Cadenas de Markov

Introduccion

Apuntes de clase

Books: S. Roos, H. Taha

- ....

El espacio de eventos

Definition 1.1 *A probabilistic model for a random experiment is a* **probability space** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, where* Ω *is the sample space,* $\mathcal{A}$ *is a* σ*-field of subsets (events) of* Ω*, and* P *is a* **probability measure** *defined on* $\mathcal{A}$ *(for* $A \in \mathcal{A}$*,* $P(A)$ *is the probability of* A*). A probability measure is a map* $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ *such that*

(i) $P(\Omega) = 1$ *and*

(ii) For any sequence $A_n \in \mathcal{A}$*,* $n \geq 1$*, where the* A_n*'s are pairwise disjoint,*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \qquad (\ \sigma\text{-additivity}).$$

The pair $(\Omega, \mathcal{A})$ is called a *measurable space.*

Def Cadena de Markov

A stochastic process $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$, with a finite or countable state space, is said to be a Markov chain if for all states $i_0, i_i, \ldots, i_{n-1}, i, j$, and all $n \geq 0$,

$$P\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} \\ = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \tag{1}$$

If $P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$ is independent of n, then the Markov chain is said to possess stationary transition probabilities. We shall only consider Markov chains with this property, and we shall let

$$P_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

..

The value P_{ij} represents the probability that the process will, when in state i, next make a transition into state j. Since probabilities are nonnegative and since the process must make a transition into some state, we have that

$$P_{ij} \geqslant 0, \qquad i, j \geqslant 0; \qquad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \qquad i = 0, 1, \ldots$$

Let $\mathbf{P}$ denote the matrix of one-step transition probabilities P_{ij}, so that

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{array}{cccc} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right\|$$

- ..

Example 4.1 (Forecasting the Weather): Suppose that the chance of rain tomorrow depends on previous weather conditions only through whether or not it is raining today and not on past weather conditions. Suppose also that if it rains today, then it will rain tomorrow with probability α; and if it does not rain today, then it will rain tomorrow with probability β.

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{matrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{matrix} \right\|$$

..

Example 4.2 On any given day Gary is either cheerful (C), so-so (S), or glum (G). If he is cheerful today, then he will be C, S, or G tomorrow with respective probabilities 0.5, 0.4, 0.1. If he is feeling so-so today, then he will be C, S, or G tomorrow with probabilities 0.3, 0.4, 0.3. If he is glum today, then he will be C, S, or G tomorrow with probabilities 0.2, 0.3, 0.5.

Letting X_n denote Gary's mood on the nth day, then $\{X_n, n \geqslant 0\}$ is a three-state Markov chain (state $0 = C$, state $1 = S$, state $2 = G$) with transition probability matrix

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{Vmatrix} \qquad \blacksquare$$

..

Example 4.3 (A Random Walk Model) A Markov chain whose state space is given by the integers $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ is said to be a random walk if, for some number $0 < p < 1$,

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}, \qquad i = 0, \pm 1, \ldots$$

The preceding Markov chain is called a *random walk* for we may think of it as being a model for an individual walking on a straight line who at each point of time either takes one step to the right with probability p or one step to the left with probability $1 - p$. ■

..

4.2. Chapman–Kolmogorov Equations

We have already defined the one-step transition probabilities P_{ij}. We now define the n-step transition probabilities P_{ij}^n to be the probability that a process in state i will be in state j after n additional transitions. That is,

$$P_{ij}^n = P\{X_{n+m} = j \mid X_m = i\}, \qquad n \geq 0,\ i, j \geq 0$$

Of course $P_{ij}^1 = P_{ij}$. The *Chapman–Kolmogorov equations* provide a method for computing these n-step transition probabilities. These equations are

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^n P_{kj}^m \qquad \text{for all } n, m \geq 0, \text{ all } i, j \tag{4.2}$$

Aquí…

summing over all intermediate states k yields the probability that the process will be in state j after $n + m$ transitions. Formally, we have

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{n+m} &= P\{X_{n+m} = j \mid X_0 = i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{n+m} = j, X_n = k \mid X_0 = i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i\} P\{X_n = k \mid X_0 = i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}^{m} P_{ik}^{n}
\end{aligned}$$

...

If we let $\mathbf{P}^{(n)}$ denote the matrix of n-step transition probabilities P_{ij}^n, then Equation (4.2) asserts that

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{P}^{(m)}$$

where the dot represents matrix multiplication.* Hence, in particular,

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^{(1+1)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^2$$

and by induction

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1+1)} = \mathbf{P}^{n-1} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^n$$

That is, the n-step transition matrix may be obtained by multiplying the matrix $\mathbf{P}$ by itself n times.

• • •

Example 4.7 Consider Example 4.1 in which the weather is considered as a two-state Markov chain. If $\alpha = 0.7$ and $\beta = 0.4$, then calculate the probability that it will rain four days from today given that it is raining today.

Solution: The one-step transition probability matrix is given by

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{Vmatrix}$$

Hence,

$\cdots$

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2 = \begin{Vmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{(4)} = (\mathbf{P}^2)^2 = \begin{Vmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{Vmatrix}$$

and the desired probability P_{00}^4 equals 0.5749. ◆

• • •

So far, all of the probabilities we have considered are conditional probabilities. For instance, P_{ij}^n is the probability that the state at time n is j *given* that the initial state at time 0 is i. If the unconditional distribution of the state at time n is desired, it is necessary to specify the probability distribution of the initial state. Let us denote this by

$$\alpha_i \equiv P\{X_0 = i\}, \qquad i \geq 0 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1 \right)$$

. . .

All unconditional probabilities may be computed by conditioning on the initial state. That is,

$$P\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^{n} \alpha_i$$

• • •

For instance, if $\alpha_0 = 0.4$, $\alpha_1 = 0.6$, in Example 4.7, then the (unconditional) probability that it will rain four days after we begin keeping weather records is

$$\begin{aligned} P\{X_4 = 0\} &= 0.4P_{00}^4 + 0.6P_{10}^4 \\ &= (0.4)(0.5749) + (0.6)(0.5668) \\ &= 0.5700 \end{aligned}$$

• • •

4.3. Classification of States

State j is said to be *accessible* from state i if $P_{ij}^n > 0$ for some $n \geq 0$. Note that this implies that state j is accessible from state i if and only if, starting in i, it is possible that the process will ever enter state j. This is true since if j is not accessible from i, then

$$
\begin{aligned}
P\{\text{ever enter } j \mid \text{start in } i\} &= P\left\{\bigcup_{n=0}^{\infty} \{X_n = j\} \,\middle|\, X_0 = i\right\} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n \\
&= 0
\end{aligned}
$$

...

Two states i and j that are accessible to each other are said to *communicate*, and we write $i \leftrightarrow j$.

Note that any state communicates with itself since, by definition,

$$P_{ii}^0 = P\{X_0 = i \mid X_0 = i\} = 1$$

The relation of communication satisfies the following three properties:

(i) State i communicates with state i, all $i \geq 0$.
(ii) If state i communicates with state j, then state j communicates with state i.
(iii) If state i communicates with state j, and state j communicates with state k, then state i communicates with state k.

Continuacion clasificacion de estados

Properties (i) and (ii) follow immediately from the definition of communication. To prove (iii) suppose that i communicates with j, and j communicates with k. Thus, there exists integers n and m such that $P_{ij}^n > 0$, $P_{jk}^m > 0$. Now by the Chapman-Kolmogorov equations, we have that

$$P_{ik}^{n+m} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{ir}^n P_{rk}^m \geq P_{ij}^n P_{jk}^m > 0$$

Hence, state k is accessible from state i. Similarly, we can show that state i is accessible from state k. Hence, states i and k communicate.

...

Two states that communicate are said to be in the same *class*. It is an easy consequence of (i), (ii), and (iii) that any two classes of states are either identical or disjoint. In other words, the concept of communication divides the state space up into a number of separate classes. The Markov

chain is said to be *irreducible* if there is only one class, that is, if all states communicate with each other.

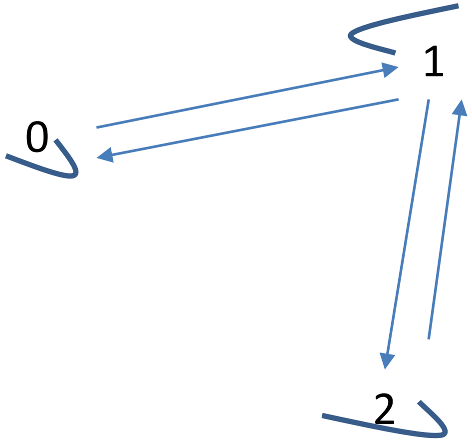
…

Example 4.9 Consider the Markov chain consisting of the three states 0, 1, 2 and having transition probability matrix

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}$$

It is easy to verify that this Markov chain is irreducible.

Grafico del ejemplo

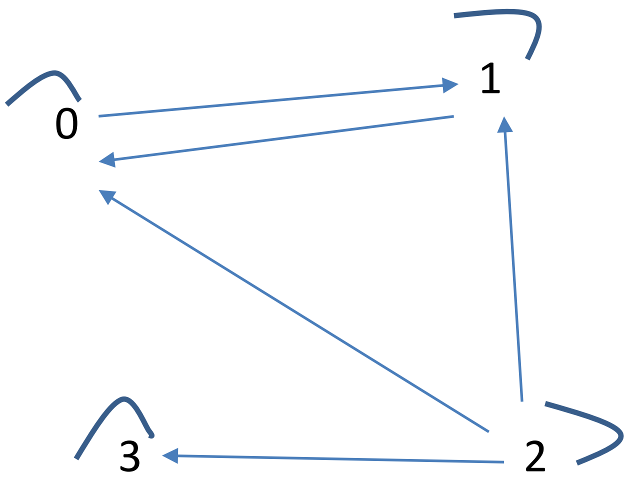


...

Example 4.10 Consider a Markov chain consisting of the four states 0, 1, 2, 3 and have a transition probability matrix

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

The classes of this Markov chain are $\{0, 1\}$, $\{2\}$, and $\{3\}$. Note that while state 0 (or 1) is accessible from state 2, the reverse is not true. Since state 3 is an absorbing state, that is, $P_{33} = 1$, no other state is accessible from it. ◆



0
1
2
3

...

For any state i we let f_i denote the probability that, starting in state i, the process will ever reenter state i. State i is said to be *recurrent* if $f_i = 1$ and *transient* if $f_i < 1$.

...... Continual repetition of this argument leads to the conclusion that *if state i is recurrent then, starting in state i, the process will reenter state i again and again and again—in fact, infinitely often.*

...

On the other hand, suppose that state i is transient. Hence, each time the process enters state i there will be a positive probability, namely, $1 - f_i$,

that it will never again enter that state. Therefore, starting in state i, the probability that the process will be in state i for exactly n time periods equals $f_i^{n-1}(1 - f_i)$, $n \geq 1$. In other words, *if state i is transient then, starting in state i, the number of time periods that the process will be in state i has a geometric distribution with finite mean* $1/(1 - f_i)$.

...

From the preceding two paragraphs, it follows that *state i is recurrent if and only if, starting in state i, the expected number of time periods that the process is in state i is infinite*. But, letting

$$I_n = \begin{cases} 1, & \text{if } X_n = i \\ 0, & \text{if } X_n \neq i \end{cases}$$

we have that $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ represents the number of periods that the process is in state i. Also,

...

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_n \middle| X_0 = i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E[I_n | X_0 = i]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n = i | X_0 = i\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n$$

We have thus proven the following.

...

Proposition 4.1 State i is

$$\text{recurrent if } \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty,$$

$$\text{transient if } \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} < \infty$$

...

Corollary 4.2 If state i is recurrent, and state i communicates with state j, then state j is recurrent.

Proof To prove this we first note that, since state i communicates with state j, there exists integers k and m such that $P_{ij}^k > 0$, $P_{ji}^m > 0$. Now, for any integer n

$$P_{jj}^{m+n+k} \geq P_{ji}^m P_{ii}^n P_{ij}^k$$

...

From the preceding we obtain, by summing over n, that

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{m+n+k} \geq P_{ji}^{m} P_{ij}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty$$

since $P_{ji}^{m} P_{ij}^{k} > 0$, and $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n}$ is infinite since state i is recurrent. Thus, by Proposition 4.1 it follows that state j is also recurrent. ◆

...

Remarks (i) Corollary 4.2 also implies that transience is a class property. For if state i is transient and communicates with state j, then state j must also be transient. For if j were recurrent then, by Corollary 4.2, i would also be recurrent and hence could not be transient.

(ii) Corollary 4.2 along with our previous result that not all states in a finite Markov chain can be transient leads to the conclusion that all states of a finite irreducible Markov chain are recurrent.

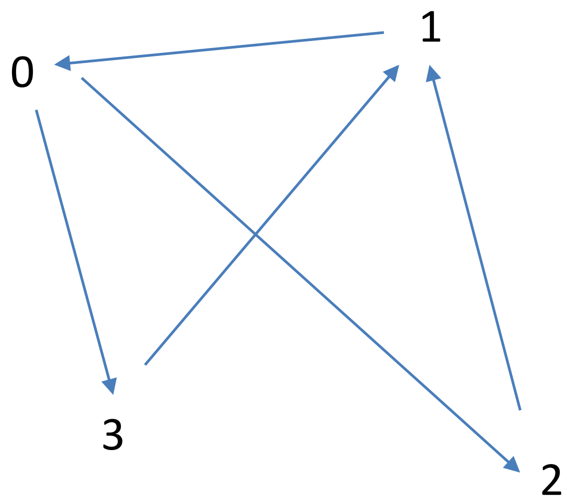
• • •

Example 4.11 Let the Markov chain consisting of the states 0, 1, 2, 3 have the transition probability matrix

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Determine which states are transient and which are recurrent.

Solution: It is a simple matter to check that all states communicate and hence, since this is a finite chain, all states must be recurrent. ◆


0
1
2
3

• • •

Example 4.12 Consider the Markov chain having states 0, 1, 2, 3, 4 and

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$$

Determine the recurrent state.

Solution: This chain consists of the three classes {0, 1}, {2, 3}, and {4}. The first two classes are recurrent and the third transient. ◆

• • •

4.4. Limiting Probabilities

In Example 4.7, we calculated $\mathbf{P}^{(4)}$ for a two-state Markov chain; it turned out to be

$$\mathbf{P}^{(4)} = \begin{Vmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{Vmatrix}$$

From this it follows that $\mathbf{P}^{(8)} = \mathbf{P}^{(4)} \cdot \mathbf{P}^{(4)}$ is given (to three significant places) by

$$\mathbf{P}^{(8)} = \begin{Vmatrix} 0.572 & 0.428 \\ 0.570 & 0.430 \end{Vmatrix}$$

...

To make the above heuristics more precise there are two additional properties of the states of a Markov chain that we need consider. State i is said to have *period d* if $P_{ii}^n = 0$ whenever n is not divisible by d, and d is the largest integer with this property. For instance, starting in i, it may be possible for the process to enter state i only at the times $2, 4, 6, 8, \ldots$, in which case state i has period 2. A state with period 1 is said to be *aperiodic*.

...

If state i is recurrent, then it is said to be *positive recurrent* if, starting in i, the expected time until the process returns to state i is finite. It can be shown that positive recurrence is a class property. While there exist recurrent states that are not positive recurrent,* it can be shown that *in a finite-state Markov chain all recurrent states are positive recurrent*. Positive recurrent, aperiodic states are called *ergodic*.

We are now ready for the following important theorem which we state without proof.

...

Theorem 4.1 For an irreducible ergodic Markov chain $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ exists and is independent of i. Furthermore, letting

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n, \qquad j \geq 0$$

then π_j is the unique nonnegative solution of

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \qquad j \geq 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j &= 1 \end{aligned} \tag{4.7}$$

• • •

Remarks (i) Given that $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ exists and is independent of the initial state i, it is not difficult to (heuristically) see that the π's must satisfy Equation (4.7). For let us derive an expression for $P\{X_{n+1} = j\}$ by conditioning on the state at time n. That is,

$$P\{X_{n+1} = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} P\{X_n = i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} P\{X_n = i\}$$

...

Letting $n \to \infty$, and assuming that we can bring the limit inside the summation, leads to

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}\pi_i$$

(ii) It can be shown that π_j, the limiting probability that the process will be in state j at time n, also equals the long-run proportion of time that the process will be in state j.

(iii) In the irreducible, positive recurrent, *periodic* case we still have that the π_j, $j \geq 0$, are the unique nonnegative solution of

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij},$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

But now π_j must be interpreted as the long-run proportion of time that the Markov chain is in state j.

• • •

Example 4.16 Consider Example 4.3 in which the mood of an individual is considered as a three-state Markov chain having a transition probability matrix

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{matrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{matrix} \right\|$$

• • •

In the long run, what proportion of time is the process in each of the three states?

Solution: The limiting probabilities π_i, $i = 0, 1, 2$, are obtained by solving the set of equations in Equation (4.1). In this case these equations are

$$\pi_0 = 0.5\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.2\pi_2,$$

$$\pi_1 = 0.4\pi_0 + 0.4\pi_1 + 0.3\pi_2,$$

$$\pi_2 = 0.1\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.5\pi_2,$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

Solving yields

$$\pi_0 = \tfrac{21}{62}, \qquad \pi_1 = \tfrac{23}{62}, \qquad \pi_2 = \tfrac{18}{62} \quad \blacklozenge$$

PROBABILIDADES DE ESTADO ESTABLE Y TIEMPOS DE RETORNO MEDIOS DE CADENAS ERGÓDICAS

En una cadena ergódica, las probabilidades de estado estable se definen como

$$\boldsymbol{\pi}_j = \lim_{n \to \infty} a_j^{(n)}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Estas probabilidades, las cuales son independientes de $\{a_j^{(0)}\}$, se pueden determinar de las ecuaciones

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$$

$$\sum_j \boldsymbol{\pi}_j = 1$$

(Una de las ecuaciones en $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ es redundante). Lo que $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ dice es que las probabilidades $\boldsymbol{\pi}$ permanecen sin cambiar después de una transición adicional, y por esta razón representan la distribución de estado estable.

Un subproducto directo de las probabilidades de estado estable es la determinación del número esperado de transiciones antes de que el sistema regrese a un estado j por primera vez. Esto se conoce como **tiempo medio del primer retorno** o **tiempo medio de recurrencia**, y se calcula en una cadena de Markov de n estados como

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j}, j = 1, 2, \ldots, n$$

Ejemplo (Problema del jardinero)

Cada año, durante la temporada de siembra de marzo a septiembre, un jardinero realiza una prueba química para verificar la condición de la tierra. Según el resultado de la prueba, la productividad en la nueva temporada puede ser uno de tres estados: (1) buena, (2) regular y (3) mala. A lo largo de los años, el jardinero ha observado que la condición de la tierra del año anterior afecta la productividad del año actual y que la situación se describe mediante la siguiente cadena de Markov:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \mathbf{P} = \begin{array}{r} \textit{Estado del} \\ \textit{sistema el} \\ \textit{siguiente año} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \textit{Estado del} \\ \textit{sistema} \\ \textit{este año} \\ \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} .2 & .5 & .3 \\ 0 & .5 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \end{array}$$

Las probabilidades de transición muestran que la condición de la tierra puede o deteriorarse o permanecer como está pero nunca mejorar. Por ejemplo, si la condición de la tierra es buena en este año (estado 1) hay 20% de que no cambie el año siguiente, 50% de probabilidad de que sea regular (estado 2), y 30% de probabilidad de que se deteriorará a una condición mala (estado 3). El jardinero modifica las probabilidades de transición **P** utilizando un fertilizante orgánico. En este caso, la matriz de transición se vuelve:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \;\;1 & \;\;\;2 & \;\;\;3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix} \end{array}$$

El uso de fertilizante puede conducir a mejorar las condiciones del suelo.

Ejemplo

Para determinar la distribución de probabilidad de estado estable del problema del jardinero con fertilizante , tenemos

$$(\pi_1 \;\; \pi_2 \;\; \pi_3) = (\pi_1 \;\; \pi_2 \;\; \pi_3)\begin{pmatrix} .3 & .6 & .1 \\ .1 & .6 & .3 \\ .05 & .4 & .55 \end{pmatrix}$$

O bien,

$$\pi_1 = .3\pi_1 + .1\pi_2 + .05\pi_3$$

$$\pi_2 = .6\pi_1 + .6\pi_2 + .4\pi_3$$

$$\pi_3 = .1\pi_1 + .3\pi_2 + .55\pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

La solución es $\pi_1 = 0.1017$, $\pi_2 = 0.5254$ y $\pi_3 = 0.3729$; es decir que a la larga la condición de la tierra será buena 10% del tiempo, regular 52% del tiempo, y mala 37% del tiempo.

Los tiempos medios del primer retorno se calculan como

$$\mu_{11} = \frac{1}{.1017} = 9.83,\ \mu_{22} = \frac{1}{.5254} = 1.9,\ \mu_{33} = \frac{1}{.3729} = 2.68$$

TIEMPO DEL PRIMER PASO

. En esta sección nos interesa el **tiempo medio del primer paso** μ_{ij}, definido como el número esperado de transiciones para llegar por primera vez al estado j desde el estado i. Los cálculos tienen su origen en la determinación de la probabilidad de *al menos* un paso del estado i al estado j, definido como $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$, donde $f_{ij}^{(n)}$ es la probabilidad del primer paso del estado i al estado j en n transiciones. Se puede determinar una expresión para $f_{ij}^{(n)}$ recursivamente a partir de

$$p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} p_{ij}^{(n-k)},\ n = 1, 2, \ldots$$

Se supone que la matriz de transiciones $\mathbf{P} = \|p_{ij}\|$ tiene m estados.

1. Si $f_{ij} < 1$, no es seguro que el sistema pase alguna vez del estado i al estado j y $\mu_{ij} = \infty$.
2. Si $f_{ij} = 1$, la cadena de Markov es ergódica, y el *tiempo medio del primer paso* del estado i al estado j se calcula como

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

Una forma más simple de determinar el tiempo medio del primer paso de todos los estados en una matriz de n transiciones, $\mathbf{P}$, es utilizar la siguiente fórmula basada en una matriz:

$$\|\mu_{ij}\| = (\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1}\mathbf{1},\ j \neq i$$

donde

$\mathbf{I}$ = matriz de identidad $(m - 1)$

$\mathbf{N}_j$ = Matriz de transiciones $\mathbf{P}$ sin su fila j-ésima y columna j-ésima del estado destino j

$\mathbf{1}$ = vector columna $(m - 1)$ con todos los elementos iguales a 1

La operación matricial $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1}\mathbf{1}$ suma en esencia las columnas de $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1}$.

Ejemplo

Considere una vez más la cadena de Markov del jardinero con fertilizantes.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}$$

Para demostrar el cálculo del tiempo del primer paso a un estado específico desde todos los demás, considere el paso de los estados 2 y 3, (regular y malo) al estado 1 (bueno). Por lo tanto, $j = 1$ y

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} .60 & .30 \\ .40 & .55 \end{pmatrix}, \ (\mathbf{I} - \mathbf{N}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} .4 & -.3 \\ -.4 & .45 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7.50 & 5.00 \\ 6.67 & 6.67 \end{pmatrix}$$

De modo que,

$$\begin{pmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.50 & 5.00 \\ 6.67 & 6.67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.50 \\ 13.34 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se requerirán 12.5 temporadas en promedio, para pasar la tierra regular a tierra buena, y 13.34 temporadas para ir de la tierra mala a la tierra buena.

Pueden realizarse cálculos similares para obtener μ_{12} y μ_{32} desde $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_2)$ y μ_{13} y μ_{23} desde $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_3)$, como se muestra a continuación.

ANÁLISIS DE LOS ESTADOS ABSORBENTES

En el problema del jardinero, sin fertilizante la matriz de transición se da como

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .2 & .5 & .3 \\ 0 & .5 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los estados 1 y 2 (condiciones de tierra buena y regular) son *transitorios*, y el estado 3 (condición de tierra mala) es *absorbente*, porque una vez que llega a ese estado el sistema permanecerá allí por tiempo indefinido. Una cadena de Markov puede tener más de un estado absorbente.

El análisis de las cadenas de Markov con estados absorbentes puede realizarse de forma conveniente con matrices. En primer lugar, la cadena de Markov se particiona como sigue:

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{N} & \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

La disposición requiere que todos los estados absorbentes ocupen la esquina sureste de la nueva matriz. Por ejemplo, considere la siguiente matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} .2 & .3 & .4 & .1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ .5 & .3 & 0 & .2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz **P** puede reacomodarse y particionarse como

$$\mathbf{P}^* = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} .2 & .4 & .3 & .1 \\ .5 & 0 & .3 & .2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

En este caso, tenemos

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} .2 & .4 \\ .5 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} .3 & .1 \\ .3 & .2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dada la definición de **A** y **N** y el vector columna unitario **1** (de todos los elementos 1), se puede demostrar que:

Tiempo esperado en el estado j iniciado en el estado i = elemento (i,j) de $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$
Tiempo esperado para la absorción = $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}\,\mathbf{1}$
Probabilidad de la absorción = $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}\mathbf{A}$

Ejemplo

Se procesa un producto en secuencia en dos máquinas, I y II. La inspección se realiza después de que una unidad del producto se completa en cualquiera de las máquinas. Hay 5% de probabilidades de que una unidad sea desechada antes de inspeccionarla. Después de la inspección, hay 3% de probabilidades de que la unidad sea desechada, y 7% de probabilidades de ser devuelta a la misma máquina para trabajarla de nuevo. De lo contrario, una unidad que pasa la inspección en ambas máquinas es buena.

(a) Para una pieza que se inicia en la máquina 1, determine el promedio de visitas a cada estado.

(b) Si un lote de 1000 unidades se inicia en la máquina I, determine el promedio de unidades buenas completadas.

Para la cadena de Markov, el proceso tiene 6 estados: iniciar en 1($s1$), inspeccionar después de I ($i1$), iniciar en II ($s2$), inspección después de II ($i2$), desechar después de la inspección I o II (J), y buena después de II (G). Los estados J y G son estados absorbentes. La matriz de transiciones se da como

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ s1 \\ i1 \\ s2 \\ i2 \\ J \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cc} s1 & i1 & s2 & i2 & J & G \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & .95 & 0 & 0 & .05 & 0 \\ .07 & 0 & .9 & 0 & .03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .95 & .05 & 0 \\ 0 & 0 & .07 & 0 & .03 & .9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} s1 & i1 & s2 & i2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s1 \\ i1 \\ s2 \\ i2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & .95 & 0 & 0 \\ .07 & 0 & .9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .95 \\ 0 & 0 & .07 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} J & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} .05 & 0 \\ .03 & 0 \\ .05 & 0 \\ .03 & .9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Utilizando los cálculos

obtenemos

$$(\mathbf{I}-\mathbf{N})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -.95 & 0 & 0 \\ -.07 & 1 & -.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.95 \\ 0 & 0 & -.07 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.07 & 1.02 & .98 & 0.93 \\ 0.07 & 1.07 & 1.03 & 0.98 \\ 0 & 0 & 1.07 & 1.02 \\ 0 & 0 & 0.07 & 1.07 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{N})^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.07 & 1.02 & .98 & 0.93 \\ 0.07 & 1.07 & 1.03 & 0.98 \\ 0 & 0 & 1.07 & 1.02 \\ 0 & 0 & 0.07 & 1.07 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .05 & 0 \\ .03 & 0 \\ .05 & 0 \\ .03 & .9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .16 & .84 \\ .12 & .88 \\ .08 & .92 \\ .04 & .96 \end{pmatrix}$$

La fila superior de $(\mathbf{I}-\mathbf{N})^{-1}$ muestra que, en promedio, la máquina I es visitada 1.07 veces, la inspección I es visitada 1.02 veces, la máquina II es visitada .98 veces, y la inspección II es visitada .93 veces. La razón por la que el número de visitas en la máquina I y la inspección I sea mayor que 1 son el retrabajo y la reinspección. Por otra parte, los valores correspondientes para la máquina II son menores que 1 porque algunas piezas se desechan antes de que lleguen a la máquina II.

Para determinar la cantidad de piezas terminadas en un lote inicial de 1000 piezas, podemos ver en la fila superior de $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}\mathbf{A}$ que

Probabilidad de que una pieza sea desechada = .16

Probabilidad de que una pieza sea terminada = .84

Esto significa que $1000 \times .84 = 840$ piezas serán terminadas en cada lote inicial de 1000.

PROBLEMAS 1

1. Un profesor de ingeniería adquiere una computadora nueva cada dos años. El profesor puede elegir de entre tres modelos: *M*1, *M*2 y *M*3. Si el modelo actual es M_1, la siguiente computadora puede ser *M*2 con probabilidad .2, o *M*3 con probabilidad .15. Si el modelo actual es *M*2, las probabilidades de cambiar a *M*1 y *M*3 son .6 y .25, respectivamente. Pero si el modelo actual es *M*3, entonces las probabilidades de comprar los modelos *M*1 y *M*2 son .5 y .1, respectivamente. Represente la situación como una cadena de Markov.

3 . Clasifique los estados de las siguientes cadenas de Markov. Si un estado es periódico, determine su periodo:

*(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

*(b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .7 & .3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & .6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & 8 \end{pmatrix}$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2

1. En un día soleado, MiniGolf puede tener ingresos de $2000. Si el día está nublado, los ingresos se reducen 20%. Un día lluvioso reducirá los ingresos en 80%. Si hoy está soleado hay 80% de probabilidades de que mañana esté soleado sin amenaza de lluvia. Si está nublado, hay 20% de probabilidades de que mañana llueva, y 30% de probabilidades de que esté soleado. Seguirá lloviendo hasta el día siguiente con una probabilidad de .8, pero con 10% de probabilidades de que esté soleado.
   - **(a)** Determine los ingresos diarios esperados para MiniGolf.
   - **(b)** Determine el promedio de días que no estarán soleados.
2. A Joe le encanta salir a comer a los restaurantes del área. Sus comidas favoritas son la mexicana, la italiana, la china y la tailandesa. En promedio, Joe paga $10,00 por una comida mexicana, $15.00 por una comida italiana, $9.00 por una comida china, y $11.00 por una comida tailandesa. Los hábitos alimenticios de Joe son predecibles: Hay 70% de probabilidad de que la comida de hoy sea una repetición de la de ayer y probabilidades iguales de que cambie a una de las tres restantes.
   - **(a)** ¿Cuánto paga Joe en promedio por su comida diaria?
   - **(b)** ¿Con qué frecuencia consume Joe comida mexicana?

3. Hay tres categorías de filtro del impuesto sobre la renta en los Estados Unidos: los que nunca evaden impuestos, lo que en ocasiones lo hacen, y los que siempre lo hacen. Un examen de las declaraciones de impuestos auditadas de un año al siguiente muestra que de los que no evadieron impuestos el año pasado, 95% continuará en la misma categoría este año; 4% se moverá a la categoría “a veces”, y el resto se moverá a la categoría “siempre”. Para los que a veces evaden impuestos, 6% se moverá a “nunca”, 90% permanecerá igual, y 4% se moverá a “siempre”. Por lo que se refiere a los evasores de “siempre”, los porcentajes respectivos son 0, 10 y 90%.

(a) Exprese el problema como una cadena de Markov.

(b) A la larga, ¿cuáles serían los porcentajes de las categorías de evasión de impuestos de “nunca”, “a veces” y “siempre”?

(c) Las estadísticas muestran que un contribuyente en la categoría “a veces” evade impuestos que suman aproximadamente $5000 por declaración y en la categoría “siempre” suman aproximadamente $12,000. Suponiendo que la población de contribuyentes es de 70 millones y la tasa del impuesto sobre la renta promedio es 12%, determine la reducción anual de los impuestos recolectados debido a la evasión.

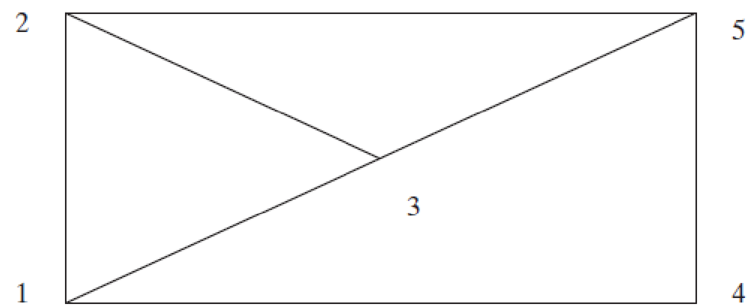
CONJUNTO DE PROBLEMAS 3

*1. Un laberinto se compone de las rutas mostradas en la figura . La intersección 1 es la entrada al laberinto, y la intersección 5 es la salida. En cualquier intersección, el ratón tiene probabilidades iguales de seleccionar cualquiera de las rutas disponibles. Cuando el ratón llega a la intersección 5, el experimento se repite volviendo a entrar al laberinto por la intersección 1.

(a) Exprese el laberinto como una cadena de Markov.
(b) Determine la probabilidad de que, comenzando en la intersección 1, el ratón llegue a la salida después de tres intentos.
(c) Determine la probabilidad a largo plazo de que el ratón localice la intersección de salida.
(d) Determine el promedio de intentos necesario para llegar al punto de salida desde la intersección 1.

FIGURA

Laberinto del ratón del problema 1.



2 . Los clientes pueden ser leales a marcas de productos pero pueden ser persuadidos mediante publicidad y mercadotecnia inteligentes para que cambien de marcas. Considere el caso de tres marcas: A, B y C. Los clientes que se "mantienen" leales a una marca dada se estiman en 75%, con un margen de sólo 25% para que sus competidores hagan un cambio. Los competidores lanzan sus campañas publicitarias una vez al año. Para los clientes de la marca A, las probabilidades de que cambien a las marcas B y C son de .1 y .15, respectivamente. Los clientes de la marca B son propensos a cambiar a las marcas A y C, con las siguientes probabilidades: .2 y .05 respectivamente. Los clientes de la marca C pueden cambiar a la marcas A y B con probabilidades iguales.

(a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

(b) A largo plazo, ¿qué tanto segmento del mercado dominará cada marca?

(c) ¿Cuánto tiempo en promedio le llevará a un cliente de la marca A cambiar a la marca B?

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4

1 . Cuando pido prestado un libro de la biblioteca de la ciudad, trato de devolverlos después de una semana. Dependiendo del tamaño del libro y de mi tiempo libre, hay 30% de probabilidades de que lo conserve otra semana. Si me lo quedara dos semanas, hay 10% de probabilidades que me lo quede una semana más. En ninguna condición me lo quedo más de tres semanas.

(a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

(b) Determine el promedio de semanas antes de devolver el libro a la biblioteca.

2 . *Pfifer and Carraway (2000).* Una compañía busca sus clientes por medio de publicidad enviada por correo. Durante el primer año, la probabilidad de que un cliente realice una compra es de .5, la cual se reduce a .4 en el año 2, de .3 en el año 3, y de .2 en el año 4. Si no realiza ninguna compra en cuatro años consecutivos, el cliente es borrado de la lista de correo. Si hace una compra la cuenta regresa a cero.

(a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

(b) Determine el número esperado de años que un cliente nuevo permanecerá en la lista de correo.

(c) Si un cliente no ha realizado una compra en dos años, determine el número esperado de años que estará en la lista de correo.