

# 专给程序员设计的线性代数

liuyubobobo

# 线性系统

# 线性系统与消元法

# 什么是线性系统

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

什么是线性？

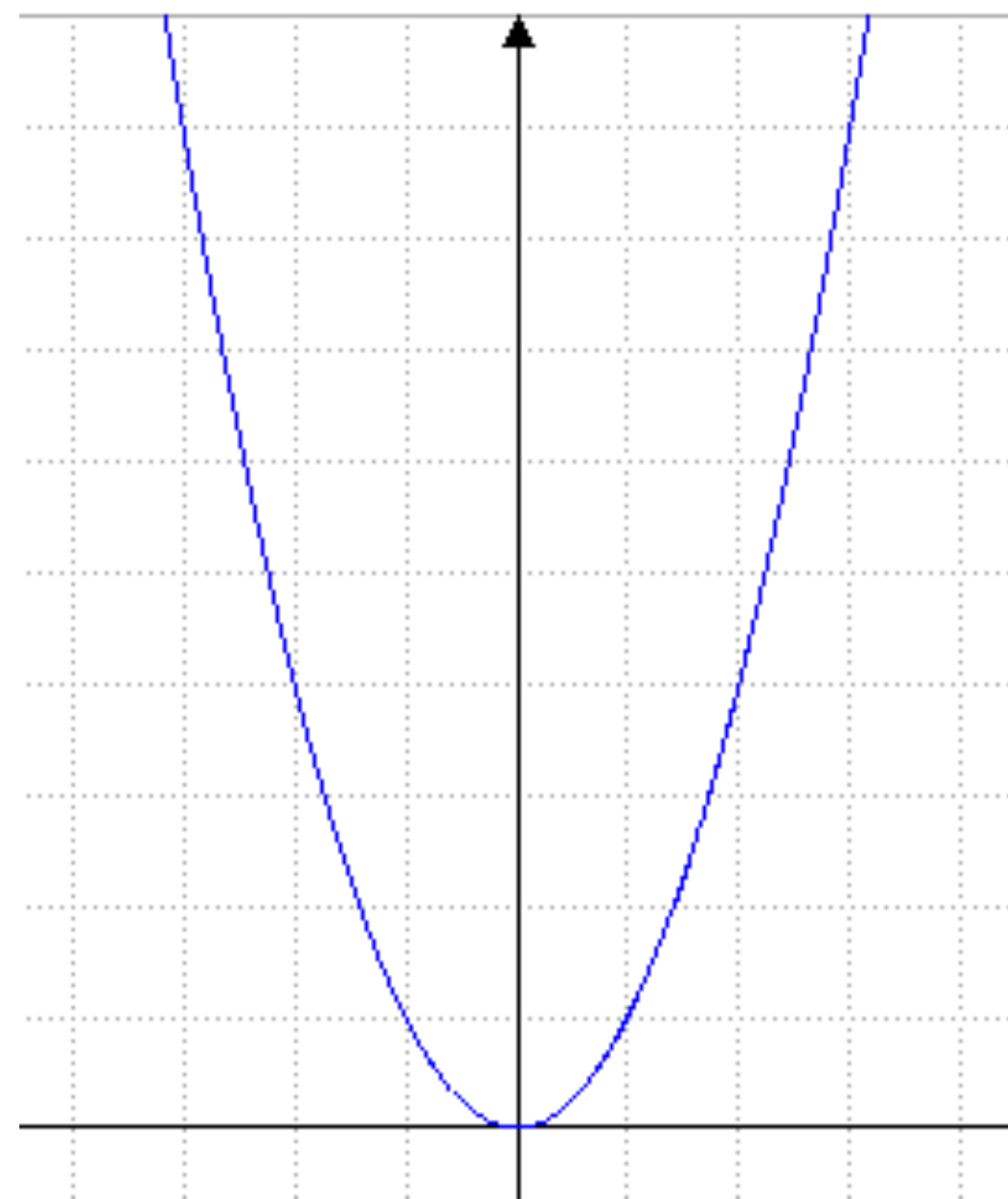
未知数只能是一次方项

非线性方程：

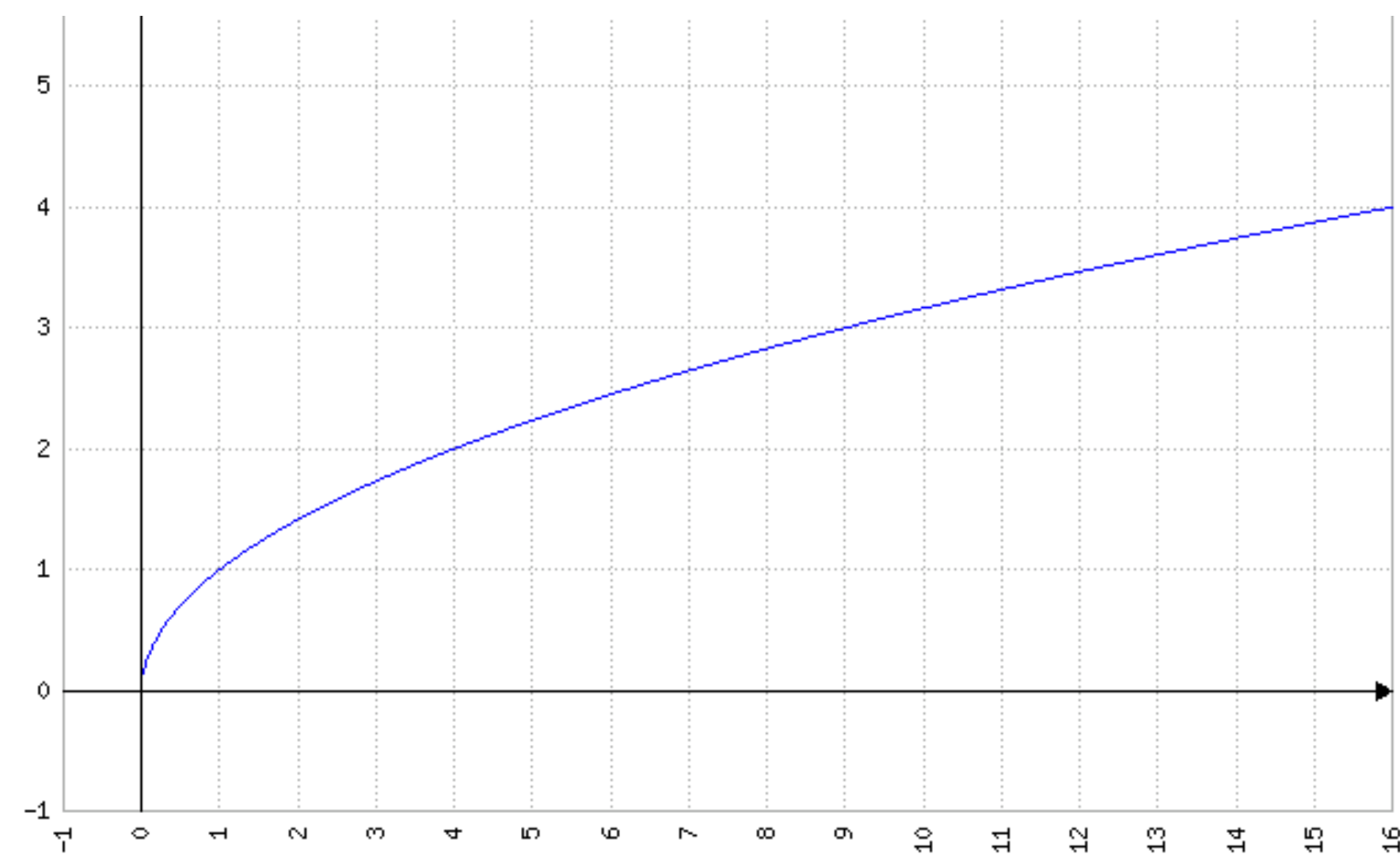
$$x^2 - 1 = 0 \quad \sqrt{z} - 4 = 0 \quad \sin(x) = \pi$$

# 什么是线性系统

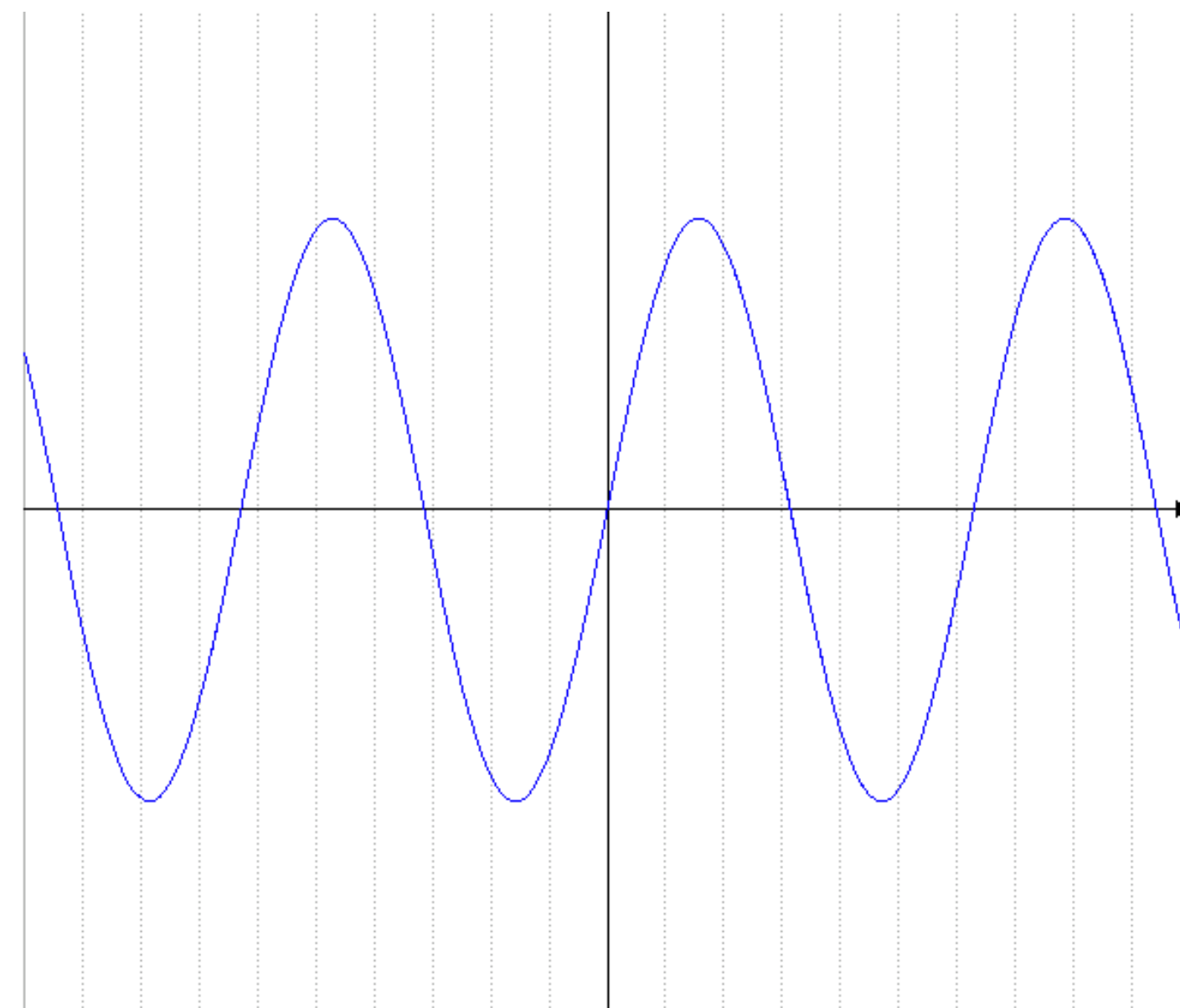
$$x^2 - 1 = 0$$



$$\sqrt{z} - 4 = 0$$



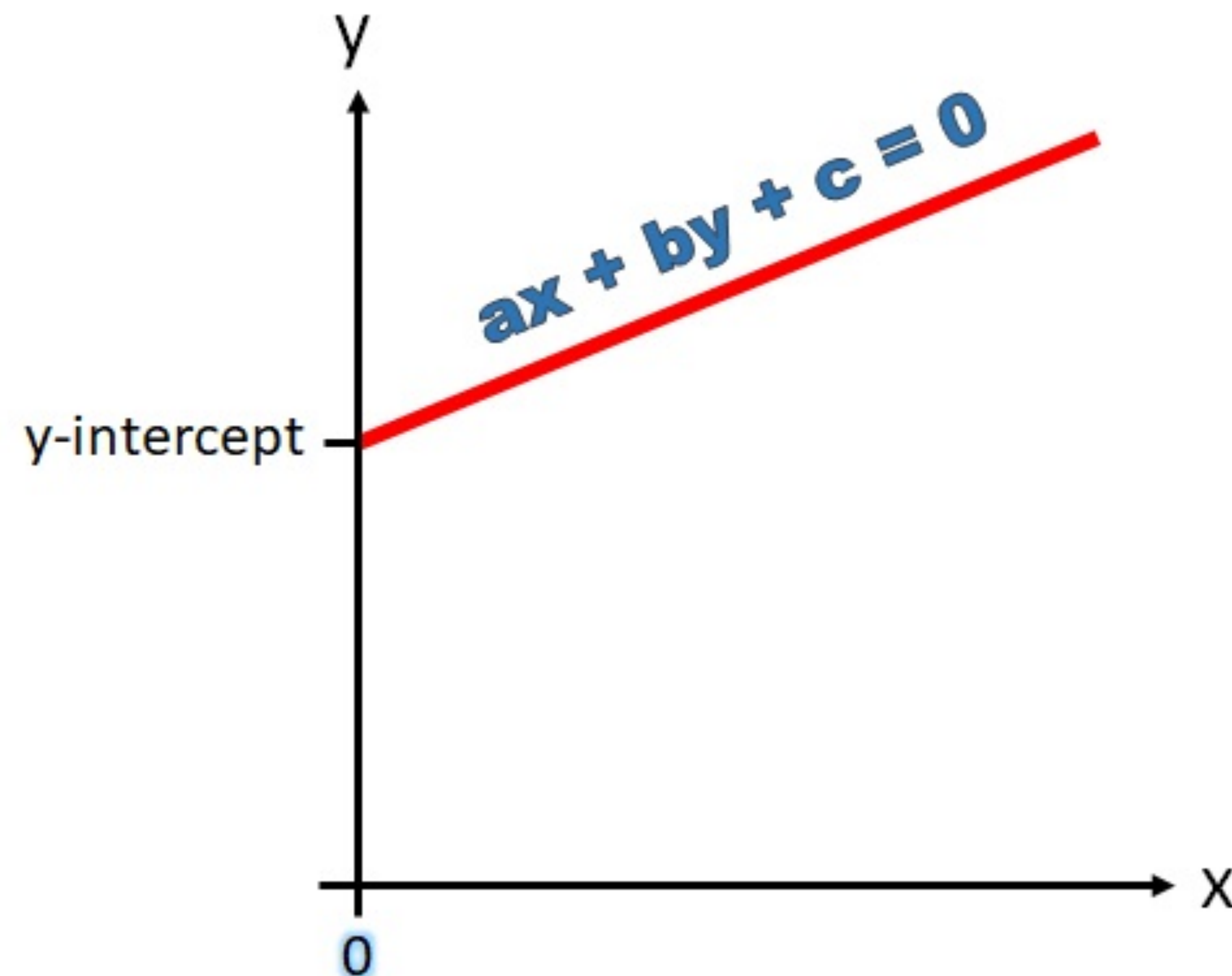
$$\sin(x) = \pi$$



# 什么是线性系统

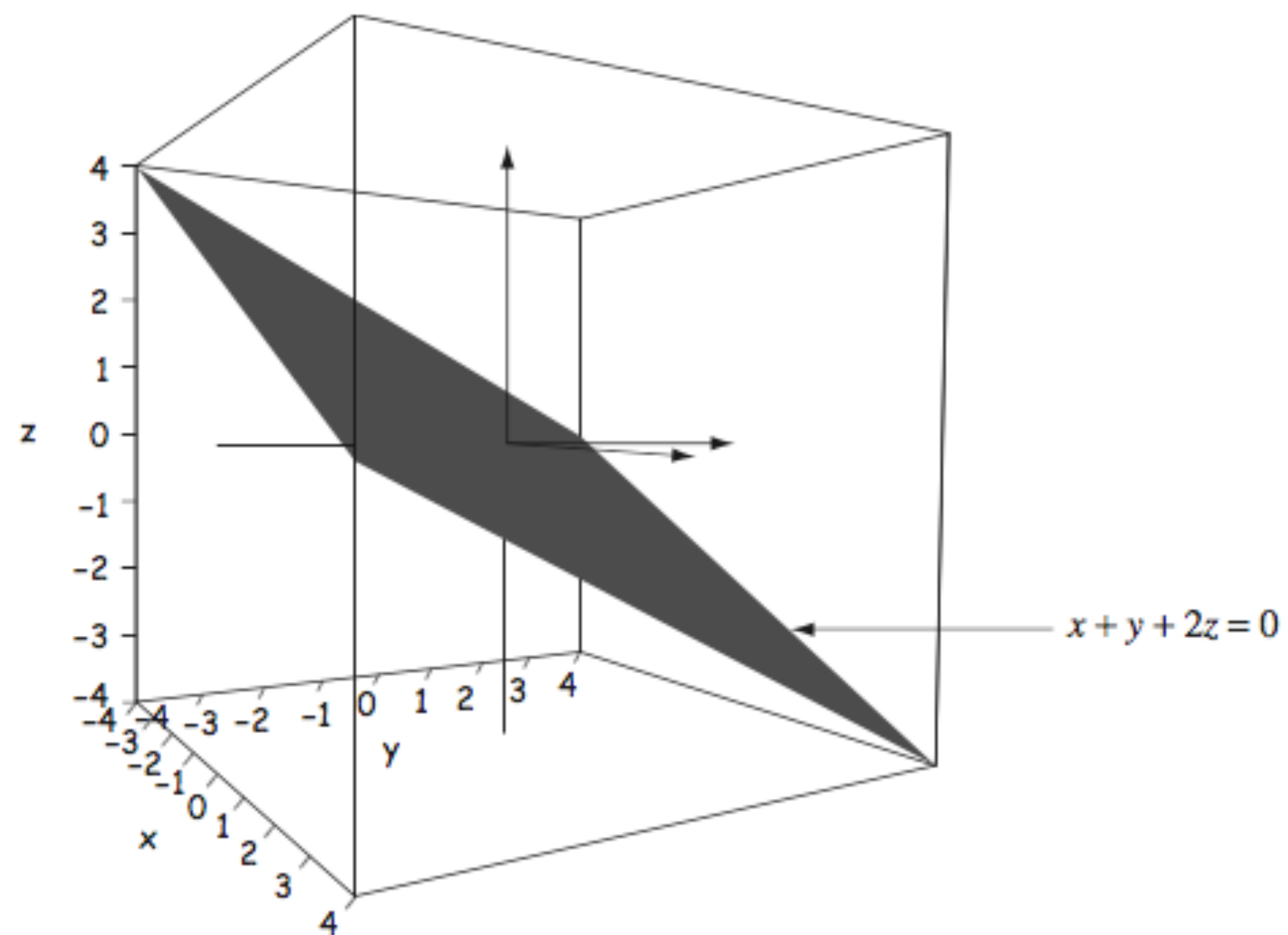
$$ax + by = c$$

$$ax + by + c = 0$$



# 什么是线性系统

$$x + y + 2z = 0$$



# 什么是线性系统

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases} \quad (3x + 4y) - 3(x + 2y) = 6 - 3 * 5$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2y = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y = 4.5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 4.5 \end{cases}$$



# 什么是线性系统

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 3x + 7y + 2z = -11 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ -y - 5z = -13 \end{cases}$$

# 什么是线性系统

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 3x + 7y + 2z = -11 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ -y - 5z = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ -15z = -45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ z = 3 \end{cases}$$

# 什么是线性系统

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 3x + 7y + 2z = -11 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ -y - 5z = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

# 消元法

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 7 \\ 3x + 7y + 2z = -11 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ -y - 5z = -13 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

一个方程的左右两边同时乘以一个常数

一个方程加（减）另一个方程

交换两个方程的位置

# 高斯消元法

# 消元法

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 7 \\ 3x + 7y + 2z = -11 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ -y - 5z = -13 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

一个方程的左右两边同时乘以一个常数

一个方程加（减）另一个方程

交换两个方程的位置

# 消元法

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 3x + 7y + 2z = -11 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ -y - 5z = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# 消元法

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 3x + 7y + 2z = -11 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ -y - 5z = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

增广矩阵

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array} \right)$$



# 消元法

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 3x + 7y + 2z = -11 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ -y - 5z = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & -15 & -45 \end{array} \right)$$

# 消元法

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 3x + 7y + 2z = -11 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ -y - 5z = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

# 高斯消元法

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{red arrow}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{red arrow}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

一个方程的左右两边同时乘以一个常数

一个方程加（减）另一个方程

交换两个方程的位置

# 高斯消元法

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{red arrow}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{red arrow}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

一个方程的左右两边同时乘以一个常数

一个方程加（减）另一个方程

交换两个方程的位置

# 高斯消元法

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{red arrow}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{red arrow}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

矩阵的某一行乘以一个常数

一个方程加（减）另一个方程

交换两个方程的位置

# 高斯消元法

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{red arrow}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{red arrow}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

矩阵的某一行乘以一个常数

矩阵的一行加（减）另一行

交换两个方程的位置

# 高斯消元法

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 7 \\ 3 & 7 & 2 & | & -11 \\ 2 & 3 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 7 \\ 0 & 1 & -10 & | & -32 \\ 0 & -1 & -5 & | & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 7 \\ 0 & 1 & -10 & | & -32 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

主元 pivot

矩阵的某一行乘以一个常数

矩阵的一行加（减）另一行

交换矩阵的两行

# 高斯消元法

$$\begin{cases} 2x - 3y = 35 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 35 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$



# 高斯消元法

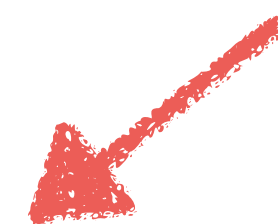
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$



$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

主元 pivot



$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$



$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

# 高斯消元法

$$\begin{cases} -3y + 4z = 5 \\ x - y + 2z = 8 \\ 3x + 8y - 2z = 11 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & 8 & -2 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & -2 & 11 \\ 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

# 高斯消元法

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\quad} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow{\quad} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

主元 pivot

矩阵的某一行乘以一个常数

矩阵的一行加（减）另一行

交换矩阵的两行

# 高斯-约旦消元法

# 高斯消元法

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 3x + 7y + 2z = -11 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

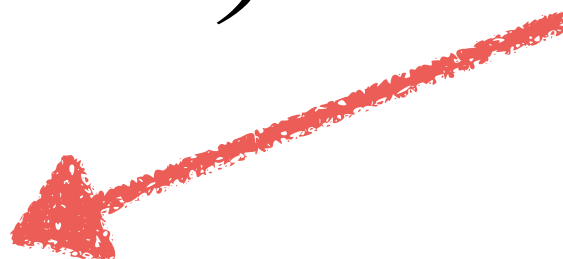
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{red arrow}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{red arrow}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

# 高斯消元法

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

# 高斯消元法

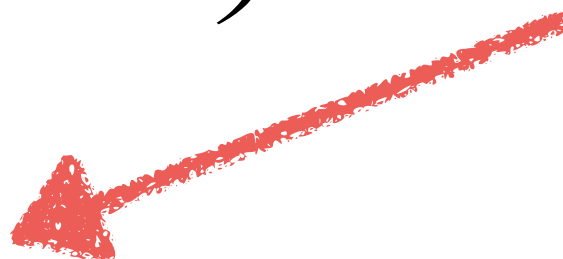
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 7 \\ 3 & 7 & 2 & | & -11 \\ 2 & 3 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 7 \\ 0 & 1 & -10 & | & -32 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ y - 10z = -32 \\ z = 3 \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

# 高斯消元法

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 7 \\ 3 & 7 & 2 & | & -11 \\ 2 & 3 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 7 \\ 0 & 1 & -10 & | & -32 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + 2y = -5 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$



# 高斯消元法

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

# 高斯-约旦消元法 Gauss-Jordan Elimination

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

前向过程（从上到下）

1. 选择最上的主元，化为1
2. 主元下面的所有行减去主元所在行的某个倍数，使得主元下面所有元素都为0

后向过程（从下到上）

1. 选择最下的主元
2. 主元上面的所有行减去主元所在行的某个倍数，使得主元上面所有元素都为0

# 实现高斯-约旦消元法

实践：实现高斯-约旦消元法

# 线性方程组解的结构

# 线性方程组解的结构

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -x + 3y - 5z = 7 \\ 2x - 2y + 7z = 1 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 10 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{array} \right)$$
  
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 5$$

无解!

# 线性方程组解的结构

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y - 13z = 0 \\ -3x + 5y + 4z = 0 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -13 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# 线性方程组解的结构

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y - 13z = 0 \\ -3x + 5y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} -x - 7z = 0 \\ y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7z \\ y = -5z \end{cases}$$

$z$ 任意取值，都能得到一组 $x, y, z$ ，满足方程组  
方程组有无数组解！



# 线性方程组解的结构

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# 线性方程组解的结构

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

方程组有唯一解

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

方程组无解

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

方程组有无数解

# 线性方程组解的结构

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

阶梯型矩阵

非零行的第一个元素（主元）为1

主元所在列的其他元素均为0

行最简形式

reduced row echelon form (RREF)

# 线性方程组解的结构

行最简形式

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# 线性方程组解的结构

行最简形式

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

不是行最简形式！

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# 线性方程组解的结构

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

方程组有唯一解

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

方程组无解

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

方程组有无数解

# 线性方程组解的结构

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \neq 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

方程组有唯一解

方程组无解

方程组有无数解

# 线性方程组解的结构

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array} \right)$$

方程组有唯一解

A非零行 = 未知数个数

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \neq 0 \end{array} \right)$$

方程组无解

系数矩阵非零行 <  
行最简形式非零行

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

方程组有无数解

A非零行 < 未知数个数



# 线性方程组解的结构

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array} \right)$$

方程组有唯一解  $A$ 非零行 = 未知数个数

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & c_3 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

方程组有无数解  $A$ 非零行 < 未知数个数

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# 直观理解线性方程组解的结构

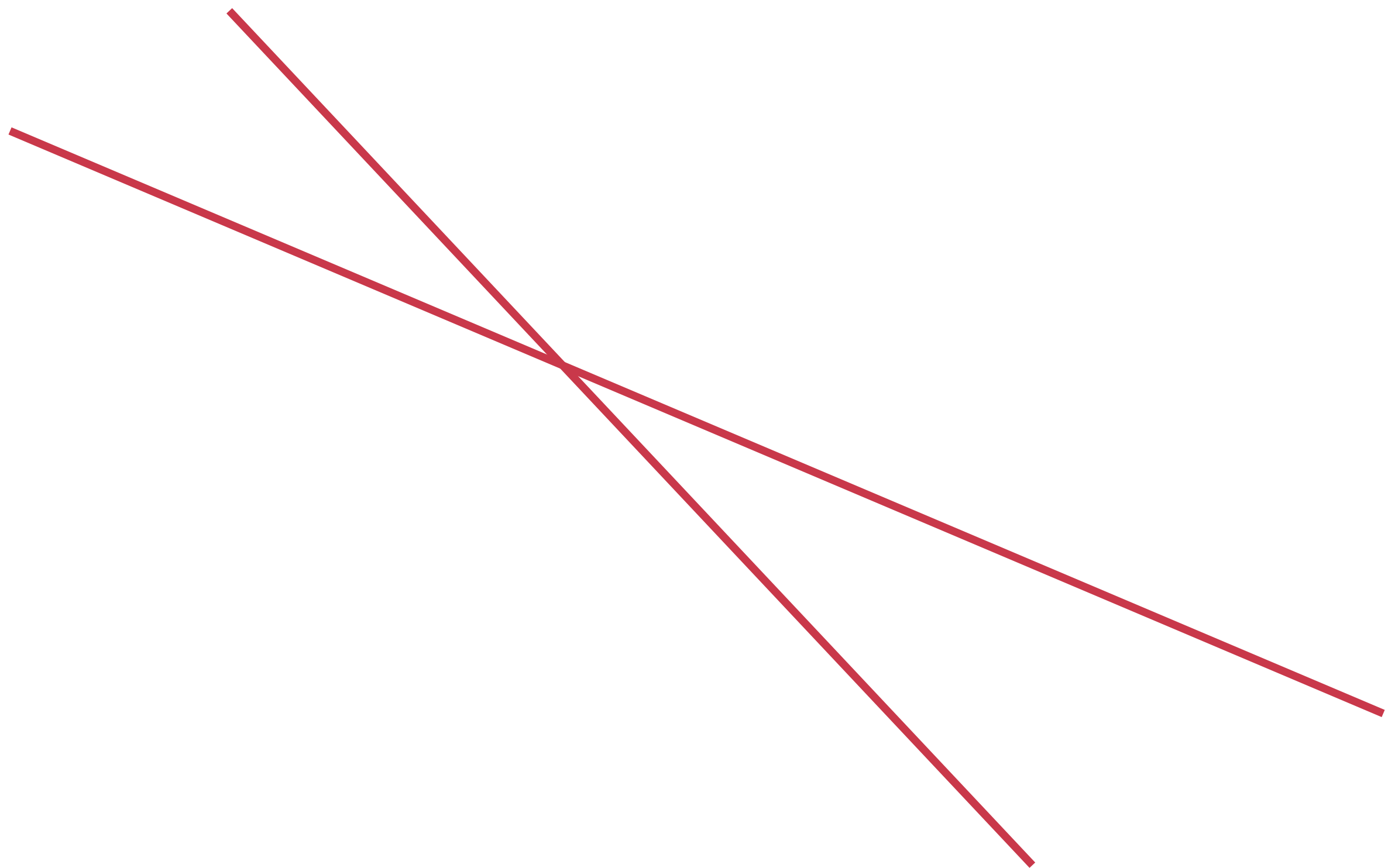
# 线性方程组解的结构

方程的个数

n个未知数有n个方程，才可能有唯一解

$$2x + 2y = 3$$

$$2x + y = 2$$



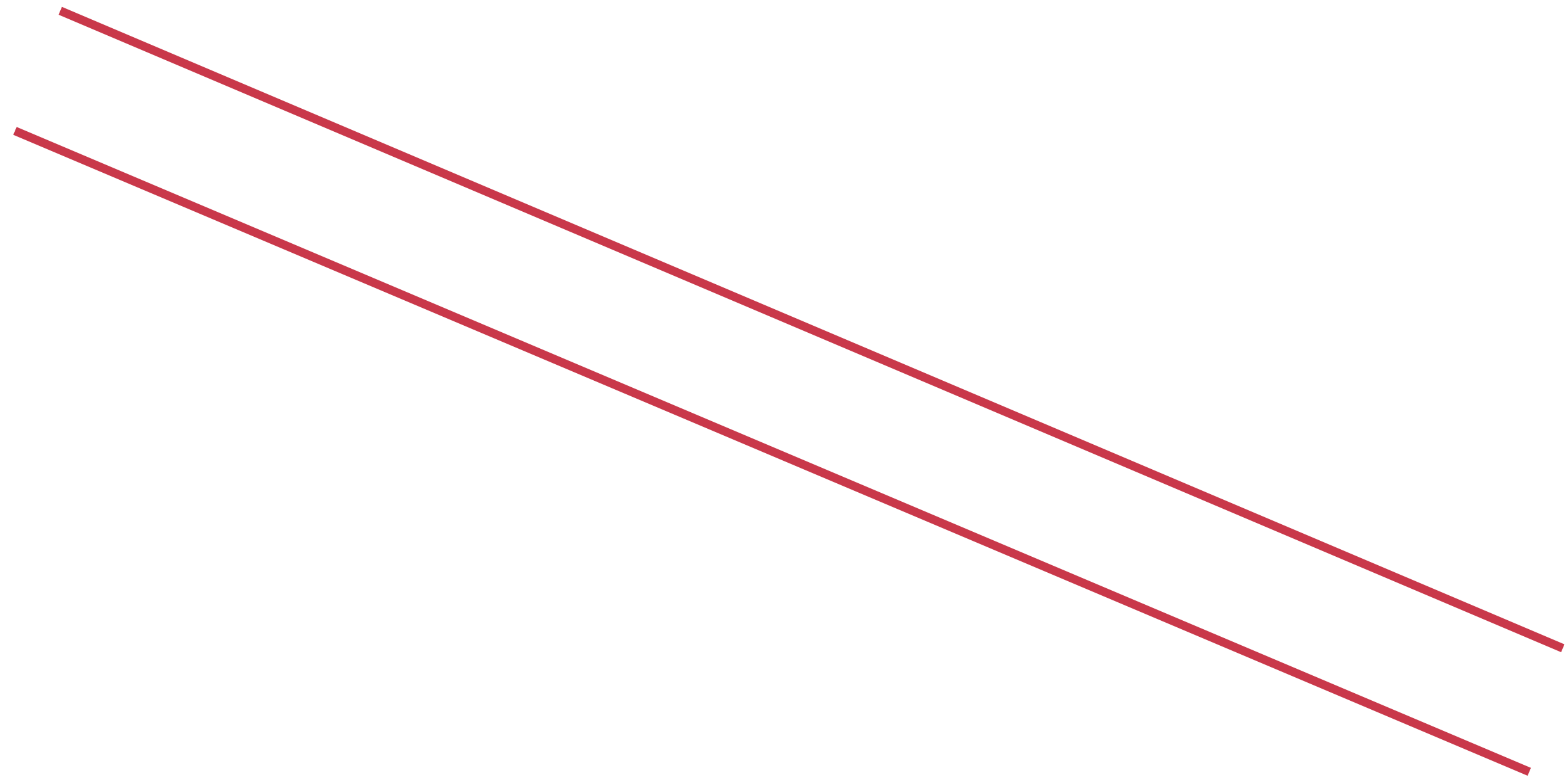
# 线性方程组解的结构

方程的个数

n个未知数有n个方程，才可能有唯一解

$$2x + 2y = 3$$

$$2x + 2y = 2$$

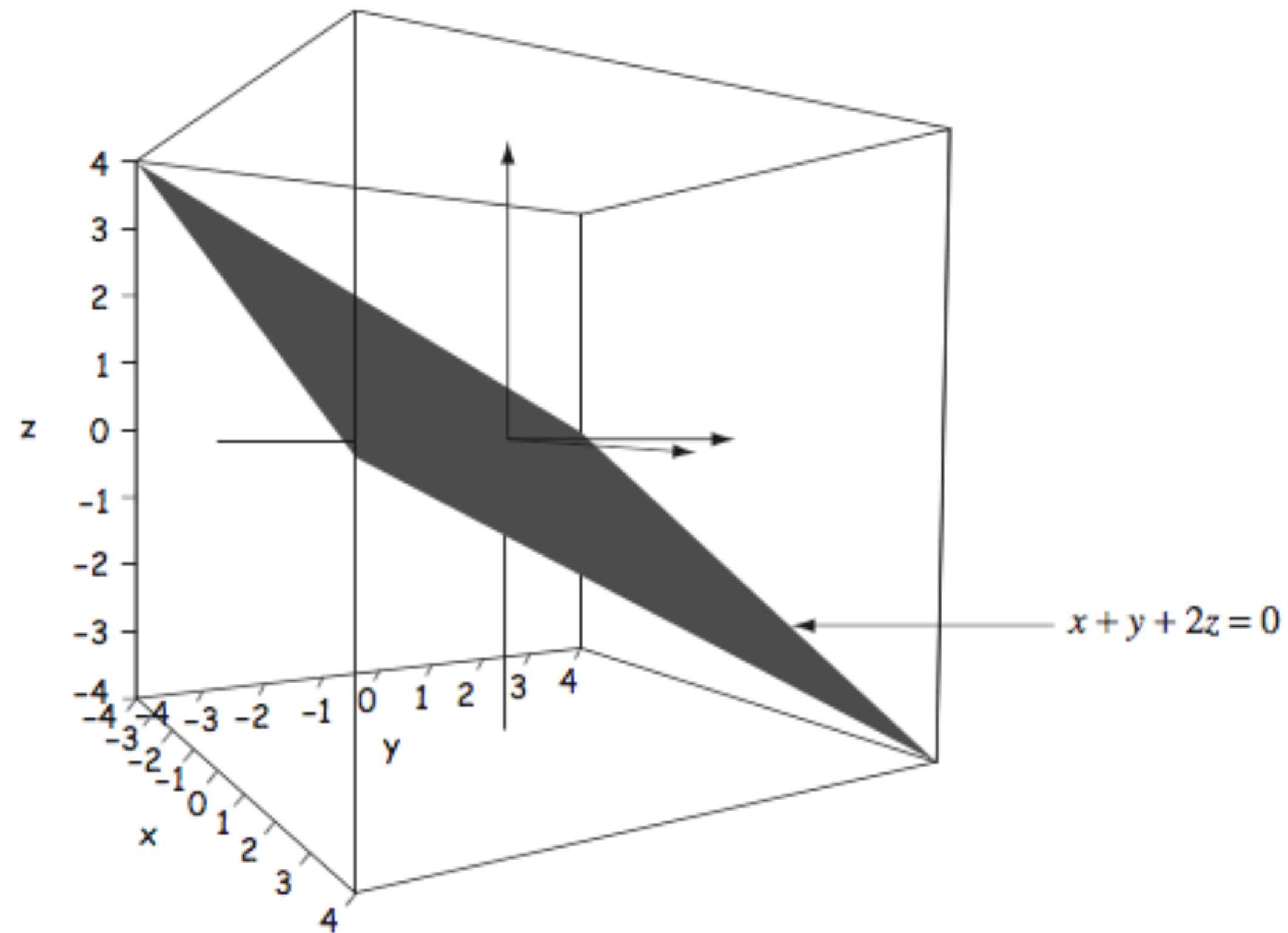


# 线性方程组解的结构

方程的个数

n个未知数有n个方程，才可能有唯一解

$$x + y + 2z = 0$$



# 线性方程组解的结构

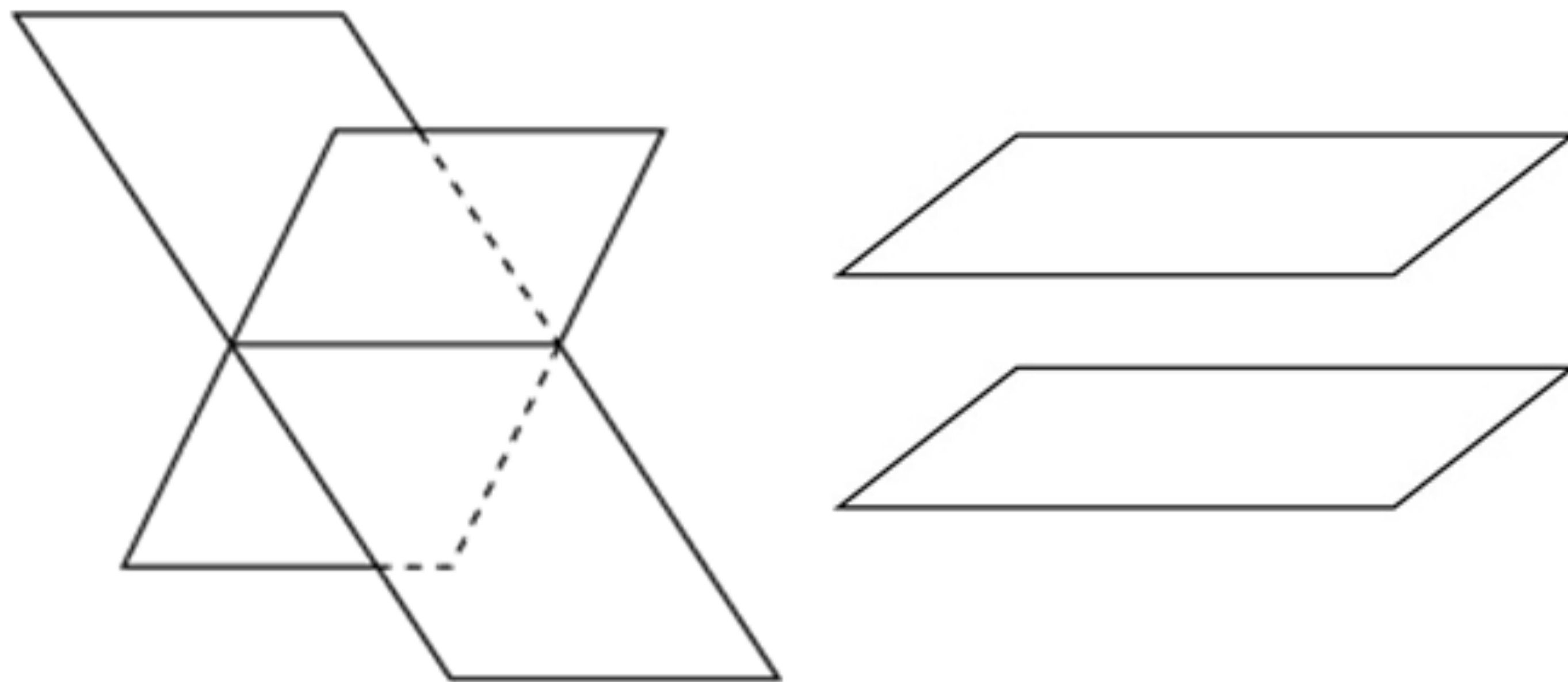
方程的个数

$n$ 个未知数有 $n$ 个方程，才可能有唯一解

两个三元方程联立

方程组个数小于未知数个数，  
一定没有唯一解

可能无解

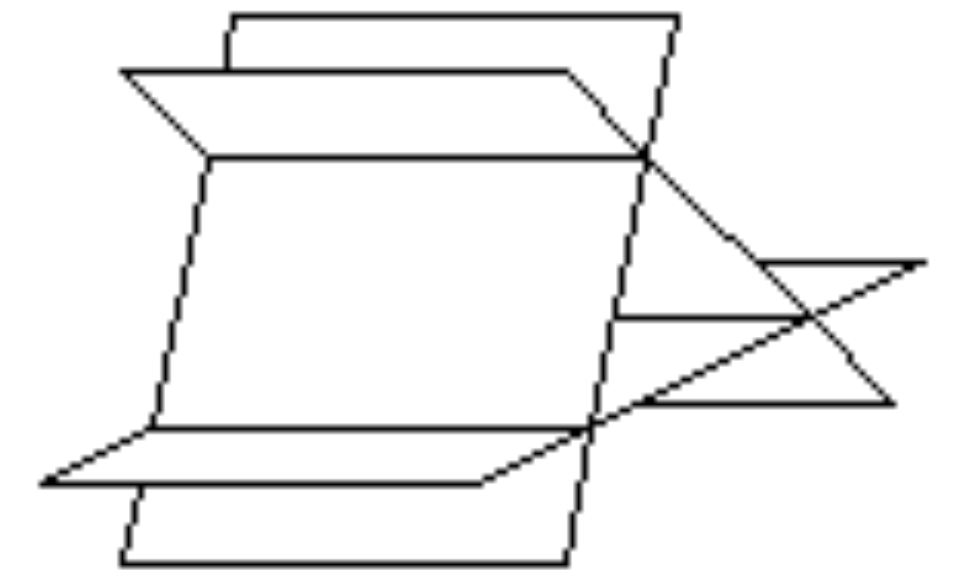
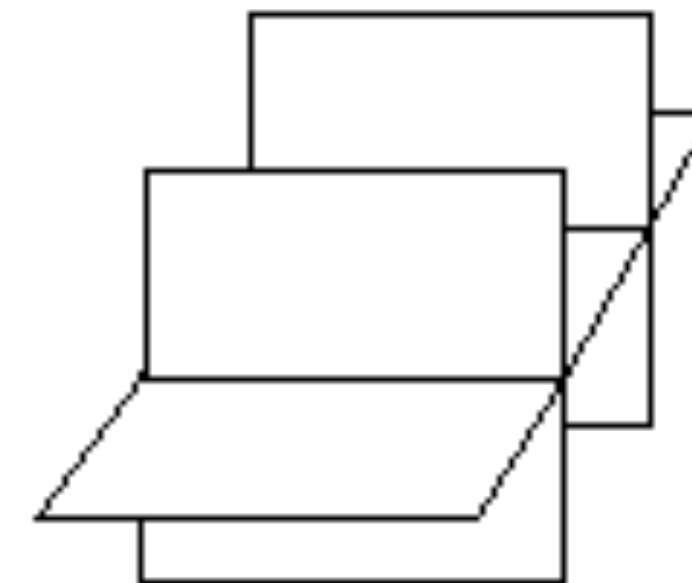
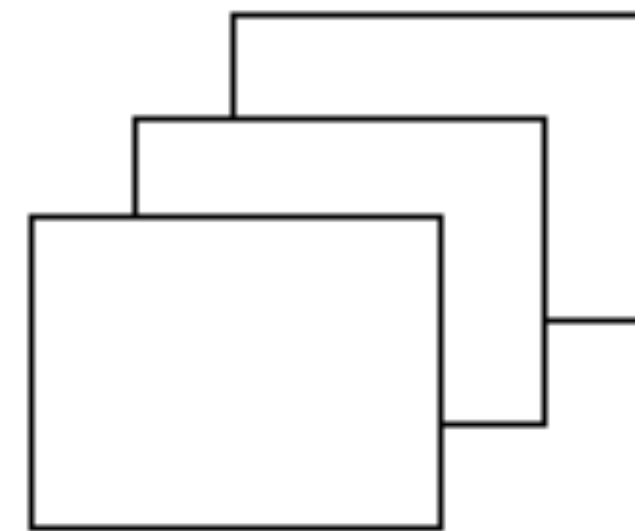
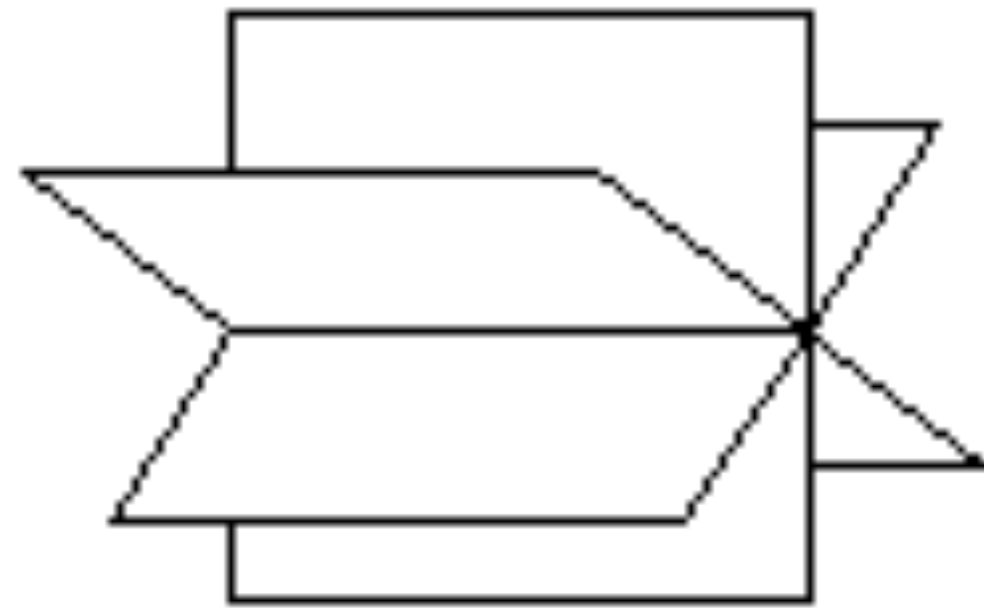
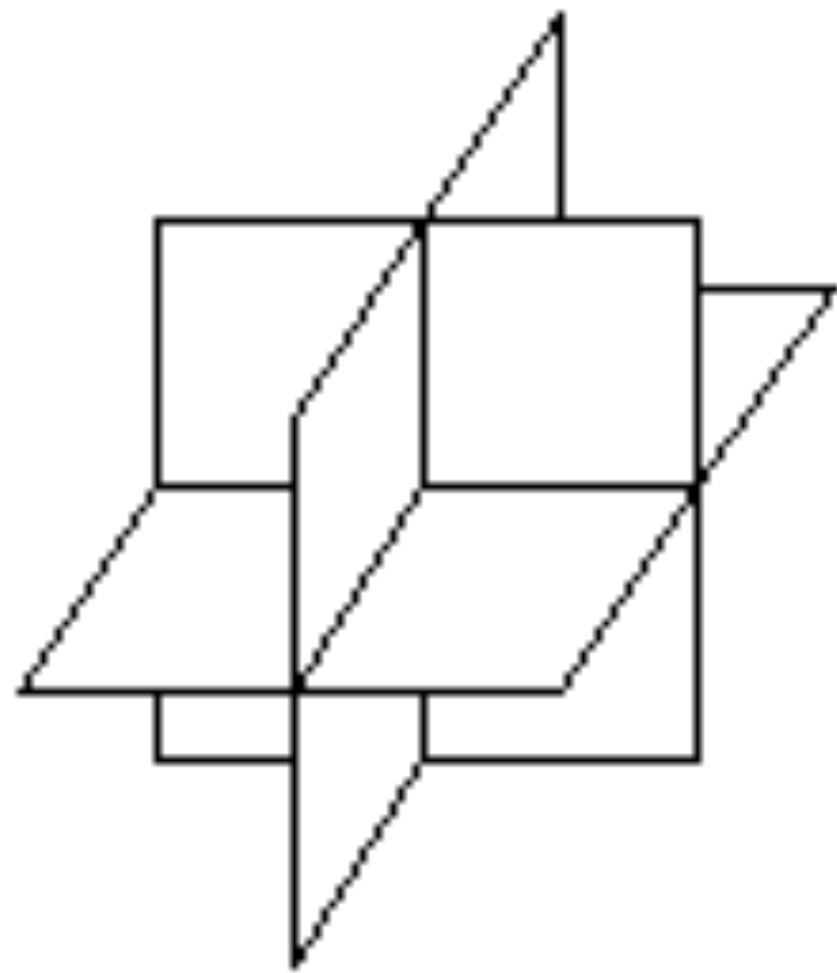


# 线性方程组解的结构

方程的个数

$n$ 个未知数有 $n$ 个方程，才可能有唯一解

三个三元方程联立

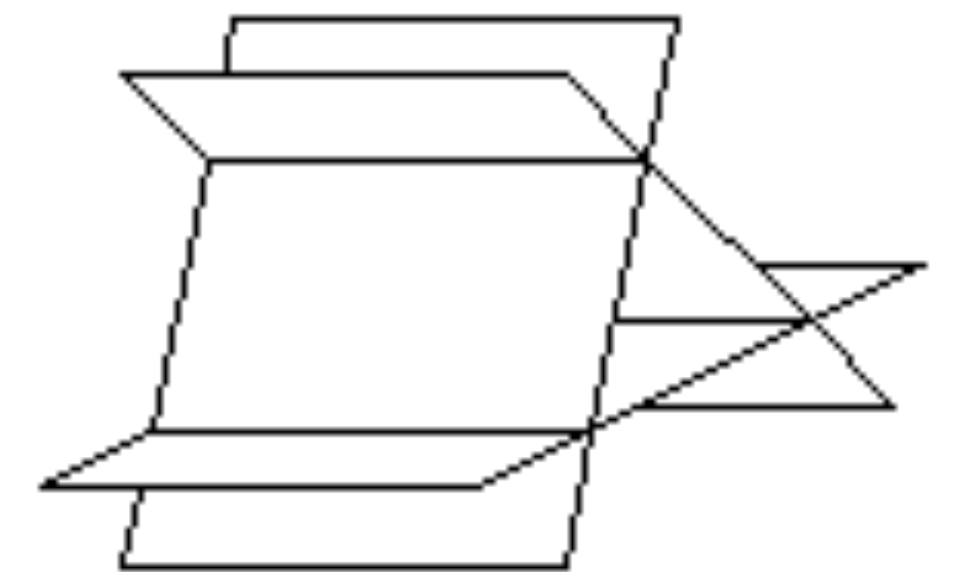
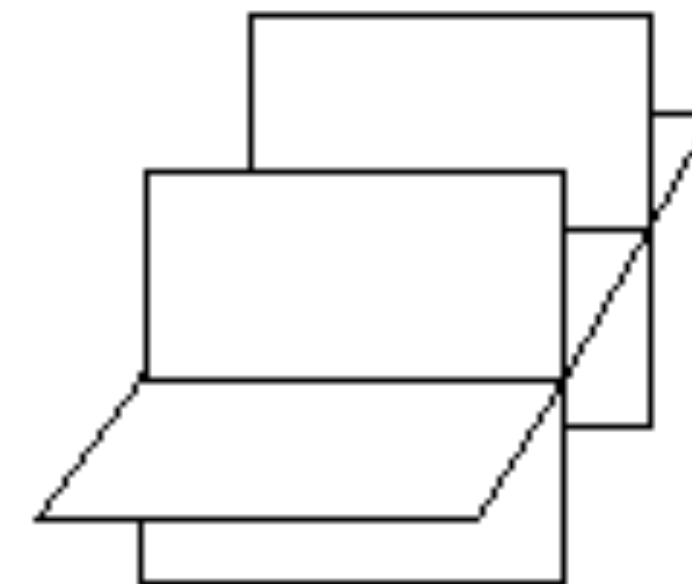
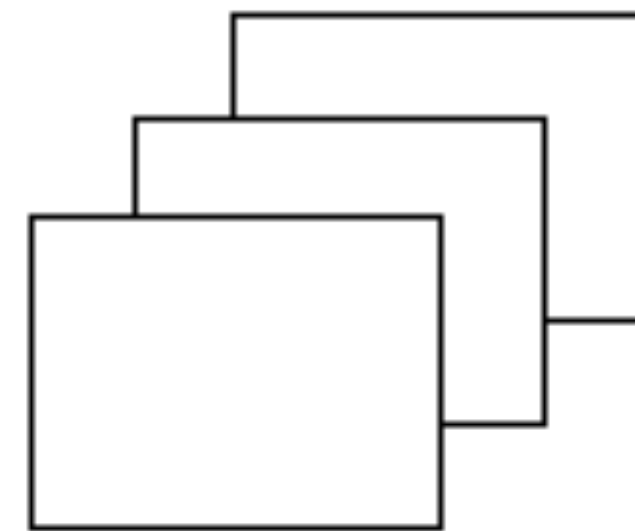
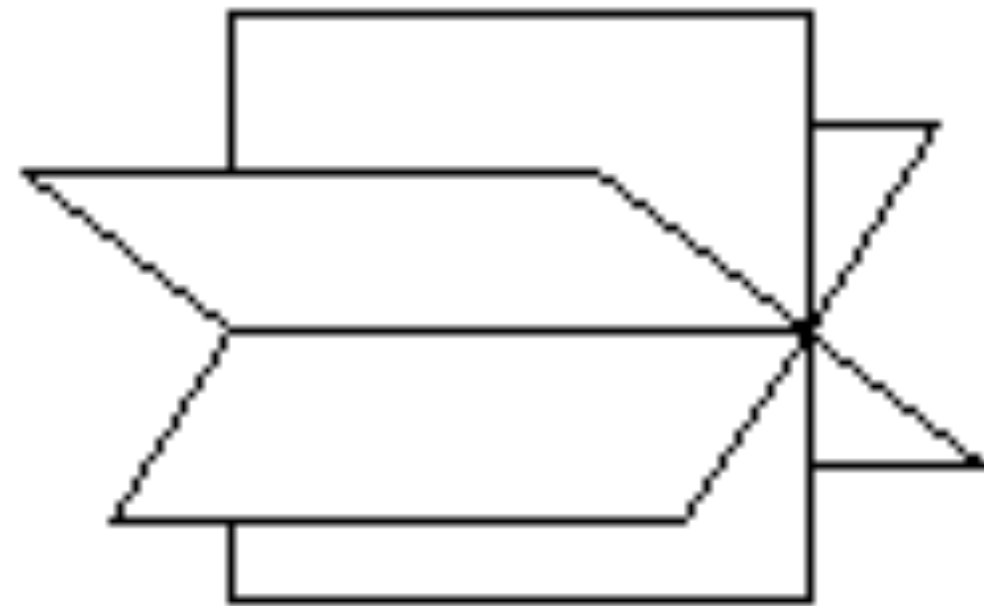
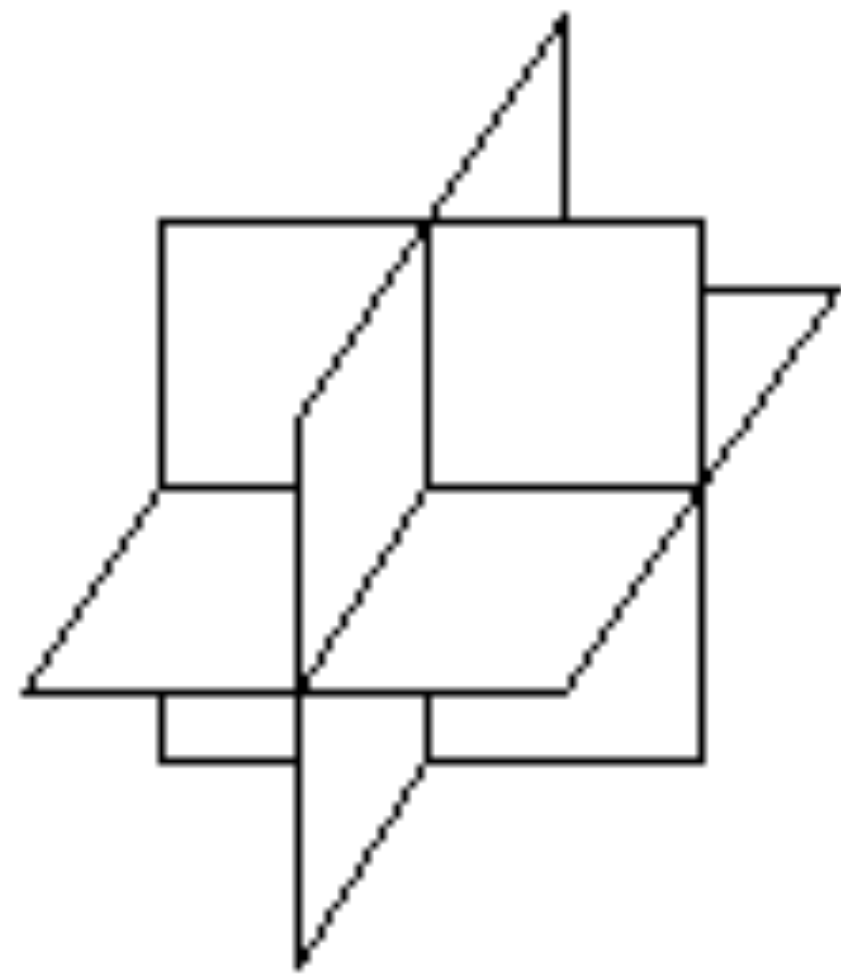


# 线性方程组解的结构

方程的个数

$n$ 个未知数有 $n$ 个方程，才可能有唯一解

四个三元方程联立？



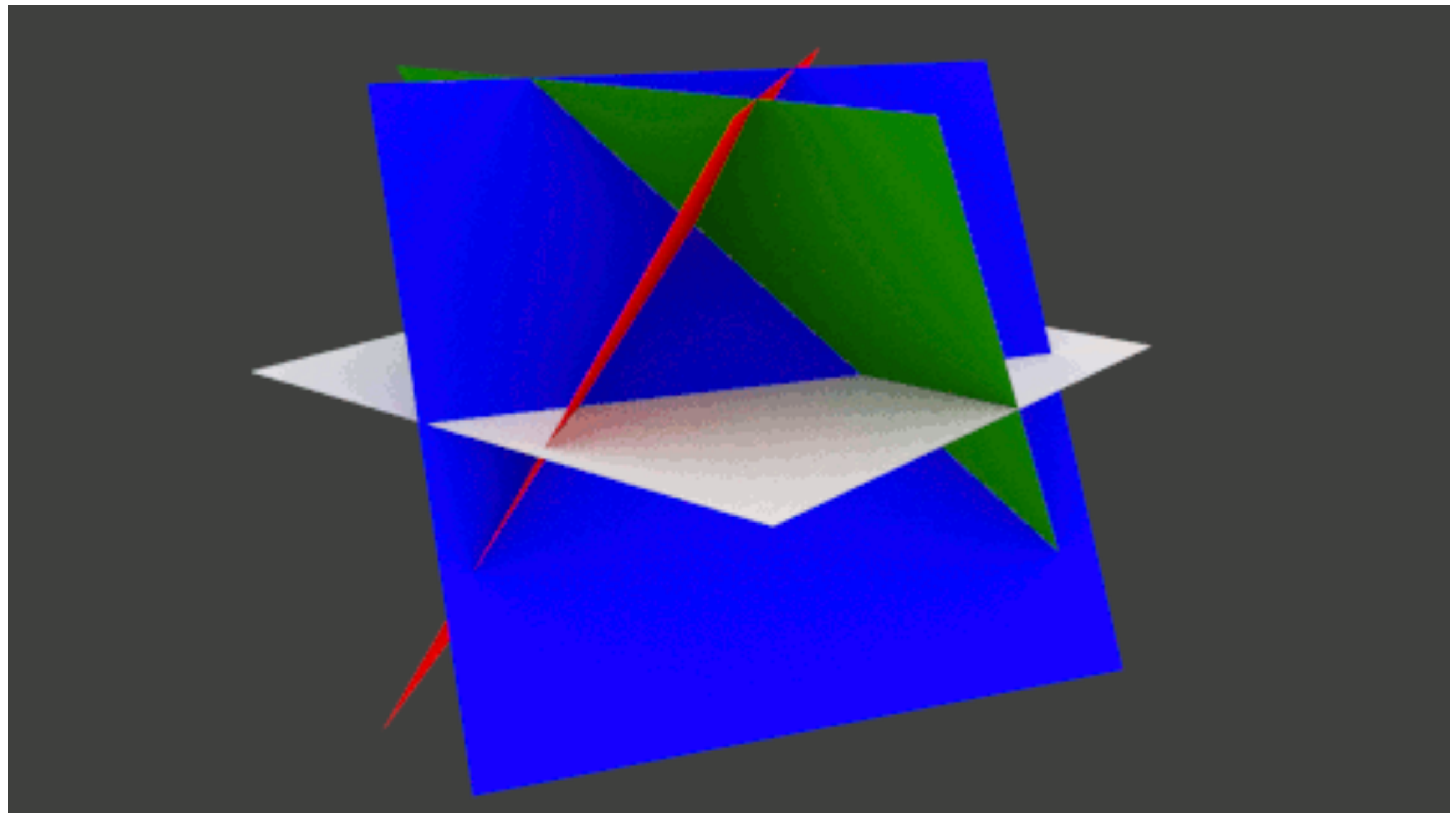


# 线性方程组解的结构

方程的个数

$n$ 个未知数有 $n$ 个方程，才可能有唯一解

四个三元方程联立？

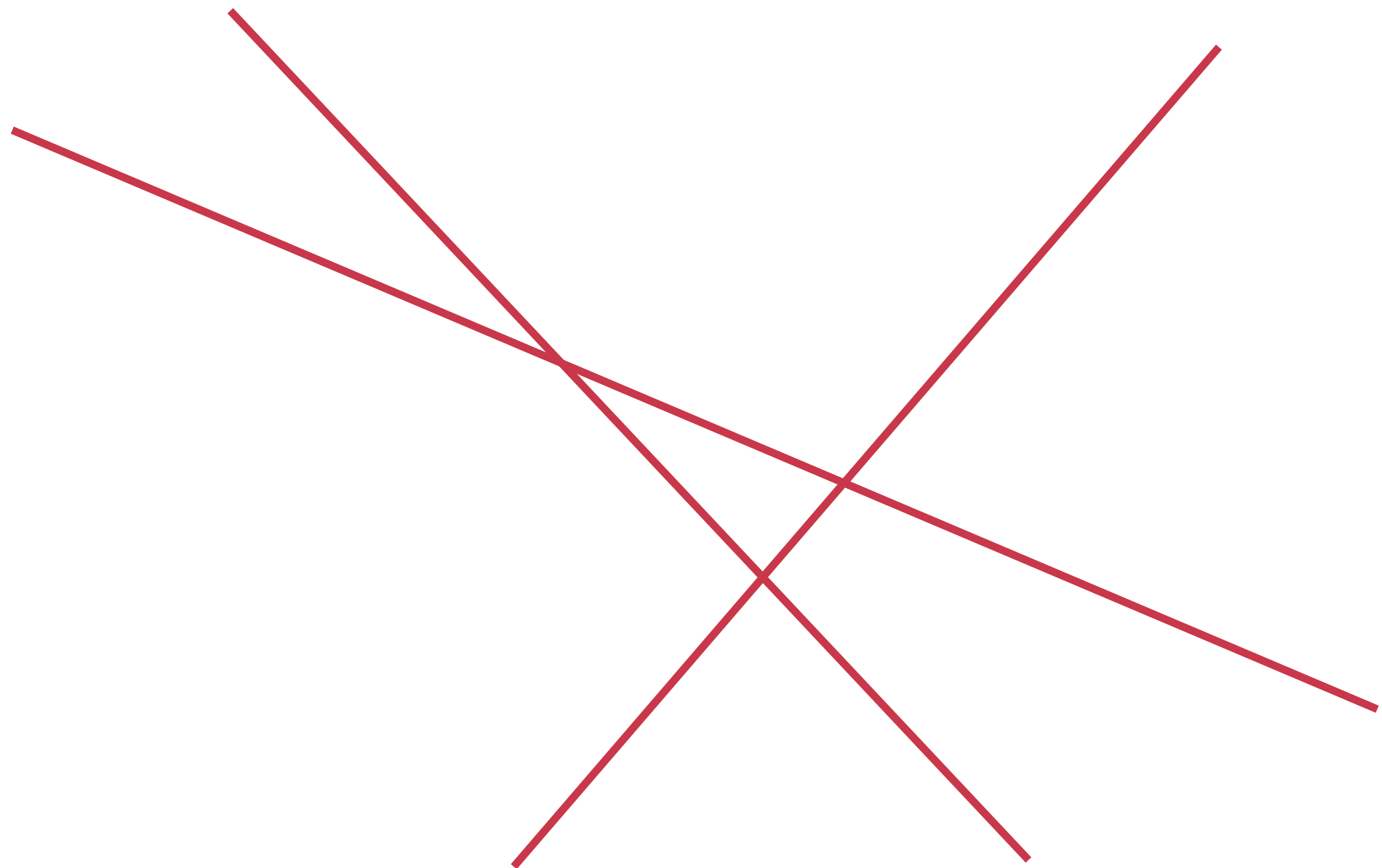


# 线性方程组解的结构

方程的个数

$n$ 个未知数有 $n$ 个方程，才可能有唯一解

三个二元方程联立？

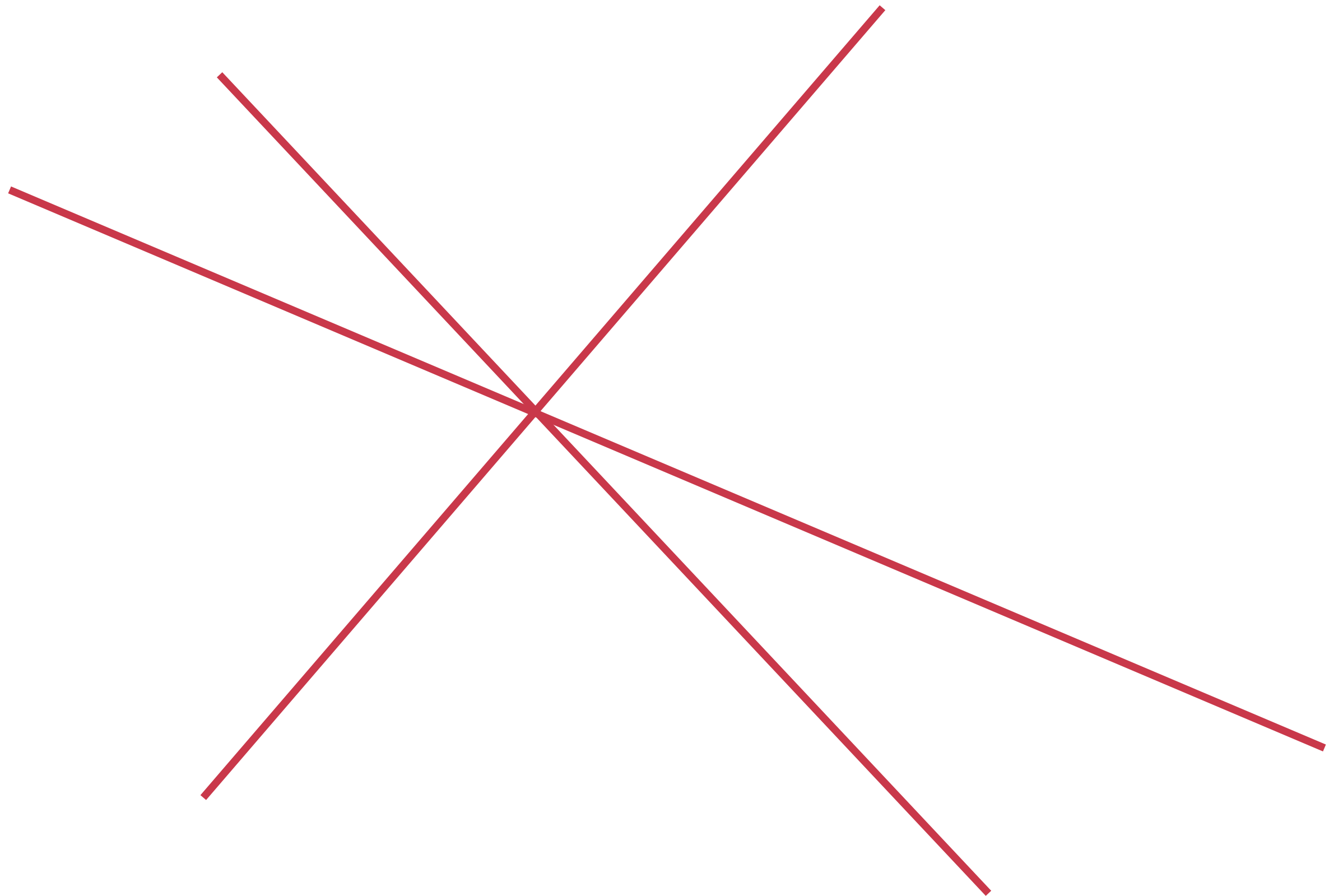


# 线性方程组解的结构

方程的个数

$n$ 个未知数有 $n$ 个方程，才可能有唯一解

三个二元方程联立？



# 线性方程组解的结构

方程的个数                       $n$ 个未知数有 $n$ 个方程，才可能有唯一解

三个二元方程联立？

方程个数多于未知数个数

可能唯一解； 可能无解； 可能无数解



# 线性方程组解的结构

方程个数 < 未知数

方程个数 = 未知数

方程个数 > 未知数

无解

无解

无解

唯一解

唯一解

无数解

无数解

无数解

# 线性方程组解的结构

方程个数 > 未知数

无解

唯一解

无数解

对于行最简形式，  
系数矩阵的非零行不可能大于未知数个数

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{array} \right)$$

# 线性方程组解的结构

方程个数 < 未知数

方程个数 = 未知数

方程个数 > 未知数

无解

无解

无解

唯一解

唯一解

无数解

无数解

无数解

# 线性方程组解的结构

行最简形式A非零行  $<$  未知数

行最简形式A非零行  $=$  未知数

无解

无解

唯一解

无数解

无数解



# 线性方程组解的结构

行最简形式A非零行  $<$  未知数

行最简形式A非零行  $=$  未知数

唯一解

无数解

无数解

# 线性方程组解的结构

行最简形式A非零行 = 未知数

唯一解

无数解

行最简形式,  
系数矩阵的非零行等于未知数个数:  
一定有唯一解

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# 线性方程组解的结构

行最简形式A非零行 < 行最简形式Ab非零行：无解

行最简形式A非零行 < 未知数

无数解

行最简形式A非零行 = 未知数

唯一解

更一般的线性系统求解

# 高斯-约旦消元法 Gauss-Jordan Elimination

前向过程（从上到下）

1. 选择最上的主元，化为1
2. 主元下面的所有行减去主元所在行的某个倍数，使得主元下面所有元素都为0

后向过程（从下到上）

1. 选择最下的主元
2. 主元上面的所有行减去主元所在行的某个倍数，使得主元上面所有元素都为0

# 更一般的线性系统求解

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrr} x & -y & +2z & & +3u & = & 1 \\ -x & +y & & +2w & -5u & = & 5 \\ x & -y & +4z & +2w & +4u & = & 13 \\ -2x & +2y & -5z & -w & -3u & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -5 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 2 & 4 & 13 \\ -2 & 2 & -5 & -1 & -3 & -1 \end{array} \right)$$


# 更一般的线性系统求解

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -5 & | & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 2 & 4 & | & 13 \\ -2 & 2 & -5 & -1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 2 & -2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & | & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & | & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & | & 4 \end{pmatrix}$$

# 更一般的线性系统求解

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -5 & | & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 2 & 4 & | & 13 \\ -2 & 2 & -5 & -1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & | & 4 \end{pmatrix}$$




$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$



# 更一般的线性系统求解

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -5 & | & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 2 & 4 & | & 13 \\ -2 & 2 & -5 & -1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & 0 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 0 & -2 & 0 & | & -15 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

# 更一般的线性系统求解

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrr} x & -y & +2z & & +3u & = & 1 \\ -x & +y & & +2w & -5u & = & 5 \\ x & -y & +4z & +2w & +4u & = & 13 \\ -2x & +2y & -5z & -w & -3u & = & -1 \end{array} \right. \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} \textcircled{1} & -1 & 0 & -2 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y - 2w = -15 \\ z + w = 5 \\ u = 2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -15 + 2w + y \\ z = 5 - w \\ u = 2 \end{array} \right.$$

主元列

自由列

# 更一般的线性系统求解

$$\begin{cases} x & -y & +2z & & +3u & = & 1 \\ -x & +y & & +2w & -5u & = & 5 \\ x & -y & +4z & +2w & +4u & = & 13 \\ -2x & +2y & -5z & -w & -3u & = & -1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y - 2w = -15 \\ z + w = 5 \\ u = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -15 + 2w + y \\ z = 5 - w \\ u = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} w$$

# 更一般的线性系统求解

$$\begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 2x + y = 2.5 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2.5 \\ 1 & 2 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1.5 \\ 2 & 1 & 2.5 \\ 1 & 2 & 7 \end{array} \right)$$
  
$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1.5 \\ 0 & -1 & -0.5 \\ 0 & 1 & 5.5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 5.5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

实现更一般的线性系统求解

实践： 实现更一般的线性系统求解

# 齐次线性方程组

# 齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y - 13z = 0 \\ -3x + 5y + 4z = 0 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -13 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



# 齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y - 13z = 0 \\ -3x + 5y + 4z = 0 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -13 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# 齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y - 13z = 0 \\ -3x + 5y + 4z = 0 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -13 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

肯定有解

最后一列肯定永远为零

# 齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y - 13z = 0 \\ -3x + 5y + 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -13 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

肯定有解

最后一列肯定永远为零

解的过程可以只对系数矩阵做操作

# 齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y - 13z = 0 \\ -3x + 5y + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{齐次线性方程组}$$

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 1 \\ x - 4y - 13z = 2 \\ -3x + 5y + 4z = 3 \end{cases} \quad \text{非齐次线性方程组}$$

# 线性系统

# 其他

欢迎大家关注我的个人公众号：是不是很酷



# 专给程序员设计的线性代数

liuyubobobo