(-q_7)\cdot R_y(-\alpha)\cdot R_z(q_7)$

此时，得到了SRS+构型，也就是除了4轴处有偏移量之外，和SRS构型相同的构型。

STEP2, 将4轴转化为等效的SRS构型





如图所示，由于四轴偏移，franka虽然可以等效为SRS构型机械臂，但由于等效机械臂的4轴处连杆和q_4有关，所以此等效模型准确说来是依赖于q_4的一族等效SRS机械臂。

然而，虽然相较于SRS模型更复杂，我们仍然能够求解q_4 。

在SRS构型机械臂中，有如下方程:

$$cosq_4 = \frac{|x_{sw}^0|^2 - d_{se}^2 - d_{ew}^2}{2d_{se}d_{ew}}$$

而在SRS+构型中，有如下方程：

$$cosq_4 = \frac{|x_{sw}^0|^2 - d_{se}(q_4)^2 - d_{ew}(q_4)^2}{2d_{se}(q_4)d_{ew}(q_4)}$$

令x_{sw}^0长度为λ，4轴两侧连杆长度为d, δ，偏移量为k，上述方程化为如下形式的方程:

$$cos\theta = \frac{\lambda - (d + k \cdot tan\frac{\theta}{2})^2 - (\delta + k \cdot tan\frac{\theta}{2})^2}{2 \cdot (d + k \cdot tan\frac{\theta}{2})(\delta + k \cdot tan\frac{\theta}{2})}$$

从此方程可以解出q_4（具体求解方法见附录），从而得到等效的两侧连杆长度为:

$\hat{d}_{se} = d_{se}(q_4), \hat{d}_{ew} = d_{ew}(q_4)$

STEP3：确定等效SRS构型自由度参数

而一旦确定了θ_4，由SRS构型解的特性，知道有一个参数ϕ使得解集是一个单参数集，由于我们在STEP1中要求$q_7^{SRS} = q_7^{franka}$，为使等效SRS模型的q_7求解后等同于franka的q_7，需要决定ϕ的取值使得解出的q_7^{SRS}等于q_7^{franka}。

根据参考文献，在SRS模型中，求解q_4后可以构造矩阵A_w, B_w, C_w。由于我们采用的是等效法，需要用$R^{SRS}, \hat{d}_{se}, \hat{d}_{ew}$代替$R^{franka}, d_{se}, d_{ew}$来计算矩阵。根据矩阵得到$q_7$和$\phi$的关系：

$$-tanq_7 = \frac{a_{32}sin\phi + b_{32}cos\phi + c_{32}}{a_{31}sin\phi + b_{31}cos\phi + c_{31}}$$

从而通过简单的和差化积就能得到ϕ的值

STEP4: 代入等效SRS构型求解

根据参考文献的方法，继续求出矩阵 A_s, B_s, C_s，在已有自由度参数ϕ的情况下，就可以求出q_1到q_3, q_5和q_6^{SRS}。

再利用STEP1中q_6^{franka}和q_6^{SRS}的关系求出 q_6。至此，完成指定q_7（即以q_7为自由度参数）的franka emika解析反解。

APPENDIX：特殊方程的求解

首先，

$$cos\theta = \frac{1 - tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + tan^2\frac{\theta}{2}}$$

令：

$x = tan\frac{\theta}{2}$

方程化为：

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \frac{\lambda - (d + kx)^2 - (\delta + kx2)^2}{2 \cdot (d + kx)(\delta + kx)} \implies Ax^2 + Bx^2 + C = 0\$$$

此处:

$A = 4k^2 + (b - d)^2 - \lambda^2$

$B = 4k(b + d)$

$C = (b + d)^2 - \lambda^2$

从而容易求解。

参考文献

[1] JM. Shimizu, H. Kakuya, W. Yoon, K. Kitagaki and K. Kosuge, "Analytical Inverse Kinematic Computation for 7-DOF Redundant Manipulators With Joint Limits and Its Application to Redundancy Resolution," in IEEE Transactions on Robotics, vol. 24, no. 5, pp. 1131-1142, Oct. 2008, doi: 10.1109/TRO.2008.2003266.