PRUEBAS PARA DOS MUESTRAS INDEPENDIENTES

PRUEBA χ^2 PARA DOS MUESTRAS INDEPENDIENTES

El uso de la prueba χ^2 puede extenderse a problemas en los que es necesario relacionar la independencia o dependencia entre dos grupos con respecto a característica o condición, inferencia que se realiza en base a datos muéstrales.

Estos atributos pueden ser expresados en una escala nominal, en algunas situaciones particulares una población de objetos puede clasificarse en dos o más sentidos sobre la base de sus atributos o agrupamientos categóricos.

Por ejemplo:

-Si el ingreso familiar difiere en la frecuencia con que se escoge el tipo de colegio para los hijos.

-Si existe alguna relación de dependencia entre la capitalización de una tienda y su tipo de sociedad.

Entonces en resumen podemos afirmar:

La χ^2 es una prueba de independencia se aplica cuando se quiere probar si la independencia presentada en la muestra se extiende a la población .

Hipótesis a contrastar:

H_0: - Las variables son independientes, no están asociadas.

H_1: - Las variables no son independientes, se encuentran asociadas

Los datos con las frecuencias observadas suelen presentarse arreglados en tablas de doble entrada llamadas **tablas de contingencia**

R.A. \ C.I.	Alto=A	Bajo	Total
Bueno=B	e_{11} O_{11}	e_{12} O_{12}	$n_{1.}$
Regular	e_{21} O_{21}	e_{22} O_{22}	$n_{2.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	n

C.I.: Coeficiente Intelectual
R.A.:Rango de Aptitud

Cálculo de la probabilidades estimadas:

$$\left.\begin{aligned} P(A) &= \frac{n_{.1}}{n} \\ P(B) &= \frac{n_{1.}}{n} \end{aligned}\right\}$$

Bajo H_0, existe independencia entre los 2 criterios, tendríamos que la probabilidad de que todos los individuos con C.I. Alto se encuentren en el R.A. Bueno, es:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Y si existe independencia, se espera que en esa casilla halla un e_{11}, siendo este:

$$e_{11} = P(A \cap B)(n) = [P(A)P(B)]n = \left[\left(\frac{n_{.1}}{n}\right)\left(\frac{n_{1.}}{n}\right)\right]n = \frac{n_{.1}n_{1.}}{n}$$

$$\Rightarrow e_{11} = \frac{n_{.1}n_{1.}}{n}$$

C.I.: Coeficiente Intelectual
R.A.:Rango de Aptitud

R.A. \ C.I.	Alto=A	Bajo	Total
Bueno=B	e_{11} O_{11}	e_{12} O_{12}	$n_{1.}$
Regular	e_{21} O_{21}	e_{22} O_{22}	$n_{2.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	n

Como se observa la distribución χ^2 nos permite cuantificar la discrepancia entre lo observado y lo que se espera.

Estadístico de Prueba para una tabla r x k=2, cuando r >2:

Si existe independencia entre las dos variables entonces el estadístico de prueba se distribuirá a aproximadamente como una χ^2 , siendo este:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{2}\frac{(O_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}} \approx \chi^2_{\alpha,(r-1)\times(1)}$$

Donde: - r es el número de clasificaciones (filas)
- k es el número de grupos muestrales (columnas)

Estadístico de Prueba para una tabla 2 x 2:

En este caso se deberá usar:

			Total
	O_{11}=A	O_{12}=B	$n_{1.}$
	O_{21}=C	O_{22}=D	$n_{2.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	n

$$\chi_c^2 = \frac{n(|AD-BC|-n/2)^2}{n_{.1}n_{.2}n_{1.}n_{2.}} \approx \chi^2_{\alpha,(1)}$$

Regla de Decisión:

Para un nivel de significancia α si,

$$\chi_c^2 > \chi^2_{\alpha,(r-1)*(1)} \Longrightarrow \text{Rechazamos } H_0$$

Limitaciones de la prueba: no se acepta frecuencias esperadas menores a 5 en más del 20% de celdillas

En este caso, como se trata de una tabla de contingencia de 2x2, debe cumplirse que todos los valores esperados sean mayores o iguales a 5, en caso de no cumplirse esta restricción se deberá utilizar la prueba de las probabilidades exactas de Fisher.

Aplicación:

Se desea estudiar si la exposición de los empleados a cierto producto fabricado por la empresa empleadora esta asociado con los síntomas de alteraciones respiratorias que los están afectando. Para dicho fin se recoge una muestra de 394 empleados y se clasifican en forma cruzada en base a su nivel de exposición al producto y si tenían o no los síntomas de tales alteraciones respiratorias.

Los resultados fueron:

P.S. \ N.E.	Alto	Sin exposición conocida	Total
Si	185	17	202
No	120	72	192
Total	305	89	394

N.E : Nivel de exposición
P.S : Presencia de síntomas

¿Proporcionan estos datos la evidencia suficiente que indique al nivel de significancia α=0.01, una relación entre el nivel de exposición y la presencia de los síntomas de las alteraciones respiratorias?

Solución:

Planteamos la Hipótesis:

H_0: La presencia de síntomas no tiene relación con el nivel de exposición (independencia)

H_1: La presencia de síntomas tienen relación con el nivel de exposición (No existe la independencia)

Analizando los esperados:

N.E : Nivel de exposición
P.S : Presencia de síntomas

N.E. / P.S.	Alto	Sin exposición conocida
Si	$e_{11}=156$	$e_{12}=46$
No	$e_{21}=149$	$e_{22}=43$

$$e_{11} = \frac{305x202}{394} = 156$$

Calculando el estadístico de Prueba, para un α=0.01:

N.E. / P.S.	Alto	Sin exposición conocida	Total
Si	185	17	202
No	120	72	192
Total	305	89	394

N.E : Nivel de exposición
P.S : Presencia de síntomas

Dado que es una tabla de 2 x 2 usaremos el estadístico de prueba:

$$\chi_c^2 = \frac{n(|AD - BC| - n/2)^2}{n_{.1}n_{.2}n_{1.}n_{2.}} \approx \chi^2_{\alpha,(1)}$$

$$\chi_c^2 = \frac{394(\left|(185)(72)-(17)(120)\right|-\frac{394}{2})^2}{(305)(89)(202)(192)} = 45.97$$

Si,

$$\chi_c^2 > \chi^2_{\alpha,(r-1)*(1)} = \chi^2_{0.01,(1g.l.)} = 6.63$$

Entonces se rechaza H_0 con un nivel de confianza del 1%

Conclusión: con un nivel de significancia del 1% , podemos afirmar que la presencia de síntomas tiene relación con el nivel de exposición

PRUEBA DE LA MEDIANA PARA DOS MUESTRAS INDEPENDIENTES

Esta prueba permite determinar si dos muestras independientes difieren con relación a sus medianas, es decir, permite determinar si dos muestras independientes (no necesariamente del mismo tamaño) provienen de poblaciones con la misma mediana.

Esta prueba puede usarse siempre que las observaciones de los grupos estén, por lo menos en una escala ordinal.

En resumen la prueba de la mediana dará información acerca de la probabilidad de que los dos grupos independientes se hayan tomado de poblaciones con la misma mediana.

Hipótesis a contrastar:

H_0:Las dos muestras provienen de la misma población
($Me_1 = Me_2$ poblacionales)

H_1:Las muestras provienen de diferentes poblaciones
($Me_1 \neq Me_2$ poblacionales)

Calculando el estadístico de Prueba:

Si las 2 poblaciones tienen la misma mediana, esperamos que la mitad de las observaciones en cada una de las 2 muestras estén por encima de la mediana común, y que la otra mitad esté por debajo.

La utilización de esta prueba esta sujeta a restricciones para su significación estadística:

- El N° de casos "N" ha de ser superior a 40 (N>40) .

- Cuando N está entre 20 y 40 es preciso que las frecuencias esperadas en las celdillas sean 5 ó más, de no cumplirse esta condición debe recurrir a otras pruebas no paramétricas que permitan dar solución técnica al problema.

METODOLOGIA DE LA PRUEBA

Bajo la hipótesis nula (H_0) de que las 2 medianas son iguales, podemos estimar el parámetro común, calculando la mediana de los valores muestrales de ambas muestras combinadas, es decir, del total de las (n_1+n_2) observaciones.

Una vez determinado éste valor se resume el resultado en una tabla de contingencia de 2x2 considerando:

a)Si pertenece a la muestra 1 o la muestra 2.

b)Cuántas observaciones tienen valores mayores que la mediana general y cuántas tienen valores inferiores a la misma, es decir, cuantas están por encima o por debajo de la mediana común.

Luego la tabla de contingencia 2x2 será:

Relación con respecto a la mediana común	**Muestra**		**Total**
	I	**II**	
> M_e	A	B	A+B
< M_e	C	D	C+D
Total	n_1	n_2	**n**

ESTADISTICA NO PARAMETRICA LIC. RITA GUZMAN LOPEZ

Relación con respecto a la mediana común	Muestra		Total
	I	**II**	
> M_e	A	B	A+B
< M_e	C	D	C+D
Total	n_1	n_2	**n**

Si H_0 es verdadera esperamos que las proporciones: $\frac{A}{n_1}$ y $\frac{B}{n_2}$ deben ser similares.

El estadístico de prueba a utilizar será la χ^2 corregida (aplicación mas frecuente):

$$\chi_c^2 = \frac{n\left(|AD - BC| - \frac{n}{2}\right)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)} \approx \chi^2_{(1g.l),\alpha} = \chi^2_{tabla,1gl.}$$

con un nivel de significancia de α.

Regla de Decisión:

Si, $\chi_c^2 > \chi^2_{tabla,\alpha,1g.l.} \Rightarrow$ Se rechaza H_0

Casos de empates:

Si hay valores que coincidan con los de la mediana general en las muestras estudiadas, se procederá de la siguiente forma:

1) Si la muestra es grande y si solamente unos pocos casos coincide con el valor de la mediana común, pueden excluirse del análisis estas observaciones.

2) Si el número de observaciones que coincide con el valor de la mediana común es grande, entonces dichas observaciones pueden dividirse en dos grupos: en puntajes que excedan o no excedan la mediana.

Aplicativo 1:

Los estudios sobre aves suelen realizarse mediante anillamiento y puesta en libertad de manera que sus movimientos pueden ser seguidas. Una variable estudiada fue la distancia de vuelo desde el punto que se soltó un pájaro recién anillado hasta su primera posada.

Los siguientes datos corresponden a dos tipos de pájaros, el Petirrojo y la Paloma Gris (la distancia esta dada en pies).

PETIRROJO	128.8	160	162.1	163.4	186.4
	156.2	70	10	57.2	65.2
	68.9	24.7	37.4	99.7	78.7
	48.2	69.2	117.3		
PALOMA GRIS	40	80	175	55.5	44.7
	166.7	83.4	162.7	76	22.1
	170	263.7	13.9	165.5	300.6
	197.7	288.1	102		

¿Las distancias de vuelo de los dos tipos de aves en estudio serán iguales?. Considerar α=5%

Solución:

Planteamos las hipótesis:

H_0: $Me_1 = Me_2$

H_1: $Me_1 \neq Me_2$

Calculamos la mediana en común de las 36 observaciones, luego de ordenar las observaciones en forma combinada, obtenemos:

Siendo N=par; la mediana será el promedio de los dos términos centrales

$$\underset{común}{mediana} = \frac{X_{(18)} + X_{(19)}}{2} = \frac{83.4 + 99.7}{2} = 91.55$$

Luego, comparamos cada observación con respecto a la Mediana Común:

Item	PETIROJO	Mediana Común =91.5
1	128.8	+
2	156.2	+
3	68.9	-
4	48.2	-
5	160	+
6	70	-
7	24.7	-
8	69.2	-
9	162.1	+
10	10	-
11	37.4	-
12	117.3	+
13	163.4	+
14	57.2	-
15	99.7	+
16	186.4	+
17	65.2	-
18	78.7	-

PALOMA GRIS	Mediana Común =91.5
40	-
166.7	+
170	+
197.7	+
80	-
83.4	-
263.7	+
288.1	+
175	+
162.7	+
13.9	-
102	+
55.5	-
76	-
165.5	+
44.7	-
22.1	-
300.6	+

clasificamos y armamos la tabla resumen:

	Petirrojo	Paloma G.	Total
> M_e=91.55	A=8	B=10	A+B=18
< M_e=91.55	C=10	D=8	C+D=18
Total	N_1=18	N_2=18	**N=36**

N < 40 , analizaremos los esperados

	Petirrojo	Paloma G.
> M_e=91.55	e_{11}=9	e_{12}=9
< M_e=91.55	e_{21}=9	e_{22}=9

Calculando el valor del estadístico de prueba:

$$\chi_c^2 = \frac{36\left(\left|(8)(8)-(10)(10)\right|-\frac{36}{2}\right)^2}{(18)(18)(18)(18)} = 0.111$$

Entonces si $\chi_c^2 > \chi^2_{tabla,1g.l.} \Rightarrow$ Se rechaza H_0

Luego el valor de tabla para α=0.05 es: $\chi^2_{tabla(1g.l.)}$=3.84, por lo tanto el valor calculado es menor al de tablas, entonces con un nivel de significancia del 5% no rechazamos H_0.

En consecuencia concluimos con un 5% de significancia que las distancias de vuelo de la paloma gris y el petirrojo son semejantes respecto a la mediana.

Aplicativo 2:

Se realizó un experimento con dos variedades de maíz, con el fin de determinar si existen diferencias significativas en cuanto a su rendimiento mediano. Las dos variedades fueron asignadas aleatoriamente a 23 parcelas experimentales ubicadas en la misma localidad. El rendimiento en Kg fue registrado para cada una de las 23 parcelas, obteniéndose los siguientes resultados:

V1	83	91	94	84	83	96	92	90	91	83	91	
V2	91	90	81	83	83	84	88	91	89	84	92	80

Usar α=0.05

Solución:

Planteamos las hipótesis:

H_0: $Me_1 = Me_2$

H_1: $Me_1 \neq Me_2$

Calculamos la mediana en común de las 23 observaciones, luego de ordenar las observaciones en forma combinada, obtenemos:

Siendo N=impar; la mediana será el términos centrales

$$\text{Mediana común} = X_{12} = 89$$

clasificamos y armamos la tabla resumen:

	Variedad 1	**Variedad 2**	**Total**
> M_e=89	A=7	B=4 + 1=5 **(1 observación=mediana)**	A+B=12
< M_e=89	C=4	D=7	C+D=11
Total	N_1=11	N_2=12	**N=23**

N < 40 , analizaremos los esperados

	Petirrojo	**Paloma G.**
> M_e=89	$e_{11}=5$	$e_{12}=6$
< M_e=89	$e_{21}=5$	$e_{22}=6$

Calculando el valor del estadístico de prueba:

$$\chi_c^2 = \frac{23\left(|(7)(7)-(5)(4)|-\frac{23}{2}\right)^2}{(12)(11)(11)(12)} = 0.4$$

Luego el valor de tabla para α=0.05 es: $\chi^2_{tabla(1g.l.)}=3.84$, por lo tanto el valor calculado es menor al de tablas, entonces con un nivel de significancia del 5% no rechazamos H_0.

Concluimos con un 5% de significancia que los rendimientos medianos de las dos variedades de maíz son similares.

PRUEBA U DE MANN-WHITNEY

La prueba U contrasta si dos muestras, extraídas independientemente, proceden de la misma población o si dicha variable tiende a ser mayor (o menor) en alguno de los dos grupos poblacionales, basándose en los datos muestrales.

El único supuesto preciso es que la población o poblaciones del que se han extraído las muestras, sean de tipo continuo, no requiere simetría.

Entonces dadas $X_1, X_2, ..., X_{n1}$ y $Y_1, Y_2, ..., Y_{n2}$ m.a. independientes de dos poblaciones con distribuciones continuas, consideraremos la prueba de la hipótesis nula:

H_0 : $f_1(x) = f_2(y)$ (las poblaciones tienen la misma distribución)

En cuanto a la hipótesis alternativa esta puede ser " unilateral" o " bilateral ".

Hipótesis

a) Bilateral

H_0: - Las Medianas de las dos poblaciones son iguales.
- Las 2 poblaciones tienen la misma distribución.
- Las muestras proceden de la misma población.

H_1:- Las Medianas de las dos poblaciones son diferentes
- Las 2 poblaciones no tienen la misma distribución.
- Las muestras proceden de diferentes poblaciones.

b) Unilateral (podría ser derecha o izquierda)

H_0: La masa de la población "A" es igual ó mas grande que la población de "B".
(la capacidad de A es igual ó mas alta que la de B).

H_1: La masa de la población de "A" no es mas grande que la de "B".
(la capacidad de A es mas baja que la de B).

Tratamiento de las observaciones, pasos para la aplicación de la Prueba:

- Determinar el tamaño de las muestras (n_1 y n_2). "n_1" es el número de casos en el grupo más pequeño y n_2 el número de casos en el grupo más grande.

- Considerar ambas muestras como una muestra global de tamaño n_1+n_2, ordenar las observaciones de menor a mayor (orden algebraico, se considera los signos negativos, si hubiera, para el ordenamiento), y asignamos rangos a todos estos elementos, en los casos de igualdad se le asignará un rango promedio.

- Se reagrupan los rangos de acuerdo a la muestra a la que pertenece la observación.

Estadístico de Prueba

- Para n_1, $n_2 \leq 20$:

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n_1} R_i$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n_2} R_i$$

Entonces U_c=mín {U_1 y U_2}

Donde:

n_1 = tamaño de la muestra menor.
n_2 = tamaño de la muestra mayor.
R_1 = sumatoria de los rangos de la muestra 1.
R_2 = sumatoria de los rangos de la muestra 2.

- Para el caso de n_1 , n_2 < 8 (usar Tabla J), se calcula los valores de U_1 y U_2 (valores estadísticos de U Mann- Whitney), de modo que se elija el mínimo valor entre ellos como estadístico de prueba el mismo que será comparado con los valores críticos de U Mann-Whitney de tabla.

Para los casos de $9 \leq (n_1 , n_2) \leq 20$ usar Tabla K

Regla de Decisión:

- Para n_1, $n_2 \leq 20$, se rechaza H_0, si:

$U_c \leq U_{tabla,\frac{\alpha}{2}}$ ó p_U de tabla ≤ α/2 (Bilateral)

$U_c \leq U_{tabla,\alpha}$ ó p_U de tabla ≤ α (Unilateral)

p_u : probabilidad asociada a H_o

- En caso de muestras grandes (n_2 > 20) el estadístico de prueba de U Mann- Whitney se aproxima a una distribución normal con media y varianza:

$$media = \mu_U = \frac{n_1 n_2}{2} \qquad Varianza = \sigma_U^2 = \frac{(n_1)(n_2)(n_1+n_2+1)}{12}$$

Donde el estadístico de prueba Zc es:

$$Z_c = \frac{U_c - \mu_U}{\sigma_U}$$

Donde U_c=mín {U_1 y U_2}, U_1 y U_2 calculado con las formulas anteriores.

- Para n_1, n_2 >20, se rechaza H_0, si:

➢ **Unilateral:**

✓ Unilateral Derecha: $Z_c > Z_{tabla,(\alpha)}$

✓ Unilateral Izquierda: $Z_c < -Z_{tabla,(\alpha)}$

➢ **Bilateral:**

$$Z_c \leq -Z_{tabla,\frac{\alpha}{2}} \quad o \quad Z_c \geq Z_{tabla,\frac{\alpha}{2}}$$

Aplicativo:

Un experimentador utiliza dos métodos para enseñar a leer a un grupo de 10 niños de 6 años, quienes ingresan por primera vez a la escuela. El experimentador quiere demostrar que el procedimiento ideado por él es más efectivo que el tradicional; para ello, mide el desempeño en la lectura en función de la fluidez, comprensión, análisis y síntesis. Usar α=0.025

El plan experimental preliminar consiste en elegir al azar tanto una muestra de 10 niños como el método por utilizar.

Dos métodos diferentes aplicados en dos grupos de niños.

Método aplicado	Calificaciones				
Tradicional	80	85	25	70	90
Inventado por el investigador	95	100	93	110	45

Planteamiento de la hipótesis:

H_0: Las diferencias observadas entre las calificaciones de ejecución de lectura mediante los dos métodos se deben al azar.

H_1: Las calificaciones de ejecución de lectura, según el método de enseñanza del experimentador son más altas que las observadas en el método tradicional.

Nivel de significación para la prueba α=0.025.

Calcular el estadístico de prueba:

Las observaciones se deben ordenar como si fueran una sola muestra y asignarle los rangos del menor al mayor.

Muestra combinada	25	45	70	80	85	90	93	95	100	110
Muestra correspondiente	T	I	T	T	T	T	I	I	I	I
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

T: Tradicional
I: Inventado por el investigador

Agrupamos nuevamente según la muestra que corresponda:

Rangos de lectura de la tabla anterior.

Método aplicado	calificaciones					Suma de rangos
Tradicional (Rango)	80 (4)	85 (5)	25 (1)	70 (3)	90 (6)	19
Inventado por el investigador (Rango)	95 (8)	100 (9)	93 (7)	110 (10)	45 (2)	36

Calculamos la U:

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \sum_1^{n_1} R_1 = 5(5) + \frac{5(5+1)}{2} - 19 = 21$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \sum_1^{n_2} R_2 = 5(5) + \frac{5(5+1)}{2} - 36 = 4$$

De los dos valores de U calculados, se elige el más pequeño (4) y se comparan con los valores críticos de U Mann-Whitney.

Decisión:

A la probabilidad del valor U de Mann-Whitney, calculado anteriormente, corresponde 0.048, el cual es más pequeño que el nivel de significancia; por lo tanto, No se rechaza H_0.

Conclusión:

Con un nivel de significancia del 2.5%, podemos concluir que las calificaciones de la ejecución de lectura mediante los dos métodos de enseñanza no presentan diferencias significativas, las calificaciones muéstrales no indican efectividad del método diseñado por el experimentador.