Tarea 1: Características de la muestra y sus distribuciones

Inferencia Estadística

Lin Chiu Chen Yang

October 5, 2022

Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ingeniería

Económica, Estadística y Ciencias Sociales

FIEECS

1. Sea $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ una muestra aleatoria de un fd F, y sea $\hat{F}(x)$ la función de distribución de la muestra. Encuentre $Cov(\hat{F}(x),\ \hat{F}(y))$ para números reales fijos $x,\ y$.
   Solución:

$$E(\hat{F}_n(x).\hat{F}_n(y)) = \frac{1}{n^2}E(\sum_i I\left\{X_i \leq x\right\}\sum_j I\left\{X_j \leq y\right\})$$

$$= \frac{1}{n^2}E(\sum_{i\neq j} I\left\{X_i \leq x\right\} I\left\{X_j \leq y\right\} + \sum_{i=j} I\left\{X_i \leq x\right\} I\left\{X_j \leq y\right\})$$

$$= \frac{1}{n^2}(nF\left\{x,y\right\} + n(n-1)F(x)F(y))$$

$$= \frac{1}{n}(F(min\left\{x,y\right\}) + (n-1)F(x)F(y))$$

$$Cov(\hat{F}_n(x).\hat{F}_n(y)) = \frac{1}{n}(F(min\left\{x,y\right\})F(x)F(y))$$

2. (a) Demuestre que el coeficiente de correlación muestral r satisface $|r| \leq 1$ con igualdad si y solo si todos los puntos de muestra se encuentran en una línea recta.
   (b) Si escribimos $U_i = aX_i + b(a \neq 0)$ y $V_i = cY_i + d(c \neq 0)$, ¿cuál es el coeficiente de correlación de la muestra entre las U y las V?.

   Solución:

3. (a) Se toma una muestra de tamaño 2 de la fdp $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1,\ y = 0$ *de lo contrario*. Encuentre $P(\bar{X} \geq 0,9)$.

   (b) Se toma una muestra de tamaño 2 de $Ber(1, \theta)$; encuentre $P(\bar{X} \leq \theta)$ y $P(S^2 \geq 0,5)$.

   Solución:

   (a)

$$P(\bar{X} = \bar{x}) = \begin{cases} 1/4 & , \bar{x} = 0.0 \\ 1/2 & , \bar{x} = 0.5 \\ 1/4 & , \bar{x} = 1.0 \end{cases} \qquad P(S^2 = s^2) = \begin{cases} 1/2 & , s^2 = 0.0 \\ 1/2 & , s^2 = 0.5 \end{cases}$$

$$P(\bar{X} \geq 0,9) = 1/4$$

   (b)

$$P(\bar{X} = \bar{x}) = \begin{cases} (1-\theta)^2 & , \bar{x} = 0.0 \\ 2\theta(1-\theta) & , \bar{x} = 0.5 \\ \theta^2 & , \bar{x} = 1.0 \end{cases} \qquad P(S^2 = s^2) = \begin{cases} \theta^2 + (1-\theta)^2 & , s^2 = 0.0 \\ 2\theta(1-\theta) & , s^2 = 0.5 \end{cases}$$

$$P(S^2 \geq 0,5) = 2\theta(1-\theta) \qquad\qquad P(\bar{X} \leq \theta) = F_{\bar{X}}(\theta)$$

4. Sean $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ una muestra aleatoria de la $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$. Calcule los primeros cuatro momentos muestrales de X sobre el origen y sobre la media. También calcule los primeros cuatro momentos de muestra de σ^2 sobre su media.

   Solución:

   los cuatro primeros momentos centrales de la normal son:

$$E((X-\mu)^1) = 0$$
$$E((X-\mu)^2) = \sigma^2$$
$$E((X-\mu)^3) = 3\sigma^4$$
$$E((X-\mu)^4) = 0$$

   los cuatro primeros momentos centrales de la varianza son:

$$E((s^2-\sigma^2)^1) = 0$$
$$E((s^2-\sigma^2)^2) = E((\sigma^2)^2) - (E(\sigma^2))^2$$
$$E((s^2-\sigma^2)^3) = E((\sigma^2)^3) - 3E(\sigma^2)E((\sigma^2)^2) + 2(E(\sigma^2))^3$$
$$E((s^2-\sigma^2)^4) = E((\sigma^2)^4) - 4E(\sigma^2)E((\sigma^2)^3) + 6(E(\sigma^2))^2(E((\sigma^2)^2)) - 3(E(\sigma^2))^4$$

5. Sea $U_{(1)},\ U_{(1)},\ ...,\ U_{(n)}$ será el estadístico de orden de una muestra de tamaño n de la $U(0,1)$. Calcule $E(U_{(r)}^k)$ para cualquier $1 \leq r \leq n$ y entero $k(>0)$. En particular, demuestre que:

$$E(U_{(r)}) = \frac{r}{n+1} \quad Var(U_{(r)}) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

Demuestre también que el coeficiente de correlación entre $U_{(r)}$ y $U_{(s)}$ para $1 \leq r < s \leq n$ está dado por:

$$\left[\frac{r(n-s+1)}{s(n-r+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Solución:
el $k - esimo$ estadiística de orden de una distribución uniforme es $U_k \sim Beta(k, n+1-k)$

$$siendo \;\; Beta(\alpha,\beta) \;\; con \;\; \mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$se\ demuestra \quad E(U_{(r)}) = \frac{r}{n+1} \quad Var(U_{(r)}) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$para\ E(U_{(r)}^k) = \quad \frac{B(\alpha+n,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha+i}{\alpha+\beta+i}$$

6. Sea $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ n observaciones independientes sobre X. Encuentre la distribución muestral de $\bar{X}$, la media muestral, si

   (a) $X \sim Pois(\lambda)$
   (b) $X \sim Cauchy(0,\ 1)$
   (c) $X \sim \chi^2_{(m)}$

Solución:

(a) $X \sim Pois(\lambda) \quad \rightarrow \quad \varphi_X(t) = exp(\lambda(e^{it}-1))$

$$\rightarrow \quad \varphi_{\bar{X}}(t) = exp(n\lambda(e^{it/n}-1))$$

(b) $X \sim Cauchy(0,\ 1) \quad \rightarrow \quad \varphi_X(t) = e^{it\mu-\theta|t|}$

$$\rightarrow \quad \varphi_{\bar{X}}(t) = e^{-n\left|\frac{t}{n}\right|} \quad \rightarrow \quad \bar{X} \sim Cauchy(0,\ 1)$$

(c) $X \sim \chi^2_{(m)} \quad \rightarrow \quad \varphi_X(t) = (1-2it)^{\frac{-m}{2}}$

$$\rightarrow \quad \varphi_{\bar{X}}(t) = (1-2i\frac{t}{n})^{-m}$$