TEORIA DE RENOVACION

Apuntes de clase, Texto básico : Sheldom Ross, Introducción a los modelos de probabilidad.

Mg. Carlos Risco

2015

Introducción y definiciones

Hemos visto que para un proceso de Poisson los tiempos de interllegadas se distribuyen como una exponencial y son además independientes e idénticamente distribuidas.

Una natural generalización es considerar un proceso de conteo para el cual los tiempos de interllegadas son independientes e idénticamente distribuidas con una distribución arbitraria. Tal proceso de conteo es llamado un proceso de renovación.

..

Formalmente, sea $\{x_n , n = 1, 2, \dots\}$ una secuencia de variables aleatorias independientes no negativas con distribución común F.

Para evitar trivialidades, suponemos que $P\{x_n = 0\} < 1$. De la no-negatividad de x_n se sigue que $E[x_n]$ existe, incluso puede ser ∞, y denotamos

..

$$u = \int_0^\infty x \, dF(x)$$

Dejamos que $s_0 = 0$,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \ , \qquad n \geq 1$$

Y definimos $N(t) = sup\{n: s_n \leq t\}$

Se sigue que de la ley fuerte de los grandes números que

$$\frac{s_n}{n} \to u$$

con probabilidad de 1.

Y que $N(t) < \infty$ con probabilidad de 1

Definición

Definición 1. El proceso $\{N(t); t \geq 0\}$ es un proceso de renovación si los tiempos de interllegadas son independientes e idénticamente distribuídas con distribución arbitraria F(t).

Nota 1 Convoluciones

EXAMPLE 1.5(D) Suppose that X and Y are independent random variables having respective distributions F and G. Then the distribution of $X + Y$—which we denote by $F * G$, and call the *convolution* of F and G—is given by

$$\begin{aligned}(F * G)(a) &= P\{X + Y \leq a\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X + Y \leq a \mid Y = y\}\, dG(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X + y \leq a \mid Y = y\}\, dG(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(a - y)\, dG(y).\end{aligned}$$

We denote $F * F$ by F_2 and in general $F * F_{n-1} = F_n$. Thus F_n, the n-fold convolution of F with itself, is the distribution of the sum of n independent random variables each having distribution F.

..

$F * G$ es llamada la convolución de F y G

Si $F = G, \Rightarrow \quad F * F$ es denotado por F_2

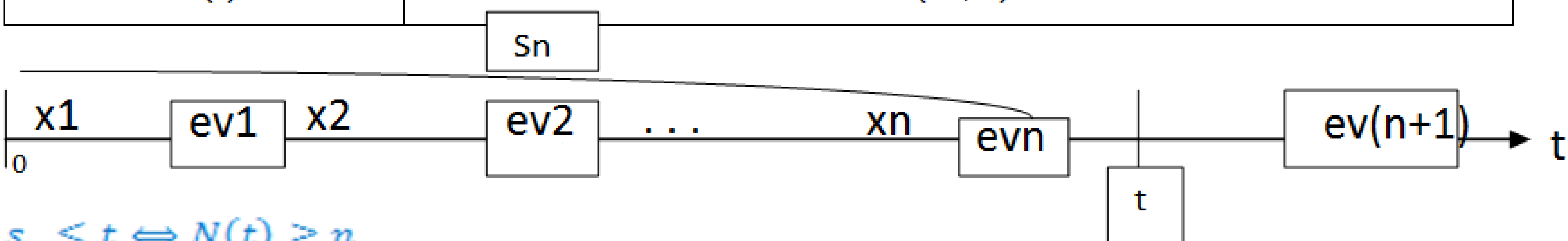
Similarmente $F_n = F * \underbrace{(F * F * \ldots * F)}_{n - 1}$

Es fácil demostrar que la función característica (o la transformada de Laplace) de una convolución, es justo el producto de sus funciones características (o transformadas de Laplace)

Distribucion de N(t)

Resumen de interpretación.

Variable aleatoria	Interpretación
x_n	Tiempo entre la (n-1)ésima y la n-ésima renovación, es decir, es el n-ésimo tiempo de interllegada.
s_n	Tiempo de la nésima renovación.
N(t)	Total de renovaciones en (0 , t).



$s_n \leq t \Leftrightarrow N(t) \geq n$

ó $\quad N(t) \geq n \Leftrightarrow s_n \leq t \qquad (1)$

Proceso de renovacion

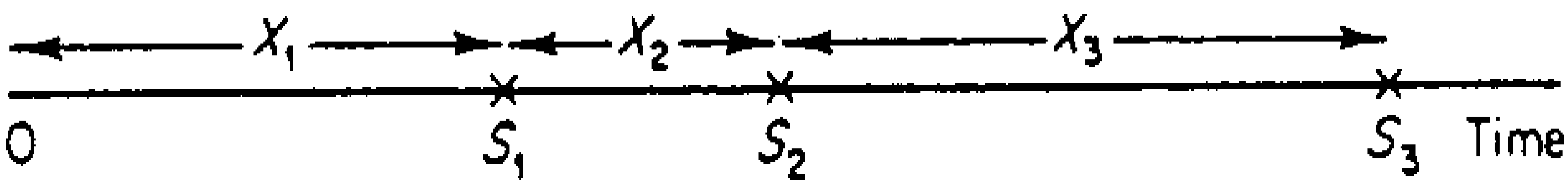


Figure 7.1.

…

De (1) obtenemos

$$P\{N(t)=n\}=P\{N(t)\geq n\}-P\{N(t)\geq n+1\}$$

$$=P\{s_n\leq t\}-P\{s_{n+1}\leq t\}$$

$$=F_n(t)-F_{n+1}(t) \qquad (2)$$

...

Sea $m(t) = EN(t)$

$m(t)$ es llamada la función de renovación, y la teoría de renovación está relacionada con sus propiedades.

Proposición 1.

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \qquad (3)$$

<u>Prueba</u>

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \qquad donde\ A_n = \begin{cases} 1 & \text{si la n-ésima renovación ha ocurrida en } [0,t] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De aquí, $E[N(t)] = E\sum_{n=1}^{\infty} A_n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\, A_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\, A_n = 1\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\, S_n \leq t\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

Donde el intercambio del esperado y la suma es por la no negatividad de las A_n.

..

Proposición 2. $m(t) < \infty \quad \forall t \geq 0$

También $E\left(N(t)\right)^r < \infty \quad \forall t \geq 0,\ r \geq 0$

Proposición 3. Existe una correspondencia uno a uno entre la distribución de interllegadas F y la función de renovación m(t).

Prueba. Tomando transformada de Laplace a ambos lados de

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

Tenemos

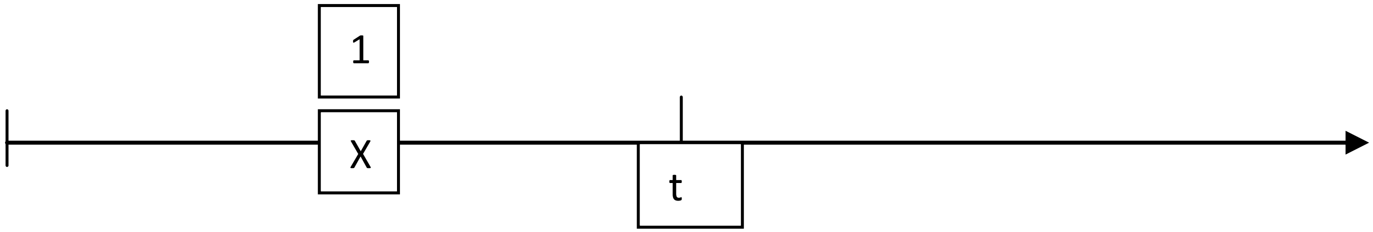
$$\tilde{m}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n(s)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{F}(s)]^n$$

$$= \frac{\tilde{F}(s)}{1 - \tilde{F}(s)}$$

O equivalente $\tilde{F}(s) = \dfrac{\bar{m}(s)}{1 + \bar{m}(s)}$ de aquí $\bar{F}$ es determinado por m(t); como la transformada de Laplace determina la distribución se tiene que F también es determinado por m(t).

1. Ecuación de renovación y generalizaciones.



Una ecuación integral para m(t) puede ser obtenida condicionando sobre el tiempo de la primera renovación.

Haciendo esto, obtenemos

$$m(t) = \int_0^{\infty} E\left[N(t)/x_1 = x\right] dF(x) \qquad (5)$$

Tenemos que $E\left[N(t)/x_1 = x\right] = \begin{cases} 0 & x > t \\ 1 + m(t-x) & x \leq t \end{cases}$ (6)

..

Poniendo (6) en (5) obtenemos

$$m(t) = \int_0^t [1 + m(t - x)] \, dF(x)$$

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t - x) \, dF(x) \qquad (7)$$

La ecuación (7) es conocida como la ecuación de renovación y puede ser resuelta para $m(t)$.

..

Una generalización de la ecuación de renovación es la siguiente:

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)\ dF(x) \qquad (t \geq 0) \qquad (8)$$

Donde h y F son conocidas y g es una función desconocida a ser determinada como la solución de la integral (8).

La ecuación integral (8) se dice que es una ecuación de tipo renovación y su solución está dada por la siguiente:

..

Proposición 4. Si $g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)\ dF(x) \qquad (t \geq 0)$

Entonces $g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x)\ dm(x)$

Donde:

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$$

..

Prueba. La Ecuación (8) establece que

$$g = h + g * F$$

Y tomando transformada de Laplace produce

$$\tilde{g}(s) = \tilde{h}(s) + \tilde{g}(s)\tilde{F}(s)$$

ó $$\tilde{g}(s) = \frac{\tilde{h}(s)}{1 - \tilde{F}(s)}$$

El cual es equivalente a

$$\tilde{g}(s) = \tilde{h}(s)\left[1 + \frac{\tilde{F}(s)}{1 - \tilde{F}(s)}\right]$$

$$= \tilde{h}(s) + \tilde{h}(s)\frac{\tilde{F}(s)}{1 - \tilde{F}(s)}$$

Pero sabemos que $\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{F}(s)}$, obtenemos

$$\tilde{g}(s) = \tilde{h}(s) + \tilde{h}(s)\tilde{m}(s)$$

$$\tilde{g}(s) = \widetilde{h(s) + h(s)m(s)}$$

$$\tilde{g}(s) = \widetilde{h + h * m}$$

Puesto que la transformada de Laplace determina la función, esto produce el resultado deseado, esto es

$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x)\ dm(x)$ $\quad$ $donde$ $\quad$ $m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$.

..

1. Teoremas límites.

La expresión $\frac{1}{u} = \frac{1}{\int_0^{\infty} x\,dF(x)}$ es frecuentemente llamada la tasa del proceso,

(donde $\frac{1}{\infty} = 0$)

La justificación teórica para esto es dado por el siguiente teorema.

<u>Teorema 5</u>. Con probabilidad 1,

$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{u}$ Cuando $t \to \infty$

Proceso de renovacion

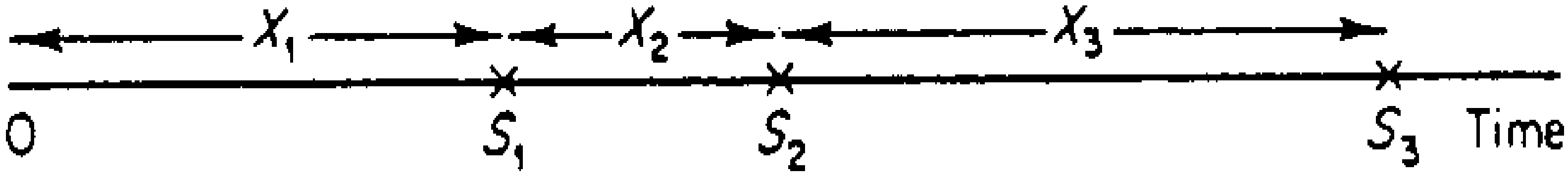


Figure 7.1.

..

Por la definición de N(t), se sigue

$$S_{N(t)} \leq t \leq S_{N(t)+1}$$

De aquí :

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \qquad (9)$$

Ahora la ley fuerte de los grandes números establece que con probabilidad 1, $\frac{S_n}{n} \to u$ cuando $n \to \infty$. Puesto que $N(t) \to \infty$ con probabilidad 1, cuando $t \to \infty$, obtenemos

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to u \quad \text{cuando } t \to \infty \quad \text{(con probabilidad 1)} \qquad (10)$$

..

Por el mismo argumento, podemos ver que con probabilidad 1,

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} \to u.1 = u \qquad cuando\ t \to \infty \qquad (11)$$

El resultado se sigue de (9), (10) y (11)

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{u} \qquad cuando\ t \to \infty$$

Ejemplo. Juan tiene una radio que funciona con una batería, cuando la batería falla es reemplazada por una nueva. Si el tiempo de vida de la batería se distribuye según una Uniforme en el intervalo (40, 60), en horas.

Entonces, cada cuanto tiempo Juan debe cambiar la batería?

Sol.

Sea $N(t)$ el número de baterías falladas hasta el tiempo t.

Por la proposición anterior tenemos

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{u} = \frac{1}{50} \qquad cuando \;\; t \to \infty$$

Esto es Juan debe cambiar en su radio la batería cada 50 horas.

Example 7.6 Suppose that potential customers arrive at a single-server bank in accordance with a Poisson process having rate λ. However, suppose that the potential customer will enter the bank only if the server is free when he arrives. That is, if there is already a customer in the bank, then our arriver, rather than entering the bank, will go home. If we assume that the amount of time spent in the bank by an entering customer is a random variable having distribution G, then

(a) what is the rate at which customers enter the bank?
(b) what proportion of potential customers actually enter the bank?

Solution: In answering these questions, let us suppose that at time 0 a customer has just entered the bank. (That is, we define the process to start when the first customer enters the bank.) If we let μ_G denote the mean service time, then, by the memoryless property of the Poisson process, it follows that the mean time between entering customers is

$$\mu = \mu_G + \frac{1}{\lambda}$$

Hence, the rate at which customers enter the bank will be given by

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{1 + \lambda\mu_G}$$

On the other hand, since potential customers will be arriving at a rate λ, it follows that the proportion of them entering the bank will be given by

$$\frac{\lambda/(1 + \lambda\mu_G)}{\lambda} = \frac{1}{1 + \lambda\mu_G}$$

In particular if $\lambda = 2$ (in hours) and $\mu_G = 2$, then only one customer out of five will actually enter the system. ■

TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL PARA PROCESOS DE RENOVACION

Este establece que, para t grande, N(t) se distribuye aproximadamente como una normal con media t/μ y varianza tσ2/μ3, donde μ y σ2 son, respectivamente, la media y varianza de la distribución de los tiempos de inter llegadas. Es decir, tenemos el siguiente teorema:

Central Limit Theorem for Renewal Processes

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{N(t)-t/\mu}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}\,dx$$

Además, como podría esperarse del teorema del límite central para un proceso de renovacion, se puede demostrar que Var(N(t))/t converge a σ2/μ3. Es decir, se puede demostrar que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(N(t))}{t} = \sigma^2/\mu^3$$

Esto es el número promedio de renovaciones converge a $\frac{1}{u}$

Nos preguntamos $\frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{u}$?

1. Ecuación de Wald.

Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias independientes.

Definición 2. Una variable aleatoria entera positiva N se dice que es **un tiempo de para** (stopping time) para la secuencia $X_1, X_2, \ldots$ si el evento $\{N = n\}$ es independiente de $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Intuitivamente, nosotros observamos las $X_n^{'}s$ en el tiempo y *N* denota el tiempo en el cual nosotros paramos.

Ejemplo 1. Sean $X_n, \; n = 1, 2, \ldots$ variables aleatorias independientes tal que

$$P\{X_n = 0\} = P\{X_n = 1\} = \frac{1}{2} \quad , \; n = 1, 2, \ldots$$

Sea $N = \min\{n : X_1 + X_2, \ldots + X_n = 10\}$

$\Rightarrow N$ es un stopping time.

Ejemplo 2. Sean $X_n, \; n = 1, 2, \ldots$ variables aleatorias independientes tal que

$$P\{X_n = -1\} = P\{X_n = 1\} = \frac{1}{2} \quad , \; n = 1, 2, \ldots$$

Sea $N = \min\{n : X_1 + X_2, \ldots + X_n = 1\}$

$\Rightarrow N$ es un stopping time.

Teorema 6. (Ecuación de Wald).

Si $x_1, x_2, \ldots$ variable aleatoria independientes e ident. Dist. Teniendo esperados finitos, y si N es un stopping time para $x_1, x_2, \ldots$ tal que $EN < \infty$, entonces

$$E\sum_{1}^{N} x_i = EN.Ex$$

Prueba.

Sea $y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } N \geq n \\ 0 & \text{si } N < n \end{cases}$

Tenemos

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

Esto es

$$E\sum_{n=1}^{N} x_n = E\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} E(x_n y_n) \qquad (12)$$

Tenemos que $y_n = 1 \Leftrightarrow$ no hemos parado en las sucesiva observaciones $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. Por tanto y_n es determinado por $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ y es independiente de x_n. De (12)

Obtenemos

$$E\sum_{n=1}^{N} x_n = \sum Ex_n Ey_n$$

$$Ex\sum_{n=1}^{\infty} Ey_n$$

$$Ex\sum_{n=1}^{\infty} P\{N \geq n\}$$

$$Ex.EN$$

Notas. En la ecuación (12) el intercambio del esperado y la suma es justificado por que todos los términos son no negativos.

Para el ejemplo 1, la ecuación de Wald implica

$$E[x_1 + \dots x_N] = \frac{1}{2} EN$$

Pero, $x_1 + \dots x_N = 10$ por la definición de N, y por tanto $EN = 20$.

Una aplicación de la Ecuación de Wald al ejemplo 2, puede producir

$$E[x_1 + \dots x_N] = EN.Ex$$

Pero, $x_1 + \dots x_N = 1$ y Ex=0, puede haber contradicción. En este caso la ecuación de Wald es no aplicable, el cual produce la conclusión que $EN = \infty$.

Para aplicar la ecuación de Wald a la teoría de renovación, debemos primero descubrir un stopping time.

El obvio candidato es $N(t)$. veamos

$$N(t) = n \Leftrightarrow x_1 + \ldots x_n \le t \quad y \quad x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} > t \qquad (13)$$

Esto es el evento $\{N(t) = n\}$ no es independiente de x_{n+1} Por tanto $N(t)$ no es un stopping time.

Pero $N(t) + 1$ si es un stopping time,

puesto que N(t)+1=n si y solo si N(t)=n-1

Sii $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \le t$ y $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \rangle t$

Esto es, el evento $\{N(t)+1=n\}$ depende solo de $x_1,\ldots,x_n$ y es independiente de $x_{n+1},x_{n+2},\ldots$ y por la definición de stopping time, $N(t)+1$ es un stopping time.

Además $E[N(t)+1]=m(t)+1<\infty$ y de la Ecuación de Wald obtenemos

$$E\left[x_1+x_2+\ldots+x_{N(t)+1}\right]=Ex.E\left[N(t)+1\right]$$

<u>Corolario 7</u>.

Si $u < \infty$, entonces $E\left[\ S_{N(t)+1}\right] = u.\,(m(t) + 1\ )$ (14)

Teorema 8. (El teorema elemental de renovación)

$$\frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{u} \quad cuando \quad t \to \infty$$

Prueba

Supongamos que $u < \infty$

L______x__________x________x________t_________x___________tiempo

SN(t)   SN(t)+1

Las x marcan una renovación.

De la figura, $S_{N(t)+1} \geq t$

Y por el corolario 7 $u(m(t)+1) \geq t$

Implicando que

$$\lim_{t \to \infty} inf \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{u}$$

Se puede probar también que

$$\lim_{t \to \infty} sup \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{u}$$

$$\therefore \quad \frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{u} \quad cuando \quad t \to \infty$$

Una variable aleatoria no negativa x se dice que es un tipo de rejilla si $\exists \quad d \geq 0$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\{X = nd\} = 1$$

El más grande d teniendo esta propiedad, se dice que d es período de x. si x es rejilla y F es la función de distribución de x, entonces se dice que F es rejilla.

Teorema 9. (Teorema de Blackwell)

(i) Si F es no rejilla, entonces

$$m(t+a) - m(t) \rightarrow \frac{a}{u} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty \qquad \forall\ a \geq 0$$

(ii) Si F es rejilla con período d, entonces

$$\lim_{n\rightarrow\infty} P\{una\ renovación\ en\ nd\} \rightarrow \frac{d}{u}$$

Una condición suficiente para que h sea directamente Riemann integrable es que

(i) $h(t) \geq 0 \quad \forall\, t \geq 0$

(ii) $h(t)$ es no creciente

(iii) $\int_0^\infty h(t)dt < \infty$

Teorema 10. (Teorema clave de renovación)

Si F es no rejilla, y si $h(t)$ es directamente Riemann integrable, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t h(t-x)dm(x) = \frac{1}{u}\int_0^\infty h(t)dt$$

Discusión: del teorema de Blackwell tenemos

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t+a)-m(t)}{a}=\frac{1}{u}$$

Y de aquí,

$$\lim_{a\to o}\lim_{t\to\infty}\frac{m(t+a)-m(t)}{a}=\frac{1}{u}$$

Ahora, asumiendo que podemos justificar el intercambio de límites, y asumiendo que todo es " ok ", obtenemos

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dm(t)}{dt}=\frac{1}{u}$$

El teorema clave de renovación es justo la formalización de esta idea.

Ejemplo. 3. Proceso de renovación alternante.

Considere un sistema en el cual puede estar en uno de dos estados, **on** y **off**.

Inicialmente está **on** por un tiempo $\mathbf{x_1}$, luego a **off** por un tiempo $\mathbf{y_1}$, luego va **on** un tiempo $\mathbf{x_2}$, y luego va **off** por un tiempo $\mathbf{y_2}$, …

Suponga que las **x**'s son independientes con distribución común **F**,

Y las **y**'s son independientes con distribución común **G**;

Suponga además, que las **x**'s y **y**'s son independientes uno de otro.

Sea H = F * G y Sea P(t) = P {el sistema está en **ON** en el tiempo t}

Proposición 3.11

Si $E(x+y)$ es finito y H no es rejilla, entonces

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{Ex}{Ex+Ey}$$

Si dejamos que $Q(t) = P\{el\ sistema\ Off\ en\ el\ tiempo\ t\}$

$= 1 - P(t)$, entonces

$$Q(t) \to \frac{Ey}{Ex+Ey}$$

y notamos que el hecho que el sistema se inicie **on** no hace diferencia en el límite.

PROCESO DE RENOVACIÓN PREMIADO

- Un gran número de modelos de probabilidad son casos especiales del siguiente modelo:
- Considere el proceso de renovación $\{N(t), t \geq 0\}$, teniendo tiempos de interllegada X_n, $n \geq 1$, y supongamos que cada vez que ocurre una renovación recibimos un premio. Denotemos por R_n el premio ganado en la n-ésima renovación y asumimos que R_n son i.i.d. Pero podemos permitir que R_n dependa de X_n, la longitud del intervalo de la n-ésima renovación.
- Si dejamos que:

..

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n$$

then $R(t)$ represents the total reward earned by time t. Let

$$E[R] = E[R_n], \quad E[X] = E[X_n]$$

..

Proposition 7.3 If $E[R] < \infty$ and $E[X] < \infty$, then

(a) with probability 1, $$\lim_{t \to \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E[R]}{E[X]}$$

(b) $$\lim_{t \to \infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R]}{E[X]}$$

Proof. We give the proof for (a) only. To prove this, write

$$\frac{R(t)}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{t} = \left(\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{N(t)}\right)\left(\frac{N(t)}{t}\right)$$

By the strong law of large numbers we obtain

$$\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{N(t)} \to E[R] \quad \text{as } t \to \infty$$

and by Proposition 7.1

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{E[X]} \quad \text{as } t \to \infty$$

The result thus follows.

Nota 1

- Si decimos que un ciclo se ha completado cada vez que una renovación ha ocurrido, entonces la proposición 7.3, establece que a la larga, el promedio del premio por unidad de tiempo es igual al esperado del premio ganado durante un ciclo, dividido por el esperado de la longitud de un ciclo.

$$\frac{E[\text{premios durante un ciclo}]}{E[\text{tiempo de un ciclo}]} = \frac{\mu_{\text{premio en el ciclo}}}{\mu_{\text{tiempo de un ciclo}}}$$

Ejm

(i) If we say that a *cycle* is completed every time a renewal occurs, then Proposition 7.3 states that the long-run average reward per unit time is equal to the expected reward earned during a cycle divided by the expected length of a cycle. For instance, in Example 7.6 if we suppose that the amounts that the successive customers deposit in the bank are independent random variables having a common distribution H, then the rate at which deposits accumulate—that is, $\lim_{t\to\infty}$ (total deposits by the time $t)/t$—is given by

$$\frac{E[\text{deposits during a cycle}]}{E[\text{time of cycle}]} = \frac{\mu_H}{\mu_G + 1/\lambda}$$

where $\mu_G + 1/\lambda$ is the mean time of a cycle, and μ_H is the mean of the distribution H.

Nota 2

- Toda vez que hemos supuesto que el premio es ganado en el tiempo de una renovación, el resultado resulta válido cuando el premio es ganado gradualmente a través del ciclo de renovación.

..

Example 7.12 (A Car Buying Model) The lifetime of a car is a continuous random variable having a distribution H and probability density h. Mr. Brown has a policy that he buys a new car as soon as his old one either breaks down or reaches the age of T years. Suppose that a new car costs C_1 dollars and also that an additional cost of C_2 dollars is incurred whenever Mr. Brown's car breaks down. Under the assumption that a used car has no resale value, what is Mr. Brown's long-run average cost?

..

If we say that a cycle is complete every time Mr. Brown gets a new car, then it follows from Proposition 7.3 (with costs replacing rewards) that his long-run average cost equals

$$\frac{E[\text{cost incurred during a cycle}]}{E[\text{length of a cycle}]}$$

..

Now letting X be the lifetime of Mr. Brown's car during an arbitrary cycle, then the cost incurred during that cycle will be given by

$$\begin{array}{ll} C_1, & \text{if } X > T \\ C_1 + C_2, & \text{if } X \leqslant T \end{array}$$

so the expected cost incurred over a cycle is

$$C_1 P\{X > T\} + (C_1 + C_2) P\{X \leqslant T\} = C_1 + C_2 H(T)$$

..

Also, the length of the cycle is

$$\begin{array}{ll} X, & \text{if } X \leqslant T \\ T, & \text{if } X > T \end{array}$$

and so the expected length of a cycle is

$$\int_0^T xh(x)\,dx + \int_T^\infty Th(x)\,dx = \int_0^T xh(x)\,dx + T[1 - H(T)]$$

..

Therefore, Mr. Brown's long-run average cost will be

$$\frac{C_1 + C_2 H(T)}{\int_0^T x h(x)\, dx + T[1 - H(T)]}$$

..

Now, suppose that the lifetime of a car (in years) is uniformly distributed over $(0, 10)$, and suppose that C_1 is 3 (thousand) dollars and C_2 is $\frac{1}{2}$ (thousand) dollars. What value of T minimizes Mr. Brown's long-run average cost?

..

If Mr. Brown uses the value T, $T \leqslant 10$, then from Equation (7.13) his long-run average cost equals

$$\frac{3 + \frac{1}{2}(T/10)}{\int_0^T (x/10)\,dx + T(1 - T/10)} = \frac{3 + T/20}{T^2/20 + (10T - T^2)/10}$$

$$= \frac{60 + T}{20T - T^2}$$

...

We can now minimize this by using the calculus. Toward this end, let

$$g(T) = \frac{60 + T}{20T - T^2}$$

then

$$g'(T) = \frac{(20T - T^2) - (60 + T)(20 - 2T)}{(20T - T^2)^2}$$

Equating to 0 yields

$$20T - T^2 = (60 + T)(20 - 2T)$$

or, equivalently,

$$T^2 + 120\,T - 1200 = 0$$

which yields the solutions

$$T \approx 9.25 \quad \text{and} \quad T \approx -129.25$$

Since $T \leqslant 10$, it follows that the optimal policy for Mr. Brown would be to purchase a new car whenever his old car reaches the age of 9.25 years. ■