UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

MODELO UNIFACTORIAL DE EFECTOS FIJOS

Modelos Lineales

Docente: Marcos Sanchez Eduardo

Last Update: 2nd December 2023

Lin Chiu.Chen Yang[1],

UNI
FIEECS

CONCEPTOS PREVIOS

Factor : Tipo de Abono

Tratamientos o niveles : A, B, C

Tipo A	Tipo B	Tipo C
y_{11}	y_{21}	y_{31}
y_{12}	y_{22}	y_{32}
y_{13}	y_{23}	y_{33}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_{1r}	y_{2r}	y_{3r}

PLANTEAMIENTO DEL MODELO

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

$$X_1 \begin{cases} 1 \quad ; & \text{si se aplicó } A \\ 0 \quad ; & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$X_2 \begin{cases} 1 \quad ; & \text{si se aplicó } B \\ 0 \quad ; & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$X_3 \begin{cases} 1 \quad ; & \text{si se aplicó } C \\ 0 \quad ; & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$Y_{11} = \beta_0 + \beta_1 + 0 + 0 + \varepsilon_{11}$$

$$Y_{12} = \beta_0 + \beta_1 + 0 + 0 + \varepsilon_{12}$$

$$\vdots$$

$$Y_{21} = \beta_0 + 0 + \beta_2 + 0 + \varepsilon_{21}$$

$$Y_{22} = \beta_0 + 0 + \beta_2 + 0 + \varepsilon_{22}$$

$$\vdots$$

$$Y_{31} = \beta_0 + 0 + 0 + \beta_3 + \varepsilon_{31}$$

$$Y_{32} = \beta_0 + 0 + 0 + \beta_3 + \varepsilon_{32}$$

$$\vdots$$

REPRESENTACIÓN MATRICIAL

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ & \vdots & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ & \vdots & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$Y_{3r*1} = X_{3r*4}\,\beta_{4*1} + \varepsilon_{3r*1}$$

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_i + \varepsilon_{ij}$$

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

Y_{ij}: *crecimiento de planta j − esima al que se aplica el tratamiento i − esimo*

β_0: *efecto de la media global*

β_i: *efecto del tratamiento i − esimo*

ε_{ij} : *error aleatorio al medir* Y_{ij}

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

I. POR REPARAMETRIZACIÓN

$¿\,Podemos\ estimar\ \beta\ ?$

$por\ metodo\ MCO\ sabemos$

$$\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$X\ de\ rango\ incompleto\ \ (x'x)^{-1}\ es\ imposible, entonces\ \boldsymbol{reparametrizamos}$

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

$$\mu + \tau_i = \mu_i$$

$Entonces\ el\ modelo\ se\ escribiría\ de\ la\ siguiente\ forma:$

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

REPRESENTACIÓN MATRICIAL

$Vamos\ a\ representar\ \ Y_{ij} = \mu_i + \ \varepsilon_{ij}\ en\ forma\ matricial$:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ \vdots \\ y_{1n} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{tr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{tr} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\widehat{\beta^*}_{MCO} = \ (W'W)^{-1} W'Y}$$

$Entonces\ tendria\ la\ \ forma:\ \ Y = W\boldsymbol{\beta}^* + \ \varepsilon$

Modelo Unifactorial Balanceado de Efectos Fijos

$$\boxed{Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}}$$

Supuestos: $\epsilon_{ij} \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$ y $\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$

Estructura matricial:

$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$; donde:

$\mathbf{X} = \left[1_t \otimes 1_r \vdots \mathbb{I}_t \otimes 1_r\right]$; $\quad \beta = \left[\mu,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \cdots,\ \tau_t\right]'$

$\varepsilon \sim \mathcal{N}_{tr}(0, \sigma_\varepsilon^2 \left[\mathbb{I}_t \otimes \mathbb{I}_r\right])$; $\quad \mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_{tr}(\mathbf{X}\beta, \sigma_\varepsilon^2 \left[\mathbb{I}_t \otimes \mathbb{I}_r\right])$

Prueba de significancia del factor:

Reparametrizamos el modelo: $y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij}$ con $\epsilon_{ij} \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$

$H_o : \mu_j = \mu, \forall j$ *vs* $H_1 : \mu_j \neq \mu$, para al menos un j.

Prueba de Hipótesis para los tratamientos de efectos fijos:

$\Rightarrow H_o : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_t = 0 \quad$ *vs.* $\quad H_1 : \tau_1 \neq \tau_2 \neq \cdots \neq \tau_t \neq 0$

Para: $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_{tr}(\mathbf{X}\beta, \sigma_\varepsilon^2 \left[\mathbb{I}_t \otimes \mathbb{I}_r\right])$

$$F_c = \frac{\frac{Y'\left[\mathbb{H}_t \otimes \frac{1}{r}\mathbb{J}_r\right]Y}{t-1}}{\frac{Y'\left[\mathbb{I}_t \otimes \mathbb{H}_r\right]Y}{t(r-1)}} \sim F_{(t-1,t(r-1))}$$

Modelo Unifactorial Balanceado de Efectos Fijos

Réplicas	Trt. 1	Trt. 2	Trt. 3	$\cdots$	Trt. t
1	y_{11}	y_{21}	y_{31}	$\cdots$	y_{t1}
2	y_{12}	y_{22}	y_{32}	$\cdots$	y_{t2}
3	y_{13}	y_{23}	y_{33}	$\cdots$	y_{t3}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
r	y_{1r}	y_{2r}	y_{3r}	$\cdots$	y_{tr}
	$\overline{Y}_{1.}$	$\overline{Y}_{2.}$	$\overline{Y}_{3.}$	$\cdots$	$\overline{Y}_{t.}$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2}_{\Downarrow\ \text{SCT}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\overline{Y}_{i.})^2}_{\Downarrow\ \text{SCR}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2}_{\Downarrow\ \text{SCE(T)}}$$

Sin embargo:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}y_{ij}^2}_{\Downarrow\ \text{SCT*}} = \underbrace{tr\overline{Y}_{..}^2}_{\Downarrow\ \text{SCE}(\mu)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\overline{Y}_{i.})^2}_{\Downarrow\ SCR} + \underbrace{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2}_{\Downarrow\ SCE(T)}$$

Tabla ANVA

Fuente	G.L.	S. C.	C. M.	F. calculado
Factor T	$t-1$	$Y'\left[\mathbb{H}_t \otimes \frac{1}{r}\mathbb{J}_r\right]Y$	CME$=\frac{Y'\left[\mathbb{H}_t \otimes \frac{1}{r}\mathbb{J}_r\right]Y}{t-1}$	$\frac{CME}{CMR}$
Residual	$t(r-1)$	$Y'\left[\mathbb{I}_t \otimes \mathbb{H}_r\right]Y$	CMR$=\frac{Y'\left[\mathbb{I}_t \otimes \mathbb{H}_r\right]Y}{t(r-1)}$	
Total	$tr-1$	$Y'\left[\mathbb{I}_{tr} - \frac{1}{tr}\mathbb{J}_{tr}\right]Y$		

EJEMPLO

Se llevó a cabo un experimento a fin de determinar si cuatro temperaturas de cocción específicas afectan la densidad de cierto tipo de ladrillo. El experimento produjo los siguientes datos:

Temperatura	Densidad			
100	21.8	21.9	21.7	21.6
125	21.7	21.4	21.5	21.4
150	21.9	21.8	21.8	21.6
175	21.9	21.7	21.8	21.4

SOLUCIÓN

Modelo

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

para $i = 1, 2, 3, 4$ y $j = 1, 2, 3, 4$, en donde:

- y_{ij}: Es la j-ésima medición de densidad (Kg/m^3) del ladrillo en la i-ésima temperatura.
- μ: Es la densidad media global del ladrillo.
- τ_i: Efecto de la i-ésima temperatura.
- e_{ij}: Error de de la observación y_{ij}.

SOLUCIÓN

Hipótesis

$$\begin{cases} H_o : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \\ H_1 : \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún i, j} \end{cases}$$

$$\text{Para un } \alpha = 0{,}05$$

Decisión

$$2{,}5126 < 3{,}4903 \Longrightarrow \text{No se rechaza } H_0$$

Conclusión
Se puede concluir con un $\alpha = 0.05$ que las cuatro temperaturas fijadas no influyen significativamente en la densidad del ladrillo.