10. Familias con Razón de Verosimilitud Monótona (FVM)

En esta sección se considera el problema de probar la hipótesis de un solo lado o de una cola en un solo parámetro real. Sea $\{f_\theta\colon \theta \in \Theta\}$ una familia de fdps o fps, $\Theta \subseteq \mathbb{R}$, y suponga que se desea probar la hipótesis $H_0\colon \theta \leq \theta_0$ versus $H_a\colon \theta > \theta_0$ o su dual $H_0'\colon \theta > \theta_0$ versus $H_a'\colon \theta \leq \theta_0$. En general, no es posible encontrar una prueba UMP para este problema. La prueba MP de $H_0\colon \theta \leq \theta_0$, es decir, versus la alternativa $H_a\colon \theta = \theta_a (> \theta_0)$ depende de θ_a y no puede ser UMP. Aquí consideramos una clase especial de distribuciones que es lo suficientemente grande como para incluir la familia exponencial de un parámetro, para la cual existe una prueba UMP de una hipótesis unilateral.

Definición 10.1. Sea $\{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ una familia de fdps (fps), $\Theta \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que $\{f_\theta\}$ tiene una *razón de verosimilitud monótona* (RVM) (abreviatura en inglés MLR.) en el estadístico $T(\mathbf{x})$ si para $\theta_1 < \theta_2$, siempre que $f_{\theta_1}, f_{\theta_2}$ sean distintos, la razón $f_{\theta_2}(\mathbf{x})/f_{\theta_1}(\mathbf{x})$ es una función no decreciente de $T(\mathbf{x})$ para el conjunto de valores $\mathbf{x}$ para el cual al menos uno de los f_{θ_1} y f_{θ_2} es > 0.

También es posible definir familias de densidades con RVM no creciente en $T(\mathbf{x})$, pero tales familias pueden tratarse por simetría.

Ejemplo 10.1. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_\mathbf{n} \sim U[0,\theta], \theta > 0$. La fdp conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_\mathbf{n}$ es

$$f_\theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^\mathbf{n}} & \text{si} \quad 0 \leq \max x_i \leq \theta \\ 0 & \text{si} \quad \text{caso contrario} \end{cases}$$

Sea $\theta_2 > \theta_1$ y considere la razón

$$\begin{aligned}\frac{f_{\theta_2}(\mathbf{x})}{f_{\theta_1}(\mathbf{x})} &= \frac{\frac{1}{\theta_2^{\mathbf{n}}}\mathbf{I}_{[\text{máx}\,\mathbf{x}\leq\theta_2]}}{\frac{1}{\theta_1^{\mathbf{n}}}\mathbf{I}_{[\text{máx}\,\mathbf{x}\leq\theta_1]}} \\ &= \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\mathbf{n}}\frac{\mathbf{I}_{[\text{máx}\,\mathbf{x}\leq\theta_2]}}{\mathbf{I}_{[\text{máx}\,\mathbf{x}\leq\theta_1]}}\end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned}R(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{I}_{[\text{máx}\,\mathbf{x}\leq\theta_2]}}{\mathbf{I}_{[\text{máx}\,\mathbf{x}\leq\theta_1]}} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \text{máx}\, x_i \in [0,\theta_1] \\ \infty & \text{si} \quad \text{máx}\, x_i \in [\theta_1,\theta_2] \end{cases}\end{aligned}$$

Define $R(\mathbf{x}) = \infty$ si $\text{máx}\, x_i > \theta_2$. Resulta que $f_{\theta_2}/f_{\theta_1}$ es una función no decreciente de $\underset{1\leq i\leq n}{\text{máx}}\, \mathbf{x}_i$, y la familia de densidades uniformes en $[0,\theta]$ tiene una RVM en $T(\mathbf{x}) = \underset{1\leq i\leq n}{\text{máx}}\, \mathbf{x}_i$. ■

Teorema 10.1. Una familia exponencial de un parámetro

$$f_\theta(\mathbf{x}) = e^{Q(\theta)T(\mathbf{x})+D(\theta)+S(\mathbf{x})} \tag{10.1}$$

donde $Q(\theta)$ es no decreciente tiene una RVM en $T(\mathbf{x})$.

Prueba. Sean θ_1 y θ_2 tal que $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow Q(\theta_1) < Q(\theta_2)$ entonces tenemos la razón

$$\begin{aligned}\frac{f_{\theta_2}(\mathbf{x})}{f_{\theta_1}(\mathbf{x})} &= \frac{e^{Q(\theta_2)T(\mathbf{x})+S(\mathbf{x})+D(\theta_2)}}{e^{Q(\theta_1)T(\mathbf{x})+S(\mathbf{x})+D(\theta_2)}} \\ &= e^{\Big(Q(\theta_2)-Q(\theta_1)\Big)T(\mathbf{x})}\end{aligned}$$

Por lo que la razón es una función creciente $T(\mathbf{x})$. Si $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow Q(\theta_2) < Q(\theta_1)$ la razón es función decreciente de $T(\mathbf{x})$. □

Observación 10.1. La no-decrecencia de $Q(\theta)$ puede obtenerse mediante una reparametrización, poniendo $\eta = Q(\theta)$, si es necesario.

El teorema 10.1 incluye la distribución normal, binomial, Poisson, gamma (un parámetro fijo), beta (un parámetro fijo) y así sucesivamente. En el ejemplo 10.1 ya hemos visto que $U[0,\theta]$, que no es una familia exponencial, tiene una RVM.

Ejemplo 10.2. Sea $X \sim \mathcal{C}(1,\theta)$. Entonces

$$\frac{f_{\theta_2}(\mathbf{x})}{f_{\theta_1}(\mathbf{x})} = \frac{1+(\mathbf{x}-\theta_1)^2}{1+(\mathbf{x}-\theta_2)^2} \to 1 \text{ cuando } x \to \pm\infty$$

y se observa que $\mathcal{C}(1,\theta)$ no tiene RVM. ■

Teorema 10.2. Sea $\mathbf{X} \sim f_\theta, \theta \in \Theta$, donde $\{f_\theta\}$tiene una RVM en $T(\mathbf{x})$. Para probar $H_0\colon \theta \leq \theta_0$ versus $H_a\colon \theta > \theta_0, \theta_0 \in \Theta$ cualquier prueba de la forma

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T(\mathbf{x}) > t_0 \\ \delta & \text{si} \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}) = t_0 \\ 0 & \text{si} \quad T(\mathbf{x}) < t_0 \end{cases} \tag{10.2}$$

tiene una función de potencia no decreciente y es UMP de tamaño $\mathbf{E}_{\theta_0}[\varphi(\mathbf{X})] = \alpha$ (siempre que el tamaño no sea 0).
Además, para cada $0 \leq \alpha \leq 1$ y todo $\theta_0 \in \Theta$, existe un t_0, $-\infty \leq t_0 \leq \infty$ y $0 \leq \delta \leq 1$, de modo que la prueba descrita en relación (10.2) es la prueba UMP de tamaño de α de H_0 versus H_a.

Prueba. Sea $\theta_1, \theta_2 \in \Theta, \theta_1 < \theta_2$. Por le Lema fundamenta cualquier prueba de la forma

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda(\mathbf{x}) > k \\ \delta(\mathbf{x}) & \text{si} \quad \lambda(\mathbf{x}) = k \\ 0 & \text{si} \quad \lambda(\mathbf{x}) < k \end{cases} \tag{10.3}$$

donde $\lambda(\mathbf{x}) = \frac{f_{\theta_2}(\mathbf{x})}{f_{\theta_1}(\mathbf{x})}$ es MP de tamaño para probar $\theta = \theta_1$ versus $\theta = \theta_2$, supuesto que $0 \leq k < \infty$ y si $k = \infty$, la la prueba

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f_{\theta_1}(\mathbf{x}) = 0 \\ 0 & \text{si} \quad f_{\theta_1}(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \tag{10.4}$$

es MP de tamaño 0. Dado que f_θ tiene una RVM en T, se deduce que cualquier prueba de la forma de la relación (10.2) también es de la forma (10.3), siempre que $\mathbf{E}_{\theta_1}[\varphi(\mathbf{X})] > 0$, es decir, siempre que su tamaño sea > 0. Prueba trivial, sea $\varphi'(\mathbf{x}) = \alpha$ cuyo tamaño es α y cuya potencia también α, de modo que la potencia de cualquier prueba (10.2) es al menos α, es decir,

$$\mathbf{E}_{\theta_2}(\varphi(\mathbf{X})) \geq \mathbf{E}_{\theta_2}(\varphi'(\mathbf{X})) = \alpha = \mathbf{E}_{\theta_1}(\varphi(\mathbf{X})).$$

De ello se deduce que, si $\theta_1 < \theta_2$ y $\mathbf{E}_{\theta_1}[\varphi(\mathbf{X})] > 0$, entonces $\mathbf{E}_{\theta_1}\varphi(\mathbf{X}) \leq \mathbf{E}_{\theta_2}\varphi(\mathbf{X})$, como se afirma.
Sea $\theta_1 = \theta_0$ y $\theta_2 > \theta_0$, como antes. Sabemos que relación (10.2) es una prueba de MP de cuyo tamaño es $\mathbf{E}_{\theta_0}[\varphi(\mathbf{X})]$ para probar $\theta = \theta_0$ versus$\theta = \theta_2(\theta_2 > \theta_0)$, siempre que $\mathbf{E}_{\theta_0}[\varphi(\mathbf{X})] > 0$. Dado que la función potencia de φ es no-decreciente,

$$\mathbf{E}_\theta[\varphi(\mathbf{X})] \leq \mathbf{E}_{\theta_0}[\varphi(\mathbf{X})] = \alpha_0 \qquad \forall \theta \leq \theta_0. \tag{10.5}$$

Sin embargo, dado que φ no depende de θ_2 (depende solo de las constantes k y δ), se deduce que φ es la prueba UMP de tamaño α_0 para probar $\theta = \theta_0$

versus $\theta > \theta_0$. Por tanto, φ es UMP entre la clase de pruebas φ'' para las que

$$\mathbf{E}_{\theta_0}[\varphi''(\mathbf{X})] \leq \mathbf{E}_{\theta_0}[\varphi(\mathbf{X})] = \alpha_0. \tag{10.6}$$

Ahora, la clase de pruebas que satisfacen la relación (10.5) está contenida en la clase de pruebas que satisfacen (10.6) [hay más restricciones en (10.5)]. De ello se deduce que φ, que es UMP en la clase más grande que satisface la relación (10.6), también debe ser UMP en la clase más pequeña que satisface (10.5). Por lo tanto, siempre que $\alpha_0 > 0$, φ es la prueba UMP de tamaño α_0 para $\theta \leq \theta_0$ contra $\theta > \theta_0$. □

Observación 10.2. Al intercambiar desigualdades en todo el Teorema 10.22, vemos que este teorema también proporciona una solución del problema dual $H_0' : \theta \geq \theta_0$ contra $H_a' : \theta_a : \theta < \theta_0$.

Ejemplo 10.3. Sea X tiene una distribución hipergeométrica con fp

$$\mathbf{P}_M(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 1, 2, \ldots, M.$$

Como

$$\frac{\mathbf{P}_{M+1}(X = x)}{\mathbf{P}_M} = \frac{M+1}{N-M}\frac{N-M\_n+x}{M+1-x}$$

vemos que $\{\mathbf{P}_M\}$ tiene una RVM en x ($P_{M_2}/\mathbf{P}_{M_1}$ donde $M_2 > M_1$ es solo un producto de tales relaciones). De ello se deduce que existe una prueba UMP de $H_0\colon M \leq M_0$ contra $H_a\colon M > M_0$, que rechaza H_0 cuando X es demasiado grande, es decir, la prueba UMP de tamaño α está dada por

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > k \\ \delta & \text{si} \quad x = k \\ 0 & \text{si} \quad x < k \end{cases}$$

donde k y δ son determinados de

$$\mathbf{E}_{M_0}[\varphi(X)] = \alpha$$

■

Para la familia exponencial de un parámetro, existen pruebas UMP también para algunas hipótesis de dos caras de la forma

$$H_0 : \theta \leq \theta_1 \text{ o } \theta \geq \theta_2 \ (\theta_1 < \theta_2) \tag{10.7}$$

Declaramos el siguiente resultado sin prueba.

Teorema 10.3. Para la familia exponencial de un parámetro ecuación (10.1), existe una prueba UMP de la hipótesis $H_0 \colon \theta < \theta_1$ o $\theta \geq \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$ versus $H_a \colon \theta_1 < \theta < \theta_2$ que es de la forma

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c_1 < T(\mathbf{x}) < c_2 \\ \delta_i & \text{si} \quad T(\mathbf{x}) = c_i, \quad i = 1, 2 \quad (c_1 < c_2) \\ 0 & \text{si} \quad T(\mathbf{x}) < c_1 \text{ o } > c_2 \end{cases} \tag{10.8}$$

donde los $c's$ y los $\delta's$ están dados por

$$\mathbf{E}_{\theta_1}\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{E}_{\theta_2}\varphi(\mathbf{X}) = \alpha \tag{10.9}$$

Ver Lehmann [pp.101–103], para la prueba

Ejemplo 10.4. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias iid $\mathcal{N}(\mu, 1)$. Para probar $H_0 \colon \mu \leq \mu_0$ o $\mu \geq \mu_1 (\mu_1 > \mu_0)$ versus $H_a \colon \mu_0 < \mu < \mu_1$, la prueba UMP viene dada por

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c_1 < \sum_{i=1}^n x_i < c_2 \\ \delta_i & \text{si} \quad \sum_{i=1}^n x_i = c_1 \text{ o } c_2 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^n x_i < c_1 \text{ o } > c_2 \end{cases}$$

donde c_1, c_2 se determina de

$$\alpha = \mathbf{P}_{\mu_0}(c_1 < \sum_{i=1}^{n} X_i < c_2) = \mathbf{P}_{\mu_1}(c_1 < \sum_{i=1}^{n} X_i < c_2)$$

y $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Así

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathbf{P}\left(\frac{c_1 - n\mu_0}{\sqrt{n}} < \frac{\sum x_i - n\mu_0}{\sqrt{n}} < \frac{c_2 - n\mu_0}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{c_1 - n\mu_1}{\sqrt{n}} < \frac{\sum x_i - n\mu_1}{\sqrt{n}} < \frac{c_2 - n\mu_1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{c_1 - n\mu_0}{\sqrt{n}} < Z < \frac{c_2 - n\mu_0}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{c_1 - n\mu_1}{\sqrt{n}} < Z < \frac{c_2 - n\mu_1}{\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}$$

donde $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dados α, n, μ_0 y μ_1, podemos resolver para c_1 y c_2 de las ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{c_2 - n\mu_0}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{c_1 - n\mu_0}{\sqrt{n}}\right) &= \alpha \\
\Phi\left(\frac{c_2 - n\mu_1}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{c_1 - n\mu_1}{\sqrt{n}}\right) &= \alpha
\end{aligned}$$

donde Φ es la función de distribución de la variable aleatoria Z. ■

Observación 10.3. Se advierte que las pruebas UMP para probar $H_0\colon \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ y $H_0'\colon \theta = \theta_0$ para la familia exponencial de un parámetro no existen. Bastará con un ejemplo.

Ejemplo 10.5. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de la $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Dado que la familia de fdps conjuntas de $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiene una RVM en $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, se deduce que existen pruebas UMP para las hipótesis unilaterales $\sigma \geq \sigma_0$ y $\sigma \leq \sigma_0$.
Considere ahora las hipótesis nulas $H_0\colon \sigma = \sigma_0 0$ versus la alternativa $H_a\colon \sigma \neq$

σ_0. Probaremos que no existe una prueba UMP de H_0. Para probar $\sigma = \sigma_0$ versus $\sigma > \sigma_0$, una prueba de la forma

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i > c_1 \\ 0, & \text{si} \quad \text{caso contrario} \end{cases}$$

es una prueba UMP, y para probar $\sigma = \sigma_0$ versus $\sigma < \sigma_0$, una prueba de la forma

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i < c_2 \\ 0, & \text{si} \quad \text{caso contrario} \end{cases}$$

es una prueba UMP. Si el tamaño se elige como α, entonces $c_1 = \sigma_0^2 \chi^2(n, \alpha)$ y $c_2 = \sigma_0^2 \chi^2(n, 1-\alpha)$. Claramente, ni φ_1 ni φ_2 son pruebas UMP para probar H_0 versus $H_a\colon \sigma = \sigma_0$. La potencia de cualquiera de las pruebas de H_0 para valores $\sigma > \sigma_0$ no puede superar la de φ_1, y para valores de $\sigma < \sigma_0$ no puede superar la potencia de la prueba φ_2. Por lo tanto, ninguna prueba de H_0 puede ser una prueba UMP (véase la Fig. 10.2).

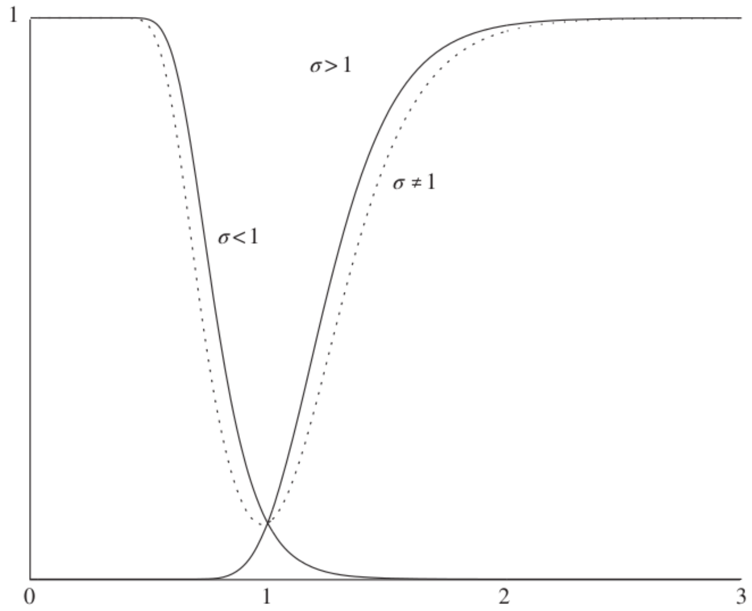

Figura 10.2: Funciones de potencia de las pruebas de chi-cuadrado de $H_0: \sigma = \sigma_0$versus contra H_a.

■

11. Problemas

1. Para las siguientes familias de fdps (fps) $f_\theta(\mathbf{x}), \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$, encuentre una prueba UMP de tamaño α de las hipótesis $H_0: \theta \leq \theta_0$ versus $H_a: \theta > \theta_0$, basada en una muestra de n observaciones.
   (a) $f_\theta(x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, x = 0, 1, 0 < \theta < 1$
   (b) $f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}, -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty.$
   (c) $f_\theta(x) = e^\theta \frac{\theta^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots; \theta > 0.$
   (d) $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, \theta > 0.$
   (e) $f_\theta(x) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-x}, x > 0, \theta > 0.$

(f) $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1, \theta > 0$.

2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de tamaño n de la fp

$$\mathbf{P}_N(x) = \frac{1}{N}, \qquad x = 1, 2, \ldots, N; N \in \{1, 2, \ldots\}.$$

(a) Demuestre que la prueba

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} > N_0 \\ \alpha, & \text{si} \quad \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_n \leq N_0 \end{cases}$$

es una prueba UMP de tamaño α par probar la hipótesis $H_0\colon N \leq N_0$ versus $H_a\colon N > N_0$.

(b) Demuestre que la prueba

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} > N_0 \text{ o} \\ & \quad \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leq \alpha^{1/n} N_0 \\ 0, & \text{si} \quad \text{caso contrario} \end{cases}$$

es una prueba UMP de tamaño α par probar la hipótesis $H_0\colon N = N_0$ versus $H_a\colon N \neq N_0$.

3. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de tamaño n de la $U(0, \theta)$, $\theta > 0$. Demuestre que la prueba

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} > \theta_0 \\ \alpha, & \text{si} \quad \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_n \leq \theta_0 \end{cases}$$

es una prueba UMP de tamaño α par probar la hipótesis $H_0\colon \theta \leq \theta_0$ versus $H_a\colon \theta > \theta_0$ y que la prueba

$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} > \theta_0 \text{ o} \\ & \quad \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leq \theta_0 \alpha^{1/n} \\ 0, & \text{si} \quad \text{caso contrario} \end{cases}$$

es una prueba UMP de tamaño α par probar la hipótesis $H_0\colon \theta = \theta_0$ versus $H_a\colon \theta \neq \theta_0$.

4. ¿La familia Laplace de fdp

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}, -\infty < x < \infty, \theta \in \mathbb{R},$$

posee un estadístico de RVM?

5. Sea X tenga distribución logística con fdp

$$f\theta(x) = e^{-x-\theta}\{1 + e^{-x-\theta}\}^{-2}, x \in \mathbb{R}.$$

¿$\{f_\theta\}$ pertenece a la familia exponencial? ¿$\{f_\theta\}$ tiene RVM?.

6. (a) Sea f_θ la fdp de una $\mathcal{N}(\theta, \theta)$. ¿$\{f_\theta\}$ tiene RVM?

(b) Haga lo mismo que en (a) si $X \sim \mathcal{N}(\theta, \theta^2)$.