数理方法复习

Lvyangsen

2024 年 1 月 13 日

目录

第一章　复变函数

1.1　基础

1.1.1　复数的几何表示、极坐标表示、指数表示

模 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, 辐角 $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ 辐角主值 $\arg z$, $\varphi = \mathrm{Arg} z = \arg z + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$$

1.1.2　常见初等函数

$$\begin{aligned}
&e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad (\text{周期为}2\pi i)\\
&\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad (\text{模可以大于 1, 周期为}2\pi)\\
&\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\\
&\ln z = ln|z| + i\mathrm{Arg} z \qquad (\text{多值函数})\\
&z^s = e^{s\ln z}
\end{aligned}$$

1.2　解析函数

定义 1.2.1 (连续)**.** 复变函数 $f(z)$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 连续的定义是:

当 $z \to z_0$ 时, $f(z) \to f(z_0)$

即: $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon, z_0) > 0$, 使当 $|z - z_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

定义 1.2.2 (可导)**.** 单值函数 $f(z)$ 在 z_0 点满足 $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ 存在,
并且与 $\Delta z \to 0$ 的方式无关, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导.

定义 1.2.3 (解析)**.** 若 *f(z)* 在区域 G 内处处可导, 则称 *f(z)* 是 G 内的解析函数。解析函数无穷阶可导

1.2.1　Cauchy-Riemann 条件

记 $f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$

$$f(z)\text{在}z\text{点可导} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

极坐标形式：

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

充分必要条件：

$$f(z)\text{在}z\text{可导} \iff \begin{cases} \text{Cauchy-Riemann 条件} \\ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\text{存在且连续} \end{cases}$$

1.2.2　解析性质

1. 若函数 $f(z) = u+\mathrm{i}v$ 在区域 B 上解析，则

$$u(x,y) = C_1, v(x,y) = C_2$$

(C_1, C_2 为常数) 是 B 上的两组正交曲线族.

2. 解析函数的实部和虚部都是调和函数，满足二维 Laplace 方程.

$$f(z)\text{解析} \implies \begin{cases} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

例 1.2.4 (由实部求虚部从而求出解析函数)**.** *已知 $u(x,y)$, $\Rightarrow \mathrm{d}v = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$.*

1. 可用曲线积分法 (全微分的积分与路径无关)、不定积分法、凑微分法对 $v = \int dv$ 进行求解。

2. 注意 $f(z)$ 要最终表示为以 z 为自变量的形式, 以及积分过程中不能忘记常数项 C.

3. 可用极坐标系，注意使用极坐标系形式的柯西黎曼条件

1.3　多值函数

详见吴崇试《数学物理方法》P22.

例 1.3.1 (根式函数)**.**

$$w = \sqrt{z-a}$$

$$|w|=\sqrt{|z-a|},\quad \arg w=\frac{1}{2}\arg(z-a).$$

w 值的多值性来源于$\underline{z-a \text{ 辐角的多值性}}$.$w$ 值的多值性表现为辐角的多值性. 我们称引起多值性的 $z-a$ 为宗量.

绕 a 点一周后，$\arg w$ 变化 π, 因此 w 变化 $|w|e^{i\pi}$, a 为分支点. 考察 $z=\infty$ 是否为分支

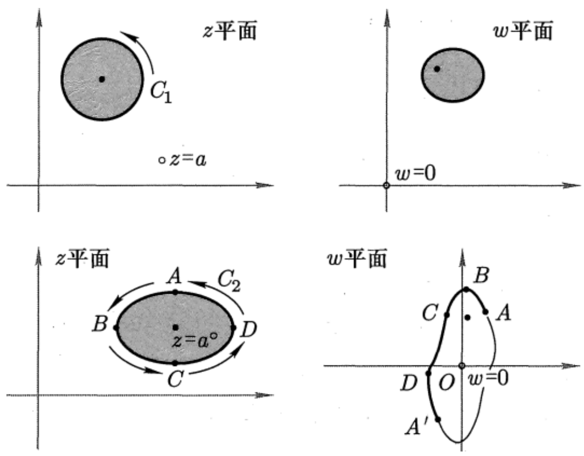

图 1.1: z 沿闭合曲线一周回到原处时，$w=\sqrt{z-a}$ 值的不同变化

点, 设 $z=\frac{1}{t}$, 考察 $t=0$ 是不是 $f(t)=\sqrt{\frac{1-at}{t}}$ 的分支点. t 绕着 $\forall r<\frac{1}{|a|}$ 的圆 $|t|=r$ 逆时针一周回到原处时，$\arg(1-at)$ 不变，但是 $\arg t$ 增加 2π, 因此 $\arg\sqrt{(1/t)-a}$ 减少 π, 因此 $t=0$ 为 $f(\frac{1}{t})$ 的分支点，故而 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的分支点.

例 1.3.2 (对数函数)**.**

$$w=\ln z$$

将 $z=re^{i\theta}$, 带入得

$$w=\ln r+i(\theta+2n\pi)+\ln|z|+i\mathrm{Arg}(z)$$

对数函数 w 值的多值性来源于宗量 z 辐角的多值性，w 值的多值性表现为 w 值虚部的多值性. 对于每一个 z 值，有无穷多个 w 值，它们虚部相差 2π 的整数倍. $z=0$ 与 $z=\infty$ 为 $w=\ln(z)$ 的分支点.

第二章　复变积分

2.1　复变积分

定义 2.1.1 (复变积分)**.** 设 C 是 $\mathbb{C}$ 内由 A 点到 B 点的曲线，函数 $f(z)$ 在 C 上有定义，将 C 任意分割成 n 段，分点为 $z_0(=A), z_1, z_2, \cdots, z_n(=B)$,$\zeta_k$ 是 $z_{k-1} \to z_k$ 段上的任意一点，作和数，若当 $n \to \infty, \max|\Delta z_k| \to 0$ 时，此和数的极限存在，且极限值与 ζ_k 的选取无关，则称此极限值为函数 $f(z)$ 沿曲线的积分。

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{id}y) = \int_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y).$$

积分不等式：

$$\left|\int_l f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_l |f(z)|\,|\,\mathrm{d}z|$$

.

2.2　Cauchy 定理

2.2.1　单通连区域柯西定理

如果函数 $f(z)$ 在闭单连通区域 $\overline{B}$ 上解析，则沿 $\overline{B}$ 上任一分段光滑闭合曲线 l(也可以是 $\overline{B}$ 的边界), 有

$$\oint_l f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

2.2.2　复连通区域柯西定理

如果 $f(z)$ 是闭复连通区域上的单值解析函数，则

$$\oint_l f(z)\ \mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{n}\oint_{l_i} f(z)\ \mathrm{d}z = 0,$$

式中 l 为区域外边界线，诸 l_i 为区域内边界线，积分均沿边界线的正方向进行，即沿 l 段为逆时针方向，而沿 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 等段则为顺时针方向.

定理 2.2.1. （无论单连通还是多连通）如果函数 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{G}$ 上解析，则沿 $\overline{G}$ 的边界 C,

$$\boxed{\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = 0}$$

例 2.2.2. 计算积分

$$I = \oint_l (z-\alpha)^n \, \mathrm{d}z \quad (n \text{ 为整数}).$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha} = \begin{cases} 0, l\text{不包围}\alpha \\ 1, l\text{包围}\alpha \end{cases}$$

$$\oint_l (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = 0 \qquad (n \neq -1)$$

2.2.3 不定积分

推论 2.2.3. 若 $f(z)$ 在有界单连通区域 G 中解析，则复变积分 $\int_G f(z)dz$ 与路径 C 无关，其中 $C \subset G$.

由此推论可以定义单值的不定积分.

定理 2.2.4 (不定积分的解析性)**.** 若函数 $f(z)$ 在有界单连通区域 G 内解析，则 $f(z)$ 的不定积分

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta, z \in G$$

也在 G 内解析.

2.3 小圆弧和大圆弧引理

推论 2.3.1 (小圆弧引理)**.** 如果函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 点的空心邻域内连续，并且在 $\theta_1 \leqslant \arg(z-a) \leqslant \theta_2$ 中，当 $|z-a| \to 0$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致地趋近于 k, 则

$$\boxed{\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)}$$

推论 2.3.2 (大圆弧引理)**.** 设 $f(z)$ 在 ∞ 点的邻域内连续，在 $\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2$ 中，当 $|z| \to \infty$ 时，$zf(z)$ 一致地趋近于 K, 则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = iK(\theta_2-\theta_1)$$

2.4 Cauchy 积分公式

2.4.1 有界闭区域

设 $f(z)$ 是有界闭区域 $\overline{G}$ 中的单值解析函数，$\overline{G}$ 的边界 C 是分段光滑曲线，a 为 G 内一点，则

$$\boxed{f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z,\quad a\in G},$$

其中积分路径沿 C 的正向.

根据 a 的任意性，设 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{G}$ 单值解析，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta, z\in G$$

2.4.2 无界区域

如果 $f(z)$ 在简单闭合围道 C 上及 C 外解析，且当 $z\to\infty$ 时，$f(z)$ 趋于 K, 则 Cauchy 积分公式

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z+K$$

仍然成立，此处 a 为顺时针方向时所包含的区域内的一点,$K=\lim_{z\to\infty}f(z)$.

2.4.3 Cauchy 积分公式的高阶导数形式

如果 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{G}$ 中解析，则在 G 内 $f(z)$ 的任何阶导数 $f^{(n)}(z)$ 均存在，并且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, z\in G,$$

其中 C 是 $\overline{G}$ 的正向边界.

第三章 级数展开

3.1 幂级数

柯西根值判别法：

- 若 $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|}<1$, 则绝对收敛，收敛半径 $R=\frac{1}{\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}$.

- 若 $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|}>1$, 则发散.

达朗贝尔比值判别法:

- 若 $\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}|}{|a_k(z-z_0)^k|}=\lim_{k\to\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}||z-z_0|<1$, 则绝对收敛，收敛半径 $R=\lim_{k\to\infty}|\frac{a_k}{a_{k+1}}|$

- 若 $\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}|}{|a_k(z-z_0)^k|}=\lim_{k\to\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}||z-z_0|<1$, 则发散.

3.2 解析函数的 Tylor 展开

定理 3.2.1. 设 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心的圆 C_R 内解析，则对圆内的任意 z 点，$f(z)$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(z-z_0\right)^k,(|z-z_0|<R)$$

其中

$$a_k=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{c_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\left(\zeta-z_0\right)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{f^{(k)}\left(z_0\right)}{k!},$$

C_{R_1} 为圆 C_R 内包含 z 且与 C_R 同心的圆.

证明要点：

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n,\quad |z-a|<|\zeta-a|$$

1. 收敛范围：设 b 为离 z_0 最近的奇点，则 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0|<|b-z_0|$ 内处处解析，收敛半径 $R=|b-z_0|$.

2. Tylor 展开具有唯一性.

3. Tylor 级数常见方法技巧：

    - 对已知的函数展开线性组合变量代换，微商，积分
    - 级数乘法
    - 待定系数法

在无穷远点的 Taylor 展开：如果函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 解析，则也可以在 $z=\infty$ 展开成 Tylor 级数.

做变量替换 $z=1/t$，求 $f(1/t)$ 在 $t=0$ 处的展开，收敛范围 $|t|<r$，则 $|z|>1/r$

3.3 解析函数的 Laurent 展开

定理 3.3.1. 设 $f(z)$ 在环形区域 $R_2 < |z - z_0| < R_1$ 的内部单值解析，则对环域上任一点 $z, f(z)$ 可展为幂级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, R_2 < |z - z_0| < R_1$$

其中

$$a_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta,$$

积分路径 C 为位于环域内按逆时针方向绕内圆一周的任一闭合曲线. *Laurent* 展开也具有唯一性.

3.4 孤立奇点的分类

第四章 留数定理

4.1 留数定理

定理 4.1.1 (留数定理)**.** 设有界区域 G 的边界 C 为分段光滑的简单闭合曲线. 若除有限个孤立奇点 $b_k, k = 1, 2, 3, \cdots, n$ 外，函数 $f(z)$ 在 G 内单值解析，在 $\overline{G}$ 中连续，并且 $f(z)$ 在边界 C 上连续，则沿区域 G 边界正向的积分

$$\boxed{\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res} f(b_k)}$$

res $f(b_k)$ 称为 $f(z)$ 在 b_k 处的留数，它等于 $f(z)$ 在孤立奇点 b_k 的空心邻域内 *Laurent* 展开的系数 a_{-1}

定理 4.1.2 (无穷远点的留数)**.** 若 $f(z)$ 在复平面上只有有限个奇点，除此之外全部解析，并且 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点，那么函数 $f(z)$ 在所有点（包含无穷远点）留数为 *0.*

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res} f(b_k) + \mathrm{Res} f(\infty) = 0$$

留数的计算

1. 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，则

$$\mathrm{Res}f(z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

2. 特别地，当 $m=1$, $z=z_0$ 为一阶极点的情形时，

$$\mathrm{Res} = a_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

3. 当有理函数 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 且 $P(z)$ 在 z_0 处解析，z_0 为 $Q(z)$ 一阶极点时，

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

极点阶数： z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点 $\Longleftrightarrow$ 存在一个在在 z_0 处非零的解析函数 $P(z)$, 可以再在 z_0 的去心领域表示为

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-z_0)^m}$$

4.1.1 有理三角函数的积分

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta, \theta\in[0,2\pi],$$

其中，R 为关于 $\sin\theta, \cos\theta$ 的有理函数，在积分区间 $[0,2\pi]$ 连续.

4.1.2 无穷积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

复变函数 $f(z)$ 在实轴没有奇点，在上半平面除了有限个奇点外是解析的，当 z 在上半平面及实轴上时，$zf(z)\Rightarrow 0$.

积分主值:

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

构造半圆围道 C, 半圆弧 C_R, 根据

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i\sum_{C_R}\mathrm{Res}f(z),$$

令 $R\to\infty$, 则

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\times\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{Res}f(z)$$

$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$ **的成立条件**

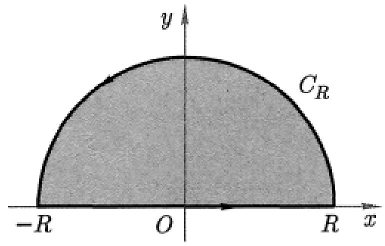

图 4.1: 无穷积分的典型围道

1. 若 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 为有理函数，$\deg Q-\deg P\geq 2$

2. (大圆弧引理) 当 $R\to\infty$ 时，$zf(z)\Rightarrow 0$(一致趋于 0)

4.1.3 含三角函数的无穷积分

$\int_0^\infty F(x)\cos mx\mathrm{d}x, \int_0^\infty G(x)\sin mx\mathrm{d}x$. 积分区间是 $[0,+\infty]$; 偶函数 $F(z)$ 和奇函数 $G(z)$ 在实轴上没有奇点，在上半平面除有限个奇点外是解析的；当 z 在上半平面或实轴上 $\to\infty$ 时，$F(z)$ 及 $G(z)$ 一致地 $\Rightarrow 0$.

$$\int_0^\infty F(x)\cos mx dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty F(x)e^{imx}dx, F(x)\text{为偶函数}$$

$$\int_0^\infty G(x)\sin mx dx=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^\infty G(x)e^{imx}dx, G(x)\text{为奇函数}$$

引理 4.1.3 (Jordan 引理)**.** *设在 0$\leqslant \arg z\leqslant \pi$ 范围内，当 $|z|\to\infty$ 时 $Q(z)$ 一致地趋于 0, 则*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}Q(z)e^{ipz}\mathrm{d}z=0$$

其中 $p>0$, C_R 是以原点为圆心，R 为半径的上半圆弧.

4.2 实轴上有单极点

实轴上有有限个<u>单极点</u> 时，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}\,x=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{Res}f(z)+\pi\mathrm{i}\sum_{\text{实轴上}}\mathrm{Res}f(z).$$

第五章 傅里叶变换

5.1 傅里叶级数

5.1.1 正交函数系

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l} \cos\frac{n\pi x}{l} = l\gamma\delta_{kn} = \begin{cases} 2l, k = n = 0 \\ l, k = n \neq 0 \\ 0, k \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} = l\delta_{kn} \begin{cases} l, k = n \\ 0, k \neq n \end{cases}$$

5.1.2 周期函数的傅里叶级数

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi x}{l} dx, n \neq 0 \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx \\ f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}) \end{aligned}$$

5.1.3 Dirichlet 收敛定理

定理 5.1.1. 若函数 $f(x)$ 及其导数在一个积分周期内连续或者分段连续，只有有限个第一间断点（左右极限存在但不相等），则傅里叶级数在每一点都收敛，且

- 若 x_0 为连续点，则傅里叶级数收敛到 $f(x_0)$.

- 若 x_0 为间断点，则傅里叶级数收敛到 $\frac{1}{2}(\lim_{x\to x_0^-} f(x) + \lim_{x\to x_0^+} f(x))$.

5.1.4 复数形式的傅里叶级数

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\zeta)[e^{ik\omega\zeta}]^* \mathrm{d}\zeta \\
f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}
\end{aligned}
$$

5.2 傅里叶积分变换

实数形式

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon)\cos\omega\varepsilon \mathrm{d}\varepsilon \\
B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon)\sin\omega\varepsilon \mathrm{d}\varepsilon \\
f(x) &= \int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos\omega x \mathrm{d}\omega + \int_{0}^{\infty} B(\omega)\sin\omega x \mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

复数形式

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

5.3 傅里叶复数变换的性质

若 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$

1. 线性

$$
\mathscr{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)
$$

$$
\mathscr{F}^{-1}[\alpha F(\omega) + \beta G(\omega)] = \alpha f(t) + \beta g(t)
$$

2. 延迟性

$$
\mathscr{F}[f(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} F(\omega)
$$

3. 位移性

$$
\mathscr{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0)
$$

4. 相似性

$$
\mathscr{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)
$$

5. 微分关系

$$\mathscr{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (i\omega)^n F(\omega)$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}\right] = (-it)^n f(t)$$

6. 积分关系

$$\mathscr{F}[\int f(t)\mathrm{dt}] = \frac{1}{i\omega}F(\omega)$$

5.3.1 卷积

定义 5.3.1.

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

定理 5.3.2 (时域卷积定理)**.**

$$若\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega), \quad \mathscr{F}[g(t)] = G(\omega), 则$$

$$\mathscr{F}[f(t) * g(t)] = F(\omega)G(\omega)$$

定理 5.3.3 (频率卷积定理)**.**

$$若\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega), \quad \mathscr{F}[g(t)] = G(\omega), 则$$

$$\mathscr{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$$

5.4 脉冲函数和阶跃函数

第六章 Laplace 变换

定义 6.0.1 (Laplace 积分变换)**.** 正变换:

$$\overline{f}(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} \mathrm{dt},$$

其中 $p = \sigma + i\omega$, e^{-pt} 成为 *Laplace* 变换的核.

逆变换:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} \overline{f}(p) e^{ip} \mathrm{d}p.$$

$$\overline{f}(p) = \mathscr{L}[f(t)], \quad f(t) = \mathscr{L}^{-1}[\overline{f}(p)]$$

6.1 初等函数的 Laplace 变换

1. 常值函数

$$\mathscr{L}[1] = \frac{1}{p}, Re(p) > 0$$

2. 线性函数

$$\mathscr{L}[t] = \frac{1}{p^2}, Re(p) > 0$$

3. 幂函数

$$\mathscr{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

4. 指数函数

$$\mathscr{L}[e^{st}] = \frac{1}{p-s}, Re(p) > Re(s)$$

5. 三角函数

$$\mathscr{L}[\cos\omega t] = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad \mathscr{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

6. 求导运算的推论

$$\mathscr{L}[tf] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}[f] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\overline{f}(p), \quad \mathscr{L}[t^n f] = -\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\mathscr{L}[f] = -\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\overline{f}(p)$$

例 6.1.1.

$$\mathscr{L}\left[t\mathrm{e}^{st}\right] = \frac{1}{(p-s)^2}, Re(p) > Re(s)$$

6.2 Laplace 变换的性质

1. 线性

2. 导数性质

$$\mathscr{L}[\mathrm{d}f/\mathrm{d}t] = p[f] - f(0)$$

$$[f^{(n)}] = p^n[f] - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} f^(i)(0)$$

3. 积分性质

$$\mathscr{L}[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau] = \frac{1}{p}[f(t)]$$

4. 相似性

$$\mathscr{L}[f(at)] = \overline{f}(\frac{p}{a})$$

5. 位移性

$$\mathscr{L}[e^{-\lambda}f(t)] = \overline{f}(p+\lambda)$$

6. 延迟性

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)] = e^{-pt_0}\overline{f}(p)$$

7. 卷积

$$\mathscr{L}[f*g] = \mathscr{L}[f]\cdot\mathscr{L}[g]$$

8. 初值定理当 $p\to\infty$ 时，$p\overline{f}(p)$ 极限存在，有

$$f(0) = \lim_{p\to\infty} p\overline{f}(p)$$

9. 终值定理当 $p\to 0$ 时，$p\overline{f}(p)$ 极限存在，有

$$f(0) = \lim_{p\to 0} p\overline{f}(p)$$

Fourier 变换和 Laplace 变换求解常微分方程和偏微分方程以及数理定界方程.

第七章　定解方程的导出

波动方程两端固定：

$$u\mid_{x=0} = 0, u\mid_{x=l} = 0$$

边界受力：

$$ES\frac{\partial u}{\partial n} = f(t)$$

自由即外力为 0

$$\partial u\partial x\mid_{x=0} = 0$$

自由绝热 $u_x=0$ 稳定恒定自然边界条件

第八章　数理定解方程求解方法

8.1　分离变量法

8.1.1　求解思路

分离变量 $\Rightarrow$ 求本征解 $\Rightarrow$ 叠加 $\Rightarrow$ 确定系数

(1) 对于泛定方程写出变量分离的形式解 $u(x,t)=X(x)T(t)$;

(2) 代入泛定方程得到空间函数 $X(x)$ 和时间函数 $T(t)$ 的常微分方程;

(3) 求解 $X(x)$ 的常微分方程与相应的边界条件构成的本征值问题，得到本征值 λ_n 和本征函数 $X_n(x)$;

(4) 将 λ_n 代入时间函数的方程解出 $T_n(t)$, 与 $X_n(x)$ 相乘得到泛定方程的本征解 $u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)$;

(5) 利用叠加原理得到一般解 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$, 并利用初始条件确定 $u_n(x,t)$ 中的系数。

8.1.2　求解条件

泛定方程必须**线性齐次**，边界条件必须**齐次**.

例 8.1.1 (两端固定的弦自由振动)**.**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<L, t>0) \\ u|_{t=0}=\phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x) & (0\leqslant x\leqslant L) \\ u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=L}=0 & (t>0) \end{cases}$$

例 8.1.2 (阻尼波动方程).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial u}{\partial t}=0 & (0<x<L,t>0)\\ |_{t=0}=\phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x) & (0\leqslant x\leqslant L)\\ \\ u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=L}=0 & (t>0)\end{cases}$$

8.1.3 求解波动方程和输送方程的要点

(1) 对于有界空间 $(0\leqslant x\leqslant L)$ 的波动方程与热传导方程的定解问题，其泛定方程具有变量分离的形式解 $u(x,t)=X(x)T(t)$, 其中空间函数 $X(x)$ 所满足的方程在一般情况下具有确定的形式 $X''(x)+\lambda X(x)=0$, 并与 $x=0$ 和 $x=L$ 两端的齐次边界条件结合，构成相关的本征值问题。本征值问题的解依赖于分离常数 λ 的取值

$$X(x)=A\cos kx+B\sin kx,\lambda>0,k=\sqrt{\lambda}$$
$$X(x)=A+Bx,\lambda=0$$
$$X(x)=A\cosh kx+B\sinh kx,\lambda<0,k=\sqrt{-\lambda}$$

(2) 边界条件的组合

$u_{x=0}=0, \quad u_{x=L}=0:\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad Xn(x)=B_n sin(\frac{n\pi}{L}), \quad n=1, \quad 2, \quad 3,\cdots$
$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L}=0:\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x)=A_n\cos\frac{n\pi}{L}x, \quad n=0, \quad 1, \quad 2,\cdots$
$u\|_{x=0}=0, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L}=0:\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right]^2, \quad X_n(x)=B_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x, \quad n=0, \quad 1, \quad 2,\cdots$
$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0, \quad u\|_{x=L}=0:\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right]^2, \quad X_n(x)=A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x, \quad n=0, \quad 1, \quad 2,\cdots$

8.2 本征函数法

8.2.1 适用对象

边界条件齐次，与分离变量法同，但可求解非齐次线性泛定方程.

8.2.2 求解思路

对于非齐次方程，本征函数集的选择由相应得齐次方程和定解问题的边界条件确定.

(1) 根据边界条件选择本征函数集，写出定解问题的级数形式解.

(2) 将它代入泛定方程得到展开系数 $T_N(t)$ 所满足得常微分方程.

(3) 解出 $T_n(t)$ 后，代入形式解并利用初始条件确定系数.

8.2.3 泊松方程的定解问题

例 8.2.1 (有源的稳态二维热传导).

对于非齐次的泊松方程，需要找出特解。