## 第1章 组合分析

**习 题**

1. 约翰、吉姆、杰伊和杰克组成一个有4种乐器的乐队，如果每个人都会演奏这4种乐器，问可以有多少种不同的组合？如果约翰和吉姆会演奏这4种乐器，而杰伊和杰克分别只会弹钢琴和打鼓，那么又有多少种不同的组合？

**解**

如果每个人都会演奏这4种乐器，那么这是一个排列问题，即4种乐器随机排列，然后约翰、吉姆、杰伊和杰克按顺序选择乐器，一共有4! = 24种排列方式。

如果杰伊和杰克分别只会弹钢琴和打鼓，那么杰伊和杰克只有1种乐器组合。而约翰和吉姆则在剩下的2种乐器中选择，二人有2! = 2种乐器组合。根据计数基本法则，4人一共有1·2 = 2种不同的乐器组合。

1. 一个孩子有12块积木，其中6块黑色、4块红色、1块白色和1块蓝色。孩子想把这些积木排成一排，一共有多少种排法？

**解**



1. 8人坐在一排，一共有多少种坐法，如果

(a) 没什么限制；(b) A和B必须坐在一起；(c) 一共4个男人，4个女人，且任何两个男人不能坐在一起，任何两个女人也不能坐在一起；(d) 共有5个男人，且他们必须坐在一起；(e) 有4对夫妇，每对夫妇必须坐在一起。

**解**

(a) 8! = 40320。

(b) A和B两人一共有2!种坐法。将A和B作为一个整体，与其他6人一起一共有7!种坐法。所以一共有2!·7! = 10080种坐法。

(c) 4个男人一共有4!种坐法，4个女人一共有4!种坐法，而男女之间的搭配方式一共有两种：“m,w,m,w,m,w,m,w”和“w,m,w,m,w,m,w,m”。所以一共有2·4!·4! = 1152种坐法。

(d) 5个男人一共有5!种坐法。将5个男人作为一个整体，与其他3个女人一起一共有4!种坐法。所以一共有5!·4! = 2880种坐法。

(e) 每对夫妇分别有2!种坐法。将每对夫妇分别作为一个整体，4对夫妇一共有4!种坐法。所以一共有4!·2!·2!·2!·2! = 384种坐法。

1. 一个舞蹈班有22个学生，10女12男，要挑选5男5女然后配对，一共有多少种配法？

**解**

先选出5个男生，一共有种选法。再先出5个女生，一共有种选法。然后，将选出的5男5女配对，第1个男生挑选女生时有5种选择，第2个男生有4种选择，… ，第5个男生有1个选择，这实际上是一个排列问题，一共有5!种配法。所以一共有··5! = 23950080。

1. 从8女6男里选择3女3男组成委员会，一共有多少种选法？如果
2. 其中有两个男人不愿同时进入委员会；
3. 其中有两个女人不愿同时进入委员会；
4. 其中有一男一女不愿同时进入委员会。

**解**

(a) 从8位女士里面选3位有种选法。从6位男士里面选3位有种选法；还需要除去题目中提到的两个男士同时进入委员会的情况，这种情况有种选法；除去两个男士同时进入委员会的情况后，从6位男士里面选3位有种选法。所以一共有种选法。

(b) 与问题(a)同样的分析方法，可以得到一共有种选法。

(c) 从8位女士里面选3位有种选法，从6位男士里面选3位有种选法，一共有种选法。还需要去除题目中提到的一男一女同时进入委员会的情况，这种情况下，需要从剩下的7位女士中选2位，从剩下的5位男士中选2位，一共有种选法。除去一男一女同时进入委员会的情况后，一共有种选法。

1. 在习题21中，如果要求必须经过标有圆圈的点(如下图)，一共有多少种移动方法？

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | B |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| A |  |  |  |  |  |

**解**

从A到圆圈所在点需向右移动2步，向上移动2步，一共有种走法。再从圆圈所在点到B需向右移动2步，向上移动1步，一共有种走法。所以一共有种走法。

1. 一共10个举重选手参加比赛，其中3名美国选手、4名俄罗斯选手、2名中国选手和1名加拿大选手。如果成绩只记录每个选手的国籍，一共有多少种可能结果？如果美国选手有1名在总成绩前三名，另两名在总成绩的最后三名中，那么一共有多少种可能结果？

**解**

如果成绩只记录每个选手的国籍，相当于10个名次中3个分配给美国选手、4个分配给俄罗斯选手、2上分配给中国选手、1个分配给加拿大选手，一共有种结果。

如果美国选手中有1名在总成绩前三名，这一情况可能有种；另外两名美国选手在总成绩的最后三名中，这一情况可能有种。剩下的7个名次中，4个分配给俄罗斯选手，2分配给中国选手，1个分配给加拿大选手，这有种结果。所以一共有。

1. 有分别来自俄国、法国、英国和美国等10个国家的代表坐在一排，如果法国和英国代表坐在一起，俄国和美国代表不坐在一起，一共有多少种坐法？

**解**

法国和英国代表两人一共有2!种坐法。先不考虑俄国和美国代表，将法国和英国代表看作一个人，与其他6位代表一共有7!种坐法。再考虑俄国和美国代表的坐法，在前面7个人(这里仍将法国和英国代表看作一个人)坐好之后，由于俄美代表不能坐一起，所以他们二人只能分别插在7个人之间的位置，或7个人两端的位置，俄美代表二人一共有8·7种坐法。

所以，一共有2!·7!·8·7 = 564480种坐法。

1. 电梯载着8个人(不包括电梯工)自底层启动，到顶层6楼后，乘客已全部下完。如果电梯工只注意到每层楼出去的人数，那么他能看到多少种离开电梯的方式？如果8个乘客中有5个男人和3个女人，而电梯工又只注意了出去人的性别，问题的答案又是多少？

**解**

用*xi*表示每层楼出去的人数。如果只看每层楼出去的人数，那么有。显然要求*xi* ≥ 0。所以一共有种离开电梯的方式。

如果既要看人数，又要看性别，那么男女人数需要分开考虑。用*mi*表示每层出去的男人数，则，显然要求*mi* ≥ 0。所以如果只看男人，有种离开电梯的方式。用*wi*表示每层出去的男人数，则，显然要求*wi* ≥ 0。所以如果只看女人，有种离开电梯的方式。所以一共有252·56 = 14112种离开电梯的方式。

1. 有2万美元要投资到4个项目上，每份投资必须是1000美元的整数倍，且每个项目如果有投资的话，最少投资额分别为2000、2000、3000和4000美元，一共有多少种可行的投资方法，如果

(a) 每个项目都要投资；(b) 至少投资其中3个项目。

**解**

(a) 假设每个项目的投资额为*xi* (单位：千美元)，则有*x*1 + *x*2 + *x*3 + *x*4 = 20。由于要求*x*1 ≥ 2，*x*2 ≥ 2，*x*3 ≥ 3，*x*4 ≥ 4，所以令*y*1 = *x*1 – 2，*y*2 = *x*2 – 2，*y*3 = *x*3 – 3，*y*4 = *x*4 – 4，于是得到一个新的方程*y*1 + *y*2 + *y*3 + *y*4 = 20 – 11 = 9。显然有*yi* ≥ 0。所以一共有种投资方法。

(b) 至少投资3个项目包含4个项目都投资的情形，这一情形在问题(a)中已分析，有220种投资方法。

现在考虑投资3个项目的情形。首先假设第1个项目不投资，于是有方程*x*2 + *x*3 + *x*4 = 20。令*y*2 = *x*2 – 2，*y*3 = *x*3 – 3，*y*4 = *x*4 – 4，于是得到一个新的方程*y*2 + *y*3 + *y*4 = 20 – 9 = 11。一共有种投资方法。

同理可得，假设第2个项目不投资，共有种投资方法；假设第3个项目不投资，共有种投资方法；假设第4个项目不投资，共有种投资方法。

综上所述，一共有220 + 78 + 78 + 91 + 105 = 572种投资方法。

**理 论 习 题**

1. 计算形如(*x*1, *x*2, … , *xn*)的向量的个数，其中*xi*等于0或者1，且。

**解**

根据题意，*x*1, *x*2, … , *xn*中至少有*k*个为1。这是一个组合问题，如果*x*1, *x*2, … , *xn*中有*k*个为1，那么有种情况；如果*x*1, *x*2, … , *xn*中有*k*+1个为1，那么有种情况；… … ；直至*x*1, *x*2, … , *xn*中有*n*个为1，这时有种情况。所以总的向量个数为。

1. 有多少个这样的向量(*x*1, *x*2, … , *xk*)，其中*xi*是正整数，且满足1 ≤ *xi* ≤ *n*和*x*1 < *x*2 < … < *xk*。

**解**

根据题意，*x*1, *x*2, … , *xk*互不相等，并且1 ≤ *xi* ≤ *n*，所以如果不考虑*x*1, *x*2, … , *xk*之间的大小关系，相当于从1 ~ *n*中任取*k*个数赋值给*x*1, *x*2, … , *xk*，这一共有种取法。由于需要满足*x*1 < *x*2 < … < *xk*，所以取出*k*个数之后，只有一种方法将*k*个数赋值给*x*1, *x*2, … , *xk*，即最小的数赋值给*x*1，次小的数赋值给*x*2，… … ，一直到最大的数赋值给*xk*。

因此一共有个向量。

1. 证明

**解**

用组合分析的方法来证明。

假设有*n*个男人和*m*个女人，现在计算从中选取*r*个人有多少种方法。

显然，可以直接得出有种选人的方法

再换一种方法来分析。一共要选*r*个人，男女分开考虑：可以选0个男人和*r*个女人，也可以选1个男人和*r*−1个女人，… ，一直到选*r*个男人和0个女人。

选0个男人和*r*个女人一共有种方法，选1个男人和*r*−1个女人一共有种方法，… ，选*r*个男人和0个女人一共有种方法。相加后即可得到选取*r*个人的方法的种数。

所以，。

1. 利用理论习题8的结论证明：。

**解**

利用理论习题8的结论，有。因为，所以。

1. 从*n*个人中选取*k*个人组成一个委员会，*k* ≤ *n*，其中一人被任命为主席。
2. 考虑先选出*k*人，然后任命其中一人为主席，说明总共有种可能的方式；
3. 考虑先选出*k*−1人，其中没有主席，然后再在剩下的*n*−*k*+1人中选一人为主席，总共有种可能的方式；
4. 考虑先选出主席，然后再选出其他成员，说明一共有种可能的选择；
5. 总结(a)、(b)和(c)，得出；
6. 利用的阶乘定义证明(d)中的等式。

**解**

(e) 





所以，。

1. 以下是费马组合恒等式：



试从组合的角度，而不用计算的方法，去验证该恒等式。

**解**

假设有数字1, 2, … , *n*，从中任意选取*k*个数字，显然有种方法。

现在这样来分析。由于我们要选取*k*个数字，所以其中的最大值至少为*k*。

当*k*个数字中最大值为*k*时，需要在1 ~ *k*−1中选取*k*−1个数字，一共有种方法。当*k*个数字中最大值为*k*+1时，需要在1 ~ *k*中选取*k*−1个数字，一共有种方法。以此类推，直至当*k*个数字中最大值为*n*时，需要在1 ~ *n*−1中选取*k*−1个数字，一共有种方法。相加后即可得到选取*k*个数字的方法种数。

所以，。

1. 考虑如下组合恒等式：



1. 试从组合的角度解上式，可考虑从*n*人中挑选若干人组成委员会并在其中选定一名主席的可能方式的两种计算方法。
2. 证明以下等式对*n* = 1, 2, 3, 4, 5都成立：



为了从组合角度证明上式，指出上式的两边都等于如下的可能选择方式：考虑有*n*个人，从中选择若干人组成一个委员会，并选定主席和秘书(有可能是同一人)。

1. 证明。

**解**

(a) 考虑从*n*人中选出若干人(人数可以为1, 2, … , *n*)组成委员会，并任命其中一人为主席，计算有多少种方法。

按委员会的人数来考虑问题。如果委员会只有1人，那么一共有种方法；如果委员会有2人，那么一共有种方法；以此类推，直至委员会有n人，此时一共有种方法。相加后即可得到组建委员会一共有种方法。

按照每个人是否加入委员会来考虑问题。委员会至少有一个主席，因此先从*n*个人中选出一人为主席。然后剩下的*n*−1个人中，每个人可以加入委员会，也可以不加入委员会，即每个人有2种选择，故*n*−1个人一共有2*n*−1种选择。所以，组建委员会一共有种方法。

所以，。

(b) 考虑从*n*人中选出若干人(人数可以为1, 2, … , *n*)组成委员会，并选出一个主席和一个秘书，主席和秘书有可能为同一人，计算有多少种方法。

按委员会的人数来考虑问题。假设委员会一共有*k*人。先选出*k*人，一共有种方法；然后从*k*人中选出主席和秘书，主席有*k*个人选，秘书也有*k*个人选，所以一共有*k*2种方法。将*k* = 1, 2, … , *n*的情况相加后即可得到组建委员会一共有种方法。

按照每个人是否加入委员会来考虑问题。如果主席和秘书为同一人，先选出一人作为主席兼秘书，一共有*n*种方法；剩下的*n*−1人中，每个人每个人可以加入委员会，也可以不加入委员会，即每个人有2种选择，故*n*−1个人一共有2*n*−1种选择；所以，组建委员会一共有种方法。如果主席和秘书为不同的人，先出两人分别作为主席和秘书，一共有*n*(*n*−1)种方法；剩下的*n*−2人中，每个人有2种选择(加入或不加入委员会)，故*n*−2个人一共有2*n*−2种选择；所以，组建委员会一共有种方法。将以上两种情况相加后即可得到组建委员会一共有 = 种方法。

所以，。

(c) 略。

1. 从*n*个人里面选*j*个人组成委员会，再从这委员会里选*i*个人组成分会，*i* ≤ *j*。
2. 用两种方法分别计算委员会和分会的可能选择数来导出组合恒等式。其中，第一种方法是先选择*j*个人组成委员会，再从中选择*i*个人组成分会。第二种是先选择*i*个人组成分会，再补充*j*−*i*个人组成委员会。
3. 利用(a)证明组合恒等式：。
4. 利用(a)和理论习题13证明。

**解**

(a) 考虑第一种方法。先选择*j*个人组成委员会，一共有种方法；再从*j*个人中选择*i*个人组成分会，一共有种方法。所以，选出*j*个人的委员会并从中选出*i*个人的分会一共有种方法。

考虑第二种方法。先选择*i*个人组成分会，一共有种方法；再从剩下的*n*−*i*人中补充*j*−*i*个人组成委员会，一共有种方法。所以，选出*j*个人的委员会并从中选出*i*个人的分会一共有种方法。

所以，。

(b) 利用(a)的结论，有

。

(c)



1. 令*Hk*(*n*)为向量(*x*1, *x*2, … , *xk*)的数目，其中*xi*是正整数且满足1 ≤ *xi* ≤ *n*及*x*1 ≤ *x*2 ≤ … ≤ *xk*。
2. 不用任何计算，说明

*H*1(*n*) = *n*



1. 利用上述递推公式计算*H*3(5)。

**解**

(a) 对于一维向量(*x*1)，*x*1可以取1 ~ *n*中的任意数字，故*H*1(*n*) = *n*。

对于*k*维向量(*x*1, *x*2, … , *xk*)，如果取*xk* = *j*，由于*x*1 ≤ *x*2 ≤ … ≤ *xk*，那么*k*−1维向量(*x*1, *x*2, … , *xk*−1)的数目为*Hk*−1 (*j*)，因为*x*1、*x*2、…、*xk*−1的取值范围为1 ~ *j*。将*j* = 1, 2, … , *n*的情况相加，即可得到。

(b) *H*2(1) = *H*1(1) = 1

*H*2(2) = *H*1(1) + *H*1(2) = 1 + 2 = 3

*H*2(3) = *H*1(1) + *H*1(2) + *H*1(3) = 1 + 2 + 3 = 6

*H*2(4) = *H*1(1) + *H*1(2) + *H*1(3) + *H*1(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10

*H*2(5) = *H*1(1) + *H*1(2) + *H*1(3) + *H*1(4) + *H*1(5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15。

*H*3(5) = *H*2(1) + *H*2(2) + *H*2(3) + *H*2(4) + *H*2(5) = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35。

1. 有*n*个选手参加比赛，最后排定成绩，同时允许选手排名相同。那么，就可按排名成绩将选手分成组，成绩最好的第一组，成绩其次的第二组，等等。记*N*(*n*)表示不同结果的可能数，比如*N*(2) = 3，因为在一个只有2名选手参加的比赛中，比赛结果一共有3种：第一个选手获第一，第二个选手获第一，两个选手并列第一。
2. 列出所有*n* = 3时的可能结果。
3. 令*N*(0) = 1，不用任何计算，说明。
4. 证明上述公式等价于。
5. 列出上述递推公式，求出*N*(3)和*N*(4)。

**解**

(a) 假设3个选手为A、B、C。

3个并列第一：ABC

2个并列第一：AB C AC B BC A

1个第一，2个并列第二：A BC B AC C AB

没有并列名次：A B C A C B

B A C B C A

C A B C B A

(b) 假设有*i*位选手并列第一。先从*n*位选手中选出*i*个作为并列第一，有种方法。然后对剩下的*n*−*i*位选手按排名分组，有*N*(*n*−*i*)种方法。所以，在有*i*位选手并列第一的条件下，一共有种方法。

将*i* = 1, 2, … , *n*的情况相加即可得到。

(c) 因为，所以。

(d)









1. 试从组合的角度解释。

**解**

的意思是将*n*个人分成*r*个一组和*n*−*r*个一组。可以先从*n*个人中选出*r*个人组成一组，有种方法；然后再将剩下的*n*−*r*个人分成一组，有种方法。根据计数基本法则，将*n*个人分成*r*个一组和*n*−*r*个一组一共有种方法。

所以，。

1. 证明



**解**

从组合角度来分析。假设有*n*个球，需要分成*r*组，每组包含球的个数为*n*1, *n*2, … , *nr*，一共有种方法。

假如有一个球很特殊，记为A，那么它可以被分在任意一组。如果它被分在第1组，那么再对剩下的*n*−1个球进行分组时，第1组只能被分*n*1−1到个球，其他组的球的个数不变，所以一共有种方法；如果它被分在第2组，同理有种方法；以此类推，直至它被分在第*r*组的情况，有种方法。将以上各种情况相加，即可得到将*n*个球分成*r*组一共有种方法。

所以，。

1. 将*n*个相同的球放到*r*个坛子里，要求第*i*个坛子至少有*mi*个球，*i* = 1, 2, … , *r*，一共有多少种放法？假设。

**解**

假设第*i*个坛子放*xi*个球，显然有*x*1 + *x*2 + ∙∙∙ + *xr* = *n*，并且*xi* ≥ *mi*。令*yi* = *xi* – *mi*，显然有，可以得到一个新的方程，。这个方程有个解，这也就是将*n*个相同的球放到*r*个坛子里的方法数。

1. 求向量(*x*1, *x*2, … , *xn*)的数目，其中*xi*为非负整数且满足。

**解**

求解以下方程的非负整数解的个数。

*x*1 + *x*2 + ∙∙∙ + *xn* = 0 

*x*1 + *x*2 + ∙∙∙ + *xn* = 1 

… …

*x*1 + *x*2 + ∙∙∙ + *xn* = *k* 

将以上结果相加，即可得到满足的条件时，向量(*x*1, *x*2, … , *xn*)的数目为



**自 检 习 题**

1. 字母A, B, C, D, E, F一共有多少种排列方式，如果

(a) A和B必须在一起； (b) A在B之前；

(c) A在B之前，B在C之前； (d) A在B之前，C在D之前；

(e) A和B必须在一起，C和D也必须在一起； (f) E不在最后。

**解**

(a) 先排列A和B顺序，一共有2!种方法。再将A和B看作单独一个人，与其他4个进行排列，一共有5!种方法。所以，如果A和B必须在一起，一共有2!·5! = 240种排列方法。

(b) 如果假设A和B是同一个字母，用X表示，那么一共有6!/2! = 360种排列方法。对于每一种排列，如果以排在前面的X为A，以排在后面的X为B，就可得到A在B之前的所有排列方式，一共有360种。

(c) 如果假设A, B和C是同一个字母，用X表示，那么一共有6!/3! = 120种排列方法。对于每一种排列，如果以排在最前面的X为A，以排在中间的X为B，以排在最后面的X为C，就可得到A在B之前并且B在C之前的所有排列方式，一共有120种。

(d) 如果假设A和B是同一个字母，用X表示，另外假设C和D是同一个字母，用Y表示，那么一共有6!/2!/2! = 180种排列方法。对于每一种排列，如果以排在前面的X为A，以排在后面的X为B，并且以排在前面的Y为C，以排在后面的Y为D，就可得到A在B之前并且C在D之前的所有排列方式，一共有180种。

(e) 先排列A和B顺序，一共有2!种方法。再排列C和D的顺序，一共有2!种方法。再将A和B看作单独一个字母，并且将C和D看作单独一个字母，与其他2个进行排列，一共有4!种方法。所以，如果A和B必须在一起，C和D也必须在一起，一共有2!·2!·4! = 96种排列方法。

(f) 如果E的位置可以随意，那么一共有6!种排列方式。如果E只能排在最后，那么一共有5!种排列方式。所以，如果E不在最后，那么一共有6! − 5! = 600种排列方式。

1. 由数字1, 2, … , 9组成的5位数一共有多少？这5个数字中不容许有数字重复多于2次（例如，41434是不容许的）。

**解**

如果没有重复的数字，那么这样的5位数一共有个。

如果只有一个数字重复2次，那么需要从1 ~ 9中选取4个数字，一共有种选法；然后选取其中一个数字作为重复2次的数字，一共有种选法；再对5个数字(包含重复数字)进行排列，一共有5!/2!种排法。所以如果只有一个数字重复2次，那么这样的5位数一共有个。

如果只有两个数字重复2次，那么需要从1 ~ 9中选取3个数字，一共有种选法；然后选取其中两个数字作为重复2次的数字，一共有种选法；再对5个数字(包含重复数字)进行排列，一共有5!/2!/2!种排法。所以如果有两个数字重复2次，那么这样的5位数一共有个。

显然，5位数不可能有3上及3个以上的数重复2次。综上所述，5位数的个数一共有



1. 从7个男人、8个女人中选取6人组成委员会。如果要求至少3个女人、2个男人，一共有多少种选取方法?

**解**

分两种情况考虑。1) 3女3男，有种方法；2) 4女2男，有有种方法。所以一共有种选取方法。

注意：或许有人会这样考虑问题，先从8个女人中选取3个，再从7个男人中选取2个，剩下的5女5男一共还有10人，最后从这10人中选取1人。这样就一共有种方法。但是这样考虑是不正确的。因为针对**组合问题**的计数要求每一个试验是独立，不重合的。这里一共有3个试验：1) 从8个女人中选取3个，2) 从7个男人中选取2个，3) 从剩下的10人中选取1个。显然，试验1)和3)有重合部分，因为试验1)在8个女人中选，试验3)的选择范围的一部分也在这8个女人中。同理，试验2)和试验3)也重合。故采用这种方法来计数是不正确的。

1. 一个艺术品收藏拍卖会一共有15件艺术品，其中4件达利的，5件凡高的，6件毕加索的。一共有5名艺术品收藏家买下了这批艺术品。而某记者只记载了每位收藏家得到的达利、凡高和毕加索作品的数量，问销售记录能有多少种不同的结果？

**解**

用*xi*表示第*i*个收藏者得到的达利的作品，用*yi*表示第*i*个收藏者得到的达利的作品，用*zi*表示第*i*个收藏者得到的达利的作品。于是可以得到3个方程：

*x*1 + *x*2 + *x*3 + *x*4 + *x*5 = 4

*y*1 + *y*2 + *y*3 + *y*4 + *y*5 = 5

*z*1 + *z*2 + *z*3 + *z*4 + *z*5 = 6

第一个方程有个非负整数解，第二个方程有个非负整数解，第三个方程有个非负整数解。

所以，销售记录总共能有种不同的结果。

1. *n*个学生参加保险精算师的考试，公榜结果只列出那些通过考试的学生名单，并且按照他们的分数由高到底进行排序，例如，公榜结果为“Brown，Cho”意味着只有Brown和Cho通过了考试，而且Brown分数比Cho高。如果没有相同的分数，那么公布的考试结果一共有多少种情况？

**解**

如果有*i*个学生通过考试，那么一共有种结果。将*i* = 0, 1, … , *n*的情况相加即可得到总共的考试结果，为。

## 第2章 概率论公理化

**习 题**

1. 设事件*A*和*B*互不相容，且*P*(*A*) = 0.3，*P*(*B*) = 0.5，求以下事件发生的概率：

(a) *A*或者*B*发生；(b) *A*发生但*B*不发生；(c) *A*和*B*都发生

**解**

(a) *P*(*A**B*) = *P*(*A*) + *P*(*B*) – *P*(*AB*) = 0.3 + 0.5 – 0 = 0.8

(b) *P*(*ABC*) = *P*(*A*) − *P*(*AB*) =0.3 (*A* = *AB**ABC*)

(c) *P*(*AB*) = 0

1. 某个小学有三个语言班，一个是西班牙语班，一个是法语班，另一个是德语班。这些语言班对学校里的100个学生开放。其中，有28人参加西班牙语班；有26人参加法语班；有16人参加德语班；有12人既参加西班牙语班也参加法语班；有4人既参加西班牙语班也参加德语班；有6人既参加法语班也参加德语班；另外，有2个三个班都参加。

(a) 随机选一名学生，他(或她)不参加任何班的概率是多少？

(b) 随机选一名学生，他(或她)恰好参加一个班的概率是多少？

(c) 随机选两名学生，其中至少有一人参加语言班的概率是多大？

**解**

(a) 随机选一名学生，以事件*S*表示参加西班牙语班，事件*F*表示参加法语班，事件*D*表示参加德语班。*P*(*SCFCDC*) = 1 – *P*(*S**F**D*) = 1 – (*P*(*S*) + *P*(*F*) + *P*(*D*) − *P*(*SF*) − *P*(*SD*) − *P*(*FD*) + *P*(*SFD*)) = 1 – (0.28 + 0.26 + 0.16 – 0.12 – 0.04 – 0.06 + 0.03) = 0.5。

(b) 先求至少参加两个班的概率*P*(*SF**SD**FD*) = *P*(*SF*) + *P*(*SD*) + *P*(*FD*) – *P*(*SFD*) – *P*(*SFD*) – *P*(*SFD*) + *P*(*SFD*) = *P*(*SF*) + *P*(*SD*) + *P*(*FD*) – 2*P*(*SFD*) = 0.12 + 0.04 + 0.06 − 20.02 = 0.18。

恰好参加一个班的概率为*P*(*S**F**D*) – *P*(*SF**SD**FD*) = 0.5 – 0.18 = 0.32。

该问题也可以用韦恩图来解决。

14

8

10

2

10

2

4

西班牙语

法语

德语

根据上图，恰好参加一个班的学生有14 + 10 + 8 = 32，概率为0.32。

(c) 概据(a)的分析，参加语言班的有50人，不参加语言班有50人。先求随机选的两名学生都不参加语言班的概率为。

两名学生中至少有一人参加语言班的概率为。

1. 对某份杂志的1000名订阅者的调查给出了如下数据：考虑到他们的工作、婚姻和教育状况，有312名专业人员，470名已婚人士，525名大学毕业生，42名大学毕业的专业人员，147名已婚大学毕业生，86名已婚专业人员，25名已婚且大学毕业的专业人员。证明这些数据是不正确的。

**解**

令*M*、*W*和*G*分别表示专业人员、已婚人士和大学毕业生。

*P*(*M**W**G*) = *P*(*M*) + *P*(*W*) + *P*(*G*) − *P*(*MW*) − *P*(*MG*) − *P*(*WG*) + *P*(*MWG*)

= 0.312 + 0.47 + 0.525 – 0.086 – 0.42 – 0.147 + 0.025

= 1.057 > 1

1. 从52张牌里随机取5张，求以下事件的概率：
2. 同花(也即5张牌同一花色)；
3. 一对(5张牌为*a*, *a*, *b*, *c*, *d*形式(点数)，其中*a*, *b*, *c*, *d*各不相同)；
4. 两对(5张牌为*a*, *a*, *b*, *b*, *c*形式(点数)，其中*a*, *b*, *c*各不相同)；
5. 三张同点数(5张牌为*a*, *a*, *a*, *b*, *c*形式(点数)，其中*a*, *b*, *c*各不相同)；
6. 四张同点数(5张牌为*a*, *a*, *a*, *a*, *b*形式(点数)，其中*a*, *b*各不相同)。

解

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

1. 如果8上车随机地放在国际象棋棋盘上，求没有一对能互捉的概率，也即求任何一行或一列至多只有一个车的概率。(国际象棋盘有88 = 64格，棋子放在格内)

**解**

假如8个车没有区别，按照组合的观点来考虑问题。8个车在棋盘上的排列方式有种。如果8个车没有一对能互捉，那么每一行有且只有一个车，每一列也有且只有一个车。先考虑第一行的车，它可以选择8列中的任一列；再考虑第二行的车，它可以选择剩下7列中的任一列；以此类推，最后一行的车只能选择1列。因此，8个车没有一对能互捉的排列方式有87···1 = 8!种。

所以，8个车没有一对能互捉的概率为。

此题也可按排列的观点来考虑。8个车在棋盘上的排列方式有6463···57种。

现在计算8上车没有一对能互捉的排列方式的种数。先考虑第一个车，它可以选择8行中的任一行，可以选择8列中的任一列，即有82种选择；再考第二个车，它可以选择剩下7行中的任一行，可以选择剩下7列中的任一列，即有72种选择；以此类推，最后一个车只能选择1行，只能选择1列，即有12种选择。因此，8个车没有一对能互捉的排列方式有8272···12种。

所以，8个车没有一对能互捉的概率为。这一概率与按照组合观点求得的概率是一样的。

1. 假设某赌徒正在和庄家玩二十一点，对于一副洗好的牌，赌徒和庄家都分不到“黑杰克”的概率是多大？(每人分配到2张牌)

**解**

以组合的观点来考虑问题。

用事件*A*表示赌徒分到“黑杰克”，用事件*B*表示庄家分到“黑杰克”。并且假设先分牌给赌徒，再分牌给庄家。这与先分牌给庄家再分牌给赌徒是一样的。

先计算赌徒和庄家都分到“黑杰克”的概率*P*(*AB*)。先分牌给赌徒时，从4张“A”里面选一张，从“10”、“J”、“Q”、“K”里面(一共16张)选一张，一共有416种分牌方法。然后分牌给庄家，从剩下的3张“A”里面选一张，从“10”、“J”、“Q”、“K”剩下的15张牌里面选一张，一共有315种分牌方法。因此，赌徒和庄家都分到“黑杰克”一共有416315种分牌方法。而将52张牌分给赌徒和庄家每人两张一共有种方法。故。

现在计算赌徒分到“黑杰克”的概率*P*(*A*)。赌徒先分牌，从4张“A”里面选一张，从“10”、“J”、“Q”、“K”里面(一共16张)选一张，一共有416种分牌方法。而先从52张牌中挑选2张给赌徒一共有种方法。故。

现在计算庄家分到“黑杰克”的概率*P*(*B*)。显然，庄家分到“黑杰克”的概率和赌徒是一样的。故。也可用组合分析得到这一结果，这里省略。

那么，赌徒和庄家都分不到“黑杰克”的概率P(*ACBC*) = 1 – *P*(*A**B*) = 1 – (*P*(*A*) + *P*(*B*) – *P*(*AB*)) = 0.9052。

1. 同时掷两枚骰子，直到骰子点数之和为5或者7出现，求和为5先出现的概率？

**解**

掷两枚骰子一次，有66 = 36种结果。其中，和为5的有4种结果，即(1, 4)、(4, 1)、(2, 3)、(3, 2)；和为7的有6种结果，即(1, 6)、(6, 1)、(2, 5)、(5, 2)、(3, 4)、(4, 3)；其他26种结果的和既不为5也不为7。

用事件*Ei*表示第*i*次掷骰子出现和为5。掷*i*次骰子，一共有36*i*个结果。其中，前*i*−1次的和为必须既不为5也不为7，这样的结果有26*i*−1；第*i*次的和为5，这样的结果有4种。所以，第*i*次掷骰子出现和为5的结果有26*i*−1·4种，于是

和为5先出现的概率为。

1. 一个坛子里有5个红球、6个蓝球和8个绿球。如果随机取3个球，问以下事件的概率：
2. 三个球同一种颜色；(b) 三个球不同的颜色。

假设取球后，记下其颜色，然后再放回坛内[这就是所谓的有放回抽样(Sampling with replacement)]，重新计算以上事件的概率。

**解**

如果不放回取样，从坛子里取3个球一共有种方法。

(a) 如果三个球同一种颜色，那么要么是红色，要么是蓝色，要么是绿色。如果三个球都是红色，一共有种取球方法。如果三个球都是蓝色，一共有种取球方法。如果三个球都是绿色，一共有种取球方法。故三个球同一种颜色的概率为。

(b) 如果三个球不同的颜色，那么一共有568种方法。故三个球不同颜色的概率为。

如果放回抽样，从坛子里取3个球一共有193种方法。

(a) 如果三个球都是红色，一共有53种取球方法。如果三个球都是蓝色，一共有63种取球方法。如果三个球都是绿色，一共有83种取球方法。故三个球同一种颜色的概率为。

(b) 如果三个球不同的颜色，那么取红球、蓝球和绿球的顺序一共有3!种，并且取红球有5种方法，取蓝球有6种方法，取绿球有8种方法。故取三个不同颜色的球一共有3!568种方法。故三个球不同颜色的概率为。

这里需要说明一下，本题中，不放回取样采用的上组合的分析方法，而放回抽样采用的排列的分析方法。

如果要把一个问题当做组合问题，必须要保证每种组合等可能的。不放回取样满足这一条件。而放回抽样不满足这一条件。例如，取球组合为“R1R1R1”(红球1，红球1，红球1)的概率为1/193；而取球组合“R1R2R3” (红球1，红球2，红球3)包含6种顺序(R1R2R3、R1R3R2、R2R1R3、R2R3R1、R3R1R2、R3R2R1)，故概率为6/193。

放回抽样问题可以类比于掷多颗骰子的问题，同样只能当做排列问题。

而组合问题一般也可以用排列的方法求解。

1. 一个坛子装有12个红球，16个蓝球，18个绿球。从中随机地取出7个球。求出下列事件的概率。
2. 抽出3个红球，2个蓝球，2个绿球；
3. 其中至少2个红球；
4. 抽出的球的颜色全相同；
5. 抽出的球中恰有3个红球或者恰有3个蓝球。

**解**

从坛子中随机地取出7个球一共有种方法。

(a) 先抽3个红球，有种方法；再抽2个蓝球，有种方法；最后抽2个绿球，有种方法。故抽出3个红球、2个蓝球、2个绿球的概率为。

(b) “至少2个红球”的对立事件是“没有红球或1个红球”。没有红球的抽取方法有种，1个红球的抽取方法有种。故至少2个红球的概率为

(c) 如果抽出的球的颜色全相同，那么要么全是红球，要么全是蓝球，要么全是绿球。全是红球的抽取方法有种，全是蓝球的抽取方法有种，全是绿球的抽取方法有种。故抽出的球的颜色全相同的概率为。

(d) 用事件*A*表示抽出3个红球，事件*B*表示抽出3个蓝球。

先计算抽出3个红球的概率*P*(*A*)。先抽出3个红球，有种方法；再抽出其他4个非红色球，有种方法。。

再计算抽出3个蓝球的概率*P*(*B*)。先抽出3个蓝球，有种方法；再抽出其他4个非蓝色球，有种方法。。

还需要计算*P*(*AB*)，因为事件*A*和*B*不是互斥的，存在同时抽出3个红球和3个蓝球的情况。先抽出3个红球，有种方法；再抽出3个蓝球，有种方法；再抽出1个绿球，有种方法。。

故抽出的球中恰有3个红球或者恰有3个蓝球的概率为

。

1. 城镇里有4人修电视机，现在有4台坏电视机，问正好有*i* (*i* = 1, 2, 3, 4)人被要求参与修理的概率？其中做了什么样的假设？

**解**

需要假设每台电视机都以相同的概率送给4人维修。每台电视机都可以选择给4人中的1人修理，故一共有44种选择。显然，这44种选择是等概率的。

如果只有1人参与修理，那么需要在4人中任选一个，然后每台电视机都给这个人修理，一共有种选择。故。

如果有2人参与修理，那么需要在4人中任选2个，一共有种选择；然后将4台电视机分配给这2人修理，一共有种分法。故2人参与修理一共有种选择。故。

如果有3人参与修理，那么需要在4人中任选3个，一共有种选择；然后将4台电视机分配给这3人修理，一共有种分法。故3人参与修理一共有种选择。故。

如果只有4人参与修理，那么每人只能修一台电视机，一共有4!种选择。故。

1. (a) 包含A和B在内的*N*个人随机地排成一排，问A和B紧挨着的概率是多大？

(b) 如果是随机地排成一圈，这个概率是多大？

**解**

(a) *N*个人随机地排成一排一共有*N*!种排法。如果A和B必须紧挨在一起，那么可以将A和B看做一个人，与其他*N*−2个人排列，一共有(*N*−1)!种排法；而A和B两人一共有2!种排法。所以A和B紧挨在一起的排法有(*N*−1)!·2!种。

故*N*个人随机地排成一排，A和B紧挨着的概率为。

(b) 现在考虑*N*个人随机地排成一圈。考察一个圆圈中*N*个人的顺序，我们考察的不是每个人在圆圈中的绝对位置，而是*N*个人之间的相对位置。例如，1, 2, 3, … , *N*与2, 3, 4, … , *N*, 1其实是同样的顺序。为了方便，以某个固定的人做为参照点，这里就以第1个人为参照点，考察其他人与第1个人的相对位置。并且方向确定为顺时针或逆时针皆可，这里就以顺时针方向为准。

如果以第1个人为第1个位置，那么顺时针方向第2个位置有*N*−1种选择，第3个位置有*N*−2种选择，以此类推，直至第N个位置只有1种选择。所以，*N*个人随机地排成一圈一共有(*N*−1)!种排法。

如果A和B必须紧挨在一起，那么可以将A和B看做一个人，与其他*N*−2个人排列，一共有(*N*−2)!种排法；而A和B两人一共有2!种排法。所以A和B紧挨在一起的排法有(*N*−2)!·2!种。

故*N*个人随机地排成一圈，A和B紧挨着的概率为。

1. 如果4对夫妇坐成一排，试求没有夫妇坐在一起的概率？

**解**

用事件*Ai*表示第*i*对夫妇坐在一起。我们要求的是没有夫妇坐在一起的概率，等于。而。











故没有夫妇坐在一起的概率为。

1. 计算桥牌比赛中有一家至少缺一套花色的概率。此答案并不是，为什么？

**解**

用事件*Ai*表示这个人缺第*i*套花色。我们要求的是这个人至少缺一套花色的概率，即。而。









故这个人至少缺一套花色的概率为



1. 一手牌13张，求以下事件的概率：(a) 有同花色的“A”和“K”；(b) 有同点数的四张。

**解**

(a) 用事件*Ei*表示有第*i*种花色的“A”和“K”。我们要求的是有(至少一种)同花色的“A”和“K”的概率，即。而。









故有同花色的“A”和“K”的概率为



(b) 用事件*Fi*表示有相同的4张点数*i*。我们要求的是有(至少一种)同点数的四张的概率，即。而。







而如果多于3种同点数的4张是不可能出现的。所以



1. 有两人玩以下游戏：A从下图所示的三个轮盘中选择一个，然后B在剩下的两个中选择一个。接着两人分别转动各自选中的轮盘，轮盘最后所停的位置下方区域里的数字大者获胜。假定每个轮盘停在三个区域是等可能的。如果是你，你会选择是A还是B？并解释原因。

9

5

1

*a*

3

8

4

*b*

7

6

2

*c*

**解**

(1) 如果两人选择的轮盘为*a*和*b*。那么轮盘*a*和*b*赢的概率分别为





所以轮盘*a*和*b*比，轮盘*a*赢的概率较大。

(2) 如果两人选择的轮盘为*a*和*c*。那么轮盘*a*和*c*赢的概率分别为





所以轮盘*a*和*c*比，轮盘*c*赢的概率较大。

(3) 如果两人选择的轮盘为*b*和*c*。那么轮盘*b*和*c*赢的概率分别为





所以轮盘*b*和*c*比，轮盘*b*赢的概率较大。

综上所述，无论A选择哪个轮盘，B都可以在剩下的2个轮盘中选择一个，使得B赢的概率较大。故应当先择是B。

**理 论 习 题**

1. 对任一系列事件*E*1, *E*2, … 定义一系列两两不相交事件*F*1, *F*2, … (如*i* ≠ *j*则*FiFj* = )，使得对任何*n* ≥ 1，有



**解**



1. 设*E*, *F*, *G*为三个事件，写出如下事件的表达式：

(a) 仅仅*E*发生； (b) *E*和*G*都发生，但*F*不发生； (c) 至少有一个事件发生；

(d) 至少有两个事件发生； (c) 三个事件都发生； (f) 一个事件都不发生；

(g) 最多一个事件发生； (h) 最多两个事件发生； (i) 正好两个事件发生；

(j) 最多三个事件发生。

**解**

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 
11. 化简下列表达式：

(a) ；(b) ；(c) 。

**解**

(a) 

(b) 

(c) 

1. 给定集合*S*，如果存在一列互斥非空子集*S*1, *S*2, … , *Sk* (*k* > 0)，满足，那么称{*S*1, *S*2, … , *Sk*}为*S*的一个分割(partition)。令*Tn*表示集合{1, 2, … , *n*}的不同分割的总数，因此*T*1 = 1(表示仅仅一个分割*S*1 = {1})，*T*2 = 2(表示两个分割：{{1, 2}}和{{1}, {2}})。

(a) 证明：*T*3 = 5，*T*4 = 15

(b) 证明：



**解**

(a)

1) 如果*n* = 3，那么集合{1, 2, 3}有以下几种分割：

① 1个3元素子集（包含种情况）：{{1, 2, 3}}；

② 1个单元素子集，1个2元素子集（包含种情况）：{{1}, {2, 3}}、{{2}, {1, 3}}、{{3}, {1, 2}}；

③ 3个单元素子集：（包含种情况，这里除以3!是因为3个单元素子集的不同排列顺序是没有区别的）：{{1}, {2}, {3}}。

所以*T*3 = 1 + 3 + 1 = 5。

2) 如果*n* = 4，那么集合{1, 2, 3, 4}有以下几种分割：

① 1个4元素子集（包含种情况）：{{1, 2, 3, 4}}；

② 2个2元素子集（包含种情况，这里除以2!是因为2个2元素子集的不同排列顺序是没有区别的）：{{1, 2}, {3, 4}}、{{1, 3}, {2, 4}}、{{1, 4}, {2, 3}}；

③ 1个单元素子集，1个3元素子集（包含种情况）：{{1}, {2, 3, 4}}、{{2}, {1, 3, 4}}、{{3}, {1, 2, 4}}、{{4}, {1, 2, 3}}；

④ 2个单元素子集，1个2元素子集（包含种情况，这里除以2!是因为2个单元素子集的不同排列顺序是没有区别的）：{{1}, {2}, {3, 4}}、{{1}, {3}, {2, 4}}、{{1}, {4}, {2, 3}}、{{2}, {3}, {1, 4}}、{{2}, {4}, {1, 3}}、{{3}, {4}, {1, 2}}；

⑤ 4个单元素子集（包含种情况，这里除以4!是因为4个单元素子集的不同排列顺序是没有区别的）：{{1}, {2}, {3}, {4}}。

所以*T*4 = 1 + 3 + 4 + 6 + 1 = 15。

(b) 假如*n*+1个元素中有一个特殊元素，剩下还有*n*个元素。特殊元素可以单独成为一个子集，也可以与其他*n*个元素中的任意元素组成子集。

假设特殊元素与其他*n*个元素中的*k*个组成子集，有*k* = 0, 1, 2, … , *n*，这一共有种情况。剩下的*n*−*k*个元素还需要进行分割，有*Tn*−*k*种分法。所以。显然*T*0 = 1，因为当*k* = *n*时，所有*n*+1个元素组成一个子集，只有1种情况。所以



1. 考虑例5m中的匹配问题。令*AN*表示*N*个人都不选自己帽子的方法数，指出



结合边界条件*A*1 = 0，*A*2 = 1可以递推地求出*AN*。最后，没有人拿到自己帽子的概率为*AN*/*N*!。

**解**

1. 令*fn*表示掷一枚硬币*n*次且从不出现连续正面的可能结果数，证明：

*fn* = *fn*−1 + *fn*−2 *n* ≥ 2，其中*f*0 ≡ 1，*f*1 ≡ 2

**解**

如果最后一次抛掷结果为反面，那么前*n*−1次抛掷结果可以是不出现连续正面前提下的任意结果，这样的结果有*fn*−1种。如果最后一次抛掷结果为正面，那么第*n*−1次抛掷结果必须为反面，而前*n*−2次抛掷结果可以是不出现连续正面前提下的任意结果，这样的结果有*fn*−2种。因此*fn* = *fn*−1 + *fn*−2。

1. 一个坛子里有*n*个红球，*m*个蓝球，从中一个一个取球，一直到取了*r*(*r* ≤ *n*)个红球为止。求此时正好取出*k*个球的概率是多少？

**解**

这个问题是取*k*个球，如果考虑*k*个球的排列，一共有种方法。

要求取出的*k*个球中，其中有*r*个红球，并且第*k*个球一定是红球。先从*n*个红球中选中前*r*−1个红球，并从*m*个蓝球中选出*k*−*r*个蓝球，再对这*k*−1个球进行排列，这一共有种方法；然后从剩下的*n*−*r*+1个红球中选出一个作为第*k*个取出的球，这一共有*n*−*r*+1种方法。所以，取出*k*个球，其中有*r*个红球，并且第*k*个球一定是红球，这样的方法一共有种，所以概率为



注意：可能会有人这样考虑问题。从*n*+*m*个球中选*k*个一共有种方法。选出的k个球中有*r*个红球，并且第*k*个球一定是红球。因此先选出前*k*−1个球，其中包含*r*−1个红球和*k*−*r*个蓝球，这一共有种方法；然后再从剩下的*n*−*r*+1个红球中选出一个作为第*k*个取出的球，这一共有*n*−*r*+1种方法。所以选出的k个球中有*r*个红球，并且第*k*个球一定是红球，这样的方法一共有种，其概率为。

然而，这样解法有一个问题。从*n*+*m*个球中选*k*个一共有种方法，这是一个纯组合问题。而在计算选出的*k*个球中有*r*个红球，并且第*k*个球一定是红球的方法时，选前*k*−1个球是一个组合问题，而再选一个红球作为第*k*个球，这个球与前*k*−1个球形成一个排列关系，因此不是一个纯组合问题。

所以这个问题必须当做排列问题来解决。由于组合问题也可以及用排列的方式来求解，所以如果一个问题不确定是纯组合问题，那么最好用排列方式来求解。

## 第3章 条件概率和独立性

1. 坛子里有12个球，其中8个白球。从中有放回(无放回)抽取4个，求已知抽取的球中正好有3个白球的条件下，第一个球和第三个球是白球的条件概率(有放回和无放回情形下分别计算)。

**解**

用事件*F*表示抽取的4个球中正好有3个白球，事件*E*表示正好有3个白球并且第一个球和第三个球是白球。

(a) 有放回情形

由于需要考虑第一个球和第三个球的颜色，所以这不是一个纯组合问题，这里需要用排列的方式求解问题。

先求事件*F*的概率。从12个球中无放回地取4个球，每取一个球都有12种选择，故取4个球一共有124种选择。如果4个球中有3个白球，那么每取一个白球都有8种选择，不考虑顺序的情况下取3个白球一共有83/3!种选择；再取一个其他颜色的球一共有4种选择；另外取出的4个球一共有4!种排列。故取4个球，并且其中有3个白球，一共有(4·83·4!/3!)种选择。故*P*(*F*) = (4·83·4!/3!)/124。

再求事件*EF*的概率。从12个球中无放回地取4个球，每取一个球都有12种选择，故取4个球一共有124种选择。如果4个球中有3个白球，那么每取一个白球都有8种选择，不考虑顺序的情况下取3个白球一共有83/3!种选择；再取一个其他颜色的球一共有4种选择；另外取出的第一个球和第三个球必须是白球，第一个球有3种选择，第二个球有2种选择，剩下的2个球一2!种排列，故取出的4个球一共有3·2·2!种排列。故取4个球，其中有3个白球，并且第一个球和第三个球是白球，一共有(4·83·3·2·2!/3!)种方法。故*P*(*EF*) = (4·83·3·2·2!/3!)/124。

故*P*(*E*|*F*) = *P*(*EF*)/*P*(*F*) = (4·83·3·2·2!/3!)/(4·83·4!/3!) = 1/2。

(b) 无放回情形

先求事件*F*的概率。从12个球中有放回地取4个球，取第一个球都有12种选择，第二个球有11种选择，第三个球有10种选择，第四个球有9种选择，故取4个球一共有12·11·10·9种选择。如果4个球中有3个白球，那么先取3个白球，不考虑顺序的情况下有种选择；再取一个其他颜色的球一共有4种选择；另外取出的4个球一共有4!种排列。故取4个球，并且其中有3个白球，一共有种方法。故。

再求事件*EF*的概率。从12个球中无放回地取4个球，取第一个球都有12种选择，第二个球有11种选择，第三个球有10种选择，第四个球有9种选择，故取4个球一共有12·11·10·9种选择。如果4个球中有3个白球，那么先取3个白球，不考虑顺序的情况下有种选择；再取一个其他颜色的球一共有4种选择；另外取出的第一个球和第三个球必须是白球，第一个球有3种选择，第二个球有2种选择，剩下的2个球一2!种排列，故取出的4个球一共有3·2·2!种排列。故取4个球，其中有3个白球，并且第一个球和第三个球是白球，一共有种方法。故。

故。

注意，该题显然采用缩减样本空间的方法求解更简单。缩减后的样本空间是取出的4个球的所有排列方式，有4!种。要求第一个球和第3个球是白球，那么第一个球有3种选择，第三个球有2种选择，剩下的2个球有2!种排列，故一共有3·2·2!种排列。所以，这一概率为3·2·2!/4! = 1/2。可以看到，这一概率与有放回取球和无放回取球无关。

1. 假设有3个坛子。坛子A有2个白球和4个红球，坛子B有8个白球和4个红球，坛子C有1个白球和3个红球。如果从每个坛子各取一球，问正好取了两个白球的条件下，从坛子A中取的是白球的条件概率是多大？

**解**

正好取2个白球分为以下三种情况：

1. 从A和B分别取1个白球，从C取1个红球，一共有283 = 48种方法；
2. 从A和C分别取1个白球，从B取1个红球，一共有241 = 8种方法；
3. 从B和C分别取1个白球，从A取1个红球，一共有481 = 32种方法。

所以取3个球中正好有2个白球一共有48 + 8 + 32 = 88种方法。

现在考虑从坛子A中取白球的事件，由于A中一定取一个白球，所以另外一个白球只能出自B或C。另外一个白球出自B，对应于上面的情况1)，一共有48种方法；另外一个白球出自C，对应于上面的情况2)，一共有8种方法。故从坛子A中取白球一共有48 + 8 = 56种方法。

所以正好取了两个白球的条件下，从坛子A中取的是白球的条件概率是56 / 88 = 7/11。

1. 某大学毕业生将在今夏参加前三场精算师考试。她将在6月份参加第一场考试。若通过了，则在7月份参加第二场。而若又通过了，则参加8月份的第三场。如果在某场考试失败了，则不允许参加剩下的考试。她通过首场考试的概率为0.9；如果她通过了首场考试，则通过第二场考试的条件概率为0.8；如果通过了前两场，那么通过第三场的条件概率为0.7。
2. 她通过全部三场考试的概率是多大？
3. 已知她没有通过全部三场考试的条件下，她在第二场考试失败的条件概率是多大？

**解**

(a) 用事件*E*1表示她通过第一场考试，事件*E*2表示她通过第二场考试，事件*E*3表示她通过第三场考试。根据题意，有*P*(*E*1) = 0.9，*P*(*E*2|*E*1) = 0.8，*P*(*E*3|*E*1*E*2) = 0.7。

所以三场考试全部通过的概率为*P*(*E*1*E*2*E*3) = *P*(*E*1)*P*(*E*2|*E*1)*P*(*E*3|*E*1*E*2) = 0.90.80.7 = 0.504。

(b) 没有通过全部三场考试的概率为*P*((*E*1*E*2*E*3)*C*) = 1 − *P*(*E*1*E*2*E*3) = 1 – 0.504 = 0.496。

她在第二场考试失败，说明第一场考试通过但第二场考试失败，并且第三场考试没参加也失败，故。

故。

1. 坛子里最初有5个白球7个黑球。每次取出一个球，记下它的颜色并放回坛子，同进再放入同颜色的2个球。计算如下概率：

(a) 前两个球是黑色，接下来两个球是白色；(b) 抽取的前四个球当中，正好有2个黑球。

**解**

用事件*Wi*表示第*i*次取出的是白球，事件*Bi*表示第*i*次取出的是黑球。

(a) “前两个球是黑色，接下来两个球是白色”表示为*B*1*B*2*W*3*W*4，于是*P*(*B*1*B*2*W*3*W*4) = *P*(*B*1)*P*(*B*2|*B*1)*P*(*W*3|*B*1*B*2)*P*(*W*4|*B*1*B*2*W*3)。

*P*(*B*1)是第一次取出的是黑球的概率，所以*P*(*B*1) = 7/(5+7) = 7/12。

*P*(*B*2|*B*1)是第一次取出的是黑球的条件下，第二次取出的也是黑球的概率。如果第一次取出了黑球，那么会再加入2个黑球，于是黑球个数变为9个。所以*P*(*B*2|*B*1) = 9/(5+9) = 9/14。

*P*(*W*3|*B*1*B*2)是前两次取出的都是黑球的条件下，第三次取出的是白球的概率。如果前两次都取出了黑球，那么会再加入4个黑球，于是黑球个数变为11个。所以*P*(*W*3|*B*1*B*2) = 5/(5+11) = 5/16。

*P*(*W*4|*B*1*B*2*W*3)是前两次取出的都是黑球并且第三次取出的是白球的条件下，第四次取出是白球的概率。如果前两次取出的都是黑球并且第三次取出的是白球，那么会再加入4个黑球和2个白球，于是白球个数变为7个，黑球个数变为11个。所以*P*(*W*4|*B*1*B*2*W*3) = 7/(7+11) =7/18。

所以。

(b) “抽取的前四个球当中，正好有2个黑球”分6种情况：*B*1*B*2*W*3*W*4、*B*1*W*2*B*3*W*4、*B*1*W*2*W*3*B*4、*W* 1*B*2*B*3*W*4、*W* 1*B*2*W*3*B*4、*W* 1*W*2*B*3*B*4。

用问题(a)同样的分析方法可以得到











所以“抽取的前四个球当中，正好有2个黑球”的概率为

。

1. 某城市中，46%的人无党派，30%的人属于自由党，24%的人属于保守党。在最近一次地方选举中，35%的无党派人士、62%的自由党员、58%的保守党参与了选举。随机选择一位选民，假定他参与了地方选举，求以下概率：

(a) 他是无党派人士；(b) 他是自由党党员；

(c) 他是保守党党员；(d) 有多少比例的人参与了地方选举。

**解**

用*N*表示一个人为无党派人士，*L*表示一个人为自由党党员，*C*表示一个人为保守党党员。根据题意有，*P*(*N*) = 0.46，*P*(*L*) = 0.3，*P*(*C*) = 0.24。

用*E*表示一个人参加了选举。根据题意有，*P*(*E*|*N*) = 0.35，*P*(*E*|*L*) = 0.62，*P*(*E*|*C*) = 0.58。

(a)



(b)



(c)



(d)



1. 在一个坛子里放入两个球，假设在放入之前，每个球分别以概率为1/2涂成黑色，以概率为1/2涂成金色。假设两个球的涂色是相互独立的。
2. 假设你已知金色的颜料已经用过(也即至少有一个球涂成了金色)，计算两个球都涂成金色的概率。
3. 假设坛子倒了，一个球掉了出来，是金色，那么其中两个球都是金色的概率是多大？并解释。

**解**

(a) 用*Gi*表示第*i*个球涂成金色。“金色颜料已经用过”等价于“至少一个球涂成了金色”，即事件*G*1*G*2。。

两个球都成金色的概率。

至少一个球为金色，两球都为金色的概率。

(b) 需要假设每个球都等概率地掉出来，即任意一个球掉出来的概率都是1/2。用*F*表示掉出来的球是金色。在此条件下，两个球都是金色的概率为



问题(b)可以简化分析。由于两个球的颜色是独立的，所以知道掉出来的球的颜色并不影响另一个球的颜色，而另一个球的是金色的概率是1/2。

1. 用以下方法来估计100 000人的城镇里的50岁以上的人口数量：“当你在街上散步时，数一数你碰到的超过50岁的人数，再算出它们占你遇到的人的百分数，这样做几天后，用100 000乘以得到的百分数就是所求的估值”，对这个方法作出你的评论。

**解**

假设这个城市中超过50岁的人所占比例为*p*，令*α*1表示一个50岁以下的人在街上的概率，令*α*2表示一个超过50岁的人在街上的概率。

用*G*表示一个人超过50岁，用*S*表示一个人在街上。显然有*P*(*G*) = *p*，*P*(*S*|*GC*) = *α*1，*P*(*S*|*G*) = *α*2。

这个方法中估算得到的百分数实际上是在街上的人中超过50岁的人的比例，即*P*(*G*|*S*)。

而。

所以，这个估算的百分数并不严格等于整个城市中超过50岁的人所占的比例，仅在*α*1 = *α*2时，即50岁以上和50岁以下的人在街上的概率是相等时，这个估算的百分数才是准确的。

1. 一副52张牌扣在桌上，每次翻开一张，直到出现第一张“A”。已知第一张“A”出现在第20张翻牌，问接下来的牌是以下牌的条件概率是多大？

(a) 黑桃“A”；(b) 梅花2。

**解**

(a) 令*F*1表示红桃A在第20张并且是第一张“A”，*F*2表示黑桃A在第20张并且是第一张“A”，*F*3表示梅花A在第20张并且是第一张“A”，*F*4表示方块A在第20张并且是第一张“A”。显然*F*1*F*2*F*3*F*4表示第一张“A”出现在第20张。

令*E*表示第21张是黑桃A。



(b) 令*D*表示第21张是梅花2。



1. 盒子里有15个网球，其中9个球还没用过。随机抽取3个，用它们练球，之后放回盒子。随后，又随机从中再抽取3个，求其中没有一个球被用过的概率是多大？

**解**

用事件*Ei*,*j*表示第一次抽取的3个球中，*i*个被用过，*j*个没被用过。事件*Fi*,*j*表示第二次抽取的3个球中，*i*个被用过，*j*个没被用过。



1. 阿奎娜夫人接受了一次癌症活体组织检查。她不愿意这次检查影响自己周末的情绪。若她告诉医生，只有好消息时才打电话通知结果。这样，当医生不打电话时，她仍然可下结论：她的结果是不好的。学过概率的阿奎娜夫人要求医生，首先掷一枚硬币，若硬币为正面朝上，那么当检验结果是好消息时，医生就及时通知她，当检验结果是坏消息时，就不通知她。若硬币为反面朝上时，医生就不必打电话。这样，即时医生不打电话，并不意味着“一定是坏消息”。记*α*为检查结果为癌症的概率，*β*为医生不打电话的条件下，检验结果为癌症的条件概率。
2. *α*和*β*哪个大？(b) 求出*β*和*α*之间的关系，验证(a)的结论。

**解**

(b) 用事件*C*表示她患癌症，事件*T*表示医生打电话，事件*H*表示医生抛硬币正面朝上。显然有，*P*(*C*) = *α*，*P*(*CC*) = 1−*α*，*P*(*H*) = *P*(*HC*) = 1/2。

*β*为医生不打电话的条件下，检验结果为癌症的条件概率，即*P*(*C*|*TC*)，于是有



下面先求*P*(*TC*|*C*)。



上式中，由于在她既得癌症并且医生又抛出正面的条件下，医生一定不打电话，所以*P*(*TC*|*HC*) = 1。由于在她既得癌症并且医生又抛出反面的条件下，医生一定不打电话，所以*P*(*TC*|*HCC*) = 1。由于她是否得癌症不影响医生抛掷硬币的结果，所以*P*(*H*|*C*) = *P*(*HC*|*C*) = 1/2。

下面再求*P*(*TC*|*CC*)。



所以。即。

(a) 比较*α*和*β*的大小。。

如果*α* = 1，即她得癌症的概率为1，那么*β* = *α* = 1。

如果*α* < 1，那么*β* > *α*。即如果医生不打电话，她患癌的概率会增加。

注意，这里利用了条件概率的全概率公式，即***P*(*E*|*F*) = *P*(*EG*|*F*) + *P*(*EGC*|*F*) = *P*(*E*|*GF*)*P*(*G*|*F*) + *P*(*E*|*GCF*)*P*(*GC*|*F*)**。如果直接求***P*(*E*|*F*)**很困难，可以利用这个公式。该公式证明如下：



1. 商店A、B、C各有50、75、100名员工，其中50%、60%、70%是女性。我们假定每个员工辞职是等可能的，而且不分员工的性别。有个员工辞职了，而且是女性，问她在C店工作的概率是多大？

**解**

用事件*EA*表示员工在A店工作，*EB*表示员工在B店工作，*EC*表示员工在C店工作。显然，*P*(*EA*) = 50/(50+75+100) = 2/9，*P*(*EA*) = 75/(50+75+100) = 1/3，*P*(*EA*) = 100/(50+75+100) = 4/9。

用事件*F*表示员工为女性，用事件*R*表示员工辞职。

我们求的是有个员工辞职并且她是女性，她在C店工作的概率，即*P*(*EC*|*RF*)。



上式中，由于每个员工辞职的概率与在哪个商店和哪种性别无关，所以。

1. 在例3a中，已知投保人第一年内没有发生事故，问第二年发生事故的条件概率是多大？

**解**

用事件*A*1表示投保人第一年发生事故，*A*2表示投保人第二年发生事故。则。







1. 监狱看守通知三个囚犯，在他们中要随机选择一个处决，而把另外两个释放。囚犯A请求看守秘密地告诉他，另外两个囚犯中谁将获得自由，A声言：“因为我已经知道他们两人中至少一个获得自由，所以你泄漏这点消息是无妨的。”但看守拒绝回答这个问题，他对A说：“如果你知道了你的同伙中谁将获释，那么，你自己被处决的概率将由1/3增加到1/2，因为你就成了剩下的两个未决定命运的囚犯中的一个了。”对于看守的上述理由，你怎么评价？

**解**

假设另外两个囚犯为B和C。

用事件*EA*、*EB*、*EC*表示囚犯A、B、C被处决。显然，每个人都有相同的概率被处决，故*P*(*EA*) = *P*(*EB*) = *P*(*EC*) = 1/3。

看守有可能透露B或者C将获释。

(a) 假设看守透露获释者为B，用*FB*表示这一事件。

在看守透露获释者为B的条件下，A被处决的概率。

上式中，是在A被处决的条件下，看守透露获释者为B的条件概率。显然，如果A被处决，B和C都将被释放，看守等概率地透露获释者为B或C。故。

是在A获释的条件下，看守透露B获释的条件概率。如果A获释，那么B或者被释放，或者被处决。显然，如果B被处决，那么看守不可能透露B获释；如果B被释放，那么显然C一定被处决，那么看守只能透露B获释。利用条件概率的全概率公式，可求得

。

故

(b) 如果看守透露获释者为C，同理可得A被处决的条件概也为1/3。

故看守的给出的理由不成立。看守透露另外两人中哪一个被释放都不会影响A被处决的概率。

1. 某年内，投保的男司机索赔的概率为*pm*，而投保的女司机索赔的概率为*pf*，其中*pf* ≠ *pm*。男司机点的比例为*α*，0 < *α* < 1。随机挑选一名司机，令*Ai*表示“该司机第*i*年索赔”这一事件，证明：

*P*(*A*2|*A*1) > *P*(*A*1)

给出上述不等式的直观解释。

**解**

用事件*M*表示司机是男性。显然有，*P*(*M*) = *α*，*P*(*MC*) = 1−*α*。

利用全概率公式，可求得。

利用条件概率的全概率公式，可得到。

上式中，是司机是男性并且第一年索赔的条件下，第二年索赔的概率。由于第一年是否索赔并不影响第二年索赔的概率，所以。同理。

利用贝叶斯公式，可得到，并且。

故。

下面比较*P*(*A*2|*A*1)和*P*(*A*1)的大小。



故*P*(*A*2|*A*1) > *P*(*A*1)。

该不等式可以给出一个直观的解释。从上面的分析，可以得到





上面两式很相似，都是利用全概率公式，对男司机索赔的条件概率*pm*和女司机索赔的条件概率*pf*进行加权，得司机索赔的概率，区别在于加权系数的不同。计算*P*(*A*1)用到的加权系数分别是男司机的先验概率*P*(*M*) = *α*和女司机的先验概率*P*(*MC*) = 1−*α*。计算*P*(*A*2|*A*1)时，由于已经知道了第一年有索赔，在此条件下，司机是男是女的先验概率得到了修正，所以用修正后的男司机的后验概率和女司机的后验概率进行加权。

假设*pf* > *pm*。比较*P*(*M*|*A*1)和*P*(*M*)的大小。。故*P*(*M*|*A*1) > *P*(*M*)。同理，有*P*(*MC*|*A*1) < *P*(*MC*)。

**可以看出，如果第一年司机索赔，会增加索赔可能性较大的一方(这里为男性)的后验概率，会减小索赔可能性较小的一方(这里为女性)的后验概率。而每一年的索赔可能性是独立不变的。**所以，用后验概率进行加权，得到的结果比用先验概率加权得到的结果变大了。

1. 一个高中学生非常焦急地等待大学录取通知书。她估计在她被录取(不被录取)的条件下，在下周各天内收到信件的概率如下表：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 日期 | P(收到信件 | 被录取) | P(收到信件 | 未被录取) |
| 周一 | 0.15 | 0.05 |
| 周二 | 0.20 | 0.10 |
| 周三 | 0.25 | 0.10 |
| 周四 | 0.15 | 0.15 |
| 周五 | 0.10 | 0.20 |

同时，估计被录取的概率为0.6。

1. 星期一收到信件的概率是多大？
2. 星期一没收到信件的条件下，星期二收到信件的概率？
3. 若星期三以前未收到信件，她被录取的概率有多大？
4. 如果她在星期四收到信件，她被录取的条件概率有多大？
5. 本周她没收到信件，问她被录取的条件概率有多大？

**解**

用事件*R*表示她被录取。显然，*P*(*R*) = 0.6，*P*(*RC*) = 1 − 0.6 = 0.4。

用事件*G*1、*G*2、… 、*G*5分别表示周一、周二、… 、周五收到信件。显然，它们之间是互斥的。

(a) 

(b) 

上式中，和分别是星期一没有收到信件的条件下，她被录取和未被录取的后验概率。





而是星期一没有收到信件并且被录取的条件下，星期二收到信件的概率。



上式中，由于*G*1和*G*2互斥，故，故，所以。

注意：*G*1和*G*2虽然互斥，但并非是独立事件。故。

是星期一没有收到信件并且未被录取的条件下，星期二收到信件的概率。



故星期一没收到信件的条件下，星期二收到信件的概率为



此问题直接利用条件概率公式求解更为简单。



(c) 如果星期三以前未收到信件，她被录取的概率为



上式中，由于*G*1、*G*2、*G*3互不相容，所以，并且。

(d) 

(e)



1. 并联系统当其中只要有一个元件有效时就工作正常。考虑一个有*n*个元件的并联系统，假设每个元件独立地有效工作的概率为1/2，计算已知系统工作正常的条件下，元件1工作正常的条件概率。

**解**

用事件*Ei*表示元件*i*工作正常，用事件*F*表示整个系统工作正常。



1. 9
2. 你一直在收集优惠券，假设一共有*m*种优惠券。若每次收集优惠券时，得到第*i*种优惠券的概率为*pi*, *i* = 1, … , *m*。假设你正收集第*n*张优惠券，那么它是一张新类型(以前未曾收集到)的概率有多大？

**解**

用事件*Ej*,*i*表示第*j*次收集到第*i*种优惠券。显然，由于每次收集优惠券是独立试验，故*P*(*Ej*,*i*) = *pi*。

用事件*A*表示第*n*次收集到一张新类型的优惠券。如果第*n*次收集到第*i*种优惠券，显然。



1. (a) 2*p*(1−*p*) (b) 3*p*2(1−*p*) (c) 2/3
2. 我们希望模拟掷一枚均匀硬币的试验，但是我们只有一枚不一定均匀的硬币，其正面朝上的概率为未知的*p*(*p*不一定为1/2)。考虑下面步骤
3. 掷一次硬币；(2) 再掷一次硬币；

(3) 如果上面两次结果一样，回到第1步；(4) 最后一次掷出的结果，作为试验结果。

(a) 证明：这样得到的结果，正面朝上或朝下的概率是一样的。

(b) 如果我们简化了步骤。将硬币掷到出现两次不同时为止，将最后一次掷硬币的结果作为试验结果。这样做可以吗？

**解**

(a) 显然，每两次的抛掷结果是独立的。如果前一轮的两次抛掷结果一样，则再进行一轮两次抛掷，前一轮的结果并不影响下一轮的两次抛掷结果。

用事件*F*表示两次抛掷结果不同，事件*H*表示第二次抛掷结果为正面。则





故，*P*(*H*|*F*) = *P*(*HC*|*F*)。

(b) 用事件*H*表示最后一次抛掷结果为正面。用事件*Hi*表示第*i*次抛掷结果为正面。

下面计算最后一次为正面朝上的概率。



最后一次为反面朝上的概率为



显然，*P*(*H*)和*P*(*HC*)并不一定相等。

这很好理解。因为最后一次的抛掷结果只取决于第一次的结果。如果第一次为正面，那么最后的结果一定是反面；反之亦然。

1. (a) *p*4 (b) (1−*p*)*p*3

(c) HHHH只能出现在最开始的4次投掷中，如果最开始的4次投掷结果是其他情况，则THHH一定出现在HHHH之前，概率为1−*p*4

1. 人们眼睛的颜色由一对基因决定。如果都为蓝色基因，那么他眼睛为蓝色；如果都为棕色基因，那么眼睛为棕色。如果一个是蓝色基因，一个是棕色基因，那么他眼睛为棕色。(我们称棕色基因比蓝色基因占优势。) 一个新生儿独立地从其父母处各得到一个遗传基因，父亲的基因对中的任一基因以相等的概率遗传给他的孩子。母亲的情况也是一样的。假设史密斯及其父母的眼睛都为棕色，但其姐姐眼睛为蓝色。
2. 史密斯拥有蓝色基因的概率多大？

假设史密斯的夫人的眼睛为蓝色。

1. 他们第一个孩子的眼睛为蓝色的概率是多大？
2. 如果他们第一个孩子的眼睛为棕色，它们第二个孩子眼睛为棕色的概率是多大？

**解**

(a) 用*A*表示棕色基因，*a*表示蓝色基因。由于史密斯的父母都为棕色眼睛，但是史密斯的妹妹是蓝色眼睛，所以史密斯的父母的基因对都为*Aa*。

用事件*E*表示史密斯有蓝色基因，事件*F*表示史密斯为棕色眼睛。



下文涉及到的概率，都以史密斯有棕色眼睛为前提，并且史密斯基因对为*Aa*的概率为2/3，基因对为*AA*的概率为1/3。

(b) 用事件*G*表示第一个孩子的眼睛为蓝色。



(c) 用*H*表示第二个孩子眼睛为棕色。利用条件概率的全概率公式，可得



上式中，和分别是在第一个孩子为棕色的条件下，史密斯有和没有蓝色基因的概率。





由于**在史密斯有蓝色基因(事件*E*)的条件下**，*G*和*H*是独立事件，所以，并且。

故。

显然，此问题也可直接应用条件概率公式求解。



注意，此处涉及到判断概率独立性的问题。与直观相悖的是，第一个孩子眼睛是棕色(事件*GC*)与第二个孩子眼睛是棕色(事件*H* )这两个事件并不是独立的。判断两个事件是否独立，应当把它们放到同一个样本空间中，而不是在每个事件自己的样本空间中考虑。

此题中，考虑第一个孩子与第二个孩子的眼睛颜色是否独立，样本空间应该是两个孩子的眼睛颜色的所有组合{(棕, 棕), (棕, 蓝), (蓝, 棕), (蓝, 蓝)}。







