Distribución de Formas Cuadráticas

Christian Amao Suxo

Escuela Profesional de Ingeniería Estadística

Contenido

- **Distribución de Formas Cuadráticas**
  - **Distribución χ^2, t-student y F de Snedecor**
  - **Distribución de Formas Cuadráticas y propiedades**
  - **Teorema de independencia de Formas Cuadráticas**

¿Cómo se relacionan las distribuciones χ^2, t y F?

Distribución	Centrada	No centrada	Con factor de corrección
χ^2	Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables aleatorias $i.i.d.$ con $x_1 \sim N(0,1)$, entonces $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sim \chi^2(n)$	Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables aleatorias independientes con $x_i \sim N(\mu_i, 1)$, entonces $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sim \chi^2(n, \lambda)$ con $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} {\mu_i}^2}{2}$	Si $Y \sim c\,\chi^2(n)$, entonces diremos que Y se distribuye como una chi – cuadrado con n grados de libertad y factor de corrección $^1/_c$
t	Si $Z \sim N(0,1)$ y $U \sim \chi^2(n)$ con Z y U independientes, entonces $\frac{Z}{\sqrt{U/n}} \sim t\,(n)$	Si $Z \sim N(\mu, 1)$ y $U \sim \chi^2(n)$ con Z y U independientes $\Rightarrow \frac{Z}{\sqrt{U/n}} \sim t\,(n, \lambda)$ con $\lambda = \frac{\mu^2}{2}$	Si $Y \sim c\,t(n)$, entonces diremos que Y se distribuye como una t – student con n grados de libertad y factor de corrección $^1/_c$
F	Si $U \sim \chi^2(m)$ y $V \sim \chi^2(n)$ con U y V independientes, entonces $\frac{U/m}{V/n} \sim F(m,n)$	Si $U \sim \chi^2(m, \lambda)$ y $V \sim \chi^2(n)$ con U y V independientes, entonces $\frac{U/m}{V/n} \sim F(m, n, \lambda)$	Si $Y \sim c\,F(m,n)$, entonces diremos que Y se distribuye como una F con m y n grados de libertad y factor de corrección $^1/_c$

¿Cómo se distribuye una forma cuadrática?

Definición de la χ^2 centrada

Sea $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbb{I}_n)$ entonces se dice que $Z = \mathbf{x}'\mathbf{x}$ posee distribución chi-cuadrada centrada con n grados de libertad y se simboliza por

$$Z = \mathbf{x}'\mathbf{x} \sim \chi^2(n)$$

.

Propiedades:

- $Z \sim \chi^2(n) \iff M_Z(t) = (1 - 2t)^{-n/2}$.
- Si $Z \sim \chi^2(n)$ entonces $\mathbb{E}(Z) = n$ y $Var(Z) = 2n$.
- Sea $\mathbf{x} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbb{I}_n)$. Entonces se cumple que:

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} \sim \chi^2(r) \iff A \; es \; idempotente \; y \; ran(A) = r$$

¿Cómo se distribuye una forma cuadrática?

Caracterización de la χ^2 no centrada

Si $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_n(\mu, \mathbb{I}_n)$ entonces diremos que $\mathbf{x}'\mathbf{x}$ se distribuye como una χ^2 no centrada con n grados de libertad y con parámetro de no centralidad $\lambda = \frac{\mu'\mu}{2}$ y se simboliza mediante $\mathbf{x}'\mathbf{x} \sim \chi^2(n, \lambda)$.

Propiedades

- Si $Y \sim \chi^2(n, \lambda)$ entonces $M_Y(t) = (1-2t)^{-n/2} e^{\frac{2\lambda t}{1-2t}}$.
- Si $Y \sim \chi^2(n, \lambda)$ entonces $\mathbb{E}(Y) = n + 2\lambda$ y $Var(Y) = 2n + 8\lambda$.
- **Propiedad reproductiva:** Sean $w_1, w_2, \ldots, w_n$ variables aleatorias independientes con $w_i \sim \chi^2(k_i, \lambda_i)$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

¿Cómo se distribuye una forma cuadrática?

Propiedades

- A partir de su f.g.m. se deduce que si $X \sim \chi^2(n, \lambda)$ entonces

$$p_X(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} p_{X_i}(x) \text{ donde } X_i \sim \chi^2(n+2i)$$

- Si $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_n(\mu, \mathbb{I}_n)$, entonces se cumple que:

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} \sim \chi^2(r, \lambda) \text{ con } \lambda = \frac{\mu' A \mu}{2} \iff A \text{ es idempotente y } ran(A) = r$$

Esperanza de una forma cuadrática

Sea $\mathbf{x}$ un vector aleatorio con $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \mu$ y $Cov(\mathbf{x}) = \Sigma$, entonces

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}'A\mathbf{x}) = tr(A\Sigma) + \mu' A \mu$$

¿Qué has aprendido?

¡Ahora es tu turno!

1. Si $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$ entonces halle la varianza de $(\mathbf{x} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)$.
2. Sea $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbb{I}_n)$ donde $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{X}$ es una matriz de rango completo (con $p < n$). Si se particiona $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2)$ donde $\mathbf{X}_1$ es de orden $n \times p_1$ con $p_1 < p$.
   a. Halle la distribución de $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{H}_\mathbf{X}\mathbf{y}}{\sigma^2}$, donde $\mathbf{H}_\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$.
   b. Halle la distribución de $\mathbf{G} = \frac{\mathbf{y}'(\mathbb{I}_n - \mathbf{H}_\mathbf{X})\mathbf{y}}{\sigma^2}$, donde $\mathbf{H}_\mathbf{X}$ es definido como en el item a.
   c. Halle la distribución de $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{y}'(\mathbf{H}_\mathbf{X} - \mathbf{H}_{\mathbf{X}_1})\mathbf{y}}{\sigma^2}$, donde $\mathbf{H}_{\mathbf{X}_1}$ es definido como en el item a.
   d. Si $p_2 = p - p_1 > p_1$ y las columnas de $\mathbf{X}_1$ son ortogonales con las columnas de $\mathbf{X}_2$, halle la distribución de
   $$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{y}'(\mathbf{H}_{\mathbf{X}_2} - \mathbf{H}_{\mathbf{X}_1})\mathbf{y}}{\sigma^2}$$
   .

¿Cómo se distribuye una forma cuadrática?

Teorema

Sea $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$ con $\Sigma > 0$. Entonces:

$$\mathbf{x}' A \mathbf{x} \sim \chi^2(r, \lambda) \; con \; \lambda = \frac{\mu' A \mu}{2} \tag{1}$$

si y solo si $A\Sigma$ es idempotente y $ran(A\Sigma) = r$.

Corolario

Sea $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$ con $\Sigma > 0$. Entonces:

$$\mathbf{x}' A \mathbf{x} \sim c\chi^2(r, \lambda) \; con \; \lambda = \frac{\mu' A \mu}{2c} \tag{2}$$

si y solo si $A\Sigma = cB$ donde B es idempotente y $ran(B) = r$.

¿Cómo se distribuye una forma cuadrática?

¡Ahora es tu turno!

1. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \sim \mathcal{N}_n(\alpha \mathbf{1}_n, \mathbf{\Sigma})$, donde

$$\mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \ldots & \rho \\ \rho & 1 & \ldots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \ldots & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}, \rho \in (-1, 1).$$

Halle la distribución de $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{\sigma^2(1-\rho)}$.

2. Si $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_{st}(\alpha(\mathbf{1}_s \otimes \mathbf{1}_t); \sigma_S^2(\mathbb{J}_s \otimes \mathbb{I}_t) + \sigma_T^2(\mathbb{I}_s \otimes \mathbb{J}_t) + \sigma_{ST}^2(\mathbb{I}_s \otimes \mathbb{I}_t))$. Halle la distribución de

$$\mathbf{y}' \left((\mathbb{I}_s - \frac{1}{s}\mathbb{J}_s) \otimes \frac{1}{t}\mathbb{J}_t \right) \mathbf{y}$$

.

¿Cuándo dos formas cuadráticas son independientes?

Teorema

Sea $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ y $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ matrices cuadradas cualquiera. Entonces:

$$\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} \text{ y } \mathbf{y}'\mathbf{B}\mathbf{y} \text{ son independientes} \iff \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B} = \mathbf{0}_{n\times n}$$

¡Ahora es tu turno!

1. Pruebe la condición necesaria del teorema anterior.
2. Del problema 2 de la slide 7, responda los siguientes items:
   a. ¿Son $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ independientes?
   b. ¿Son $\mathbf{F}$ y $\mathbf{H}$ independientes?
   c. ¿Son $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ independientes?
   d. ¿Son $\mathbf{G}$ y $\mathbf{K}$ independientes?
   e. ¿Son $\mathbf{H}$ y $\mathbf{K}$ independientes?
   g. Halle la distribución de $\mathbf{F}/\mathbf{G}$.
   h. Halle la distribución de $\mathbf{H}/\mathbf{G}$.
   i. Halle la distribución de $\mathbf{K}/\mathbf{G}$.

¿Preguntas?