

专给程序员设计的线性代数

liuyubobobo

一切从向量开始

什么是向量， 究竟为什么引入向量

向量

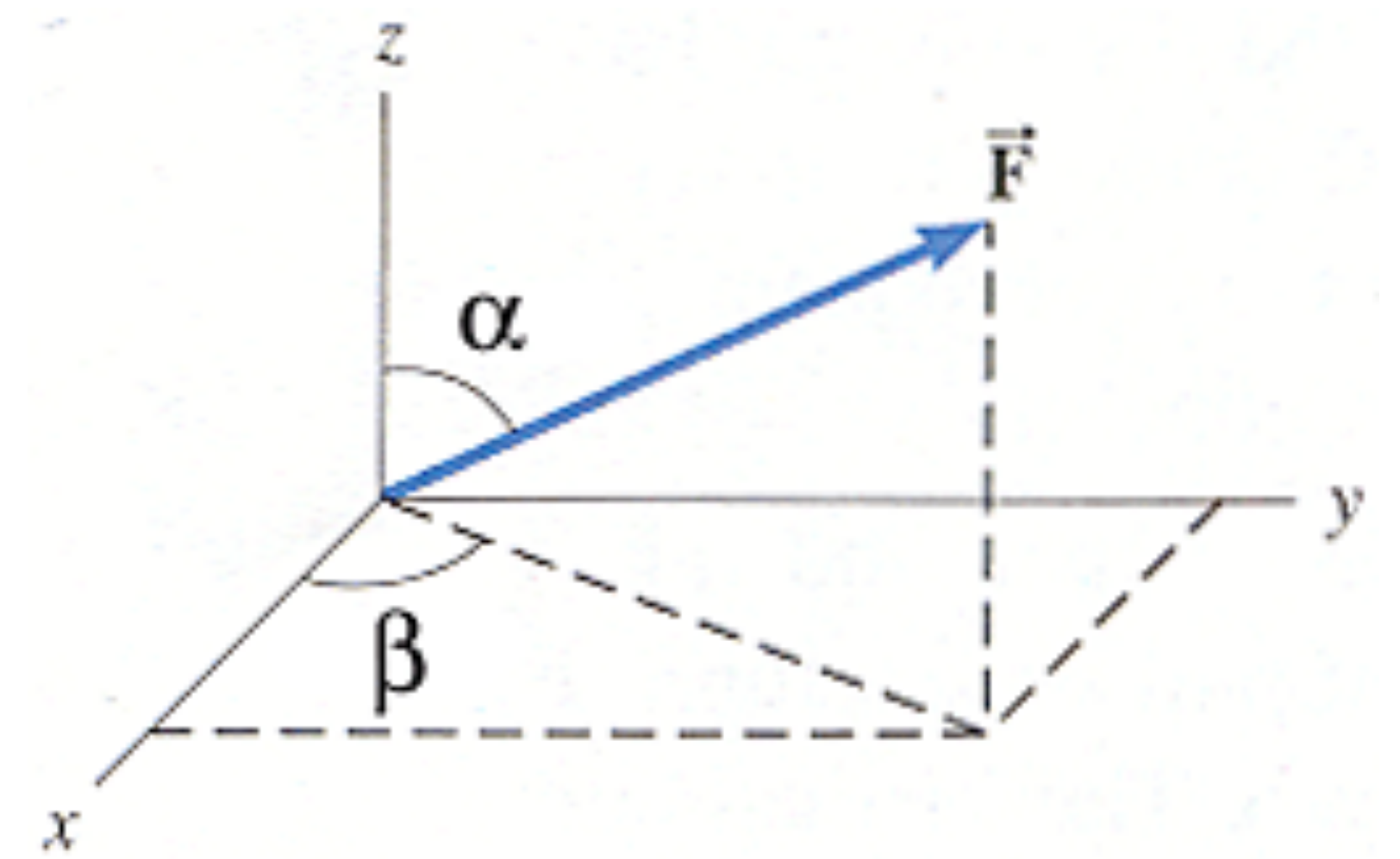
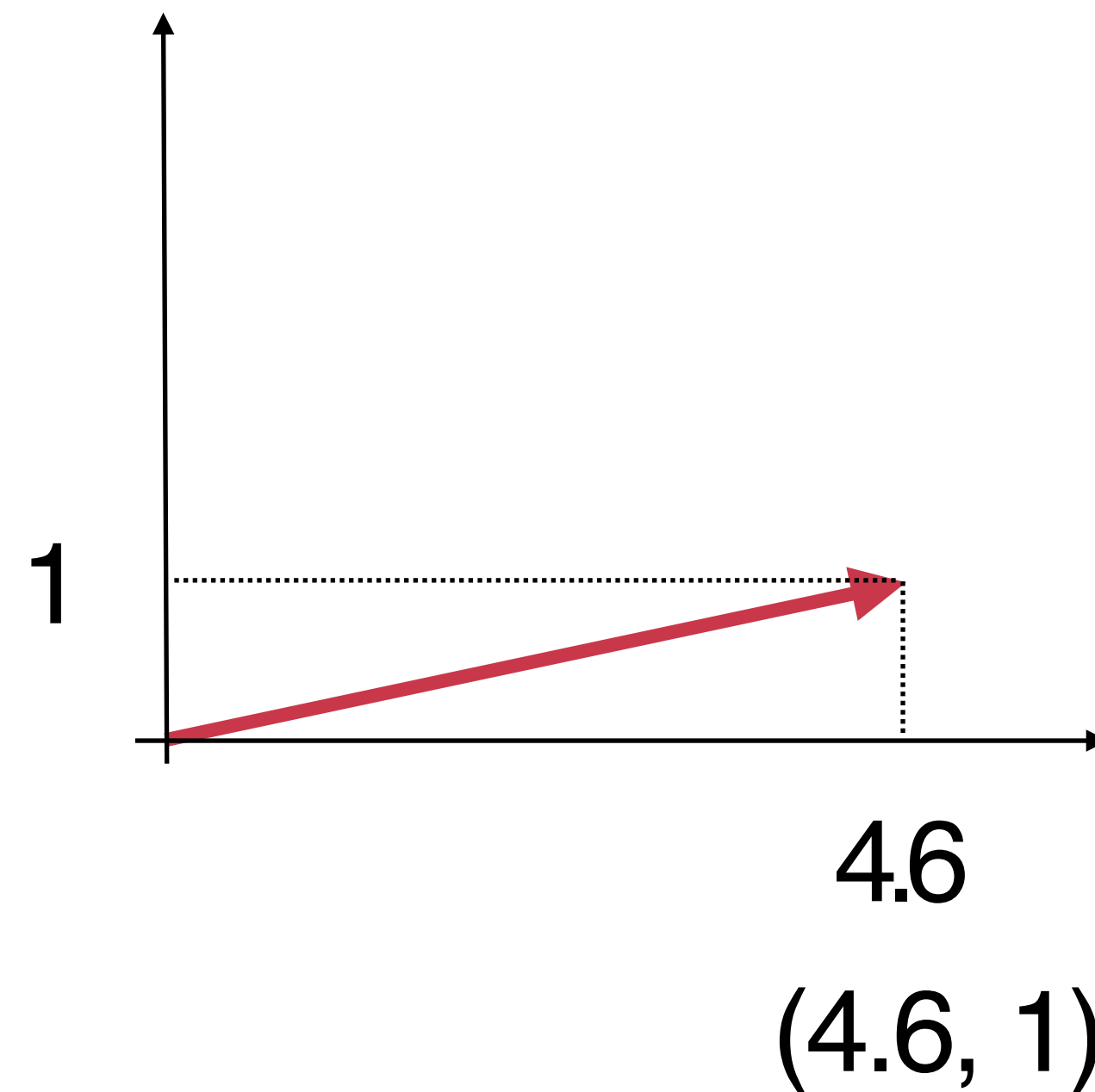
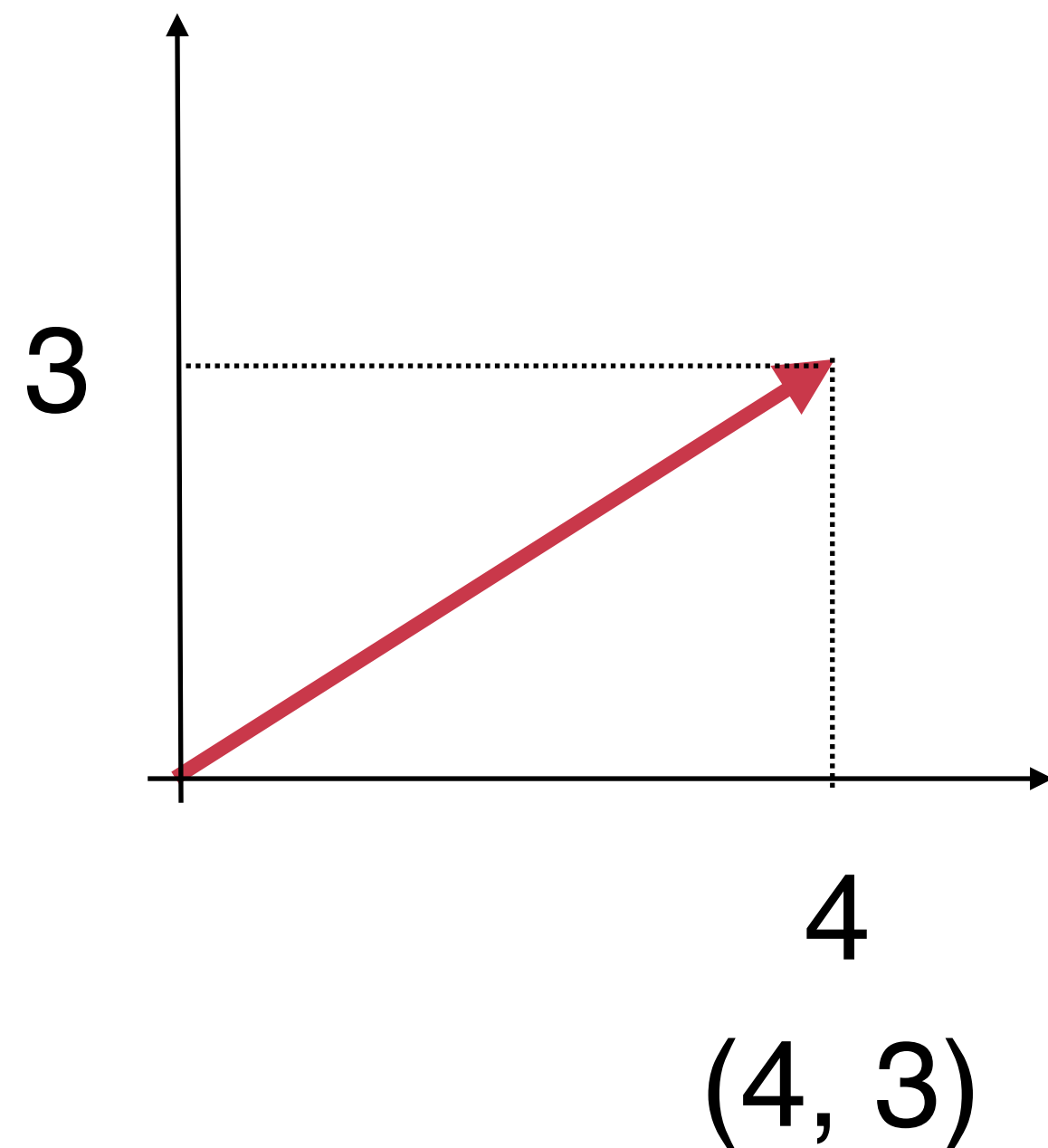
- 为什么线性代数这么重要？从研究一个数拓展到研究一组数
- 一组数的基本表示方法——向量 (Vector)
- 向量 (Vector) 是线性代数研究的基本元素

一个数：666

一组数：(6, 66, 666)

向量

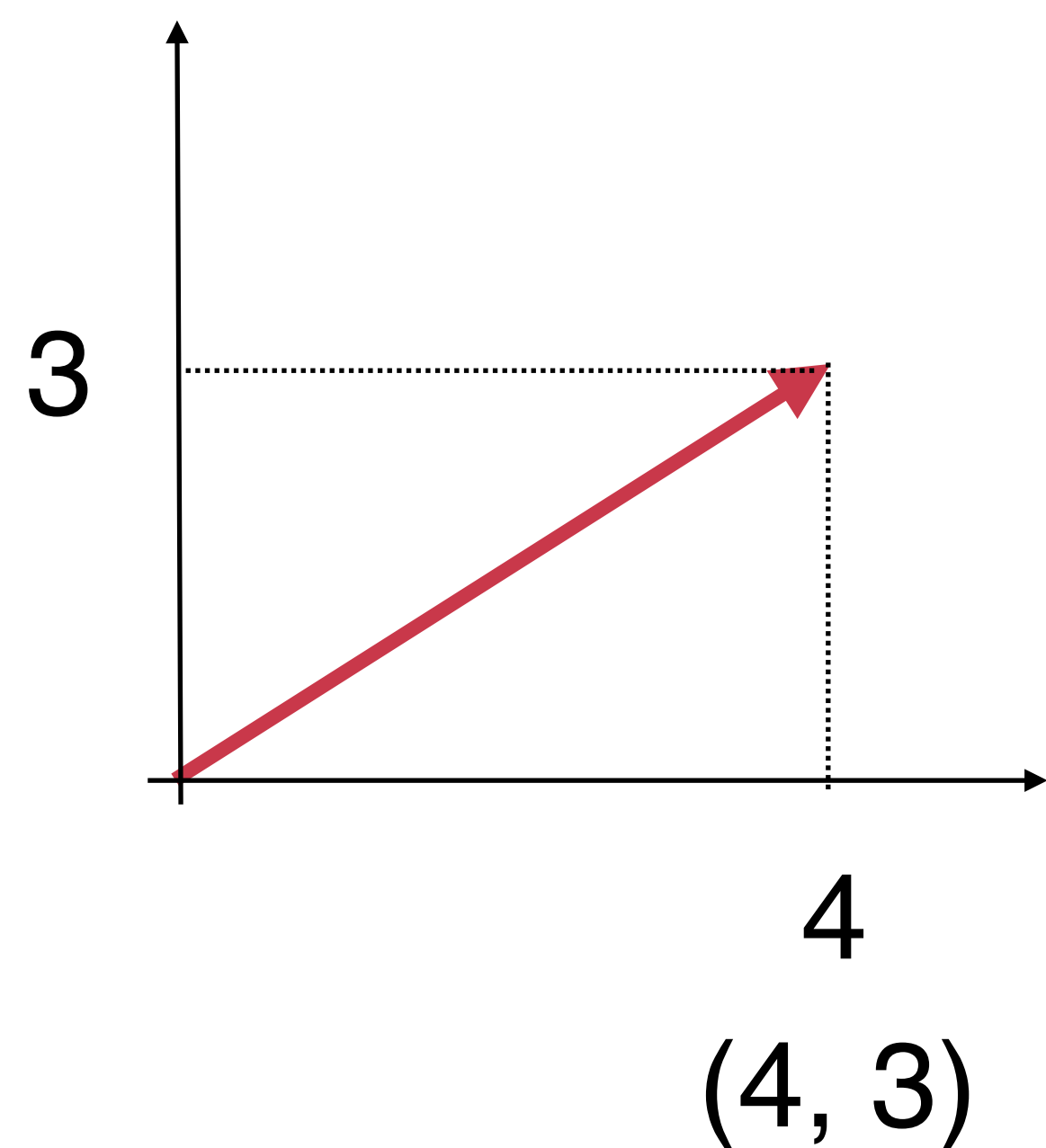
- 向量 (Vector) 是线性代数研究的基本元素
- 一组数有什么用? 最基本的出发点: 表示方向



位移, 速度, 加速度, 力...

向量

- 向量 (Vector) 是线性代数研究的基本元素

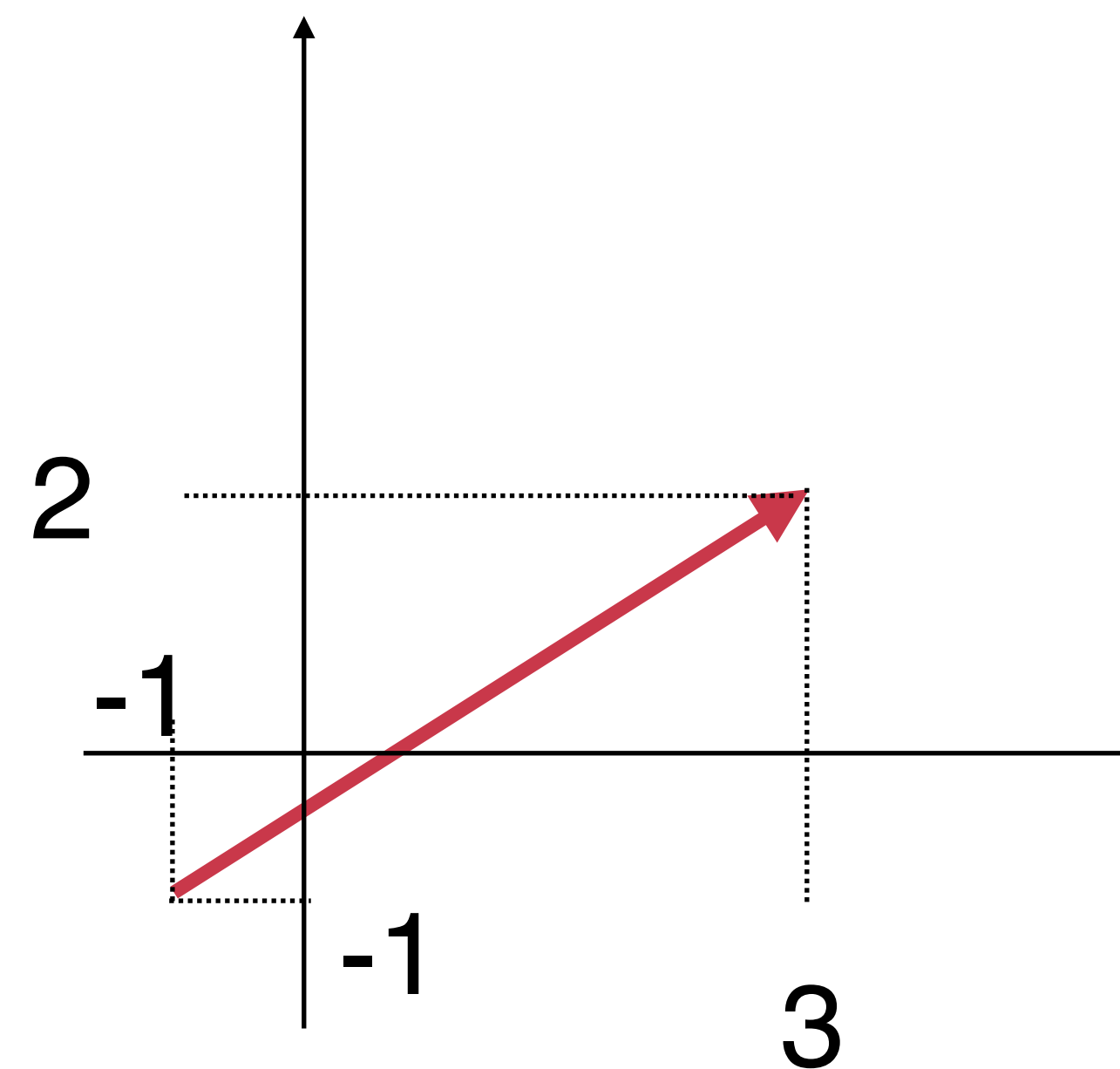


起始点不重要?

从(-1, -1)到(3, 2)

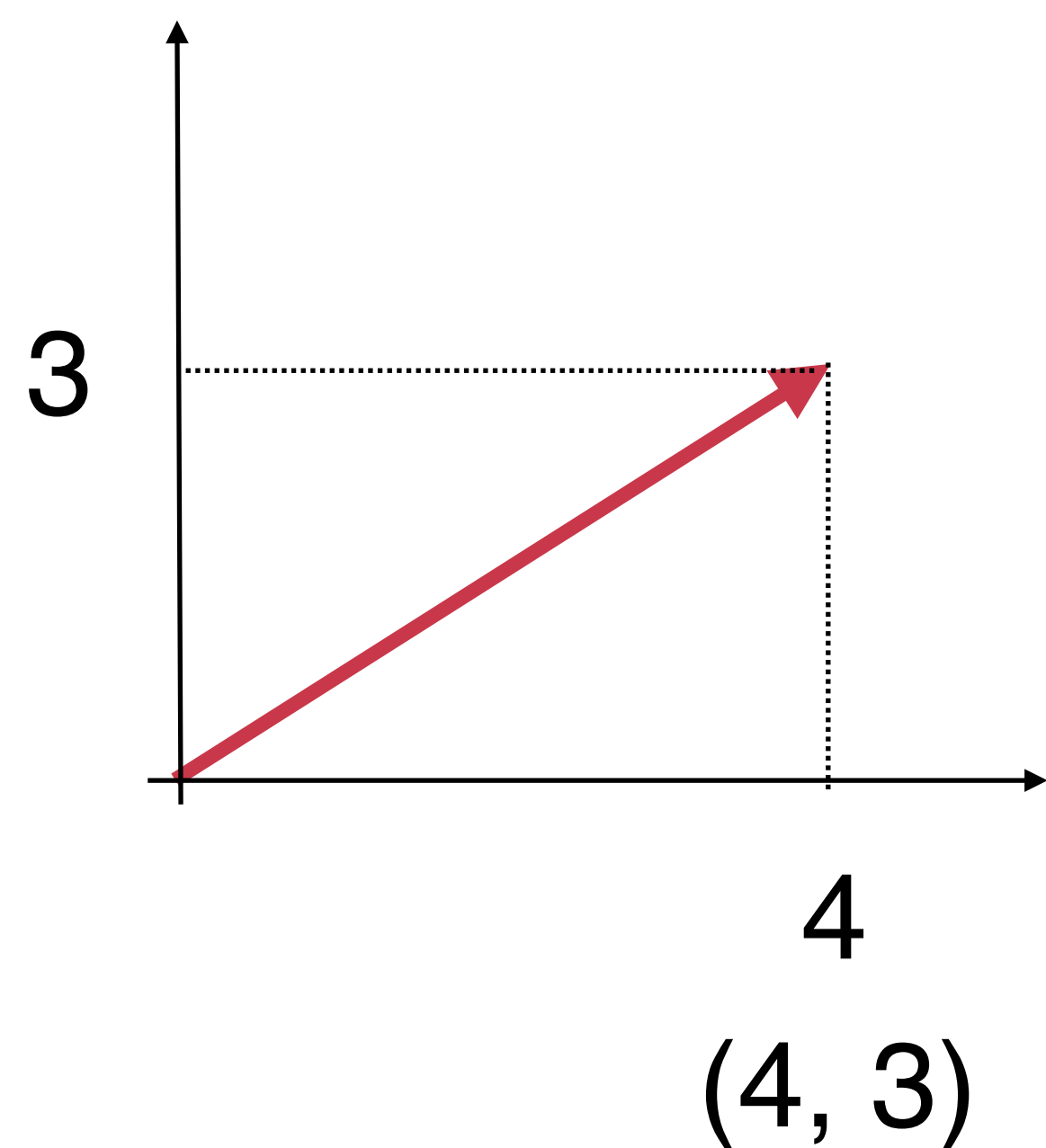
和从(0, 0)到(4, 3)是一样的

坐标系不同



向量

- 向量 (Vector) 是线性代数研究的基本元素

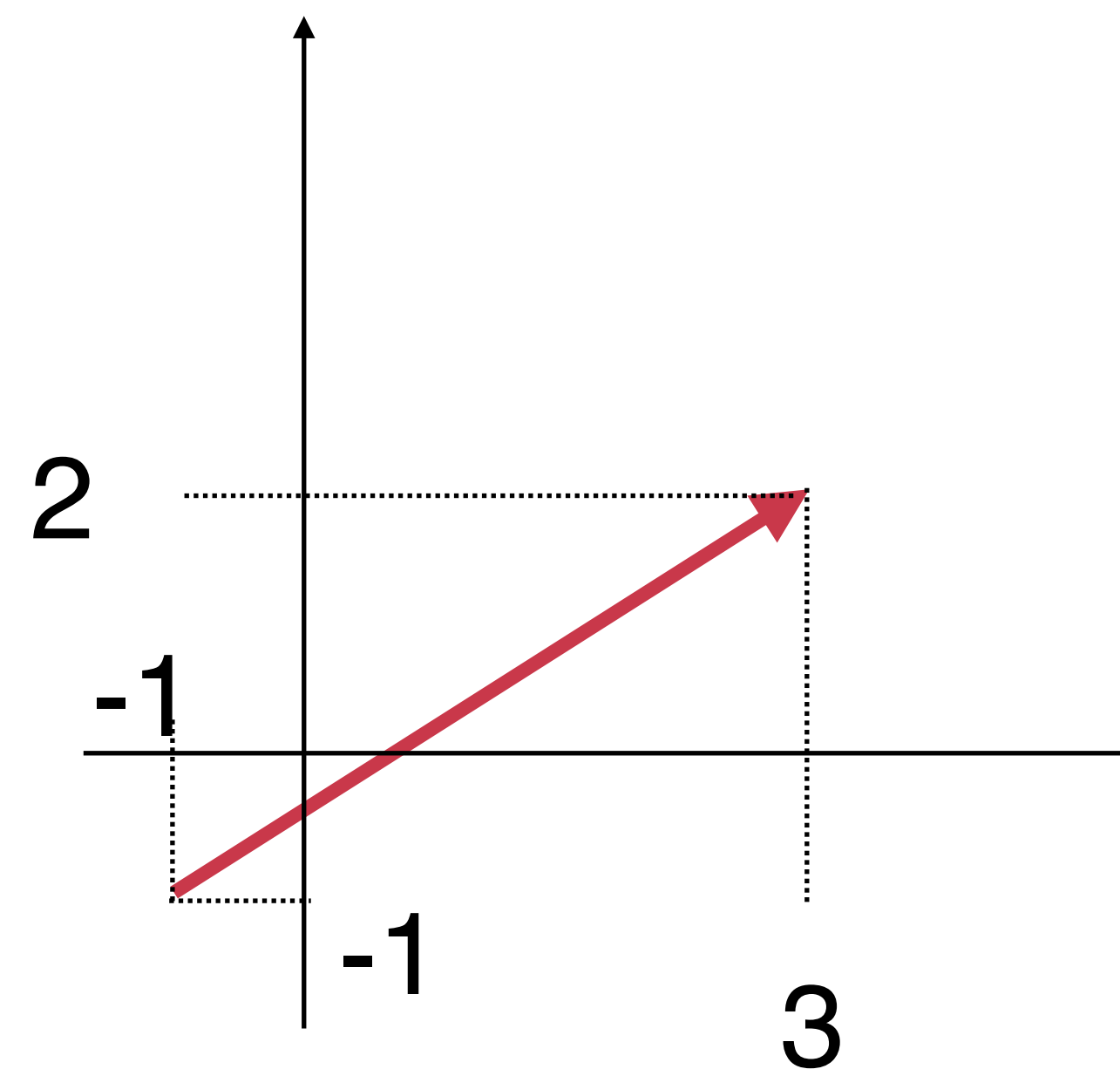


起始点不重要?

从(-1, -1)到(3, 2)

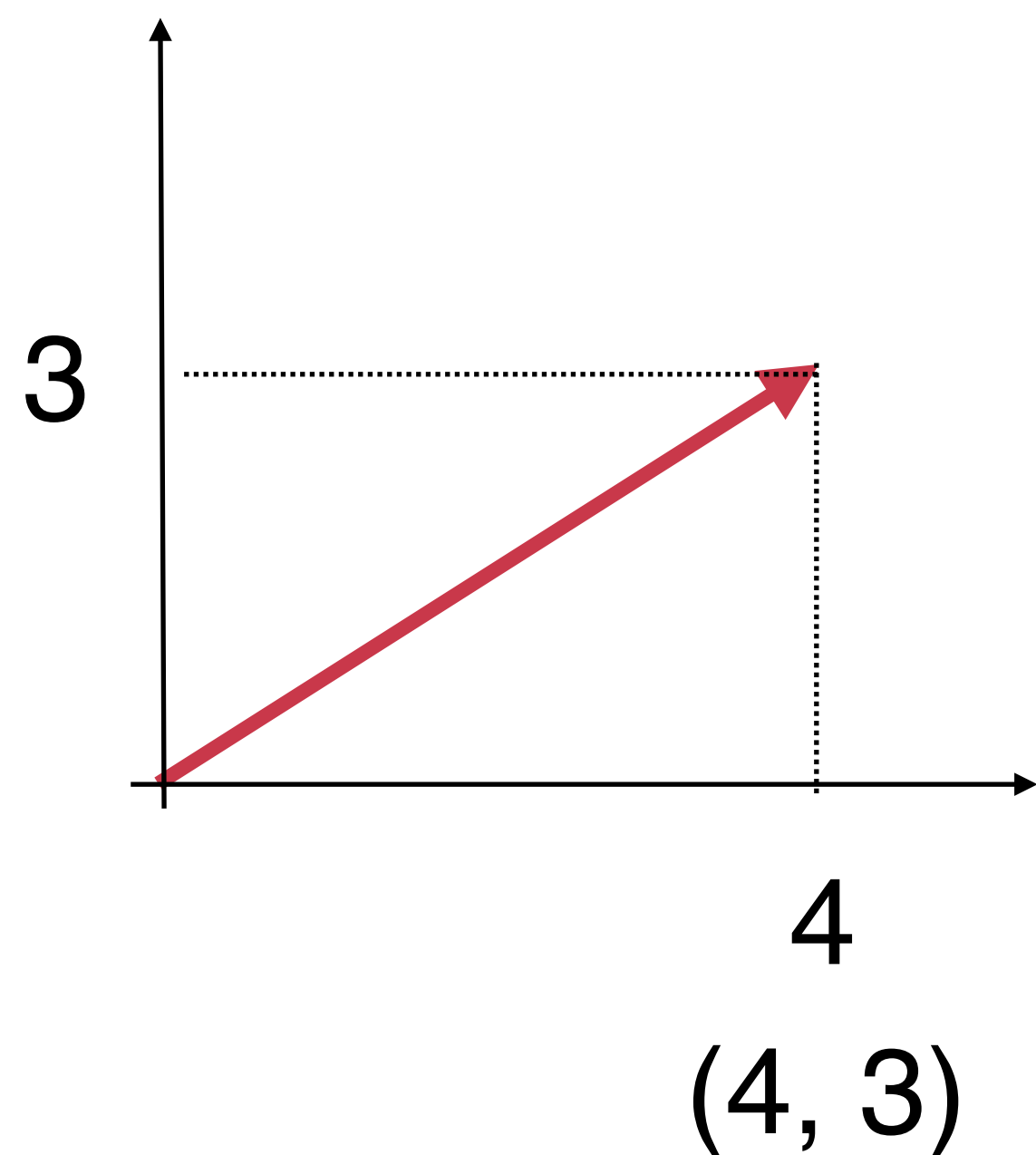
和从(0, 0)到(4, 3)是一样的

坐标系不同



向量

- 向量 (Vector) 是线性代数研究的基本元素

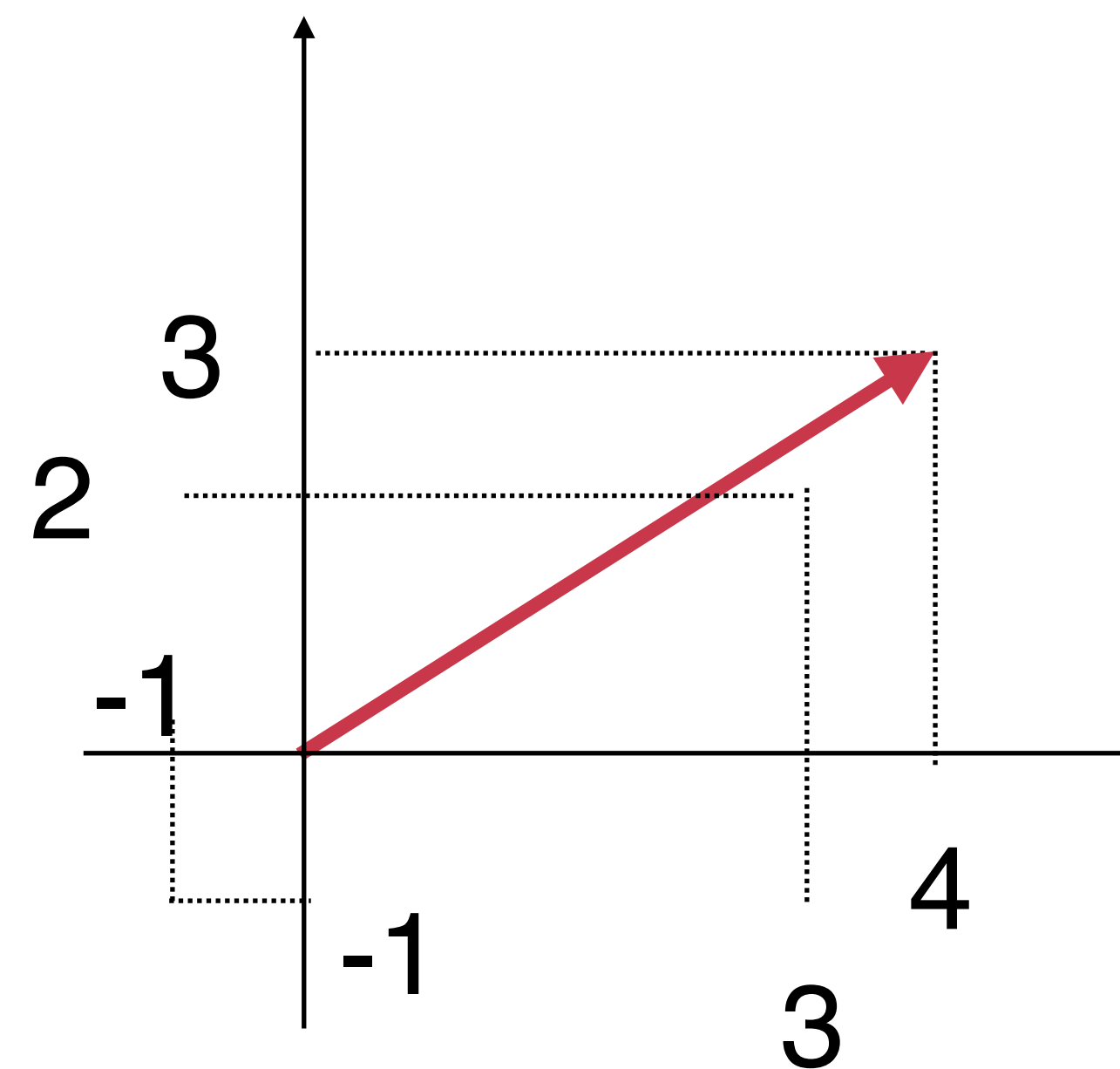


起始点不重要?

从(-1, -1)到(3, 2)

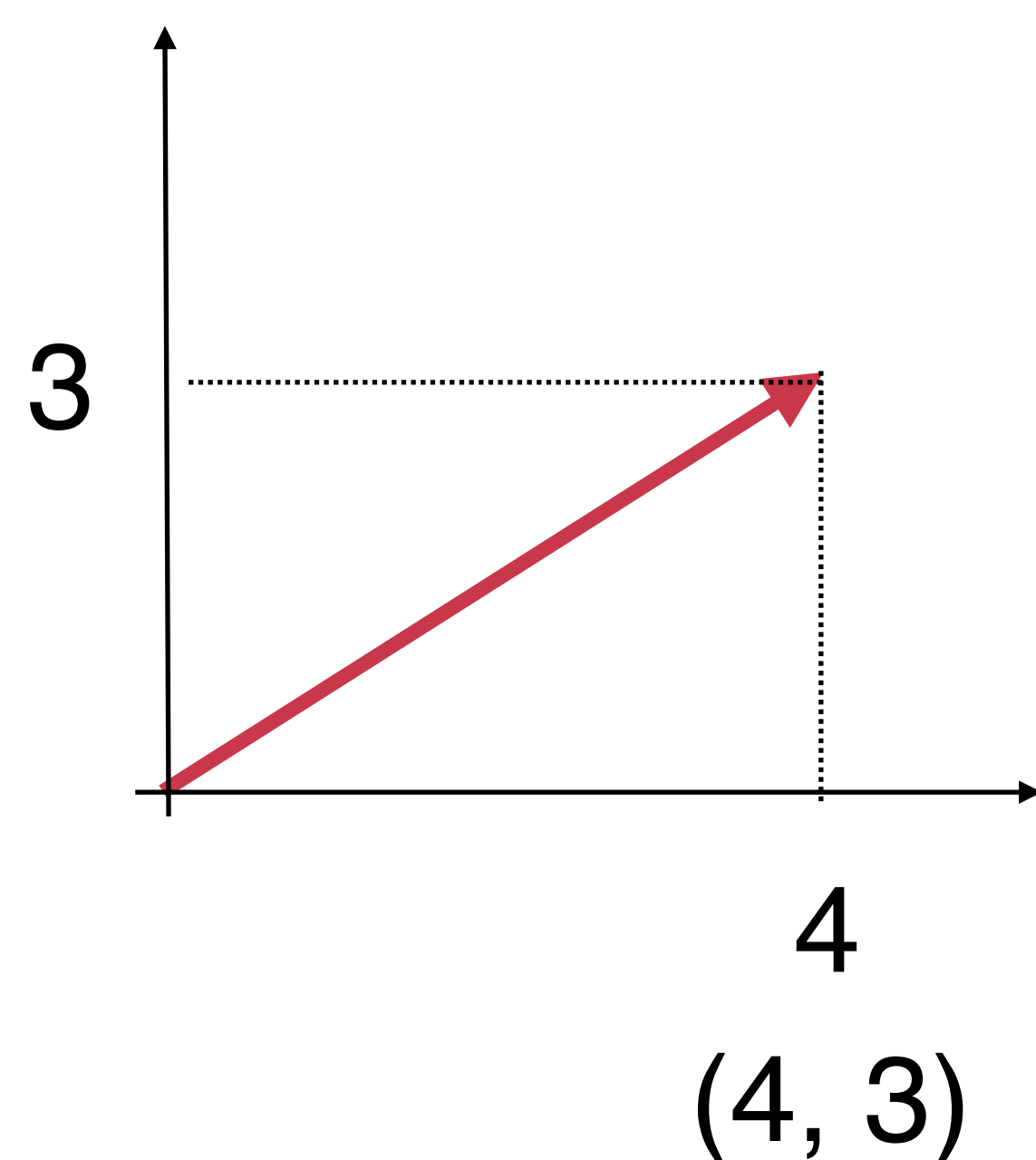
和从(0, 0)到(4, 3)是一样的

坐标系不同



向量

- 向量 (Vector) 是线性代数研究的基本元素



为了研究方便，我们定义向量都从原点起始

但是，顺序是重要的！

$(4, 3)$ 和 $(3, 4)$ 截然不同

向量是一组有序的数

向量

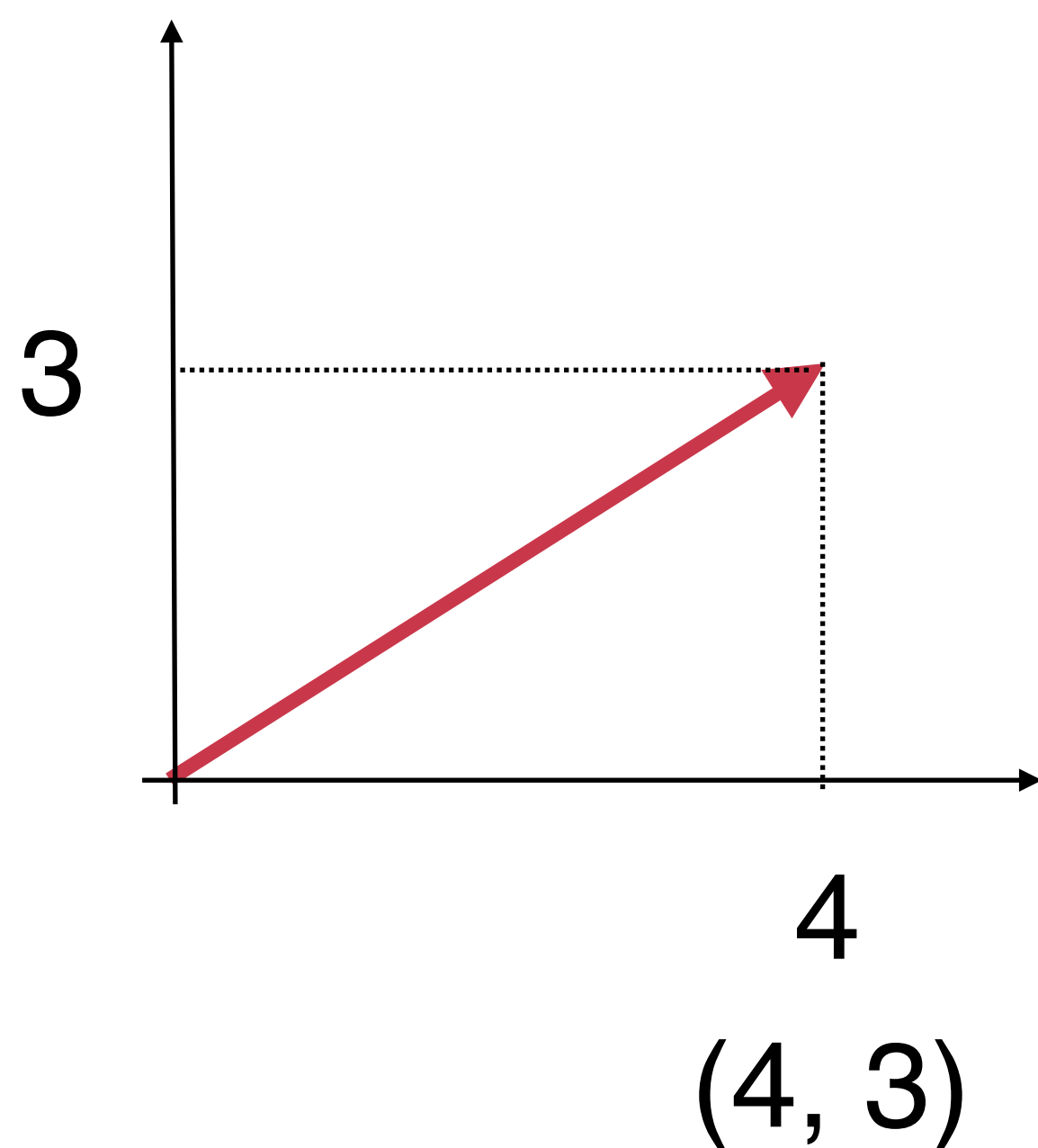
- 向量 (Vector) 是线性代数研究的基本元素
- 如果只是表示方向，最多三个维度就够了
- 更加抽象的：n维向量

面积	卧室	卫生间	最近地铁站(km)	价格(万)
120	3	2	2	666

(120, 3, 2, 2, 666)

此时，向量就是一组数，这组数的含义由使用者定义

向量

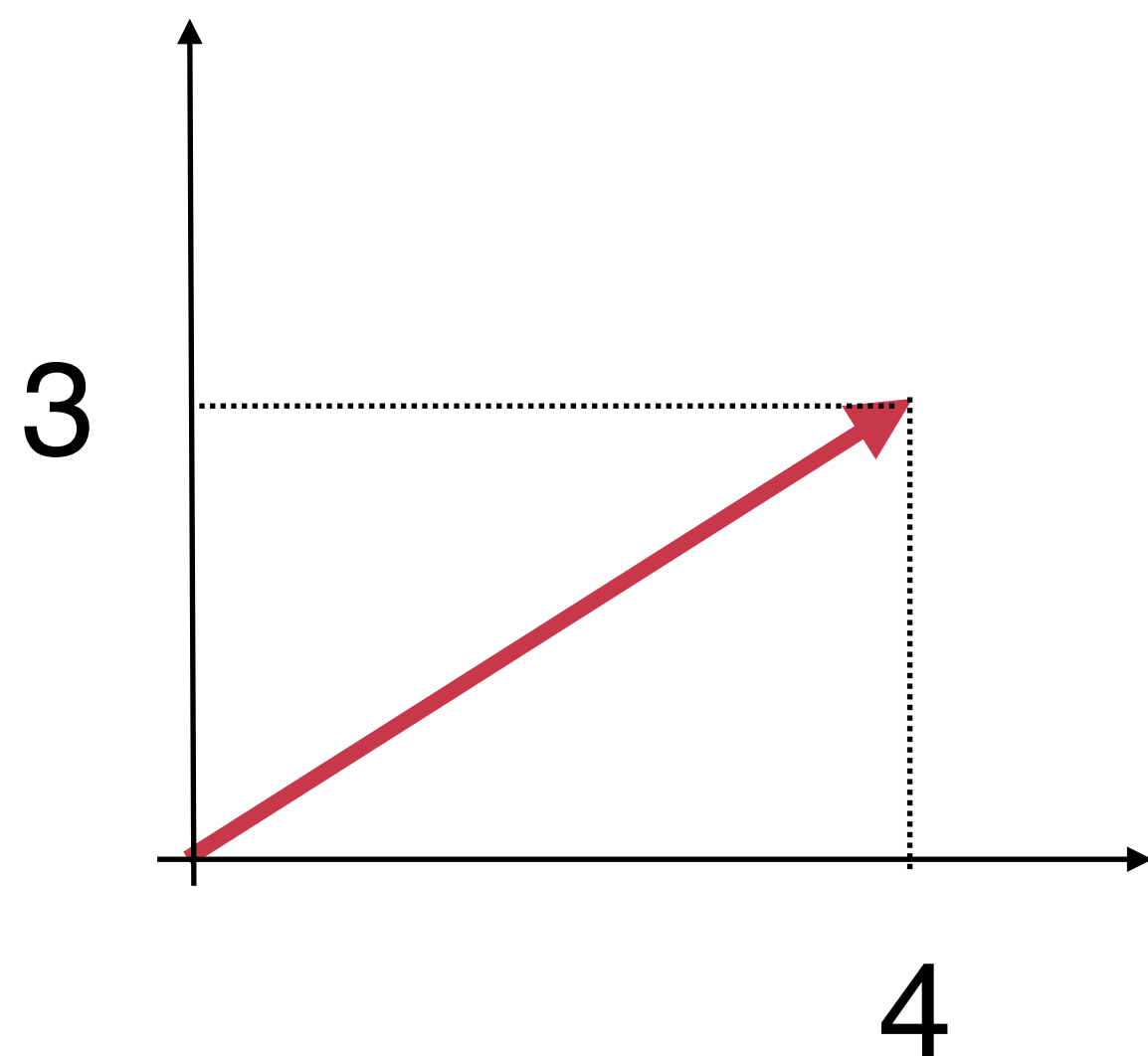


面积	卧室	卫生间	最近地铁站(km)	价格(万)
120	3	2	2	666

(120, 3, 2, 2, 666)

- 两个视角看似不同，但可以互相转换
- 一个方向，就是一个点；
- 空间中的一个点，可以看做从原点指向这个点的一个方向
- 在学习初始，使用方向的视角，更直观，更形象

向量



(4, 3)

面积	卧室	卫生间	最近地铁站(km)	价格(万)
120	3	2	2	666

(120, 3, 2, 2, 666)

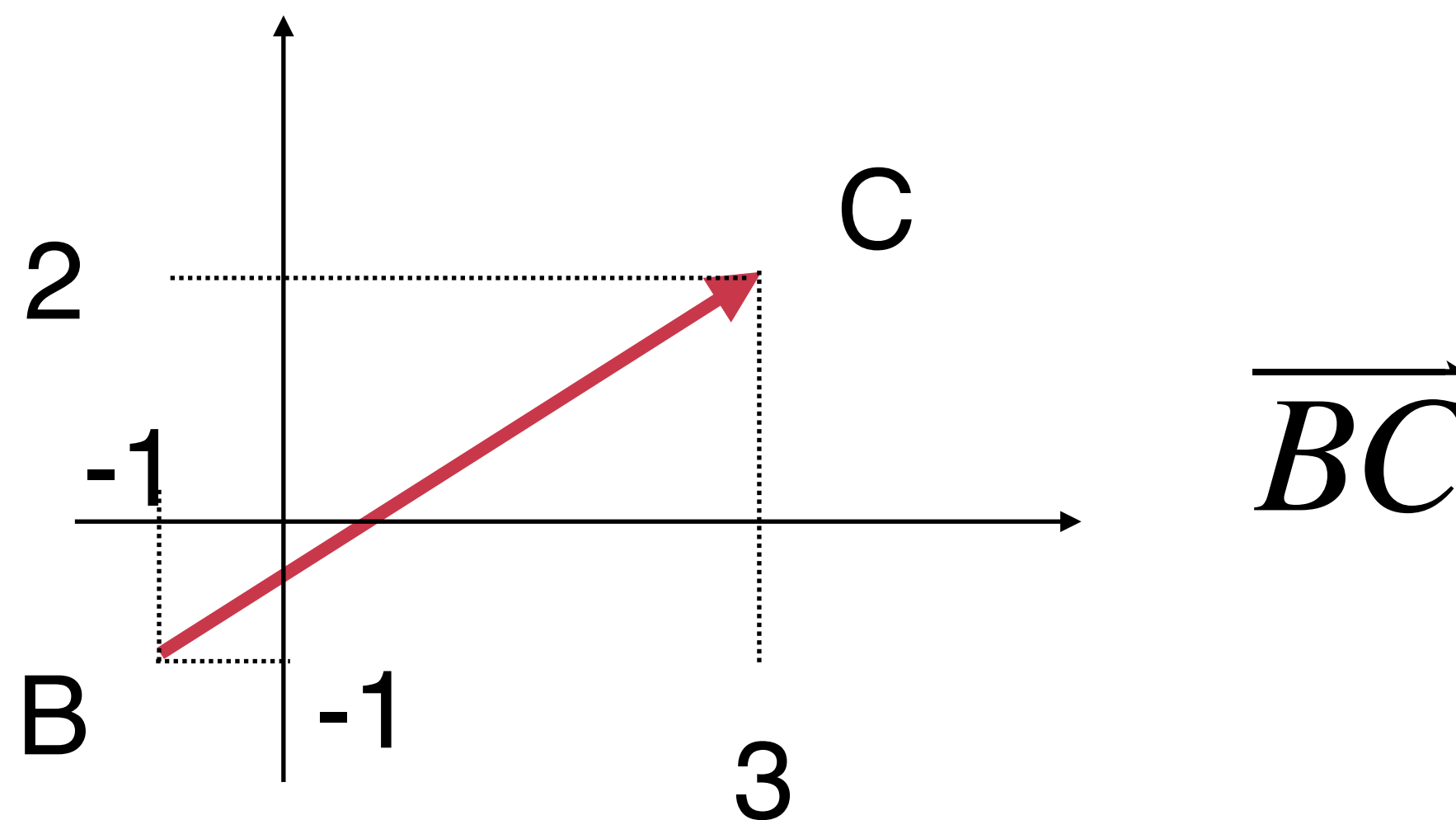
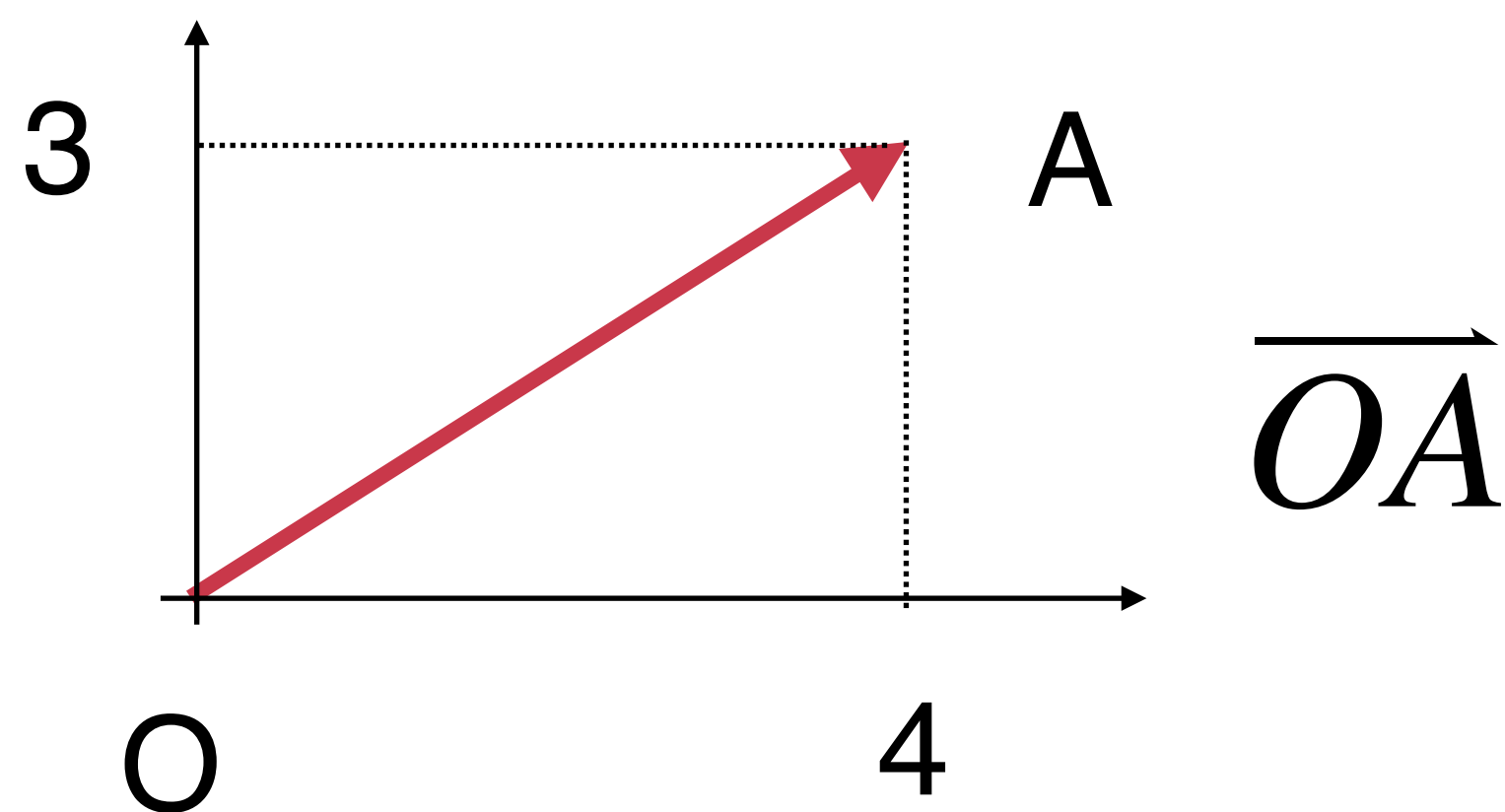
- 更关键的是：这两个视角，都不是简单的“一组数”
- 一个是一个有向线段
- 一个是空间中的点

实现属于我们自己的向量：)

向量

更严格的一些定义：

- 和向量相对应，一个数字，称为标量
- 代数，用符号代表数。和标量相区别，向量的符号画箭头： \vec{v}
- 个别情况下，尤其是几何学中，我们会考虑向量的起始点



向量

行向量和列向量

$$(3,4) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

在现阶段，没有区别

通常教材，论文，提到向量，都指列向量

由于横版印刷原因，使用符号： $(3,4)^T$

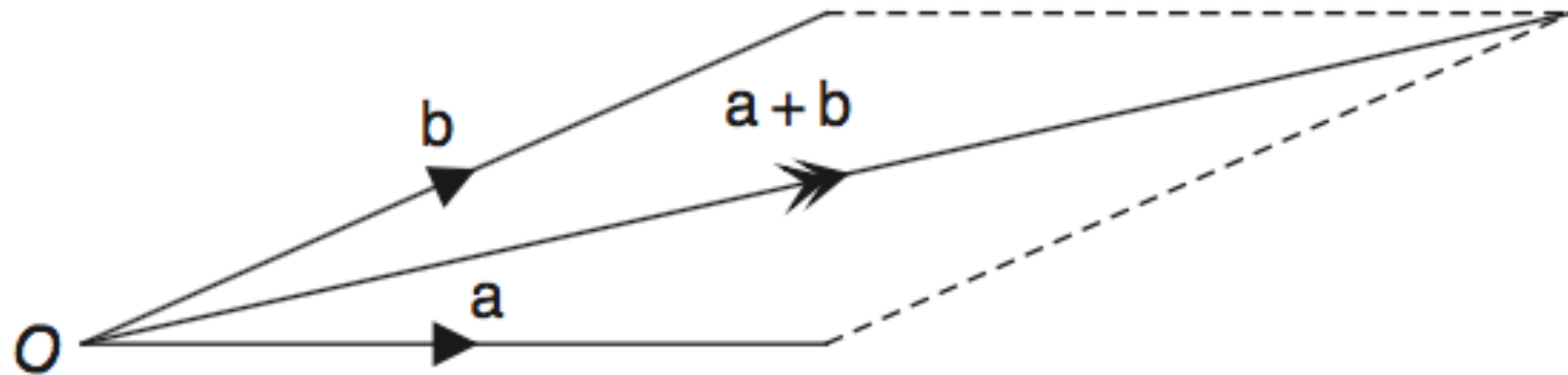
实践： 实现属于我们自己的向量

向量的基本运算

向量的两个最重要的基本运算

- 向量加法

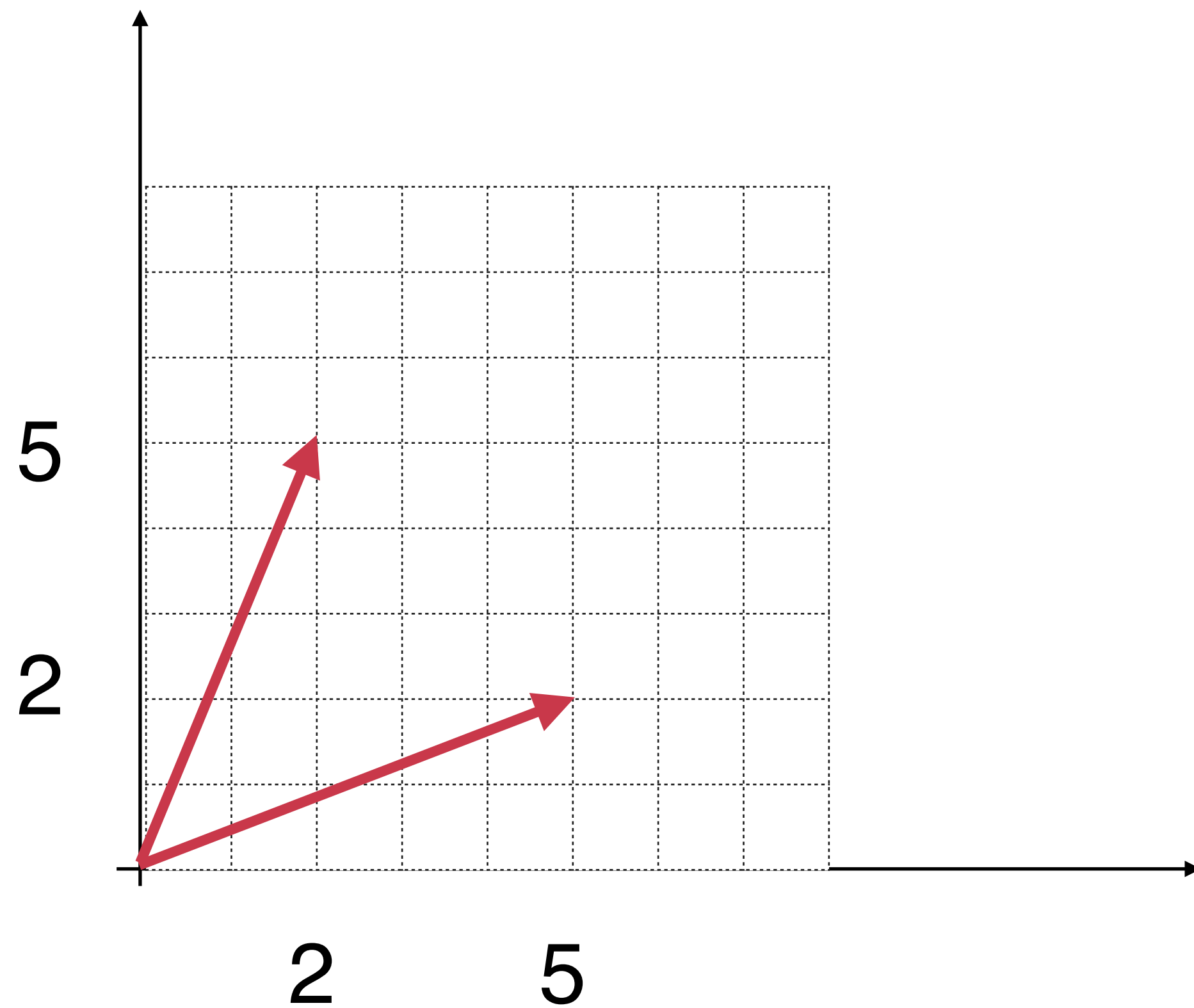
$$(5,2)^T + (2,5)^T = ?$$



为什么？

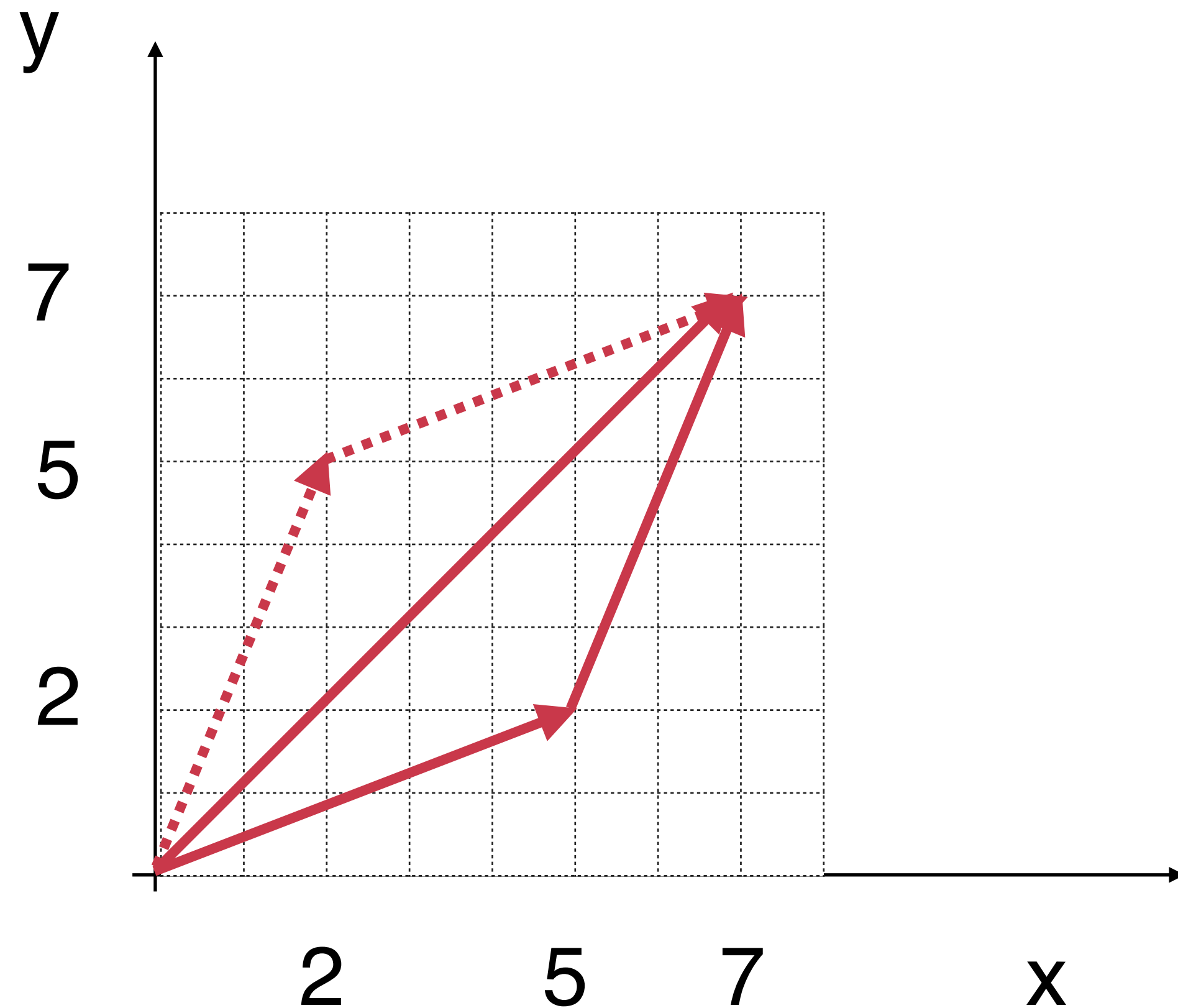
向量的两个最重要的基本运算

• 向量加法 $(5,2)^T + (2,5)^T = ?$



向量的两个最重要的基本运算

• 向量加法 $(5,2)^T + (2,5)^T = ?$ $(7,7)^T$



先向x移动5个单位

再向y移动2个单位

再向x移动2个单位

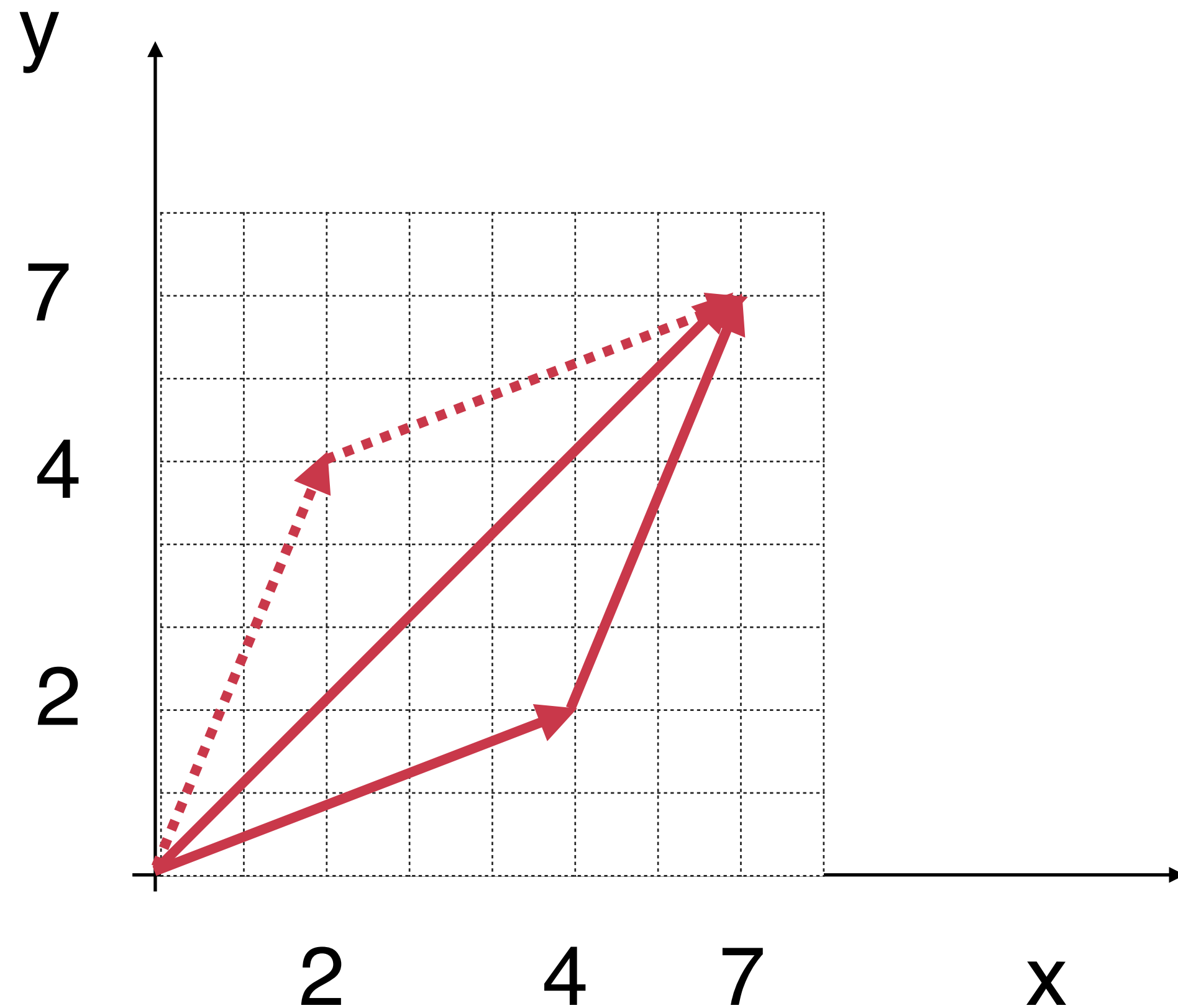
再向y移动5个单位

总共向x移动7个单位

总共向y移动7个单位

向量的两个最重要的基本运算

• 向量加法 $(a,b)^T + (c,d)^T = ?$ $(a+c, b+d)^T$



先向x移动a个单位

再向y移动b个单位

再向x移动c个单位

再向y移动d个单位

总共向x移动a+c个单位

总共向y移动b+d个单位

向量的两个最重要的基本运算

- 向量加法

三维向量同理：

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d \\ b + e \\ c + f \end{pmatrix}$$

向量的两个最重要的基本运算

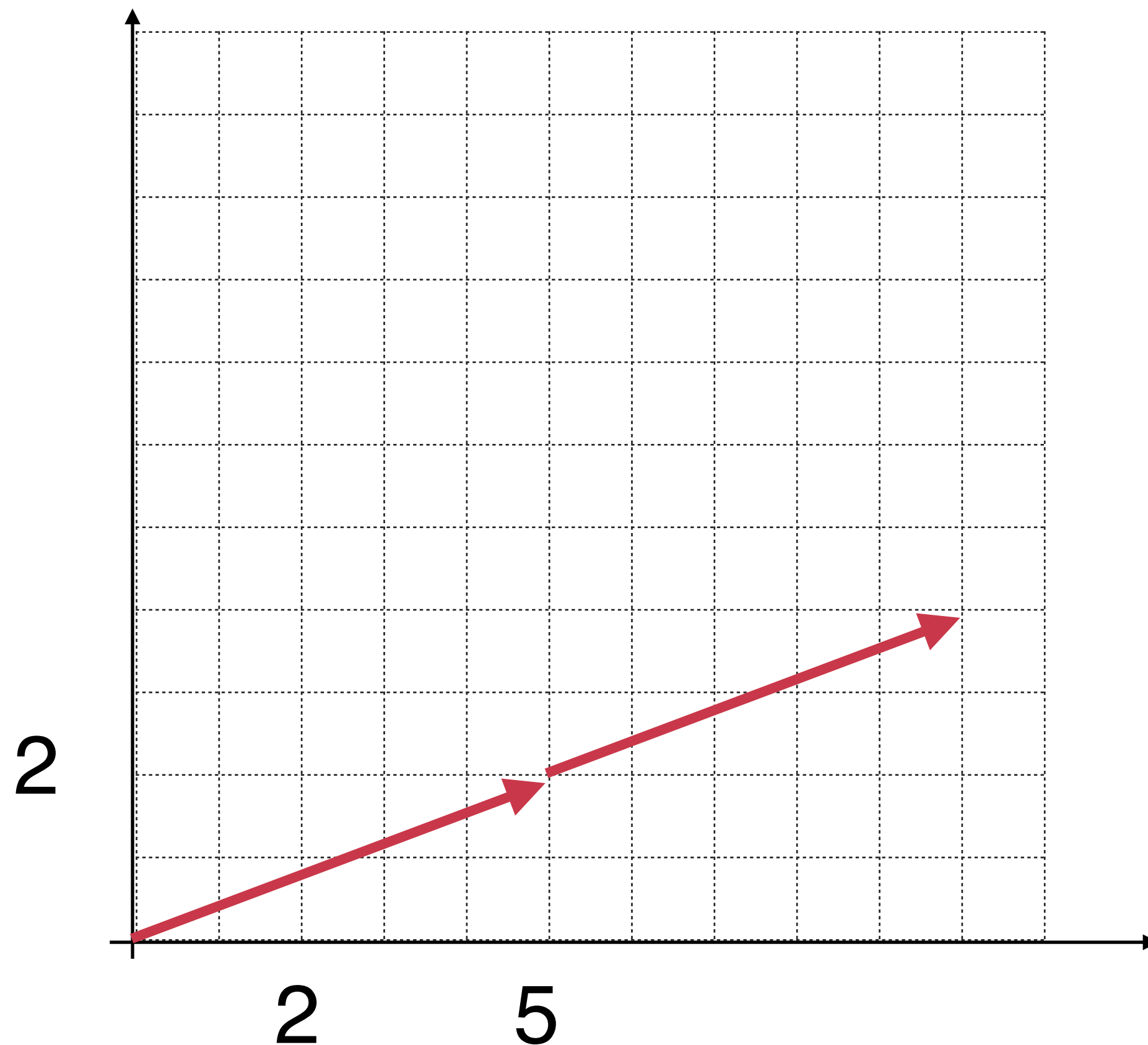
- 向量加法

n维向量同理：

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ \dots \\ v_n + u_n \end{pmatrix}$$

向量的两个最重要的基本运算

• 数量乘法 $2 \times (5, 2)^T = ?$



向x移动2次5个单位

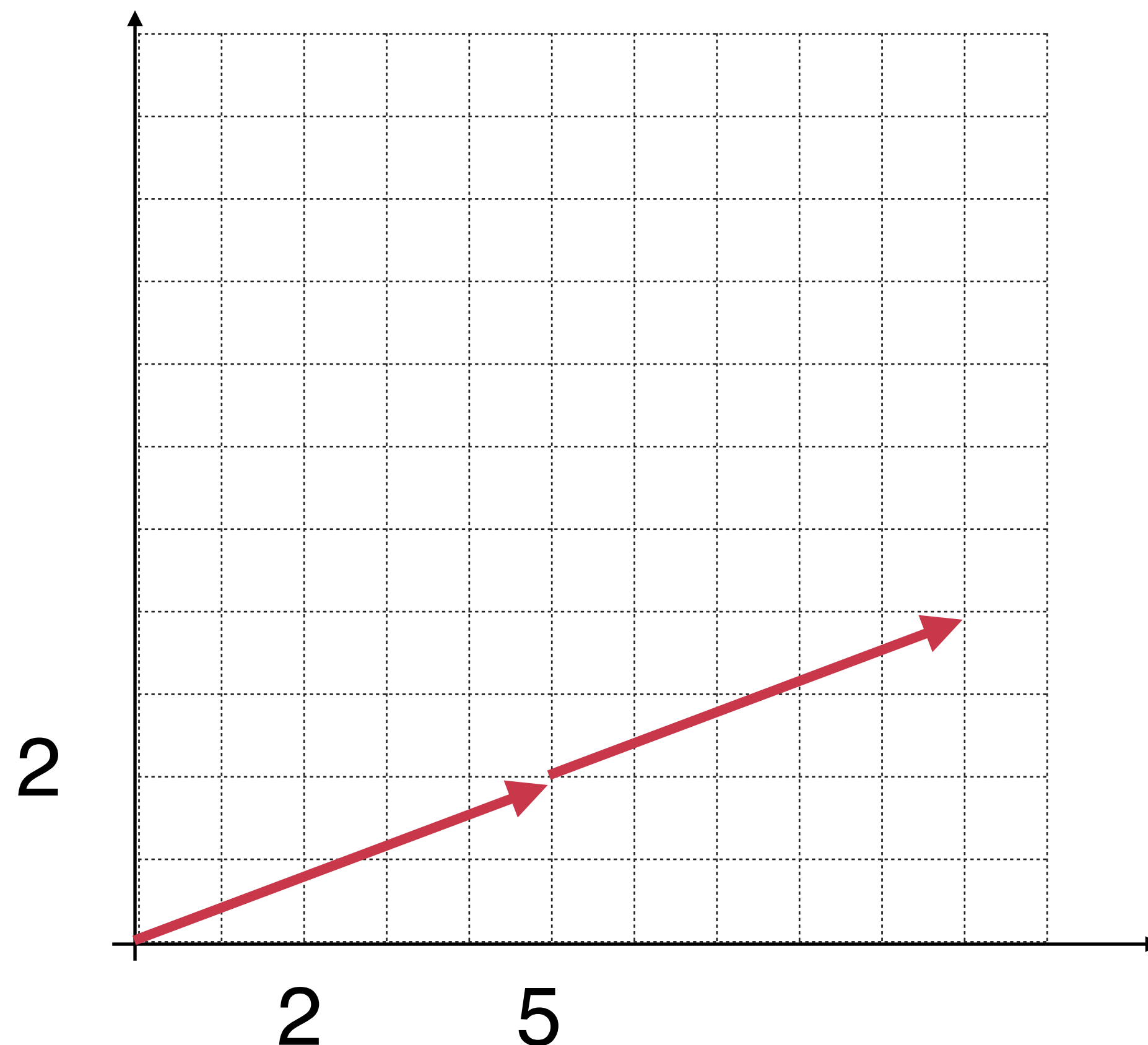
再向y移动2次2个单位

总共向x移动10个单位

总共向y移动4个单位

向量的两个最重要的基本运算

• 数量乘法 $k \times (a, b)^T = ?$ $(ka, kb)^T$



向x移动k次a个单位

再向y移动k次b个单位

总共向x移动ka个单位

总共向y移动kb个单位

向量的两个最重要的基本运算

- 数量乘法

n维向量同理：

$$k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \\ \dots \\ k \cdot v_n \end{pmatrix}$$

向量的两个最重要的基本运算

- 向量加法

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ \dots \\ v_n + u_n \end{pmatrix}$$

- 数量乘法

$$k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \\ \dots \\ k \cdot v_n \end{pmatrix}$$

实现向量的基本运算

实践：实现向量的基本运算

向量运算的基本性质

向量运算的基本性质

回忆我们小学时学习的数的运算

我们也要先有数的运算的相关性质，之后才敢进行更加复杂的运算

比如：加法交换律，乘法交换律，加法结合律，乘法结合律，等等

对于向量运算，我们也要这么做！

向量运算的基本性质

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$(k + c)\vec{u} = k\vec{u} + c\vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$(kc)\vec{u} = k(c\vec{u})$$

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

$$1\vec{u} = \vec{u}$$

向量运算的基本性质

证明举例: $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}\right) = k\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \dots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_1 + kv_1 \\ ku_2 + kv_2 \\ \dots \\ ku_n + kv_n \end{pmatrix}$$

证明举例: $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}\right) = k\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \dots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_1 + kv_1 \\ ku_2 + kv_2 \\ \dots \\ ku_n + kv_n \end{pmatrix}$$

$$k\vec{u} + k\vec{v} = k\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ \dots \\ ku_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ \dots \\ kv_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_1 + kv_1 \\ ku_2 + kv_2 \\ \dots \\ ku_n + kv_n \end{pmatrix}$$

向量运算的基本性质

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$(k + c)\vec{u} = k\vec{u} + c\vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$(kc)\vec{u} = k(c\vec{u})$$

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

$$1\vec{u} = \vec{u}$$

零向量

零向量

我们不定义什么是零向量，我们从推导出一个性质出发

对于任意一个向量 \vec{u} ，都存在一个向量 O ，满足： $\vec{u} + O = \vec{u}$

零向量

对于任意一个向量 \vec{u} ，都存在一个向量 O ，满足： $\vec{u} + O = \vec{u}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ \dots \\ o_n \end{pmatrix} \quad \vec{u} + O = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ \dots \\ o_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + o_1 \\ u_2 + o_2 \\ \dots \\ u_n + o_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

对于任意一个向量 \vec{u} ，都存在一个向量 O ，满足： $\vec{u} + O = \vec{u}$

$$\vec{u} + O = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ \dots \\ o_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + o_1 \\ u_2 + o_2 \\ \dots \\ u_n + o_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 + o_1 = u_1 \\ u_2 + o_2 = u_2 \\ \dots \\ u_n + o_n = u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} o_1 = 0 \\ o_2 = 0 \\ \dots \\ o_n = 0 \end{cases} \Rightarrow O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

零向量

对于任意一个向量 \vec{u} ，都存在一个向量 O ，满足： $\vec{u} + O = \vec{u}$

$$\Rightarrow O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

我们称这个向量，为零向量。

注意：这个零向量O没有箭头

零向量

对于任意一个向量 \vec{u} ，都存在一个向量 O ，满足： $\vec{u} + O = \vec{u}$

对于任意一个向量 \vec{u} ，都存在一个向量 $\overrightarrow{-u}$ ，满足： $\vec{u} + \overrightarrow{-u} = O$

上述 $\overrightarrow{-u}$ 唯一。

对于任意一个向量 \vec{u} ，都存在一个向量 $\overrightarrow{-u}$ ，满足： $\vec{u} + \overrightarrow{-u} = \mathbf{O}$

上述 $\overrightarrow{-u}$ 唯一。

假设存在另一个向量 \vec{v} ，也满足 $\vec{u} + \vec{v} = \mathbf{O}$

$$\overrightarrow{-u} + (\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{-u} + \mathbf{O}$$

$$(\overrightarrow{-u} + \vec{u}) + \vec{v} = \overrightarrow{-u}$$

$$\mathbf{O} + \vec{v} = \overrightarrow{-u}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{-u}$$

零向量

对于任意一个向量 \vec{u} ，都存在一个向量 O ，满足： $\vec{u} + O = \vec{u}$

对于任意一个向量 \vec{u} ，都存在一个向量 $\overrightarrow{-u}$ ，满足： $\vec{u} + \overrightarrow{-u} = O$

上述 $\overrightarrow{-u}$ 唯一。

$$\overrightarrow{-u} = -1 \cdot \vec{u}$$

实现零向量

实践：零向量

小结：一切从向量开始

一切从向量开始

什么是向量

两个视角：有向线段；数据点

基本运算：向量加法，数量乘法

基本性质

零向量

一切从向量开始

其他

欢迎大家关注我的个人公众号：是不是很酷



专给程序员设计的线性代数

liuyubobobo