## 第1章 组合分析

**习 题**

1. 约翰、吉姆、杰伊和杰克组成一个有4种乐器的乐队，如果每个人都会演奏这4种乐器，问可以有多少种不同的组合？如果约翰和吉姆会演奏这4种乐器，而杰伊和杰克分别只会弹钢琴和打鼓，那么又有多少种不同的组合？

**解**

如果每个人都会演奏这4种乐器，那么这是一个排列问题，即4种乐器随机排列，然后约翰、吉姆、杰伊和杰克按顺序选择乐器，一共有4! = 24种排列方式。

如果杰伊和杰克分别只会弹钢琴和打鼓，那么杰伊和杰克只有1种乐器组合。而约翰和吉姆则在剩下的2种乐器中选择，二人有2! = 2种乐器组合。根据计数基本法则，4人一共有1·2 = 2种不同的乐器组合。

1. 一个孩子有12块积木，其中6块黑色、4块红色、1块白色和1块蓝色。孩子想把这些积木排成一排，一共有多少种排法？

**解**



1. 8人坐在一排，一共有多少种坐法，如果

(a) 没什么限制；(b) A和B必须坐在一起；(c) 一共4个男人，4个女人，且任何两个男人不能坐在一起，任何两个女人也不能坐在一起；(d) 共有5个男人，且他们必须坐在一起；(e) 有4对夫妇，每对夫妇必须坐在一起。

**解**

(a) 8! = 40320。

(b) A和B两人一共有2!种坐法。将A和B作为一个整体，与其他6人一起一共有7!种坐法。所以一共有2!·7! = 10080种坐法。

(c) 4个男人一共有4!种坐法，4个女人一共有4!种坐法，而男女之间的搭配方式一共有两种：“m,w,m,w,m,w,m,w”和“w,m,w,m,w,m,w,m”。所以一共有2·4!·4! = 1152种坐法。

(d) 5个男人一共有5!种坐法。将5个男人作为一个整体，与其他3个女人一起一共有4!种坐法。所以一共有5!·4! = 2880种坐法。

(e) 每对夫妇分别有2!种坐法。将每对夫妇分别作为一个整体，4对夫妇一共有4!种坐法。所以一共有4!·2!·2!·2!·2! = 384种坐法。

1. 一个舞蹈班有22个学生，10女12男，要挑选5男5女然后配对，一共有多少种配法？

**解**

先选出5个男生，一共有种选法。再先出5个女生，一共有种选法。然后，将选出的5男5女配对，第1个男生挑选女生时有5种选择，第2个男生有4种选择，… ，第5个男生有1个选择，这实际上是一个排列问题，一共有5!种配法。所以一共有··5! = 23950080。

1. 从8女6男里选择3女3男组成委员会，一共有多少种选法？如果
2. 其中有两个男人不愿同时进入委员会；
3. 其中有两个女人不愿同时进入委员会；
4. 其中有一男一女不愿同时进入委员会。

**解**

(a) 从8位女士里面选3位有种选法。从6位男士里面选3位有种选法；还需要除去题目中提到的两个男士同时进入委员会的情况，这种情况有种选法；除去两个男士同时进入委员会的情况后，从6位男士里面选3位有种选法。所以一共有种选法。

(b) 与问题(a)同样的分析方法，可以得到一共有种选法。

(c) 从8位女士里面选3位有种选法，从6位男士里面选3位有种选法，一共有种选法。还需要去除题目中提到的一男一女同时进入委员会的情况，这种情况下，需要从剩下的7位女士中选2位，从剩下的5位男士中选2位，一共有种选法。除去一男一女同时进入委员会的情况后，一共有种选法。

1. 在习题21中，如果要求必须经过标有圆圈的点(如下图)，一共有多少种移动方法？

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | B |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| A |  |  |  |  |  |

**解**

从A到圆圈所在点需向右移动2步，向上移动2步，一共有种走法。再从圆圈所在点到B需向右移动2步，向上移动1步，一共有种走法。所以一共有种走法。

1. 一共10个举重选手参加比赛，其中3名美国选手、4名俄罗斯选手、2名中国选手和1名加拿大选手。如果成绩只记录每个选手的国籍，一共有多少种可能结果？如果美国选手有1名在总成绩前三名，另两名在总成绩的最后三名中，那么一共有多少种可能结果？

**解**

如果成绩只记录每个选手的国籍，相当于10个名次中3个分配给美国选手、4个分配给俄罗斯选手、2上分配给中国选手、1个分配给加拿大选手，一共有种结果。

如果美国选手中有1名在总成绩前三名，这一情况可能有种；另外两名美国选手在总成绩的最后三名中，这一情况可能有种。剩下的7个名次中，4个分配给俄罗斯选手，2分配给中国选手，1个分配给加拿大选手，这有种结果。所以一共有。

1. 有分别来自俄国、法国、英国和美国等10个国家的代表坐在一排，如果法国和英国代表坐在一起，俄国和美国代表不坐在一起，一共有多少种坐法？

**解**

法国和英国代表两人一共有2!种坐法。先不考虑俄国和美国代表，将法国和英国代表看作一个人，与其他6位代表一共有7!种坐法。再考虑俄国和美国代表的坐法，在前面7个人(这里仍将法国和英国代表看作一个人)坐好之后，由于俄美代表不能坐一起，所以他们二人只能分别插在7个人之间的位置，或7个人两端的位置，俄美代表二人一共有8·7种坐法。

所以，一共有2!·7!·8·7 = 564480种坐法。

1. 电梯载着8个人(不包括电梯工)自底层启动，到顶层6楼后，乘客已全部下完。如果电梯工只注意到每层楼出去的人数，那么他能看到多少种离开电梯的方式？如果8个乘客中有5个男人和3个女人，而电梯工又只注意了出去人的性别，问题的答案又是多少？

**解**

用*xi*表示每层楼出去的人数。如果只看每层楼出去的人数，那么有。显然要求*xi* ≥ 0。所以一共有种离开电梯的方式。

如果既要看人数，又要看性别，那么男女人数需要分开考虑。用*mi*表示每层出去的男人数，则，显然要求*mi* ≥ 0。所以如果只看男人，有种离开电梯的方式。用*wi*表示每层出去的男人数，则，显然要求*wi* ≥ 0。所以如果只看女人，有种离开电梯的方式。所以一共有252·56 = 14112种离开电梯的方式。

1. 有2万美元要投资到4个项目上，每份投资必须是1000美元的整数倍，且每个项目如果有投资的话，最少投资额分别为2000、2000、3000和4000美元，一共有多少种可行的投资方法，如果

(a) 每个项目都要投资；(b) 至少投资其中3个项目。

**解**

(a) 假设每个项目的投资额为*xi* (单位：千美元)，则有*x*1 + *x*2 + *x*3 + *x*4 = 20。由于要求*x*1 ≥ 2，*x*2 ≥ 2，*x*3 ≥ 3，*x*4 ≥ 4，所以令*y*1 = *x*1 – 2，*y*2 = *x*2 – 2，*y*3 = *x*3 – 3，*y*4 = *x*4 – 4，于是得到一个新的方程*y*1 + *y*2 + *y*3 + *y*4 = 20 – 11 = 9。显然有*yi* ≥ 0。所以一共有种投资方法。

(b) 至少投资3个项目包含4个项目都投资的情形，这一情形在问题(a)中已分析，有220种投资方法。

现在考虑投资3个项目的情形。首先假设第1个项目不投资，于是有方程*x*2 + *x*3 + *x*4 = 20。令*y*2 = *x*2 – 2，*y*3 = *x*3 – 3，*y*4 = *x*4 – 4，于是得到一个新的方程*y*2 + *y*3 + *y*4 = 20 – 9 = 11。一共有种投资方法。

同理可得，假设第2个项目不投资，共有种投资方法；假设第3个项目不投资，共有种投资方法；假设第4个项目不投资，共有种投资方法。

综上所述，一共有220 + 78 + 78 + 91 + 105 = 572种投资方法。

**理 论 习 题**

1. 计算形如(*x*1, *x*2, … , *xn*)的向量的个数，其中*xi*等于0或者1，且。

**解**

根据题意，*x*1, *x*2, … , *xn*中至少有*k*个为1。这是一个组合问题，如果*x*1, *x*2, … , *xn*中有*k*个为1，那么有种情况；如果*x*1, *x*2, … , *xn*中有*k*+1个为1，那么有种情况；… … ；直至*x*1, *x*2, … , *xn*中有*n*个为1，这时有种情况。所以总的向量个数为。

1. 有多少个这样的向量(*x*1, *x*2, … , *xk*)，其中*xi*是正整数，且满足1 ≤ *xi* ≤ *n*和*x*1 < *x*2 < … < *xk*。

**解**

根据题意，*x*1, *x*2, … , *xk*互不相等，并且1 ≤ *xi* ≤ *n*，所以如果不考虑*x*1, *x*2, … , *xk*之间的大小关系，相当于从1 ~ *n*中任取*k*个数赋值给*x*1, *x*2, … , *xk*，这一共有种取法。由于需要满足*x*1 < *x*2 < … < *xk*，所以取出*k*个数之后，只有一种方法将*k*个数赋值给*x*1, *x*2, … , *xk*，即最小的数赋值给*x*1，次小的数赋值给*x*2，… … ，一直到最大的数赋值给*xk*。

因此一共有个向量。

1. 证明

**解**

用组合分析的方法来证明。

假设有*n*个男人和*m*个女人，现在计算从中选取*r*个人有多少种方法。

显然，可以直接得出有种选人的方法

再换一种方法来分析。一共要选*r*个人，男女分开考虑：可以选0个男人和*r*个女人，也可以选1个男人和*r*−1个女人，… ，一直到选*r*个男人和0个女人。

选0个男人和*r*个女人一共有种方法，选1个男人和*r*−1个女人一共有种方法，… ，选*r*个男人和0个女人一共有种方法。相加后即可得到选取*r*个人的方法的种数。

所以，。

1. 利用理论习题8的结论证明：。

**解**

利用理论习题8的结论，有。因为，所以。

1. 从*n*个人中选取*k*个人组成一个委员会，*k* ≤ *n*，其中一人被任命为主席。
2. 考虑先选出*k*人，然后任命其中一人为主席，说明总共有种可能的方式；
3. 考虑先选出*k*−1人，其中没有主席，然后再在剩下的*n*−*k*+1人中选一人为主席，总共有种可能的方式；
4. 考虑先选出主席，然后再选出其他成员，说明一共有种可能的选择；
5. 总结(a)、(b)和(c)，得出；
6. 利用的阶乘定义证明(d)中的等式。

**解**

(e) 





所以，。

1. 以下是费马组合恒等式：



试从组合的角度，而不用计算的方法，去验证该恒等式。

**解**

假设有数字1, 2, … , *n*，从中任意选取*k*个数字，显然有种方法。

现在这样来分析。由于我们要选取*k*个数字，所以其中的最大值至少为*k*。

当*k*个数字中最大值为*k*时，需要在1 ~ *k*−1中选取*k*−1个数字，一共有种方法。当*k*个数字中最大值为*k*+1时，需要在1 ~ *k*中选取*k*−1个数字，一共有种方法。以此类推，直至当*k*个数字中最大值为*n*时，需要在1 ~ *n*−1中选取*k*−1个数字，一共有种方法。相加后即可得到选取*k*个数字的方法种数。

所以，。

1. 考虑如下组合恒等式：



1. 试从组合的角度解上式，可考虑从*n*人中挑选若干人组成委员会并在其中选定一名主席的可能方式的两种计算方法。
2. 证明以下等式对*n* = 1, 2, 3, 4, 5都成立：



为了从组合角度证明上式，指出上式的两边都等于如下的可能选择方式：考虑有*n*个人，从中选择若干人组成一个委员会，并选定主席和秘书(有可能是同一人)。

1. 证明。

**解**

(a) 考虑从*n*人中选出若干人(人数可以为1, 2, … , *n*)组成委员会，并任命其中一人为主席，计算有多少种方法。

按委员会的人数来考虑问题。如果委员会只有1人，那么一共有种方法；如果委员会有2人，那么一共有种方法；以此类推，直至委员会有n人，此时一共有种方法。相加后即可得到组建委员会一共有种方法。

按照每个人是否加入委员会来考虑问题。委员会至少有一个主席，因此先从*n*个人中选出一人为主席。然后剩下的*n*−1个人中，每个人可以加入委员会，也可以不加入委员会，即每个人有2种选择，故*n*−1个人一共有2*n*−1种选择。所以，组建委员会一共有种方法。

所以，。

(b) 考虑从*n*人中选出若干人(人数可以为1, 2, … , *n*)组成委员会，并选出一个主席和一个秘书，主席和秘书有可能为同一人，计算有多少种方法。

按委员会的人数来考虑问题。假设委员会一共有*k*人。先选出*k*人，一共有种方法；然后从*k*人中选出主席和秘书，主席有*k*个人选，秘书也有*k*个人选，所以一共有*k*2种方法。将*k* = 1, 2, … , *n*的情况相加后即可得到组建委员会一共有种方法。

按照每个人是否加入委员会来考虑问题。如果主席和秘书为同一人，先选出一人作为主席兼秘书，一共有*n*种方法；剩下的*n*−1人中，每个人每个人可以加入委员会，也可以不加入委员会，即每个人有2种选择，故*n*−1个人一共有2*n*−1种选择；所以，组建委员会一共有种方法。如果主席和秘书为不同的人，先出两人分别作为主席和秘书，一共有*n*(*n*−1)种方法；剩下的*n*−2人中，每个人有2种选择(加入或不加入委员会)，故*n*−2个人一共有2*n*−2种选择；所以，组建委员会一共有种方法。将以上两种情况相加后即可得到组建委员会一共有 = 种方法。

所以，。

(c) 略。

1. 从*n*个人里面选*j*个人组成委员会，再从这委员会里选*i*个人组成分会，*i* ≤ *j*。
2. 用两种方法分别计算委员会和分会的可能选择数来导出组合恒等式。其中，第一种方法是先选择*j*个人组成委员会，再从中选择*i*个人组成分会。第二种是先选择*i*个人组成分会，再补充*j*−*i*个人组成委员会。
3. 利用(a)证明组合恒等式：。
4. 利用(a)和理论习题13证明。

**解**

(a) 考虑第一种方法。先选择*j*个人组成委员会，一共有种方法；再从*j*个人中选择*i*个人组成分会，一共有种方法。所以，选出*j*个人的委员会并从中选出*i*个人的分会一共有种方法。

考虑第二种方法。先选择*i*个人组成分会，一共有种方法；再从剩下的*n*−*i*人中补充*j*−*i*个人组成委员会，一共有种方法。所以，选出*j*个人的委员会并从中选出*i*个人的分会一共有种方法。

所以，。

(b) 利用(a)的结论，有

。

(c)



1. 令*Hk*(*n*)为向量(*x*1, *x*2, … , *xk*)的数目，其中*xi*是正整数且满足1 ≤ *xi* ≤ *n*及*x*1 ≤ *x*2 ≤ … ≤ *xk*。
2. 不用任何计算，说明

*H*1(*n*) = *n*



1. 利用上述递推公式计算*H*3(5)。

**解**

(a) 对于一维向量(*x*1)，*x*1可以取1 ~ *n*中的任意数字，故*H*1(*n*) = *n*。

对于*k*维向量(*x*1, *x*2, … , *xk*)，如果取*xk* = *j*，由于*x*1 ≤ *x*2 ≤ … ≤ *xk*，那么*k*−1维向量(*x*1, *x*2, … , *xk*−1)的数目为*Hk*−1 (*j*)，因为*x*1、*x*2、…、*xk*−1的取值范围为1 ~ *j*。将*j* = 1, 2, … , *n*的情况相加，即可得到。

(b) *H*2(1) = *H*1(1) = 1

*H*2(2) = *H*1(1) + *H*1(2) = 1 + 2 = 3

*H*2(3) = *H*1(1) + *H*1(2) + *H*1(3) = 1 + 2 + 3 = 6

*H*2(4) = *H*1(1) + *H*1(2) + *H*1(3) + *H*1(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10

*H*2(5) = *H*1(1) + *H*1(2) + *H*1(3) + *H*1(4) + *H*1(5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15。

*H*3(5) = *H*2(1) + *H*2(2) + *H*2(3) + *H*2(4) + *H*2(5) = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35。

1. 有*n*个选手参加比赛，最后排定成绩，同时允许选手排名相同。那么，就可按排名成绩将选手分成组，成绩最好的第一组，成绩其次的第二组，等等。记*N*(*n*)表示不同结果的可能数，比如*N*(2) = 3，因为在一个只有2名选手参加的比赛中，比赛结果一共有3种：第一个选手获第一，第二个选手获第一，两个选手并列第一。
2. 列出所有*n* = 3时的可能结果。
3. 令*N*(0) = 1，不用任何计算，说明。
4. 证明上述公式等价于。
5. 列出上述递推公式，求出*N*(3)和*N*(4)。

**解**

(a) 假设3个选手为A、B、C。

3个并列第一：ABC

2个并列第一：AB C AC B BC A

1个第一，2个并列第二：A BC B AC C AB

没有并列名次：A B C A C B

B A C B C A

C A B C B A

(b) 假设有*i*位选手并列第一。先从*n*位选手中选出*i*个作为并列第一，有种方法。然后对剩下的*n*−*i*位选手按排名分组，有*N*(*n*−*i*)种方法。所以，在有*i*位选手并列第一的条件下，一共有种方法。

将*i* = 1, 2, … , *n*的情况相加即可得到。

(c) 因为，所以。

(d)









1. 试从组合的角度解释。

**解**

的意思是将*n*个人分成*r*个一组和*n*−*r*个一组。可以先从*n*个人中选出*r*个人组成一组，有种方法；然后再将剩下的*n*−*r*个人分成一组，有种方法。根据计数基本法则，将*n*个人分成*r*个一组和*n*−*r*个一组一共有种方法。

所以，。

1. 证明



**解**

从组合角度来分析。假设有*n*个球，需要分成*r*组，每组包含球的个数为*n*1, *n*2, … , *nr*，一共有种方法。

假如有一个球很特殊，记为A，那么它可以被分在任意一组。如果它被分在第1组，那么再对剩下的*n*−1个球进行分组时，第1组只能被分*n*1−1到个球，其他组的球的个数不变，所以一共有种方法；如果它被分在第2组，同理有种方法；以此类推，直至它被分在第*r*组的情况，有种方法。将以上各种情况相加，即可得到将*n*个球分成*r*组一共有种方法。

所以，。

1. 将*n*个相同的球放到*r*个坛子里，要求第*i*个坛子至少有*mi*个球，*i* = 1, 2, … , *r*，一共有多少种放法？假设。

**解**

假设第*i*个坛子放*xi*个球，显然有*x*1 + *x*2 + ∙∙∙ + *xr* = *n*，并且*xi* ≥ *mi*。令*yi* = *xi* – *mi*，显然有，可以得到一个新的方程，。这个方程有个解，这也就是将*n*个相同的球放到*r*个坛子里的方法数。

1. 求向量(*x*1, *x*2, … , *xn*)的数目，其中*xi*为非负整数且满足。

**解**

求解以下方程的非负整数解的个数。

*x*1 + *x*2 + ∙∙∙ + *xn* = 0 

*x*1 + *x*2 + ∙∙∙ + *xn* = 1 

… …

*x*1 + *x*2 + ∙∙∙ + *xn* = *k* 

将以上结果相加，即可得到满足的条件时，向量(*x*1, *x*2, … , *xn*)的数目为



**自 检 习 题**

1. 字母A, B, C, D, E, F一共有多少种排列方式，如果

(a) A和B必须在一起； (b) A在B之前；

(c) A在B之前，B在C之前； (d) A在B之前，C在D之前；

(e) A和B必须在一起，C和D也必须在一起； (f) E不在最后。

**解**

(a) 先排列A和B顺序，一共有2!种方法。再将A和B看作单独一个人，与其他4个进行排列，一共有5!种方法。所以，如果A和B必须在一起，一共有2!·5! = 240种排列方法。

(b) 如果假设A和B是同一个字母，用X表示，那么一共有6!/2! = 360种排列方法。对于每一种排列，如果以排在前面的X为A，以排在后面的X为B，就可得到A在B之前的所有排列方式，一共有360种。

(c) 如果假设A, B和C是同一个字母，用X表示，那么一共有6!/3! = 120种排列方法。对于每一种排列，如果以排在最前面的X为A，以排在中间的X为B，以排在最后面的X为C，就可得到A在B之前并且B在C之前的所有排列方式，一共有120种。

(d) 如果假设A和B是同一个字母，用X表示，另外假设C和D是同一个字母，用Y表示，那么一共有6!/2!/2! = 180种排列方法。对于每一种排列，如果以排在前面的X为A，以排在后面的X为B，并且以排在前面的Y为C，以排在后面的Y为D，就可得到A在B之前并且C在D之前的所有排列方式，一共有180种。

(e) 先排列A和B顺序，一共有2!种方法。再排列C和D的顺序，一共有2!种方法。再将A和B看作单独一个字母，并且将C和D看作单独一个字母，与其他2个进行排列，一共有4!种方法。所以，如果A和B必须在一起，C和D也必须在一起，一共有2!·2!·4! = 96种排列方法。

(f) 如果E的位置可以随意，那么一共有6!种排列方式。如果E只能排在最后，那么一共有5!种排列方式。所以，如果E不在最后，那么一共有6! − 5! = 600种排列方式。

1. 由数字1, 2, … , 9组成的5位数一共有多少？这5个数字中不容许有数字重复多于2次（例如，41434是不容许的）。

**解**

如果没有重复的数字，那么这样的5位数一共有个。

如果只有一个数字重复2次，那么需要从1 ~ 9中选取4个数字，一共有种选法；然后选取其中一个数字作为重复2次的数字，一共有种选法；再对5个数字(包含重复数字)进行排列，一共有5!/2!种排法。所以如果只有一个数字重复2次，那么这样的5位数一共有个。

如果只有两个数字重复2次，那么需要从1 ~ 9中选取3个数字，一共有种选法；然后选取其中两个数字作为重复2次的数字，一共有种选法；再对5个数字(包含重复数字)进行排列，一共有5!/2!/2!种排法。所以如果有两个数字重复2次，那么这样的5位数一共有个。

显然，5位数不可能有3上及3个以上的数重复2次。综上所述，5位数的个数一共有



1. 从7个男人、8个女人中选取6人组成委员会。如果要求至少3个女人、2个男人，一共有多少种选取方法?

**解**

分两种情况考虑。1) 3女3男，有种方法；2) 4女2男，有有种方法。所以一共有种选取方法。

注意：或许有人会这样考虑问题，先从8个女人中选取3个，再从7个男人中选取2个，剩下的5女5男一共还有10人，最后从这10人中选取1人。这样就一共有种方法。但是这样考虑是不正确的。因为针对**组合问题**的计数要求每一个试验是独立，不重合的。这里一共有3个试验：1) 从8个女人中选取3个，2) 从7个男人中选取2个，3) 从剩下的10人中选取1个。显然，试验1)和3)有重合部分，因为试验1)在8个女人中选，试验3)的选择范围的一部分也在这8个女人中。同理，试验2)和试验3)也重合。故采用这种方法来计数是不正确的。

1. 一个艺术品收藏拍卖会一共有15件艺术品，其中4件达利的，5件凡高的，6件毕加索的。一共有5名艺术品收藏家买下了这批艺术品。而某记者只记载了每位收藏家得到的达利、凡高和毕加索作品的数量，问销售记录能有多少种不同的结果？

**解**

用*xi*表示第*i*个收藏者得到的达利的作品，用*yi*表示第*i*个收藏者得到的达利的作品，用*zi*表示第*i*个收藏者得到的达利的作品。于是可以得到3个方程：

*x*1 + *x*2 + *x*3 + *x*4 + *x*5 = 4

*y*1 + *y*2 + *y*3 + *y*4 + *y*5 = 5

*z*1 + *z*2 + *z*3 + *z*4 + *z*5 = 6

第一个方程有个非负整数解，第二个方程有个非负整数解，第三个方程有个非负整数解。

所以，销售记录总共能有种不同的结果。

1. *n*个学生参加保险精算师的考试，公榜结果只列出那些通过考试的学生名单，并且按照他们的分数由高到底进行排序，例如，公榜结果为“Brown，Cho”意味着只有Brown和Cho通过了考试，而且Brown分数比Cho高。如果没有相同的分数，那么公布的考试结果一共有多少种情况？

**解**

如果有*i*个学生通过考试，那么一共有种结果。将*i* = 0, 1, … , *n*的情况相加即可得到总共的考试结果，为。

## 第2 章 概率论公理化

**习 题**

1. 设事件*A*和*B*互不相容，且*P*(*A*) = 0.3，*P*(*B*) = 0.5，求以下事件发生的概率：

(a) *A*或者*B*发生；(b) *A*发生但*B*不发生；(c) *A*和*B*都发生

**解**

(a) *P*(*A**B*) = *P*(*A*) + *P*(*B*) – *P*(*AB*) = 0.3 + 0.5 – 0 = 0.8

(b) *P*(*ABC*) = *P*(*A*) − *P*(*AB*) =0.3 (*A* = *AB**ABC*)

(c) *P*(*AB*) = 0

1. 某个小学有三个语言班，一个是西班牙语班，一个是法语班，另一个是德语班。这些语言班对学校里的100个学生开放。其中，有28人参加西班牙语班；有26人参加法语班；有16人参加德语班；有12人既参加西班牙语班也参加法语班；有4人既参加西班牙语班也参加德语班；有6人既参加法语班也参加德语班；另外，有2个三个班都参加。

(a) 随机选一名学生，他(或她)不参加任何班的概率是多少？

(b) 随机选一名学生，他(或她)恰好参加一个班的概率是多少？

(c) 随机选两名学生，其中至少有一人参加语言班的概率是多大？

**解**

(a) 随机选一名学生，以事件*S*表示参加西班牙语班，事件*F*表示参加法语班，事件*D*表示参加德语班。*P*(*SCFCDC*) = 1 – *P*(*S**F**D*) = 1 – (*P*(*S*) + *P*(*F*) + *P*(*D*) − *P*(*SF*) − *P*(*SD*) − *P*(*FD*) + *P*(*SFD*)) = 1 – (0.28 + 0.26 + 0.16 – 0.12 – 0.04 – 0.06 + 0.03) = 0.5。

(b) 先求至少参加两个班的概率*P*(*SF**SD**FD*) = *P*(*SF*) + *P*(*SD*) + *P*(*FD*) – *P*(*SFD*) – *P*(*SFD*) – *P*(*SFD*) + *P*(*SFD*) = *P*(*SF*) + *P*(*SD*) + *P*(*FD*) – 2*P*(*SFD*) = 0.12 + 0.04 + 0.06 − 20.02 = 0.18。

恰好参加一个班的概率为*P*(*S**F**D*) – *P*(*SF**SD**FD*) = 0.5 – 0.18 = 0.32。

该问题也可以用韦恩图来解决。

14

8

10

2

10

2

4

西班牙语

法语

德语

根据上图，恰好参加一个班的学生有14 + 10 + 8 = 32，概率为0.32。

(c) 概据(a)的分析，参加语言班的有50人，不参加语言班有50人。先求随机选的两名学生都不参加语言班的概率为。

两名学生中至少有一人参加语言班的概率为。

1. 对某份杂志的1000名订阅者的调查给出了如下数据：考虑到他们的工作、婚姻和教育状况，有312名专业人员，470名已婚人士，525名大学毕业生，42名大学毕业的专业人员，147名已婚大学毕业生，86名已婚专业人员，25名已婚且大学毕业的专业人员。证明这些数据是不正确的。

**解**

令*M*、*W*和*G*分别表示专业人员、已婚人士和大学毕业生。

*P*(*M**W**G*) = *P*(*M*) + *P*(*W*) + *P*(*G*) − *P*(*MW*) − *P*(*MG*) − *P*(*WG*) + *P*(*MWG*)

= 0.312 + 0.47 + 0.525 – 0.086 – 0.42 – 0.147 + 0.025

= 1.057 > 1

1. 从52张牌里随机取5张，求以下事件的概率：
2. 同花(也即5张牌同一花色)；
3. 一对(5张牌为*a*, *a*, *b*, *c*, *d*形式(点数)，其中*a*, *b*, *c*, *d*各不相同)；
4. 两对(5张牌为*a*, *a*, *b*, *b*, *c*形式(点数)，其中*a*, *b*, *c*各不相同)；
5. 三张同点数(5张牌为*a*, *a*, *a*, *b*, *c*形式(点数)，其中*a*, *b*, *c*各不相同)；
6. 四张同点数(5张牌为*a*, *a*, *a*, *a*, *b*形式(点数)，其中*a*, *b*各不相同)。

解

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

1. 如果8上车随机地放在国际象棋棋盘上，求没有一对能互捉的概率，也即求任何一行或一列至多只有一个车的概率。(国际象棋盘有88 = 64格，棋子放在格内)

**解**

假如8个车没有区别，按照组合的观点来考虑问题。8个车在棋盘上的排列方式有种。如果8个车没有一对能互捉，那么每一行有且只有一个车，每一列也有且只有一个车。先考虑第一行的车，它可以选择8列中的任一列；再考虑第二行的车，它可以选择剩下7列中的任一列；以此类推，最后一行的车只能选择1列。因此，8个车没有一对能互捉的排列方式有87···1 = 8!种。

所以，8个车没有一对能互捉的概率为。

此题也可按排列的观点来考虑。8个车在棋盘上的排列方式有6463···57种。

现在计算8上车没有一对能互捉的排列方式的种数。先考虑第一个车，它可以选择8行中的任一行，可以选择8列中的任一列，即有82种选择；再考第二个车，它可以选择剩下7行中的任一行，可以选择剩下7列中的任一列，即有72种选择；以此类推，最后一个车只能选择1行，只能选择1列，即有12种选择。因此，8个车没有一对能互捉的排列方式有8272···12种。

所以，8个车没有一对能互捉的概率为。这一概率与按照组合观点求得的概率是一样的。

1. 假设某赌徒正在和庄家玩二十一点，对于一副洗好的牌，赌徒和庄家都分不到“黑杰克”的概率是多大？(每人分配到2张牌)

**解**

以组合的观点来考虑问题。

用事件*A*表示赌徒分到“黑杰克”，用事件*B*表示庄家分到“黑杰克”。并且假设先分牌给赌徒，再分牌给庄家。这与先分牌给庄家再分牌给赌徒是一样的。

先计算赌徒和庄家都分到“黑杰克”的概率*P*(*AB*)。先分牌给赌徒时，从4张“A”里面选一张，从“10”、“J”、“Q”、“K”里面(一共16张)选一张，一共有416种分牌方法。然后分牌给庄家，从剩下的3张“A”里面选一张，从“10”、“J”、“Q”、“K”剩下的15张牌里面选一张，一共有315种分牌方法。因此，赌徒和庄家都分到“黑杰克”一共有416315种分牌方法。而将52张牌分给赌徒和庄家每人两张一共有种方法。故。

现在计算赌徒分到“黑杰克”的概率*P*(*A*)。赌徒先分牌，从4张“A”里面选一张，从“10”、“J”、“Q”、“K”里面(一共16张)选一张，一共有416种分牌方法。而先从52张牌中挑选2张给赌徒一共有种方法。故。

现在计算庄家分到“黑杰克”的概率*P*(*B*)。显然，庄家分到“黑杰克”的概率和赌徒是一样的。故。也可用组合分析得到这一结果，这里省略。

那么，赌徒和庄家都分不到“黑杰克”的概率P(*ACBC*) = 1 – *P*(*A**B*) = 1 – (*P*(*A*) + *P*(*B*) – *P*(*AB*)) = 0.9052。

1. 同时掷两枚骰子，直到骰子点数之和为5或者7出现，求和为5先出现的概率？

**解**

掷两枚骰子一次，有66 = 36种结果。其中，和为5的有4种结果，即(1, 4)、(4, 1)、(2, 3)、(3, 2)；和为7的有6种结果，即(1, 6)、(6, 1)、(2, 5)、(5, 2)、(3, 4)、(4, 3)；其他26种结果的和既不为5也不为7。

用事件*Ei*表示第*i*次掷骰子出现和为5。掷*i*次骰子，一共有36*i*个结果。其中，前*i*−1次的和为必须既不为5也不为7，这样的结果有26*i*−1；第*i*次的和为5，这样的结果有4种。所以，第*i*次掷骰子出现和为5的结果有26*i*−1·4种，于是

和为5先出现的概率为。

1. 一个坛子里有5个红球、6个蓝球和8个绿球。如果随机取3个球，问以下事件的概率：
2. 三个球同一种颜色；(b) 三个球不同的颜色。

假设取球后，记下其颜色，然后再放回坛内[这就是所谓的有放回抽样(Sampling with replacement)]，重新计算以上事件的概率。

**解**

如果不放回取样，从坛子里取3个球一共有种方法。

(a) 如果三个球同一种颜色，那么要么是红色，要么是蓝色，要么是绿色。如果三个球都是红色，一共有种取球方法。如果三个球都是蓝色，一共有种取球方法。如果三个球都是绿色，一共有种取球方法。故三个球同一种颜色的概率为。

(b) 如果三个球不同的颜色，那么一共有568种方法。故三个球不同颜色的概率为。

如果放回抽样，从坛子里取3个球一共有193种方法。

(a) 如果三个球都是红色，一共有53种取球方法。如果三个球都是蓝色，一共有63种取球方法。如果三个球都是绿色，一共有83种取球方法。故三个球同一种颜色的概率为。

(b) 如果三个球不同的颜色，那么取红球、蓝球和绿球的顺序一共有3!种，并且取红球有5种方法，取蓝球有6种方法，取绿球有8种方法。故取三个不同颜色的球一共有3!568种方法。故三个球不同颜色的概率为。

这里需要说明一下，本题中，不放回取样采用的上组合的分析方法，而放回抽样采用的排列的分析方法。

如果要把一个问题当做组合问题，必须要保证每种组合等可能的。不放回取样满足这一条件。而放回抽样不满足这一条件。例如，取球组合为“R1R1R1”(红球1，红球1，红球1)的概率为1/193；而取球组合“R1R2R3” (红球1，红球2，红球3)包含6种顺序(R1R2R3、R1R3R2、R2R1R3、R2R3R1、R3R1R2、R3R2R1)，故概率为6/193。

放回抽样问题可以类比于掷多颗骰子的问题，同样只能当做排列问题。

而组合问题一般也可以用排列的方法求解。

1. 一个坛子装有12个红球，16个蓝球，18个绿球。从中随机地取出7个球。求出下列事件的概率。
2. 抽出3个红球，2个蓝球，2个绿球；
3. 其中至少2个红球；
4. 抽出的球的颜色全相同；
5. 抽出的球中恰有3个红球或者恰有3个蓝球。

**解**

从坛子中随机地取出7个球一共有种方法。

(a) 先抽3个红球，有种方法；再抽2个蓝球，有种方法；最后抽2个绿球，有种方法。故抽出3个红球、2个蓝球、2个绿球的概率为。

(b) “至少2个红球”的对立事件是“没有红球或1个红球”。没有红球的抽取方法有种，1个红球的抽取方法有种。故至少2个红球的概率为

(c) 如果抽出的球的颜色全相同，那么要么全是红球，要么全是蓝球，要么全是绿球。全是红球的抽取方法有种，全是蓝球的抽取方法有种，全是绿球的抽取方法有种。故抽出的球的颜色全相同的概率为。

(d) 用事件*A*表示抽出3个红球，事件*B*表示抽出3个蓝球。

先计算抽出3个红球的概率*P*(*A*)。先抽出3个红球，有种方法；再抽出其他4个非红色球，有种方法。。

再计算抽出3个蓝球的概率*P*(*B*)。先抽出3个蓝球，有种方法；再抽出其他4个非蓝色球，有种方法。。

还需要计算*P*(*AB*)，因为事件*A*和*B*不是互斥的，存在同时抽出3个红球和3个蓝球的情况。先抽出3个红球，有种方法；再抽出3个蓝球，有种方法；再抽出1个绿球，有种方法。。

故抽出的球中恰有3个红球或者恰有3个蓝球的概率为

。

1. 城镇里有4人修电视机，现在有4台坏电视机，问正好有*i* (*i* = 1, 2, 3, 4)人被要求参与修理的概率？其中做了什么样的假设？

**解**

需要假设每台电视机都以相同的概率送给4人维修。每台电视机都可以选择给4人中的1人修理，故一共有44种选择。显然，这44种选择是等概率的。

如果只有1人参与修理，那么需要在4人中任选一个，然后每台电视机都给这个人修理，一共有种选择。故。

如果有2人参与修理，那么需要在4人中任选2个，一共有种选择；然后将4台电视机分配给这2人修理，一共有种分法。故2人参与修理一共有种选择。故。

如果有3人参与修理，那么需要在4人中任选3个，一共有种选择；然后将4台电视机分配给这3人修理，一共有种分法。故3人参与修理一共有种选择。故。

如果只有4人参与修理，那么每人只能修一台电视机，一共有4!种选择。故。

1. (a) 包含A和B在内的*N*个人随机地排成一排，问A和B紧挨着的概率是多大？

(b) 如果是随机地排成一圈，这个概率是多大？

**解**

(a) *N*个人随机地排成一排一共有*N*!种排法。如果A和B必须紧挨在一起，那么可以将A和B看做一个人，与其他*N*−2个人排列，一共有(*N*−1)!种排法；而A和B两人一共有2!种排法。所以A和B紧挨在一起的排法有(*N*−1)!·2!种。

故*N*个人随机地排成一排，A和B紧挨着的概率为。

(b) 现在考虑*N*个人随机地排成一圈。考察一个圆圈中*N*个人的顺序，我们考察的不是每个人在圆圈中的绝对位置，而是*N*个人之间的相对位置。例如，1, 2, 3, … , *N*与2, 3, 4, … , *N*, 1其实是同样的顺序。为了方便，以某个固定的人做为参照点，这里就以第1个人为参照点，考察其他人与第1个人的相对位置。并且方向确定为顺时针或逆时针皆可，这里就以顺时针方向为准。

如果以第1个人为第1个位置，那么顺时针方向第2个位置有*N*−1种选择，第3个位置有*N*−2种选择，以此类推，直至第N个位置只有1种选择。所以，*N*个人随机地排成一圈一共有(*N*−1)!种排法。

如果A和B必须紧挨在一起，那么可以将A和B看做一个人，与其他*N*−2个人排列，一共有(*N*−2)!种排法；而A和B两人一共有2!种排法。所以A和B紧挨在一起的排法有(*N*−2)!·2!种。

故*N*个人随机地排成一圈，A和B紧挨着的概率为。

1. 如果4对夫妇坐成一排，试求没有夫妇坐在一起的概率？

**解**

用事件*Ai*表示第*i*对夫妇坐在一起。我们要求的是没有夫妇坐在一起的概率，等于。而。











故没有夫妇坐在一起的概率为。

1. 计算桥牌比赛中有一家至少缺一套花色的概率。此答案并不是，为什么？

**解**

用事件*Ai*表示这个人缺第*i*套花色。我们要求的是这个人至少缺一套花色的概率，即。而。









故这个人至少缺一套花色的概率为



1. 一手牌13张，求以下事件的概率：(a) 有同花色的“A”和“K”；(b) 有同点数的四张。

**解**

(a) 用事件*Ei*表示有第*i*种花色的“A”和“K”。我们要求的是有(至少一种)同花色的“A”和“K”的概率，即。而。









故有同花色的“A”和“K”的概率为



(b) 用事件*Fi*表示有相同的4张点数*i*。我们要求的是有(至少一种)同点数的四张的概率，即。而。







而如果多于3种同点数的4张是不可能出现的。所以



1. 有两人玩以下游戏：A从下图所示的三个轮盘中选择一个，然后B在剩下的两个中选择一个。接着两人分别转动各自选中的轮盘，轮盘最后所停的位置下方区域里的数字大者获胜。假定每个轮盘停在三个区域是等可能的。如果是你，你会选择是A还是B？并解释原因。

9

5

1

*a*

3

8

4

*b*

7

6

2

*c*

**解**

(1) 如果两人选择的轮盘为*a*和*b*。那么轮盘*a*和*b*赢的概率分别为





所以轮盘*a*和*b*比，轮盘*a*赢的概率较大。

(2) 如果两人选择的轮盘为*a*和*c*。那么轮盘*a*和*c*赢的概率分别为





所以轮盘*a*和*c*比，轮盘*c*赢的概率较大。

(3) 如果两人选择的轮盘为*b*和*c*。那么轮盘*b*和*c*赢的概率分别为





所以轮盘*b*和*c*比，轮盘*b*赢的概率较大。

综上所述，无论A选择哪个轮盘，B都可以在剩下的2个轮盘中选择一个，使得B赢的概率较大。故应当先择是B。

**理 论 习 题**

1. 对任一系列事件*E*1, *E*2, … 定义一系列两两不相交事件*F*1, *F*2, … (如*i* ≠ *j*则*FiFj* = )，使得对任何*n* ≥ 1，有



**解**



1. 设*E*, *F*, *G*为三个事件，写出如下事件的表达式：

(a) 仅仅*E*发生； (b) *E*和*G*都发生，但*F*不发生； (c) 至少有一个事件发生；

(d) 至少有两个事件发生； (c) 三个事件都发生； (f) 一个事件都不发生；

(g) 最多一个事件发生； (h) 最多两个事件发生； (i) 正好两个事件发生；

(j) 最多三个事件发生。

**解**

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 
11. 化简下列表达式：

(a) ；(b) ；(c) 。

**解**

(a) 

(b) 

(c) 

1. 给定集合*S*，如果存在一列互斥非空子集*S*1, *S*2, … , *Sk* (*k* > 0)，满足，那么称{*S*1, *S*2, … , *Sk*}为*S*的一个分割(partition)。令*Tn*表示集合{1, 2, … , *n*}的不同分割的总数，因此*T*1 = 1(表示仅仅一个分割*S*1 = {1})，*T*2 = 2(表示两个分割：{{1, 2}}和{{1}, {2}})。

(a) 证明：*T*3 = 5，*T*4 = 15

(b) 证明：



**解**

(a) T3 =

(b)