数学建模课程笔记

yangmei

2023 年 12 月 9 日

目录

第一章 Secret Sharing

1.1 秘密共享

Secret Sharing：将秘密分成若干份，分发给不同的用户。用户特定子集共同提供各自的份额，才能重构初始秘密。

Treshold Scheme(t, n) : 在 n 人之间共享秘密，其中任意 $t \leq n$ 个人可求出秘密，任意 $t-1$ 个人无法求出秘密。

1.2 Combinatorial Mathematics

问题：Eleven scientists are working on a secret project. They wish to lock up the documents in a cabinet so that the cabinet can be opened if and only if six or more of the scientists are present. What is the smallest number of locks needed? What is the smallest number of keys to the locks each scientist must carry?

采用组合数学的方法："少数"与"多数"：

1. 设相关人共有 $2n+1$ 个，任意 n 人组成的"少数"团体不能打开安全门，任意 $n+1$ 人组成的"多数"团体可以打开安全门

2. 两个不同的"少数"团体联合必包含某个多数团体

3. 任一"少数"团体和不属该团体的任一人联合可成为多数团体

锁与钥匙：

1. 安全门上至少需要 $\binom{2n+1}{n}$ 把锁 $\binom{11}{5} = 462$

   任一"少数"团体至少有一把锁不能打开

任意两个少数" 各不相同

2. 每个人至少需要 $\binom{2n}{n}$ 把钥匙 $\binom{10}{5} = 252$ 每个人需拥有他所不属于的所有少数" 团体所打不开的锁的钥匙

用数学上集合的语言来表述：给锁编号 $1, 2, \cdots, l$，打开所有门的钥匙的全集即为 $K = 1, 2, \cdots, l$，任意第 i 人拥有的钥匙集合为 S_i，则满足：

(1) $S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \cdots \cup S_{i_n} \subset K/k_i$

(2) $S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \cdots \cup S_{i_n} \cup S_{i_{n+1}} = K$

则有：

1. 那么对于不同的 n 的并，所对应的 k_i 不同，任意一个 k_i 必有一族 $\{i_1\ i_2, \cdots i_n\}$ 与之对应则 $k_i \in K$ 共有 C_{2n+1}^{n} 个

2. $k_i \in S_{i_{n+1}}$，这样的 k_i 有 C_{2n+1}^{n+1} 个

1.3 Shamir's Threshold Scheme

1.3.1 Lagrange Polynomial interpolation

定理 1.3.1. *Given k points in the 2-dimensional plane $(x_1 y_1) \cdots (x_k, y_k)$. with distinct x_i's , there is one and only one polynomial $q(x)$ of degree $k-1$ such that $q(x_i) = y_i$ for all x_i.*

设多项式 $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}, deg(q) = k-1$，利用 $k-1$ 组值求得 $q(x)$ 的各项系数系数矩阵：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

这是一个 Vandermode 行列式

1.3.2 Shamir 门限机制 (t,n)

任选 $t-1$ 个整数 $x_1,x_2,\cdots,x_{t-1}$ 和 n 个互不相同的整数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 。素数 $p>n+1$ 求 $b_j\equiv(K+c_jx_1+c_j^2x_2+\cdots+c_j^{t-1}x_{t-1})\,(\mathrm{mod}p)\,,j=1,\cdots,n$ 其中 $K\in\mathbb{Z}$ 为秘密

$$f(c)=K+x_1c+x_2c^2+\cdots+x_{t-1}c^{t-1},b_j\equiv f(c_j)(\mathrm{mod}p),j=1,\cdots,n$$

将秘密份额 (c_j,b_j) 告知第 $_j$ 人

证明. 证明 Shamir 门限机制的合理性

(1) 若 t 个人 $j_1,\cdots,j_t$ 共享秘密份额 $(c_{j_i},b_{j_i}),i=1,\cdots,t$
方程组 $b_i\equiv\left(K+c_{j_i}x_1+c_{j_i}^2x_2+\cdots+c_{j_i}^{t-1}x_{t-1}\right)(\mathrm{mod}p)\,,i=1,\cdots,t$ 在模 p 意义下有唯一解由于系数矩阵为

$$\begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^{t-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \cdots & c_2^{t-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_{t-1} & c_{t-1}^2 & \cdots & c_{t-1}^{t-1} \\ 1 & c_t & c_t^2 & \cdots & c_t^{t-1} \end{vmatrix}\neq 0$$

其行列式为 Vandermode 行列式,即 $det=\prod_{i=1}^{k-1}(c_i-c_{i+1})$,因此 $det\neq 0$ 同时 $rank(row)=rank(column)$，方程有唯一解。

(2) 若 $t-1$ 个人 $j_1,\cdots,j_{t-1}$ 共享秘密份额 $(c_{j_i},b_{j_i}),i=1,\cdots,t-1$
方程组 $b_{j_i}\equiv(K+c_{j_i}x_1+c_{j_j}^2x_2+\cdots+c_{j_i}^{t-1}x_{t-1})(\mathrm{mod}p),i=1,\cdots,t-1$ N 含 $t-1$ 个方程，t 个未知数，在模 p 意义下有无穷多组解

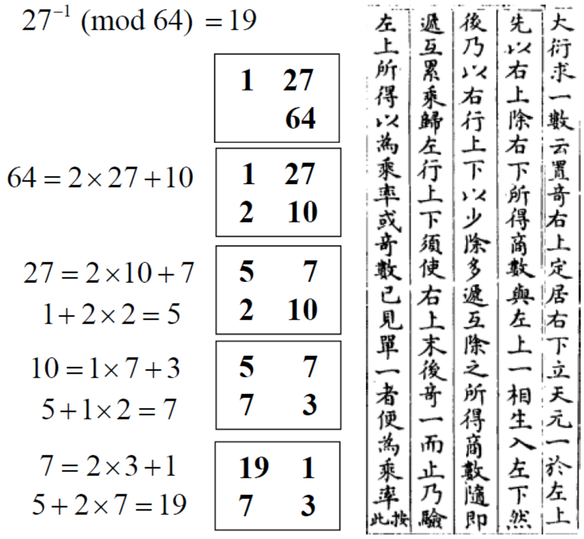
□

1.4 Asmuth-Bloom's Threshold Scheme

1.4.1 中国剩余定理

定义 1.4.1 (逆). 设 a,b 为整数，m 为正整数，若 $ab\equiv1(\mod m)$，则称 a 模 m 可逆，且 b 是 a 在模 m 意义下的逆元，记为 $a^{-1}(modm)$

a 对模 m 可逆的 $\Leftrightarrow (a,m)=1$，即 a 与 m 互质



例 1.4.2 (大衍求一术求逆元).

定义 1.4.3 (一次同余方程). 形如 $ax\equiv b(\mod m)$ 的方程，其中 a,b,m 为整数，$m>0$。

定理 1.4.4 (线性同余方程有解和唯一). *(1)* 当且仅当 $gcd(a,m)|b$ 时，线性同余方程有解。

(2) 当 $gcd(a,m)=1$ 时，方程的解为 $a^{-1}b$，且小于 m 的非负整数解唯一。

其中 a^{-1} 是 a 在模 m 意义下的逆元。

定理 1.4.5 (中国剩余定理 (数论)). 设 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 为两两互质的正整数,$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为任意整数，记 $M=m_1m_2\cdots m_k$，则一次同余方程组

$$\begin{cases} x\equiv a_1(\mod m_1) \\ x\equiv a_2(\mod m_2) \\ \vdots \\ x\equiv a_k(\mod m_k) \end{cases}$$

(1) 有小于 M 的唯一正整数解 $x=M_1M_1^{-1}a_1+M_2M_2^{-1}a_2+\cdots+M_kM_k^{-1}a_k(\mod M)$，其中 $M_i=M/m_i$，M_i^{-1} 是 M_i 在模 m_i 意义下的逆元。

(2) 对任意 $l\in\mathbb{Z}$，$x+l\cdot m$ 也是同余方程组的解.

定理 1.4.6 (中国剩余定理 (代数多项式)). 设 $f_i(x)|i=1,\cdot,n$ 是两两互素的多项式，$a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x)$ 是 n 个多项式，则存在多项式 $g(x)$，$q_i(x)(i=1,2\cdots,n)$，使得 $g(x)=f_i(x)q_i(x)+a_i(x)$ 对一切 i 成立。

例 1.4.7 (物不知数).

$$\begin{cases} x\equiv 2(\text{mod}3) \quad N_1=5\cdot 7=35 \quad N_1^{-1}(\text{mod}3)=2 \\ x\equiv 3(\text{mod}5) \quad N_2=3\cdot 7=21 \quad N_2^{-1}(\text{mod}5)=1 \\ x\equiv 2(\text{mod}7) \quad N_3=3\cdot 5=15 \quad N_3^{-1}(\text{mod}7)=1 \end{cases}$$

$$m=3\cdot 5\cdot 7=105 \quad 35\cdot 2\cdot 2+21\cdot 1\cdot 3+15\cdot 1\cdot 2=233$$

$$x=23\equiv 233 \pmod{105}$$

1.4.2 Asmuth-Bloom 门限机制 (t,n)

设秘密为 K

(1) 选取整数 p 与 $m_1,\cdots,m_n$

$p>K$ 且 p 与 $m_j,1\le j\le n$ 互素，$m_1<\cdots<m_n$ 且 $m_1,\cdots,m_n$ 两两互素

$$\frac{m_1\cdots m_t}{m_{n-t+2}\cdots m_n}>p$$

即为 $m_1,\cdots,m_n$ 中任意 t 个数的乘积与任意 $t-1$ 个数的乘积之比大于 p

(2) 令 $K'=K+r\cdot p$, 其中 $r\in\mathbb{N}$ 满足

(i)$0\le r\le \frac{m_1\cdots m_t}{p}-1$

(ii)$K'=K+r\cdot p\le K+m_1\cdots m_t-p<m_1\cdots m_t$

再令 $k_j\equiv K'(\text{mod}m_j),1\le j\le n$, 将秘密份额 (k_j,m_j) 告知第 j 人

证明. 证明 Asmuth-Bloom 门限机制的合理性

$k_j\equiv K'(\text{mod}m_j),1\le j\le n$ ，因此 K' 满足的方程: $K'\equiv k_j(\text{mod}m_j),1\le j\le n$

$K'=K+r\cdot p<m_1\cdots m_t$ ，K' 对 p 取模求出 K: $K\equiv K'(\text{mod } p)$

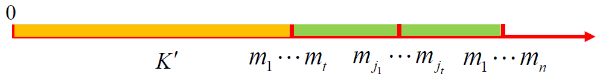
一次同余方程组 (I) $x\equiv k_j\,(\text{mod}m_j)\,,1\le j\le n$ 有唯一的小于 $m_1\cdots m_n$ 的非负整数解 K'

(1) 若 t 个人 $j_1,\cdots,j_t$ 共享秘密份额 $(k_{j_i},m_{j_i})\,,i=1,\cdots,t$

一次同余方程组 (II) $x\equiv k_{j_i}(\text{mod}m_{j_i})$, $i=1,\cdots,t$ 有唯一的小于 $m_{j_1}\cdots m_{j_t}$ 的正整数

解 X

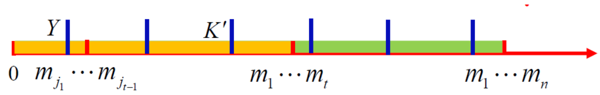
K' 也为方程 (II) 的解，且 $K' < m_1 \cdots m_t < m_{j_1} \cdots m_{j_t}$ 。由中国剩余定理，解的唯一性有 $K' = X$



(2) 若 $t-1$ 个人 $j_1, \cdots, j_{t-1}$ 共享秘密份额 $(k_{j_i}, m_{j_i}), i = 1, \cdots, t-1$

一次同余方程组 (III) $x \equiv k_{j_i}(\text{mod} m_{j_i})$, $i = 1, \cdots, t-1$ 有唯一的小于 $m_{j_1} \cdots m_{j_{t-1}}$ 的正整数解 Y

$Y + l \cdot m_{j_1} \cdots m_{j_{t-1}} < \frac{1+l}{p} * m_{j_1} m_{j_2} \cdots m_{j_t}, l \in \mathbb{Z}$ 均为方程组 (III) 的解，K' 为这些解中的某一个，K' 的限制条件仅有 $K' < m_1 m_2 \cdots m_t$，因此 K' 不能唯一确定



□

(1)Liu, C.L. Introduction to Combinatorial Mathematics. McGraw-Hill,1968

(2) Shamir A. How to share a secret. Communications of the ACM, 1979, 22(11): 612-613.

(3) Asmuth AC, Bloom J. A modular approach to key safeguarding. IEEE Transactions on Information Theory, 29, 208-210, 1983.

第二章 Page Rank

2.1 网页重要度

网页重要度的原则与假设

某网页重要，是因为有重要的网页链接到它, 对任一网页 A，确定一数值为其重要度，作为网页排序的依据链接到网页 A 的所有网页对网页 A 的重要度均有贡献，贡献大小与这些网页自身的重要度有关

1. （传递性）重要度大的网页链接到网页 A 时对网页 A 的重要度的贡献比重要度小的网页链接到网页 A 时对网页 A 的重要度的贡献大：某网页对其它网页重要度的贡献之和等于它的重要度

2. （等效性）网页对它所链接的每个网页的重要度的贡献相等：某网页对其它网页的重要度贡献与它所链接的网页数量呈反比

3. （叠加性）链接到网页 A 的网页越多，网页 A 越重要：网页 A 的重要度是所有链接到 A 的网页对网页 A 的重要度的贡献之和

4. （无关性）网页链接其它网页的多少，与其本身的重要度无关

网页链接图

定义 2.1.1 (网页链接图). 互联网中网页之间的链接关系可用图表示，称为网络链接图。

顶点 网页 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$

弧 网页间的链接关系，即若网页 ν_i 上有链接指向网页 ν_j, 则网络链接图中有一条以 ν_i 为起点，ν_j 为终点的弧

出度 以某顶点为起点的弧的总数，即该网页链接的网页数量

网页重要度的矩阵表示

网页 ν_i 的重要度记为 x_i 出度记为 q_i

传递性 网页 ν_i 对其它网页重要度贡献之和为 x_i

等效性 网页 ν_i 对它链接的 q_i 个网页中的任一个的重要度贡献为 $\frac{x_i}{q_i}$

叠加性 若链接到网页 ν_j 的网页有 $\nu_{j_1}, \nu_{j_2}, \cdots, \nu_{j_k}$, 则

$$x_j = \frac{x_{j_1}}{q_{j_1}} + \frac{x_{j_2}}{q_{j_2}} + \cdots + \frac{x_{j_k}}{q_{j_k}}$$

记 p_{ij} 为网页 v_i 到 v_j 的链接概率，即 v_i 链接到 v_j 的概率，有

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{q_j}, & 若v_j链接到v_i \\ 0, & 若v_j不链接到v_i \end{cases}$$

所以，上式改写为

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j$$

记矩阵 $\mathbf{P} = (p_{ij})_{n\times n}$ 为初始链接矩阵（网页 v_j 的出度列向量 $\mathbf{p_j} = (p_{1j}, p_{2j,\cdots,p_{nj}})^T$，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为网页重要度向量，则 $\mathbf{x}$ 为线性方程方程 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ 的解。

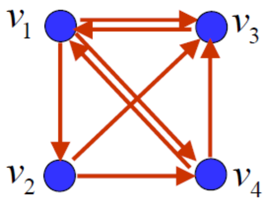
$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x} \tag{2.1}$$

(1)$\mathbf{x}$ 是 $\mathbf{P}$ 的特征向量，对应的特征值为 1。

(2)Rank$(\mathbf{I} - \mathbf{P}) < n$ 由于 $\mathbf{1}^T(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathbf{0}$(即说明其行向量线性相关)

(3) 方程 (2.1) 一定有非零解吗，即重要度向量 $\mathbf{x}$ 一定存在吗，以及存在一定唯一吗，这个问题之后分析。

$$\begin{cases} x_1 = \qquad\qquad\qquad x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \qquad + \frac{1}{2}x_4 \\ x_4 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$



	1	2	3	4
1			√	
2	√			
3	√	√		√
4	√	√		√
出度	3	2	1	4

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{0} & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1/2 \\ -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/3 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{12}{31}, x_2 = \frac{4}{31}, x_3 = \frac{9}{31}, x_4 = \frac{6}{31}$$

例 2.1.2 (链接矩阵与重要度向量的求解).

2.2 随机矩阵

定义 2.2.1. *各行 (列) 元素之和均为 1 的非负方阵称为行 (列) 随机矩阵 (row(column) stochastic matrix)*

各行与各列元素之和均为 1 的非负方阵称为双随机矩阵 (doubly stochastic matrix)

定理 2.2.2 (随机矩阵的模最大特征值). *任一随机矩阵的模最大特征值为 1*

证明. 设 λ 是行随机矩阵 $\mathbf{P} = (p_{ij})_{n\times n}$ 的特征值，非零向量 $\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为属于特征值 λ 的特征向量。设 $|x_i| = \max_{1\le j\le n} |x_j| > 0$

由 $\mathbf{PX} = \lambda\mathbf{X}$, 可得 $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j$。两边取模，$|\lambda||x_i| = |\lambda x_i| = |\sum_{i=1}^{n} p_{ij}.x_j| \le \sum_{i=1}^{n} |p_{ij}||x_j| \le |x_i| \sum_{i=1}^{n} |p_{ij}| = |x_i|$, 即 $|\lambda| \le 1$ □

2.3 链接矩阵

链接矩阵的基本性质

(1) 链接矩阵 $\mathbf{P}$ 的每列元素之和为 1 ，为列随机矩阵

(2) 链接矩阵 $\mathbf{P}$ 一定存在特征值为 1 的非零特征向量

(3) $\mathbf{1}^T\mathbf{P} = \mathbf{1}^T$

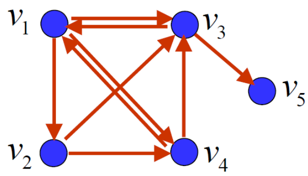
2.3.1 悬挂网页修正

悬挂网页 (dangling link): 若某网页不链接任意其它网页

悬挂网页修正：将链接矩阵 $\mathbf{P}$ 中对应列的所有元素由 0 修改为 $\frac{1}{n}$，得到修正链接矩阵 $\overline{\mathbf{P}}$

$$\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{d}^{\mathrm{T}}$$

其中 $mathbf{1}$ 为分量全为 0 的列向量。



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \mathbf{P} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 2.3.1 (悬挂网页修正)**.**

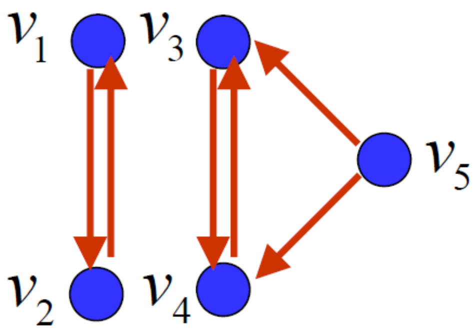
2.3.2 多解修正

若 P 有两个属于特征值 1 的线性无关的特征向量重要度向量排序不唯一

$$\bar{\bar{\mathbf{P}}} = 0.85\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0.15\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.88 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0.88 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.88 & 0.455 \\ 0.03 & 0.03 & 0.88 & 0.03 & 0.455 \\ 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \end{pmatrix}$$

H

图 2.2: 多解修正



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

图 2.1: 修正矩阵 $\bar{\mathbf{P}}$ 具有两个特征值为一的特征向量 (重要度向量)

将 $\bar{\mathbf{P}}$ 修改为最终的链接矩阵，修正方法：

$$\bar{\bar{\mathbf{P}}} = \alpha\bar{\mathbf{P}} + (1-\alpha)\frac{1}{n}-\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$$

其中参数 $\alpha = 0.85$

$\bar{\bar{\mathbf{P}}}$ 为完全正矩阵 (totally positive matrix) 与列随机矩阵:

$$\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\bar{\bar{\mathbf{P}}} = \alpha\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + (1-\alpha)-\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}} = \alpha\mathbf{1}^{\mathrm{T}} + (1-\alpha)\mathbf{1}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}^{\mathrm{T}}$$

2.3.3 重要度向量的存在唯一性

引理 2.3.2. *完全正、列随机矩阵属于特征值的特征向量分量之和不为 0。*

证明. 设 $\mathbf{x}$ 是完全正、列随机矩阵 $\mathbf{P}$ 的属于特征值 1 的特征向量，则 $x_i = \sum_{j=1}^{n} \overline{\overline{p}}_{ij} x_j$

若 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$，则 $\mathbf{x}$ 的分量有正有负，故

$$|x_i| = |\sum_{j=1}^{n} \overline{\overline{p}}_{ij} x_j| < \sum_{j=1}^{n} \overline{\overline{p}}_{ij} |x_i|$$

故而

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| < \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\overline{p}}_{ij} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{p}}_{ij} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} (|x_j| \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{p}}_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

矛盾。 □

命题 2.3.3. *完全正、列随机矩阵仅有个属于特征值 1 的线性无关的特征向量。*

证明. 设 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T, \mathbf{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ 是完全正、列随机矩阵 $\mathbf{P}$ 的两个属于特征值 1 的线性无关的特征向量。令 $x_i = -\frac{W}{V} v_i + w_i, i = 1, 2, \cdots, n$，其中 $W = \sum_{i=1}^{n} w_i, V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 0$.

首先若向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $\mathbf{P}$ 的特征值为 λ 的特征向量 $\Leftrightarrow \forall i, \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j = \lambda x_i$, 根据特征向量的定义即可证得。

由 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 线性无关，且

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j = \sum_{j=i}^{n} p_{ij} (-\frac{W}{V} v_j + w_j) = -\frac{W}{V} p_{ij} v_j + \sum_{j=i}^{n} p_{ij} w_j = -\frac{W}{V} v_i + w_i = x_i$$

可知 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 为 P 的属于特征值 1 的特征向量

又有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (-\frac{W}{V} v_i + w_i) = -\frac{W}{V} \sum_{i=1}^{n} v_i + \sum_{i=1}^{n} w_i = -\frac{W}{V} V + W = 0$$

即 $\mathbf{x}$ 的分量之和为零。

从而与上面的结论矛盾。 □

Perron—Frobenius 定理

Perron 定理

若矩阵 $\mathbf{A}$ 是完全正矩阵，则

(1) $\mathbf{A}$ 的模最大特征值唯一，且为正实数

(2) 该特征值代数重数为 1

(3) 存在该特征值的一个特征向量，其分量全为正

Perron—Frobenius 定理

若矩阵 $\mathbf{A}$ 是非负不可约（irreducible）矩阵，则

(1) $\mathbf{A}$ 的模最大特征值为正实数

(2) 该特征值代数重数为 1

(3) 存在该特征值的一个特征向量，其分量全为正

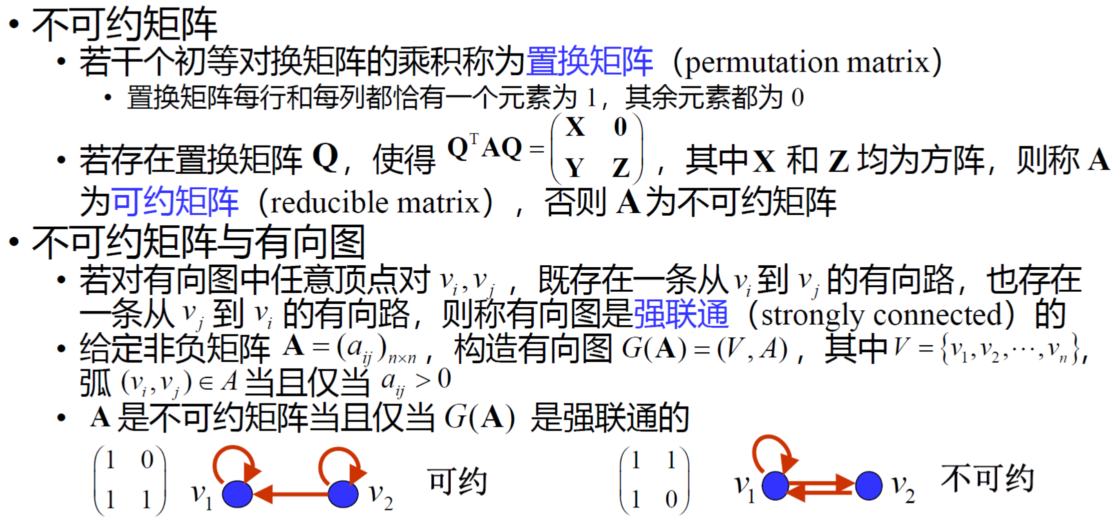


图 2.3: 不可约矩阵简单介绍

链接矩阵与重要度向量

链接矩阵为<u>完全正、列随机矩阵</u>，模最大特征值为 1，重要度向量<u>唯一且分量全为正</u>.

2.4　矩阵计算

2.4.1　幂法迭代

幂法是计算矩阵模最大特征值和对应的特征向量的一种迭代算法

任取初始向量 $\mathbf{x}^{(0)} > 0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{(0)} = 1$，

迭代计算 $\mathbf{x}^{(k)} = \overline{\overline{\mathbf{P}}}\mathbf{x}^{(k-1)}$，直到 $\mathbf{x}^{(k)}$ 收敛

迭代后的向量仍然向量之和为 1:

$$\mathbf{1}^T\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{1}^T\overline{\overline{\mathbf{P}}}\mathbf{x}^{(k-1)} = \mathbf{1}^T\mathbf{x}^{(k-1)} = 1$$

将 $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{d}^T$，$\overline{\overline{\mathbf{P}}} = \alpha\overline{\mathbf{P}} + (1-\alpha)\frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ 两式带入迭代计算式中

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k)} &= \overline{\overline{\mathbf{P}}}\mathbf{x}^{(k-1)} \\
&= \alpha\overline{\mathbf{P}}\mathbf{x}^{(k-1)} + (1-\alpha)\frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{x}^{(k-1)} \\
&= \alpha\overline{\mathbf{P}}\mathbf{x}^{(k-1)} + (1-\alpha)\frac{1}{n}\mathbf{1} \\
&= \alpha(\mathbf{P} + \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{d}^T)\mathbf{x}^{(k-1)} + (1-\alpha)\frac{1}{n}\mathbf{1} \\
&= \alpha\mathbf{P}\mathbf{x}^{(k-1)} + \alpha\frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{d}^T\mathbf{x}^{(k-1)} + (1-\alpha)\frac{1}{n}\mathbf{1}
\end{aligned}$$

2.4.2　完全正、列随机矩阵的幂法收敛性

证明. 记 $\mathbf{V}$ 为满足 $\mathbf{1}^T\mathbf{v} = 0$ 的 n 维列向量 $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 全体组成的集合。记 $\|\mathbf{v}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |v_i|$(范数)

对任意的 $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$，取 $\mathbf{w} = \mathbf{P}\mathbf{v}$，下证：$\|\mathbf{w}\|_1 \leq c\,\|\mathbf{v}\|_1$，其中 $c < 1$

若 $\mathbf{w} = 0$，显然成立。

若 $\mathbf{w} \neq 0$，记 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$，$e_i = \operatorname{sgn}(w_i)$，则 $c = \max_j \left|\sum_{i=1}^{n} p_{ij}e_i\right| < \left|\sum_{i=1}^{n} p_{ij}e_i\right| < 1$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{w}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{w}_i| = \sum_{i=1}^{n} e_i w_i = \sum_{i=1}^{n} e_i \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\nu_j\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}e_i\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |v_j| \left|\sum_{i=1}^{n} p_{ij}e_i\right| \leq c\sum_{j=1}^{n} |\mathbf{v}_j| = c\,\|\mathbf{v}\|_1
\end{aligned}$$

□