INTEGRANTES:

CUTIPA LUQUE, OSCAR

DIAZ LOPEZ, FRANCIS

GIRALDO ESPINOZA, JEAN

HUAROTO LARREA, ALDO

LA ROSA AGUILAR, VICTORIA

MOMENTOS EXACTOS DE ESTADISTICOS DE ORDEN

Saberes Previos

Distribución Beta: Y ~ B(α; β)

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,,\ 0 < y < 1;\ \ \alpha,\beta \epsilon \mathbb{R}^+$$

$$E(Y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\ ;\ \text{Var}(Y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

Propiedades de la función Beta

$$B(x;y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\ ,$$

$$B(x;y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Propiedades de la función Gamma

$\Gamma(n) = (n-1)!$, donde n es un entero positivo.

Cálculo de los momentos para los estadísticos de orden

El calculo de los momentos de conjuntos individuales o de mas elementos de estadísticos de orden puede ser expresado mediante el calculo habitual de momentos y la respectiva fdp.

En el caso continuo, el k-ésimo momento de la v.a X respecto al origen se expresa como:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x$$

La función de distribución del estadístico de r – ésimo orden es:

$$f_{X_{(r)}}(x) = \frac{n!\left[F_{(x)}\right]^{r-1}\left[1-F_{(x)}\right]^{n-r} f(x)}{(r-1)!(n-r)!}$$

Momentos exactos de los estadísticos de orden y su relación con la función cuantil

Existen distribuciones en las que F_x tiene una expresión complicada y se vuelve difícil de manejar.

Para esto, una expresión mas simple para hallar los momentos de los estadísticos de orden $X_{(r)}$ puede ser hallada en términos de la función cuantil (inversa de la función de distribución):

$$Q_x(u) = F_x^{-1} = F_x^{-1}(u); 0 \leq u \leq 1$$

El calculo del k – ésimo momento del estadístico de orden $X_{(r)}$ de F_x respecto al origen se realiza de la siguiente manera:

$$E\left(X_{(r)}^k\right) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_{-\infty}^{\infty} y^k [F_X(y)]^{r-1}[1 - F_X(y)]^{n-r} f_X(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_{-\infty}^{\infty} y^k [F_X(y)]^{r-1}[1 - F_X(y)]^{n-r} dF_X(y)$$

Donde $y = X_{(r)}$

Momentos exactos de los estadísticos de orden y su relación con la función cuantil

Sea

$F_X(y)$=u $\longrightarrow$ $f_X(y)\,\mathrm{dy} = \mathrm{du}$

entonces

$y = F_x^{-1}(u)$ $\longrightarrow$ $y = Q_x(u)$

Por lo tanto, reemplazando en la integral anterior:

$$E\left(X_{(r)}^k\right) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^1 [Q_X(u)]^k u^{r-1}(1-u)^{n-r}\,\mathrm{d}u$$

$E\left(X_{(r)}^k\right) = E[Q_X(U)]^k$, donde la v.a U tiene una distribución $B(r; n-r+1)$.

Ejemplo demostrativo: Distribución uniforme estándar

Sea X ~ U[0,1], entonces:

$f_X(x) = 1 \;\; ; 0 \leq x \leq 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad\quad x < 0 \\ x & si \; 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad\quad x \geq 1 \end{cases}$$

Sea $Y = X_{(r)}$ el estadístico de r – ésimo orden, entonces :

$$E\left(X_{(r)}^k\right) = E[Q_X(u)]^k$$

$$E\left(X_{(r)}^k\right) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 [Q_X(u)]^k u^{r-1} (1-u)^{n-r} \, \mathrm{d}u$$

Ejemplo demostrativo

Como X ~ U[0,1] con función de distribución $F_X(x) = x$, entonces:

$$Q_x(u) = F_x^{-1}(x) = x\,; 0 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{u} = x$$

Luego el k - ésimo momento del estadístico de orden r queda expresado de la siguiente forma:

$$E\left(X_{(r)}^{k}\right) = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\int_0^1 [x]^k x^{r-1}(1-x)^{n-r}\,\mathrm{d}x$$

$$E\left(X_{(r)}^{k}\right) = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\int_0^1 x^{k+r-1}(1-x)^{n-r}\,\mathrm{d}x$$

$$E\left(X_{(r)}^{k}\right) = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}B(k+r; n-r+1)$$

Esperanza y Varianza del r-ésimo estadístico de orden para una distribución uniforme estándar

Utilizando la relación entre la función beta y la función gamma:

$$E\left(X_{(r)}^{k}\right) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\frac{(r+k-1)!(n-r)!}{(n+k)!}$$

$$E\left(X_{(r)}^{k}\right) = \frac{n!(r+k-1)!}{(n+k)!(r-1)!} \quad ; 1 \leq r \leq n, k \in Z^{+}$$

Para k=1

$$E\left(X_{(r)}\right) = \frac{n!r!}{(r-1)!(n+1)!}$$

$$\boldsymbol{E\left(X_{(r)}\right) = \frac{r}{n+1}}$$

Para k = 2

$$E\left[X^{2}{}_{(r)}\right] = \frac{n!(r+1)!}{(r-1)!(n+2)!} = \frac{r(r+1)}{(n+1)(n+2)}$$

Y como la varianza es:

$$Var(X_{(r)}) = E\left[X^{2}{}_{(r)}\right] - (E\left[X_{(r)}\right])^{2}$$

$$Var(X_{(r)}) = \frac{r(r+1)}{(n+1)(n+2)} - (\frac{r}{n+1})^{2}$$

$$\boldsymbol{Var(X_{(r)}) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^{2}(n+2)}}$$

Generalizando

Entonces, la media y la varianza para cualquier distribución quedaría expresada de la siguiente forma:

$$E\left(X_{(r)}\right) \approx F_X^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right)$$

$$\text{Var}(X_{(r)}) \approx \left[f_X\left(E\left[X_{(r)}\right]\right)\right]^{-2}\frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

Ejercicio 1

Sea una variable aleatoria X que se distribuye de manera exponencial con $\mu = 16$. Calcule la esperanza y varianza del $X_{(5)}$ de una muestra aleatoria de tamaño 10.

$X \sim exp(1/16)$

Tenemos que $r = 5, n = 10$,sabemos que la Función de Densidad $f(x) = \frac{1}{16}e^{-\frac{x}{16}}$ y su Función de Distribución es $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{16}}$.

Sea $y = F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{16}} \Rightarrow F_X^{-1}(y) = -16\ln(1-y)$

Sabemos que $E(X_{(r)}) = E[Q_X(U)]$, donde U~*Beta*(5,6)

$$\Rightarrow E(X_{(5)}) = \int_0^1 \frac{-16\ln(1-u)}{B(5,6)} u^4(1-u)^5 du \;\Rightarrow E(X_{(5)}) = \frac{3254}{315} = \mathbf{10.330}$$

Hallando la varianza de $X_{(5)}$: *Var*($X_{(r)}$)= $E(X_{(r)}^2) - [E(X_{(r)})]^2$

$$E(X_{(5)}) = 10.330 \quad y\; E(X_{(5)}^2) = E[Q_X(U)]^2$$

$$\Rightarrow E(X_{(5)}^2) = \int_0^1 \frac{[-16\ln(1-u)]^2}{B(5,6)} u^4(1-u)^5 du \Rightarrow E(X_{(5)}^2) = \frac{12777032}{99225} = 128.768$$

$$\Rightarrow Var(X_{(5)}) = E(X_{(5)}^2) - [E(X_{(5)})]^2 = 28.768 - 10.330^2 = \mathbf{22.0591}$$

Respuesta:
La esperanza y la varianza del estadístico de orden 5 son 10.33 y 22.0591, respectivamente.

Ejercicio2

Un equipo eléctrico consta de cinco bombillas colocadas en serie. Solo puede funcionar si todas las bombillas están funcionando. La vida útil T de cada bombilla tiene la función de densidad de probabilidad . $f(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, 0≤x< ∞ (en unidades de 1000 horas). Calcule la vida media del equipo eléctrico.

El equipo eléctrico funcionará hasta que una de las bombillas se apague.

$$T_i = Vida\ útil\ de\ la\ i - ésima\ bombilla(en\ unidades\ de\ 1000\ horas)$$

El tiempo de vida útil del equipo eléctrico será igual a la menor vida útil de las 5 bombillas.

Definimos:

$$E = min\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$$

Nos piden encontrar la esperanza del mínimo de estadístico de orden, $T_{(1)}$

Tenemos que $r = 1, n = 5$,sabemos que la función de densidad es $f(t) = \frac{2}{(t+1)^3}$

y su Función de Distribución es $F(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2}$

Sea $y = F(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2} \Rightarrow F_T^{-1}(t) = \sqrt{\frac{1}{1-t}} - 1$

Sabemos que $E\left(T_{(1)}\right) = E[Q_T(U)]$, donde U~Beta(1,5)

$$\Rightarrow E\left(T_{(1)}\right) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{1}{1-u}} - 1}{B(1,5)} u^0(1-u)^4 du \Rightarrow E\left(X_{(1)}\right) = 0.111$$

Respuesta:
La vida media del equipo eléctrico es de aproximadamente 111 horas.

Ejercicio3

Una empresa desea saber cuanto es la proporción mínima esperada de respuestas correctas en una prueba sobre seguridad industrial a sus trabajadores, sabiendo que se distribuye como U[0,1]. Se obtuvo una muestra de 10 trabajadores.

X: v. a. que indica la proporción de respuestas correctas en la prueba de un trabajador.

X ~ U[0,1]. Como la población tiene una distribución uniforme estándar, podemos usar el resultado de la esperanza del ejemplo demostrativo.

$$E\left(X_{(r)}\right) = \frac{r}{n+1}$$. Donde r=1, n=10

$$\mathrm{E}(X_{(1)}) = \frac{1}{(10+1)} = 0.091$$

Por lo tanto, la proporción mínima de respuestas correctas esperada será de 0.091. Es decir, como mínimo el 9% de las respuestas en una prueba serán correctas.

Ejercicio4

Sea una variable aleatoria X que se distribuye uniformemente en el intervalo [0,2]. Calcular la esperanza y varianza de $X_{(3)}$ de una muestra aleatoria de tamaño 12.

$X \sim U[0,2]$. Como no se trata de una distribución uniforme estándar podemos hacer uso de la forma generalizada.

Tenemos $r = 3, n = 12$ y sabemos que la Función de Densidad $f(x) = \frac{1}{2}$ y su Función de Distribución es F$(x) = \frac{x}{2}$.

Sea $y = F(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow F_X^{-1}(y) = 2y \Rightarrow F_X^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right) = \frac{2(r)}{n+1}$

Sabemos que $E\left(X_{(r)}\right) = F_X^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right)$

$$\Rightarrow E\left(X_{(3)}\right) = \frac{2(3)}{12+1} = \mathbf{\frac{6}{13}}$$

Hallando la varianza de $X_{(3)}$

Var($X_{(r)}$)= $\left[f_X\left(E\left[X_{(r)}\right]\right)\right]^{-2}\frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}$

Se sabe que:

$E\left(X_{(3)}\right) = \frac{6}{13} \quad y \quad f_X(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow f_X\left(\frac{6}{13}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad Var(X_{(3)}) = 2^2 \times \frac{3(12-3+1)}{(12+1)^2(12+2)} = \mathbf{\frac{60}{1183}}$

Respuesta:
La esperanza y la varianza del estadístico de orden 3 son 0.4615 y 0.0507, respectivamente.

Ejercicio5

La duración de una batería tiene distribución exponencial con media de 300 horas. Encontrar la esperanza y la varianza del $X_{(10)}$ de una muestra aleatoria de tamaño 20.

Sea X la variable aleatoria que denota el tiempo de duración de una batería en horas.

$$X \sim Exp\ (\lambda = \frac{1}{300})\ ,\ f(x) = \frac{1}{300} e^{-\frac{x}{300}}\ ,\ \mathrm{F}(x) = 1 - e^{-\frac{x}{300}} \rightarrow F_x^{-1}(x) = -300 * \ln(1-x)$$

La población tiene una distribución exponencial. Podemos hallar la esperanza y la varianza aproximadas usando la formula generalizada:

$$E\left[X_{(r)}\right] = F_x^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right)$$

➢ $E\left[X_{(10)}\right] = F_x^{-1}\left(\frac{10}{21}\right) = F_x^{-1}(0{,}476) = -\ln(1-0.476) * 300 = \mathbf{193.879}$

$$Var[X_{(r)}] = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}[f_x(E\left[X_{(r)}\right])]^{-2}$$

➢ $Var[X_{(10)}] = \frac{10(11)}{441(22)}[f_x(0.476)]^{-2} = 0.011(\left(\frac{1}{300}\right) e^{\frac{-193.879}{300}})^{-2} = \mathbf{3605.557}$

Respuesta: Aproximadamente , la esperanza y la varianza del estadístico de orden 10 son 193.879 horas y 3605.557 horas^2, respectivamente.

Ejercicio 1

* Sea una v.a x que se distribuye de manera exponencial con $\mu = 16$. Calcule la esperanza y varianza del $X_{(5)}$ de una muestra aleatoria de tamaño 10.

Resolución

$X \sim exp(1/16)$

Tenemos que $r = 5$, $n = 10$, sabemos que la función de densidad $f(x) = \frac{1}{16} e^{-x/16}$ y su función de distribución de $F(x) = 1 - e^{-x/16} \Rightarrow F_X^{-1}(y) = -16 \ln(1-y)$

Sabemos que $\mathcal{E}(X_{(r)}) = \mathcal{E}[Q_X(U)]$, donde $U \sim Beta(5,6)$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(X_{(5)}) = \int_0^1 \frac{-16\ln(1-u)}{B(5,6)} u^4 (1-u)^5 du \Rightarrow \mathcal{E}(X_{(5)}) = \frac{3254}{315} = 10{,}33$$

Hallando la varianza de $X_{(5)}$: $Var(X_{(r)}) = \mathcal{E}(X^2_{(r)}) - [\mathcal{E}(X_{(r)})]^2$

$\mathcal{E}(X_{(5)}) = 10.330$ y $\mathcal{E}(X^2_{(5)}) = \mathcal{E}[Q_X(U)]^2$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(X^2_{(5)}) = \int_0^1 \frac{[-16\ln(1-u)]^2}{B(5,6)} u^4 (1-u)^5 du \Rightarrow \mathcal{E}(X^2_{(5)})$$

$$\Rightarrow \frac{12777032}{99225} = 128{,}768$$

$$\Rightarrow Var(X_{(5)}) = \mathcal{E}(X^2_{(5)}) - [\mathcal{E}(X_{(5)})]^2 = 28.768 - 10.330^2$$

$$= 22.0591$$

Solución

2.- El equipo eléctrico funcionará hasta que una de las bombillas se apague.

Definimos: T_i = Vida útil de la i-ésima bombilla (unidades de 1000 horas)

El tiempo de vida útil del equipo eléctrico será igual a la menor vida útil de las 5 bombillas.

$$\Rightarrow \quad E = \min\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$$

En otras palabras nos piden encontrar la esperanza de $T_{(1)}$.

Tenemos $r=1, n=5$. $\Rightarrow f_T(t) = \frac{2}{(1+t)^3} \Rightarrow F_T(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^3}$

Sea $y = F_T(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^3} \Rightarrow F_T^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{1-y}} - 1$

Sabemos que $E(T_{(1)}) = E[Q_T(U)]$, donde $U \sim Beta(1,5)$

$$\Rightarrow E(T_{(1)}) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{1}{1-u}} - 1}{B(1,5)} \cdot u^0 (1-u)^4 \, du = 0.111$$

Respuesta:

La vida media del equipo eléctrico es de aproximadamente 111 horas.

X: v.a que indica la proporción de respuestas correctas en la prueba de un trabajador.

$X \sim U[0,1]$ Como la población tiene una distribución uniforme estándar, podemos usar el resultado de la esperanza del ejemplo demostrativo.

$$E(X_{(r)}) = \frac{r}{n+1} \qquad \text{Donde } r = 1,\ n = 10$$

$$E(X_{(1)}) = \frac{1}{(10+1)} = 0.091$$

Por lo tanto, la proporción mínima de respuestas correctas esperada será de 0.091.
Es decir, como mínimo el 9% de las respuestas en una prueba serán correctas.

Ejercicio 4

- $X \sim U[0,2]$. Al no tratarse de una distribución uniforme estándar, hacemos uso de la forma generalizada.

- $f(x) = \frac{1}{2}$ - $F(x) = \frac{x}{2}$

- sea $y = F(x) = \frac{x}{2} \rightarrow F_X^{-1}(y) = 2y$ (*)

- Sabemos del problema que $r = 3$ y $n = 12$.

- $E(X_{(r)}) = F_X^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right)$

$\rightarrow E(X_{(3)}) = F_X^{-1}\left(\frac{3}{13}\right) = 2 \cdot \frac{3}{13} = \frac{6}{13}$

$Var(X_{(r)}) = [f_X(E[X_{(r)}])]^{-2} \cdot \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}$

$\rightarrow Var(X_{(3)}) = \frac{2^2 \cdot 3(10)}{13^2 \cdot 14} = \frac{60}{1183}$

$\therefore E(X_{(3)}) = \frac{6}{13}$ y $Var(X_{(3)}) = \frac{60}{1183}$

Sea X la variable aleatoria que denota el tiempo de duración de una batería en horas

$\lambda = \frac{1}{300}$, $X \sim Exp\left(\frac{1}{300}\right)$, $f(x) = \frac{1}{300} e^{-\frac{x}{300}}$, $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{300}} \rightarrow F^{-1}(x) = -300 \ln(1-x)$

$n = 20$, $r = 10$

La población tiene una distribución exponencial. Podemos hallar la esperanza y la varianza aproximadas usando la fórmula generalizada.

$$E(X_{(r)}) = F_X^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right)$$

$$\rightarrow E(X_{(10)}) = F_X^{-1}\left(\frac{10}{21}\right) = F_X^{-1}(0{,}476) = -\ln(1-0.476) \cdot 300 = 193.879$$

$$Var(X_{(r)}) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)} \cdot [f_X(E[X_{(r)}])]^{-2}$$

$$\rightarrow Var(X_{(10)}) = \frac{10(11)}{441 \cdot 22} \cdot [f_X(193.879)]^{-2} = 0.011 \cdot \left(\frac{1}{300} \cdot e^{-\frac{193.879}{300}}\right)^{-2} = 3605.55$$

Respuesta: Aproximadamente, la esperanza y la varianza del estadístico de orden 10 son 193.879 horas y 3605.557 $horas^2$, respectivamente.