Tarea 2: Muestreo en Distribuciones Normales

Inferencia Estadística

Lin Chiu Chen Yang

October 12, 2022

Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ingeniería

Económica, Estadística y Ciencias Sociales

FIEECS

1. Sea $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ una muestra aleatoria de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, y $\bar{X},\ S^2$ respectivamente, la media muestral y la varianza muestral. Sea $X_{n+1} \sim X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y suponga que $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ son independientes. Encuentre la distribución de muestreo de $\left[\frac{(X_{n+1}-\bar{X})}{S/\sqrt{n/(n+1)}}\right]$.
Solución:

2. Sea $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ y $Y_1,\ Y_2,\ ...,\ Y_n$ muestras aleatorias independientes de $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ y $\mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$, respectivamente.Además, sean α y β dos números reales fijos. Si $\bar{X}$, $\bar{Y}$ denotan las medias muestrales correspondientes, ¿cuál es la distribución muestral de:

$$\frac{\alpha(\bar{X}-\mu_x)+\beta(\bar{Y}-\mu_y)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}$$

donde S_x^2 y S_y^2 respectivamente denotan las varianzas muestrales de las X' y de las Y'.
Solución:

Si las varianzas son iguales y conocidas: $\rightarrow \bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma}{\sqrt{m}})$; $\quad \bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$;

multiplicando α a $\bar{X}$ y β a $\bar{Y}$: $\rightarrow \alpha\bar{X} \sim N(\alpha\mu_1, \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{m}})$; $\quad \beta\bar{Y} \sim N(\beta\mu_2, \frac{\beta\sigma}{\sqrt{n}})$;

restando ambas medias: $\alpha\bar{X} - \beta\bar{Y}$ Seguira una distribución normal de media $\alpha\mu_1 - \beta\mu_2$ y varianza $\frac{\alpha^2\sigma^2}{m} - \frac{\beta^2\sigma^2}{n}$. Si se conoce el valor dela varianza el estadistico se distribuye e según una normal de N(0,1)

$$Z = \frac{\alpha\bar{X}-(-\beta)\bar{Y}-(\alpha\mu_X-(-\beta\mu_Y))}{\sigma\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}} = \frac{\alpha(\bar{X}-\mu_X)+\beta(\bar{Y}-\mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}$$

$$\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2(m-1), \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2(n-1)$$

remplazando

$$T = \frac{\frac{\alpha(\bar{X}-\mu_X)+\beta(\bar{Y}-\mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2}+\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2}}{(m+n-2)}}}$$

entonces

$$T = \frac{\alpha(\bar{X}-\mu_X)+\beta(\bar{Y}-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}$$

sigue una distribucion t-student con $(m+n-2)$ grados de libertad.

3. Sea $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ una muestra aleatoria de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, y sea k es un número entero entero positivo. Encuentra $E(S^{2k})$. En particular, encuentre $E(S^2)$ y $Var(S^2)$.
Solución:

para toda distribución : $E(S^2) = \sigma^2$

para toda distribución : $Var(S^2) = \frac{\mu_4}{n} - \frac{\mu_2^2(n-3)}{n(n-1)} \to (\mu_2 = \sigma^2; \mu_4 = 3\sigma^2) \to \frac{2\sigma^2}{n-1}$

4. Se toma una muestra aleatoria de 5 de una población normal con una media de 2,5 y una varianza $\sigma^2 = 36$.
   (a) Encuentre la probabilidad de que la varianza muestral se encuentre entre 30 y 44.
   (b) Encuentre la probabilidad de que la media muestral se encuentre entre 1.3 y 3.5, mientras que la varianza muestral se encuentra entre 30 y 44.

Solución:

(a) se tiene: $\to n = 5; \mu = 2.5; \sigma^2 = 36$ y

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ entonces

$$\to P(30 < s^2 < 44)$$
$$\to P(\frac{30(4)}{36} < \chi^2_{(4)}) < \frac{44(4)}{36}$$
$$\to P(3.33 < \chi^2_{(4)} < 4.88)$$
$$\to P(\chi^2_{(4)} < 4.88) - P(3.33 < \chi^2_{(4)})$$

usando la tabla chi cuadrado 4 grados de libertad:

$$\to = 0.7002 - 0.4958$$
$$\to = 0.2044$$

(b) $\to$ *la $\bar{x}$ y la s^2 sonindependientes entonces :*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)}$$

$$\to P(1.3 < \bar{x} < 3.5) = P(\frac{\sqrt{5}(1.3-2.5)}{6} < z < \frac{\sqrt{5}(3.5-2.5)}{6})$$
$$\to P(-0.4472 < z < 0.3726) = 0.31791$$
$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = \frac{(0.3179)(0.2044)}{(0.2044)}$$
$$= 0.31791$$

5. Se observó que la vida media de una muestra de 10 bombillas era de 1327 horas con una desviación estándar de 425 horas. Una segunda muestra de 6 bombillas elegidas de un lote diferente mostró una vida media de 1215 horas con una desviación estándar de 375 horas. Si se supone que las medias de los dos lotes son las mismas, ¿qué tan probable es la observación? diferencia entre las dos medias de muestra?
Solución:

Muestra 1	Muestra 2
m = 10	n = 6
$\bar{X} = 1327$	$\bar{X} = 1215$
$S_x = 425$	$S_y = 375$

Se usa la distribución t , debido a que las muestras son pequeñas con variazas desconocidas

$$t = \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{(m-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}}\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \sim t_(m+n-2)$$

$$t = \frac{112}{9(425^2+(5)(375^2))}\sqrt{\frac{60(14)}{16}} = \frac{56}{1164375}\sqrt{\frac{60(14)}{16}}$$

$$= 0,000348 = 3,48x10^4$$

6. Sea S_x^2 y S_y^2 las varianzas muestrales de dos muestras independientes de tamaños $n_x = 5$ y $n_y = 4$ de dos poblaciones que tienen la misma varianza desconocida σ^2 Encuentre (aproximadamente) la probabilidad de que $S_x^2/S_y^2 \leq \frac{1}{1.52}$ o ≥ 6.25
Solución:

$$S_x^2/S_y^2 \sim \frac{X_{(4)}^2/4}{X_{(3)}^2/3} \sim F_{(4,3)}$$

usando la tabla f con 4 y 3 grados de libertad:

$$P(S_x^2/S_y^2 \leq \frac{1}{1.52}) = 0.3387$$
$$P(S_x^2/S_y^2 \geq 6.25) = 0.082$$