Momentos Exactos de los Estadísticos de Orden

Integrantes : Fernandez Villarreal,Quilca la Rosa, Madueño Carrión
Docente: Rita Guzmán López

Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Ingeniería Estadística

2 de Abril del 2018

Momentos Exactos de los Estadistícos de Orden

Definición:

Estadísticos de Orden

En una muestra aleatoria el valor máximo, mínimo o valor mediano pueden proporcionar información de resumen adicional. Por ejemplo:

1. Las aguas de inundación más altas o la temperatura de invierno más baja registrada durante 50 años podrían ser datos útiles al planificar emergencias futuras.
2. El valor mediano del precio de las casas vendidas durante el mes anterior podría ser útil para estimar el costo de vida. Estos son algunos ejemplos de estadísticos de orden

Definición de Estadísticos de Orden

Estadístico de Orden

Los estadísticos de orden de una muestra aleatoria $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2} \ldots, \mathbf{X_n}$obtenidas de una población con distribución F_X, son los valores de muestra colocados en orden ascendente. Ellos son denotados por$\mathbf{X_{(1)}}, \mathbf{X_{(2)}} \ldots, \mathbf{X_{(n)}}$

Los estadísticos de orden son variables aleatorias que satisfacen $\mathbf{X_{(1)}} \leqslant \ldots \leqslant \mathbf{X_{(n)}}$

En particular:

$$\mathbf{X_{(1)}} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i,$$

$$\mathbf{X_{(2)}} = 2^\circ \min X_i$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{X_{(n)}} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

Recordar:

1. Si $\mathbf{X} \sim \mathbf{U}[0;1] \Rightarrow \mathbf{f_X}(x) = 1$; Si $0 \leqslant x \leqslant 1$
2. Si $\mathbf{X} \sim Beta(\alpha, \beta)$

$$\mathbf{f_X}(x) = \frac{x^{(\alpha-1)}(1-x)^{(\beta-1)}}{B(\alpha,\beta)} \qquad \text{Si} \qquad 0 < x < 1 \; ; \qquad \alpha, \beta > 0$$

$$\boxed{\mathbf{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}$$

Recordar:

3. El momento K-ésimo respecto al origen; de la variable aleatoria $\mathbf{X}$ está dado por (caso continuo):

$$E(\mathbf{X}^K) = \int_{-\infty}^{\infty} x^K f(x)dx$$

4. $\mathbf{X}(r)$: r-ésimo estadístico de orden

$$\mathbf{f}_{\mathbf{X}_{(\mathbf{r})}}(x) = \frac{n![\mathbf{F}(x)]^{r-1}[1-\mathbf{F}(x)]^{n-r}f(x)}{(r-1)!(n-r)!}$$

5. Si $\mathbf{X}\sim\mathbf{U}[0;1]$

$$\Rightarrow \mathbf{X}_{(r)} \sim Beta(r, n-r+1)$$

Desarrollo

- Para facilitar los cálculos trabajaremos que $\mathbf{X} \sim \mathbf{U}[0,1]$ Entonces:

$$\mathbf{f_X}(x) = 1 \qquad ;\ 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} 0 & si \quad 0 < x \\ x & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple que proviene de una población distribuida uniformemente donde $0 \leqslant x \leqslant 1$ Tenemos:

$$\mathbf{X_{(1)}} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$$

$$\mathbf{X_{(2)}} = 2^{\circ} \min\{X_1, \ldots, X_n\}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{X_{(n)}} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

Desarrollo

- Esto es : $0 < \mathbf{X_{(1)}} < \mathbf{X_{(2)}} < \ldots < \mathbf{X_{(n)}} < 1$

- El momento K-ésimo del r-ésimo estadístico de orden

$$E[\mathbf{X_{(r)}}^K] = \int_{-\infty}^{\infty} x^K f_{X(r)}(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^K \frac{n![\mathbf{F}(x)]^{r-1}[1 - \mathbf{F}(x)]^{n-r} f(x)}{(r-1)!(n-r)!}$$

Continuación

- Como $\mathbf{X} \sim \mathbf{U}[0;1]$

$$E[\mathbf{X_{(r)}}^K] = \int_0^1 x^K \frac{n! x^{r-1}(1-x)^{n-r} * 1 dx}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 x^{r+K-1}(1-x)^{n-r} dx$$

$$E[\mathbf{X_{(r)}}^K] = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} B(r+k, n-r+1)$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} * \frac{\Gamma(r+k)\Gamma(n-r+1)}{\Gamma(n+k+1)}$$

Continuación

- En consecuencia

$$E[\mathbf{X_{(r)}}^K] = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} * \frac{(r+k-1)!(n-r)!}{(n+k)!}$$

$$\boxed{E[\mathbf{X_{(r)}}^K] = \frac{n!(r+k-1)!}{(r-1)!(n+k)!}} \; ; \; 1 \leqslant r \leqslant n \; , \; K \in \mathbb{Z}^+$$

$Parak = 1$

$$\Rightarrow E[\mathbf{X_{(r)}}] = \frac{n!r!}{(r-1)!(n+1)!}$$

$$\boxed{E[\mathbf{X_{(r)}}] = \frac{r}{(n+1)}}$$

Continuación

- En consecuencia $k = 2$

$$\Rightarrow E[\mathbf{X}_{(\mathbf{r})}^{\mathbf{2}}] = \frac{n!(r+1)!}{(r-1)!(n+2)!} = \frac{r(r+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\therefore Var(X_{(r)}) = E[\mathbf{X}_{(\mathbf{r})}^{\mathbf{2}}] - (E[\mathbf{X}_{(\mathbf{r})}])^2$$

$$Var(X_{(r)}) = \frac{r(r+1)}{(n+1)(n+2)} - (\frac{r}{n+1})^2 = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$\boxed{Var(\mathbf{X}_{(\mathbf{r})}) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}}$$

De manera general

- De forma general para cualquier distribución se puede obtener la media y varianza

$$\boxed{E[\mathbf{X_{(r)}}] = \mathbf{F_X}^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right)}$$

$$\boxed{Var(\mathbf{X_{(r)}}) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}\left[f_x(E[\mathbf{X_{(r)}}])\right]^{-2}}$$

Ejercicio 1

1.1 Sea una variable aleatoria **X** que se distribuye uniformemente en el intervalo $[0;1]$.Calcular la esperanza y varianza del $X_{(5)}$ de una muestra aleatoria de tamaño 10.

1.2 Suponga que el tiempo máximo que se puede reservar una sala de conferencias grande de cierta empresa son 6 horas. Con mucha frecuencia tienen conferencias extensas y breves. De hecho, se puede suponer que la duración **X** de una conferencia tiene una distribución uniforme en el intervalo $[0,6]$. Encontrar la esperanza y varianza del $X_{(5)}$ en una muestra aleatoria de tamaño 10.

Ejercicio 2

Se ha comprobado el tiempo de vida de cierto tipo de marcapasos sigue una distribución exponencial con media de 16 años .Encontrar la esperanza y la varianza del $\mathbf{X_{(6)}}$ de una muestra aleatoria de tamaño 14 .

Ejercicio 3

Las barras de pan de centeno que cierta panadería distribuye a las tiendas locales tienen una longitud promedio de 30cm y una desviación estándar de 2 cm. Si se supone que las longitudes están distribuidas normalmente. Encontrar la esperanza y varianza del $X_{(4)}$ en una muestra de 20 barras de pan.

Sol Ejercicio 1.1

- $\mathbf{X} \sim \mathbf{U}[0;1]$
- Datos: $n = 10, r = 5$ ¿$E(X_{(5)}), Var(X_{(5)})$?
- Como vemos que es una uniforme estándar solamente reemplazaremos los valores en las formulas obtenidas anteriormente:

$$\boxed{E[\mathbf{X}_{(\mathbf{r})}] = \frac{r}{(n+1)}} \qquad \boxed{Var(\mathbf{X}_{(\mathbf{r})}) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}}$$

- Reemplazando nos queda:

$$\Rightarrow E[\mathbf{X}_{(\mathbf{5})}] = \frac{5}{(11)} = 0,\widehat{45}$$

$$\Rightarrow Var(\mathbf{X}_{(\mathbf{5})}) = \frac{5(6)}{(11)^2(12)} = 0.02066$$

Sol Ejercicio 1.2

- **X**:Tiempo máximo de reservas $\quad \mathbf{X}\sim\mathbf{U}[0;6]$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{6} & si \quad 0 \leq x \leq 6 \\ 0 & si \quad c.c \end{cases} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{x}{6} & si \quad 0 \leq x < 6 \\ 1 & si \quad x \geq 6 \end{cases}$$

- Hallamos $\mathbf{F}_{(\mathbf{x})}^{-1}$

$$F(x) = y$$

$$F(x) = \frac{x}{6} \Rightarrow 6y = x \Rightarrow \boxed{\mathbf{F}_{(\mathbf{x})}{}^{-1} = 6x}$$

Sol Ejercicio 1.2

- Datos: $n = 10, r = 5$ ¿$E(X_{(5)}), Var(X_{(5)})$?
- Dado que no es una uniforme estandar usaremos la formula generalizada : $\boxed{E[\mathbf{X_{(r)}}] = \mathbf{F_X}^{-1}(\frac{r}{n+1})}$

$$\boxed{Var(\mathbf{X_{(r)}}) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}\{f_X[\mathbf{F_X}^{-1}(\frac{r}{n+1})]\}^{-2}}$$

- Reemplazando nos queda:

$$\Rightarrow E[\mathbf{X_{(5)}}] = \mathbf{F_X}^{-1}(\frac{5}{11}) = \frac{30}{11} = 2.\widehat{72}$$

$$\Rightarrow Var(\mathbf{X_{(5)}}) = \frac{5(6)}{(11)^2(12)}\{f_X[\mathbf{F_X}^{-1}(\frac{5}{11})]\}^{-2}$$

$$= 0.007 * (f_X(2.\widehat{72}))^{-2} = 0.02 * (\frac{1}{6})^{-2} = 0.72$$

Sol Ejercicio 2

- $f(x) = \lambda\epsilon^{-\lambda x}$ $\quad ;F(X) = 1 - \epsilon^{-\lambda x}$ $\quad ;\ F_{(X)}{}^{-1} = \frac{-\ln(1-x)}{\lambda}$
- Sabemos que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ Entonces se deduce que $\lambda = \frac{1}{16} \Rightarrow$ $\mathbf{X}\sim\mathbf{Exp}(\lambda = \frac{1}{16})$
- Usaremos la formula generalizada en nuestro caso:

$$\boxed{E[\mathbf{X_{(r)}}] = \mathbf{F_X}^{-\mathbf{1}}(\tfrac{r}{n+1})}$$

$$\boxed{Var(\mathbf{X_{(r)}}) = \tfrac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}\{f_X[\mathbf{F_X}^{-1}(\tfrac{r}{n+1})]\}^{-2}}$$

- Reemplazando nos queda:

$$\Rightarrow E[\mathbf{X_{(6)}}] = \mathbf{F_X}^{-\mathbf{1}}(\frac{6}{15}) = \mathbf{F_X}^{-\mathbf{1}}(0.4) = 8.1732$$

$$\Rightarrow Var(\mathbf{X_{(6)}}) = \frac{6(9)}{(15)^2(16)}\{f_X[\mathbf{F_X}^{-1}(\frac{6}{15})]\}^{-2}$$

$$= 0.015 * (f_x(8.1732))^{-2} = 0.15 * (0.0375)^{-2} = 10.66$$

Sol Ejercicio 3

- $\mathbf{X}$:Barras de pan $\quad \mathbf{X} \sim \mathbf{N}(\mu = 30cm, \sigma = 2cm)$
- Datos: $n = 20, r = 4$ ¿$E(X_{(4)}), Var(X_{(4)})$?
- Como vemos que no es una normal estandar , usaremos la formula generalizada en nuestro caso: $\boxed{E[\mathbf{X_{(r)}}] = \mathbf{F_X}^{-1}(\frac{r}{n+1})}$

$$\boxed{Var(\mathbf{X_{(r)}}) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}\{f_X[\mathbf{F_X}^{-1}(\frac{r}{n+1})]\}^{-2}}$$

- Reemplazando nos queda:

$$\Rightarrow E[\mathbf{X_{(4)}}] = \mathbf{F_X}^{-1}(\frac{4}{21}) = 28.248$$

$$\Rightarrow Var(\mathbf{X_{(4)}}) = \frac{4(17)}{(21)^2(22)}\{f_X[\mathbf{F_X}^{-1}(\frac{4}{21})]\}^{-2}$$

$$= 0.007 * (0.13589)^{-2} = 0.3795$$