

奥数小蓝书初中数学

习题笔记

✦ For Qucy

目录

1	因式分解	2
1.1	提公因式	2
1.2	应用公式	4
2	方程与方程组	7
2.1	看 a 与1	7
2.2	一元一次方程的求解	7
3	一次函数与二次函数	8
3.1	一次函数的图象与性质	8
3.2	二次函数的图象与性质	10

Abstract

本文档主要是对初中数学奥数小蓝本系列教材中的习题做详细的解析说明。

和教材本身相比，本文档有如下变化:

- ☒ 教材中习题在每个章节都从1开始重新编号，本文档中将这些所有习题按0, 1, 2...的顺序全局排序。
- ☒ 解答添加了难度星数☆, ☆☆, ☆☆☆, 分别对应竞赛练习题目的易、中、难三个难度等级。

1 因式分解

1.1 提公因式

例 1.1 分解因式: $12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2$
做为第1个例题, 难度极低, 不熟练的可以慢慢地一个个地提取公因式。

练习 1. 因式分解: $5x^2y - 10xyz + 5xy$

解答 1. $5xy(x - 2z + 1)$ ☆

该题慢慢将公因式提取出来即可:

$$\begin{aligned} & 5x^2y - 10xyz + 5xy \\ = & 5x(xy - 2yz + y) \\ = & 5xy(x - 2z + 1) \end{aligned}$$

练习 2. 因式分解: $a(x - a) + b(a - x) - (x - a)$

解答 2. $(x - a)(a - b - 1)$ ☆

$$\begin{aligned} & a(x - a) + b(a - x) - (x - a) \\ = & a(x - a) - b(x - a) - (x - a) \\ = & (x - a)(a - b - 1) \end{aligned}$$

练习 3. 因式分解: $-2x(x + 1) + a(x + 1) + (x + 1)$

解答 3. $(x + 1)(-2x + a + 1)$ ☆

$$\begin{aligned} & -2x(x + 1) + a(x + 1) + (x + 1) \\ = & (x + 1)(-2x + a + 1) \end{aligned}$$

练习 4. 因式分解: $\frac{3}{2}b^{3n-1} + \frac{1}{6}b^{2n-1}$ (n 是正整数)

解答 4. $\frac{1}{6}b^{2n-1}(9b^n + 1)$ ☆☆

该题的公因式寻找, 需要对幂函数有一定的理解, 具体解答步骤如下:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}b^{3n-1} + \frac{1}{6}b^{2n-1} \\ = & \frac{3}{2}b^{n+2n-1} + \frac{1}{6}b^{2n-1} \\ = & \frac{3}{2}b^n \overbrace{b^{2n-1}} + \frac{1}{6} \overbrace{b^{2n-1}} \\ = & b^{2n-1}(\frac{3}{2}b^n + \frac{1}{6}) \end{aligned}$$

▲ 注意: 上述结果中因式有分数, 我们需要进一步将里面的分式通分掉:

$$\begin{aligned}
& b^{2n-1}\left(\frac{3}{2}b^n + \frac{1}{6}\right) \\
= & \frac{1}{6}b^{2n-1}(9b^n + 1)
\end{aligned}$$

练习 5. 因式分解: $2(p-1)^2 - 4q(p-1)$

解答 5. $2(p-1)(p-1-2q)$ ☆

$$\begin{aligned}
& 2(p-1)^2 - 4q(p-1) \\
= & (p-1)[2(p-1) - 4q] \\
= & 2(p-1)(p-1-2q)
\end{aligned}$$

练习 6. 因式分解: $mn(m^2 + n^2) - n^2(m^2 + n^2)$

解答 6. $n(m^2 + n^2)(m - n)$ ☆

$$\begin{aligned}
& mn(m^2 + n^2) - n^2(m^2 + n^2) \\
= & (m^2 + n^2)(mn - n^2) \\
= & n(m^2 + n^2)(m - n)
\end{aligned}$$

练习 7. 因式分解: $(5a-2b)(2m+3p) - (2a-7b)(2m+3p)$

解答 7. $(2m+3p)(3a+5b)$ ☆

$$\begin{aligned}
& (5a-2b)(2m+3p) - (2a-7b)(2m+3p) \\
= & (2m+3p)(5a-2b-2a+7b) \\
= & (2m+3p)(3a+5b)
\end{aligned}$$

练习 8. 因式分解: $2(x+y) + 6(x+y)^2 - 4(x+y)^3$

解答 8. $2(x+y)(1+3x+3y-2x^2-4xy-2y^2)$ ☆

$$\begin{aligned}
& 2(x+y) + 6(x+y)^2 - 4(x+y)^3 \\
= & (x+y)[2+6x+6y-4(x+y)^2] \\
= & 2(x+y)(1+3x+3y-2x^2-4xy-2y^2)
\end{aligned}$$

练习 9. 因式分解: $(x+y)^2(b+c) - (x+y)(b+c)^2$

解答 9. $(x+y)(b+c)(x+y-b-c)$ ☆

$$\begin{aligned}
& (x+y)^2(b+c) - (x+y)(b+c)^2 \\
= & (x+y)(b+c)(x+y-b-c)
\end{aligned}$$

练习 10. 因式分解: $6p(x-1)^3 - 8p^2(x-1)^2 - 2p(1-x)^2$

解答 10. $2p(x-1)^2(3x-4p-4)$

☆

$$\begin{aligned} & 6p(x-1)^3 - 8p^2(x-1)^2 - 2p(1-x)^2 \\ = & (x-1)^2[6p(x-1) - 8p^2 - 2p] \\ = & p(x-1)^2[6(x-1) - 8p - 2] \\ = & 2p(x-1)^2[3(x-1) - 4p - 1] \\ = & 2p(x-1)^2(3x - 3 - 4p - 1) \\ = & 2p(x-1)^2(3x - 4p - 4) \end{aligned}$$

1.2 应用公式

这里的公式，除了课本上的基本公式外，还需要知道立方和、立方差公式：

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned} \quad (1)$$

以及下面的立方公式：

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= (a+b)^3 \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 &= (a-b)^3 \end{aligned} \quad (2)$$

例 1.2 分解因式：??

✎ 课后习题

练习 11. 因式分解： $16 - (3a + 2b)^2$

解答 11. $(4 + 3a + 2b)(4 - 3a - 2b)$

☆

$$\begin{aligned} & 16 - (3a + 2b)^2 \\ = & 4^2 - (3a + 2b)^2 \\ = & (4 + 3a + 2b)(4 - 3a - 2b) \end{aligned}$$

练习 12. 因式分解： $4y^2 - (2z - x)^2$

解答 12. $(2y + 2z - x)(2y - 2z + x)$

☆

$$\begin{aligned} & 4y^2 - (2z - x)^2 \\ = & (2y + 2z - x)(2y - 2z + x) \end{aligned}$$

练习 13. 因式分解： $a^4 - b^4$

解答 13. $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$ ☆

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \\ = & (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) \end{aligned}$$

练习 14. 因式分解: $-81a^4b^4 + 16c^4$

解答 14. $(4c^2 + 9a^2b^2)(2c + 3ab)(2c - 3ab)$ ☆

$$\begin{aligned} & -81a^4b^4 + 16c^4 \\ = & 16c^4 - 81a^4b^4 \\ = & (4c^2)^2 - (9a^2b^2)^2 \\ = & (4c^2 + 9a^2b^2)(4c^2 - 9a^2b^2) \\ = & (4c^2 + 9a^2b^2)[(2c + 3ab)(2c - 3ab)] \\ = & (4c^2 + 9a^2b^2)(2c + 3ab)(2c - 3ab) \end{aligned}$$

练习 15. 因式分解: $20a^3x^3 - 45axy^2$

解答 15. $5ax(2ax + 3y)(2ax - 3y)$ ☆

$$\begin{aligned} & 20a^3x^3 - 45axy^2 \\ = & ax(20a^2x^2 - 45y^2) \\ = & 5ax(4a^2x^2 - 9y^2) \\ = & 5ax(2ax + 3y)(2ax - 3y) \end{aligned}$$

练习 16. 因式分解: $(3a^2 - b^2)^2 - (a^2 - 3b^2)^2$

解答 16. $8(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$ ☆

$$\begin{aligned} & (3a^2 - b^2)^2 - (a^2 - 3b^2)^2 \\ = & (3a^2 - b^2 + a^2 - 3b^2)(3a^2 - b^2 - a^2 + 3b^2) \\ = & (4a^2 - 4b^2)(2a^2 + 2b^2) \\ = & (2a + 2b)(2a - 2b)(2a^2 + 2b^2) \\ = & 8(a + b)(a - b)(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

练习 17. 分解因式: $x^8 - y^8$

解答 17. $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$ ☆

$$\begin{aligned}
& x^8 - y^8 \\
&= (x^4 + y^4)(x^4 - y^4) \\
&= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)(x^4 + y^4) \\
&= (x + y)(x - y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)
\end{aligned}$$

练习 18. 分解因式: $16x^5 - x$

解答 18. $x(2x + 1)(2x - 1)(4x^2 + 1)$

☆

$$\begin{aligned}
& 16x^5 - x \\
&= x(16x^4 - 1) \\
&= x[(4x^2)^2 - 1^2] \\
&= x(4x^2 + 1)(4x^2 - 1) \\
&= x(2x + 1)(2x - 1)(4x^2 + 1)
\end{aligned}$$

练习 19. 因式分解: $(5x^2 + 2x - 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2$

解答 19. $24x(x - 1)(x + 1)^2$

☆

虽然上面2个式都能利用十字相乘来分解, 但我们是整个完整式子进行因式分解, 所以我们不能先分解各自式子里面的多项式, 而先利用平方差公式将两个式子的差变成两个式子的积:

$$\begin{aligned}
& (5x^2 + 2x - 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2 \\
&= (5x^2 + 2x - 3 + x^2 - 2x - 3)(5x^2 + 2x - 3 - x^2 + 2x + 3) \\
&= (6x^2 - 6)(4x^2 + 4x) \\
&= 4x(x + 1)(6x^2 - 6) \\
&= 24x(x + 1)(x^2 - 1) \\
&= 24x(x + 1)(x + 1)(x - 1) \\
&= 24x(x - 1)(x + 1)^2
\end{aligned}$$

练习 20. 因式分解: $32a^3b^3 - 4b^9$

解答 20. $4b^3(2a - b^2)(4a^2 + 2ab^2 + b^4)$

☆☆

这当中要利用到公式-(1):

$$\begin{aligned}
& 32a^3b^3 - 4b^9 \\
&= 4b^3(8a^3 - b^6) \\
&= 4b^3[(2a)^3 - (b^2)^3] \\
&= 4b^3(2a - b^2)[(2a)^2 + (2a)(b^2) + (b^2)^2] \\
&= 4b^3(2a - b^2)(4a^2 + 2ab^2 + b^4)
\end{aligned}$$

2 方程与方程组

2.1 看 a 与1

这是一个具有哲学味道的章节，如果能对“字母代表数”这个概念有比较深的理解力即可。

此小节的主要目的，是为了能够让读者从小学的数学认知中，提高到初中的抽象思维境界。

2.2 一元一次方程的求解

练习 21. 解方程:

a) $0.5x = 19.5$

b) $\frac{x+3}{0.5} + \frac{\frac{1}{3}(x+4)}{0.125} = 5x + 19$

解答 21. a) $x = 39$

$$\begin{aligned} 0.5x &= 19.5 \\ x &= \frac{19.5}{0.5} \\ x &= 39 \end{aligned}$$

b) $x = -7$ ☆

快速分析一下方程的分母，我们可以发现 $0.5 \cdot 2 = 1$, $0.125 \cdot 8 = 1$, 那么我们可以先把分式给简化掉。

即对左边两个分式的分子分母分别乘以2、8:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{0.5} + \frac{\frac{1}{3}(x+4)}{0.125} &= 5x + 19 \\ 2(x+3) + \frac{8}{3}(x+4) &= 5x + 19 \\ 6(x+3) + 8(x+4) &= 3(5x+19) \\ 14x + 50 &= 15x + 57 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

此2题为基本题

练习 22. 解方程:

a) $\frac{x+2}{4} - \frac{2x-3}{6} = 1$

b) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{2} = 1$

解答 22. a) $x = 0$

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{4} - \frac{2x-3}{6} &= 1 \\ \frac{3(x+2) - 2(2x-3)}{12} &= 1 \\ \frac{3x+6-4x+6}{12} &= 1 \\ \frac{-x+12}{12} &= 1 \\ -x+12 &= 12 \\ x &= 0\end{aligned}$$

b) $x = 1$

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{2} &= 1 \\ \frac{2(2x+1) - 3(x-1)}{6} &= 1 \\ \frac{4x+2-3x+3}{6} &= 1 \\ \frac{x+5}{6} &= 1 \\ x+5 &= 6 \\ x &= 1\end{aligned}$$

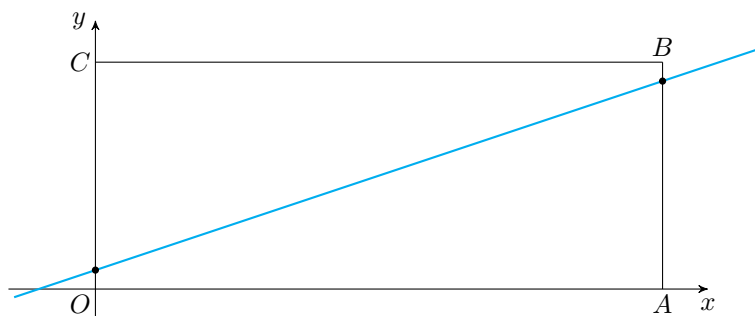
☆

这些均为基础题

3 一次函数与二次函数

3.1 一次函数的图象与性质

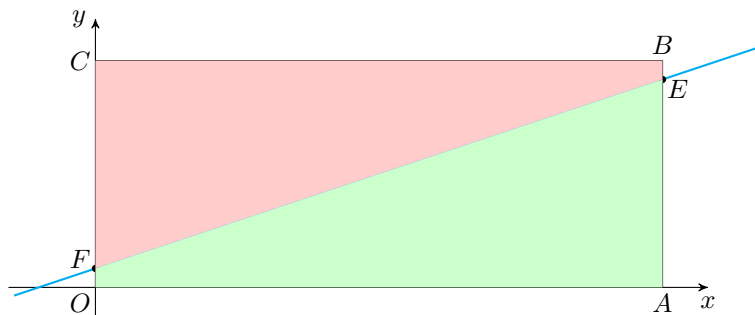
练习 23. 如图, 在直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的顶点 B 的坐标为 $(15, 6)$, 直线 $y = \frac{1}{3}x + b$ 恰好将矩形 $OABC$ 分成面积相等的两部分, 求 b 的值.



解答 23. $b = \frac{1}{2}$

思路1

该思路是一个正常思考的过程: 分成两半, 就是图中的2个梯形面积相等:



故我们开始尝试将这两个梯形面积求出来, 我们假设直线和矩形的交点分别为 E 、 F , 那么我们先尝试将这两个点坐标求出来。

有了这两个点的坐标, 那么我们利用小学的梯形面积即可求出各自的面积出来。

① F 点的坐标求解:

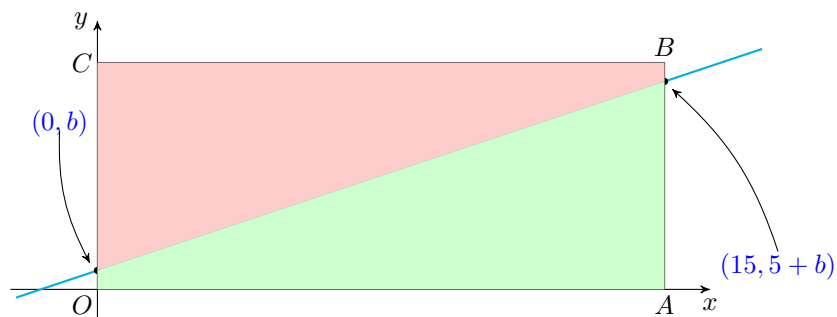
$$F : (0, b)$$

② E 点的坐标求解:

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = \frac{1}{3}x + b \end{cases}$$

$$E : (15, 5 + b)$$

对应图为:



梯形面积就是整个矩形的 $\frac{1}{2}$, 所以:

$$\frac{[b+(5+b)] \cdot 15}{2} = \frac{15 \cdot 6}{2}$$

$$15(2b + 5) = 90$$

$$(2b + 5) = 6$$

$$2b = 1$$

$$b = \frac{1}{2}$$

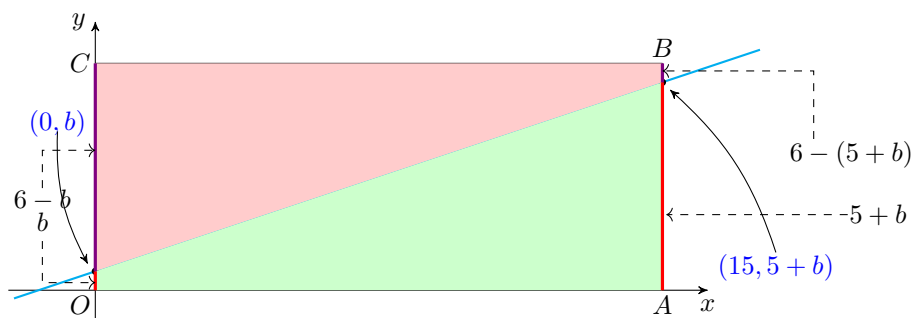
思路2

该思路是对思路1的另一种解决方法。

由于我们求出了交点 E 、 F 的坐标, 那么两个梯形面积相等的话, 我们要发现两梯形高一样。

这样, 可知两个梯形的 上底+下底 相等, 才能保证两梯形相等。

根据交点坐标, 我们可知两个梯形上下底情况:



根据上面示意图，我们列出上梯形的上底与下底，下梯形的上底与下底，二者相等：

$$\begin{aligned}
 (6-b) + [6-(5+b)] &= b + (5+b) \\
 (6-b) + (6-5-b) &= b + 5 + b \\
 (6-b) + (1-b) &= 2b + 5 \\
 7 - 2b &= 2b + 5 \\
 -4b &= 5 - 7 \\
 b &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

思路3

该思路是[3]中的答案方法.

3.2 二次函数的图象与性质

References

- [1] 单增: 数学奥林匹克小丛书初中卷 (第二版), 因式分解技巧, 华东师范大学出版社, 2012
- [2] 葛军: 数学奥林匹克小丛书初中卷 (第二版), 方程与方程组, 华东师范大学出版社, 2012
- [3] 李惟峰: 数学奥林匹克小丛书初中卷 (第二版), 一次函数与二次函数, 华东师范大学出版社, 2012
- [4] Kenneth H.Rosen: Discrete Mathematics and Its Applications(7th Edition), 离散数学及其应用, 2012
- [5] Graham, Knuth, Patashnik: Concret Mathematics, A Foundation For Computer Science
- [6] 陈仁政: π 的密码, 科学出版社, 2011