

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
Facultad de Ingeniería Económica Estadística y
Ciencias Sociales



TESIS

**“IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO ETAS PARA LA
SIMULACIÓN DE RÉPLICAS EN LA PLACA DE NAZCA”**

**PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE INGENIERO
ESTADÍSTICO**

ELABORADO POR:

LIN CHIU CHEN YANG

ASESOR:

GRADOS PAREDES DANIEL

LIMA - PERÚ

2025

© 2025, Universidad Nacional de Ingeniería. Todos los derechos reservados
El autor autoriza reproducir la tesis en su totalidad o en parte, con fines estrictamente académicos.

Dedicatoria

A mi familia, por su apoyo incondicional y amor constante.

A mis amigos, por su compañía y motivación.

A mis docentes, por su guía y conocimientos compartidos.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a mi familia por su apoyo incondicional a lo largo de este proyecto. A mis profesores y tutores, por su orientación y paciencia. También quiero expresar mi gratitud a mis compañeros y amigos, quienes con sus ideas y ánimos hicieron posible este trabajo. Finalmente, un reconocimiento especial a todas las personas que, de una u otra forma, contribuyeron a la realización de este informe.

ÍNDICE

RESUMEN	VI
ABSTRACT	VII
PRÓLOGO	VIII
LISTA DE TABLAS	IX
LISTA DE FIGURAS	X
LISTA DE SÍMBOLOS Y TÉRMINOS	XI
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1 GENERALIDADES	1
1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	3
1.3 OBJETIVOS DEL ESTUDIO	4
1.3.1 Objetivo General	4
1.3.2 Objetivos Específicos	4
1.4 HIPÓTESIS DEL ESTUDIO	4
1.4.1 Hipótesis General	4
1.4.2 Hipótesis Específicas	5
1.5 METODOLOGÍA	6
CAPÍTULO II: FUNDAMENTO TEÓRICO Y CONCEPTUAL	8
2.1 PROCESOS PUNTUALES	8
2.1.1 Definición	8
2.1.2 La Intensidad del Proceso	9
2.1.3 Propiedades Fundamentales del Proceso de Poisson	10
2.1.4 Ejemplos Ilustrativos	11
2.1.5 Importancia y Aplicaciones	12
2.1.6 Extensiones Naturales	12
2.2 PROCESO DE HAWKES	13
2.2.1 Definición	13
2.2.2 Intensidad esperada	15
2.2.3 Estimación de parámetros	16
2.2.4 Aplicaciones del proceso de Hawkes	17
2.2.5 Ventajas y limitaciones	18

2.3 DISTRIBUCIÓN DE RÉPLICAS	19
2.3.1 Distribución de Rélicas	19
2.4 MODELO ESPACIO TEMPORAL ETAS	19
2.4.1 Descripción de los componentes del modelo	20
2.4.2 Interpretación física del modelo ETAS	21
2.4.3 Condición de estabilidad	21
2.4.4 Variantes del modelo ETAS	22
2.4.5 Simulación del modelo	22
2.4.6 Aplicaciones en sismología moderna	23
2.5 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS	23
2.5.1 Métodos de Estimación	23
2.6 SELECCIÓN DEL MODELO	26
2.6.1 Criterios de selección	26
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA	29
3.1 PRIMERA SECCIÓN	29
3.1.1 Comprensión de Datos	29
3.2 SEGUNDA SECCIÓN	31
3.2.1 Preparación de Datos	31
3.3 TERCERA SECCIÓN	33
3.3.1 Ajuste del Modelo	33
CAPÍTULO IV: RESULTADOS	34
4.1 RESULTADO 1	34
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	35

RESUMEN

Este estudio tiene como objetivo desarrollar y aplicar el modelo de secuencia de réplicas de tipo epidémico (ETAS) para simular y analizar las secuencias de réplicas originadas entre la placa de Nazca y la Sudamericana, permitiendo así una evaluación más precisa del riesgo y una mejor planificación de la respuesta a emergencias en la región de Perú. La investigación comienza con una revisión teórica y metodológica de los modelos en sismología, centrándose en el modelo ETAS, su formulación matemática y los supuestos subyacentes. Se desarrolla una implementación computacional del modelo ETAS utilizando la técnica de máxima verosimilitud para la estimación de parámetros, la cual se valida mediante simulaciones y comparación con datos históricos de secuencias de réplicas. Luego, el modelo se aplica a un conjunto de datos reales de una región específica obtenidos del Instituto Geofísico del Perú (IGP), con un análisis de su precisión para predecir el momento y la ubicación de las réplicas, obteniendo así un mapa de calor de zonas con más riesgo sísmico. Finalmente, la capacidad predictiva del modelo sintético generado se evalúa comparando sus resultados con los datos reales, identificando las fortalezas y limitaciones del modelo ETAS en diferentes escenarios de actividad sísmica.

ABSTRACT

Este estudio tiene como objetivo desarrollar y aplicar el modelo de secuencia de réplicas de tipo epidémico (ETAS) para simular y analizar las secuencias de réplicas originadas entre la placa de Nazca y la Sudamericana, permitiendo así una evaluación más precisa del riesgo y una mejor planificación de la respuesta a emergencias en la región de Perú. La investigación comienza con una revisión teórica y metodológica de los modelos en sismología, centrándose en el modelo ETAS, su formulación matemática y los supuestos subyacentes. Se desarrolla una implementación computacional del modelo ETAS utilizando la técnica de máxima verosimilitud para la estimación de parámetros, la cual se valida mediante simulaciones y comparación con datos históricos de secuencias de réplicas. Luego, el modelo se aplica a un conjunto de datos reales de una región específica obtenidos del Instituto Geofísico del Perú (IGP), con un análisis de su precisión para predecir el momento y la ubicación de las réplicas, obteniendo así un mapa de calor de zonas con más riesgo sísmico. Finalmente, la capacidad predictiva del modelo sintético generado se evalúa comparando sus resultados con los datos reales, identificando las fortalezas y limitaciones del modelo ETAS en diferentes escenarios de actividad sísmica.

PRÓLOGO

El presente trabajo de tesis se desarrolla con el propósito de contribuir al entendimiento y modelamiento de los fenómenos sísmicos en el territorio peruano, una región caracterizada por su alta actividad tectónica debido a la interacción entre las placas de Nazca y Sudamericana. Motivado por la necesidad de mejorar las herramientas de análisis y predicción de réplicas sísmicas, se plantea la aplicación del modelo de secuencia de réplicas de tipo epidémico (ETAS), un enfoque estadístico basado en procesos de puntos que permite representar la naturaleza autoexcitada de los eventos sísmicos.

Durante el desarrollo de la investigación se llevó a cabo una revisión teórica sobre los fundamentos de los modelos sismológicos y de los procesos de Hawkes, así como una implementación computacional del modelo ETAS mediante el método de máxima verosimilitud para la estimación de parámetros. Este trabajo implicó la validación del modelo mediante simulaciones y su posterior aplicación a datos reales proporcionados por el Instituto Geofísico del Perú (IGP), con el fin de evaluar su capacidad predictiva y su utilidad en la identificación de zonas de mayor riesgo sísmico.

La realización de esta tesis representó un proceso de aprendizaje integral, en el que se combinaron conocimientos de estadística, programación y geofísica. A su vez, permitió valorar la importancia del modelamiento estadístico como herramienta fundamental para la gestión del riesgo y la prevención de desastres naturales.

Finalmente, se espera que los resultados obtenidos sirvan como referencia para futuras investigaciones orientadas al perfeccionamiento de modelos predictivos en sismología, contribuyendo al fortalecimiento de las capacidades científicas y técnicas en la mitigación del riesgo sísmico en el Perú.

LISTA DE TABLAS

Tabla N° 3.1	Ejemplo de un catálogo de terremotos	29
Tabla N° 4.1	Resutados del ajuste de parámetros	34

LISTA DE FIGURAS

Figura N° 2.1	Observamos la distribución de la función de intensidad $\Lambda(S)$ (derecha) del proceso puntual. Gráfico generado mediante spatstat de R	13
Figura N° 2.2	Simulación del proceso de Hawkes con distintos valores de parámetros λ , α y β en R	16
Figura N° 3.1	Mapa Sísmico del Perú 1960 - 2023 CENSIS (2023).	30
Figura N° 3.2	Diagrama de dispersión de magnitudes de eventos con el tiempo.	31
Figura N° 3.3	Gráfico de epicentros de terremotos en un mapa base coloreado por profundidad y con tamaño proporcional a la magnitud. Los colores cálidos indican profundidades bajas y los colores fríos eventos más profundos. Se puede encontrar el código para producir este gráfico en los anexos.	32
Figura N° 3.4	Example figure that covers the width of the page obtained from PGFPlots <i>PGFPlots - A LaTeX package to create plots.</i> (s.f.).	33

LISTA DE SÍMBOLOS Y TÉRMINOS**SÍMBOLOS**

H_t	: historia sísmica hasta el tiempo t
μ	: representa la tasa de sismicidad de fondo
$S(M)$: función de magnitud G-Representado por la ley exponencial de Gutenberg-Richter
$k(M) = A\epsilon_a$: productividad directa de Utsu
$g(t, M)$: se define como la función de excitación
B_M	: Factor de reducción asociado al amortiguamiento efectivo β_M
c_a	: Amortiguamiento del AMS

GLOSARIO DE TÉRMINOS

- Aftershock : Un terremoto más pequeño que sigue a un terremoto más grande.
- Catálogo : Es una base de datos que contiene todos los parámetros que caracterizan a un sismo
- ETAS : Modelo de secuencia de réplicas de tipo epidémico
- Hawkes : Un tipo de proceso puntual autoexcitado

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN

1.1 GENERALIDADES

Los terremotos representan uno de los fenómenos naturales más devastadores y difíciles de predecir en el mundo. A lo largo de la historia, estos eventos han causado pérdidas humanas y materiales significativas, generando la necesidad imperante de desarrollar métodos efectivos para su predicción y mitigación de riesgos. La predicción de terremotos es una rama de la ciencia de la sismología que estudia los terremotos, disciplina que llegó a ser científica a partir de la segunda mitad del siglo XIX. Es cuando el deseo de encontrar herramientas que permitan estudiar el fenómeno natural llevó en 1880 a John Milne, famoso ingeniero británico, a inventar el sismógrafo (Kossobokov y Shebalin (2003)). Se han planteado distintos métodos de predicción desde anomalías en el campo electromagnético de la tierra o perturbaciones de la ionosfera (Freund et al. (2009)) hasta el comportamiento animal al sentir las ondas P momentos previos al fenómeno (Woith, Petersen, Hainzl, y Dahm (2018)) pero no es hasta la década de los setenta que empezaron los estudios estadísticos representándolos como procesos estocásticos asimismo esta disciplina se ha extendido no solo en la geofísica sino también a través de múltiples campos de la ciencia como la sismología fotónica donde últimas investigaciones sugieren el uso de tecnologías emergentes a base de fibra óptica para su estudio (Lindsey y Martin (2021)).

¿Qué es la predicción de un terremoto? Según el Diccionario Oxford, las palabras predicción y pronóstico son sinónimos, mientras que para la sismología son términos que marcan diferencia. El pronóstico de terremotos se refiere a estimaciones a largo plazo durante un período de tiempo prolongado, que puede ir desde meses hasta décadas, en cambio, la predicción de terremotos generalmente se define como la especificación del tiempo, lugar y magnitud de un futuro terremoto dentro de límites establecidos a corto plazo pueden ocurrir en días, semanas o meses (Ismail-Zadeh (2013)); por su naturaleza estocástica la capacidad de predecir con precisión queda corta por no decir imposible, por eso ahora en adelante la investigación se centra netamente en el pronóstico de eventos sísmicos más no predicción.

Se han planteado varios métodos de pronóstico (Ogata (1988)) propone estudiar los eventos de forma epidemiológica planteando así el modelo ETAS de carácter temporal mas tarde en conjunto con (Zhuang, Werner, Zhou, Harte, y Hainzl (2011)) se desarrolló el modelo de tipo espacio-temporal que se detallará en las siguientes secciones del documento.

El Perú se encuentra ubicado en una región sísmicamente activa exactamente el cinturón de fuego del pacífico debido a la convergencia de dos placas tectónicas

entre la Placa de Nazca y la Sudamericana. Este proceso llamado subducción, donde la Placa de Nazca se hunde debajo de la Sudamericana acumulando tensiones, es responsable de la generación de terremotos frecuentes y actividad volcánica en las costas del Pacífico incluyendo Colombia, Ecuador, Perú, Bolivia y Chile. En el artículo de (Villegas-Lanza et al. (2016)) se detallan los grandes terremotos ocurridos a lo largo de la zona de subducción peruana en los segmentos centro y sur, como Lima-Callao de 1746 ($8.8M_W$) y el terremoto de Pisco de 2007 ($8.0M_W$) respectivamente.

Al estar en una área con alta frecuencia sísmica, lo que genera un peligro continuo de desastres naturales que impactan notablemente a su población, infraestructura y economía. De acuerdo con información del Instituto Nacional de Defensa Civil, más del 70 % de los peruanos reside en regiones sumamente susceptibles a sismos. En estas circunstancias, la creación de herramientas científicas que permitan anticipar estos eventos se establece como una prioridad para la nación.

El pronóstico de sismos, a diferencia de la predicción determinista, se fundamenta en modelos estadísticos que analizan la probabilidad de que ocurran eventos futuros basándose en patrones históricos y en estructuras geológicas conocidas. Este enfoque capacita a los responsables de la toma de decisiones para desarrollar planes de contingencia, fortalecer infraestructuras vitales y elaborar políticas de desarrollo urbano más resistentes. La implementación del modelo ETAS en Perú brinda la oportunidad de crear mapas de riesgo que sean dinámicos y adaptables, constituyendo un progreso notable en comparación con los métodos convencionales.

Asimismo, la adopción de modelos como ETAS fomenta la integración de áreas como estadística, informática y geofísica, promoviendo un enfoque interdisciplinario en la administración del riesgo de desastres. Esto ayuda a mejorar las habilidades técnicas en entidades como el IGP, el CENEPRED y el INDECI, realzando la importancia de la ciencia en el desarrollo de políticas públicas.

Previo a la implementación del modelo ETAS, se han propuesto distintos métodos para representar la aparición de seísmos y sus réplicas. Entre estos métodos se encuentran los modelos de Poisson homogéneo, que son populares por su sencillez matemática, aunque son deficientes al no poder reflejar la agrupación temporal de los eventos sísmicos. Luego se presentaron modelos de renovación y modelos de tiempo variable como el proceso de Cox, que añaden un elemento aleatorio a la tasa de ocurrencia, pero que todavía tienen limitaciones al no incluir adecuadamente la interacción entre diferentes eventos.

Más recientemente, se han analizado modelos que utilizan redes neuronales profundas, aprendizaje supervisado e enfoques híbridos con metodologías bayesianas.

nas. A pesar de que estas técnicas tienen el potencial de identificar patrones complejos, su implementación sigue siendo restringida por la falta de datos etiquetados y la dificultad de interpretar los resultados. Por otro lado, el modelo ETAS se muestra como un equilibrio entre complejidad estadística y aplicabilidad práctica, proporcionando una representación que es comprensible y ha sido validada empíricamente respecto a la actividad sísmica.

Por lo tanto, esta investigación tiene como objetivo no solo aplicar el modelo ETAS en el ámbito nacional, sino también enriquecer el debate metodológico sobre la viabilidad de los modelos estocásticos en regiones geológicas específicas, tales como la Placa de Nazca.

1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La comprensión de terremotos sigue siendo un desafío primario de la sismología; estas traen importantes implicaciones sociales y económicas. A pesar de décadas de investigación, aún no es posible determinar con exactitud cuándo, dónde y con qué intensidad ocurrirá un sismo. Esto se debe a la naturaleza compleja de los fenómenos sísmicos y a la interacción de múltiples factores geológicos, físicos u otros que lo preceden; lo cual se realiza el StatSei (The International Statistical Seismology conference) evento bienal que reúne a investigadores y expertos en el campo de la sismología estadística, esta investigación se apoya en varios de los artículos propuestos donde se abordará principalmente la posibilidad de su pronóstico mediante modelos estadísticos que simulan la sismicidad, acercándonos a la posición de (Geller (1997)) "¿Es posible la predicción?".

Posterior al evento sísmico surgen las réplicas, también conocidas como aftershocks, ocurren después de un terremoto principal y pueden tener una magnitud menor, pero aún representan un riesgo significativo para la población y las infraestructuras afectadas (Darzi, Halldorsson, Hrafnkelsson, y Vogfjörð (2022)) las cuales pueden permanecer en pie frente al terremoto principal pero la llegada de oleadas de réplicas consecutivas sobrepasan el límite de estres de la infraestructura haciendo que colapse sin previo aviso es por eso que el estudio de los modelos predictivos es indispensable para la sociedad, y su presición conyerva al dilema de ¿alarmar? ¿O no alamar? Advertir de un terremoto que no ocurre también conlleva un costo: no solo el costo civil y económico. Entidades públicas como el IGP realizan investigaciones científicas con finalidad de la prevención, reducción de riesgos de desastres orientando al Estado promover políticas para proteger la vida de la población. Por otro lado en (Mignan y Woessner (2012)) y (Gulia, Wiemer, y Wyss (2012)) ambos autores proponen la importancia de la completitud y consistencia de los datos para el análisis de sismicidad pero factores no controlables como la calibración instrumental, el ruido externo disminuyen la calidad de estos por eso la realización de

simulaciones pueden ayudar a mejorarlo; también, en la revisión de literatura no se encontró la implementación del modelo en la región de la placa de Nazca por lo tanto esta investigación intenta replicar un modelo descriptivo propuesto por (Ogata (2017)) para comparar la sismicidad de la región y los estudios anteriores.

1.3 OBJETIVOS DEL ESTUDIO

1.3.1 Objetivo General

Desarrollar y replicar el modelo ETAS (Epidemic-Type Aftershock Sequence) para simular réplicas sísmicas seleccionando como región la costa del Pacífico.

1.3.2 Objetivos Específicos

- **Revisión Teórica y Metodológica:** Realizar una revisión exhaustiva de la literatura sobre modelos temporales y de procesos espacio-puntuales aplicados a sismología, con énfasis en el modelo ETAS. Describir los fundamentos teóricos del modelo ETAS y sus variantes, incluyendo la formulación matemática y los supuestos subyacentes.
- **Implementación del Modelo ETAS:** Desarrollar una implementación computacional del modelo ETAS utilizando técnicas paramétricas para la estimación de parámetros. Validar la implementación mediante simulaciones y comparación con datos históricos de secuencias de réplicas.
- **Aplicación a Datos Reales:** Aplicar el modelo ETAS a un conjunto de datos reales de secuencias de réplicas sísmicas de una región específica. Analizar la precisión del modelo en la predicción de la ocurrencia de réplicas en términos de tiempo y ubicación.
- **Evaluación y Comparación:** Evaluar la capacidad predictiva del modelo ETAS comparando sus resultados con otros modelos existentes. Identificar las fortalezas y limitaciones del modelo ETAS en diferentes escenarios de actividad sísmica.

1.4 HIPÓTESIS DEL ESTUDIO

1.4.1 Hipótesis General

El presente estudio plantea que la implementación del modelo ETAS (Epidemic Type Aftershock Sequence) permitirá describir y caracterizar adecuadamente la dinámica de generación de réplicas sísmicas en la zona de subducción asociada a la Placa de Nazca. Dado que esta región presenta un comportamiento sísmico altamente activo debido al proceso de convergencia entre la Placa de Nazca y la

Placa Sudamericana, se espera que el modelo capture la estructura temporal de la secuencia sísmica observada, particularmente el fenómeno de autoexcitación que caracteriza a los procesos de Hawkes y que se refleja en la ocurrencia de réplicas posteriores a un evento principal.

La hipótesis general sostiene que, aun utilizando una única base de datos con información histórica disponible para la región, el modelo ETAS será capaz de reproducir patrones representativos de la sismicidad local. En este sentido, se busca verificar si la parametrización del modelo obtenida mediante técnicas de estimación maximiza la coherencia entre las simulaciones generadas y los datos reales, evaluando así la pertinencia del ETAS como herramienta para el análisis de secuencias sísmicas en contextos geodinámicos similares.

1.4.2 Hipótesis Específicas

- **Hipótesis Específica 1.** La estimación del modelo ETAS basada en los registros sísmicos de la región permitirá obtener parámetros consistentes y físicamente interpretables para la zona de subducción de la Placa de Nazca. En particular, se espera que los parámetros asociados a la productividad sísmica, la tasa base y la función de decaimiento temporal reflejen adecuadamente la capacidad de los eventos principales de generar réplicas, así como la dinámica local del proceso de liberación de energía sísmica. Esta hipótesis implica que la calidad y completitud del catálogo utilizado son suficientes para capturar la estructura estadística subyacente al proceso de generación de réplicas.
- **Hipótesis Específica 2.** Las simulaciones producidas mediante el modelo ETAS mostrarán patrones temporales similares a los observados en la base de datos real, tanto en términos de la distribución de tiempos entre eventos como del número relativo de réplicas generadas por cada sismo de mayor magnitud. Se espera que las secuencias simuladas reproduzcan la característica fundamental de los procesos de tipo Hawkes: un incremento inicial en la actividad después de un evento desencadenante, seguido de un decaimiento progresivo. Esta similitud entre simulación y datos será un indicador de que el modelo capta apropiadamente el mecanismo de autoexcitación de la región.
- **Hipótesis Específica 3.** La aplicación del modelo ETAS permitirá cuantificar el nivel de autoexcitación de la actividad sísmica en la zona, ofreciendo una medida objetiva del grado en que los sismos principales influyen en la ocurrencia de eventos posteriores. Esta cuantificación, expresada a través del parámetro de productividad o la tasa de eventos secundarios, permitirá

evaluar si la dinámica sísmica local responde a patrones similares a los observados en otras regiones tectónicamente activas. Asimismo, se plantea que el modelo constituirá una herramienta útil para generar escenarios hipotéticos de sismicidad futura, incluso cuando solo se dispone de un conjunto limitado de datos históricos.

1.5 METODOLOGÍA

La metodología empleada en el presente estudio se estructura en una serie de etapas secuenciales orientadas a la preparación de los datos, la estimación del modelo ETAS, la validación de los parámetros obtenidos y la generación de simulaciones para evaluar la coherencia del modelo frente al comportamiento sísmico observado en la región de estudio. A continuación, se describen los pasos seguidos:

- **Paso 1. Recolección y depuración del catálogo sísmico.** Se recopiló un catálogo sísmico correspondiente a la zona de subducción de la Placa de Nazca, el cual incluye información temporal, espacial y de magnitud de los eventos registrados. El proceso de depuración consistió en verificar la consistencia de los datos, eliminar registros duplicados, evaluar la completitud temporal y magnitud mínima confiable del catálogo, así como seleccionar el intervalo temporal adecuado para la modelación. Esta etapa es fundamental para asegurar que la base de datos refleje correctamente la dinámica sísmica local y que los parámetros estimados no se vean afectados por sesgos en la información.
- **Paso 2. Análisis exploratorio de la sismicidad.** Se realizó un análisis estadístico y gráfico de la distribución temporal y espacial de los eventos sísmicos, así como de las magnitudes observadas. Este análisis incluyó la inspección de posibles secuencias de réplicas, la identificación de eventos principales, el cálculo preliminar de tasas de ocurrencia y la evaluación de la ley de Gutenberg-Richter en la región. Estos resultados preliminares permitieron establecer si la estructura de los datos era compatible con el uso del modelo ETAS y proporcionaron una primera aproximación al comportamiento de la sismicidad local.
- **Paso 3. Estimación de los parámetros del modelo ETAS.** Se implementó el modelo ETAS utilizando métodos de máxima verosimilitud para estimar los parámetros que describen la tasa base de sismicidad, la productividad sísmica, la función de decaimiento temporal y los componentes espaciales del proceso. Esta etapa requirió la configuración de la intensidad condicional del proceso y la ejecución de algoritmos iterativos de optimización numérica. La estimación de parámetros se efectuó empleando software especializado en

modelación de procesos puntuales autoexcitantes, verificando la convergencia de los algoritmos y la estabilidad de los resultados.

- **Paso 4. Validación del modelo y generación de simulaciones.** Una vez estimados los parámetros, se procedió a evaluar el ajuste del modelo ETAS mediante técnicas de diagnóstico tales como el análisis de residuales transformados, la verificación de la tasa de ocurrencia esperada y la comparación entre los patrones temporales observados en los datos reales y los generados por simulación. Se realizaron simulaciones estocásticas del proceso ETAS parametrizado con el fin de analizar si las secuencias simuladas reproducen los patrones característicos de la sismicidad local, especialmente la ocurrencia de réplicas y el decaimiento temporal posterior a los eventos principales. Esta etapa permitió determinar la capacidad predictiva del modelo y su coherencia frente al fenómeno estudiado.
- **Paso 5. Interpretación de resultados y elaboración de conclusiones.** Finalmente, se interpretaron los parámetros estimados y el comportamiento de las simulaciones generadas, contextualizando los hallazgos en el marco geodinámico de la región de subducción de la Placa de Nazca. Se discutieron las implicancias del modelo ETAS para la comprensión de las secuencias sísmicas y se analizaron las limitaciones inherentes al uso de un único catálogo histórico. Con base en estas consideraciones, se formularon las conclusiones finales del estudio y se identificaron posibles líneas de investigación futura.

CAPÍTULO II: FUNDAMENTO TEÓRICO Y CONCEPTUAL

La pregunta es como se podrá desarrollar un modelo capaz de simular fenómenos tan caóticos como los sismos, gracias a su naturaleza estocástica se puede empezar planteando desde un modelo simple como poisson o de renovación pasando a modelos agrupados , a base de la fórmula empírica de Omori-Utsu nos conduce al modelo ETAS temporal propuesto por (Ogata (1988)) sin considerar el espacio todos estos son detallados por (Zhuang, Werner, Zhou, Hainzl, y Harte (2012)). A base de este se plantean variantes incluyendo el espacio transformándolos en modelos espacio-temporales todos detallados en (Zhuang et al. (2011)) se detallará la forma de ellas en la siguiente sección.

Este modelo ha sido ampliamente aplicado en varios estudios como: análisis de sismicidad sur de California donde (Console, Jackson, y Kagan (2010)) usa el modelo para desagrupar réplicas; (Omi, Ogata, Hirata, y Aihara (2014)) plantea la estimación de parámetros incluso con la incompletitud de datos; (Lombardi y Marzocchi (2010)) describe la sismicidad en la región de Italia; (Darzi et al. (2022)) propone la estimación de parámetros de forma bayesiana analizando la sismicidad de Olafus Islandia ; (Iafmejani y Shabani (2022)) aplica en la región de Kermanshah Irán; (Nishikawa y Nishimura (2023)) incluyó al modelo el efecto de eventos de deslizamiento de la placa SSE; (Mizrahi, Nandan, y Wiemer (2021)) propone método para estimar parámetros frente a la incompletitud de datos.

2.1 PROCESOS PUNTUALES

2.1.1 Definición

Un *proceso puntual* es un modelo matemático diseñado para describir la ocurrencia aleatoria de eventos en un espacio S , el cual puede representar tiempo, espacio, o un dominio conjunto espacio–tiempo. Siguiendo a D. J. Daley (2003), un proceso puntual puede considerarse como una variable aleatoria cuya realización es un conjunto localmente finito de puntos. Es decir, para cualquier conjunto acotado $B \subset S$, el número de puntos contenidos en B es casi seguramente finito.

Cuando el espacio $S = \mathbb{R}$, los puntos representan tiempos de ocurrencia. En este caso, el proceso es descrito mediante un *proceso de conteo*

$$N(t) = \#\{\text{eventos con tiempo } \leq t\},$$

donde $N(t)$ es una función creciente, entera y con incrementos unitarios. Cuando $S = \mathbb{R}^2$ o \mathbb{R}^3 , los puntos representan localizaciones espaciales y el proceso es un modelo de patrones naturales o artificiales en el espacio.

Formalmente, un proceso puntual puede describirse mediante una medida aleatoria

$$N(A) : \mathcal{B}(S) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\},$$

donde $N(A)$ representa el número de puntos en el conjunto medible A . Este enfoque es fundamental para el desarrollo riguroso de la teoría descrita por Karr (1991).

2.1.2 La Intensidad del Proceso

La *intensidad* es el concepto central que controla la estructura del proceso puntual.

(a) Intensidad temporal

Para un proceso puntual en el tiempo, la intensidad instantánea se define como:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[N(t + \Delta t) - N(t)]}{\Delta t}.$$

Esta función determina la frecuencia esperada de eventos por unidad de tiempo. Si $\lambda(t) = \lambda$ es constante, el proceso es *homogéneo*; si varía con el tiempo, se denomina *no homogéneo*.

Una herramienta fundamental asociada es la **función compensadora**:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du,$$

que permite transformar el proceso en una estructura con incrementos Poisson estándar, propiedad crucial en inferencia.

(b) Intensidad espacial

Para un proceso puntual definido en un espacio $S \subset \mathbb{R}^d$, la intensidad espacial se define como:

$$\lambda(s) = \lim_{|A| \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[N(A)]}{|A|},$$

donde A es una región pequeña que contiene a s .

Existen dos grandes clases:

- **Intensidad determinista** — típica del proceso de Poisson.
- **Intensidad aleatoria** — característica de los procesos Cox (?), útiles cuando el riesgo subyacente es incierto.

La intensidad espacial permite estudiar fenómenos heterogéneos, donde la proba-

bilidad de ocurrencia depende de la localización.

(c) Procesos con covariables

En aplicaciones prácticas, es común modelar la intensidad como función de covariables:

$$\lambda(s) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1(s) + \cdots + \beta_p x_p(s)),$$

estructura ampliamente utilizada en epidemiología, criminología y geociencias.

2.1.3 Propiedades Fundamentales del Proceso de Poisson

El proceso de Poisson es el proceso puntual más estudiado, debido a su simplicidad estructural y su papel como punto de referencia. Siguiendo a D. J. Daley (2003), sus principales propiedades son:

1. **Incrementos independientes:** Para intervalos disjuntos A_1, \dots, A_k , las variables $N(A_i)$ son independientes.

2. **Incrementos estacionarios (homogéneo):** La distribución de $N(t+h) - N(t)$ depende únicamente de h .

3. **Distribución Poisson:** Para intervalos temporales,

$$N(t+h) - N(t) \sim \text{Poisson} \left(\int_t^{t+h} \lambda(u) du \right).$$

4. **Independencia de tiempos entre eventos:** Si el proceso es homogéneo, los tiempos entre llegadas

$$T_i = S_i - S_{i-1}$$

son i.i.d. con

$$T_i \sim \text{Exp}(\lambda).$$

5. **Superposición y adelgazamiento:**

- La suma de procesos de Poisson independientes es un proceso de Poisson.
- El adelgazamiento con probabilidad p produce un proceso de Poisson con intensidad $p\lambda$.

6. **Propiedad de no memoria:** Los tiempos entre eventos satisfacen

$$P(T > t + s | T > s) = P(T > t),$$

característica exclusiva de la distribución exponencial.

Estas propiedades hacen del proceso de Poisson la base para modelos más complejos como los procesos cluster, Hawkes o procesos inhibidos.

2.1.4 Ejemplos Ilustrativos

Ejemplo 1: Proceso de Poisson homogéneo en tiempo

Supóngase una tasa constante $\lambda = 0.4$ eventos por hora, representando fallos menores en un sistema.

- Probabilidad de observar 2 eventos en 3 horas:

$$P(N(3) = 2) = \frac{(0.4 \times 3)^2}{2!} e^{-0.4 \times 3}.$$

- El tiempo esperado entre fallos:

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda} = 2.5 \text{ horas.}$$

Ejemplo 2: Proceso espacial de Poisson

Sea una región cuadrada A de área 100 km^2 donde la intensidad espacial es $\lambda = 5$ eventos/ km^2 (por ejemplo, localización de árboles).

Entonces:

$$\mathbb{E}[N(A)] = 5 \times 100 = 500.$$

Además, el número de puntos en A sigue:

$$N(A) \sim \text{Poisson}(500).$$

Ejemplo 3: Proceso de Poisson no homogéneo

Si la intensidad varía según la hora del día:

$$\lambda(t) = 3 + 2 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right),$$

modelo típico para la llegada de clientes, entonces el número esperado de llegadas entre $t = 0$ y $t = 6$ es:

$$\int_0^6 \lambda(t) dt = 3(6) - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) \Big|_0^6.$$

2.1.5 Importancia y Aplicaciones

Los procesos puntuales son indispensables en la modelación de fenómenos donde los eventos ocurren de manera discreta, ya sea en tiempo, espacio o espacio–tiempo. Algunas áreas clave:

- **Sismología:** ocurrencia de terremotos y réplicas; base del modelo ETAS.
- **Epidemiología espacial:** distribución de brotes de enfermedades.
- **Ingeniería de confiabilidad:** tiempos de fallas de sistemas tecnológicos.
- **Criminología:** localización de delitos en zonas urbanas.
- **Finanzas de alta frecuencia:** ocurrencia de transacciones o cambios abruptos en el mercado.
- **Ecología:** distribución de especies en un territorio.

Su importancia radica en que permiten:

- Capturar patrones espacio–temporales complejos.
- Modelar dependencia entre eventos (autoexcitación o inhibición).
- Incorporar covariables explicativas.
- Realizar predicciones basadas en la intensidad estimada.

2.1.6 Extensiones Naturales

Los procesos puntuales básicos dan lugar a varias familias avanzadas:

- **Procesos cluster:** modelos de Neyman–Scott y Thomas; generan agrupamientos naturales.
- **Procesos inhibidos:** Gibbs, Strauss; modelan repulsión entre eventos.
- **Procesos de Cox:** intensidad aleatoria; útiles cuando existe incertidumbre ambiental.
- **Procesos de Hawkes:** modelos autoexcitados donde los eventos generan más eventos; ampliamente usados en sismología y finanzas.

Todos estos procesos extienden las ideas fundamentales establecidas en D. J. Daley (2003) y Cox y Isham (2018).

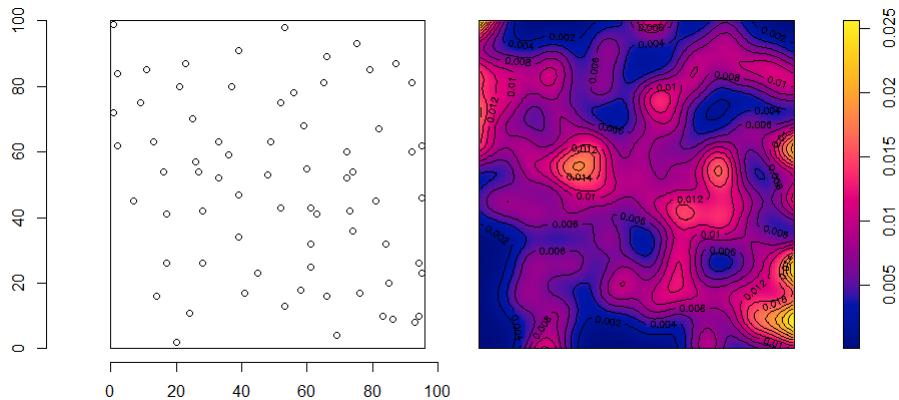


FIGURA N° 2.1: Observamos la distribución de la función de intensidad $\Lambda(S)$ (derecha) del proceso puntual. Gráfico generado mediante spatstat de R

2.2 PROCESO DE HAWKES

2.2.1 Definición

El proceso de Hawkes es un proceso puntual estocástico auto-excitante introducido por Hawkes en 1971 HAWKES (1971). Es un proceso en el cual la ocurrencia de un evento incrementa temporalmente la probabilidad de que aparezcan nuevos eventos en el futuro cercano. Esta dependencia se modela mediante una *intensidad condicional* que incorpora memoria.

Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso puntual. La intensidad condicional del proceso de Hawkes se define como:

$$\lambda(t | \mathcal{H}_t) = \mu + \sum_{t_i < t} g(t - t_i),$$

donde:

- $\mu > 0$ es la tasa base o actividad exógena.
- t_i son los tiempos de eventos pasados.
- $g(\cdot)$ es el kernel de excitación, típicamente decreciente.

El proceso es **auto-excitante** porque cada evento genera un incremento temporal de la intensidad.

Kernels comunes

Los kernels más usados en la literatura son:

Kernel exponencial

$$g(t) = \alpha e^{-\beta t}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

es el más analítico y permite expresar el proceso como un sistema markoviano ?.

Kernel potencia (Omori modificada)

$$g(t) = \frac{K}{(t+c)^p}, \quad p > 1,$$

muy utilizado para modelar secuencias sísmicas Ogata (1988).

Kernel mixto Una combinación lineal:

$$g(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j e^{-\beta_j t}.$$

Condición de estabilidad

El proceso de Hawkes es estable (estacionario) si y solo si:

$$\int_0^\infty g(t) dt < 1.$$

Para el kernel exponencial:

$$\frac{\alpha}{\beta} < 1.$$

Esta integral es la *media de descendientes* por evento, denotada η , y representa la fracción de eventos generados endógenamente D. J. Daley (2003). Si $\eta < 1$, el proceso es subcrítico; si $\eta \rightarrow 1$, el proceso se vuelve explosivo.

Interpretación en forma de proceso cluster

El proceso de Hawkes puede verse como un proceso de ramificación o *branching process*:

- Eventos **inmigrantes** ocurren con tasa μ .
- Cada inmigrante produce un número aleatorio de **descendientes** según una distribución de Poisson con media η .
- Los descendientes producen nuevos eventos y así sucesivamente.

Esta representación es fundamental para entender su estructura interna, y es la

base del modelo ETAS (*Epidemic Type Aftershock Sequence*) usado en sismología Zhuang, Ogata, y Vere-Jones (2002).

2.2.2 Intensidad esperada

Si el proceso es estacionario, la intensidad esperada cumple:

$$\mathbb{E}[\lambda(t)] = \frac{\mu}{1-\eta}.$$

La proporción de eventos endógenos es entonces:

$$p_{\text{endo}} = \eta.$$

Para modelar estos diferentes comportamientos, se introduce el concepto de función de intensidad condicional, denotada por $\lambda^*(t)$. Esta función representa la tasa instantánea de ocurrencia de eventos en un instante t , dado todo el historial previo del proceso hasta ese momento, denotado como $H(t)$. Formalmente, se define como:

$$\lambda^*(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[N(t + \Delta t) - N(t)|H(t)]}{\Delta t} \quad (2.1)$$

esta está condicionada a la historia previa $H(t)$. El proceso de Hawkes es una variante de procesos puntuales autoexcitados planteado por Alan G. Hawkes. Utilizados para modelar eventos que están agrupados temporalmente como "terremotos" "ventas de acciones por pánico" Definamos la función de intensidad condicional de Hawkes. Sea $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ la secuencia de tiempos de llegada del proceso puntual hasta el tiempo t , la intensidad condicional de Hawkes es:

$$\lambda^*(t) = \mu(t) + \sum_{t_i < t} \phi(t - t_i) \quad (2.2)$$

La constante μ se denomina intensidad de fondo y ϕ se denomina función de excitación. Si ϕ es igual a cero, este proceso puntual autoexcitado se reduce a un simple proceso de Poisson estacionario. Existen múltiples funciones de excitación según el diseño del modelo, la más común es el decaimiento exponencial.

$$\phi(t) = \alpha e^{-\beta t}$$

Los parámetros α y β son constantes. Donde α es encargado de incrementar la intensidad luego de la llegada de un evento y con el tiempo esta decae con β .

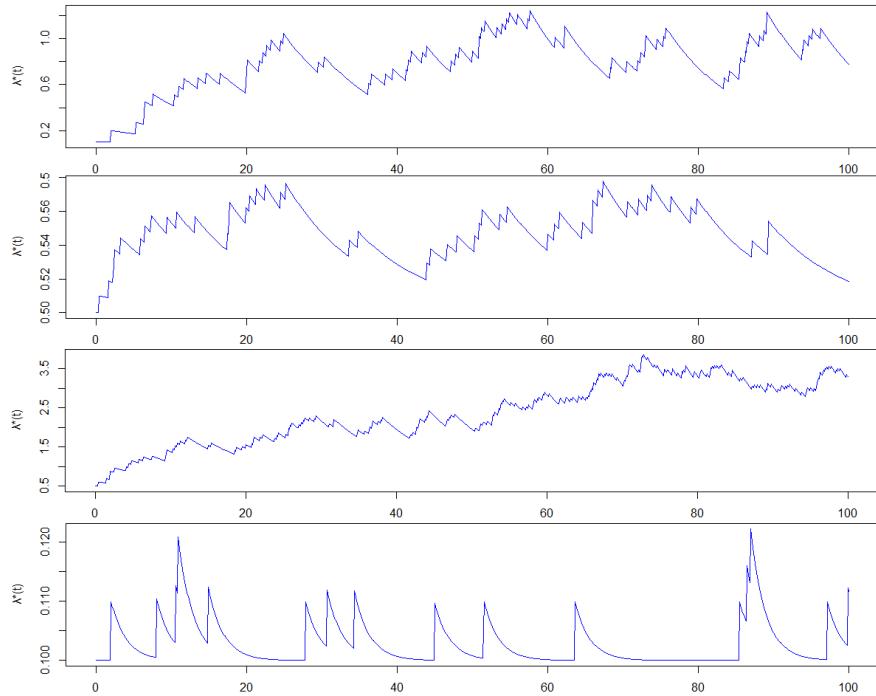


FIGURA N° 2.2: Simulación del proceso de Hawkes con distintos valores de parámetros λ , α y β en R

Para comprender la función de intensidad condicional, simulemos un proceso de puntos de Hawkes simple donde θ es el vector de parámetros λ , α y β . En la figura 3.2 se observan cuatro gráficos de intensidad condicional frente al tiempo. Comenzamos con $\theta = 0.1, 0.1, 0.1$ si incrementamos la intensidad λ a 0.5 en el segundo gráfico vemos que la intensidad de fondo se mantuvo por encima de 0.5. Para comprender el impacto de α , β . Aumentemos α a 0.5. En el tercer gráfico vemos que el número de eventos aumentó, porque en cada ocurrencia de un evento aumenta la intensidad de llegada del siguiente evento en α . Si aumentemos β a 0.5. En el cuarto gráfico se pueden ver decaimientos constantes.

2.2.3 Estimación de parámetros

Los parámetros se estiman típicamente por **máxima verosimilitud**. La log-verosimilitud de un proceso con eventos en $[0, T]$ es:

$$\ell(\theta) = \sum_{i: t_i \leq T} \log \lambda(t_i) - \int_0^T \lambda(t) dt.$$

Para el kernel exponencial, la integral tiene forma cerrada y la optimización es eficiente ?. Para kernels no paramétricos se usa EM o métodos de regularización.

2.2.4 Aplicaciones del proceso de Hawkes

Sismología (ETAS) El modelo ETAS Ogata (1988) es la aplicación más conocida del proceso de Hawkes. Describe cómo un sismo principal genera réplicas con un patrón temporal de tipo ley de Omori.

Mercados financieros Modela:

- ráfagas de transacciones,
- saltos en precios,
- dinámicas de alta frecuencia ?.

Incendios forestales Un incendio aumenta temporalmente la probabilidad de nuevos focos en zonas cercanas debido a propagación ?.

Redes sociales Retweets.^o "shares" generan oleadas de actividad (viralidad).

Comparación conceptual: Poisson vs Hawkes

- Proceso de Poisson: memoria nula.
- Proceso de Hawkes: memoria positiva; eventos generan eventos.
- En Poisson: homogeneidad.
- En Hawkes: clustering y dependencia temporal.

Hawkes multivariado

Para d dimensiones:

$$\lambda_i(t) = \mu_i + \sum_{j=1}^d \sum_{t_k^{(j)} < t} g_{ij}(t - t_k^{(j)}).$$

Este modelo captura:

- contagio entre series,
- interacción cruzada,
- propagación espacio–temporal.

Proceso de Hawkes bidimensional espacial-temporal

En aplicaciones de sismos e incendios:

$$\lambda(t, x, y) = \mu(x, y) + \sum_{t_i < t} g_t(t - t_i) g_s(\|(x, y) - (x_i, y_i)\|).$$

Simulación

Se utilizan tres métodos principales:

- Lewis–Shedler (thinning) D. J. Daley (2003);
- Método de Ogata para Hawkes ?;
- Representación cluster (simulación directa de ramificación).

2.2.5 Ventajas y limitaciones

Ventajas

- Modelo interpretable.
- Permite separar eventos exógenos y endógenos.
- Base sólida en teoría de procesos puntuales.

Limitaciones

- Ajuste sensible a outliers.
- Riesgo de inestabilidad si η se aproxima a 1.
- Selección de kernel crítica.

El proceso de Hawkes es un modelo fundamental para estudiar datos con comportamiento de *auto-excitación*. Su estructura, interpretada como un proceso de ramificación, permite describir fenómenos donde un evento incrementa la probabilidad de eventos posteriores. Es indispensable en la modelación de réplicas sísmicas, incendios forestales, microestructura financiera y difusión en redes sociales. Su flexibilidad y rigurosidad matemática lo convierten en uno de los pilares modernos de la teoría de procesos puntuales.

2.3 DISTRIBUCIÓN DE RÉPLICAS

2.3.1 Distribución de Rélicas

En todos los catálogos de hipocentros sísmicos incluyen la cinco parámetros principales las cuales son tiempo de ocurrencia, longitud y latitud del epicentro, profundidad focal y magnitud; en nuestro estudio se analiza la actividad sísmica en relación de cuatro dimensiones (t_n, x_n, y_n, M_n) , $n = 1, 2, \dots, N$, ignorando la profundidad debido a la baja precisión en comparación con las otras coordenadas.

La probabilidad de que ocurra un terremoto en un tiempo t , una ubicación (x, y) de magnitud M , condicionado a los eventos ocurridos en el pasado $H_t = \{(t_i, x_i, y_i, M_i); t_i < t\}$ se representa en la siguiente ecuación:

$$\frac{P(\text{evento en } [t, t + \Delta t] \times [x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y] \times [M, M + \Delta M] | H_t)}{\Delta t \Delta x \Delta y \Delta M} \approx \lambda(t, x, y, M | H_t) \quad (2.3)$$

donde λ es función de intensidad condicional del proceso puntual que intentamos modelar que representa la probabilidad de que ocurra eventos de magnitudes ΔM en el intervalo de tiempo t y una región definida por Δxy . Las tasas y magnitudes de las rélicas siguen varias leyes empíricas bien establecidas; como la de Gutenberg-Richter donde $\lambda(M)$ es la intensidad de terremotos de magnitud menor o igual a M en una región en un período de tiempo con constantes a y $b = \beta$ que varian segun la región de estudio.

$$\lambda(M) = 10^{a-bM} = Ae^{-\beta M} \quad (2.4)$$

Tambien la ley de Omori (1894) y (Utsu, 1961) proponen el decaimiento de las rélicas según el tiempo después del terremoto principal expresado como:

$$n(t) = \frac{k}{(c+t)^p} \quad (2.5)$$

teniendo como constantes k, c y p.

2.4 MODELO ESPACIO TEMPORAL ETAS

El modelo ETAS (*Epidemic Type Aftershock Sequence*) es una extensión espacio-temporal del proceso de Hawkes aplicado a la sismología. Fue desarrollado inicialmente por Ogata Ogata (1988) y constituye el modelo estándar para describir la ocurrencia de rélicas y clusters sísmicos. El modelo asume que cada evento puede generar descendientes (rélicas) según un mecanismo de ramificación estocástica. Debido a esta estructura, el ETAS pertenece a la familia de los procesos

de puntos autoexcitantes o procesos de Hawkes, en donde la ocurrencia de un sismo incrementa temporalmente la probabilidad de que nuevos sismos ocurran en su proximidad temporal y espacial.

En este marco, la sismicidad observada se compone de dos partes:

- **Sismicidad de fondo** (o independiente), también llamada *inmigración*, caracterizada por una tasa base que puede depender del espacio.
- **Sismicidad desencadenada**, generada por otros eventos sísmicos previos, formando clusters de réplicas.

El resultado es un proceso donde los sismos se interpretan como el resultado de dos mecanismos simultáneos: un proceso exógeno (la tectónica de fondo) y un proceso endógeno (réplicas y sismos inducidos). Esto conduce a la siguiente forma general para la intensidad condicional del modelo ETAS:

$$\lambda(t, x, y, M | H_t) = S(M) \left[\mu(x, y) + \sum_{i: t_i < t} k(M_i) g(t - t_i) f(x - x_i, y - y_i) \right], \quad (2.6)$$

donde cada término captura un componente particular del mecanismo físico de generación sísmica.

2.4.1 Descripción de los componentes del modelo

- H_t es la historia sísmica completa hasta el tiempo t , incluyendo tiempos, ubicaciones y magnitudes.
- $\mu(x, y)$ representa la **tasa de sismicidad de fondo**, que puede ser:
 - constante, si se asume homogeneidad,
 - espacialmente variable, por ejemplo usando kernels de densidad o mapas de fallas conocidas.

En la práctica, $\mu(x, y)$ captura la tectónica regional.

- $S(M)$ es la función de magnitud, típicamente la distribución **Gutenberg–Richter**,

$$S(M) = \beta e^{-\beta(M - M_0)},$$

donde β es el parámetro b transformado, y M_0 es la magnitud mínima de completitud. Esta función asegura que la probabilidad de magnitudes decrece exponencialmente.

- $k(M) = Ae^{\alpha M}$ es la **productividad sísmica** propuesta por Utsu, que indica cuántas réplicas, en promedio, genera un sismo de magnitud M . Este término refleja que sismos mayores producen más réplicas.
- $g(t)$ es la **función temporal de decaimiento**, que cuantifica cómo disminuye la tasa de réplicas en el tiempo. En el modelo ETAS se usa la **Ley de Omori modificada**:

$$g(t) = \frac{1}{(t+c)^p}, \quad p > 1,$$

donde c evita singularidades en $t = 0$. Su forma en potencias captura el decaimiento lento observado empíricamente en réplicas.

- $f(x,y)$ es la **función de propagación espacial**, que modela la caída de la probabilidad con la distancia al sismo disparador. Imitando estudios empíricos, una forma típica es:

$$f(x,y) = \frac{1}{(d^2 + \| (x,y) \|^2)^q},$$

donde d es un parámetro de escala espacial y $q > 1$ asegura integrabilidad.

2.4.2 Interpretación física del modelo ETAS

El modelo ETAS combina tres leyes fundamentales de la sismología empírica:

1. **Ley de Gutenberg–Richter**: controla la distribución de magnitudes.
2. **Ley de productividad**: eventos más grandes generan más réplicas.
3. **Ley de Omori modificada**: describe el decaimiento temporal de réplicas.

Además, la función espacial explica la dispersión geográfica de las réplicas alrededor de la falla activada.

Cada terremoto se interpreta como un *evento padre*, que produce *descendientes* según un proceso de Poisson con media dependiente de su magnitud. Estos descendientes pueden a su vez generar más sismos, formando cascadas de réplicas.

2.4.3 Condición de estabilidad

El modelo es estable si la cantidad promedio de eventos generados por un sismo es menor que 1. Este valor se denomina *productividad total* o parámetro de ramificación:

$$\eta = \int_0^\infty g(t) dt \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy \int_{M_0}^\infty k(M) S(M) dM.$$

El modelo es subcrítico si $\eta < 1$, caso en que el proceso no explota y es estacionario.

Interpretación como proceso de ramificación

El modelo ETAS puede ser representado como:

- un proceso de inmigración (sismicidad de fondo), con tasa $\mu(x, y)$,
- un proceso de ramificación donde cada evento genera descendientes con una distribución de Poisson.

Esta estructura permite clasificar los eventos en:

- **Eventos de fondo** (exógenos),
- **Rélicas generadas** (endógenos),
- **Rélicas de rélicas**, y así sucesivamente.

El parámetro η determina la proporción de sismicidad endógena:

$$P(\text{evento endógeno}) = \eta.$$

2.4.4 Variantes del modelo ETAS

Existen muchas extensiones relevantes:

- **ETAS espacio–temporal anisotrópico**: incorpora orientación de fallas.
- **ETAS dependiente de la magnitud**: parámetros cambian con la magnitud.
- **ETAS con productividad no paramétrica**.
- **ETAS marcado con múltiples atributos**.
- **ETAS mixto (Poisson + Hawkes con kernel complejo)**.

2.4.5 Simulación del modelo

Los métodos más comunes incluyen:

- método de Ogata (*thinning*),
- simulación por ramificación (árbol genealógico),
- simulación con kernel espacio–temporal compuesto.

2.4.6 Aplicaciones en sismología moderna

El modelo ETAS se usa ampliamente para:

- estimar la probabilidad de réplicas tras un sismo principal,
- declustering de catálogos sísmicos,
- análisis de riesgo sísmico,
- identificación de zonas activas,
- predicción probabilística a corto plazo.

2.5 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

2.5.1 Métodos de Estimación

• Estimación mediante MLE

La estimación de parámetros mediante el método de máxima verosimilitud (MLE) es una técnica estadística muy común que se usa para deducir los parámetros de un modelo probabilístico basándose en datos observados. Este método se centra en elegir los valores que optimizan la función de verosimilitud, es decir, aquellos que hacen que la observación de los datos sea lo más probable posible según el modelo considerado. La función de verosimilitud se formula como la probabilidad conjunta de observar los datos dados ciertos parámetros, o, en el caso de variables en continuo, como la densidad de probabilidad conjunta. En términos matemáticos, si tenemos una colección de datos x_1, x_2, \dots, x_n que se supone derivan de una distribución con densidad $f(x|\theta)$, donde θ representa los parámetros del modelo, la función de verosimilitud se define como $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$. En la práctica, debido a la dificultad numérica de trabajar con productos, comúnmente se maximiza el logaritmo de la verosimilitud, denominado log-verosimilitud, expresado como $l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i|\theta)$, dado que el logaritmo es una función que siempre aumenta, y maximizar $l(\theta)$ es lo mismo que maximizar $L(\theta)$.

El proceso de estimación utilizando MLE incluye resolver un problema de optimización con el objetivo de encontrar θ que maximice $l(\theta)$. Esto puede llevarse a cabo de forma analítica derivando la log-verosimilitud respecto a los parámetros, estableciendo que las derivadas sean cero y solucionando el sistema de ecuaciones que se obtiene, conocidas como ecuaciones de verosimilitud. No obstante, en muchas ocasiones, las soluciones no son factibles analíticamente, por lo que se utilizan métodos numéricos como el algoritmo de Newton-Raphson, descenso por gradiente o técnicas de optimización más

complejas. Una de las principales ventajas del MLE es su consistencia: bajo ciertas condiciones de regularidad, el estimador de máxima verosimilitud se aproxima al valor real del parámetro a medida que se incrementa el tamaño de la muestra. Además, el MLE es asintóticamente eficiente, lo que implica que alcanza el límite inferior de Cramér-Rao, ofreciendo estimadores con la varianza más baja posible en muestras extensas. También posee la propiedad de invarianza, lo que significa que si $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ , entonces $g(\hat{\theta})$ será el estimador de máxima verosimilitud de $g(\theta)$. Para cualquier función (g). No obstante, el MLE presenta ciertas limitaciones. Por ejemplo, requiere que el modelo esté bien definido; si la distribución asumida no se ajusta correctamente a los datos, los estimadores podrían resultar sesgados o ineficaces. Adicionalmente, en situaciones de muestras pequeñas, los estimadores de MLE pueden carecer de robustez, y ocasionalmente, la función de verosimilitud puede presentar múltiples máximos o puede no ser diferenciable, complicando su optimización. También es relevante señalar que el MLE puede ser costoso computacionalmente en modelos complejos, como aquellos que contienen varios parámetros o datos de alta dimensionalidad. En esos escenarios, se pueden explorar otros métodos como la estimación bayesiana o los métodos de momentos. A pesar de estas limitaciones, el MLE sigue siendo una herramienta crucial en la estadística, usada en una amplia gama de disciplinas, desde la econometría hasta el aprendizaje automático, donde se aplica para ajustar modelos como regresiones logísticas, redes neuronales y modelos de mezcla gaussiana. Su sólido fundamento teórico y su flexibilidad lo establecen como un componente vital para la inferencia estadística contemporánea.

Los parámetros a estimar son μ, K, α, c, p donde K, α son constantes de la ley de productividad de las réplicas de Utsu y c y p son constantes de la ley de Omori-Utsu modificada. Los cinco parámetros se pueden estimar mediante el método de estimación de máxima verosimilitud (MLE) la probabilidad logarítmica se puede expresar de la siguiente manera:

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^N \log \lambda(t_i, \theta) - \int_0^T \lambda(t, \theta) dt \quad (2.7)$$

donde θ es el conjunto de parámetros a estimar y $[0, T]$ es el intervalo de tiempo para el cual se deben estimar los parámetros. Encontrar el máximo de una función es un problema de optimización típico, que en la mayoría de los casos debe resolverse numéricamente por métodos Quasi-Netwon.

- **Estimación por inferencia Bayesiana**

La estimación por inferencia bayesiana es un enfoque estadístico que per-

mite estimar los parámetros de un modelo probabilístico incorporando tanto la información proporcionada por los datos observados como el conocimiento previo sobre los parámetros, utilizando el teorema de Bayes como fundamento. Este método contrasta con enfoques frecuentistas, como la estimación de máxima verosimilitud, al tratar los parámetros como variables aleatorias con distribuciones de probabilidad, en lugar de valores fijos desconocidos. En la inferencia bayesiana, el proceso comienza con la especificación de una distribución previa, $p(\theta)$, que refleja las creencias o conocimientos iniciales sobre los parámetros θ antes de observar los datos. Cuando se obtienen los datos x_1, x_2, \dots, x_n , la verosimilitud, $p(x|\theta)$, describe la probabilidad de los datos dado un conjunto de parámetros. El teorema de Bayes combina estas dos componentes para obtener la distribución posterior, $p(\theta|x)$, que se calcula como $p(\theta | x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)}$, donde $p(x) = \int p(x|\theta)p(\theta)d\theta$ actúa como una constante de normalización conocida como evidencia o probabilidad marginal. La distribución posterior resume toda la información actualizada sobre los parámetros después de observar los datos y es el núcleo de la inferencia bayesiana, ya que permite realizar estimaciones puntuales (como la media, mediana o moda de la posterior) o intervalos de credibilidad, que son análogos a los intervalos de confianza frecuentistas pero con una interpretación probabilística directa. Una de las principales fortalezas de la inferencia bayesiana es su capacidad para incorporar conocimiento previo de manera sistemática, lo que es particularmente útil en contextos donde los datos son limitados o ruidosos. Por ejemplo, en un modelo de regresión, una distribución previa puede imponer restricciones sobre los coeficientes para evitar el sobreajuste. Además, la inferencia bayesiana es flexible y puede aplicarse a modelos complejos, como modelos jerárquicos o redes bayesianas, donde los parámetros tienen dependencias estructuradas. Sin embargo, esta flexibilidad tiene un costo computacional. Calcular la distribución posterior de manera analítica es factible solo en casos simples, como cuando la previa y la verosimilitud son conjugadas (por ejemplo, una previa normal con una verosimilitud normal para la media de una distribución). En modelos más complejos, la integral en el denominador del teorema de Bayes suele ser intratable, lo que requiere el uso de métodos computacionales como el muestreo de Monte Carlo, las cadenas de Markov (MCMC) o la inferencia variacional. Estos métodos han hecho posible la aplicación de la inferencia bayesiana en áreas como el aprendizaje automático, la bioestadística y la econometría, pero pueden ser intensivos en términos de recursos computacionales y requieren experiencia para implementarse correctamente. A pesar de sus ventajas, la inferencia bayesiana también enfrenta desafíos. La elección de la distribución previa puede ser subjetiva y, si no se selecciona cuidadosamente, puede influir significativamente en los

resultados, especialmente en muestras pequeñas. Para mitigar esto, se pueden usar distribuciones previas no informativas o débilmente informativas, aunque estas también tienen limitaciones. Además, la interpretación de los resultados bayesianos, como los intervalos de credibilidad, puede ser menos intuitiva para quienes están acostumbrados a los métodos frecuentistas. Otro aspecto a considerar es la sensibilidad de los resultados a la especificación del modelo; un modelo mal especificado puede llevar a inferencias erróneas, al igual que en los métodos frecuentistas. No obstante, la inferencia bayesiana ofrece una framework coherente para la incertidumbre, permite actualizar las estimaciones a medida que se obtienen nuevos datos y es particularmente poderosa en problemas de decisión secuencial o en contextos donde la incertidumbre paramétrica es crítica. En la práctica, la inferencia bayesiana se ha convertido en una herramienta indispensable en campos como la inteligencia artificial, donde se usa en modelos probabilísticos como los modelos gráficos y los procesos gaussianos, y en ciencias sociales, donde los modelos jerárquicos bayesianos son comunes para analizar datos multinivel. Su capacidad para integrar datos y conocimiento previo en un marco probabilístico unificado la posiciona como un enfoque fundamental en la estadística moderna.

Según (Molkenthin et al. (2022)) el enfoque bayesiano de la estimación de parámetros ETAS el teorema de Bayes dice, la distribución de probabilidad posterior $p(\theta|X)$ del conjunto de parámetros θ dado los datos X se puede expresar utilizando la probabilidad $L(\theta|X)$ y la distribución de probabilidad previa $p(\theta)$ del conjunto de parámetros $\theta|X$ de la siguiente manera:

$$p(\theta|X) \propto L(\theta|X)p(\theta) \quad (2.8)$$

2.6 SELECCIÓN DEL MODELO

2.6.1 Criterios de selección

- **Criterio de Información Akaike (AIC):**

El Criterio de Información Bayesiano (BIC, por sus siglas en inglés, Bayesian Information Criterion) es una herramienta estadística ampliamente utilizada para la selección de modelos, que busca equilibrar la bondad de ajuste de un modelo con su complejidad, penalizando aquellos modelos que incorporan un número excesivo de parámetros. Introducido por Gideon Schwarz en 1978, el BIC se deriva de un enfoque bayesiano y está basado en una aproximación a la probabilidad marginal de los datos, también conocida como evidencia, que se calcula integrando la función de verosimilitud sobre la distribución previa de los parámetros. Matemáticamente, el BIC para un modelo (M) con datos

x_1, x_2, \dots, x_n se define como $BIC = -2\ln(\hat{L}) + k\ln(n)$ es la máxima verosimilitud del modelo (es decir, el valor de la función de verosimilitud evaluada en los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros), (k) es el número de parámetros del modelo, y (n) es el tamaño de la muestra. El término $-2\ln(\hat{L})$ refleja la bondad de ajuste del modelo, mientras que el término $k\ln(n)$ actúa como una penalización por la complejidad del modelo, que aumenta con el número de parámetros y el tamaño de la muestra. En la práctica, el BIC se utiliza para comparar modelos, donde el modelo con el valor más bajo de BIC se considera preferible, ya que representa un compromiso óptimo entre ajuste y simplicidad. El fundamento teórico del BIC radica en su conexión con la inferencia bayesiana, específicamente en la aproximación de Laplace a la probabilidad marginal ($p(x|M)$), que integra la verosimilitud sobre la distribución previa de los parámetros. Esta aproximación es válida bajo ciertas condiciones de regularidad y cuando el tamaño de la muestra es grande, lo que permite simplificar la integral compleja en una expresión que depende del máximo de la verosimilitud y una penalización por la dimensionalidad del modelo. A diferencia de otros criterios, como el Criterio de Información de Akaike (AIC), el BIC impone una penalización más fuerte por la complejidad del modelo debido al término $\ln(n)$, lo que lo hace más conservador en la selección de modelos con muchos parámetros, especialmente en muestras grandes. Esta característica hace que el BIC tienda a favorecer modelos más simples que el AIC, lo que puede ser ventajoso en contextos donde se desea evitar el sobreajuste, pero también puede llevar a seleccionar modelos demasiado simplificados si la penalización es excesiva. Además, el BIC tiene una interpretación bayesiana directa: bajo ciertas condiciones, la diferencia en los valores de BIC entre dos modelos se relaciona con el logaritmo del factor de Bayes, una medida de la evidencia relativa a favor de un modelo sobre otro. A pesar de sus ventajas, el BIC tiene limitaciones importantes. Su cálculo asume que la verosimilitud está bien especificada y que los datos provienen de una distribución que pertenece a la familia del modelo considerado, lo que no siempre es cierto en aplicaciones prácticas. Si el modelo está mal especificado, el BIC puede llevar a selecciones subóptimas. Además, el BIC depende de la aproximación asintótica, lo que significa que su desempeño puede ser menos confiable en muestras pequeñas, donde la penalización $k\ln(n)$ puede no reflejar adecuadamente la incertidumbre en los parámetros. Otro aspecto crítico es que el BIC no incorpora explícitamente la incertidumbre de la distribución previa, lo que puede ser una desventaja en contextos bayesianos puros donde las prioras tienen un impacto significativo. En la práctica, el BIC se utiliza ampliamente en disciplinas como la econometría, la bioestadística y el aprendizaje automático para comparar modelos lineales, modelos de re-

gresión logística, modelos de series temporales o modelos de mezcla, entre otros. Por ejemplo, en el análisis de series temporales, el BIC puede ayudar a seleccionar el orden de un modelo ARIMA, mientras que en aprendizaje automático, se usa para elegir entre diferentes configuraciones de modelos probabilísticos. Aunque el BIC no es la única herramienta para la selección de modelos, su simplicidad y su fundamento teórico bayesiano lo convierten en un criterio robusto y popular, especialmente en contextos donde se busca un equilibrio entre interpretabilidad y precisión predictiva.

Evalúa la calidad del ajuste del modelo penalizando por el número de parámetros. Se calcula como:

$$AIC = 2k - 2\log(L) \quad (2.9)$$

donde k es el número de parámetros y L es la verosimilitud máxima.

- **Criterio de Información Bayesiano (BIC):** Similar al AIC, pero penaliza más fuertemente modelos con más parámetros. Se calcula como:

$$BIC = k\log(n) - 2\log(L) \quad (2.10)$$

donde n es el número de datos.

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

En el presente proyecto de investigación esta orientado al desarrollo de modelos estadísticos lo que compondrá el uso de la metodología CRISP-ML(Q) (Studer et al. (2021)) un proceso estructurado que guía el desarrollo de modelos de aprendizaje automático de manera eficiente y confiable basado en el modelo CRISP-DM (Cross-Industry Standard Process for Data Mining), pero extendido para incluir tareas y metodologías de aseguramiento de la calidad específicas. Esta se divide en 6 fases:

3.1 PRIMERA SECCIÓN

3.1.1 Comprensión de Datos

Un catálogo sísmico es un registro de eventos sísmicos dentro de una región específica o a nivel mundial. Funciona como una base de datos histórica que recopila información sobre terremotos. Esta información normalmente incluye: fecha y hora del evento, ubicación en coordenadas geográficas (latitud y longitud), magnitud en la escala de Richter y profundidad; algunos catálogos también pueden incluir detalles adicionales; se puede consultar en Hauksson, Hardebeck, y Woessner (2010). Podemos un ejemplar en la Tabla 3.1

Los datos sísmicos (CENSIS (2024)) se adquirieron del Centro Sismológico Nacional (CENSIS) servicio desarrollado por el Instituto Geofísico del Perú (IGP) institución oficial del Estado que se encarga de monitorear la ocurrencia de sismos en el territorio nacional para ello, se dispone de datos provenientes de la Red Sísmica Nacional (RSN) cuyos sensores se encuentran distribuidos en todo el territorio nacional. La base de datos sísmicos para el Perú ha sido dividida en Sismos Históricos para los eventos sísmicos ocurridos entre los años 1471 y 1959; y Sismos Instrumentales para los ocurridos después del año 1960, La elección del último se basa en las siguientes razones: la precisión de los instrumentos de medición, com-

TABLA N° 3.1: Ejemplo de un catálogo de terremotos

Event	Date	Time	Longitude	Latitude	Depth	Magnitude
1	1998-01-06	15:39:31.00	-75.82	-14.15	49	4.20
2	1998-01-06	20:01:50.90	-70.34	-18.10	188	4.80
3	1998-01-10	17:02:56.00	-80.28	-4.19	36	5.10
□	□	□	□	□	□	□
100	1998-07-25	08:57:26.90	-69.14	-16.83	67	4.90
101	1998-07-29	13:34:14.00	-74.65	-14.98	96	4.70

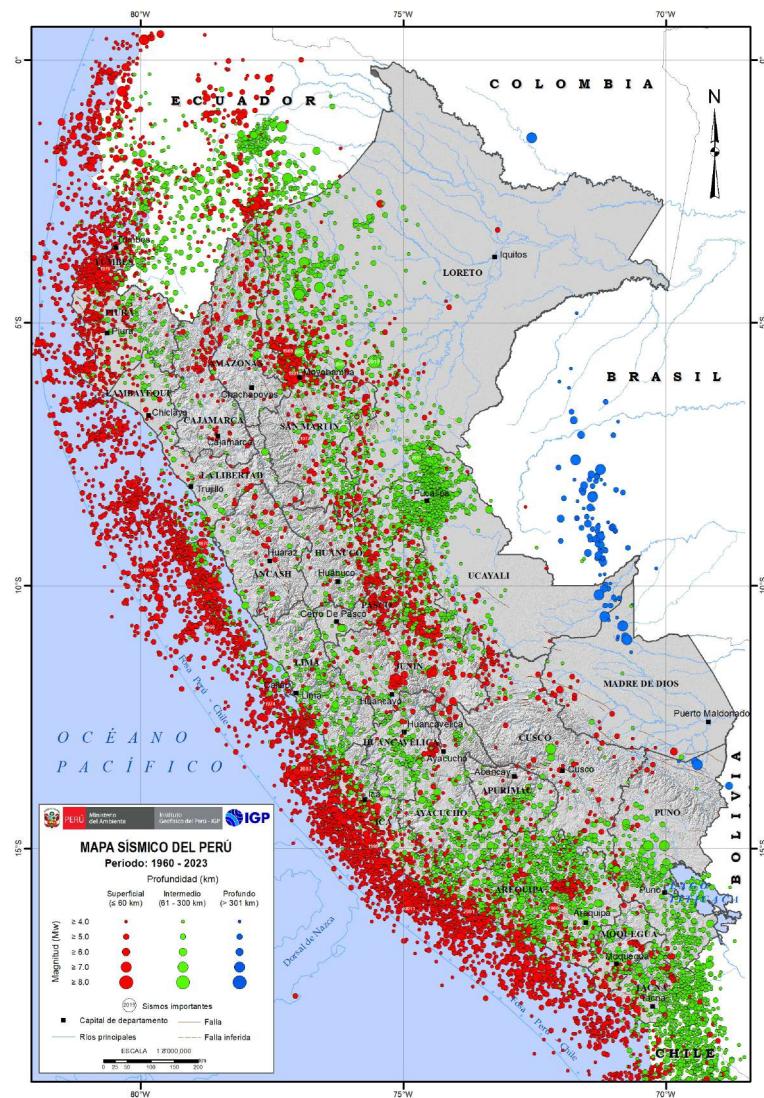


FIGURA N° 3.1: Mapa Sísmico del Perú 1960 - 2023 Censis (2023).

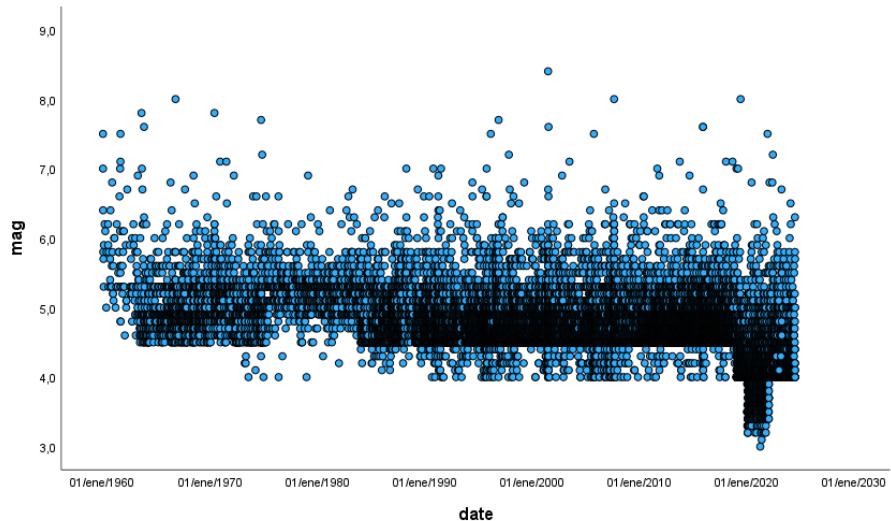


FIGURA N° 3.2: Diagrama de dispersión de magnitudes de eventos con el tiempo.

pletitud y consistencia, el incremento notable de estaciones sismicas a partir del año 2000 nos dan la disponibilidad de datos mas robustos. El catálogo nos provee datos de los sismos ocurridos en una region rectangular que abarca el territorio y el mar peruano, con latitud sur desde 1.396° hasta 25.701° y longitud oeste desde 87.382° hasta 65.624° .

3.2 SEGUNDA SECCIÓN

3.2.1 Preparación de Datos

Procedemos a realizar un análisis exploratorio de los datos contenidos en el catálogo tomando como referencia a (Mark Naylor (2010)), lo primero que se analizará es la magnitud. Si bien la magnitud más conocida es la escala Richter esta tambien tiene varios tipos, no confundir con la escala de intensidad representado por la escala de Mercalli, como: Richter Magnitude Scale (M_L); Body Wave Magnitude Scale (m_b); Duration Magnitude Scale (M_d); Moment Magnitude (M_W); Mueller (2018) Describe la metodología desarrollada en los EE.UU. por el U.S. Geological Survey (USGS) para la elaboración de catálogos sísmicos; con este mismo criterio el IGP opto por homogenizar los valores a magnitud momento (Mw) de forma propuesta por (Scordilis (2006))

El catálogo consta de 23 944 eventos una magnitud media de 4.71. En la figura 3.2 podemos ver que casi no hay eventos de magnitud menor a 4.0 esto se debe a la sencibilidad de los instrumentos o la depuración humana y hay pocos eventos de gran magnitud, la región intermedia es la más representativa donde se visualiza mejor en una escala log-lineal como en la figura 3.3 Esto muestra claramente una relación lineal, entre las magnitudes 4 y 7, cumpliéndose la ley de Gutenberg-

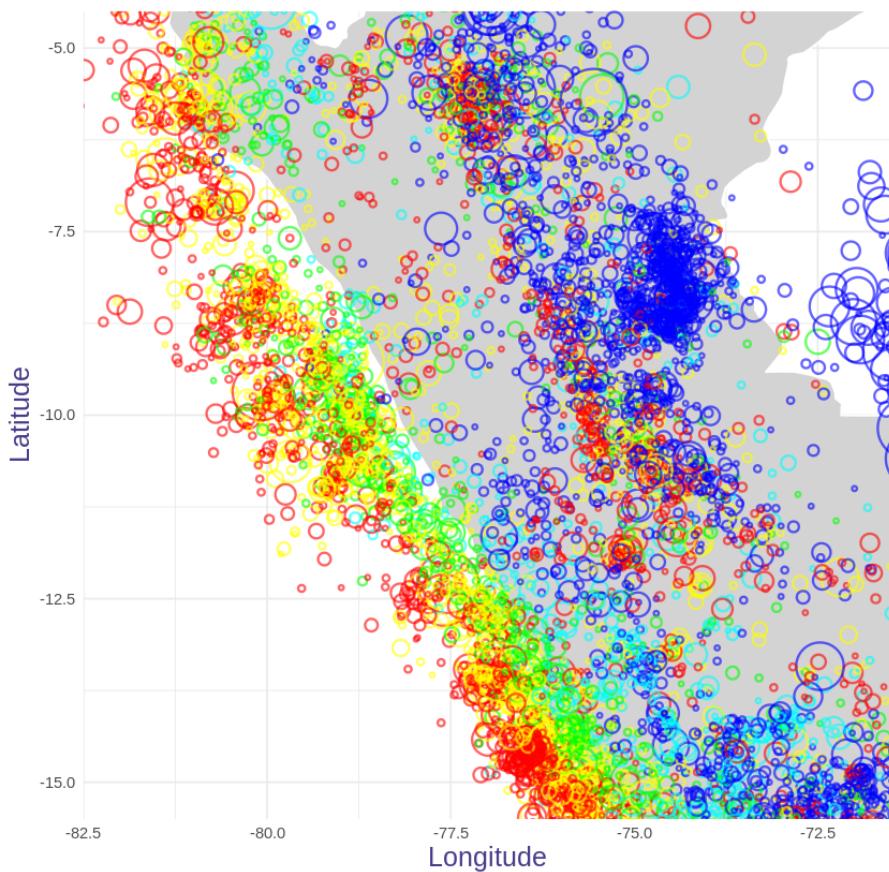


FIGURA N° 3.3: Gráfico de epicentros de terremotos en un mapa base coloreado por profundidad y con tamaño proporcional a la magnitud. Los colores cálidos indican profundidades bajas y los colores fríos eventos más profundos. Se puede encontrar el código para producir este gráfico en los anexos.

Richter.

Se empleará la librería *ETAS* de (Jalilian (2019)) en *R* para adaptar el modelo para un catálogo de terremotos utilizando el enfoque de desagrupación estocástica propuesto por Zhuang y Ogata. Definimos nuestra ventana de estudio tomando una porción de nuestro catálogo; esta será nuestro evento principal, independiente o de fondo; los datos fuera de esta ventana o externo al polígono de estudio, que se explicará más adelante, son eventos secundarios o de ruido, *time.begin* como el comienzo del lapso de tiempo del catálogo, *time.start* es el inicio del período de estudio, *time.end* es el final del período de estudio, tener en cuenta el formato de las fechas como yyyy-mm-dd.

Lo siguiente es definir el régión de estudio puede ser rectangular o poligonal en nuestro caso se optó por el último, se puede especificar mediante el argumento *region.poly* que contiene coordenadas de los vértices del polígono, ver en la Tabla?? deben enumerarse en orden antihorario

3.3 TERCERA SECCIÓN

3.3.1 Ajuste del Modelo

Sea θ el conjunto de parámetros a estimar en el intervalo de tiempo $[0, T]$. En la librería de (Jalilian (2019)) se utiliza el método Davidon-Fletcher-Powell DFS el algoritmo genera iterativamente una aproximación local de la función de log-verosimilitud por una función cuadrática hasta que converge a su máximo.

Algoritmo 1 Davidon-Fletcher-Powell algorithm.

A1.entradas

$\hat{\theta}_0$ parámetros iniciales del modelo

$\widehat{\mu}_0(x_j, y_j) \quad j = 1, 2, \dots, N$ tasa de fondo inicial

H_0 la inversa de la matriz de Hessiana

A2. $k \leftarrow 0$

A3.repetir

$d_k \leftarrow -H_k \times \nabla \xi(\hat{\theta}_k)$ dirección ascendente

$\varsigma_k \leftarrow \text{argmin}_{\varsigma} \xi(\hat{\theta}_k + \varsigma d_k)$

$\hat{\theta}_{k+1} \leftarrow \hat{\theta}_k + \varsigma_k d_k$ actualizar la estimación

$\eta_k \leftarrow \nabla \xi(\hat{\theta}_{k+1}) - \nabla \xi(\hat{\theta}_k)$

$c1 \leftarrow \varsigma_k / (d_k^\top \times \eta_k)$

$c2 \leftarrow 1 / (\eta_k^\top \times H_k \times \eta_k)$

$H_{k+1} \leftarrow H_k + c_1 h_k \times d_k^\top - c_2 H_k \times \eta_k \times \eta_k^\top \times H_k$ actualizar el hessiano inverso

$k \leftarrow k + 1$

A4.hasta $\|\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}\| < \epsilon$ o $\|\nabla \xi(\hat{\theta}_k)\| < \epsilon$

A5.retornar $\hat{\theta}_k$ y H_k

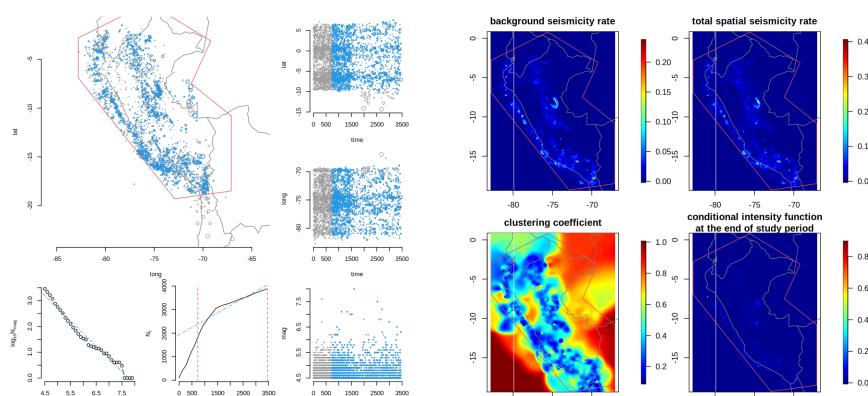


FIGURA N° 3.4: Example figure that covers the width of the page obtained from PGF-Plots *PGFPLOTS - A LaTeX package to create plots.* (s.f.).

CAPÍTULO IV: RESULTADOS

Luego de ajustar nuestros parámetros el modelo ETAS: ajustado mediante el método iterativo de desagrupación estocástica convergió después de 5 iteraciones tiempo de ejecución transcurrido 18,4 minutos procesado paralelamente en un procesador octacore Intel Core i5 decima generación:

4.1 RESULTADO 1

TABLA N° 4.1: Resutados del ajuste de parámetros

ML estimates of model parameters:

	β	μ	A	c	α	p	D	q	γ
$\hat{\theta}$	3.3243	0.5497	1.8560	0.0453	0.8895	1.0132	0.0023	1.2261	0.0117
SE	0.0053	0.0084	0.0276	0.0662	0.0213	0.0003	0.0732	0.0092	1.3761

Declustering Probabilities

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
0.0000	0.5188	0.7382	0.6490	0.8512	1.0000

log-likelihood: -10361.76 AIC: 20739.53

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CENSIS. (2023). *Mapasismo2023*. Descargado de https://ultimosismo.igp.gob.pe/img/mapas_sismicos/mp_2023.jpg?v=3221881
- CENSIS. (2024). *Igp_datos_sismicos*. Descargado de <https://ultimosismo.igp.gob.pe/descargar-datos-sismicos>
- Console, R., Jackson, D. D., y Kagan, Y. Y. (2010, marzo). Using the etas model for catalog declustering and seismic background assessment. *Pure and Applied Geophysics*, 167(6–7), 819–830. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1007/s00024-010-0065-5> doi: 10.1007/s00024-010-0065-5
- Cox, D., y Isham, V. (2018). *Point processes*. Routledge. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1201/9780203743034> doi: 10.1201/9780203743034
- Darzi, A., Halldorsson, B., Hrafnkelsson, B., y Vogfjörð, K. S. (2022, septiembre). Short-term bayesian etas spatiotemporal forecasting of the Ölfus 2008 earthquake sequence in iceland. *Tectonophysics*, 839, 229522. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1016/j.tecto.2022.229522> doi: 10.1016/j.tecto.2022.229522
- D. J. Daley, D. V.-J. (2003). *An introduction to the theory of point processes*. Springer-Verlag. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1007/b97277> doi: 10.1007/b97277
- Freund, F. T., Kulahci, I. G., Cyr, G., Ling, J., Winnick, M., Tregloan-Reed, J., y Freund, M. M. (2009, diciembre). Air ionization at rock surfaces and pre-earthquake signals. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 71(17–18), 1824–1834. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1016/J.JASTP.2009.07.013> doi: 10.1016/j.jastp.2009.07.013
- Geller, R. J. (1997, diciembre). Earthquake prediction: a critical review. *Geophysical Journal International*, 131(3), 425–450. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-246X.1997.tb06588.x> doi: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb06588.x
- Gulia, L., Wiemer, S., y Wyss, M. (2012). Catalog artifacts and quality control. Descargado de http://www.corssa.org/export/sites/corssa/.galleries/articles-pdf/gulia_et_al.pdf doi: 10.5078/CORSSA-93722864
- Hauksson, E., Hardebeck, J. L., y Woessner, J. (2010). What is an instrumental seismicity catalog? Descargado de http://www.corssa.org/export/sites/corssa/.galleries/articles-pdf/woessner_et_al.pdf doi: 10.5078/CORSSA-38784307

- HAWKES, A. G. (1971). Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. *Biometrika*, 58(1), 83–90. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1093/biomet/58.1.83> doi: 10.1093/biomet/58.1.83
- Ismail-Zadeh, A. T. (2013). Earthquake prediction and forecasting. En *Encyclopedia of earth sciences series* (p. 225–231). Springer Netherlands. Descargado de http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-4399-4_106 doi: 10.1007/978-1-4020-4399-4_106
- Jalilian, A. (2019). Etas: An r package for fitting the space-time etas model to earthquake data. *Journal of Statistical Software*, 88(Code Snippet 1). Descargado de <http://dx.doi.org/10.18637/jss.v088.c01> doi: 10.18637/jss.v088.c01
- Karr, A. F. (1991). *Point processes and their statistical inference* (2nd ed., rev. and expanded. ed.). M. Dekker.
- Kossobokov, V., y Shebalin, P. (2003). Earthquake prediction. En *Nonlinear dynamics of the lithosphere and earthquake prediction* (p. 141–207). Springer Berlin Heidelberg. Descargado de http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-05298-3_4 doi: 10.1007/978-3-662-05298-3_4
- Iafmejani, d. k., y Shabani, E. (2022, septiembre). Modeling earthquake data using etas model to forecast aftershock subsequences applying different parameterizations in kermanshah region, iran. Descargado de <http://dx.doi.org/10.21203/rs.3.rs-1996634/v1> doi: 10.21203/rs.3.rs-1996634/v1
- Lindsey, N. J., y Martin, E. R. (2021). Fiber-optic seismology. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 49(Volume 49, 2021), 309-336. Descargado de <https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev-earth-072420-065213> doi: <https://doi.org/10.1146/annurev-earth-072420-065213>
- Lombardi, A. M., y Marzocchi, W. (2010, noviembre). The etas model for daily forecasting of italian seismicity in the csep experiment. *Annals of Geophysics*, 53(3). Descargado de <http://dx.doi.org/10.4401/ag-4848> doi: 10.4401/ag-4848
- Mark Naylor, D. H., Katerina Orfanogiannaki. (2010). Exploratory data analysis: magnitude, space and time. Descargado de <http://www.corssa.org/export/sites/corssa/.galleries/articles-pdf/Naylor-et-al-2010-CORSSA-Exploratory-data-analysis.pdf> doi: 10.5078/CORSSA-92330203
- Mignan, A., y Woessner, J. (2012). Estimating the magnitude of completeness for earthquake catalogs. Descargado de <http://www.corssa.org/export/>

- sites/corssa/.galleries/articles-pdf/Mignan-Woessner-2012-CORSSA-Magnitude-of-completeness.pdf doi: 10.5078/CORSSA-00180805
- Mizrahi, L., Nandan, S., y Wiemer, S. (2021, diciembre). Embracing data incompleteness for better earthquake forecasting. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 126(12). Descargado de <http://dx.doi.org/10.1029/2021JB022379> doi: 10.1029/2021jb022379
- Molkenthin, C., Donner, C., Reich, S., Zöller, G., Hainzl, S., Holschneider, M., y Opper, M. (2022, marzo). Gp-etas: semiparametric bayesian inference for the spatio-temporal epidemic type aftershock sequence model. *Statistics and Computing*, 32(2). Descargado de <http://dx.doi.org/10.1007/s11222-022-10085-3> doi: 10.1007/s11222-022-10085-3
- Mueller, C. S. (2018, octubre). Earthquake catalogs for the usgs national seismic hazard maps. *Seismological Research Letters*, 90(1), 251–261. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1785/0220170108> doi: 10.1785/0220170108
- Nishikawa, T., y Nishimura, T. (2023, mayo). Development of an epidemic□type aftershock□sequence model explicitly incorporating the seismicity□triggering effects of slow slip events. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 128(5). Descargado de <http://dx.doi.org/10.1029/2023JB026457> doi: 10.1029/2023jb026457
- Ogata, Y. (1988, marzo). Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes. *Journal of the American Statistical Association*, 83(401), 9–27. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1080/01621459.1988.10478560> doi: 10.1080/01621459.1988.10478560
- Ogata, Y. (2017, agosto). Statistics of earthquake activity: Models and methods for earthquake predictability studies. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 45(1), 497–527. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1146/annurev-earth-063016-015918> doi: 10.1146/annurev-earth-063016-015918
- Omi, T., Ogata, Y., Hirata, Y., y Aihara, K. (2014, febrero). Estimating the etas model from an early aftershock sequence. *Geophysical Research Letters*, 41(3), 850–857. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1002/2013GL058958> doi: 10.1002/2013gl058958
- Omori, F. (1894). On the after-shocks of earthquakes. *The journal of the College of Science, Imperial University, Japan = 帝國大學理學部之紀要*, 7, 111–200. Descargado de <https://doi.org/10.15083/00037562> (application/pdf) doi: 10.15083/00037562

PGFPLOTS - A LaTeX package to create plots. (s.f.). Descargado de <https://pgfplots.sourceforge.net/>

Scordilis, E. M. (2006, abril). Empirical global relations converting m s and m b to moment magnitude. *Journal of Seismology*, 10(2), 225–236. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1007/s10950-006-9012-4> doi: 10.1007/s10950-006-9012-4

Studer, S., Bui, T. B., Drescher, C., Hanuschkin, A., Winkler, L., Peters, S., y Müller, K.-R. (2021, abril). Towards crisp-ml(q): A machine learning process model with quality assurance methodology. *Machine Learning and Knowledge Extraction*, 3(2), 392–413. Descargado de <http://dx.doi.org/10.3390/make3020020> doi: 10.3390/make3020020

Villegas-Lanza, J. C., Chlieh, M., Cavalié, O., Tavera, H., Baby, P., Chire-Chira, J., y Nocquet, J. (2016, octubre). Active tectonics of peru: Heterogeneous interseismic coupling along the nazca megathrust, rigid motion of the peruvian sliver, and subandean shortening accommodation. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 121(10), 7371–7394. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1002/2016JB013080> doi: 10.1002/2016jb013080

Woith, H., Petersen, G. M., Hainzl, S., y Dahm, T. (2018, abril). Review: Can animals predict earthquakes? *Bulletin of the Seismological Society of America*, 108(3A), 1031–1045. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1785/0120170313> doi: 10.1785/0120170313

Zhuang, J., Ogata, Y., y Vere-Jones, D. (2002, junio). Stochastic declustering of space-time earthquake occurrences. *Journal of the American Statistical Association*, 97(458), 369–380. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1198/016214502760046925> doi: 10.1198/016214502760046925

Zhuang, J., Werner, M. J., Zhou, S., Hainzl, S., y Harte, D. (2012). Basic models of seismicity: temporal models. Descargado de <http://www.corssa.org/export/sites/corssa/.galleries/articles-pdf/Zhuang-et-al-2012-CORSSA-Temporal-models.pdf> doi: 10.5078/CORSSA-79905851

Zhuang, J., Werner, M. J., Zhou, S., Harte, D., y Hainzl, S. (2011). Basic models of seismicity: spatiotemporal models. Descargado de <http://www.corssa.org/export/sites/corssa/.galleries/articles-pdf/Zhuang-et-al-2011-CORSSA-Spatiotemporal-models.pdf> doi: 10.5078/CORSSA-07487583