UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

MOMENTOS EXACTOS DE LOS ESTADÍSTICOS DE ORDEN

Estadística No Paramétrica

Docente: Rita Guzmán López

Last Update: 6th October 2022

Astucuri Lucas.C[1], Carranza Minaya.J[2], Lin Chiu.C[3], Tapia Basilio.M[4]

UNI
FIEECS

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

IMPORTANCIA

Los momentos de una variable aleatoria sirven en cierta medida para saber el comportamiento de la distribución de esta. Esto agregado a la gran utilidad de los estadísticos de orden como aplicación en la inferencia estadística (Por ejemplo cuando queremos hallar la distribución del estadístico máximo, mínimo, de la mediana, etc), hacen que el cálculo de los momentos exactos de los estadísticos de orden sean de nuestro interés.

En Estadística, el estadístico de orden kº es igual al k-ésimo valor más pequeño de una muestra estadística. Los estadísticos de orden son una de las herramientas fundamentales de la estadística no paramétrica y de inferencia .

REQUISITOS

Lo que se necesita para calcular los momentos exactos de los estadisticos de orden.

- La función de probabilidad de los estadísticos de orden
- La fórmula para calcular los momentos

Supongamos que $X_1, X_2, ..., X_n$ forman una muestra proveniente de una población con función distribución continua $F(x)$ y función de densidad $f(x)$. Entonces para ese caso tenemos que la función de probabilidad del estadístico de orden r estará definida de la siguiente manera:

Función de probabilidad de los estadísticos de orden

$$\phi(X_{(r)}) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n-r+1)} \left[F(X_{(r)})\right]^{r-1} \left[1 - F(X_{(r)})\right]^{n-r} f(X_{(r)}) dX_{(r)}$$

EVALUANDO EN U(0,1)

Para el caso de la distribución uniforme estandar

$$E(X_{(r)}^k) = \int_0^1 X_{(r)}^k \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n-r+1)} \left[X_{(r)}\right]^{r-1} \left[1 - X_{(r)}\right]^{n-r} dX_{(r)}$$

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n-r+1)} \int_0^1 \left[X_{(r)}\right]^{r-1} \left[1 - X_{(r)}\right]^{n-r} dX_{(r)}$$

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n-r+1)} \frac{\Gamma(k+r)\Gamma(n-r+1)}{\Gamma(k+r+n-r+1)}$$

$$\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)\Gamma(k+n+1)}$$

RELACIÓN CON LA DISTRIBUCIÓN BETA

Para el caso de la distribución uniforme estandar

el $k - esimo$ estadístico de orden de una distribución uniforme es $U_k \sim Beta(k, n + 1 - k)$

$$siendo \;\; Beta(\alpha, \beta) \;\; con \;\; \mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

$$se \; demuestra \quad E(U_{(r)}) = \frac{r}{n+1} \quad Var(U_{(r)}) = \frac{r(n - r + 1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$para \; E(U^k_{(r)}) = \frac{B(\alpha + n, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha + i}{\alpha + \beta + i}$$

$$E(U^m_{(r)}) = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{k + i}{n + 1 + i}$$

EJEMPLOS

EJEMPLO APLICATIVO 1

Una empresa quiere sacar al mercado su nueva línea de focos ahorradores, pero antes se desea saber la vida útil de dichos focos antes de llevarlo al mercado. Se sabe que la vida útil se distribuye de forma uniforme y que tiene capacidad máxima de duración hasta 1 año. Se desea saber la esperanza y varianza de la máxima capacidad con una muestra de tamaño 15.

SOLUCIÓN: 1

$X \sim U(0,1)$

Como se conoce que la distribucion es Uniforme estandar, para la esperanza y varianza del estadistico de orden se hara uso de:

$$E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}, E(X^2_{(n)}) = \frac{n(r+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow E(X_{(15)}) = \frac{15}{15+1} = 0.9375$$

$$E(X^2_{(15)}) = \frac{15(15+1)}{(15+1)(15+2)} = 0.8823$$

$$\Rightarrow Var(X_n) = E(X^2_{(n)}) - E(X_{(n)})^2 = 0.8823 - (0.9375)^2 = 0.0034$$

Por lo tanto tenemos que la esperanza y varianza del estadistico maximo es 0.9375 y 0.0034.

EJEMPLO APLICATIVO 2

Supongamos que se ha seleccionado una muestra de tamaño 30 de una población uniforme estándar. Hallar la esperanza y la varianza de el estadístico mínimo y máximo de tal muestra. Calcular la esperanza del rango.

SOLUCIÓN: 2

Tenemos que: $X_1, X_2, ...X_{30} \sim U(0;1)$

Como $n = 30$:

$$E(X_{(r)}) = \frac{\Gamma(31)(k+1)}{\Gamma(r)\Gamma(32)} = \frac{r}{31}$$

$$Var(X_{(r)}) = E({X_{(r)}}^2) - E(X_{(r)})^2 = \frac{\Gamma(31)\Gamma(r+2)}{\Gamma(r)\Gamma(33)} - \frac{r^2}{961} = \frac{r(31-r)}{30752}$$

Reemplazando para $r = 1$ y $r = 30$:

$$E(X_{(1)}) = \frac{1}{31}, Var(X_{(1)}) = \frac{30}{30752}, E(X_{(30)}) = \frac{30}{31}, Var(X_{(30)}) = \frac{30}{30752}$$

Finalmente, calculamos la esperanza del rango:

$$E(R) = E(X_{(30)} - X_{(1)}) = E(X_{(30)}) - E(X_{(1)}) = \frac{30}{31} - \frac{1}{31} = \frac{29}{31}$$

EJEMPLO APLICATIVO 3

Se conoce que el peso de carga de cada uno de los camiones de una compañía se distribuye uniformemente. También se sabe que tiene una capacidad máxima de una tonelada. Con el fin de tener un mejor manejo de los pesos que llevan sus unidades de carga se desea averiguar la esperanza y varianza de la mínima y máxima capacidad, seleccionando una muestra de 20 camiones.

SOLUCIÓN: 3

$X \sim U(0,1)$

Como se conoce que la distribucion es Uniforme estandar, para la esperanza y varianza del estadistico de orden se hara uso de:

$$E(X_{(r)}) = \frac{r}{n+1}, E(X_{(r)}^2) = \frac{n(r+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow E(X_{(1)}) = \frac{1}{20+1} = 0.048$$

$$E(X_{(1)}^2) = \frac{20(1+1)}{(20+1)(20+2)} = 0.087$$

$$\Rightarrow Var(X_r) = E(X_{(r)}^2) - E(X_{(r)})^2 = 0.087 - (0.048)^2 = 0.085$$

Por lo tanto tenemos que la esperanza y varianza del estadistico minimo es 0.048 y 0.085.

SOLUCIÓN: 3

$$E(X_{(r)}) = \frac{r}{n+1}, E(X_{(r)}^2) = \frac{n(r+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow E(X_{(20)}) = \frac{20}{20+1} = 0.952$$

$$E(X_{(20)}^2) = \frac{20(20+1)}{(20+1)(20+2)} = 0.909$$

$$\Rightarrow Var(X_r) = E(X_{(r)}^2) - E(X_{(r)})^2 = 0.909 - (0.952)^2 = 0.003$$

Por lo tanto tenemos que la esperanza y varianza del estadistico maximo es 0.952 y 0.003.

EJEMPLO APLICATIVO 4

Una empresa desea saber cuanto es la proporciòn minima esperada de respuestas correctas en una prueba de seguridad industrial a sus trabajadores, sabiendo que se distribuye como U(0,1). Se obtuvo una muestra de 10 trabajadores.

SOLUCIÓN: 4

X: v.a. que indica la proporción de respuestas correctas en la prueba de un trabajador. X U[0,1]. Como la población tiene una distribución uniforme estándar, podemos usar el resultado de la esperanza del ejemplo demostrativo.

$$E(X_{(r)}) = \frac{r}{n+1} \qquad \rightarrow \qquad r = 1, n = 10$$

$$E(X_{(1)}) = \frac{1}{10+1} = 0.091$$

Por lo tanto, la proporción mínima de respuestas correctas esperada será de 0.091. Es decir, como mínimo el 9% de las respuestas en una prueba serán correctas.

REFERENCIAS

AGRADECIMIENTOS