

奥数小蓝书初中数学

习题笔记

✦ For Qucy

目录

1	因式分解	2
1.1	提公因式	2
1.2	应用公式	2
2	方程与方程组	3
2.1	看 a 与1	3
2.2	一元一次方程的求解	3
3	习题答案解析	3

Abstract

本文档主要是对初中数学奥数小蓝本系列教材中的习题做详细的解析说明。

和教材本身相比，本文档有如下变化:

- ☒ 教材中习题在每个章节都从1开始重新编号，本文档中将这些所有习题按0, 1, 2...的顺序全局排序。
- ☒ 解答添加了难度星数☆，☆☆，☆☆☆，分别对应竞赛练习题目的易、中、难三个难度等级。

1 因式分解

1.1 提公因式

例 1.1 分解因式: $12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2$
做为第1个例题, 难度极低, 不熟练的可以慢慢地一个个地提取公因式。

✎ 课后习题

练习 1. 因式分解: $5x^2y - 10xyz + 5xy$

练习 2. 因式分解: $a(x - a) + b(a - x) - (x - a)$

练习 3. 因式分解: $-2x(x + 1) + a(x + 1) + (x + 1)$

练习 4. 因式分解: $\frac{3}{2}b^{3n-1} + \frac{1}{6}b^{2n-1}$ (n 是正整数)

练习 5. 因式分解: $2(p - 1)^2 - 4q(p - 1)$

练习 6. 因式分解: $mn(m^2 + n^2) - n^2(m^2 + n^2)$

练习 7. 因式分解: $(5a - 2b)(2m + 3p) - (2a - 7b)(2m + 3p)$

练习 8. 因式分解: $2(x + y) + 6(x + y)^2 - 4(x + y)^3$

练习 9. 因式分解: $(x + y)^2(b + c) - (x + y)(b + c)^2$

练习 10. 因式分解: $6p(x - 1)^3 - 8p^2(x - 1)^2 - 2p(1 - x)^2$

1.2 应用公式

例 1.2 分解因式: ??

✎ 课后习题

练习 11. 因式分解: $16 - (3a + 2b)^2$

练习 12. 因式分解: $4y^2 - (2z - x)^2$

练习 13. 因式分解: $a^4 - b^4$

练习 14. 因式分解: $-81a^4b^4 + 16c^4$

练习 15. 因式分解: $20a^3x^3 - 45axy^2$

练习 16. 因式分解: $(3a^2 - b^2)^2 - (a^2 - 3b^2)^2$

2 方程与方程组

2.1 看 a 与1

这是一个具有哲学味道的章节，如果能对“字母代表数”这个概念有比较深的理解力即可。

此小节的主要目的，是为了能够让读者从小学的数学认知中，提高到初中的抽象思维境界。

2.2 一元一次方程的求解

练习 17. 解方程:

a) $0.5x = 19.5$

b) $\frac{x+3}{0.5} + \frac{\frac{1}{3}(x+4)}{0.125} = 5x + 19$

练习 18. 解方程:

a) $\frac{x+2}{4} - \frac{2x-3}{6} = 1$

b) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{2} = 1$

3 习题答案解析

解答 1. $5xy(x - 2z + 1)$

☆

该题慢慢将公因式提取出来即可:

$$\begin{aligned} & 5x^2y - 10xyz + 5xy \\ = & 5x(xy - 2yz + y) \\ = & 5xy(x - 2z + 1) \end{aligned}$$

解答 2. $(x - a)(a - b - 1)$

☆

$$\begin{aligned} & a(x - a) + b(a - x) - (x - a) \\ = & a(x - a) - b(x - a) - (x - a) \\ = & (x - a)(a - b - 1) \end{aligned}$$

解答 3. $(x+1)(-2x+a+1)$ ☆

$$\begin{aligned} & -2x(x+1) + a(x+1) + (x+1) \\ = & (x+1)(-2x+a+1) \end{aligned}$$

解答 4. $\frac{1}{6}b^{2n-1}(9b^n+1)$ ☆☆

该题的公因式寻找，需要对幂函数有一定的理解，具体解答步骤如下：

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}b^{3n-1} + \frac{1}{6}b^{2n-1} \\ = & \frac{3}{2}b^{n+2n-1} + \frac{1}{6}b^{2n-1} \\ = & \frac{3}{2}b^n \boxed{b^{2n-1}} + \frac{1}{6} \boxed{b^{2n-1}} \\ = & b^{2n-1}(\frac{3}{2}b^n + \frac{1}{6}) \end{aligned}$$

▲ 注意：上述结果中因式有分数，我们需要进一步将里面的分式通分掉：

$$\begin{aligned} & b^{2n-1}(\frac{3}{2}b^n + \frac{1}{6}) \\ = & \frac{1}{6}b^{2n-1}(9b^n + 1) \end{aligned}$$

解答 5. $2(p-1)(p-1-2q)$ ☆

$$\begin{aligned} & 2(p-1)^2 - 4q(p-1) \\ = & (p-1)[2(p-1) - 4q] \\ = & 2(p-1)(p-1-2q) \end{aligned}$$

解答 6. $n(m^2+n^2)(m-n)$ ☆

$$\begin{aligned} & mn(m^2+n^2) - n^2(m^2+n^2) \\ = & (m^2+n^2)(mn-n^2) \\ = & n(m^2+n^2)(m-n) \end{aligned}$$

解答 7. $(2m+3p)(3a+5b)$ ☆

$$\begin{aligned} & (5a-2b)(2m+3p) - (2a-7b)(2m+3p) \\ = & (2m+3p)(5a-2b-2a+7b) \\ = & (2m+3p)(3a+5b) \end{aligned}$$

解答 8. $2(x+y)(1+3x+3y-2x^2-4xy-2y^2)$ ☆

$$\begin{aligned} & 2(x+y) + 6(x+y)^2 - 4(x+y)^3 \\ = & (x+y)[2+6x+6y-4(x+y)^2] \\ = & 2(x+y)(1+3x+3y-2x^2-4xy-2y^2) \end{aligned}$$

解答 9. $(x+y)(b+c)(x+y-b-c)$ ☆

$$\begin{aligned} & (x+y)^2(b+c) - (x+y)(b+c)^2 \\ = & (x+y)(b+c)(x+y-b-c) \end{aligned}$$

解答 10. $2p(x-1)^2(3x-4p-4)$ ☆

$$\begin{aligned} & 6p(x-1)^3 - 8p^2(x-1)^2 - 2p(1-x)^2 \\ = & (x-1)^2[6p(x-1) - 8p^2 - 2p] \\ = & p(x-1)^2[6(x-1) - 8p - 2] \\ = & 2p(x-1)^2[3(x-1) - 4p - 1] \\ = & 2p(x-1)^2(3x - 3 - 4p - 1) \\ = & 2p(x-1)^2(3x - 4p - 4) \end{aligned}$$

解答 11. $(4+3a+2b)(4-3a-2b)$ ☆

$$\begin{aligned} & 16 - (3a+2b)^2 \\ = & 4^2 - (3a+2b)^2 \\ = & (4+3a+2b)(4-3a-2b) \end{aligned}$$

解答 12. $(2y+2z-x)(2y-2z+x)$ ☆

$$\begin{aligned} & 4y^2 - (2z-x)^2 \\ = & (2y+2z-x)(2y-2z+x) \end{aligned}$$

解答 13. $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$ ☆

$$\begin{aligned} & (a^2+b^2)(a^2-b^2) \\ = & (a^2+b^2)(a+b)(a-b) \end{aligned}$$

解答 14. $(4c^2+9a^2b^2)(2c+3ab)(2c-3ab)$ ☆

$$\begin{aligned} & -81a^4b^4 + 16c^4 \\ = & 16c^4 - 81a^4b^4 \\ = & (4c^2)^2 - (9a^2b^2)^2 \\ = & (4c^2+9a^2b^2)(4c^2-9a^2b^2) \\ = & (4c^2+9a^2b^2)[(2c+3ab)(2c-3ab)] \\ = & (4c^2+9a^2b^2)(2c+3ab)(2c-3ab) \end{aligned}$$

解答 15. $5ax(2ax+3y)(2ax-3y)$ ☆

$$\begin{aligned}
& 20a^3x^3 - 45axy^2 \\
= & ax(20a^2x^2 - 45y^2) \\
= & 5ax(4a^2x^2 - 9y^2) \\
= & 5ax(2ax + 3y)(2ax - 3y)
\end{aligned}$$

解答 16. $8(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$

☆

$$\begin{aligned}
& (3a^2 - b^2)^2 - (a^2 - 3b^2)^2 \\
= & (3a^2 - b^2 + a^2 - 3b^2)(3a^2 - b^2 - a^2 + 3b^2) \\
= & (4a^2 - 4b^2)(2a^2 + 2b^2) \\
= & (2a + 2b)(2a - 2b)(2a^2 + 2b^2) \\
= & 8(a+b)(a-b)(a^2+b^2)
\end{aligned}$$

解答 17. a) $x = 39$

$$\begin{aligned}
0.5x &= 19.5 \\
x &= \frac{19.5}{0.5} \\
x &= 39
\end{aligned}$$

b) $x = -7$

☆

快速分析一下方程的分母，我们可以发现 $0.5 \cdot 2 = 1$, $0.125 \cdot 8 = 1$, 那么我们可以先把分式给简化掉。

即对左边两个分式的分子分母分别乘以 2、8:

$$\begin{aligned}
\frac{x+3}{0.5} + \frac{\frac{1}{3}(x+4)}{0.125} &= 5x + 19 \\
2(x+3) + \frac{8}{3}(x+4) &= 5x + 19 \\
6(x+3) + 8(x+4) &= 3(5x+19) \\
14x + 50 &= 15x + 57 \\
x &= -7
\end{aligned}$$

此2题为基本题

解答 18. a) $x = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{4} - \frac{2x-3}{6} &= 1 \\
\frac{3(x+2)-2(2x-3)}{12} &= 1 \\
\frac{3x+6-4x+6}{12} &= 1 \\
\frac{-x+12}{12} &= 1 \\
-x + 12 &= 12 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

b) $x = 1$

☆

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{2} &= 1 \\
\frac{2(2x+1)-3(x-1)}{6} &= 1 \\
\frac{4x+2-3x+3}{6} &= 1 \\
\frac{x+5}{6} &= 1 \\
x + 5 &= 6 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

这些均为基础题

References

- [1] 单增: 数学奥林匹克小丛书初中卷 (第二版), 因式分解技巧, 华东师范大学出版社, 2012
- [2] 葛军: 数学奥林匹克小丛书初中卷 (第二版), 方程与方程组, 华东师范大学出版社, 2012
- [3] Kenneth H.Rosen: Discrete Mathematics and Its Applications(7th Edition), 离散数学及其应用, 2012
- [4] Graham, Knuth, Patashnik: Concrete Mathematics, A Foundation For Computer Science
- [5] 陈仁政: π 的密码, 科学出版社, 2011