Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Económica, Estadística y Ciencias Sociales
Escuela Profesional de Ingeniería Estadística

Tercer Informe de Laboratorio

Anualidades

Análisis Actuarial

Docente: Dra. Magen Infante Rojas

Giraldo Zela Jose Eduardo
Lin Chiu Chen Yang
Socualaya Andrade Marlon Andre

Resumen— Este informe presenta un breve introductorio sobre la teoria de interes y de varios tipos de anualidades continuas, prepagables y pospagables centrando en explicar las secciones 5.4 Rentas vitalicias fraccionados en m-pagos y 5.5 Anualidades prorrateables vencidas y anualidades completas inmediatas del libro Acturarial Mathematics de (Newton L Bowers, 1997, ewton L Bowers, 1997) con fuentes de apoyo como (José Antonio Gil Fana, 1999, osé Antonio Gil Fana, 1999), **(Goeters, 2003, oeters, 2003)**, **(michigan state university valdezea, 2014, ichigan state university valdezea, 2014)**, (Lauer, 1967, auer, 1967) y agradecimientos especiales para (Beauchemin, 2019, eauchemin, 2019) donde documenta la manera de escribir en notacion actuarial para latex.

Contents

1 Introducción

1.1 La Teoría del Interés

Recordando las tasas tenemos a la tasa efectiva y tasa nominal supongamos que tenemos una tasa efectiva anual TEA i del 20% mediante la siguiente formula obtendremos la tasa nominal capitalizable trimestralmente o 4 veces al año $\text{TN}_{m^{th}ly=4}$ representado por $i^{(m)}$ siendo $m = 4$

$$1 + i = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m \quad entonces \quad i^{(m)} = m[\sqrt[m]{1+i} - 1]$$

entonces $i^{(m)} = 18.65\%$ lo dividimos entre 4 TE Trimestral es 4.66% en un año si invertimos 1$ tendremos 1.2$ a 20% lo mismo tendremos si capitalizamos trimestralmente en un año $1\$(1 + 0.0466)^4 = 1.2\$$. Que pasa si m tiende al infinito aplicamos el limite y por regla de L'Hospital's obtenemos:

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^{1/m} - 1}{1/m} \qquad L'Hospital's \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{[-(1+i)^{1/m} ln(1+i)]/m^2}{-1/m^2} \qquad \longrightarrow \qquad \lim_{m\to\infty} (1+i)^{1/m} ln(1+i)$$

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = ln(1+i) = \delta$$

este δ seria la fuerza de interés y $1 + i = e^{\delta}$. Por ultimo las relaciones entre i y d la tasa de descuento:

$$(1-d)(1+i) = 1 \qquad d = \frac{i}{1+i} \qquad d = iv \qquad d = 1 - v$$

$$(1 - \frac{d^{(m)}}{m})(1 + \frac{i^{(m)}}{m}) = 1 \qquad obtenemos \qquad d^{(m)} = m(1 - v^{1/m})$$

1.2 Suma de una Progresión Geométrica

Para realizar la suma del Factor de valor actual Y recordemos esta suma que nos será útil al momento de llevar nuestras rentas a su valor actual. Sea $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ una progresión geometrica de razón r y S_n la suma de sus terminos.

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

1.3 Renta Vitalicia: Una Pensión de por Vida

Una renta vitalicia es un contrato financiero que garantiza el pago periódico de una suma de dinero a una persona durante toda su vida mientras el beneficiario esté vivo. Aunque no necesariamente de por vida varian según el tipo de pension contratado, más adelante veremos las variantes. Pueden ser temporales o ilimitadas, inmediatas o diferidas, continuas o discretas. Para empezar comenzaremos con discretas las **annuity-due** o prepagables y **annuity-immediate** o pospagables luego las fraccionadas y su relación con las continuas.

- **annuity-due:** o vencida pagadero al principio de cada periodo de pago se denota $\ddot{a}$
- **annuity-immediate:** o ordinaria pagadero al final de cada periodo de pago se denota a

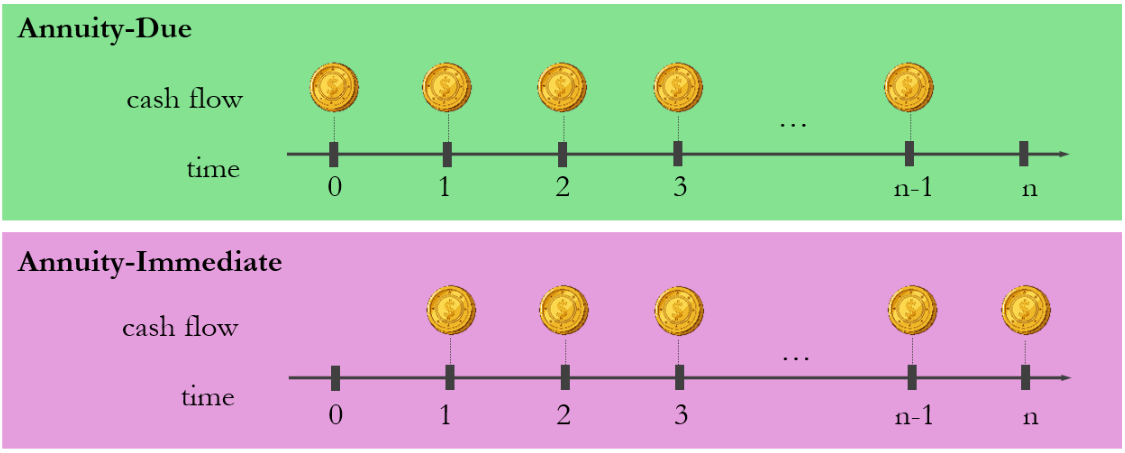

Figure 1: Diagrama de tiempo para una anualidad de n pagos vencida y ordinaria respectivamente

1.4 Función Valor Actual de Renta Y vs factor de acumulación

La función valor actual de renta o Factor de valor actual es una **variable aleatoria** en función de la vida restante de una persona por el momento le pondremos para n pagos; a esta variable lo reprecentaremos de ahora en adelante con Y al igual que el **Bowers**. Esta varia segun el tipo de anualidad.

1.4.1 annuity-due

$$Y(n) = 1(1+i)^0 + 1(1+i)^{-1} + 1(1+i)^{-2}...1(1+i)^{-(n-1))}$$

en el item anterior podemos ver que Y es una suma de terminos de una progresión geométrica de razón $v = 1/(1+i) = (1+i)^{-1}$ para la la anualidad vencida o prepagable seria:

$$Y = 1(1+i)^0 + 1(1+i)^{-1} + 1(1+i)^{-2}...1(1+i)^{-(n-1)}$$

$$Y = v^0 + v^1 + v^2 + v^3, ... + v^{n-1}$$

$$Y = \frac{v^0(v^n - 1)}{v - 1} \qquad \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

$$Y = \frac{1 - v^n}{d}$$

se puede ver que se empieza desde el primer instante cuando aun no se genera interés.

1.4.2 annuity-immediate

$$Y(n) = 1(1+i)^{-1} + 1(1+i)^{-2}...1(1+i)^{-n}$$

pero por el contrario para la anualidad ordinaria o pospagable seria de la siguiente forma:

$$Y = 1(1+i)^{-1} + 1(1+i)^{-2}...1(1+i)^{-(n)}$$

$$Y = v^1 + v^2 + v^3, ... + v^n$$

$$Y = \frac{v^1(v^n - 1)}{v - 1}$$

$$Y = \frac{1 - v^n}{i}$$

1.4.3 factor de acumulación o valor futuro

Si Y trae todo los valores a su estado actual el factor de acumulaccion es su valor futuro

$$s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$a_{\overline{n}|} = v^n s_{\overline{n}|} \qquad parafraccionada \qquad a_{\overline{n}|}^{(m)} = v^n s_{\overline{n}|}^{(m)}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^n \ddot{s}_{\overline{n}|} \qquad parafraccionada \qquad \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = v^n \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}$$

1.4.4 anualidades perpetuas

Que pasa si los pagos nunca cesan. En este caso, el símbolo ∞ reemplaza al símbolo n.

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1}{d} \qquad a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|} = \frac{1}{i} \qquad \bar{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1}{\delta}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}} \qquad a_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{i^{(m)}}$$

1.5 Valoración de la Renta o APV

El APV o Actuarial Present Value es el valor esperado del valor actual de la renta.

$$APV = E(Y) = \int_0^\infty Y F_Y(t) dt$$

1.6 Anualidades y Seguros de Vida

Aqui se detalla las relaciones entre las Anualidades y los Seguros de Vida.

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kP_x q_{x+k}$$

$$a_x = \frac{1 - A_x}{i} \qquad o \qquad A_x + i a_x = 1$$

$$A_x + d\ddot{a}_x = 1$$

$$A_{x:\overline{n}|}^{(m)} + i^{(m)} a_{x:\overline{n}|} = 1 \qquad tambien \qquad A_{x:\overline{n}|}^{(m)} + d^{(m)} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1$$

$$i^{(m)} a_{x:\overline{n}|} = d^{(m)} \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$$

2 5.4 Rentas vitalicias fracionadas en m pagos

2.1 entendiendo 5.4.1 el factor de valor actual

En la figura 2 podemos observar que se fracciona en m partes por año se procederia a pagar el valor de $1/m$\$ en cada pago culminando el año con 1\$ sin importar si es ordinaria o vencida. La persona sobrevive los k años y J partes completas .

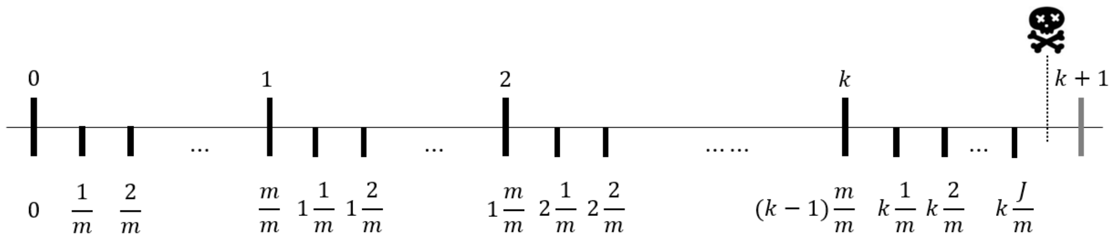

Figure 2: Diagrama de tiempo para una anualidad fraccionada

el valor actual seria Y empezamos con la **vencida** vemos que esta suma es una suma de una progresion geometrica; recordemos que el numero de pagos es este caso seria $mk + J + 1$

$$Y(mk{+}J{+}1) = \frac{1}{m}v^{0/m} + \frac{1}{m}v^{1/m} + \cdots + \frac{1}{m}v^{m/m} + \frac{1}{m}v^{1+1/m} + \frac{1}{m}v^{1+2/m} \cdots + \frac{1}{m}v^{k+1/m} + \frac{1}{m}v^{k+2/m} \cdots + \frac{1}{m}v^{k+J/m}$$

$$Y(mk + J + 1) = \frac{1}{m}[\frac{v^{0/m}(v^{mk+J+1/m} - 1)}{v^{1/m} - 1}] = \frac{(1 - v^{k+(J+1)/m})}{m(1 - v^{1/m})}$$

en la teoría del intrés comentado anteriormente para la tasa nomina de descuento $d^{(m)}$ en relación a la tasa efectiva es:

$$(1 - \frac{d^{(m)}}{m})(1 + \frac{i^{(m)}}{m}) = 1 \qquad \textit{obtenemos} \qquad d^{(m)} = m(1 - v^{1/m})$$

$$Y(mk + J + 1) = \sum_{j=0}^{mk+J} \frac{1}{m} v^{j/m} = \ddot{a}_{\overline{k+(J+1)/m}|} = \frac{(1 - v^{k+(J+1)/m})}{d^{(m)}}$$

lo mismo seria para la **ordinaria** pero en este caso el número de pagos seria solo $mk + J$ y $i^{(m)} = m[(1 + i)^{1/m} - 1]$

$$Y(mk + J) = \frac{1}{m}v^{1/m} + \cdots + \frac{1}{m}v^{m/m} + \frac{1}{m}v^{1+1/m} + \frac{1}{m}v^{1+2/m} \cdots + \frac{1}{m}v^{k+1/m} + \frac{1}{m}v^{k+2/m} \cdots + \frac{1}{m}v^{k+J/m}$$

$$Y(mk + J) = \frac{1}{m}[\frac{v^{1/m}(v^{mk+J/m} - 1)}{v^{1/m} - 1}] = \frac{v^{1/m}(1 - v^{k+J/m})}{m(1 - v^{1/m})} = \frac{1}{m}\frac{v^{1/m}(1 - v^{k+J/m})}{v^{1/m}((1/v)^{1/m} - 1)}$$

$$Y(mk + J) = \sum_{j=1}^{mk+J} \frac{1}{m} v^{j/m} = a_{\overline{k+J/m}|} = \frac{(1 - v^{k+J/m})}{i^{(m)}}$$

2.2 propiedades y relaciones utiles

Saquemos la esperanza y la varianza del factor de valor actual Y tambien recordemos que $A_x^{(m)} = E(v^{k/m})$

$$E(Y) = \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty} v^{j/m} \cdot {}_{j/m}p_x = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}$$

$$Var(Y) = \frac{Var(v^{k+(J+1)/m})}{(d^{(m)})^2} = \frac{{}^2A_x^{(m)} - (A_x^{(m)})^2}{(d^{(m)})^2}$$

A continuación enumeramos algunas relaciones más importantes en relación con la renta vitalicia vencida.

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}}(A_x^{(m)} - A_x) = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}(A_x^{(m)} - A_x)$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^m} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} - \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}A_x^{(m)}$$

2.3 Metodos para evaluar la valoracion de la Renta

2.3.1 Recursiva

Por ejemplo en una anualidad vencida se usa recurcion para evaluar el valor de las edades subsiguientes.

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1}$$

pero tenemos un problema con las fraccionadas las tablas de mortalidad tabuladas son enteras y pagaderas anualmente.

2.3.2 bajo hipotesis de Distribucion uniforme de muerte

bajo Uniform Distribution of Deaths (UDD) tenemos:

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}A_x$$

utilizando la relación de anualidades y seguros

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^m} \qquad \textit{obtenemos} \qquad \ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

donde

$$\alpha(m) = s_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}\frac{d}{d^{(m)}}$$

$$\beta(m) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$$

2.3.3 Aproximación de Woolhouse's

Las fórmulas aproximadas de Woolhouse para evaluar anualidades se basan en la fórmula de Euler-Maclaurin para integración numérica en términos simples,la formula nos da una estimación de la suma $\sum_{i=0}^{n} f(i)$ a través de la integral $\int_0^n f(t)dt$ con un término de error dado por una integral que involucra números de Bernoulli

$$\int_0^\infty g(t)dt = h\sum_{k=0}^{\infty} g(kh) - \frac{h}{2}g(0) + \frac{h^2}{12}g'(0) - \frac{h^4}{720}g''(0) + \cdots$$

para una constante positiva h. Esta fórmula se aplica entonces a $g(t) = v^t{}_tp_x$ lo que nos lleva a:

$$g'(t) = -v^t{}_tp_x(\delta - \mu_{x+t})$$

Podemos obtener la siguiente fórmula aproximada de Woolhouse:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta - \mu_x)$$

Aplicar la fórmula aproximada de Woolhouse a

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{x} - {}_nE_x \ddot{a}^{(m)}_{x+n}$$

Esto nos lleva a las siguientes fórmulas aproximadas de Woolhouse:

$$para\ 2\ terminos\ (W2) \qquad \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x)$$

$$para\ 3\ terminos\ (W3) \qquad \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}[\delta + \mu_x - {}_nE_x(\delta + \mu_{x+n})]$$

$$para\ 3\ terminos\ modificado\ (W3*) \qquad \mu_x \approx -\frac{1}{2}[log(p_{x-1}) + log(p_x)]$$

Ejemplo Ilustrativo: Comparamos las distintas aproximaciones: UDD, W2, W3, W3* basadas en el Modelo Estándar de Supervivencia Máxima con la ley de Makeham

$$\mu_x = A + Bc^x$$

donde $A = 0.00022$, $B = 2.72.7 \times 10^{-6}$ y $c = 1.124$ a una taza del $i = 5\%$

x	$\ddot{a}_x$	$\ddot{a}^{(2)}_x$	${}_{25}E_x$	Exact	UDD	W2	W3	W3*
20	19.9664	19.7133	0.292450	14.5770	14.5770	14.5792	14.5770	14.5770
30	19.3834	19.1303	0.289733	14.5506	14.5505	14.5527	14.5506	14.5506
40	18.4578	18.2047	0.281157	14.4663	14.4662	14.4684	14.4663	14.4663
50	17.0245	16.7714	0.255242	14.2028	14.2024	14.2048	14.2028	14.2028
60	14.9041	14.6508	0.186974	13.4275	13.4265	13.4295	13.4275	13.4275
70	12.0083	11.7546	0.068663	11.5117	11.5104	11.5144	11.5117	11.5117
80	8.5484	8.2934	0.002732	8.2889	8.2889	8.2938	8.2889	8.2889
90	5.1835	4.9242	0.000000	4.9242	4.9281	4.9335	4.9242	4.9242
100	2.7156	2.4425	0.000000	2.4425	2.4599	2.4656	2.4424	2.4424

Figure 3: Tabla de valores en comparación de las diferentes aproximaciones

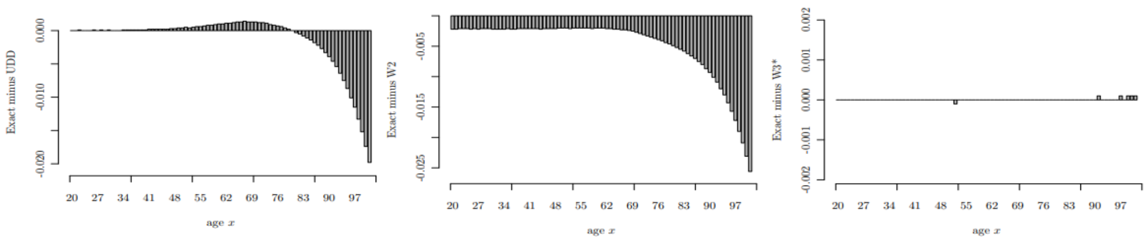

Figure 4: grafica de errores en comparación del calculo exacto de los modelos UDD, W2 y W3*

A partir del grafico podemos ver a medida que la edad aumenta, la diferencia entre las aproximaciones y los valores exactos tiende a aumentar levemente. Las aproximaciones W2 y W3 son mejores que UDD, especialmente a medida que se aumenta la edad y la complejidad de la distribución de mortalidad. La aproximación de UDD es razonablemente precisa en edades más jóvenes (20-30), pero se vuelve menos precisa a medida que la edad aumenta.

3 5.5 Anualidades vencidas u ordinarias completas prorrateables

3.1 entendiendo 5.5.1 para la anualidad vencida e inmediata

Aqui hay dos casos concretos empezamos para la **vencida** donde el cliente paga una prima 1$ en cada año supongamos que paga durante $k = 1$ año pero muere luego de cierto mes de su ultimo pago **al haber pagado anticipadamente la prima de ese año y no haberlo sobrevivido la aseguradora tendrá que rembolsarle el tiempo que le falta**. En la **inmediata** el cliente recibe una renta de 1$ al final de cada año supongamos que recibe durante $k = 1$ año pero luego muere faltando ciertos meses de recibir su siguiente renta **al haber sobrevivido algo de tiempo antes de su siguiente renta la aseguradora tendrá que rembolsarle del tiempo que sobrevivio**.

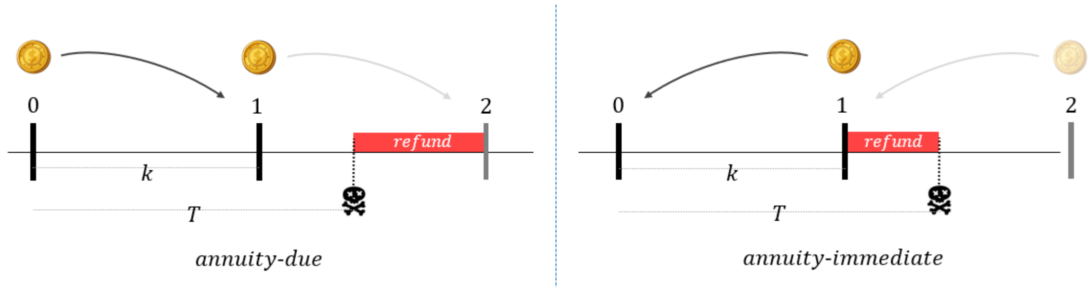

Figure 5: Diagrama de tiempo para una anualidad vencida e inmediata prorrateable

El asegurado fallece en el momento T después de haber pagado una prima anual completa de 1 u.m en el momento K. Supongamos que la prima se devenga o gaste a una tasa uniforme durante el año posterior al pago. En este caso, la tasa de devenge (c) guarda una relacion con $\bar{a}_{\overline{1}|}$ que es el valor presente de una anualidad que paga 1 unidad monetaria cada año durante un año completo, dicha relacion está dada por:

$$c\bar{a}_{\overline{1}|} = 1$$

Esto se puede intepretar como que la tasa de devenge (c) por el valor presente de un flujo continuo de pagos a lo largo del año ($\bar{a}_{\overline{1}|}$) debe ser igual a 1, que es la unidad monetaria o prima que se pago al comienzo de año.

Donde:

$$\bar{a}_{\overline{1}|} = \int_0^1 e^{-\delta t} dt = \frac{1-v}{\delta}$$

$$c = \frac{\delta}{1-v}$$

δ (fuerza de interes): mide el crecimiento continuo del capital.

Si el gasto cesa al momento de la muerte, entonces $c\bar{s}_{\overline{T-K}|}$ es la parte de la prima gastada o utilizada hasta el momento T.

Donde:

$$\bar{s}_{\overline{T-K}|} = \int_0^{T-K} e^{\delta(T-K-t)} dt = \frac{v^{-(T-K)} - 1}{\delta}$$

que es la parte proporcional de la prima gastada hasta el momento T

Entonces

$$(1+i)^{T-K} - c\bar{s}_{\overline{T-K}|} = 1.(1+i)^{T-K} - \frac{\bar{s}_{\overline{T-K}|}}{\bar{a}_{\overline{1}|}}$$

$$v^{-(T-K)} - \frac{v^{-(T-K)}-1}{\delta}\Big/\frac{1-v}{\delta}$$

$$v^{-(T-K)} - \frac{v^{-(T-K)}-1}{1-v} = \frac{1-v^{-(T-K)}}{1-v}$$

$$\frac{\delta\bar{a}_{\overline{K+1-T}|}}{\delta\bar{a}_{\overline{1}|}} = \frac{\bar{a}_{\overline{K+1-T}|}}{\bar{a}_{\overline{1}|}}$$

es la parte que no se ha gastado y se debe reemnbolsar.

La variable aleatoria del valor presente de todos los pagos menos el reembolso seria:

$$Y = \ddot{a}_{\overline{k+1}|} - v^T\frac{\bar{a}_{\overline{k+1-T}|}}{\bar{a}_{\overline{1}|}}$$

$$Y = \ddot{a}_{\overline{k+1}|} - \frac{v^T - v^{k+1}}{1-v} = \ddot{a}_{\overline{k+1}|} - \frac{v^T - v^{k+1}}{d}$$

$$Y = \frac{1-v^{k+1}}{d} - \frac{v^T - v^{k+1}}{d} = \frac{1-v^T}{d} = \ddot{a}_{\overline{T}|}$$

donde d es la tasa de descuento igual a $1-(1+i)^{-1} = 1-v$.

Cuando la tasa anual de pagos es 1, el valor actual actuarial de los pagos se denota por $\ddot{a}_x^{[1]}$

$$\ddot{a}_x^{[1]} = E[\ddot{a}_{\overline{T}|}] = E\Big[\frac{\delta}{d}\bar{a}_{\overline{T}|}\Big] = \frac{\delta}{d}\bar{a}_x$$

lo cual representa el valor presente actuarial de una anualidad anticipada prorrateable donde los pagos de la anualidad son igual a 1 unidad monetaria y se pagan cada año desde una edad x.

3.2 entendiendo 5.5.3 para la anualidad vencida

Aqui hay dos casos concretos empezamos para la **vencida** donde el cliente paga una prima $1/m$ en cada fraccion del año supongamos cada trimestre $m=4$ paga durante $k=1$ año y $J=3$ trimestres pero muere luego de 1 mes de su ultimo pago **al haber pagado anticipadamente la prima de ese trimestre y no haberlo sobrevivido faltandole 2 meses la aseguradora tendrá que rembolsarle estos 2 meses**

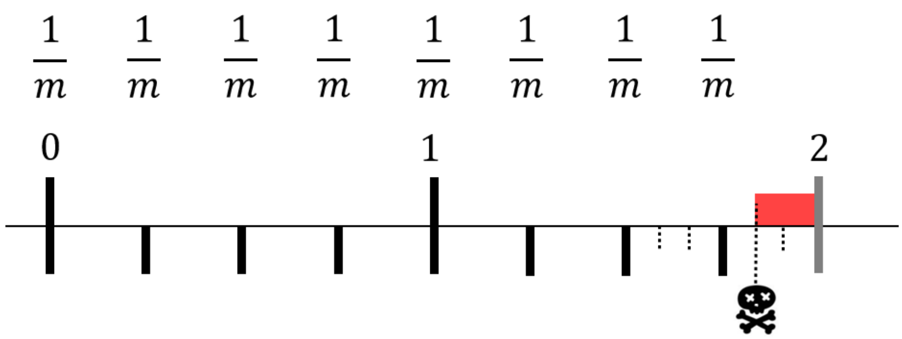

Figure 6: Diagrama de tiempo para una anualidad vencida prorrateable

El valor presente o actual en forma general seria:

$$Y = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+(J+1)/m}|} - v^T(\frac{\bar{a}_{\overline{k+(J+1)/m-T}|}}{m\bar{a}_{\overline{1/m}|}})$$

$$Y = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+(J+1)/m}|} - \frac{v^T - v^{k+(J+1)/m}}{d^{(m)}}$$

$$Y = \frac{1-v^T}{d^{(m)}} = \ddot{a}^{(m)}_{T}$$

calculemos el APV de esta anualidad prorrateada

$$\ddot{a}^{\{m\}}_x = E(\frac{1-v^T}{d^{(m)}}) = \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_x$$

3.3 entendiendo 5.5.8 para la anualidad ordinaria

Para la ordinaria el cliente recibe una renta de $1/m$ al final de cada fraccion del año supongamos cada trimestre $m = 4$ recibe durante $k = 1$ año y $J = 3$ trimestres pero muere luego de 1 mes de recibir su ultima renta **al haber sobrevivido 1 mes de su siguiente trimestre la aseguradora tendrá que rembolsarle este mes**

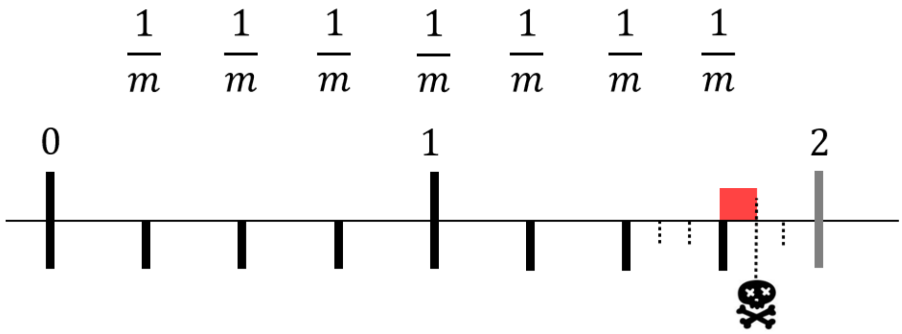

Figure 7: Diagrama de tiempo para una anualidad ordinaria prorrateable

Caso general

Segun la teoría paralela para las anualidades-inmediatas u ordinarias. Supongamos que el beneficiario de la anualidad muere en el momento T después de recibir el último pago regular de tamaño 1/m en el tiempo $K + J/m$, donde $J = [(T - K)/m]$. Ahora, $T - K - J/m$ es la duración del periodo que debe ser compensado por un pago adicional. Supongamos que cada pago se acumula a una tasa uniforme sobre el m-ésimo del año anterior al pago. En este caso, la tasa de devenge, "c", y el valor actuarial acumulado "$\bar{s}_{\overline{1/m}|}$" que es la suma de los valores presentes desde un pago regular hasta el proximo pago, guarda una relacion que se da por $c\bar{s}_{\overline{1/m}|} = 1/m$.

Donde esto se puede interpretar como que la suma total de los flujos futuros ajustados por el tiempo $\bar{s}_{\overline{1/m}|}$ y la tasa de devenge c es suficiente para cubrir exactamente la inversión (1/m).

Si la acumulación cesa al momento de la muerte, el pago correspondiente al momento de la muerte es la porción del siguiente pago que ha sido acumulada hasta la fecha, y se da por:

$$c\bar{s}_{\overline{T-K-(J/m)}|} = \frac{\bar{s}_{\overline{T-K-(J/m)}|}}{m\bar{s}_{\overline{1/m}|}}$$

.

El valor presente, en el tiempo 0, de todos los pagos es:

$$Y = a^{(m)}_{\overline{k+J/m}|} + v^T(\frac{\bar{s}_{\overline{T-k-J/m}|}}{m\bar{s}_{\overline{1/m}|}}) = a^{(m)}_{\overline{k+J/m}|} + v^T\left(\frac{\frac{v^{K+J/m-T}}{\delta}}{m\frac{V^{-1/m}-1}{\delta}}\right)$$

$$Y = v^T(a^{(m)}_{\overline{k+J/m}|} + \frac{v^{k+J/m} - v^T}{i^{(m)}}$$

$$Y = \frac{1-v^T}{i^{(m)}} = a^{(m)}_T$$

calculemos el APV de esta anualidad prorrateada

$$\mathring{a}^{\{m\}}_x = E(\frac{1-v^T}{i^{(m)}}) = \frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_x$$

4 Bibliografía

References

Beauchemin, D. (2019). Actuarial symbols of life contingencies and financial mathematics.

Goeters, P. (2003). Annuities, insurance and life.

José Antonio Gil Fana, Antonio Heras Martínez, J. L. V. Z. (1999). *Matemática de los seguros de vida*. Editorial MAPFRE.

Lauer, J. A. (1967). Apportionable basis for net premiums.

michigan state university valdezea (2014). Annuities, lecture: Weeks 9-11.

Newton L Bowers, Hans U Gerber, J. C. H. D. A. J. C. J. N. (1997). *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries.