Distribución Normal Multivariada

Christian Amao Suxo

Escuela Profesional de Ingeniería Estadística

Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Estadística

Contenido

- **Distribución Normal multivariada (DNM)**
  - **Definición de la DNM**
  - **Propiedades de la DNM**
  - **Teoremas de independencia de la DNM**
  - **Distribución condicional de la DNM**

- **Distribución Normal multivariada (DNM)**
  - **Definición de la DNM**
  - Propiedades de la DNM
  - Teoremas de independencia de la DNM
  - Distribución condicional de la DNM

¿Cómo se caracteriza la DNM?

Función de densidad

Sea $\mathbf{x}_{n\times 1}$ un vector aleatorio de orden n. Diremos que:

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma) \iff f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

En particular, si $\mu = \mathbf{0}_{n\times 1}$ y $\Sigma = \mathbb{I}_n$, entonces decimos que $\mathbf{x}$ posee una distribución normal multivariada estándar y $f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{x}}$.

Función generatriz de momentos

Sea $\mathbf{x}_{n\times 1}$ un vector aleatorio de orden n y $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Diremos que:

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma) \iff M_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{t}'\mu + \frac{1}{2}\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}}$$

- **Distribución Normal multivariada (DNM)**
  - Definición de la DNM
  - **Propiedades de la DNM**
  - Teoremas de independencia de la DNM
  - Distribución condicional de la DNM

¿Qué propiedades posee la DNM?

Teorema

Sean $\mathbf{x}$ un vector aleatorio de orden n, $A_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b_{m\times 1} \in \mathbb{R}^m$. Si $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$, entonces

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} + b \sim \mathcal{N}_m(A\mu + b, A\Sigma A').$$

Corolario

Sea $\mathbf{x}$ un vector aleatorio de orden n particionado como $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1' | \mathbf{x}_2')'$ donde $\mathbf{x}_i$ es de orden $n_i \times 1$ para $i = 1, 2$. Si $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$ donde μ y Σ son particionados adecuadamente, entonces $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ poseen distribución normal.

¿Qué has aprendido?

¡Ahora es tu turno!

1. Sea $\mathbf{y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)' \sim \mathcal{N}_4(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde $\boldsymbol{\mu} = (1, 0, 2, -1)'$ y

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Halle la distribución marginal de $Z_1 = (Y_1, Y_3)'$.
b. Halle la distribución marginal de $Z_2 = (Y_4, Y_2)'$.
c. Halle la distribución de $vec(T)$, donde $T = (Z_1, Z_2)'$.
d. Halle la distribución de $M = 4Y_1 - Y_2 + 5Y_3 + Y_4 - 2$.
e. Halle la distribución de $G = Y_1 - Y_4 + Y_2 - Y_3 + 8$.
f. Halle la distribución conjunta de M y G.

¿Qué has aprendido?

¡Ahora es tu turno!

1. Sea $\mathbf{y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_6)' \sim \mathcal{N}_6(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \mathbf{1}_3', \mu_2 \mathbf{1}_2', \mu_3)'$ y

$$\boldsymbol{\Sigma} = (0.5\mathbb{I}_3 + 0.5\mathbb{J}_3) \oplus (0.3\mathbb{I}_2 + 0.7\mathbb{J}_2) \oplus 1.$$

   Halle la distribución del vector $\overline{\mathbf{Y}} = (\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \overline{Y}_3)'$ donde

$$\overline{Y}_1 = (Y_1 + Y_2 + Y_3)/3,\ \overline{Y}_2 = (Y_4 + Y_5)/2 \text{ y } \overline{Y}_3 = Y_6$$

2. Establezca la veracidad del siguiente enunciado. En caso de no ser cierto, presente un contraejemplo:

   "*La distribución normal multivariada estándar se mantiene invariante frente a transformaciones lineales ortogonales*".

- **Distribución Normal multivariada (DNM)**
  - Definición de la DNM
  - Propiedades de la DNM
  - **Teoremas de independencia de la DNM**
  - Distribución condicional de la DNM

¿Qué propiedades de independencia tiene la DNM?

Teorema 1

Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ vectores aleatorios conjuntamente independendientes tal que $\mathbf{x}_i \sim \mathcal{N}_{n_i}(\mu_i, \Sigma_i)$ entonces $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1'|\mathbf{x}_2'|\ldots|\mathbf{x}_k')' \sim \mathcal{N}_{\sum_{i=1}^{k} n_i}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}; \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Sigma_2 & \ldots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ldots & \Sigma_k \end{pmatrix}$$

Teorema 2

Sean $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ dos vectores aleatorios de orden n_1 y n_2 respectivamente tal que $(\mathbf{x_1}', \mathbf{x_2}')' \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$ con $n = n_1 + n_2$. Entonces $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ son independientes si y solo si $Cov(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = \mathbf{0}$.

¿Qué has aprendido?

¡Ahora es tu turno!

1. Sea $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ una muestra de 4 perfiles p-variados con distribución normal multivariada con parámetro de centralidad μ y parámetro de escala Σ. Si

$$\mathbf{z}_1 = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4}{4} \text{ y } \mathbf{z}_2 = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4}{4}.$$

   a. Halle la distribución conjunta de $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$.
   b. ¿Puede usted afirmar que $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$ son independientes?

2. Sea $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ una m.a.s de n perfiles p-variados con distribución normal multivariada con parámetro de centralidad $\boldsymbol{\omega}$ y parámetro de escala $\boldsymbol{\Lambda}$. Halle la distribución de

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i$$

- **Distribución Normal multivariada (DNM)**
  - Definición de la DNM
  - Propiedades de la DNM
  - Teoremas de independencia de la DNM
  - **Distribución condicional de la DNM**

¿Cómo se caracteriza la distribución condicional en la NM?

Distribución condicional de la DNM

Sea $\mathbf{x}$ un vector aleatorio de orden n particionado como $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1'|\mathbf{x}_2')'$ donde $\mathbf{x}_i$ es de orden $n_i \times 1$ para $i = 1, 2$. Si $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$ donde μ y Σ son particionados como:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}; \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

entonces se cumple que $\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2 = x_2 \sim \mathcal{N}_{n_1}(\mu_{1.2}, \Sigma_{11.2})$ donde

$$\mu_{1.2} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2),$$

$$\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

.

¿Qué has aprendido?

¡Ahora es tu turno!

1. Sea $\mathbf{y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)' \sim \mathcal{N}_4(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde $\boldsymbol{\mu} = (1, 0, 2, -1)'$ y

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   a. Halle la distribución de $W_1 | W_2$, donde $W_1 = (Y_1, Y_2)'$ y $W_2 = (Y_3, Y_4)'$.
   b. Halle la distribución de $Z_1 | Z_2$ donde $Z_1 = (Y_1, Y_3)'$ y $Z_2 = (Y_4, Y_2)'$.
   c. Halle la correlación parcial (condicional) de Y_1 y Y_3 dado que $Y_2 = 1$.
   d. Halle la distribución de $M | G$ donde $M = 4Y_1 - Y_2 + 5Y_3 + Y_4$ y $G = Y_1 - Y_4 + Y_2 - Y_3$.

¿Preguntas?