斯图尔特平台的数学原理

斯图尔特平台由2个刚性框架组成，由6条可变长度的双腿连接。基被认为是

参考系，具有正交轴x、y、z。这个平台有自己的正交坐标xyz。

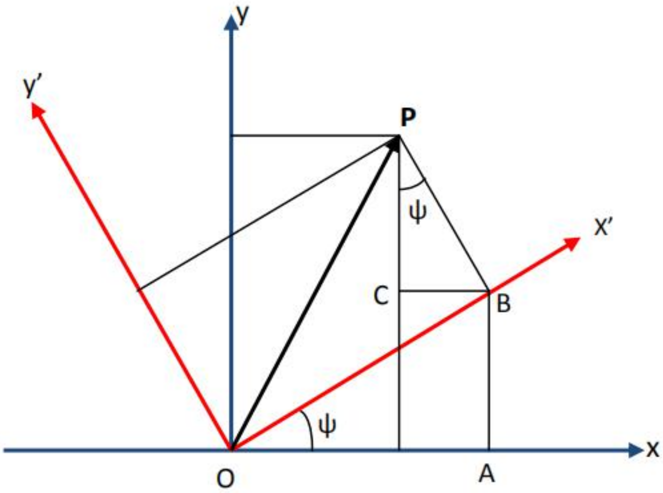
该平台相对于底座有6个自由度

平台坐标的原点可以由相对于底座的3个平移位移来定义，每个轴一个。

然后，三个角位移定义了平台相对于底座的方向。按以下顺序使用了一组欧拉角：

1. 围绕z轴旋转一个角度ψ（偏航）
2. 围绕y轴旋转一个角度θ（螺距）
3. 围绕x轴旋转一个角度（滚动）

如果我们考虑围绕z轴的第一次旋转ψ（偏航）：



$$\mathbf{P} = \mathbf{i}'x' + \mathbf{j}'y' + \mathbf{k}'z' = \mathbf{i}x + \mathbf{j} + kz$$

$$\begin{aligned} x &= OA - BC \\ &= x'\cos\psi - y'\sin\psi \\ y &= AB + PC \\ &= x'\sin\psi + y'\cos\psi \\ z &= z' \end{aligned}$$

我们定义了旋转矩阵$_z$在哪里

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(\psi) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

类似地，如果我们考虑围绕y轴的第二次旋转θ（音高），我们可以显示

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

绕x轴旋转Q（滚动）：

$$\mathbf{R}_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

平台相对于底座的完整旋转矩阵为：

$$^{P}\mathbf{R}_{B} = \mathbf{R}_z(\psi).\,\mathbf{R}_y(\theta).\mathbf{R}_x(\varphi)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

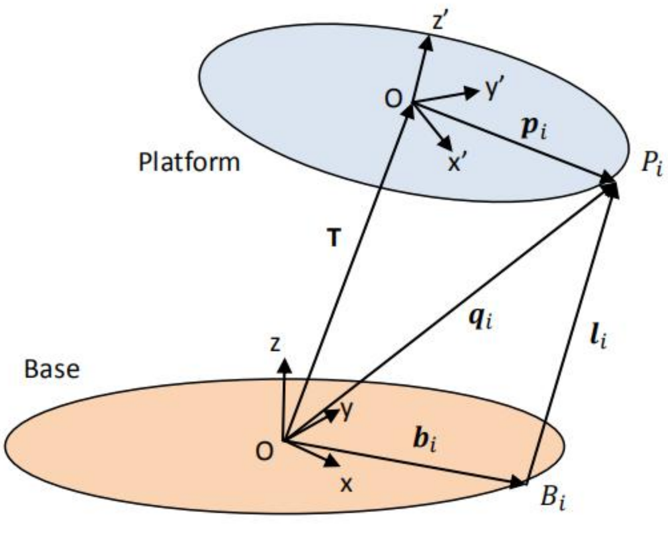
$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & -\sin\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

因为小因为9一因为小因为Q+因为小因为9因 sin小sinQ+cos小sin9sosQ
=(sin小cos 9 cos小cosQ+sin小sin 9罪问 一cos小sinQ+sin小sin9sosQ)
一的质量 cos 9 cos Q

\- (1)

现在考虑一个斯图尔特平台。

对于i^{th}腿



坐标q_i锚点P_i关于基本的参考框架，由方程给出

$$q_i = T + {}^{P}R_{B}.\ \mathbf{p}_i - \quad (2)$$

其中T为平移向量，给出了平台框架的原点相对于基准参考框架的位置线性位移，以及pi是定义锚点P的坐标的向量吗$_i$关于平台框架。

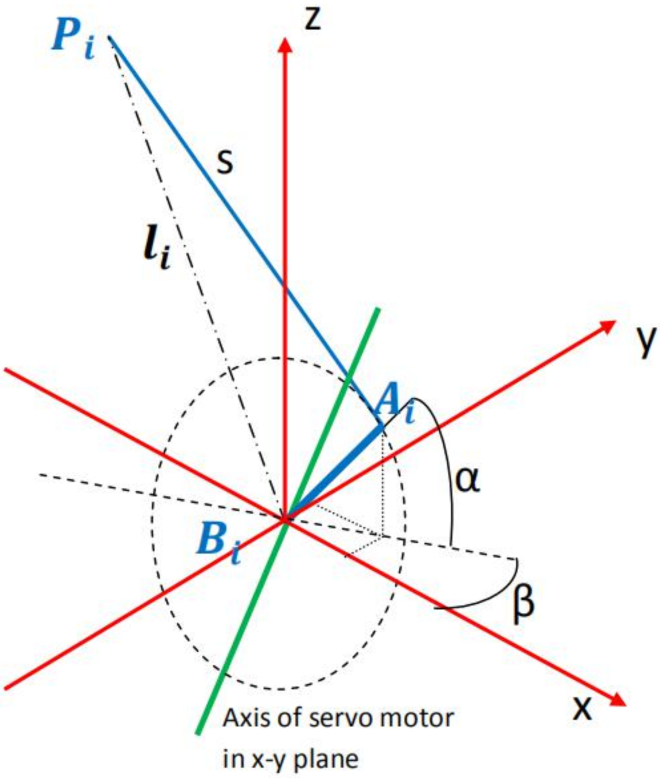
同样的，i的长度th腿是由

$$l_i = T + {}^P R_B . \mathbf{p}_i - b_i - (3)$$

其中b_i是定义下锚点B的坐标的向量吗$_i$.这6个方程式给出了6条腿的长度，以达到平台的期望位置和姿态。

当考虑正向运动学时，该表达式代表了6个未知数中的18个同立非线性方程，代表了平台的位置和姿态。在寻找这些方程的解方面已经做了很多工作；在一般情况下，有40种可能的解，尽管在实践中，许多这些解并不实用。

如果支腿的长度是通过旋转伺服器，而不是线性伺服器来实现的，则需要进一步的计算来确定伺服器的旋转角度。每个伺服/腿组合可以表示如下：



其中：伺服操作臂的长度为=

手臂/腿关节的点th伺服系统与坐标上的一个=[$x_a y_a z_a$]^{T}在基础框架中。

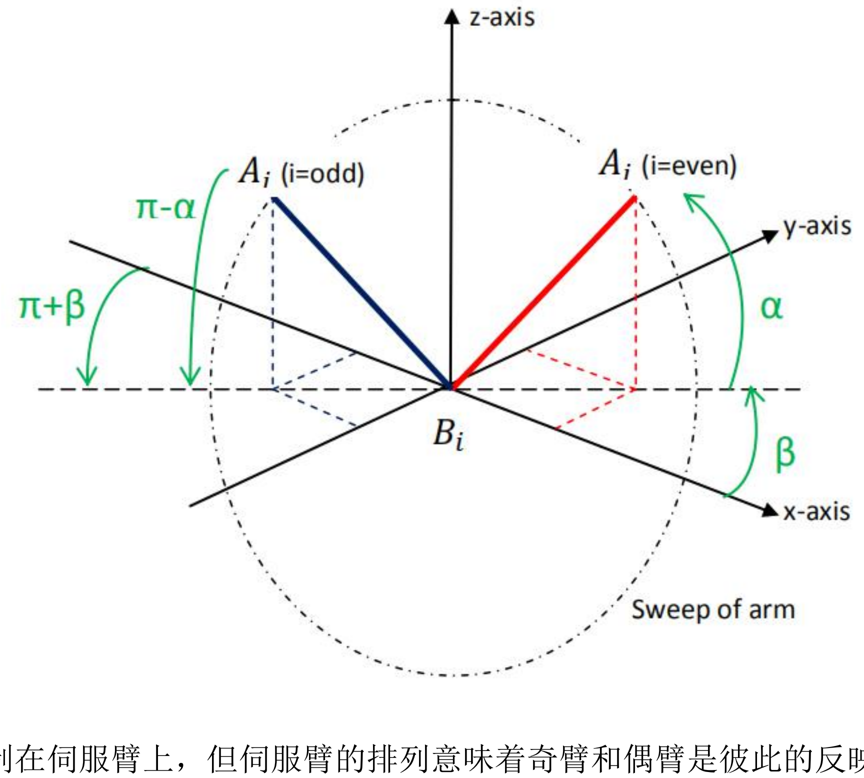
布隆迪是伺服臂的旋转点，其坐标为b=[$x_b y_b z_b$]^{T}在基础框架中。

皮是操作杆和平台之间的连接点，与坐标p=[$x_p y_p z_p$]^{T}在平台框架内

操作腿的S=长度

l_ii的=长度th腿，由l计算$_i$= T +$^P R_B$. p_i- b_i伺服操作臂距水平的α=角

伺服臂平面相对于x轴的β=角。请注意，轴轴位于位置在x-y平面上，z=为0



点A被限制在伺服臂上，但伺服臂的排列意味着奇臂和偶臂是彼此的反映。所以对于我们的偶腿：

x_a=因为因为F + x_b和 –（4）

y_a=是一种罪$_b$和 –（5）

z_a=，一个罪，一个+，z_b － (6)

对于我们所拥有的这些奇怪的腿：

x_a = a $\cos(\pi-\alpha)\ \cos(\pi+\beta)+\ x_b$, and

y_a = a $\cos(\pi-\alpha)\ \sin(\pi+\beta)+y_b$, and

z_a = a $\sin(\pi-\alpha)+z_b$

但是 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\propto$, and $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\propto$

和 $\sin(\pi+\beta)=-\sin\beta$, and $\cos(\pi+\beta)=-\cos\beta$

将这些值代入奇数腿的方程，我们得到与偶数腿的(4)、(5)和(6)相同的方程。

通过毕达哥拉斯，我们也有：

$$a^2=(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2+(z_a-z_b)^2$$

$$=(x_a^2+y_a^2+z_a^2)+(x_b^2+y_b^2+z_b^2)-2(x_ax_b+y_ay_b+z_az_b) \quad -\ (7)$$

$$l^2=\left(x_p-x_b\right)^2+\left(y_p-y_b\right)^2+\left(z_p-z_b\right)^2$$

$$=\left(x_p^2+y_p^2+z_p^2\right)+(x_b^2+y_b^2+z_b^2)-2\left(x_px_b+y_py_b+z_pz_b\right) \quad -\ (8)$$

$$s^2=\left(x_p-x_a\right)^2+\left(y_p-y_a\right)^2+\left(z_p-z_a\right)^2$$

$$=\left(x_p^2+y_p^2+z_p^2\right)+(x_a^2+y_a^2+z_a^2)-2\left(x_px_a+y_py_a+z_pz_a\right)$$

并由公式(7)和(8)代入

$$s^2=l^2-(x_b^2+y_b^2+z_b^2)+2\left(x_px_b+y_py_b+z_pz_b\right)+a^2-(x_b^2+y_b^2+z_b^2)+ 2(x_ax_b+y_ay_b+z_az_b)-2\left(x_px_a+y_py_a+z_pz_a\right)$$

重新安排给出

$$l^2-(s^2-a^2)=2\,(x_b^2+y_b^2+z_b^2)+2\,x_a\left(x_p-x_b\right)+2\,y_a\left(y_p-y_b\right)+2\,z_a\left(z_p-z_b\right)- 2\left(x_px_b+y_py_b+z_pz_b\right)$$

代替x_a，y_a，z_a从方程(4)，(5)和(6)，然后给出

$$l^2-(s^2-a^2)=2\,(x_b^2+y_b^2+z_b^2)+2(a\ \cos\alpha\cos\beta+x_b)\left(x_p-x_b\right)+ 2(a\ \cos\alpha\sin\beta+y_b)\left(y_p-y_b\right)+2(a\ \sin\alpha+z_b)\left(z_p-z_b\right)- 2\left(x_px_b+y_py_b+z_pz_b\right)$$

$$= 2\left(x_b^2 + y_b^2 + z_b^2\right) + 2a\ \cos\alpha\cos\beta\left(x_p - x_b\right) + 2x_p x_b - 2x_b^2 + 2a\cos\alpha\sin\beta\left(y_p - y_b\right) + 2y_p y_b - 2y_b^2 + 2a\sin\alpha\left(z_p - z_b\right) + 2z_p z_b - 2z_b^2 - \left(x_p x_b + y_p y_b + z_p z_b\right)$$

减少到

$$l^2 - (s^2 - a^2) = 2a\sin\alpha\left(z_p - z_b\right) + 2a\ \cos\alpha\cos\beta\left(x_p - x_b\right) + 2a\cos\alpha\sin\beta\left(y_p - y_b\right)$$

$$= 2a\sin\alpha\left(z_p - z_b\right) + 2a\cos\alpha\left[\cos\beta\left(x_p - x_b\right) + \sin\beta\left(y_p - y_b\right)\right]$$

这是一个方程式的形式：-

L = M一个+因为

使用正弦波之和的三角恒等式

$$a\sin x + b\cos x = c\sin(x + v)$$

where $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ and $\tan v = \frac{b}{a}$

因此，我们有另一个具有相移值的α的正弦功能δ

$$L = \sqrt{M^2 + N^2}\sin(\alpha + \delta) \quad \text{where} \quad \delta = \tan^{-1}\frac{N}{M}$$

因此 $\sin(\alpha + \delta) = \frac{L}{\sqrt{M^2 + N^2}}$

和 $\alpha = \sin^{-1}\frac{L}{\sqrt{M^2 + N^2}} - \tan^{-1}\frac{N}{M}$ – (9)

where $L = l^2 - (s^2 - a^2)$

$M = 2a\left(z_p - z_b\right)$

$N = 2a\left[\cos\beta\left(x_p - x_b\right) + \sin\beta\left(y_p - y_b\right)\right]$

我们现在有足够的信息来计算有效的“腿”的长度，以及伺服臂的相关角度，为平台的反向运动学。但是为了设计和实现六足平台，我们需要定义几个常数来定义移动范围。

1) 我们需要定义平台的“家”位置。根据定义，这将是平台处于高度的位置$_0$在基底框架之上，没有其他的平移或旋转运动。

i.e. $q_i = T + {}^P R_B \cdot \mathbf{p}_i$

$$\boldsymbol{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ h_0 + z_p \end{bmatrix}$$

同样地，我们将定义“家”位置，伺服臂和杆在右边
彼此的角度。

i.e. $$l^2 = s^2 + a^2$$

$$= (x_p - x_b)^2 + (y_p - y_b)^2 + (h_0 + z_p - 0)^2$$

给予 $$h_0 = \sqrt{s^2 + a^2 - (x_p - x_b)^2 - (y_p - y_b)^2} - z_p \qquad - (10)$$

由于平台是围绕z轴对称构造的，这个方程对任何一条腿都会给出相同的结果。

2)我们也可以计算出角度仪$_0$伺服臂在主位置。

使用方程$l_i = T + {}^P R_B . \mathbf{p}_i - b_i$

并记住平台的对称结构。在“家”位置的腿的长度是由

$$\boldsymbol{l}_0 = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ h_0 + z_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$l_0^2 = (x_p - x_b)^2 + (y_p - y_b)^2 + (h_0 + z_p)^2 \qquad - (11)$$

而伺服臂在“主”位置的角度可以由式(9)给出。因为我们有对称性，我们只能看腿2，其中β=0°。

$$\alpha_0 = \sin^{-1}\frac{L_0}{\sqrt{M_0^2 + N_0^2}} - \tan^{-1}\frac{M_0}{N_0} \qquad - (12)$$

where $L_0 = l^2 - (s^2 - a^2)$

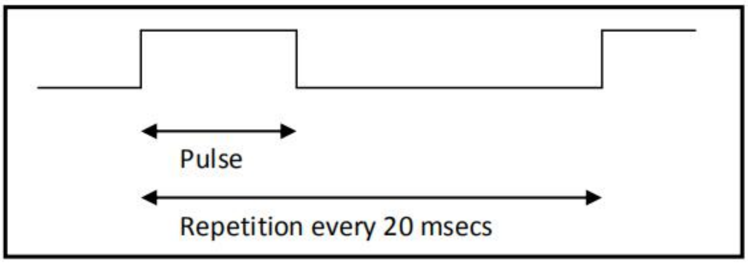
$$= s^2 + a^2 - (s^2 - a^2) = 2a^2$$

$$M_0 = 2a[\cos\beta\,(x_p - x_b) + \sin\beta(y_p - y_b)]$$

$$= 2a(x_p - x_b)$$

$$N_0 = 2a(h_0 + z_p)$$

伺服系统的安装，使它们的中点接近“家”位置，我们将限制它们的运动在±45°。伺服器是由一个脉冲控制的，其持续时间决定了手臂的角度。



使用的伺服系统具有规格：

中性位置（“家”）名义上是1500μsecs

顺时针旋转以增加脉冲宽度

45°的脉宽变化为400μsecs，提供一个伺服速率，

$$r = .\frac{400}{45}\frac{3\ 60}{2\text{元}} = \frac{1\ 0\,60}{\text{元}}\mu\text{secs}/\text{弧度}$$

从上所述，脉冲宽度w_i对于每个伺服系统，都可以通过
方程式

$$W_i = W_i^0 + (\propto_i - \propto_0)r \text{ for even i and} \qquad -(13)$$

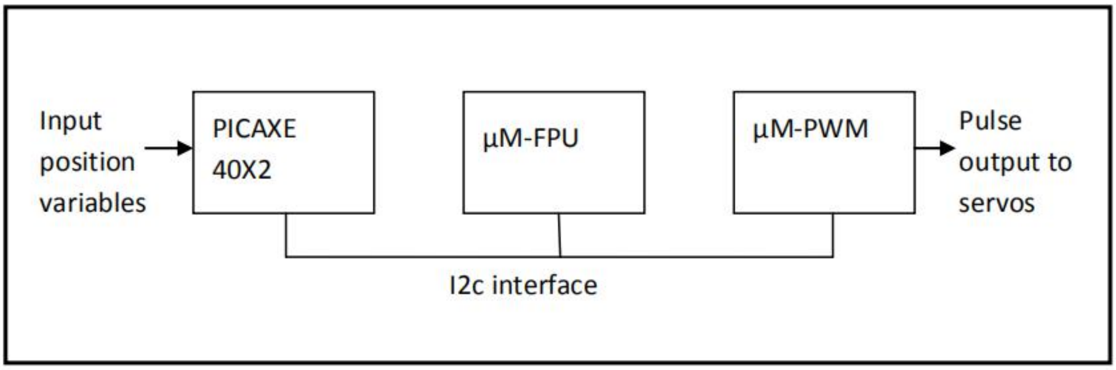
$$W_i = W_i^0 - (\propto_i - \propto_0)r \text{ for odd i} \qquad -(14)$$

w的位置$_i{}^0$是保持i所需的实际脉冲宽度吗th伺服器在“家”的位置。这在名义上是1500μsecs，但可以调整以补偿实际装配的差异。

使用RC Servos控制Stewart平台

平台围绕z轴对称构建，但奇数和偶数伺服是相对的。

用于控制平台的电路是基于一个PICAXE微控制器，有附加的数学协处理器（浮点数）和附加的伺服电机控制器。



事件的顺序如下：

1)输入平台的位置信息，$b_i p_i$s, a, F_i.这些都是来自平台构建时的常量。

2)输入伺服电机的常数，w_i^0和r
3)计算h的值$_0$从式（10）和仪$_0$从方程（12）
4)输入所需平台位置的（x、y、z、小、θ、φ）的变量

5)计算旋转矩阵$^P R_B$从方程(1)

6)计算有效的腿部长度l_i从方程式(3)
7)计算角度仪$_i$对等式(9)中的每个伺服器的要求
8)计算脉冲宽度w_i根据公式（13）和（14）要求每个伺服
9)输出w的值$_i$到μM-PWM来驱动伺服系统
10)返回到步骤4)以重复此过程。