

方程式 $x^3 = 1$ の解は $1, \omega, \omega^2$

[証明]

方程式 $x^3 = 1$ を解くと,

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \omega$ とし, $\omega^2 \in x$ を示す.

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{2\sqrt{3}i - 2}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}i - 1}{2} \\ \therefore \omega^2 &= \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

$\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ は x の解の一つである. よって, 方程式 $x^3 = 1$ の解は $1, \omega, \omega^2$ である.