## 第1章 组合分析

**习 题**

1. 约翰、吉姆、杰伊和杰克组成一个有4种乐器的乐队，如果每个人都会演奏这4种乐器，问可以有多少种不同的组合？如果约翰和吉姆会演奏这4种乐器，而杰伊和杰克分别只会弹钢琴和打鼓，那么又有多少种不同的组合？

**解**

如果每个人都会演奏这4种乐器，那么这是一个排列问题，即4种乐器随机排列，然后约翰、吉姆、杰伊和杰克按顺序选择乐器，一共有4! = 24种排列方式。

如果杰伊和杰克分别只会弹钢琴和打鼓，那么杰伊和杰克只有1种乐器组合。而约翰和吉姆则在剩下的2种乐器中选择，二人有2! = 2种乐器组合。根据计数基本法则，4人一共有1·2 = 2种不同的乐器组合。

1. 一个孩子有12块积木，其中6块黑色、4块红色、1块白色和1块蓝色。孩子想把这些积木排成一排，一共有多少种排法？

**解**



1. 8人坐在一排，一共有多少种坐法，如果

(a) 没什么限制；(b) A和B必须坐在一起；(c) 一共4个男人，4个女人，且任何两个男人不能坐在一起，任何两个女人也不能坐在一起；(d) 共有5个男人，且他们必须坐在一起；(e) 有4对夫妇，每对夫妇必须坐在一起。

**解**

(a) 8! = 40320。

(b) A和B两人一共有2!种坐法。将A和B作为一个整体，与其他6人一起一共有7!种坐法。所以一共有2!·7! = 10080种坐法。

(c) 4个男人一共有4!种坐法，4个女人一共有4!种坐法，而男女之间的搭配方式一共有两种：“m,w,m,w,m,w,m,w”和“w,m,w,m,w,m,w,m”。所以一共有2·4!·4! = 1152种坐法。

(d) 5个男人一共有5!种坐法。将5个男人作为一个整体，与其他3个女人一起一共有4!种坐法。所以一共有5!·4! = 2880种坐法。

(e) 每对夫妇分别有2!种坐法。将每对夫妇分别作为一个整体，4对夫妇一共有4!种坐法。所以一共有4!·2!·2!·2!·2! = 384种坐法。

1. 一个舞蹈班有22个学生，10女12男，要挑选5男5女然后配对，一共有多少种配法？

**解**

先选出5个男生，一共有种选法。再先出5个女生，一共有种选法。然后，将选出的5男5女配对，第1个男生挑选女生时有5种选择，第2个男生有4种选择，… ，第5个男生有1个选择，这实际上是一个排列问题，一共有5!种配法。所以一共有··5! = 23950080。

1. 从8女6男里选择3女3男组成委员会，一共有多少种选法？如果
2. 其中有两个男人不愿同时进入委员会；
3. 其中有两个女人不愿同时进入委员会；
4. 其中有一男一女不愿同时进入委员会。

**解**

(a) 从8位女士里面选3位有种选法。从6位男士里面选3位有种选法；还需要除去题目中提到的两个男士同时进入委员会的情况，这种情况有种选法；除去两个男士同时进入委员会的情况后，从6位男士里面选3位有种选法。所以一共有种选法。

(b) 与问题(a)同样的分析方法，可以得到一共有种选法。

(c) 从8位女士里面选3位有种选法，从6位男士里面选3位有种选法，一共有种选法。还需要去除题目中提到的一男一女同时进入委员会的情况，这种情况下，需要从剩下的7位女士中选2位，从剩下的5位男士中选2位，一共有种选法。除去一男一女同时进入委员会的情况后，一共有种选法。

1. 在习题21中，如果要求必须经过标有圆圈的点(如下图)，一共有多少种移动方法？

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | B |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| A |  |  |  |  |  |

**解**

从A到圆圈所在点需向右移动2步，向上移动2步，一共有种走法。再从圆圈所在点到B需向右移动2步，向上移动1步，一共有种走法。所以一共有种走法。

1. 一共10个举重选手参加比赛，其中3名美国选手、4名俄罗斯选手、2名中国选手和1名加拿大选手。如果成绩只记录每个选手的国籍，一共有多少种可能结果？如果美国选手有1名在总成绩前三名，另两名在总成绩的最后三名中，那么一共有多少种可能结果？

**解**

如果成绩只记录每个选手的国籍，相当于10个名次中3个分配给美国选手、4个分配给俄罗斯选手、2上分配给中国选手、1个分配给加拿大选手，一共有种结果。

如果美国选手中有1名在总成绩前三名，这一情况可能有种；另外两名美国选手在总成绩的最后三名中，这一情况可能有种。剩下的7个名次中，4个分配给俄罗斯选手，2分配给中国选手，1个分配给加拿大选手，这有种结果。所以一共有。

1. 有分别来自俄国、法国、英国和美国等10个国家的代表坐在一排，如果法国和英国代表坐在一起，俄国和美国代表不坐在一起，一共有多少种坐法？

**解**

法国和英国代表两人一共有2!种坐法。先不考虑俄国和美国代表，将法国和英国代表看作一个人，与其他6位代表一共有7!种坐法。再考虑俄国和美国代表的坐法，在前面7个人(这里仍将法国和英国代表看作一个人)坐好之后，由于俄美代表不能坐一起，所以他们二人只能分别插在7个人之间的位置，或7个人两端的位置，俄美代表二人一共有8·7种坐法。

所以，一共有2!·7!·8·7 = 564480种坐法。

1. 电梯载着8个人(不包括电梯工)自底层启动，到顶层6楼后，乘客已全部下完。如果电梯工只注意到每层楼出去的人数，那么他能看到多少种离开电梯的方式？如果8个乘客中有5个男人和3个女人，而电梯工又只注意了出去人的性别，问题的答案又是多少？

**解**

用*xi*表示每层楼出去的人数。如果只看每层楼出去的人数，那么有。显然要求*xi* ≥ 0。所以一共有种离开电梯的方式。

如果既要看人数，又要看性别，那么男女人数需要分开考虑。用*mi*表示每层出去的男人数，则，显然要求*mi* ≥ 0。所以如果只看男人，有种离开电梯的方式。用*wi*表示每层出去的男人数，则，显然要求*wi* ≥ 0。所以如果只看女人，有种离开电梯的方式。所以一共有252·56 = 14112种离开电梯的方式。

1. 有2万美元要投资到4个项目上，每份投资必须是1000美元的整数倍，且每个项目如果有投资的话，最少投资额分别为2000、2000、3000和4000美元，一共有多少种可行的投资方法，如果

(a) 每个项目都要投资；(b) 至少投资其中3个项目。

**解**

(a) 假设每个项目的投资额为*xi* (单位：千美元)，则有*x*1 + *x*2 + *x*3 + *x*4 = 20。由于要求*x*1 ≥ 2，*x*2 ≥ 2，*x*3 ≥ 3，*x*4 ≥ 4，所以令*y*1 = *x*1 – 2，*y*2 = *x*2 – 2，*y*3 = *x*3 – 3，*y*4 = *x*4 – 4，于是得到一个新的方程*y*1 + *y*2 + *y*3 + *y*4 = 20 – 11 = 9。显然有*yi* ≥ 0。所以一共有种投资方法。

(b) 至少投资3个项目包含4个项目都投资的情形，这一情形在问题(a)中已分析，有220种投资方法。

现在考虑投资3个项目的情形。首先假设第1个项目不投资，于是有方程*x*2 + *x*3 + *x*4 = 20。令*y*2 = *x*2 – 2，*y*3 = *x*3 – 3，*y*4 = *x*4 – 4，于是得到一个新的方程*y*2 + *y*3 + *y*4 = 20 – 9 = 11。一共有种投资方法。

同理可得，假设第2个项目不投资，共有种投资方法；假设第3个项目不投资，共有种投资方法；假设第4个项目不投资，共有种投资方法。

综上所述，一共有220 + 78 + 78 + 91 + 105 = 572种投资方法。

**理 论 习 题**

1. 计算形如(*x*1, *x*2, … , *xn*)的向量的个数，其中*xi*等于0或者1，且。

**解**

根据题意，*x*1, *x*2, … , *xn*中至少有*k*个为1。这是一个组合问题，如果*x*1, *x*2, … , *xn*中有*k*个为1，那么有种情况；如果*x*1, *x*2, … , *xn*中有*k*+1个为1，那么有种情况；… … ；直至*x*1, *x*2, … , *xn*中有*n*个为1，这时有种情况。所以总的向量个数为。

1. 有多少个这样的向量(*x*1, *x*2, … , *xk*)，其中*xi*是正整数，且满足1 ≤ *xi* ≤ *n*和*x*1 < *x*2 < … < *xk*。

**解**

根据题意，*x*1, *x*2, … , *xk*互不相等，并且1 ≤ *xi* ≤ *n*，所以如果不考虑*x*1, *x*2, … , *xk*之间的大小关系，相当于从1 ~ *n*中任取*k*个数赋值给*x*1, *x*2, … , *xk*，这一共有种取法。由于需要满足*x*1 < *x*2 < … < *xk*，所以取出*k*个数之后，只有一种方法将*k*个数赋值给*x*1, *x*2, … , *xk*，即最小的数赋值给*x*1，次小的数赋值给*x*2，… … ，一直到最大的数赋值给*xk*。

因此一共有个向量。