# 附录 A 部分习题答案

## 第 1 章

**1.** 67 600 000; 19 656 000 **2.** 1296 **4.** 24; 4 **5.** 144; 18 **6.** 2401 **7.** 720; 72; 144; 72 **8.** 120; 1260; 34 650 **9.** 27 720 **10.** 40 320; 10 080; 1152; 2880; 384 **11.** 720; 72; 144 **12.** 24 300 000; 17 100 720 **13.** 190 **14.** 2 598 960 **16.** 42; 94 **17.** 604 800 **18.** 600 **19.** 896; 1000; 910 **20.** 36; 26 **21.** 35 **22.** 18 **24.** 48 **25.** $52!/(13!)^4$ **27.** 27 720 **28.** 65 536; 2520 **29.** 12 600; 945 **30.** 564 480 **31.** 165; 35 **32.** 1287; 14 112 **33.** 220; 572

## 第 2 章

**9.** 74 **10.** 0.4; 0.1 **11.** 70; 2 **12.** 0.5; 0.32; 149/198 **13.** 20 000; 12 000; 11 000; 68 000; 10 000 **14.** 1.057 **15.** 0.0020; 0.4226; 0.0475; 0.0211; 0.000 24 **17.** $9.109\,47 \times 10^{-6}$ **18.** 0.048; **19.** 5/18 **20.** 0.9052 **22.** $(n+1)/2^n$ **23.** 5/12 **25.** 0.4 **26.** 0.492 929 **27.** 0.0888; 0.2477; 0.1243; 0.2099 **30.** 1/18; 1/6; 1/2 **31.** 2/9; 1/9 **33.** 70/323 **36.** 0.0045; 0.0588 **37.** 0.0833; 0.5 **38.** 4 **39.** 0.48 **40.** 1/64; 21/64; 36/64; 6/64 **41.** 0.5177 **44.** 0.3; 0.2; 0.1 **46.** 5 **48.** $1.0604 \times 10^{-3}$ **49.** 0.4329 **50.** $2.6084 \times 10^{-6}$ **52.** 0.091 45; 0.4268 **53.** 12/35 **54.** 0.0511 **55.** 0.2198; 0.0343

## 第 3 章

**1.** 1/3 **2.** 1/6; 1/5; 1/4; 1/3; 1/2; 1 **3.** 0.339 **5.** 6/91 **6.** 1/2 **7.** 2/3 **8.** 1/2 **9.** 7/11 **10.** 0.22 **11.** 1/17; 1/33 **12.** 0.504; 0.3629 **14.** 35/768; 210/768 **15.** 0.4848 **16.** 0.9835 **17.** 0.0792; 0.264 **18.** 0.331; 0.383; 0.286; 48.62 **19.** 44.29; 41.18 **20.** 0.4; 1/26 **21.** 0.496; 3/14; 9/62 **22.** 5/9; 1/6; 5/54 **23.** 4/9; 1/2 **24.** 1/3; 1/2 **26.** 20/21; 40/41 **28.** 3/128; 29/1536 **29.** 0.0893 **30.** 7/12; 3/5 **33.** 0.76, 49/76 **34.** 27/31 **35.** 0.62, 10/19 **36.** 1/2 **37.** 1/3; 1/5; 1 **38.** 12/37 **39.** 46/185 **40.** 3/13; 5/13; 5/52; 15/52 **41.** 43/459 **42.** 34.48 **43.** 4/9 **45.** 1/11 **48.** 2/3 **50.** 17.5; 38/165; 17/33 **51.** 0.65; 56/65; 8/65; 1/65; 14/35; 12/35; 9/35 **52.** 0.11; 16/89; 12/27; 3/5; 9/25 **55.** 9 **57.** (c) 2/3 **60.** 2/3; 1/3; 3/4 **61.** 1/6; 3/20 **65.** 9/13; 1/2 **69.** 9; 9; 18; 110; 4; 4; 8; 120 所有被 128 除 **70.** 1/9; 1/18 **71.** 38/64; 13/64; 13/64 **73.** 1/16; 1/32; 5/16; 1/4; 31/32 **74.** 9/19 **75.** 3/4; 7/12 **78.** $p^2/(1-2p+2p^2)$ **79.**

0.5550　**81.** 0.9530　**83.** 0.5; 0.6; 0.8　**84.** 9/19; 6/19; 4/19; 7/15; 53/165; 7/33　**89.** 97/142; 15/26; 33/102

## 第 4 章

**1.** $p(4) = 6/91$; $p(2) = 8/91$; $p(1) = 32/91$; $p(0) = 1/91$; $p(-1) = 16/91$; $p(-2) = 28/91$　**4.** 1/2; 5/18; 5/36; 5/84; 5/252; 1/252; 0; 0; 0; 0　**5.** $n - 2i$; $i = 0, \cdots, n$　**6.** $p(3) = p(-3) = 1/8$; $p(1) = p(-1) = 3/8$　**12.** $p(4) = 1/16$; $p(3) = 1/8$; $p(2) = 1/16$; $p(0) = 1/2$; $p(-i) = p(i)$; $p(0) = 1$　**13.** $p(0) = 0.28$; $p(500) = 0.27$; $p(1000) = 0.315$; $p(1500) = 0.09$; $p(2000) = 0.045$　**14.** $p(0) = 1/2$; $p(1) = 1/6$; $p(2) = 1/12$; $p(3) = 1/20$; $p(4) = 1/5$　**17.** 1/4; 1/6; 1/12; 1/2　**19.** 1/2; 1/10; 1/5; 1/10; 1/10　**20.** 0.5918; 否; −0.108　**21.** 39.28; 37　**24.** $p = 11/18$; 最大值 $= 23/72$　**25.** 0.46, 1.3　**26.** 11/2; 17/5　**27.** $A/(p + 1/10)$　**28.** 3/5　**31.** $p^*$　**32.** $11 - 10 \times (0.9)^{10}$　**33.** 3　**35.** −0.067; 1.089　**37.** 82.2; 84.5　**39.** 3/8　**40.** 11/243　**42.** $p \geqslant 1/2$　**45.** 3　**50.** 1/10; 1/10　**51.** $\mathrm{e}^{-0.2}$; $1 - 1.2\mathrm{e}^{-0.2}$　**53.** $1 - \mathrm{e}^{-0.6}$; $1 - \mathrm{e}^{-219.18}$　**56.** 253　**57.** 0.5768; 0.6070　**59.** 0.3935; 0.3033; 0.0902　**60.** 0.8886　**61.** 0.4082　**63.** 0.0821; 0.2424　**65.** 0.3935; 0.2293; 0.3935　**66.** $2/(2n+1)$; $2/(2n-2)$; $\mathrm{e}^{-1}$　**67.** $2/n$; $(2n-3)/(n-1)^2$; $\mathrm{e}^{-2}$　**68.** $(1 - \mathrm{e}^{-5})^{80}$　**70.** $p + (1-p)\mathrm{e}^{-\lambda t}$　**71.** 0.1500; 0.1012　**73.** 5.8125　**74.** 32/243; 4864/6561; 160/729; 160/729　**78.** $18 \times (17)^{n-1}/(35)^n$　**81.** 3/10; 5/6; 75/138　**82.** 0.3439　**83.** 1.5

## 第 5 章

**2.** $3.5\mathrm{e}^{-5/2}$　**3.** 否；否　**4.** 1/2　**5.** $1 - (0.01)^{1/5}$　**6.** 4; 0; $\infty$　**7.** 3/5; 6/5　**8.** 2　**10.** 2/3; 2/3　**11.** 2/5　**13.** 2/3; 1/3　**15.** 0.7977; 0.6827; 0.3695; 0.9522; 0.1587　**16.** $(0.9938)^{10}$　**18.** 22.66　**19.** (c)1/2; (d)1/4　**20.** 0.9994; 0.75; 0.977　**22.** 9.5; 0.0019　**23.** 0.9258; 0.1762　**26.** 0.0606; 0.0525　**28.** 0.8363　**29.** 0.9993　**32.** $\mathrm{e}^{-1}$; $\mathrm{e}^{-1/2}$　**34.** $\mathrm{e}^{-1}$; 1/3　**38.** 3/5　**40.** $1/y$

## 第 6 章

**2.** (a)14/39; 10/39; 10/39; 5/39 (b)84/429; 70/429; 70/429; 70/429; 40/429; 40/429; 40/429; 15/429　**3.** 15/26; 5/26; 5/26; 1/26　**4.** 25/169; 40/169; 40/169; 64/169　**7.** $p(i,j) = p^2(1-p)^{i+j}$　**8.** $c = 1/8$; $E[X] = 0$　**9.** $(12x^2 + 6x)/7$; 15/56; 0.8625; 5/7; 8/7　**10.** 1/2; $1 - \mathrm{e}^{-a}$　**11.** 0.1458　**12.** $39.3\mathrm{e}^{-5}$　**13.** 1/6; 1/2　**15.** $\pi/4$　**16.** $n(1/2)^{n-1}$　**17.** 1/3　**18.** 7/9　**19.** 1/2　**21.** 2/5; 2/5　**22.** 否; 1/3　**23.** 1/2; 2/3; 1/20; 1/18　**25.** $\mathrm{e}^{-1}/i!$　**28.** $1/2\mathrm{e}^{-t}$; $1 - 3\mathrm{e}^{-2}$　**29.** 0.0326　**30.** 0.3372; 0.2061　**31.** 0.0829; 0.3766　**32.** $\mathrm{e}^{-2}$; $1 - 3\mathrm{e}^{-2}$　**35.** 5/13; 8/13　**36.** 1/6; 5/6; 1/4; 3/4　**41.** $(y+1)^2 x\mathrm{e}^{-x(y+1)}$; $x\mathrm{e}^{-xy}$; $\mathrm{e}^{-x}$　**42.** $1/2 + 3y/(4x) - y^3/(4x^3)$　**46.** $(1 - 2d/L)^3$　**47.** 0.79297　**48.** $1 - \mathrm{e}^{-5\lambda a}$; $(1 - \mathrm{e}^{-\lambda a})^5$　**52.** $r/\pi$　**53.** $r$　**56.** (a) $u/(v+1)^2$

# 第 7 章

**1.** 52.5/12　**2.** 324; 199.6　**3.** 1/2; 1/4; 0　**4.** 1/6; 1/4; 1/2　**5.** 3/2　**6.** 35　**7.** 0.9; 4.9; 4.2　**8.** $(1-(1-p)^N)/p$　**10.** 0.6; 0　**11.** $2(n-1)p(1-p)$　**12.** $(3n^2-n)/(4n-2)$; $3n^2/(4n-2)$　**14.** $m/(1-p)$　**15.** 1/2　**18.** 4　**21.** 0.9301; 87.5755　**22.** 14.7　**23.** 147/110　**26.** $n/(n+1)$; $1/(n+1)$　**29.** 437/35; 12; 4; 123/35　**31.** 175/6　**33.** 14　**34.** 20/19; 360/361　**35.** 21.2; 18.929; 49.214　**36.** $-n/36$　**37.** 0　**38.** 1/8　**41.** 6; 112/33　**42.** 100/19; 16 200/6137; 10/19; 3240/6137　**45.** 1/2; 0　**47.** $1/(n-1)$　**48.** 6; 7; 5.8192　**49.** 6.06　**50.** $2y^2$　**51.** $y^3/4$　**53.** 12　**54.** 8　**56.** $N(1-\mathrm{e}^{-10/N})$　**57.** 12.5　**63.** $-96/145$　**65.** 5.16　**66.** 218　**67.** $x[1+(2p-1)^2]^n$　**69.** 1/2; 1/16; 2/81　**70.** 1/2; 1/3　**72.** $1/i$; $[i(i+1)]^{-1}$; $\infty$　**73.** $\mu$; $1+\sigma^2$; 是; $\sigma^2$　**79.** 0.176; 0.141

# 第 8 章

**1.** $\geqslant 19/20$　**2.** 15/17; $\geqslant 3/4$; $\geqslant 10$　**3.** $\geqslant 3$　**4.** $\leqslant 4/3$; 0.8428　**5.** 0.1416　**6.** 0.9431　**7.** 0.3085　**8.** 0.6932　**9.** $(327)^2$　**10.** 117　**11.** $\geqslant 0.057$　**13.** 0.0162; 0.0003; 0.2514; 0.2514　**14.** $n \geqslant 23$　**16.** 0.013; 0.018; 0.691　**18.** $\leqslant 0.2$　**23.** 0.769; 0.357; 0.4267; 0.1093; 0.112 184

# 第 9 章

**1.** 1/9; 5/9　**3.** 0.9735; 0.9098; 0.7358; 0.5578　**10.** (b)1/6　**14.** 2.585; 0.5417; 3.1267　**15.** 5.5098

# 附录 B　自检习题答案

## 第 1 章

**1.** (a) C,D,E,F 这 4 个字母共有 4! 种不同的排序方法. 对于每一种这样的排列, 可将 A,B 放在 5 个位置. 即可把它们放在 C,D,E,F 字母的前面, 或放在第 2 个位置, 等等. 但 A,B 本身又可以以 AB 或 BA 的方式嵌入这 5 个位置, 因此, 一共有 $2\times5\times4! = 240$ 种方法. 另一种方法是想象 B 是粘在 A 的后面, 这样一共有 5! 种方法, 但也有可以 B 粘在 A 的前面, 这样也有 5! 种方法, 故一共有 $2\times 5! = 240$ 种方法.

(b) 6 个字母一共有 $6! = 720$ 种排列方式, 其中有一半 A 在 B 前, 一半 A 在 B 后, 因此, A 在 B 之前的排列共有 $720/2 = 360$ 种.

(c) 由于 A, B, C 三个字母的排列共有 6 种, 因此, 在 720 种全部排列中, 有 $720/6 = 120$ 种排列为 A B C 这种顺序.

(d) A 在 B 之前的排列共有 $6!/2 = 360$ 种, 其中一半是 C 在 D 之前. 因此, A 在 B 前, C 在 D 前的排列共有 180 种.

(e) 若将 B 粘于 A 的后面, C 粘于 D 的后面, 这样共有 $4! = 24$ 种方法. 但由于 A,B 的位置可以颠倒过来, 即 A 可以粘于 B 的后面, 类似, D 可粘于 C 的后面. 一共有 4 种不同情况, 因此, 共有 $4\times24 = 96$ 种排列.

(f) E 在最后共有 5! 种排列, 因此, 它不在最后共有 $6! - 5! = 600$ 种排列.

**2.** 由于 3 个国家有 3! 种次序. 而每个国家的人也有一个排序问题, 因此, 一共有 3!4!3!3! 种排序法.

**3.** (a) $10\times9\times8 = 720$

(b) $8\times7\times6 + 2\times3\times8\times7 = 672$

若A, B 都不入选, 则共有 $8\times7\times6$ 种选法. 若只选 A , 没有 B , 则有 $3\times8\times7$ 种选法. 故, A,B 中只有一人入选, 一共有 $2\times3\times8\times7$ 种选法.

(c) $8\times7\times6 + 3\times2\times8 = 384$

(d) $3\times9\times8 = 216$

(e) $9\times8\times7 + 9\times8 = 576$

**4.** (a) $\binom{10}{7}$　(b) $\binom{5}{3}\binom{5}{4} + \binom{5}{4}\binom{5}{3} + \binom{5}{5}\binom{5}{2}$

**5.** $\binom{7}{3,2,2} = 210$

**6.** 一共有 $\binom{7}{3} = 35$ 种位置的选择, 每种选择可做成 $(26)^3(10)^4$ 种牌子. 因此, 总共可做成 $35\times(26)^3(10)^4$ 种不同的牌子.

**7.** $n$ 个中选 $r$ 个等价于 $n$ 个中剔除 $(n-r)$ 个. 因此, 等式两边经过计算是相等的.

**8.** (a) $10\times9\times9\cdots9 = 10\times9^{n-1}$

(b) $\binom{n}{i}9^{n-i}$, 一共有 $\binom{n}{i}$ 种位置选择, 这种位置上放上 0, 而其余 $n-i$ 个位置上可以任意放 $1,2,\cdots,9$.

**9.** (a) $\binom{3n}{3}$　(b) $3\binom{n}{3}$　(c) $\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{1}=3n^2(n-1)$

(d) $n^3$　(e) $\binom{3n}{3}=3\binom{n}{3}+3n^2(n-1)+n^3$

**10.** 一共有 $9\times8\times7\times6\times5$ 个数, 其中没有两个数字是相同的. 若容许某一指定数可重复一次, 则共有 $\binom{5}{2}\times8\times7\times6$ 个数, 因此, 只容许有一个数可重复出现两次的一共有 $9\times\binom{5}{2}\times8\times7\times6$ 个数. 若在 5 位数中有两个数可重复, 对于确定的两个数, 一共有$7\times\frac{5!}{2!2!}$ 个数. 这样, 一共有 $\binom{9}{2}7\times\frac{5!}{2!2!}$ 个数, 其中有两个数字重复一次. 这样, 总共有

$$9\times8\times7\times6\times5+9\times\binom{5}{2}\times8\times7\times6+\binom{9}{2}7\times\frac{5!}{2!2!}$$

个 5 位数.

**11.** (a) 我们可以将这个问题看成一个 7 阶段的试验. 首先从 10 对夫妇中选择 6 对夫妇, 这种选择的方法共有 $\binom{10}{6}$ 种方法. 然后在选出的 6 对夫妇中的每一对选出 1 人, 这样一共选出 6 人. 根据推广的计数法则可知, 一共有 $\binom{10}{6}2^6$ 种不同的选择方法.

(b) 首先从 10 对夫妻中选出 6 对夫妻, 这种选法一共有 $\binom{10}{6}$ 种. 然后, 从中选择 3 对夫妻, 这 3 对夫妻中的男人就是选中的人员, 这种选法一共有 $\binom{6}{3}$ 种选法. 依据计数法则可知, 一共有 $\binom{10}{6}\binom{6}{3}=\frac{10!}{4!3!3!}$ 种选择方法. 另一种方法是, 先从 10 个男人中选出 3 个男人, 然后从与这些男人无关的女人中选出 3 个女人. 这样一共有 $\binom{10}{7}\binom{7}{3}=\frac{10!}{3!3!4!}$ 种选择方法.

**12.** $\binom{8}{3}\binom{7}{3}+\binom{8}{4}\binom{7}{2}=3430$

上式左边第一项给出由 3 个女的和 3 个男的组成一个委员会的可能组成方式. 第二项是由 4 个女的和 2 个男的组成委员会的可能组成方式.

**13.** $(x_1+\cdots+x_5=4$的解的组数$)(x_1+\cdots+x_5=5$的解的组数$)(x_1+\cdots+x_5=6$的解的组数$)=\binom{8}{4}\binom{9}{4}\binom{10}{4}$

**14.** 总和为 $j$ 的正向量共有 $\binom{j-1}{n-1}$ 个, 因此, 一共有 $\sum_{j=n}^{k}\binom{j-1}{n-1}$ 个这样的向量.

**15.** 先假定有 $k$ 个学生通过了考试, 这样可有 $\binom{n}{k}$ 组. 由于每个组内各人成绩还有顺序, 因此, 由 $k$ 个学生通过考试时, 一共有$\binom{n}{k}k!$ 种可能性. 显然, 总起来有 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!$ 种可能的结果.

**16.** 由 4 个数组成的集合个数为 $\binom{20}{4} = 4845$. 其中不含前 5 个数的子集为 $\binom{15}{4} = 1365$. 它的反面, 即至少含有 $\{1, 2, \cdots, 5\}$ 中一个数的组数有 $4845 - 1365 = 3480$ 个. 另一种计算方法是 $\sum_{i=1}^{4} \binom{5}{i}\binom{15}{4-i}$.

**17.** 两边乘以 2, 得

$$n(n-1) = k(k-1) + 2k(n-k) + (n-k)(n-k-1)$$

上式右边经过整理得

$$k^2(1-2+1) + k(-1+2n-n-n+1) + n(n-1)$$

作为组合解释, 可考虑 $n$ 个学生中, 有 $k$ 个女生. 从 $n$ 个学生中找出 2 个代表, 一共有 $\binom{n}{2}$ 种方法. 若两个代表全由女生组成的话, 一共有 $\binom{k}{2}$ 种组成方式. 若由一男一女组成的话, 一共有 $k(n-k)$ 种组成方法. 若全由男生组成一共有 $\binom{n-k}{2}$ 种方法. 将这些组合方法加起来, 就是 $\binom{n}{2}$.

**18.** 有 3 种方法可从单亲且有一个孩子的家庭中选择; 有 $3 \times 1 \times 2 = 6$ 种方法可从单亲且有二个孩子的家庭中选择; 有 $5 \times 2 \times 1 = 10$ 种方法可从有独生子的双亲家庭中选择; 有 $7 \times 2 \times 2 = 28$ 种方法可从有二个孩子的双亲家庭中选择; 有 $6 \times 2 \times 3 = 36$ 种方法可从有三个孩子的双亲家庭中选择. 总起来, 一共有 80 种可能的选择方法.

**19.** 首先选定三个位置放置数字, 然后在相应的位置中放置数字或字母. 这样一共有 $\binom{8}{3} \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 10 \times 9 \times 8$ 块牌子. 如果三个数字必须放在连续的位置上, 数字的位置只有 6 种可能, 这样一共可有 $6 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 10 \times 9 \times 8$ 块牌子.

## 第 2 章

**1.** (a) $2 \times 3 \times 4 = 24$ (b) $2 \times 3 = 6$ (c) $3 \times 4 = 12$

(d) $AB = \{(c, \text{面}, i), (c, \text{米饭}, i), (c, \text{土豆}, i)\}$ (e) 8 (f) $ABC = \{(c, \text{米饭}, i)\}$

**2.** 记 $A$ 为“买一套西服”, $B$ 为“买一件衬衫”, $C$ 为“买一条领带”, 则

$$P(A \cup B \cup C) = 0.22 + 0.30 + 0.28 - 0.11 - 0.14 - 0.10 + 0.06 = 0.51$$

(a) $1 - 0.51 = 0.49$

(b) 买两样以上的概率为

$$P(AB \cup AC \cup BC) = 0.11 + 0.14 + 0.10 - 0.06 - 0.06 - 0.06 + 0.06 = 0.23$$

因此, 正好买一样东西的概率为 $0.51 - 0.23 = 0.28$.

**3.** 根据对称性, 第 14 张牌可以是 52 张牌中的任意一张, 因此相关概率为 4/52. 更形式的说法是：52! 个结果中, 第 14 张牌为“A”(指红桃“A”, 或方块“A”, $\cdots$) 的概率为

$$p = \frac{4 \times 51 \times 50 \cdots 2 \times 1}{(52)!} = \frac{4}{52}$$

记事件 $A$ 为“第 1 张‘A’出现在第 14 张牌”, 我们有

$$P(A)=\frac{48\times 47\cdots 36\times 4}{52\times 51\times\cdots 40\times 39}=0.0312$$

**4.** 记 $D$ 为事件“最小温度为 $70^\circ\mathrm{C}$”. 则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7-P(AB)$$
$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(CD)=0.2+P(D)-P(DC)$$

利用事实, $A\cup B=C\cup D, AB=CD$, 将上述两式相减得:

$$0=0.5-P(D)$$

或 $P(D)=0.5$.

**5.**

$$\text{(a)}\ \frac{52\times 48\times 44\times 40}{52\times 51\times 50\times 49}=0.6761\quad \text{(b)}\ \frac{52\times 39\times 26\times 13}{52\times 51\times 50\times 49}=0.1055$$

**6.** 记 $R$ 为“两球均为红球”的事件, $B$ 为“两球均为黑球”的事件, 则

$$P(R\cup B)=P(R)+P(B)=\frac{3\times 4}{6\times 10}+\frac{3\times 6}{6\times 10}=\frac{1}{2}$$

**7.** (a) $1\Big/\binom{40}{8}=1.3\times 10^{-8}$　(b) $\binom{8}{7}\binom{32}{1}\Big/\binom{40}{8}=3.3\times 10^{-6}$

(c) $\binom{8}{6}\binom{32}{2}\Big/\binom{40}{8}+1.3\times 10^{-8}+3.3\times 10^{-6}=1.8\times 10^{-4}$

**8.** (a) $\dfrac{3\times 4\times 4\times 3}{\binom{14}{4}}=0.1439$　(b) $\binom{4}{2}\binom{4}{2}\Big/\binom{14}{4}=0.0360$　(c) $\binom{8}{4}\Big/\binom{14}{4}=0.0699$

**9.** 令 $S=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$, 考虑随机地从 $S$ 种选一元素, 则 $P(A)=N(A)/N(S)$, 有关结果可从命题 4.3 和 4.4 得到.

**10.** 当 1 号马的名次确定的情况下, 一共有 $5!=120$ 种可能排名. 因此, $N(A)=360$, 类似地, $N(B)=120, N(AB)=2\times 4!=48$. 由自检习题 9, 我们得 $N(A\cup B)=432$.

**11.** 一种办法是先计算它的补事件: 至少有一种花色在这一副牌中不出现. 记 $A_i$ 表示“牌中没有花色 $i$”, $i=1,2,3,4$. 则

$$\begin{aligned}P\Big(\bigcup_{i=1}^{4}A_i\Big)&=\sum_i P(A_i)-\sum_j\sum_{i:i<j}P(A_iA_j)+\cdots-P(A_1A_2A_3A_4)\\&=4\binom{39}{5}\Big/\binom{52}{2}-\binom{4}{2}\binom{26}{5}\Big/\binom{52}{5}+\binom{4}{3}\binom{13}{5}\Big/\binom{52}{5}\\&=4\binom{39}{5}\Big/\binom{52}{2}-6\binom{26}{5}\Big/\binom{52}{5}+4\binom{13}{5}\Big/\binom{52}{5}\end{aligned}$$

用 1 减去上述概率值就是所求事件的概率. 也可以从另一角度来解这个问题. 记 $A$ 为“一副牌中 4 种花色都出现”的事件, 利用等式

$$P(A)=P(\mathrm{n},\mathrm{n},\mathrm{n},\mathrm{n},o)+P(\mathrm{n},\mathrm{n},\mathrm{n},o,\mathrm{n})+P(\mathrm{n},\mathrm{n},o,\mathrm{n},\mathrm{n})+P(\mathrm{n},o,\mathrm{n},\mathrm{n},\mathrm{n})$$

式中 $P(\mathrm{n},\mathrm{n},\mathrm{n},o,\mathrm{n})$ 表示第 1 张为新花色, 第 2、3 张都为新花色, 第 4 张为老花色 (即第 4 张花色为之前出现过的花色), 第 5 张为新花色. 这样

$$\begin{aligned}P(A)&=\frac{52\times39\times26\times13\times48+52\times39\times26\times36\times13}{52\times51\times50\times49\times48}\\&\quad+\frac{52\times39\times24\times26\times13+52\times12\times39\times26\times13}{52\times51\times50\times49\times48}\\&=\frac{52\times39\times26\times13\times(48+36+24+12)}{52\times51\times50\times49\times48}=0.2637\end{aligned}$$

**12.** 一共有 $(10)!/2^5$ 种分配方法, 将 5 对分配到 5 间房. 例如某两个人分配在第一间房, 又两个人分配在第二间房, 等等. 如果不计房间次序, 那么应该有 $(10)!/(5!2^5)$ 种分配方案. 一共有 $\binom{6}{2}\binom{4}{2}$ 种方法从前后卫中各选出两个人来组成前后卫组合. 但是将这 4 个人分成对的时候又有两种方式, 至于剩下的 2 个后卫, 只能分成一个组了. 剩下的 4 个前卫有 3 种方式分成 2 对 $(3=4!/(2!2^2))$, 这样,

$$P\{\text{刚好有两个房间是一个前卫和一个后卫混住的}\}=\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\times2\times3}{(10)!/(5!2^5)}=0.5714$$

**13.** 用 $R$ 表示“两次均选上字母 R ”的事件, 对于事件 $E$ 和 $V$ 之定义是类似的. 则

$$P\{\text{两次选上同一字母}\}=P(R)+P(E)+P(V)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{28}$$

**14.** 记 $B_1=A_1, B_i=A_i\left(\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\right)^{\mathrm{c}}, i>1$, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

此处最后一个等式利用 $B_i$ 互不相容, 而不等式利用了 $B_i\subset A_i$.

**15.**

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=1-P\bigg(\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\Big)^{\mathrm{c}}\bigg)=1-P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i^{\mathrm{c}}\Big)\geqslant1-\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i^{\mathrm{c}})=1$$

**16.** 分割中含 $\{1\}$ 作为子集的, 一共有 $T_{k-1}(n-1)$ 种分割, 其中 $T_{k-1}(n-1)$ 表示将剩余的 $n-1$ 个元素 $\{2,\cdots,n\}$ 分成 $k-1$ 非空个子集的方法数. 另外, 分割中不含 $\{1\}$, 此时, “1”必与其他元素在一起. 将 $\{2,\cdots,n\}$ 分成 $k$ 个非空子集的分割, 一共有 $T_k(n-1)$ 不同的分割, 将每一种分割的某一集合加上 1, 就成为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个分割, 而加“1”的方式共有 $k$ 种, 因此, 不含 $\{1\}$ 的分割共有 $kT_k(n-1)$ 个, 由此得到题中的等式.

**17.** 记 $R$ 为“5 个取出来的球中没有红球”, $W$ 代表“没有白球”, $B$ 代表“没有蓝球”, 则

$$\begin{aligned}&P(R\cup W\cup B)=P(R)+P(W)+P(B)-P(RW)-P(RB)-P(WB)+P(RWB)\\&=\binom{13}{5}\Big/\binom{18}{5}+\binom{12}{5}\Big/\binom{18}{5}+\binom{11}{5}\Big/\binom{18}{5}-\binom{7}{5}\Big/\binom{18}{5}-\binom{6}{5}\Big/\binom{18}{5}-\binom{5}{5}\Big/\binom{18}{5}\\&\approx0.2933\end{aligned}$$

这样, 5 个球出现所有颜色的概率近似地等于 $1-0.2933=0.7067$.

**18.** (a) $\dfrac{8\times7\times6\times5\times4}{17\times16\times15\times14\times13}=\dfrac{2}{221}$

(b) 由于一共有 9 个球不是蓝色的球, 所求的概率为 $\dfrac{9\times8\times7\times6\times5}{17\times16\times15\times14\times13}=\dfrac{9}{442}$.

(c) 三个不同颜色球的组合一共有 $4\times8\times5$ 种方式, 而每一种组合又有 3! 中排列方式. 这样所求的概率为 $\dfrac{3!\times4\times8\times5}{17\times16\times15}=\dfrac{4}{17}$.

(d) 4 个红球作为一个集体, 它们的位置连在一起的占位方式一共有 14 种方式, 而这 4 个球在一个占位方式下又有 4! 种排列方式. 这样, 4 个红球排在一起的概率为 $\dfrac{14\times4!}{17\times16\times15\times14}=\dfrac{1}{170}$.

**19.** (a) 10 张牌中出现 4 张黑桃、3 张红桃、2 张方块和一张梅花的概率为 $\dfrac{\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{2}\binom{13}{1}}{\binom{52}{10}}$. 而这 4 种花色的角色又可以互相调换, 这样概率变成 $\dfrac{24\times\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{2}\binom{13}{1}}{\binom{52}{10}}$.

(b) 先选定两种花色, 从这两种花色中选取三张牌, 然后在选取一种花色, 从这种花色中选定 4 张牌. 单就花色的选定方式就有 $\binom{4}{2}\times2=12$ 种. 这样所求的概率为 $\dfrac{12\times\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{4}}{\binom{52}{10}}$.

**20.** 红球先拿光的充要条件是蓝球最后拿走. 而每个球被最后拿走的概率是相同的. 因此, 红球先拿光的概率为 10/30.

## 第 3 章

**1.** (a) $P(\text{没有“}A\text{”})=\binom{35}{13}\Big/\binom{39}{13}$

(b) $1-P(\text{没有“}A\text{”})-4\binom{35}{12}\Big/\binom{39}{13}$

(c) $P(i\text{个“}A\text{”})=\binom{3}{i}\binom{36}{13-i}\Big/\binom{39}{13}$

**2.** 令 $L_i$ 表示事件“汽车电池寿命超过 $10000\times i$ 英里”.

(a) $P(L_2|L_1)=P(L_1L_2)/P(L_1)=P(L_2)/P(L_1)=1/2$

(b) $P(L_3|L_1)=P(L_1L_3)/P(L_1)=P(L_3)/P(L_1)=1/8$

**3.** 将 1 个白球和 0 个黑球放在坛子 1, 将 9 个白球和 10 个黑球放在坛子 2.

**4.** 记 $T$ 为“转移的球为白球”这一事件, $W$ 表示“从坛子 $B$ 中随机抽取一个白球”, 则

$$\begin{aligned}P(T|W)&=\frac{P(W|T)P(T)}{P(W|T)P(T)+P(W|T^c)P(T^c)}\\&=\frac{2/7\times2/3}{2/7\times2/3+1/7\times1/3}=4/5\end{aligned}$$

**5.** (a) $\dfrac{r}{r+w}$, 因为 $r+w$ 个球以完全相同的概率在第 $i$ 次被抽中.

(b) (c)

$$P(R_j|R_i)=\frac{P(R_iR_j)}{P(R_i)}=\frac{\binom{r}{2}/\binom{r+w}{2}}{r/(r+w)}=\frac{r-1}{r+w-1}$$

可用这样的说法解释：对于 $i\neq j$, 已知第 $i$ 次抽出是红球的情况下, 其他 $(r+w-1)$ 个球

以完全相同的概率在第 $j$ 次被抽出来, 而红球个数为 $(r-1)$.

**6.** 用 $B_i$ 表示“第 $i$ 次抽出的球是黑球”, 令 $R_i=B_i^c$, 则

$$\begin{aligned}P\{B_1|R_2\}&=\frac{P(R_2|B_1)P(B_1)}{P(R_2|B_1)P(B_1)+P(R_2|R_1)P(R_1)}\\&=\frac{[r/(b+r+c)][b/(b+r)]}{[r/(b+r+c)][b/(b+r)]+[(r+c)/(b+r+c)][r/(b+r)]}\\&=b/(b+r+c)\end{aligned}$$

**7.** 记 $B$ 为“两张牌均为‘A’”的事件.

(a)

$$\begin{aligned}P\{B|\text{肯定其中一张为黑桃“A”}\}&=\frac{P\{B,\text{肯定其中一张为黑桃“A”}\}}{P\{\text{肯定其中一张为黑桃“A”}\}}\\&=\frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{52}{2}}\Bigg/\frac{\binom{1}{1}\binom{51}{1}}{\binom{52}{2}}=3/51\end{aligned}$$

(b) 由于第 2 张可以是余下 51 张牌中的任意一张, 而且各张牌都是以相同的概率出现, 因此, 其解仍然是 3/51.

(c) 由于我们可以交换次序, 因此, 答案与 (b) 是一样的. 但也可以由下面形式推导：

$$\begin{aligned}P\{B|\text{第二张为“A”}\}&=\frac{P\{B,\text{第二张为“A”}\}}{P\{\text{第二张为“A”}\}}\\&=\frac{P\{B\}}{P\{B\}+P\{\text{第一张不是“A”},\text{第二张是“A”}\}}\\&=\frac{(4/52)(3/51)}{(4/52)(3/51)+(48/52)(4/51)}=3/51\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}P\{B|\text{至少有一张为“A”}\}&=\frac{B}{P\{\text{至少有一张是“A”}\}}\\&=\frac{(4/52)(3/51)}{1-(48/52)(47/51)}=1/33\end{aligned}$$

**8.**

$$\frac{P(H|E)}{P(G|E)}=\frac{P(HE)}{P(GE)}=\frac{P(H)P(E|H)}{P(G)P(E|G)}$$

新的证据出现后, $H$ 出现的概率是 $G$ 出现的概率的 1.5 倍.

**9.** 用 $A$ 表示“植物存活”的事件, $W$ 表示“给植物浇水”的事件.

(a)

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A|W)P(W) + P(A|W^c)P(W^c) \\
&= (0.85)(0.9) + (0.2)(0.1) = 0.785
\end{aligned}
$$

(b)

$$P(W^c|A^c) = \frac{P(A^c|W^c)P(W^c)}{P(A^c)} = \frac{(0.8)(0.1)}{0.215} = \frac{16}{43}$$

**10.** (a) $1 - P(\text{没有红球}) = 1 - \frac{\binom{22}{6}}{\binom{30}{6}}$

(b) 若已知红球没有被选中, 那么在剩余的 22 个非红球中的任意 6 个球具有相同的被选中概率. 因此

$$P(2\text{绿}|\text{没有红球}) = \frac{\binom{10}{2}\binom{12}{4}}{\binom{22}{6}}$$

**11.** 记 $W$ 表示事件 "电池工作", 用 $C$ 和 $D$ 分别表示所用的电池为 C 型和 D 型电池。

(a) $P(W) = P(W|C)P(C) + P(W|D)P(D) = 0.7 \times (8/14) + 0.4 \times (6/14) = 4/7$

(b)

$$P(C|W^c) = \frac{P(CW^c)}{P(W^c)} = \frac{P(W^c|C)P(C)}{3/7} = \frac{0.3 \times (8/14)}{3/7} = 0.4$$

**12.** 记 $L_i$ 表示事件 "Maria 喜欢书 i", $i = 1, 2$. 于是

$$P(L_2|L_1^c) = \frac{P(L_1^c L_2)}{P(L_1^c)} = \frac{P(L_1^c L_2)}{0.4}$$

再利用事件 $L_2$ 是两个不相容的事件 $L_1L_2$ 和 $L_1^cL_2$ 的和, 我们得到

$$0.5 = P(L_2) = P(L_1L_2) + P(L_1^cL_2) = 0.4 + P(L_1^cL_2)$$

这样,

$$P(L_2|L_1^c) = 0.1/0.4 = 0.25$$

**13.** (a) 这个问题等价于: 从坛子中最后拿走的球是一个蓝色球. 由于这 30 个球中的任意一个球以相同的概率在最后被取走, 因此所求的概率为 1/3.

(b) 这个问题等价于: 从坛子中拿完红球或蓝球时, 最后拿着的球是一个蓝色球. 而这 30 个 (红球或蓝球) 完全处于相同的可能性. 它们中的哪一个最后被拿走的可能性是相同的 (尽管坛子里还可能剩下若干绿色球没有被拿走). 因此所求的概率仍然是 1/3.

(c) 记 $B_1, R_2, G_3$ 分别表示, 第一次拿走的是蓝色球, 第二次拿走的是红色球, 第三次拿走的是绿色球. 我们有

$$P(B_1R_2G_3) = P(G_3)P(R_2|G_3)P(B_1|R_2G_3) = \frac{8}{38} \times \frac{20}{30} = \frac{8}{57}$$

上式中 $P(G_3)$ 是这样计算的: 事件 $G_3$ 刚好是事件 "绿色球最后被拿走", 因此它的概率为 8/38. $P(R_2|G_3)$ 的计算方法如下: 已知绿色球最后被拿走的条件下, 这 20 个红球和 10 个蓝球中的每一个球都有相同的机会排在这个集合的最后一位被拿走. 因此其概率为 20/30. 至于 $P(B_1|R_2G_3)$, 显然等于 1.

(d) $P(B_1)=P(B_1G_2R_3)+P(B_1R_2G_3)=\dfrac{20}{38}\times\dfrac{8}{18}+\dfrac{8}{58}=\dfrac{64}{171}$

**14.** 记 $H$ 为硬币正面向上的事件, $T_h$ 是事件 “$B$ 被告知 ‘正面向上’ (实际上，不一定真实)”, $F$ 表示 “$A$ 忘记了他所投掷的结果”, $C$ 表示 $B$ 被告知的是真实的情况. 这样

(a)

$$\begin{aligned}P(T_h)&=P(T_h|F)P(F)+P(T_h|F^c)P(F^c)\\&=0.5\times0.4+P(H)\times0.6\\&=0.68\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}P(C)&=P(C|F)P(F)+P(C|F^c)P(F^c)\\&=0.5\times0.4+1\times0.6\\&=0.80\end{aligned}$$

(c) 利用公式

$$P(H|T_h)=\frac{P(HT_h)}{P(T_h)}$$

和

$$\begin{aligned}P(HT_h)&=P(HT_h|F)P(F)+P(HT_h|F^c)P(F^c)\\&=P(H|F)P(T_h|HF)P(F)+P(H)P(F^c)\\&=0.8\times0.5\times0.4+0.8\times0.6\\&=0.64\end{aligned}$$

可得 $P(H|T_h)=0.64/0.68=16/17$.

**15.** 记 $A$ 为“第一次试验结果大于第二次结果”, $B$ 为“第二次结果大于第一次”, $E$ 为“两次的结果相等”, 则 $1=P(A)+P(B)+P(E)$. 由对称性, $P(A)=P(B)$, 因此,

$$P(B)=\frac{1-P(E)}{2}=\frac{1-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i^2}{2}$$

此题的另一种解法是

$$P(B)=\sum_i\sum_{j>i}P\{\text{第一次结果为}i,\text{第二次结果为}j\}=\sum_i\sum_{j>i}p_ip_j$$

由下面的恒等式看出两种方法得到的结果是相同的:

$$1=\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{j=1}^{n}p_j=\sum_i\sum_j p_ip_j=\sum_i p_i^2+\sum_i\sum_{j\neq i}p_ip_j=\sum_i p_i^2+2\sum_i\sum_{j>i}p_ip_j$$

**16.** 记 $E=\{A比B得到更多正面朝上\}$,

$A_w=\{n次掷硬币后, A的正面朝上次数比B的正面朝上次数多\}$,

$B_w=\{n次掷硬币后, B的正面朝上次数比A的正面朝上次数多\}$,

$A_e=\{n次掷硬币后, A的正面朝上次数与B的正面朝上次数相同\}$, 则

$$\begin{aligned}P(E)&=P(E|A_w)P(A_w)+P(E|B_w)P(B_w)+P(E|A_e)P(A_e)\\&=1\times P(A_w)+0\times P(B_w)+\frac{1}{2}P(A_e)=P(A_w)+\frac{1}{2}P(A_e)\end{aligned}$$

由于 $P(A_w)=P(B_w)$. 由等式 $1=P(A_w)+P(B_w)+P(A_e)$ 得 $P(A_w)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}P(A_e)$. 由此可知,

$$P(E)=P(A_w)+\frac{1}{2}P(A_e)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}P(A_e)+\frac{1}{2}P(A_e)=\frac{1}{2}$$

**17.** (a) 不真. 在掷两个骰子的游戏中, 记 $E=\{和为\ 7\ 点\}$, $F=\{第一次掷的结果不是\ 4\}$, $G=\{第二次不是\ 3\}$. 可以验证, $E,F$ 相互独立, $E,G$ 相互独立, 但

$$P(E|F\cup G)=\frac{P\{和为\ 7,\ 但没有\{4,3\}\}}{P\{没有\{4,3\}\}}=\frac{5/36}{35/36}=\frac{5}{35}\neq P(E)$$

(b)

$$\begin{aligned}P(E(F\cup G))&=P(EF\cup FG)=P(EF)+P(EG)\qquad 因为EFG=\emptyset\\&=P(E)[P(F)+P(G)]=P(E)P(F\cup G)\qquad FG=\emptyset\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}P(G|EF)&=\frac{P(EFG)}{P(EF)}=\frac{P(E)P(FG)}{P(EF)}\qquad 由于E与FG相互独立\\&=\frac{P(E)P(F)P(G)}{P(E)P(F)}\qquad 由独立性假设\\&=P(G)\end{aligned}$$

**18.** (a) 一定不对. 若它们互不相容, 则 $0=P(AB)\neq P(A)P(B)$.

(b) 一定不对. 若它们相互独立, 则 $P(AB)=P(A)\times P(B)>0$.

(c) 一定不对. 若它们互不相容, 则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1.2$.

(d) 可能正确.

**19.** (a), (b), (c) 三个概率分别为 $0.5, (0.8)^3=0.512, (0.9)^7\approx 0.4783$.

**20.** 记 $D_i(i=1,2)$ 为第 $i$ 个收音机是坏的. 又令 $A(B)$ 表示“这批收音机是由工厂 A(工厂 B) 生产的”.

$$\begin{aligned}P(D_2|D_1)&=\frac{P(D_1D_2)}{P(D_1)}=\frac{P(D_1D_2|A)P(A)+P(D_1D_2|B)P(B)}{P(D_1|A)P(A)+P(D_1|B)P(B)}\\&=\frac{0.05^2\times 1/2+0.01^2\times 1/2}{0.05\times 1/2+0.01\times 1/2}=\frac{13}{300}\end{aligned}$$

**21.** $P(A|B)=1$ 即 $P(AB)=P(B)$, 而 $P(B^c|A^c)=1$ 即 $P(A^cB^c)=P(A^c)$. 因此, 为证明本题, 只需由 $P(AB)=P(B)\Rightarrow P(A^cB^c)=P(A^c)$. 这可由下式推得:

$$\begin{aligned}P(B^cA^c)&=P((A\cup B)^c)=1-P(A\cup B)\\&=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-P(A)=P(A^c)\end{aligned}$$

**22.** 当 $n=0$ 时, 结论显然成立. 记 $A_i$ 表示"经过 $n$ 步以后, 在坛子内有 $i$ 个红球", 依归纳法假设

$$P(A_i)=\frac{1}{n+1}\qquad i=1,\cdots,n+1$$

用 $B_j$ 表示"经过 $n+1$ 步以后坛子里有 $j$ 个红球"这一事件, 则

$$\begin{aligned}P(B_j)&=\sum_{i=1}^{n+1}P(B_j|A_i)P(A_i)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}P(B_j|A_i)\\&=\frac{1}{n+1}[P(B_j|A_{j-1})+P(B_j|A_j)]\end{aligned}$$

经过 $n$ 步以后, 坛子内一共有 $n+2$ 个球. $P(B_j|A_{j-1})$ 表示坛子中有 $n+2$ 个球, 其中 $j-1$ 个红球, 从中随机地取出的是一个红球的概率, 这样, $n+1$ 步以后, 坛子内就有 $i$ 个红球, 显然

$$P(B_j|A_{j-1})=\frac{j-1}{n+2}$$

而相应的 $P(B_j|A_j)$ 表示在抽球之前坛子内有 $j$ 个红球, $n+2-j$ 个蓝球, 而取出的是一个蓝球的概率, 这样

$$P(B_j|A_j)=\frac{n+2-j}{n+2}$$

将这些概率代入 $P(B_j)$ 的公式, 得

$$P(B_j)=\frac{1}{n+1}[\frac{j-1}{n+2}+\frac{n+2-j}{n+2}]=\frac{1}{n+2}$$

按归纳法, 完成了证明.

**23.** 记 $A_i$ 为"第 $i$ 个人宣称拿到了 'A'", 则

$$P(A_i)=1-\binom{2n-2}{n}\Big/\binom{2n}{n}=1-\frac{1}{2}\times\frac{n-1}{2n-1}=\frac{3n-1}{4n-2}$$

$A_1A_2$ 表示"第一个人只能从 2 张 'A' 中选一张, 从 $2n-2$ 张非 ' A' 中选 $n-1$ 张". 这样,

$$P(A_1A_2)=\left(\binom{1}{2}\binom{2n-2}{n-1}\right)\Big/\binom{2n}{n}=\frac{n}{2n-1}$$

因此,

$$P(A_2^c|A_1)=1-P(A_2|A_1)=1-\frac{P(A_1A_2)}{p(A_1)}=\frac{n-1}{3n-1}$$

可以将分牌的结果看成两次试验, 试验 $i$ 成功表示第 $i$ 张"A"给了第一个玩牌者, 当 $n$ 充分大时, 这两个试验就相互独立, 成功的概率为 1/2, 这样, 问题变成了两次试验至少有一次成功的条件下, 求两次都成功的概率 (= 1/3), 因此, $n$ 充分大时, 可用例 2b 那样的伯努利试验来逼近.

**24.** (a) 设 $n$ 次收集到的优惠券的顺序为 $i_1, i_2, \cdots, i_n$, 其相应的概率为 $p_{i_1} \cdots p_{i_n} = \prod_{i=1}^{n} p_i$. 因此, $n$ 次收集到 $n$ 种不同的优惠券的概率为 $n! \prod_{i=1}^{n} p_i$.

(b) 设 $i_1, \cdots, i_k$ 各不相同, 则

$$P(E_{i_1} \cdots E_{i_k}) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$$

此处 $E_{i_1}, \cdots, E_{i_k}$ 表示没有 $i_1, \cdots, i_k$ 类型的优惠券, 在 $n$ 次收集优惠券, 每次都没有收集到 $i_1, \cdots, i_k$. 而各次收集优惠券又相互独立, 因此 $P(E_{i_1} \cdots E_{i_n})$ 有上述表达式. 现在利用事件和的概率公式得到

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$$

由于 $1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$ 表示 $n$ 种优惠券都收集到的概率, 由 (a) 知这个数等于 $n/n^n$, 将这个值代入 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$ 的展开式中, 得到

$$1 - \frac{n!}{n^n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$$

或

$$n! = n^n - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^n$$

或

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} (n-k)^n$$

**25.** 记 $A = EF^{c}, B = FE^{c}, C = E \cap F$, 则 $A, B, C$ 互不相容, 且

$$E \cup F = A \cup B \cup C$$

$$E = A \cup C \qquad F = B \cup C$$

$$P(E|E \cup F) = \frac{P(E \cap (E \cup F))}{P(E \cup F)} = \frac{P(A)P(C)}{P(A) + P(B) + P(C)}$$

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = \frac{P(C)}{P(B) + P(C)}$$

由上式看, $P(E|E \cup F) \geqslant P(E|F)$ 是显然的.

## 第 4 章

**1.** 由于概率之和为 1, 我们利用这个条件得

$$4P\{X = 3\} + 0.5 = 1$$

从而 $P\{X = 0\} = 0.375, P\{X = 3\} = 0.125$, 故 $E[X] = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.125 = 1.075$.

**2.** 利用题中的关系, 得 $p_i = c^i p_0, i = 1, 2$, 其中 $p_i = P\{X = i\}$. 由于这些概率之和为 1, 得

$$p_0(1 + c + c^2) = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{1 + c + c^2}$$

因此,

$$E[X] = p_1 + 2p_2 = \frac{c + 2c^2}{1 + c + c^2}$$

**3.** 令 $X$ 为掷硬币的次数, $X$ 的分布列为

$$p_2 = p^2 + (1-p)^2 \qquad p_3 = 1 - p_2 = 2p(1-p)$$

因此,

$$E[X] = 2p_2 + 3p_3 = 2p_2 + 3(1 - p_2) = 3 - p^2 - (1-p)^2$$

**4.** 随机地选定一个家庭, 而这个家庭有 $i$ 个儿童的概率为 $n_i/m$ , 因此

$$E[X] = \sum_{i=1}^{r} i n_i / m$$

由于有 $i$ 个儿童的家庭总数为 $n_i$ , 因此这些儿童的总数为 $in_i$, 抽到的儿童来自这样的家庭的概率为 $in_i / \sum_{j=1}^{r} in_i$. 因此,

$$E[Y] = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} i^2 n_i}{\sum\limits_{i=1}^{r} i n_i}$$

因此, 我们必须证明

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{r} i^2 n_i}{\sum\limits_{i=1}^{r} i n_i} \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} i n_i}{\sum\limits_{i=1}^{r} n_i}$$

上式等价于

$$\sum_{j=1}^{r} n_j \sum_{i=1}^{r} i^2 n_i \geqslant \sum_{i=1}^{r} i n_i \sum_{j=1}^{r} j n_j$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} i^2 n_i n_j \geqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} ij n_i n_j$$

对于固定的 $(i, j)$, 左边和式 $n_i n_j$ 的系数为 $i^2 + j^2$, 右边和式 $n_i n_j$ 系数为 $2ij$, 所以上式等价于

$$i^2 + j^2 \geqslant 2ij$$

而这个不等式是明显的.[1]

1. 也可这样解. 若令 $p_i = \dfrac{n_i}{\sum n_i}$ , 则上式等价于 $(\sum p_i)(\sum i^2 p_i) \geqslant \left(\sum i p_i\right)^2$. 而这个不等式是显然的. ——译者注

**5.** 记 $p = P\{X = 1\}$, 则 $E[X] = p, \mathrm{Var}(X) = p(1-p)$, 由问题条件知

$$p = 3p(1-p)$$

解此方程得 $p = 2/3$ . 因此 $P\{X = 0\} = 1/3$.

**6.** 假定你押上 $x$, 而赢 $x$ 的概率为 $p$, 输 $x$ 的概率为 $1-p$. 此时, 你赢钱的期望为

$$xp - x(1-p) = (2p-1)x$$

当 $p > 1/2$ 时, 这个值为正, 当 $p < 1/2$, 这个值为负. 若告诉你正面朝上的概率为 0.6, 则你应该押 10 元 (最大容许的押宝的值) 若告诉你是 0.3, 则你应该押 0 元, 这样你期望的利润为

$$\frac{1}{2} \times (1.2-1) \times 10 + \frac{1}{2} \times 0 - C = 1 - C$$

其中 $C$ 为信息费. 若没有这个信息, 则你的期望的所得为

$$\frac{1}{2}(2 \times 0.6 - 1)x + \frac{1}{2}(2 \times 0.3 - 1)x = \left[\frac{1}{2} \times 0.2 + \frac{1}{2} \times (-0.4)\right]x = -0.1x$$

因此, 在没有信息的情况下, 你应该押 0 元, 使损失最小. 比较这两种赌博方式可看出, 只要 $C < 1$ 你就买这个信息.

**7.** (a) 若你翻开红纸, 观察得到 $x$, 若你转向蓝纸, 你的期望收入为

$$2x(1/2) + x/2(1/2) = 5x/4 > x$$

因此, 你应该转向蓝纸, 而期望得到更多.

(b) 设慈善家写的数为 $x$(写在红纸上), 则在蓝纸上写上 $2x$ 或 $x/2$ , 注意若 $y < x/2$, 此时蓝纸上写的数字总是比 $y$ 大, 因此按规定接受了蓝纸上提供的数字, 即 $2x$ 或 $x/2$.

$$E[R_y(x)] = 5x/4 \qquad x/2 \geqslant y$$

如果 $x/2 < y \leqslant 2x$ , 此时, 如果蓝纸上, 写的是 $2x$, 你就接受 $2x$; 若蓝纸上写上 $x/2$, 你就转向红纸, 此时, 你得到的是

$$E[R_y(x)] = 2x(1/2) + x(1/2) = 3x/2 \qquad x/2 < y \leqslant 2x$$

最后, 若 $2x < y$, 此时蓝纸上的数被拒绝, 你的收入为

$$R_y(x) = x \qquad 2x < y$$

对于 $y$ 值, 期望收入为

$$E[R_y(x)] = \begin{cases} x & x < y/2 \\ 3x/2 & y/2 \leqslant x < 2y \\ 5x/4 & x \geqslant 2y \end{cases}$$

**8.** 设 $n$ 次独立重复试验成功的概率为 $p$, 成功数小于或等于 $i$ 的充要条件为失败数大于或等于 $n-i$, 但是每次试验失败的概率为 $1-p$. 因此失败数的分布为二项分布, 故

$$\begin{aligned}P\{\text{Bin}(n,p) \leqslant i\} &= P\{\text{Bin}(n,1-p) \geqslant n-i\} \\ &= 1 - P\{\text{Bin}(n,1-p) \leqslant n-i-1\}\end{aligned}$$

上面最后一个等式是利用事件和它的对立事件的概率之间的关系.

**9.** 由 $E[X]=np, \text{Var}(X)=np(1-p)$. 通过 $np=6, np(1-p)=2.4$, 解得 $p=0.6, n=10$, 故

$$P\{X=5\} = \binom{10}{5}(0.6)^5(0.4)^5$$

**10.** 令 $X_i$ 为第 $i$ 次取出的球的号码, 则

$$\begin{aligned}P\{X \leqslant k\} &= P\{X_1 \leqslant k, X_2 \leqslant k, \cdots, X_m \leqslant k\} \\ &= P\{X_1 \leqslant k\}P\{X_2 \leqslant k\}\cdots P\{X_m \leqslant k\} = \left(\frac{k}{n}\right)^m\end{aligned}$$

因此,

$$P\{X=k\} = P\{X \leqslant k\} - P\{X \leqslant k-1\} = \left(\frac{k}{n}\right)^m - \left(\frac{k-1}{n}\right)^m$$

**11.** (a) 给定 A 赢第一局, A 赢全局的充要条件在 B 赢 3 局以前赢 2 局. 故

$$P\{\text{A 赢}|\text{A 赢第一局}\} = p^2 + 2p^2(1-p) + 3p^2(1-p)^2$$

(b)

$$\begin{aligned}P\{\text{A 赢第一局}|\text{A 赢}\} &= \frac{P\{\text{A 赢}|\text{A 赢第一局}\}P\{\text{A 赢第一局}\}}{P\{\text{A 赢}\}} \\ &= \frac{p^3 + 2p^3(1-p) + 3p^3(1-p)^2}{p^3 + 3p^3(1-p) + \binom{4}{2}p^3(1-p)^2} \\ &= \frac{1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2}{1 + 3(1-p) + 6(1-p)^2}\end{aligned}$$

**12.** 为计算至少赢三场的概率, 必须计算本周赢或输的条件之下的事件的概率, 因此, 答案为

$$0.5\sum_{i=3}^{4}\binom{4}{i}0.4^i 0.6^{4-i} + 0.5\sum_{i=3}^{4}\binom{4}{i}0.7^i 0.3^{4-i}$$

**13.** 记 $C$ 为"陪审团作出正确决定"的事件, 记 $F$ 为"其中有 4 个审判员的结论相同", 则

$$P(C) = \sum_{i=4}^{7}\binom{7}{i}0.7^i 0.3^{7-i}$$

$$P(C|F) = \frac{P(CF)}{P(F)} = \frac{\binom{7}{4}0.7^4 0.3^3}{\binom{7}{4}0.7^4 0.3^3 + \binom{7}{3}0.7^3 0.3^4} = 0.7$$

**14.** 假定飓风次数为泊松分布. 这样, 我们的解为

$$\sum_{i=0}^{3} \mathrm{e}^{-5.2}(5.2)^i/i!$$

**15.**

$$E[Y]=\sum_{i=1}^{\infty} iP\{X=i\}/P\{X>0\}=E[X]/P\{X>0\}=\frac{\lambda}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$$

**16.** (a) $1/n$

(b) 记 $D$ 表示女生 $i$ 和女生 $j$ 选择不同的男生, 此时我们有

$$\begin{aligned}P(G_iG_j)&=P(G_iG_j|D)P(D)+P(G_iG_j|D^{\mathrm{c}})P(D^{\mathrm{c}})\\&=P(G_iG_j|D)P(D)+0 \qquad (P(G_iG_j|D^{\mathrm{c}})=0)\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}P(D^{\mathrm{c}})&=P\{i,j\text{选择同一男生}\}\\&=\sum_{k=1}^{n}P\{i,j\text{选择同一男生}k\}=nP\{i,j\text{同时选上男生 }1\}=n\times\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\end{aligned}$$

这样,

$$P(G_iG_j)=P(G_iG_j|D)(1-\frac{1}{n})=\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n^3}$$

因此 $P(G_i|G_j)=P(G_iG_j)/P(G_j)=(n-1)/n^2$.

(c) (d) 当 $n$ 充分大时, $P(G_i|G_j)$ 很小, 并且与 $P(G_i)$ 很接近. 由此可知形成夫妇的对数近似于泊松分布, 均值为 $\sum_{i=1}^{n}P(G_i)=1$. 从而, $P_0\sim \mathrm{e}^{-1}, P_k\approx \mathrm{e}^{-1}/k!$.

(e) 为求给定 $k$ 个女生都被配成夫妇的概率, 利用条件概率计算. 记 $D$ 为"这 $k$ 个女生找到不同的男生".

$$\begin{aligned}&P(G_{i_1}\cdots G_{i_k})=P(G_{i_1}\cdots G_{i_k}|D)P(D)+P(G_{i_1}\cdots G_{i_k}|D^{\mathrm{c}})P(D^{\mathrm{c}})\\&=P(G_{i_1}\cdots G_{i_k}|D)P(D)=\left(\frac{1}{n}\right)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}=\frac{n!}{(n-k)!n^{2k}}\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k}P(G_{i_1}\cdots G_{i_k})=\binom{n}{k}P(G_{i_1}\cdots G_{i_k})=\frac{n!n!}{(n-k)!(n-k)!k!n^{2k}}$$

利用事件和的概率公式得

$$1-P_0=P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}G_i\Big)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!n!}{(n-k)!(n-k)!k!n^{2k}}$$

**17.** (a) 由于第 $i$ 个妇女与其余每个人结成对的可能性相同, 因此 $P(W_i)=1/(2n-1)$.

(b) 由于在 $W_j$ 的条件下, 第 $i$ 个妇女与其余 $2n-3$ 个人结成对的可能性相同, 因此 $P(W_i|W_j)=1/(2n-3)$.

(c) 当 $n$ 很大时, 妇女和她的丈夫结成对的数目近似服从泊松分布, 其期望近似为 $\sum_{i=1}^{n} P(W_i) = n/(2n-1) \approx 1/2$. 因此, 没有夫妻结成对的概率近似等于 $\mathrm{e}^{-1/2}$.

(d) 这个问题变成了配对问题 (见 16 题).

**18.** (a) $\binom{8}{3}(9/19)^3(10/19)^5(9/19) = \binom{8}{3}(9/19)^4(10/19)^5$

(b) 记 $W$ 为她的最后所得, $X$ 为赌的次数, 由于她要赢 4 次, 输 $X-4$ 次, 所以她的所得为

$$W = 20 - 5(X-4) = 40 - 5X$$

因此

$$E[W] = 40 - 5E[X] = 40 - 5 \times [4/(9/19)] = -20/9$$

**19.** 当三个人抛掷硬币的结果相同时, 就不会产生“奇人”, 此概率为 1/4.

(a) $(1/4)^2(3/4) = 3/64$　(b) $(1/4)^4 = 1/256$.

**20.** 令 $q = 1-p$,

$$\begin{aligned} E[1/X] &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} q^{i-1} p = \frac{p}{q} \sum_{i=1}^{\infty} q^i / i \\ &= \frac{p}{q} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^q x^{i-1}\,\mathrm{d}x = \frac{p}{q} \int_0^q \sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{p}{q} \int_p^1 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\frac{p}{q} \ln p \end{aligned}$$

**21.** 由于 $(X-b)/(a-b)$ 以概率 $p$ 为 1, 以概率 $(1-p)$ 为 0, 故它是一个伯努利随机变量, 其参数为 $p$, 方差为 $p(1-p)$. 即

$$p(1-p) = \mathrm{Var}\Big(\frac{X-b}{a-b}\Big) = \frac{1}{(a-b)^2}\mathrm{Var}(X-b) = \frac{1}{(a-b)^2}\mathrm{Var}(X)$$

故

$$\mathrm{Var}(X) = (a-b)^2 p(1-p)$$

**22.** 记 $X$ 为你玩的点盘数, $Y$ 为你失败的盘数.

(a) 玩了 4 盘以后, 你再继续玩, 直到你输为止. 因此 $X-4$ 是几何分布, 其参数为 $(1-p)$, 故

$$E[X] = E[4 + (X-4)] = 4 + E[X-4] = 4 + \frac{1}{1-p}$$

(b) 令 $Z$ 为前 4 盘中输的盘数, 则 $Z$ 为二项随机变量, 其参数为 $(4, 1-p)$. 由于 $Y = Z+1$, 我们有

$$E[Y] = E[Z+1] = E[Z] + 1 = 4(1-p) + 1$$

**23.** “在抽出 $m$ 个黑球以前抽出 $n$ 个白球”这一事件等价于“在前 $n+m-1$ 次至少抽出 $n$ 个白球”(与第 3 章例 4j 的问题进行比较). 记 $X$ 为前 $n+m-1$ 次抽出的球中的白球个数, $X$ 是超几何随机变量.

$$P\{X \geqslant n\} = \sum_{i=n}^{n+m-1} P\{X = i\} = \sum_{i=n}^{n+m-1} \frac{\binom{N}{i}\binom{M}{n+m-1-i}}{\binom{N+M}{n+m-1}}$$

**24.** 由于每个球以相同的概率 $p_i$, 并且相互独立地进入坛子 $i$, $X_i$ 的分布是参数 $n=10, p=p_i$ 的二项分布.

同样的理由可知, $X_i+X_j$ 的分布是参数 $n=10, p=p_i+p_j$ 的二项分布.

同样的理由可知, $X_1+X_2+X_3$ 的分布是参数 $n=10, p=p_1+p_2+p_3$ 的二项分布, 故

$$P\{X_1+X_2+X_3=7\}=\binom{10}{7}(p_1+p_2+p_3)^7(p_4+p_5)^3$$

**25.** 如果第 $i$ 个人拿到自己的帽子, 则记 $X_i=1$, 否则记 $X_i=0$. 这样

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

是拿到自己帽子的人数. 等式两边求期望得到

$$E[X]=E[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=\sum_{i=1}^{n}P\{X_i=1\}=\sum_{i=1}^{n}1/n=1$$

倒成第二个等式是利用事实: 第 $i$ 个人以相等的概率拿到任何一个帽子, 因此他拿到自己帽子的概率为 $1/n$

利用式 (9.1), 得到

$$E[X^2]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}E[X_iX_j]$$

对于 $i\neq j$,

$$E[X_iX_j]=P\{X_i=1,X_j=1\}=P\{X_i=1\}P\{X_j=1|X_i=1\}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}$$

因此,

$$\begin{aligned}E[X^2]&=1+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{1}{n(n-1)}\\&=1+n(n-1)\frac{1}{n(n-1)}=2\end{aligned}$$

这样

$$\mathrm{Var}(X)=2-1^2=1$$

## 第 5 章

**1.** 设 $X$ 是玩球的时间 (分)

(a) $P\{X>15\}=1-P\{X\leqslant 15\}=1-5\times 0.025=0.875$
(b) $P\{20<X<35\}=10\times 0.05+5\times 0.025=0.625$
(c) $P\{X<30\}=10\times 0.025+10\times 0.05=0.75$
(d) $P\{X>36\}=4\times 0.025=0.1$

**2.** (a) $1 = \int_0^1 cx^n \, \mathrm{d}x = c/(n+1) \Rightarrow c = n+1$
(b) $P\{X > x\} = (n+1)\int_x^1 x^n \, \mathrm{d}x = x^{n+1}|_x^1 = 1 - x^{n+1}$

**3.** 首先由下式确定 $c$ 的值

$$1 = \int_0^2 cx^4 \mathrm{d}x = 32c/5 \Rightarrow c = 5/32$$

(a) $E[X] = \dfrac{5}{32}\int_0^2 x^5 \, \mathrm{d}x = \dfrac{5}{32}\dfrac{64}{6} = 5/3$
(b) $E[X^2] = \dfrac{5}{32}\int_0^2 x^6 \, \mathrm{d}x = \dfrac{5}{32}\dfrac{128}{7} = 20/7 \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = 20/7 - (5/3)^2 = 5/63$

**4.** 由

$$1 = \int_0^1 (ax + bx^2) \, \mathrm{d}x = a/2 + b/3$$
$$0.6 = \int_0^1 (ax^2 + bx^3) \, \mathrm{d}x = a/3 + b/4$$

我们得到 $a = 3.6, b = -2.4$. 因此,

(a) $P[X < 1/2] = \int_0^{1/2}(3.6x - 2.4x^2) \, \mathrm{d}x = (1.8x^2 - 0.8x^3)|_0^{1/2} = 0.35$
(b) $E[X^2] = \int_0^1 (3.6x^3 - 2.4x^4) \, \mathrm{d}x = 0.42 \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = 0.06$

**5.** 对于 $i = 1, \cdots, n$

$$P\{X = i\} = P\{[\mathrm{Int}(nU)] = i - 1\} = P\{i - 1 \leqslant nU < i\}$$
$$= P\left\{\frac{i-1}{n} \leqslant U < \frac{i}{n}\right\} = 1/n$$

(式中 $[nU]$ 表示 $nU$ 的整数部分. )

**6.** 如果你的竞价为 $x, 70 < x < 140$, 则你将以概率 $(140-x)/70$ 赢得该工程, 利润为 $x-100$, 或者失去工程, 利润为 0. 因此, 若你竞价 $x$, 期望利润为

$$\frac{1}{70}(x - 100)(140 - x) = \frac{1}{70}(240x - x^2 - 14000)$$

上式求导并使之为 0, 得方程

$$240 - 2x = 0$$

因此, 你应该竞价 120(千元), 期望利润为 40/7(千元).

**7.** (a) $P\{U > 0.1\} = 9/10$
(b) $P\{U > 0.2 | U > 0.1\} = P\{U > 0.2\}/P\{U > 0.1\} = 8/9$
(c) $P\{U > 0.3 | U > 0.2, U > 0.1\} = P\{U > 0.3\}/P\{U > 0.2\} = 7/8$
(d) $P\{U > 0.3\} = 7/10$

将 (a),(b),(c) 所得的概率相乘得到 (d) 的概率.

**8.** 记 $X$ 为测试数据, 令 $Z = (X - 100)/15$ , 注意 $Z$ 是标准正态随机变量.
(a) $P\{X > 125\} = P\{Z > 25/15\} \approx 0.0478$
(b)

$$P\{90 < X < 110\} = P\{-10/15 < Z < 10/15\}$$
$$= P\{Z < 2/3\} - P\{Z < -2/3\} = P\{Z < 2/3\} - [1 - P\{Z < 2/3\}] \quad \approx 0.4950$$

**9.** 设 $X$ 是路上花的时间, 我们需要确定 $x$, 使

$$P\{X > x\} = 0.05$$

它等价于

$$P\left\{\frac{X-40}{7} > \frac{x-40}{7}\right\} = 0.05$$

或

$$P\left\{Z > \frac{x-40}{7}\right\} = 0.05$$

其中 $Z$ 为标准正态随机变量. 但是

$$P\{Z > 1.645\} = 0.05$$

因此

$$\frac{x-40}{7} = 1.645 \quad 或 \quad x = 51.515$$

这样, 你应该在 12 点过 8.485 分以前动身.

**10.** 令 $X$ 为轮胎的寿命 (单位: 1000 英里), 令 $Z = (X-34)/4$ , 则 $Z$ 为标准正态随机变量.

(a) $P\{X > 40\} = P\{Z > 1.5\} \approx 0.0668$

(b) $P\{30 < X < 35\} = P\{-1 < Z < 0.25\} = P\{Z < 0.25\} - P\{Z > 1\} \approx 0.44$

(c)

$$\begin{aligned} P\{X > 40 | X > 30\} &= P\{X > 40\}/P\{X > 30\} \\ &= P\{Z > 1.5\}/P\{Z > -1\} \approx 0.079 \end{aligned}$$

**11.** 令 $X$ 为下一年的雨量, 记 $Z = (X-40.2)/8.4$

(a) $P\{X > 44\} = P\{Z > 3.8/8.4\} \approx P\{Z > 0.4524\} \approx 0.3255$

(b) $\binom{7}{3}(0.3255)^3(0.6745)^4$

**12.** 记 $M_i$ 为样本中每年至少有收入 $i$ (单位: 千元) 的男人数. $W_i$ 为相应的女人数, 令 $Z$ 为标准正态随机变量.

(a)

$$\begin{aligned} P\{W_{25} \geqslant 70\} &= P\{W_{25} \geqslant 69.5\} \\ &= P\left\{\frac{W_{25} - 200 \times 0.34}{\sqrt{200 \times 0.34 \times 0.66}} \geqslant \frac{69.5 - 200 \times 0.34}{\sqrt{200 \times 0.34 \times 0.66}}\right\} \\ &\approx P\{Z \geqslant 0.2239\} \approx 0.4114 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P\{M_{25} \leqslant 120\} &= P\{M_{25} \leqslant 120.5\} \\ &= P\left\{\frac{M_{25} - 200 \times 0.587}{\sqrt{200 \times 0.587 \times 0.413}} \leqslant \frac{120.5 - 200 \times 0.587}{\sqrt{200 \times 0.587 \times 0.413}}\right\} \\ &\approx P\{Z \leqslant 0.4452\} \approx 0.6719 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P\{M_{20} \geqslant 150\} &= P\{M_{20} \geqslant 149.5\} \\ &= P\left\{\frac{M_{20} - 200 \times 0.745}{\sqrt{200 \times 0.745 \times 0.255}} \leqslant \frac{149.5 - 200 \times 0.745}{\sqrt{200 \times 0.745 \times 0.255}}\right\} \\ &\approx P\{Z \geqslant 0.0811\} \approx 0.4677 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}P\{W_{20} \geqslant 100\} &= P\{W_{20} \geqslant 99.5\}\\ &= P\left\{\frac{W_{20} - 200 \times 0.534}{\sqrt{200 \times 0.534 \times 0.466}} \geqslant \frac{99.5 - 200 \times 0.534}{\sqrt{200 \times 0.534 \times 0.466}}\right\}\\ &\approx P\{Z \geqslant -1.0348\} \approx 0.8496\end{aligned}$$

因此, $P\{M_{20} \geqslant 150\}P\{W_{20} \geqslant 100\} \approx 0.3974$.

**13.** 由于指数分布是无记忆的, 其结果为 $\mathrm{e}^{-4/5}$.

**14.** (a) $\mathrm{e}^{-2^2} = \mathrm{e}^{-4}$

(b) $F(3) - F(1) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-9}$

(c) $\lambda(t) = 2t\mathrm{e}^{-t^2}/\mathrm{e}^{-t^2} = 2t$

(d) 令 $Z$ 为标准正态随机变量, 利用恒等式 $E[X] = \int_0^\infty P\{X > x\}\,\mathrm{d}x$, 得到

$$E[X] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2^{-1/2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = 2^{-1/2}\sqrt{2\pi}P\{Z > 0\} = \sqrt{\pi}/2$$

(e) 利用理论习题 5, 得到

$$E[X^2] = \int_0^\infty 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x^2}|_0^\infty = 1$$

因此, $\mathrm{Var}(X) = 1 - \pi/4$.

**15.** (a) $P\{X > 6\} = \exp\{-\int_0^6 \lambda(t)\mathrm{d}t\} = \mathrm{e}^{-3.45}$

(b)

$$\begin{aligned}P\{X < 8|X > 6\} &= 1 - P\{X > 8|X > 6\} = 1 - P\{X > 8\}/P\{X > 6\}\\ &= 1 - \mathrm{e}^{-5.65}/\mathrm{e}^{-3.45} \approx 0.8892\end{aligned}$$

**16.** 对于 $x \geqslant 0$

$$F_{1/X}(x) = P\{1/X \leqslant x\} = P\{X \leqslant 0\} + P\{X \geqslant 1/x\} = 1/2 + 1 - F_X(1/x)$$

上式求导, 得

$$f_{1/X}(x) = x^{-2}f_X(1/x) = \frac{1}{x^2\pi(1 + (1/x)^2)} = f_X(x)$$

对于 $x < 0$ 的证明是相似的.

**17.** 令 $X$ 表示 $n$ 次赌博中你赢的次数, 你所赢的钱数为

$$35X - (n - X) = 36X - n$$

你赢钱的概率为

$$P\{36X - n > 0\} = P\{X > n/36\}$$

而 $X$ 是二项随机变量, 参数为 $n, p = 1/38$.

(a) 当 $n=34$,

$$\begin{aligned} p &= P\{X \geqslant 34/36\} = P\{X > 0.5\} \qquad \text{(连续性修正)}\\ &= P\Big\{\frac{X-34/38}{\sqrt{34\times 1/38\times 37/38}} > \frac{0.5-34/38}{\sqrt{34\times 1/38\times 37/38}}\Big\}\\ &= P\Big\{\frac{X-34/38}{\sqrt{34\times 1/38\times 37/38}} > -0.4229\Big\} \approx \Phi(0.4229) \approx 0.6638 \end{aligned}$$

通过 34 次赌博, 如果你能赢一次以上的话, 你就会赢. 准确概率为 $1-(37/38)^{34}=0.5961$.

(b) 当 $n=1000$,

$$\begin{aligned} P\{X > 27.5\} &= P\Big\{\frac{X-1000/38}{\sqrt{1000\times 1/38\times 37/38}} > \frac{27.5-1000/38}{\sqrt{1000\times 1/38\times 37/38}}\Big\}\\ &\approx 1-\Phi(0.2339) \approx 0.4075 \end{aligned}$$

准确概率为 0.3961.

(c) 当 $n=100000$,

$$\begin{aligned} P\{X > 2777.5\} &= P\Big\{\frac{X-100\,000/38}{\sqrt{100\,000\times 1/38\times 37/38}} > \frac{2777.5-100\,000/38}{\sqrt{100\,000\times 1/38\times 37/38}}\Big\}\\ &\approx 1-\Phi(2.883) \approx 0.0020 \end{aligned}$$

准确概率为 0.0021.

**18.** 设 $X$ 表示电池的寿命. 所求的概率为 $P\{X>s+t|X>t\}$, 故

$$\begin{aligned} P\{X>s+t|X>t\} &= \frac{P\{X>s+t, X>t\}}{P\{X>t\}} = \frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>t\}}\\ &= \frac{P\{X>s+t|\text{类型 1 电池}\}p_1 + P\{X>s+t|\text{类型 2 电池}\}p_2}{P\{X>t|\text{类型 1 电池}\}p_1 + P\{X>t|\text{类型 2 电池}\}p_2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1(s+t)}p_1 + \mathrm{e}^{-\lambda_2(s+t)}p_2}{\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}p_1 + \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}p_2} \end{aligned}$$

另一个方法是以电池类型为条件, 然后利用指数分布无记忆性,

$$\begin{aligned} P\{X>s+t|X>t\} =& P\{X>s+t|X>t, \text{类型 1}\}P\{\text{类型 1}|X>t\}\\ &+ P\{X>s+t|X>t, \text{类型 2}\}P\{\text{类型 2}|X>t\}\\ =& \mathrm{e}^{-\lambda_1 s}P\{\text{类型 1}|X>t\} + \mathrm{e}^{-\lambda_2 s}P\{\text{类型 2}|X>t\} \end{aligned}$$

对于类型 $i$,

$$\begin{aligned} P\{\text{类型}i, X>t\} &= \frac{P\{\text{类型}i, X>t\}}{P\{X>t\}}\\ &= \frac{P\{X>t|\text{类型}i\}p_i}{P\{X>t|\text{类型}1\}p_1 + P\{X>t|\text{类型}2\}p_2} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_i t}p_i}{\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}p_1 + \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}p_2} \end{aligned}$$

计算结果与前一种方法是一致的.

**19.** 令 $X_i$ 为指数分布随机变量, 具有期望 $i, i=1,2$.

(a) $c$ 的值应满足 $P\{X_1>c\}=0.05$, 故

$$\mathrm{e}^{-c}=0.05=1/20$$

或

$$c=\ln 20=2.996$$

(b) $P\{X_2>c\}=\mathrm{e}^{-c/2}=\dfrac{1}{\sqrt{20}}=0.2236$

**20.** (a)

$$\begin{aligned}
E[(Z-c)^+]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-c)^+\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{c}^{\infty}(x-c)\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{c}^{\infty}x\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{c}^{\infty}c\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mid_c^{\infty}-c(1-\Phi(c))\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-c^2/2}-c(1-\Phi(c))
\end{aligned}$$

(b) 利用 $X$ 与 $\mu+\sigma Z$ 具有相同分布的事实, 其中 $Z$ 为标准正态随机变量, 得到

$$\begin{aligned}
E[(X-c)^+]&=E[(\mu+\sigma Z-c)^+]\\
&=E\left[\left(\sigma\left(Z-\frac{c-\mu}{\sigma}\right)\right)^+\right]\\
&=E\left[\sigma\left(Z-\frac{c-\mu}{\sigma}\right)^+\right]\\
&=\sigma\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-a^2/2}-a(1-\Phi(a))\right]
\end{aligned}$$

其中 $a=(c-\mu)/\sigma$.

## 第 6 章

**1.** (a) $3C+6C=1\Rightarrow C=1/9$

(b) 令 $p(i,j)=P\{X=i,Y=j\}$, 则

$$p(1,1)=4/9\qquad p(1,0)=2/9\qquad p(0,1)=1/9\qquad p(0,0)=2/9$$

(c) $\dfrac{(12)!}{2^6}(1/9)^6(2/9)^6$　(d) $\dfrac{(12)!}{(4!)^3}(1/3)^{12}$　(e) $\sum\limits_{i=8}^{12}\dbinom{12}{i}(2/3)^i(1/3)^{12-i}$

**2.** (a) 记 $p_j=P\{XYZ=j\}$, 我们有

$$p_6=p_2=p_4=p_{12}=1/4$$

因此, $E[XYZ]=(6+2+4+12)/4=6$

(b) 记 $q_j = P\{XY + XZ + YZ = j\}$, 我们有

$$q_{11} = q_5 = q_8 = q_{16} = 1/4$$

因此, $E[XY + XZ + YZ] = (11 + 5 + 8 + 16)/4 = 10$

**3.** 此题中, 我们要用到恒等式

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^n \mathrm{d}x = n!$$

实际上, $\mathrm{e}^{-x}x^n/n!$, $x > 0$, 是 $\Gamma$ 随机变量的分布密度 (参数 $n+1, \lambda = 1$).

(a)

$$1 = C\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\int_{-y}^{y}(y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = C\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}2y^2\,\mathrm{d}y = 4C$$

因此, $C = 1/4$.

(b) 联合密度只在 $-y < x < y, y > 0$ 上为非零.

$x > 0$ 时,

$$f_X(x) = \frac{1}{4}\int_x^\infty (y-x)\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^\infty u\mathrm{e}^{-(x+u)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}$$

当 $x < 0$ 时,

$$f_X(x) = \frac{1}{4}\int_{-x}^\infty (y-x)\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}[-y\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-y} + x\mathrm{e}^{-y}]|_{-x}^{\infty} = (-2x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x})/4$$

(c) $f_Y(y) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-y}\int_{-y}^{y}(y-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}, y > 0$

(d)

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{4}\Big[\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0}(-2x^2\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{x})\,\mathrm{d}x\Big] \\ &= \frac{1}{4}\Big[1 - \int_0^\infty (2y^2\mathrm{e}^{-y} + y\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y\Big] = \frac{1}{4}[1-4-1] = -1 \end{aligned}$$

(e) $E[Y] = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^3\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = 3$

**4.** 设 $X_i, i = 1, \ldots, r$ 是多项分布随机变量, 其中 $X_i$ 表示 $n$ 次独立重复试验中结果 $i$ 发生的次数, 每次试验的可能结果为 $1, \ldots, r$, 每个结果发生的概率分别为 $p_i, i = 1 \ldots, r$. 现在设想把所有可能结果分成 $k$ 类, 试验结果 $1, \ldots, r_1$ 归成第一类, 试验结果 $r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2$ 归成第二类, 如此等等. 这样定义以后, $Y_i$ 就是在 $n$ 次独立重复试验中第 $i$ 类结果发生的次数, 其相应发生的概率为 $\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_{i-1}+r_i} p_j, i = 1 \ldots, k$. 按定义, $Y_1, \ldots, Y_k$ 是多项随机变量.

**5.** (a)

$$1 = \int_0^1\int_1^5 (x/5 + cy)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 (4x/5 + 12c)\,\mathrm{d}x = 12c + 2/5$$

因此, $c = 1/20$.

(b) $X, Y$ 不独立, 不能将密度函数分解.

(c)

$$
\begin{aligned}
P\{X+Y>3\} &= \int_0^1 \int_{3-x}^5 (x/5+y/20)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 [(2+x)x/5 + 25/40 - (3-x)^2/40]\,\mathrm{d}x \\
&= 1/5 + 1/15 + 5/8 - 19/120 = 11/15
\end{aligned}
$$

**6.** (a) $X, Y$ 相互独立, 密度函数可分解因子.

(b) $f_X(x) = x\int_0^2 y\,\mathrm{d}y = 2x \qquad 0<x<1$

(c) $f_Y(y) = y\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = y/2 \qquad 0<y<2$

(d)

$$
\begin{aligned}
P\{X<x, Y<y\} &= P\{X<x\}P\{Y<y\} \\
&= \min(1, x^2)\min(1, y^2/4) \qquad x>0, y>0
\end{aligned}
$$

(e) $E[Y] = \int_0^2 y^2/2\,\mathrm{d}y = 4/3$

(f)

$$
P\{X+Y<1\} = \int_0^1 x\int_0^{1-x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x = 1/24
$$

**7.** 记 $T_i$ 表示第 $i$ 种冲击的来临时刻, $i=1,2,3$. 对于 $s>0, t>0$,

$$
\begin{aligned}
&P\{X_1>s, X_2>t\} = P\{T_1>s, T_2>t, T_3>\max(s,t)\} \\
&= P\{T_1>s\}P\{T_2>t\}P\{T_3>\max(s,t)\} = \exp\{-\lambda_1 s\}\exp\{-\lambda_2 t\}\exp\{-\lambda_3\max(s,t)\} \\
&= \exp\{-(\lambda_1 s + \lambda_2 t + \lambda_3\max(s,t))\}
\end{aligned}
$$

**8.** (a) 不. 若在一页上有很多广告, 那么这些广告被选中的机会比具有较少广告那些页上的广告被选中的机会小.

(b) $\frac{1}{m}\frac{n(i)}{n}$

(c) $\sum_{i=1}^m n(i)/(mn) = \bar{n}/n$,其中$\bar{n} = \sum_{i=1}^m n(i)/m$

(d) $(1-\bar{n}/n)^{k-1}\frac{1}{m}\frac{n(i)}{n}\frac{1}{n(i)} = (1-\bar{n}/n)^{k-1}/(nm)$

(e) $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{nm}(1-\bar{n}/n)^{k-1} = \frac{1}{\bar{n}m}$

(f) 循环次数的分布为几何分布, 其期望值为 $n\sqrt{n}$

**9.** (a) $P\{X=i\} = 1/m, i=1,\cdots,m$.

(b) **第 2 步** 产生一个随机数 $U[(0,1)$上均匀随机变量], 若 $U<n(X)/n$, 到第 3 步, 否则

回到第 1 步.

**第 3 步** 产生一随机数 $U$, 选择第 $X$ 页上第 $[n(X)U]+1$ 个元素.

**10.** 是, 它们相互独立. 我们可以这样地看, 当我们知道这个序列在某时刻 $N$ 超过 $c$ 的时候, 并不影响这个超过 $c$ 的随机变量的分布, 它仍然为 $(c,1)$ 上均匀分布.

**11.** 记 $p_i$ 为掷一箭得到 $i$ 点的概率, 则

$$
\begin{aligned}
p_{30} &= \pi/36 \\
p_{20} &= 4\pi/36 - p_{30} = \pi/12 \\
p_{10} &= 9\pi/36 - p_{20} - p_{30} = 5\pi/36 \\
p_0 &= 1 - p_{10} - p_{20} - p_{30} = 1 - \pi/4
\end{aligned}
$$

(a) $\pi/12$ (b) $\pi/9$ (c) $1-\pi/4$

(d) $\pi(30/36+20/12+50/36)=35\pi/9$ (e) $(\pi/4)^2$ (f) $2(\pi/36)(1-\pi/4)+2(\pi/12)(5\pi/36)$

**12.** 令 $Z$ 为标准正态随机变量.

(a)

$$P\Big\{\sum_{i=1}^{4}X_i>0\Big\}=P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}X_i-6}{\sqrt{24}}>\frac{-6}{\sqrt{24}}\right\}\approx P\{Z>-1.2247\}\approx 0.8897$$

(b)

$$P\Big\{\sum_{i=1}^{4}X_i>0\Big|\sum_{i=1}^{2}X_i=-5\Big\}=P\{X_3+X_4>5\}$$
$$=P\left\{\frac{X_3+X_4-3}{\sqrt{12}}>2\sqrt{12}\right\}\approx P\{Z>0.5774\}\approx 0.2818$$

(c)

$$P\Big\{\sum_{i=1}^{4}X_i>0|X_1=5\Big\}=P\{X_2+X_3+X_4>-5\}$$
$$=P\left\{\frac{X_2+X_3+X_4-4.5}{\sqrt{18}}>-9.5\sqrt{18}\right\}\approx P\{Z>-2.239\}\approx 0.9874$$

**13.** 在下面式中, 常数 $C$ 不依赖于 $n$.

$$P\{N=n|X=x\}=f_{X|N}(x|n)P\{N=n\}/f_X(x)$$
$$=C\frac{1}{(n-1)!}(\lambda x)^{n-1}(1-p)^{n-1}=C(\lambda(1-p)x)^{n-1}/(n-1)!$$

它指出, 在 $X=x$ 之条件下, $N-1$ 是泊松随机变量, 其均值为 $\lambda(1-p)x$, 也即

$$P\{N=n|X=x\}=P\{N-1=n-1|X=x\}$$
$$=\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)x}\frac{(\lambda(1-p)x)^{n-1}}{(n-1)!}\qquad n\geqslant 1$$

**14.** (a) 这个变换的雅可比值为

$$J=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$$

由方程 $u=x,v=x+y$ 解得 $x=u,y=v-u$, 我们得到

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(u,v-u)=1\qquad 0<u<1,0<v-u<1$$

或

$$f_{U,V}(u,v)=1\qquad \max(v-1,0)<u<\min(v,1)$$

(b) 对于 $0<v<1$,

$$f_V(v)=\int_0^v \mathrm{d}u=v$$

对于 $1\leqslant v\leqslant 2$,

$$f_V(v)=\int_{v-1}^1 \mathrm{d}u=2-v$$

**15.** 记 $U$ 为 $(7,11)$ 上均匀随机变量, 如果你出价 $x, 7 \leqslant x \leqslant 10$ , 你会以概率

$$(P\{U<x\})^3=\Big(P\Big\{\frac{U-7}{4}<\frac{x-7}{4}\Big\}\Big)^3=\Big(\frac{x-7}{4}\Big)^3$$

赢得这个项目. 因此, 你赚的钱数期望值为

$$E[G(x)]=\frac{1}{4}(x-7)^3(10-x)$$

由计算知, 当 $x=37/4$ 时, 你赚的钱数达到最大值.

**16.** 记 $i_1,\cdots,i_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

$$\begin{aligned}P\{X_1=i_1,X_2=i_2,\cdots,X_n=i_n\}&=P\{X_1=i_1\}P\{X_2=i_2\}\cdots P\{X_n=i_n\}\\&=p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_n}=p_1p_2\cdots p_n\end{aligned}$$

因此, 所求概率为 $n_!p_1\cdots p_n$. 当所有 $p_i=1/n$ 时, 该概率变成 $n!/(n^n)$.

**17.** (a) 由于 $\sum_{i=1}^n X_i=\sum_{i=1}^n Y_i$, 故 $N=2M$.

(b) 我们先在 $(Y_1,\cdots,Y_n)$ 固定的条件下求出 $M$ 的分布. 若这个分布与 $Y_1,\cdots,Y_n$ 的值无关, 则 $M$ 的条件分布就是 $M$ 的无条件分布. 现假定 $(Y_1,\cdots,Y_n)$ 的值为

$$(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$$

即 $Y_1=\cdots=Y_k=1, Y_{k+1}=\cdots=Y_n=0$ . 我们把 $0,\cdots,0$ 看成红球, 一共有 $n-k$ 个红球. 现在再看 $X$ 的值, 它是一个随机的序列, 这个序列中有 $k$ 个 1, $n-k$ 个 0.

$$\begin{aligned}Y&=(1,\cdots,1,0,0,\cdots,0)\\X&=(i_1,\cdots,i_k,i_{k+1},\cdots,i_n)\end{aligned}$$

将 $i_l=1$ , 看成取到第 $l$ 个球这样, $M$ 刚好为随机取 $k$ 个球, 其中 $\{X_i=1,Y_i=0\}$ 的个数. 由于把 $Y=0$ 解释为红球, 这样 $M$ 就是从 $n$ 个球中随机地抓 $k$ 个球以后, 其中红球的个数, 而红球的总个数是 $n-k$, 这个分布是超几何分布. 由于这个分布与向量 $Y$ 中 0 或 1 的位置排列无关, 因此我们求得的 $M$ 的分布也是无条件分布.

(c) $E[N]=E[2M]=2E[M]=2k(n-k)/n$

(d) 利用第 4 章例 8j 中关于超几何分布的方差公式

$$\mathrm{Var}(N)=4\mathrm{Var}(M)=4\frac{n-k}{n-1}k(1-\frac{k}{n})(k/n)$$

**18.** (a) 由于 $S_n-S_k=\sum_{i=k+1}^n Z_i$ , 它具有均值 0 和方差 $n-k$ , 并且与 $S_k$ 相互独立. 因此, 给定 $S_k=y$, $S_n$ 是一个具有期望 $y$ , 方差为 $n-k$ 的正态随机变量.

(b) 在求 $S_n=x$ 之下, $S_k$ 的密度 $f_{S_k|S_n}(y|x)$ 的过程中, 将 $x$ 看成一个与 $y$ 无关的常数. 下面推论中, $C_i, i=1,2,3,4$ 都是与 $y$ 无关的常数.

$$
\begin{aligned}
f_{S_k|S_n}(y|x) &= \frac{f_{S_k,S_n}(y,x)}{f_{S_n(x)}} \\
&= C_1 f_{S_n|S_k}(x|y) f_{S_k}(y) \qquad C_1 = \frac{1}{f_{s_n}(x)} \\
&= C_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n-k}} \mathrm{e}^{-(x-y)^2/2(n-k)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{k}} \mathrm{e}^{-y^2/2k} \\
&= C_2 \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2(n-k)} - \frac{y^2}{2k}\right\} \\
&= C_3 \exp\left\{\frac{2xy}{2(n-k)} - \frac{y^2}{2(n-k)} - \frac{y^2}{2k}\right\} \\
&= C_3 \exp\left\{-\frac{n}{2k(n-k)}(y^2 - 2\frac{k}{n}xy)\right\} \\
&= C_3 \exp\left\{-\frac{n}{2k(n-k)}[(y-\frac{k}{n}x)^2 - (\frac{k}{n}x)^2]\right\} \\
&= C_4 \exp\left\{-\frac{n}{2k(n-k)}(y-\frac{k}{n}x)^2\right\}
\end{aligned}
$$

由上式可知, 这个密度为正态分布密度, 期望为 $kx/n$, 方差为 $k(n-k)/n$.

**19.** (a)

$$
\begin{aligned}
&P\{X_6 > X_1 | X_1 = \max(X_1, \cdots, X_5)\} \\
&= \frac{P\{X_6 > X_1, X_1 = \max(X_1, \cdots, X_5)\}}{P\{X_1 = \max(X_1, \cdots, X_5)\}} \\
&= \frac{P\{X_6 = \max(X_1, \cdots, X_6), X_1 = \max(X_1, \cdots, X_5)\}}{1/5} \\
&= 5 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

因此 $X_6$ 达到最大值与前面 5 个 $X_i$ 中哪个最大是无关的.

(b) 注意

$$P\{X_6 > X_2 | X_1 = \max(X_1, \cdots, X_5), X_6 > X_1\} = 1$$

另一方面, 在 $X_1 = \max(X_1, \cdots, X_5), X_6 < X_1$ 的条件下, $X_6$ 与 $X_2$ 的地位是对称的, 故

$$P\{X_6 > X_2 | X_1 = \max(X_1, \cdots, X_5), X_6 < X_1\} = \frac{1}{2}$$

利用上面的公式, 得到

$$
\begin{aligned}
&P\{X_6 > X_2 | X_1 = \max(X_1, \cdots, X_5)\} \\
&= P\{X_6 > X_2 | X_1 = \max(X_1, \cdots, X_5), X_6 > X_1\} P\{X_6 > X_1 | X_1 = \max(X_1, \cdots, X_5)\} \\
&\quad + P\{X_6 > X_2 | X_1 = \max(X_1, \cdots, X_5), X_6 < X_1\} P\{X_6 < X_1 | X_1 = \max(X_1, \cdots, X_5)\} \\
&= 1 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

## 第 7 章

**1.** (a) $d = \sum_{i=1}^{m} 1/n(i)$

(b) $P\{X=i\}=P\{[mU]=i-1\}=P\{i-1\leqslant mU<i\}=1/m, \qquad i=1,\cdots,m$

(c) $E\left[\frac{m}{n(X)}\right]=\sum_{i=1}^{m}\frac{m}{n(i)}P\{X=i\}=\sum_{i=1}^{m}\frac{m}{n(i)}\frac{1}{m}=d$

**2.** 令

$$I_j=\begin{cases}1 & 若第j次抽出的是白球, 而第j+1次抽出的是黑球\\ 0 & 其他\end{cases}$$

设 $X$ 是抽出一个白球紧接着抽出一个是黑球的次数, 则

$$X=\sum_{j=1}^{n+m-1}I_j$$

因此,

$$E[X]=\sum_{j=1}^{n+m-1}E[I_j]=\sum_{j=1}^{n+m-1}P\{第j次抽出白球, 第j+1次抽出黑球\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n+m-1}P\{第j次抽出白球\}P\{第j+1次抽出黑球\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n+m-1}\frac{n}{n+m}\times\frac{m}{n+m-1}=\frac{nm}{n+m}$$

前面的论证中用到这样的事实, $n+m$ 个球中的任意一个球都具有相同的机会在第 $j$ 次被抽出, 因此, 白球被抽出的概率为 $n/(n+m)$ . 当第 $j$ 次抽出白球之后, 在剩下的 $n+m-1$ 个球中, 任意一个球都有相同的机会被抽出, 因此, 在 $j$ 次抽出白球的条件下, 第 $j+1$ 次抽出黑球的条件概率为 $m/(n+m-1)$.

**3.** 将各对夫妇编上号, 令 $I_j=1$ 表示第 $j$ 对夫妇坐在同一桌, 否则 $I_j=0$. 若 $X$ 代表坐在同一桌的夫妇的对数, 我们有

$$X=\sum_{j=1}^{10}I_j$$

因此

$$EX=\sum_{j=1}^{10}E[I_j]$$

(a) 为计算 $E[I_j]$, 考虑妇女 $j$, 其余 19 人的任意 3 人组合都有相同的机会与她同桌, 这种三人组合共有 $\binom{19}{3}$ 个. 这样, 她与丈夫的可能性为

$$\binom{1}{1}\binom{18}{2}\Big/\binom{19}{3}=\frac{3}{19}$$

因此, $E[I_j]=3/19$, 且

$$E[X]=30/19$$

(b) 这种情况下, 10 个男人的任何组合都有相同的机会与她同桌, 她的丈夫在这两人组内的可能性是 2/10. 因此,

$$E[I_j]=2/10 \qquad E[X]=2$$

**4.** 在例 2i 中, 我们已经指出, 要使所有 1 点到 6 点均出现, 所需掷骰子数的平均值为 $6(1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6)=14.7$. 现在令 $X_i$ 表示在这个过程中 $i$ 点出现的次数, 由于 $\sum_{i=1}^{6} X_i$ 表示出现全部 6 个点数所需的掷骰子数, 这样

$$14.7=E\Big[\sum_{i=1}^{6} X_i\Big]=\sum_{i=1}^{6} E[X_i]$$

由对称性, 所有 $E[X_i]$ 都是相等的. 故 $E[X_1]=14.7/6=2.45$.

**5.** 令 $I_j=1$ 若当第 $j$ 张红牌翻过来时, 我们赢 1 个单位, $I_j=0$ 其他情况. 若 $X$ 是我们赢的单位数, 则

$$EX=E\Big[\sum_{j=1}^{n} I_j\Big]=\sum_{j=1}^{n} E[I_j]$$

此处 $I_j=1$ , 如果已经翻出黑牌的张数比 $j$ 少 (此时已翻出 $j$ 张红牌), 由对称性, $E[I_j]=1/2$. 故 $E[X]=n/2$.

**6.** 先证明: $N\leqslant n-1+I$. 若所有事件都出现, 则此不等式两边相等. 若不是所有事件都发生, 显然 $N\leqslant n-1$, 这样该不等式成立. 现在将此不等式两边求期望, 得

$$E[N]\leqslant n-1+E[I]$$

若令 $I_i$ 为事件 $A_i$ 的示性函数, 即当 $A_i$ 发生 $I_i=1$ , 否则 $I_i=0$ . 则

$$E[N]=E\Big[\sum_{i=1}^{n} I_i\Big]=\sum_{i=1}^{n} E[I_i]=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

但 $E[I]=P(A_1\cdots A_n)$, 故结论成立.

**7.** 我们想象一共有 $n$ 个球, 其中 $k$ 个红球, $n-k$ 个白球. 随机地从这 $n$ 个球中取出 1 个球, 并在球上标上 1 号, 然后无放回地抽出第 2 个球, 标上 2 号, 依次下去, 直到最后一个球, 将它标上 $n$ 号, 现在看一看这 $k$ 个红球, 这 $k$ 个红球的号码是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个大小为 $k$ 的子集 $(i_1,\cdots,i_k)$, 显然 $(i_1,\cdots,i_k)$ 是随机子集, 并且对所有 $\binom{n}{k}$ 个子集都有相同的机会被取到. 这样 $(i_1,\cdots,i_k)$ 就是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个简单随机抽样. 另一方面, 不妨设 $i_1<\cdots<i_k$, 其中 $i_1$ 就是第一次抽到红球时取球的次数, 由例 3e 可知, 它是负超几何分布, 其平均值为 $1+\dfrac{n-k}{k+1}=\dfrac{n+1}{k+1}$.

也可用下列形式求得 $X$ 的分布, 其中 $X$ 表示从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中随机抽取 $k$ 个数中的最小数. $\{X\geqslant j\}$ 表示抽取的 $k$ 个数都比 $j-1$ 大. 故

$$P\{X\geqslant j\}=\binom{n-j+1}{k}\Big/\binom{n}{k}=\binom{n-k}{j-1}\Big/\binom{n}{j-1}$$

$X$ 的分布就是超几何分布.

**8.** 记 $X$ 表示在桑切斯家离开以后离开机场的户数, 将其余的人家任意编号, $i=1,2,\cdots,N-1$. 记 $I_i=1$ , 若 $i$ 家比桑切斯家晚离开机场. $I_i=0$, 若 $i$ 家比桑切斯家早离开机场. 此时, $X$ 与 $I_i$ 之间有如下关系:

$$X=\sum_{i=1}^{N-1} I_i$$

两边求期望得

$$E[X]=\sum_{i=1}^{N-1}P\{i\text{家在桑切斯家后离开机场}\}$$

现在考虑 $i$ 家, 设 $i$ 家有 $k$ 件行李, 而桑切斯家有 $j$ 件行李. 两家一共有 $k+j$ 件行李, 这 $k+j$ 件在行李线上排成了一个队. (当然中间还会有其他家庭的行李, 但是我们关心的只是这两家的行李. 这两家的行李也形成了一个次序, 排成了一个队. ) 这两家的行李的排序决定了哪一家先离开机场, 若这 $k+j$ 件行李中排在最后的一件行李是桑切斯家的, 那么, 桑切斯家比 $i$ 家后离开机场. 否则, 桑切斯家比 $i$ 家早离开机场. 由于这 $k+j$ 件行李中的每一件都以相同的机会排在最后, 因此 $i$ 家比桑切斯家晚离开机场的概率为 $k/(k+j)$ . 对于除了桑切斯以外的家庭, 具有 $k$ 件行李的户数为 $n_k, k\neq j$, 当 $k=j$ 时, 共有 $n_j-1$. 这样, 我们得到

$$E[X]=\sum_k\frac{kn_k}{k+j}-\frac{1}{2}$$

**9.** 对于单位圆周上的一个点, 它的邻域是指从这个点出发逆时针方向距离为 1 的那样的一段弧 (这与几何上的邻域的概念有区别). 现在在这一圆周上随机地取一个点, 这个点在长度为 $x$ 的弧上的概率为 $x/2\pi$. 记 $X$ 表示圆周上的 19 个点在这个随机点的邻域上的点数. 令 $I_j=1$ , 如果第 $j$ 个点在这个随机点的邻域上, 其他情况, $I_j=0$. 则

$$X=\sum_{j=1}^{19}I_j$$

两边取期望得

$$E[X]=\sum_{j=1}^{19}P\{\text{第}j\text{个点在随机点的邻域内}\}$$

事实上, 任意一个点在这个随机点的概率等于 $1/2\pi$. 这样

$$E[X]=19/2\pi>3$$

由 $E[X]>3$ 可知, 至少有一个 $X$ 的可能值使得 $X>3$, 即至少有一个随机点, 使得在这个点的邻域内有 4 个以上的点.

**10.** 令 $g(x)=x^{1/2}$, 则

$$g'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}\qquad g''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}$$

因此, $\sqrt{X}$ 在 $\lambda$ 处泰勒展开得:

$$\sqrt{X}\approx\sqrt{\lambda}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}(X-\lambda)-\frac{1}{8}\lambda^{-3/2}(X-\lambda)^2$$

两边求期望得

$$\begin{aligned}E[\sqrt{X}]&\approx\sqrt{\lambda}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}E[X-\lambda]-\frac{1}{8}\lambda^{-3/2}E[(X-\lambda)^2]\\&=\sqrt{\lambda}-\frac{1}{8}\lambda^{-3/2}\lambda=\sqrt{\lambda}-\frac{1}{8}\lambda^{-1/2}\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{Var}(X)=E[X]-(E[\sqrt{X}])^2\approx\lambda-(\sqrt{\lambda}-\frac{1}{8}\lambda^{-1/2})^2=1/4-\frac{1}{64\lambda}\approx1/4$$

**11.** 将桌子编号, $1,2,3$ 是 4 座位桌子, $4,5,6,7$ 是 2 座位桌子. 令 $X_{ij}=1$, 如果妻子 $i$ 与她的丈夫坐在桌子 $j$, 否则 $X_{ij}=0$. 注意

$$E[X_{ij}]=\binom{2}{2}\binom{18}{2}\Big/\binom{20}{4}=\frac{3}{95}\qquad j=1,2,3$$

和

$$E[X_{ij}]=1\Big/\binom{20}{2}=\frac{1}{190}\qquad j=4,5,6,7$$

记 $X$ 表示夫妻坐在同一桌的对数, 我们有

$$\begin{aligned}E[X]&=E\Big[\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{7}X_{ij}\Big]=\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{3}E[X_{ij}]+\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=4}^{7}E[X_{ij}]\\&=30(3/95)+40(1/190)=22/19\end{aligned}$$

**12.** 记 $X_i=1$ , 如果第 $i$ 个人没有招聘到任何人, $X_i=0$ , 其他情况.

$$\begin{aligned}E[X_i]&=P\{i\text{没有招聘到}i+1,\cdots,n\text{中的任意一人}\}\\&=\frac{i-1}{i}\cdot\frac{i}{i+1}\cdots\frac{n-2}{n-1}=\frac{i-1}{n-1}\end{aligned}$$

因此

$$E\Big[\sum_{i=1}^{n}X_i\Big]=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n-1}=\frac{n}{2}$$

由于 $X_i$ 为伯努利随机变量, 我们有

$$\mathrm{Var}(X_i)=\frac{i-1}{n-1}(1-\frac{i-1}{n-1})=\frac{(i-1)(n-i)}{(n-1)^2}$$

对于 $i<j$,

$$E[X_iX_j]=\frac{i-1}{i}\cdots\frac{j-2}{j-1}\times\frac{j-2}{j}\times\frac{j-1}{j+1}\cdots\frac{n-3}{n-1}=\frac{(i-1)(j-2)}{(n-2)(n-1)}$$

故

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\frac{(i-1)(j-2)}{(n-2)(n-1)}-\frac{i-1}{n-1}\frac{j-1}{n-1}=\frac{(i-1)(j-n)}{(n-2)(n-1)^2}$$

从而

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)&=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)(n-i)}{(n-1)^2}+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{(i-1)(j-n)}{(n-2)(n-1)^2}\\&=\frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)(n-i)\\&\quad-\frac{1}{(n-2)(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1}(i-1)(n-i)(n-i-1)\end{aligned}$$

**13.** 令 $X_i = 1$ , 如果第 $i$ 个三人组内包含每种类型的球员. 其他情形, $X_i = 0$. 此时

$$E[X_i] = \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}\Big/\binom{9}{3} = \frac{2}{7}$$

(a) 我们得到

$$E\Big[\sum_{i=1}^{3} X_i\Big] = 6/7$$

由于 $X_i$ 为伯努利随机变量, 我们得到

$$\text{Var}(X_i) = (2/7)(1-2/7) = 10/49$$

对于 $i \neq j$

$$E[X_iX_j] = P\{X_i=1, X_j=1\} = P\{X_i=1\}P\{X_j=1|X_i=1\}$$
$$= \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} \times \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} = 6/70$$

(b)

$$\text{Var}\Big(\sum_{i=1}^{3} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{3}\text{Var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j>1}\text{Cov}(X_i, X_j)$$
$$= 30/49 + 2\times\binom{3}{2}\times(6/70 - 4/49) = \frac{312}{490}$$

**14.** 令 $X_i = 1$, 若第 $i$ 张牌是"A", 其他情形 $X_i = 0$. 又令 $Y_j = 1$ , 若第 $j$ 张牌是黑桃, 否则 $Y_j = 0$. $i, j = 1, 2\cdots, 13$. 一张牌的花色不会改变另一张牌的花色, 这一点, 只要计算相应的条件概率. 令 $A_{i,s}, A_{i,h}, A_{i,d}, A_{i,c}$ 分别为第 $i$ 张牌是黑桃, 红心, 方块, 梅花的事件, 则

$$P\{Y_j=1\} = \frac{1}{4}(P\{Y_j=1|A_{i,s}\} + P\{Y_j=1|A_{i,h}\} + P\{Y_j=1|A_{i,d}\} + P\{Y_j=1|A_{i,c}\})$$

而等式右边四项相等, 所以

$$P\{Y_j=1\} = P\{Y_j=1|A_{i,s}\}$$

因此, $X_i$ 与 $Y_j$ 是相互独立的, $i \neq j$ , 进一步可以证明, 即使 $i = j$ , 也是相互独立的. 利用这个事实, 我们得到

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} Y_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\text{Cov}(X_i, Y_j) = 0$$

但是 $X, Y$ 是不独立的. 事实上, $P\{Y = 13\}$ 表示得到一副 13 张全是黑桃的一副牌, 显然其概率不为 0. 但是 $P\{Y = 13|X = 4\} = 0$. (已知一副牌中有 4 张"A", 显然 $P\{Y = 13|X = 4\} = 0$. ) 这说明 $X$ 与 $Y$ 相互不独立.

**15.** (a) 当没有任何信息时, 你的期望收入为 0.

(b) 当知道 $p>1/2$ 时, 你应该猜正面朝上; 当 $p\leqslant 1/2$ 时, 应猜反面朝上.

(c) 当知道 $V$(硬币的 $p$) 的值, 则你赢得的期望值为

$$\begin{aligned}&\int_0^1 E[\text{赢得}|V=p]\mathrm{d}p\\&=\int_0^{1/2}[1\times(1-p)-1\times p]\mathrm{d}p+\int_{1/2}^1[1\times p-1\times(1-p)]\mathrm{d}p=1/2\end{aligned}$$

**16.** 首先指出列表有 $m$ 个位置, 而构造的随机变量 $X$ 是在 $m$ 个位置 $\{1,2,\cdots,m\}$ 上均匀分布的随机变量. 当 $X=i$ 时, $n(X)=n(i)$ 而 $n(i)$ 是列表上与位置 $i$ 上的名称相同的名称的个数. 首先我们指出

$$E[m/n(X)]=\sum_{i=1}^m\frac{m}{n(i)}P\{X=i\}=\sum_{i=1}^m\frac{m}{n(i)}\times\frac{1}{m}=\sum_{i=1}^m\frac{1}{n(i)}=d$$

我们需要对上面的最后一个等式作一说明, 将和号分成 $d$ 个部分之和

$$\sum_{i=1}^m\frac{1}{n(i)}=\sum_{j=1}^d\sum_{i\in A_j}\frac{1}{n(i)}$$

其中 $A_j$ 表示具有相同名称的位置 $i$ 的集合. $A_j$ 中有 $n(i)$ 个位置, 因此

$$\sum_{i\in A_j}\frac{1}{n(i)}=n(i)\times\frac{1}{n(i)}=1$$

这样便得到 $\sum_{i=1}^m\frac{1}{n(i)}=d$ , 但是 $n(X)$ 不好计算. 我们用 $I$ 代替 $1/n(X)$ . 现在计算 $E[I|n(X)]$.

$$E[I|n(X)=n(i)]=P\{I=1|n(X)=n(i)\}=\frac{1}{n(i)}$$

上式最后一式是由于当 $n(X)=n(i)$ 时, $X$ 可能存在 $n(i)$ 种情况, 哪一种情况都是等可能的, 只有 $X$ 取其中最小值时, $I$ 才等于 1. 两边再取期望, 得

$$E[I]=E[E[I|n(X)]]=E[1/n(X)]$$

这样我们得到

$$E[mI]=E[m/n(X)]=d$$[1]

**17.** 令 $X_i=1$, 如果第 $i$ 件物品放入某房间时发生碰撞; 否则 $X_i=0$. 这样碰撞总数

$$X=\sum_{i=1}^m X_i$$

因此,

$$E[X]=\sum_{i=1}^m E[X_i]$$

---

1. (a) 在求期望过程中, 我们假定不同的名称, 具有不同的 $n(i)$, 若不同的名称, 其相应的 $n(i)$ 可以相同, 其结论还成立, 不过论证需稍作修改.

(b) $mI$ 是 $d$ 的无偏估计. 但它绝不是一个好估计, 因为 $mI$ 只取两个值, $m$ 或 0, 这都是极端情况, 特别是 0, 根本是一个不合理的值. 因此, 实际中不会用这一估计. ——译者注

为求 $E[X]$, 可以利用条件期望,

$$\begin{aligned}E[X_i] &= \sum_j E[X_j|\text{物品}i\text{放入房间}j]p_j \\ &= \sum_j P\{\text{物品 } i \text{ 形成碰撞}|\text{物品 } i \text{ 放入房间 } j\}p_j \\ &= \sum_j [1-(1-p_j)^{i-1}]p_j = 1-\sum_j (1-p_j)^{i-1}p_j\end{aligned}$$

上面最后第二个等式是这样解释的, 在物品 $i$ 放入房间 $j$ 的条件下, 形成碰撞的意思是前面 $i-1$ 个物品中至少有一个已经放入房间 $j$, 而它的概率刚好是 $1-(1-p_j)^{i-1}$. 有了 $E[X_i]$ 的等式以后, 我们得到

$$E[X] = m - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(1-p_j)^{i-1}p_j$$

改变求和次序得

$$E[X] = m - n + \sum_{j=1}^{n}(1-p_j)^m$$

由上式可以看出, 这个等式可以以更加容易的方式导出, 只需对下面的恒等式求期望即可.

$$m - X = \text{非空的房间数}$$

其中 $m$ 为物品总数, 当 $m$ 大于非空房间数时, 必定有房间放入 2 个或 2 个以上的物品, 那些多余的物品数就是碰撞次数. 两边求期望时, 求非空房间数的期望, 还需要一个技巧, 将非空房间数分解成 $n$ 个示性函数的和, 而每个示性函数的期望就是某房间是否为非空房间的概率.

**18.** 记 $L$ 为第一个游程的长度, 以第一个值为条件求期望可得

$$E[L] = E[L|\text{第一个值为 }1]\frac{n}{n+m} + E[L|\text{第一个值为 }0]\frac{m}{n+m}$$

现在考虑 $E[L|\text{第一个值为 }1]$. 此时, 这个序列具有形式

$$1\ 1\ 0\ 0\ 1\ \cdots\ 10$$

一共有 $n$ 个 1, $m$ 个 0, 但第一个值为 1, 若将这个序列的第一个 1 去掉, 这样, 这个子序列成为

$$1\ 0\ 0\ 1\ \cdots\ 10$$

其中有 $n-1$ 个 1, $m$ 个 0. 原来序列的第一个游程的长度就是这个子序列中第一个 0 的位置. 例如, 在我们列出的第一个游程的长度为 2(两个 1), 它就是子序列中第一个 0 的位置. 现在的问题化成将 $n-1$ 个 1, $m$ 个 0, 随机地排成一个序列, 求这个序列的第一个 0 的位置的期望值, 这个值刚好等于从 $n-1$ 个白球, $m$ 个红球中, 随机地一个一个往外取球, 直到拿出第一个红球的所需的平均次数. 利用例 3e 的结果, 这个平均数等于 $(n+m)/(m+1)$. 对于 $E[L|\text{第一个值为 }0]$ 的计算是类似的. 这样, 我们得到

$$E[L] = \frac{n+m}{m+1}\frac{n}{n+m} + \frac{n+m}{n+1}\frac{m}{n+m} = \frac{n}{m+1} + \frac{m}{n+1}$$

**19.** 设 $X$ 是将两个盒子内物件拿光所需要的抛掷次数. 记 $Y$ 为前 $n+m$ 次掷硬币所得正面朝上次数, 利用条件期望的性质

$$E[X]=\sum_{i=0}^{n+m}E[X|Y=i]P\{Y=i\}=\sum_{i=0}^{n+m}E[X|Y=i]\binom{n+m}{i}p^i(1-p)^{n+m-i}$$

现在假定在 $n+m$ 次抛掷硬币中, 得到正面朝上 $i$ 次, $i<n$. 此时, 附加的次数只是出现 $n-i$ 个正面朝上所需的次数. 若 $i=n$, 两个盒子中的物件已经取光, 无需再做附加的抛掷硬币试验. 若 $i>n$, 此时盒子 H 内的物件已经取光, 在盒子 T 内还有 $i-n$ 个物件尚未取光. 附加的掷硬币次数只是出现 $i-n$ 次反面朝上所需的掷硬币次数. 这样

$$E[X]=\sum_{i=0}^{n}\frac{n-i}{p}\binom{n+m}{i}p^i(1-p)^{n+m-i}+\sum_{i=n+1}^{n+m}\frac{i-n}{1-p}\binom{n+m}{i}p^i(1-p)^{n+m-i}$$

**20.** 利用提示中的等式, 两边求期望得

$$\begin{aligned}E[X^n]&=E\Big[n\int_0^\infty x^{n-1}I_X(x)\mathrm{d}x\Big]=n\int_0^\infty E\Big[x^{n-1}I_X(x)\Big]\mathrm{d}x\\&=n\int_0^\infty x^{n-1}E[I_X(x)]\mathrm{d}x=n\int_0^\infty x^{n-1}\bar{F}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

上述论证中积分号与期望号的可交换性是由于所涉及的随机变量均为非负.

**21.** 考虑一个随机排列 $I_1,\cdots,I_n$, 它取任何一个具体的排列 $i_1,\cdots,i_n$ 的概率都是相同的 (等于 $1/n!$). 这样,

$$\begin{aligned}&E[a_{I_j}a_{I_{j+1}}]=\sum_k E[a_{I_j}a_{I_{j+1}}|I_j=k]P\{I_j=k\}\\&=\frac{1}{n}\sum_k a_kE[a_{I_{j+1}}|I_j=k]=\frac{1}{n}\sum_k a_k\sum_i a_iP\{I_{j+1}=i|I_j=k\}\\&=\frac{1}{n(n-1)}\sum_k a_k\sum_{i\neq k}a_i=\frac{1}{n(n-1)}\sum_k a_k(-a_k)<0\end{aligned}$$

其中最后第二个等式是由于 $\sum_{i=1}^n a_i=0$, 有了上述不等式, 我们可得

$$E\Big[\sum_{j=1}^{n-1}a_{I_j}a_{I_{j+1}}\Big]<0$$

这说明必有一个排列, 使得

$$\sum_{j=1}^{n-1}a_{i_j}a_{i_{j+1}}<0$$

**22.** (a) $E[X]=\lambda_1+\lambda_2, E[Y]=\lambda_2+\lambda_3$
(b)

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=\mathrm{Cov}(X_1+X_2,X_2+X_3)\\&=\mathrm{Cov}(X_1,X_2+X_3)+\mathrm{Cov}(X_2,X_2+X_3)\\&=\mathrm{Cov}(X_2,X_2)=\mathrm{Var}(X_2)=\lambda_2\end{aligned}$$

(c) 利用条件期望的性质

$$\begin{aligned}
P\{X=i,Y=j\} &= \sum_k P\{X=i,Y=j|X_2=k\}P\{X_2=k\} \\
&= \sum_k P\{X_1=i-k,X_3=j-k|X_2=k\}\mathrm{e}^{-\lambda_2}\lambda_2^k/k! \\
&= \sum_k P\{X_1=i-k,X_3=j-k\}\mathrm{e}^{-\lambda_2}\lambda_2^k/k! \\
&= \sum_k P\{X_1=i-k\}P\{X_3=j-k\}\mathrm{e}^{-\lambda_2}\lambda_2^k/k! \\
&= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{i-k}}{(i-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda_3}\frac{\lambda_3^{j-k}}{(j-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^k}{k!}
\end{aligned}$$

**23.**

$$\begin{aligned}
\mathrm{Corr}\Big(\sum_i X_i,\sum_j Y_j\Big) &= \frac{\mathrm{Cov}\big(\sum_i X_i,\sum_j Y_j\big)}{\sqrt{\mathrm{Var}\big(\sum_i X_i\big)\mathrm{Var}\big(\sum_j Y_j\big)}} = \frac{\sum_i\sum_j \mathrm{Cov}\big(X_i,Y_j\big)}{\sqrt{n\sigma_x^2 n\sigma_y^2}} \\
&= \frac{\sum_i \mathrm{Cov}(X_i,Y_i)+\sum_i\sum_{j\neq i}\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)}{n\sigma_x\sigma_y} \\
&= \frac{n\rho\sigma_x\sigma_y}{n\sigma_x\sigma_y} = \rho
\end{aligned}$$

其中最后第二个等式是利用了 $\mathrm{Cov}(X_i,Y_i)=\rho\sigma_x\sigma_y$.

**24.** 令

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{如果第}i\text{张牌为“A”} \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

这样,

$$X=\sum_{i=1}^{3}X_i$$

且 $E[X_i]=P\{X_i=1\}=1/13$(牌“A”是 1 点! ). 现在用 $A$ 表示事件“黑桃已被选中”.

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[X|A]P(A)+E[X|A^{\mathrm{c}}]P(A^{\mathrm{c}}) \\
&= E[X|A]\frac{3}{52}+E[X|A^{\mathrm{c}}]\frac{49}{52} = E[X|A]\frac{3}{52}+\frac{49}{52}E\Big[\sum_{i=1}^{3}X_i|A^{\mathrm{c}}\Big] \\
&= E[X|A]\frac{3}{52}+\frac{49}{52}\sum_{i=1}^{3}E\Big[X_i|A^{\mathrm{c}}\Big] = E[X|A]\frac{3}{52}+\frac{49}{52}\times 3\times\frac{3}{51}
\end{aligned}$$

利用 $E[X]=3/13$, 可求得

$$E[X|A]=\frac{52}{3}\Big(\frac{3}{13}-\frac{49}{52}\frac{3}{17}\Big)=\frac{19}{17}=1.1176$$

类似地, 令 $L$ 表示“至少有一张‘A’被选中”, 此时

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[X|L]P(L)+E[X|L^{\mathrm{c}}]P(L^{\mathrm{c}}) \\
&= E[X|L]P(L)=E[X|L]\Big(1-\frac{48\times 47\times 46}{52\times 51\times 50}\Big)
\end{aligned}$$

这样,

$$E[X|L] = \frac{3/13}{1-(48\times 47\times 46)/(52\times 51\times 50)} \approx 1.0616$$

另一种解法是将牌“A”进行编号, 将黑桃“A”编号为 1, 令

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{如果第}i\text{ 张“A”被选中} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

此时,

$$E[X|A] = E\Big[\sum_{i=1}^{4} Y_i|Y_1=1\Big] = 1 + \sum_{i=2}^{4} E[Y_i|Y_1=1] = 1 + 3\times\frac{2}{51} = 19/17$$

同样,

$$E[X|L] = E\Big[\sum_{i=1}^{4} Y_i|L\Big] = \sum_{i=1}^{4} E[Y_i|L] = 4P\{Y_1=1|L\}$$

但

$$P\{Y_1=1|L\} = P(A|L) = \frac{P(AL)}{P(L)} = \frac{P(A)}{P(L)} = \frac{3/52}{1-(48\times 47\times 46)/(52\times 51\times 50)}$$

与前面的结果完全相同.

**25.** (a) $E[I|X=x] = P\{Z<X|X=x\} = P\{Z<x|X=x\} = P\{Z<x\} = \Phi(x)$

(b) 由 (a) 知 $E[I|X] = \Phi(X)$, 因此

$$E[I] = E[E[I|X]] = E[\Phi(X)]$$

再由 $E[I] = P\{I=1\} = P\{Z<X\}$ 可得所需结论.

(c) 由于 $X-Z$ 为正态随机变量, 均值为 $\mu$, 方差为 2, 我们有

$$\begin{aligned} P\{X>Z\} &= P\{X-Z>0\} = P\Big\{\frac{X-Z-\mu}{\sqrt{2}} > \frac{-\mu}{\sqrt{2}}\Big\} \\ &= 1-\Phi\Big(\frac{-\mu}{\sqrt{2}}\Big) = \Phi\Big(\frac{\mu}{\sqrt{2}}\Big) \end{aligned}$$

**26.** 设前 $n+m-2$ 次抛掷硬币时出现正面朝上的次数为 $N$. 令 $M=\max(X,Y)$ 表示抛掷硬币一直到出现 $n$ 个正面朝上和 $m$ 个反面朝上所需的抛掷硬币次数. (关于 $X,Y$ 的定义, 可见本题的提示.) 利用条件期望的性质,

$$\begin{aligned} E[M] &= \sum_i E[M|N=i]P\{N=i\} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E[M|N=i]P\{N=i\} + \sum_{i=n}^{n+m-1} E[M|N=i]P\{N=i\} \end{aligned}$$

现在假定在 $n+m-1$ 次试验中一共 $i$ 个正面朝上. 若 $i<n$, 此时, 我们至少已经有 $m$ 个反面朝上的硬币. 为了达到 $M$ 次试验, 我们只需进行附加试验, 获取另外 $n-i$ 个正面朝上即可. 而 $E[M|N=i] = n+m-1+(n-i)/p$. 类似地, 如果 $i\geqslant n$, 此时正面朝上数已满足了要求, 为了达到既有 $n$ 个正面朝上, 又有 $m$ 个反面朝上, 我们只需继续做附加

试验, 达到 $m-(n+m-1-i)$ 次反面朝上即可. 此时, $E[M|N-i]=(i+1-n)/(1-p)$. 这样, 我们得到

$$\begin{aligned}E[M]=&\sum_{i=0}^{n-1}\left(n+m-1+\frac{n-i}{p}\right)P\{N=i\}\\&+\sum_{i=n}^{n+m-1}\left(n+m-1+\frac{i+1-n}{1-p}\right)P\{N=i\}\\=&n+m-1+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n-i}{p}\binom{n+m-1}{i}p^i(1-p)^{n+m-1-i}\\&+\sum_{i=n}^{n+m-1}\frac{i+1-n}{1-p}\binom{n+m-1}{i}p^i(1-p)^{n+m-1-i}\end{aligned}$$

这样, $E[\min(X,Y)]$ 可由下式给出

$$E[\min(X,Y)]=E[X+Y-M]=\frac{n}{p}+\frac{m}{1-p}-E[M]$$

**27.** 这个问题与例 $2i$ 中的收集优惠券的问题是一样的, 即求收集到 $n-1$ 种优惠券所需要的平均次数 (优惠券的总数为 $n$). 这个例子的解为

$$1+\frac{n}{n-1}+\frac{n}{n-2}+\cdots+\frac{n}{2}$$

**28.**

$$E[X]=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X\geqslant i\}=\sum_{i=1}^{n}P\{X\geqslant i\}=\sum_{i=1}^{n}q^{i-1}=\frac{1-q^n}{p}$$

式中 $q=1-p$.

**29.**

$$\text{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=P(X=1,Y=1)-P(X=1)P(Y=1)$$

因此

$$\text{Cov}(X,Y)=0\Longleftrightarrow P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)$$

因为

$$\text{Cov}(X,Y)=\text{Cov}(1-X,1-Y)=-\text{Cov}(1-X,Y)=-\text{Cov}(X,1-Y)$$

从前面的结论可以看出，当 $X$ 和 $Y$ 的分布是伯努利分布时，下面的结论是相互等价的：

1. $\text{Cov}(X,Y)=0$
2. $P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)$
3. $P(1-X=1,1-Y=1)=P(1-X=1)P(1-Y=1)$
4. $P(1-X=1,Y=1)=P(1-X=1)P(Y=1)$
5. $P(X=1,1-Y=1)=P(X=1)P(1-Y=1)$

**30.** 首先将人员编号, 记 $(i, j)$ 为第 $j$ 个戴 $i$ 号帽子的人. 如果 $(i, j)$ 拿到 $i$ 号帽子, 则记 $X_{i,j} = 1$, 否则 $X_{i,j} = 0$. 这样, 拿到自己帽子型号的总人数为

$$X = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j}$$

因此

$$E[X] = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} E[X_{i,j}] = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{h_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} h_i n_i$$

## 第 8 章

**1.** 设 $X$ 为下一周的汽车销售量, 利用马尔可夫不等式

(a) $P\{X > 18\} = P\{X \geqslant 19\} \leqslant \dfrac{E[X]}{19} = 16/19$

(b) $P\{X > 25\} = P\{X \geqslant 26\} \leqslant \dfrac{E[X]}{26} = 16/26$

**2.** (a)

$$\begin{aligned} P\{10 \leqslant X \leqslant 22\} &= P\{|X - 16| \leqslant 6\} = P\{|X - \mu| \leqslant 6\} \\ &= 1 - P\{|X - \mu| > 6\} \geqslant 1 - 9/36 = 3/4 \end{aligned}$$

(b) $P\{X \geqslant 19\} = P\{X - 16 \geqslant 3\} \leqslant \dfrac{9}{9+9} = 1/2$

在 (a) 中利用了切比雪夫不等式, 而 (b) 利用了单边的切比雪夫不等式. (见命题 5.1)

**3.** 关于 $X - Y$, 有下列结论:

$$\begin{aligned} &E[X - Y] = 0 \\ &\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\mathrm{Cov}(X, Y) = 28 \end{aligned}$$

下面不等式中, (a) 利用了切比雪夫不等式, (b),(c) 利用了单边不等式.

(a) $P\{|X - Y| > 15\} \leqslant 28/225$
(b) $P\{X - Y > 15\} \leqslant 28/(28 + 225) = 28/253$
(c) $P\{Y - X > 15\} \leqslant 28/(28 + 225) = 28/253$

**4.** 设工厂 A 的生产数为 $X$, 工厂 B 的生产数为 $Y$, 则

$$E[Y - X] = -2 \qquad \mathrm{Var}(Y - X) = 36 + 9 = 45$$

$$P\{Y - X > 0\} = P\{Y - X \geqslant 1\} = P\{Y - X + 2 \geqslant 3\} \leqslant \frac{45}{45 + 9} = 45/54$$

**5.** 注意到

$$E[X_i] = \int_0^1 2x^2 \, \mathrm{d}x = 2/3$$

利用强大数律可得

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_n/n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} S_n/n} = 1/(2/3) = 3/2$$

**6.** 上题中得到 $E[X_i]=2/3$, 由

$$E[X_i^2]=\int_0^1 2x^3\,\mathrm{d}x=1/2$$

我们得到 $\mathrm{Var}(X_i)=1/2-(2/3)^2=1/18$. 因此, 若一共有 $n$ 个元件,

$$\begin{aligned}P\{S_n\geqslant 35\}&=P\{S_n\geqslant 34.5\}\qquad \text{连续性修正}\\&=P\left\{\frac{S_n-2n/3}{\sqrt{n/18}}\geqslant\frac{34.5-2n/3}{\sqrt{n/18}}\right\}\approx P\left\{Z\geqslant\frac{34.5-2n/3}{\sqrt{n/18}}\right\}\end{aligned}$$

其中 $Z$ 为标准正态随机变量. 由于

$$P\{Z>-1.284\}=P\{Z<1.284\}\approx 0.90$$

元件数 $n$ 应满足

$$34.5-2n/3\approx -1.284\sqrt{n/18}$$

由计算给出 $n=55$.

**7.** 设 $X$ 是修理一台机器所用的时间, 则

$$E[X]=0.2+0.3=0.5$$

利用指数分布的方差等于它的期望的平方, 得

$$\mathrm{Var}(X)=0.2^2+0.3^2=0.13$$

现设 $X_i, i=1,2,\cdots,20$ 为 20 台机器的修理时间, $Z$ 为标准正态随机变量,

$$\begin{aligned}P\{X_1+\cdots+X_{20}<8\}&=P\left\{\frac{X_1+\cdots+X_{20}-10}{\sqrt{2.6}}<\frac{8-10}{\sqrt{2.6}}\right\}\\&\approx P\{Z<-1.24035\}\approx 0.1074\end{aligned}$$

**8.** 首先设 $X$ 为赌徒一次所赢的钱数 (若负数为输). 则

$$E[X]=-0.7-0.4+1=-0.1\qquad E[X^2]=0.7+0.8+10=11.5$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(X)=11.49$$

$$\begin{aligned}P\{X_1+\cdots+X_{100}\leqslant -0.5\}&=P\left\{\frac{X_1+\cdots+X_{100}+10}{\sqrt{1149}}\leqslant\frac{-0.5+10}{\sqrt{1149}}\right\}\\&\approx P\{Z\leqslant 0.2803\}\approx 0.6104\end{aligned}$$

**9.** 利用自检习题 7 中的记号,

$$P\{X_1+\cdots+X_{20}<t\}=P\left\{\frac{X_1+\cdots+X_{20}-10}{\sqrt{2.6}}<\frac{t-10}{\sqrt{2.6}}\right\}\approx P\left\{Z<\frac{t-10}{\sqrt{2.6}}\right\}$$

由于 $P\{Z<1.645\}\approx 0.95$, $t$ 应满足

$$\frac{t-10}{\sqrt{2.6}}\approx 1.645$$

得 $t\approx 12.65$.

**10.** 如果烟草公司宣布的结论是正确的, 记尼古丁的含量为 $\bar{X}$, 平均含量超过 3.1 的概率为

$$P\{\bar{X} > 3.1\} = P\left\{\frac{\sqrt{100} \times (X - 2.2)}{0.3} > \frac{\sqrt{100} \times (3.1 - 2.2)}{0.3}\right\}$$
$$\approx P\{Z > 30\} \approx 0$$

其中 $Z$ 为标准正态随机变量.

本问题是统计检验问题, 若真像公司宣称那样, 那么试验结果是不可能出现的. 因此, 推翻了公司的结论.

**11.** (a) 随机地将电池编号, 记 $X_i$ 为第 $i$ 号电池的寿命 $(i = 1, \ldots, 40)$, 则 $X_i$ 为独立同分布的随机变量序列. 现在计算 $X_1$ 的期望和方差. 记 $I = 1$ 表示电池的型号为 $A$, $I = 0$ 表示电池的型号为 $B$. 由

$$E[X_1|I = 1] = 50, \quad E[X_1|I = 0] = 30$$

可知

$$E[X_1] = 50 \times P\{I = 1\} + 30 \times P\{I = 0\} = 50 \times (1/2) + 30 \times (1/2) = 40$$

在利用公式 $E[W^2] = (E[W])^2 + \text{Var}(W)$, 可得

$$E[X_1^2|I = 1] = (50)^2 + (15)^2 = 2725, \quad E[X_1^2|I = 0] = (30)^2 + (6)^2 = 936$$

这样

$$E[X_1^2] = (2725) \times (1/2) + (936) \times (1/2) = 1830.5$$

这样, $X_1, \ldots, X_{40}$ 是独立同分布的随机变量序列, 其公共期望为 40, 公共方差为 $1830.5 - 1600 = 230.5$. 对于 $S = \sum_{i=1}^{40} X_i$, 我们有

$$E[S] = 40(40) = 1600, \quad \text{Var}(S) = 40 \times (230.5) = 9220$$

再利用中心极限定理,

$$P\{S > 1700\} = P\left\{\frac{S - 1600}{\sqrt{9220}} > \frac{1700 - 1600}{\sqrt{9220}}\right\}$$
$$\approx P\{Z > 1.041\}$$
$$= 1 - \Phi(1.041) = 0.149$$

(b) 记 $S_A$ 为所有类型为 $A$ 的电池的总寿命, $S_B$ 为所有类型为 $B$ 的电池的总寿命. 利用中心极限定理可得, $S_A$ 为近似正态分布，其期望为 $20 \times 50 = 1000$, 方差为 $20 \times 225 = 4500$, $S_B$ 为近似正态分布, 其期望为 $20 \times 30 = 600$, 方差为 $20 \times 36 = 720$. 由于独立正态随机变量的和也是正态随机变量, $S_A + S_B$ 为近似正态随机变量, 其期望为 1600, 方差为 5220. 记 $S = S_A + S_B$, 得

$$P\{S > 1700\} = P\left\{\frac{S - 1600}{\sqrt{5220}} > \frac{1700 - 1600}{\sqrt{5220}}\right\}$$
$$\approx P\{Z > 1.384\}$$
$$= 1 - \Phi(1.384) = 0.084$$

**12.** 求对数, 并应用强大数律, 得到

$$\ln\left[\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) \to E[\ln(X)]$$

因此,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n} \to \mathrm{e}^{E[\ln(X)]}$$

## 第 9 章

**1.** 由泊松过程定义的条件 (iii) 知在 8 到 10 之间发生的事件数的分布与 0 到 2 之间发生的事件数的分布是相同的. 这个分布是泊松分布, 均值为 6. 对于问题 (a)(b), 其答案为

(a) $P\{N(10)-N(8)=0\}=\mathrm{e}^{-6}$

(b) $E[N(10)-N(8)]=6$

(c) 由泊松过程的条件 (ii) 和 (iii) 知, 对于以任何时间点作为起点开始, 关于这个时间轴上的过程都是具有相同参数的泊松过程, 因此, 从 2:00PM 以后, 第 5 个事件的平均发生时间为 $2+5/3$, 或者是 3:40PM.

**2.** (a)

$$\begin{aligned}
P\{N(1/3)=2|N(1)=2\} &= \frac{P\{N(1/3)=2, N(1)=2\}}{P\{N(1)=2\}}\\
&= \frac{P\{N(1/3)=2, N(1)-N(1/3)=0\}}{P\{N(1)=2\}}\\
&= \frac{P\{N(1/3)=2\}P\{N(1)-N(1/3)=0\}}{P\{N(1)=2\}} \qquad \text{根据泊松过程定义条件 (ii)}\\
&= \frac{P\{N(1/3)=2\}P\{N(2/3)=0\}}{P\{N(1)=2\}} \qquad \text{根据泊松过程定义条件 (iii)}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda/3}(\lambda/3)^2/2!\mathrm{e}^{-2\lambda/3}}{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2/2!} = 1/9
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&P\{N(1/2)\geqslant 1|N(1)=2\} = 1-P\{N(1/2)=0|N(1)=2\}\\
&=1-\frac{P\{N(1/2)=0, N(1)=2\}}{P\{N(1)=2\}} = 1-\frac{P\{N(1/2)=0, N(1)-N(1/2)=2\}}{P\{N(1)=2\}}\\
&=1-\frac{P\{N(1/2)=0\}P\{N(1)-N(1/2)=2\}}{P\{N(1)=2\}} = 1-\frac{P\{N(1/2)=0\}P\{N(1/2)=2\}}{P\{N(1)=2\}}\\
&=1-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda/2}\mathrm{e}^{-\lambda/2}(\lambda/2)^2/2!}{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2/2!} = 1-1/4=3/4
\end{aligned}$$

**3.** 在路上取一观察点, 记 $X_n=0$ 表示通过该点的第 $n$ 辆车是小汽车, $X_n=1$, 若第 $n$ 辆车是大卡车, $n\geqslant 1$. 现在将 $X_n$ 看成一个马尔可夫链, 其转移概率为

$$P_{0,0}=5/6 \qquad P_{0,1}=1/6 \qquad P_{1,0}=4/5 \qquad P_{1,1}=1/5$$

记 $\pi_0$ 表示路过某点为小汽车的概率, $\pi_1$ 为大卡车的概率. 它们是下列方程组的解:

$$\pi_0=\pi_0(5/6)+\pi_1(4/5) \qquad \pi_1=\pi_0(1/6)+\pi_1(1/5) \qquad \pi_0+\pi_1=1$$

解此方程组, 得

$$\pi_0 = 24/29 \qquad \pi_1 = 5/29$$

这样, 在路上, $\dfrac{2400}{29}\% \approx 83\%$ 的车是小汽车.

**4.** 每天的气候分类形成一个马尔可夫链, 令状态 0 为雨天, 1 为晴天, 2 为多云, 此时转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

各种气候的比例应该满足

$$\pi_0 = \pi_1(1/3) + \pi_2(1/3) \qquad \pi_1 = \pi_0(1/2) + \pi_1(1/3) + \pi_2(1/3)$$
$$\pi_2 = \pi_0(1/2) + \pi_1(1/3) + \pi_2(1/3) \qquad 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2$$

这组方程的解为:

$$\pi_0 = 1/4 \qquad \pi_1 = 3/8 \qquad \pi_2 = 3/8$$

因此, 3/8 为晴天, 1/4 为雨天.

**5.** (a) 直接计算之结果

$$H(X)/H(Y) \approx 1.06$$

(b) 首先指出, 在 $X$ 的取值空间内有两个值, 使得 $X$ 取值的概率分别为 0.35 和 0.05. 在 $Y$ 的取值空间中也有两个值, 它们取值概率也是 0.35 和 0.05. 但是, 当 $X$ 不取这两个值的时候, $X$ 以相同的概率取值其余的三个值, 而 $Y$ 却不是这样的. 根据理论习题 13 的结论, $H(X)$ 应该大于 $H(Y)$.

## 第 10 章

**1.** (a)

$$1 = C\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \Rightarrow C = 1/(e-1)$$

(b)

$$F(x) = C\int_0^x \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e} - 1} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

如果令 $X = F^{-1}(U)$, 可知

$$U = (\mathrm{e}^X - 1)/(\mathrm{e} - 1)$$

或

$$X = \ln(U(\mathrm{e} - 1) + 1)$$

我们可以通过随机数 $U, X = \ln(U(\mathrm{e}-1)+1)$ 模拟得到随机变量 $X$.

**2.** 利用舍取法. 取 $g(x) \equiv 1, 0 < x < 1$. 利用微积分知识可知, $f(x)/g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的极大点必满足下列方程:

$$2x - 6x^2 + 4x^3 = 0$$

或等价地,

$$4x^2 - 6x + 2 = (4x-2)(x-1) = 0$$

$f(x)/g(x)$ 的最大值在 $x = 1/2$ 处取得, 并且

$$C = \max f(x)/g(x) = 30(1/4 - 2/8 + 1/16) = 15/8$$

因此, 可采用以下算法:

**第 1 步** 产生一随机数 $U_1$.
**第 2 步** 产生一随机数 $U_2$.
**第 3 步** 若 $U_2 < 16(U_1^2 - 2U_1^3 + U_1^4)$, 则令 $X = U_1$, 否则转向第 1 步.

**3.** 最有效的方法是首先检验具有最大概率的值. 本题中, 采用下面的算法:

**第 1 步** 产生一随机数 $U$.
**第 2 步** 若 $U \leqslant 0.35$, 则令 $X = 3$, 并且停止程序.
**第 3 步** 若 $U \leqslant 0.65$, 则令 $X = 4$, 并且停止程序.
**第 4 步** 若 $U \leqslant 0.85$, 则令 $X = 2$, 并且停止程序.
**第 5 步** $X = 1$.

**4.** $2\mu - X$

**5.** (a) 产生 $2n$ 个独立同分布的随机变量 $X_i, Y_i, i = 1, \cdots, n$. 它们的公共分布为指数分布, 均值为 1. 然后利用

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{X_i Y_i}/n$$

作为估计量.

(b) 可以利用 $XY$ 作为控制变量, 然后利用下式作为估计:

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{e}^{X_i Y_i} + cX_i Y_i)/n$$

另一种方法是用 $XY + X^2Y^2/2$ 作为控制变量, 得到估计量

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{X_i Y_i} + c(X_i Y_i + X_i^2 Y_i^2/2 - 1/2)\right)/n$$

我们之所以用这样的控制变量, 是由于 $\mathrm{e}^{xy}$ 展开式的前三项为 $1 + xy + x^2y^2/2$.