## 第1章 组合分析

**习 题**

1. 约翰、吉姆、杰伊和杰克组成一个有4种乐器的乐队，如果每个人都会演奏这4种乐器，问可以有多少种不同的组合？如果约翰和吉姆会演奏这4种乐器，而杰伊和杰克分别只会弹钢琴和打鼓，那么又有多少种不同的组合？

**解**

如果每个人都会演奏这4种乐器，那么这是一个排列问题，即4种乐器随机排列，然后约翰、吉姆、杰伊和杰克按顺序选择乐器，一共有4! = 24种排列方式。

如果杰伊和杰克分别只会弹钢琴和打鼓，那么杰伊和杰克只有1种乐器组合。而约翰和吉姆则在剩下的2种乐器中选择，二人有2! = 2种乐器组合。根据计数基本法则，4人一共有1·2 = 2种不同的乐器组合。

1. 一个孩子有12块积木，其中6块黑色、4块红色、1块白色和1块蓝色。孩子想把这些积木排成一排，一共有多少种排法？

**解**



1. 8人坐在一排，一共有多少种坐法，如果

(a) 没什么限制；(b) A和B必须坐在一起；(c) 一共4个男人，4个女人，且任何两个男人不能坐在一起，任何两个女人也不能坐在一起；(d) 共有5个男人，且他们必须坐在一起；(e) 有4对夫妇，每对夫妇必须坐在一起。

**解**

(a) 8! = 40320。

(b) A和B两人一共有2!种坐法。将A和B作为一个整体，与其他6人一起一共有7!种坐法。所以一共有2!·7! = 10080种坐法。

(c) 4个男人一共有4!种坐法，4个女人一共有4!种坐法，而男女之间的搭配方式一共有两种：“m,w,m,w,m,w,m,w”和“w,m,w,m,w,m,w,m”。所以一共有2·4!·4! = 1152种坐法。

(d) 5个男人一共有5!种坐法。将5个男人作为一个整体，与其他3个女人一起一共有4!种坐法。所以一共有5!·4! = 2880种坐法。

(e) 每对夫妇分别有2!种坐法。将每对夫妇分别作为一个整体，4对夫妇一共有4!种坐法。所以一共有4!·2!·2!·2!·2! = 384种坐法。

1. 一个舞蹈班有22个学生，10女12男，要挑选5男5女然后配对，一共有多少种配法？

**解**

先选出5个男生，一共有种选法。再先出5个女生，一共有种选法。然后，将选出的5男5女配对，第1个男生挑选女生时有5种选择，第2个男生有4种选择，… ，第5个男生有1个选择，这实际上是一个排列问题，一共有5!种配法。所以一共有··5! = 23950080。

1. 从8女6男里选择3女3男组成委员会，一共有多少种选法？如果
2. 其中有两个男人不愿同时进入委员会；
3. 其中有两个女人不愿同时进入委员会；
4. 其中有一男一女不愿同时进入委员会。

**解**

(a) 从8位女士里面选3位有种选法。从6位男士里面选3位有种选法；还需要除去题目中提到的两个男士同时进入委员会的情况，这种情况有种选法；除去两个男士同时进入委员会的情况后，从6位男士里面选3位有种选法。所以一共有种选法。

(b) 与问题(a)同样的分析方法，可以得到一共有种选法。

(c) 从8位女士里面选3位有种选法，从6位男士里面选3位有种选法，一共有种选法。还需要去除题目中提到的一男一女同时进入委员会的情况，这种情况下，需要从剩下的7位女士中选2位，从剩下的5位男士中选2位，一共有种选法。除去一男一女同时进入委员会的情况后，一共有种选法。

1. 在习题21中，如果要求必须经过标有圆圈的点(如下图)，一共有多少种移动方法？

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | B |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| A |  |  |  |  |  |

**解**

从A到圆圈所在点需向右移动2步，向上移动2步，一共有种走法。再从圆圈所在点到B需向右移动2步，向上移动1步，一共有种走法。所以一共有种走法。

1. 一共10个举重选手参加比赛，其中3名美国选手、4名俄罗斯选手、2名中国选手和1名加拿大选手。如果成绩只记录每个选手的国籍，一共有多少种可能结果？如果美国选手有1名在总成绩前三名，另两名在总成绩的最后三名中，那么一共有多少种可能结果？

**解**

如果成绩只记录每个选手的国籍，相当于10个名次中3个分配给美国选手、4个分配给俄罗斯选手、2上分配给中国选手、1个分配给加拿大选手，一共有种结果。

如果美国选手中有1名在总成绩前三名，这一情况可能有种；另外两名美国选手在总成绩的最后三名中，这一情况可能有种。剩下的7个名次中，4个分配给俄罗斯选手，2分配给中国选手，1个分配给加拿大选手，这有种结果。所以一共有。

1. 有分别来自俄国、法国、英国和美国等10个国家的代表坐在一排，如果法国和英国代表坐在一起，俄国和美国代表不坐在一起，一共有多少种坐法？

**解**

法国和英国代表两人一共有2!种坐法。先不考虑俄国和美国代表，将法国和英国代表看作一个人，与其他6位代表一共有7!种坐法。再考虑俄国和美国代表的坐法，在前面7个人(这里仍将法国和英国代表看作一个人)坐好之后，由于俄美代表不能坐一起，所以他们二人只能分别插在7个人之间的位置，或7个人两端的位置，俄美代表二人一共有8·7种坐法。

所以，一共有2!·7!·8·7 = 564480种坐法。

1. 电梯载着8个人(不包括电梯工)自底层启动，到顶层6楼后，乘客已全部下完。如果电梯工只注意到每层楼出去的人数，那么他能看到多少种离开电梯的方式？如果8个乘客中有5个男人和3个女人，而电梯工又只注意了出去人的性别，问题的答案又是多少？

**解**

用*xi*表示每层楼出去的人数。如果只看每层楼出去的人数，那么有。显然要求*xi* ≥ 0。所以一共有种离开电梯的方式。

如果既要看人数，又要看性别，那么男女人数需要分开考虑。用*mi*表示每层出去的男人数，则，显然要求*mi* ≥ 0。所以如果只看男人，有种离开电梯的方式。用*wi*表示每层出去的男人数，则，显然要求*wi* ≥ 0。所以如果只看女人，有种离开电梯的方式。所以一共有252·56 = 14112种离开电梯的方式。

1. 有2万美元要投资到4个项目上，每份投资必须是1000美元的整数倍，且每个项目如果有投资的话，最少投资额分别为2000、2000、3000和4000美元，一共有多少种可行的投资方法，如果

(a) 每个项目都要投资；(b) 至少投资其中3个项目。

**解**

(a) 假设每个项目的投资额为*xi* (单位：千美元)，则有*x*1 + *x*2 + *x*3 + *x*4 = 20。由于要求*x*1 ≥ 2，*x*2 ≥ 2，*x*3 ≥ 3，*x*4 ≥ 4，所以令*y*1 = *x*1 – 2，*y*2 = *x*2 – 2，*y*3 = *x*3 – 3，*y*4 = *x*4 – 4，于是得到一个新的方程*y*1 + *y*2 + *y*3 + *y*4 = 20 – 11 = 9。显然有*yi* ≥ 0。所以一共有种投资方法。

(b) 至少投资3个项目包含4个项目都投资的情形，这一情形在问题(a)中已分析，有220种投资方法。

现在考虑投资3个项目的情形。首先假设第1个项目不投资，于是有方程*x*2 + *x*3 + *x*4 = 20。令*y*2 = *x*2 – 2，*y*3 = *x*3 – 3，*y*4 = *x*4 – 4，于是得到一个新的方程*y*2 + *y*3 + *y*4 = 20 – 9 = 11。一共有种投资方法。

同理可得，假设第2个项目不投资，共有种投资方法；假设第3个项目不投资，共有种投资方法；假设第4个项目不投资，共有种投资方法。

综上所述，一共有220 + 78 + 78 + 91 + 105 = 572种投资方法。

**理 论 习 题**

1. 计算形如(*x*1, *x*2, … , *xn*)的向量的个数，其中*xi*等于0或者1，且。

**解**

根据题意，*x*1, *x*2, … , *xn*中至少有*k*个为1。这是一个组合问题，如果*x*1, *x*2, … , *xn*中有*k*个为1，那么有种情况；如果*x*1, *x*2, … , *xn*中有*k*+1个为1，那么有种情况；… … ；直至*x*1, *x*2, … , *xn*中有*n*个为1，这时有种情况。所以总的向量个数为。

1. 有多少个这样的向量(*x*1, *x*2, … , *xk*)，其中*xi*是正整数，且满足1 ≤ *xi* ≤ *n*和*x*1 < *x*2 < … < *xk*。

**解**

根据题意，*x*1, *x*2, … , *xk*互不相等，并且1 ≤ *xi* ≤ *n*，所以如果不考虑*x*1, *x*2, … , *xk*之间的大小关系，相当于从1 ~ *n*中任取*k*个数赋值给*x*1, *x*2, … , *xk*，这一共有种取法。由于需要满足*x*1 < *x*2 < … < *xk*，所以取出*k*个数之后，只有一种方法将*k*个数赋值给*x*1, *x*2, … , *xk*，即最小的数赋值给*x*1，次小的数赋值给*x*2，… … ，一直到最大的数赋值给*xk*。

因此一共有个向量。

1. 证明

**解**

用组合分析的方法来证明。

假设有*n*个男人和*m*个女人，现在计算从中选取*r*个人有多少种方法。

显然，可以直接得出有种选人的方法

再换一种方法来分析。一共要选*r*个人，男女分开考虑：可以选0个男人和*r*个女人，也可以选1个男人和*r*−1个女人，… ，一直到选*r*个男人和0个女人。

选0个男人和*r*个女人一共有种方法，选1个男人和*r*−1个女人一共有种方法，… ，选*r*个男人和0个女人一共有种方法。相加后即可得到选取*r*个人的方法的种数。

所以，。

1. 利用理论习题8的结论证明：。

**解**

利用理论习题8的结论，有。因为，所以。

1. 从*n*个人中选取*k*个人组成一个委员会，*k* ≤ *n*，其中一人被任命为主席。
2. 考虑先选出*k*人，然后任命其中一人为主席，说明总共有种可能的方式；
3. 考虑先选出*k*−1人，其中没有主席，然后再在剩下的*n*−*k*+1人中选一人为主席，总共有种可能的方式；
4. 考虑先选出主席，然后再选出其他成员，说明一共有种可能的选择；
5. 总结(a)、(b)和(c)，得出；
6. 利用的阶乘定义证明(d)中的等式。

**解**

(e) 





所以，。

1. 以下是费马组合恒等式：



试从组合的角度，而不用计算的方法，去验证该恒等式。

**解**

假设有数字1, 2, … , *n*，从中任意选取*k*个数字，显然有种方法。

现在这样来分析。由于我们要选取*k*个数字，所以其中的最大值至少为*k*。

当*k*个数字中最大值为*k*时，需要在1 ~ *k*−1中选取*k*−1个数字，一共有种方法。当*k*个数字中最大值为*k*+1时，需要在1 ~ *k*中选取*k*−1个数字，一共有种方法。以此类推，直至当*k*个数字中最大值为*n*时，需要在1 ~ *n*−1中选取*k*−1个数字，一共有种方法。相加后即可得到选取*k*个数字的方法种数。

所以，。

1. 考虑如下组合恒等式：



1. 试从组合的角度解上式，可考虑从*n*人中挑选若干人组成委员会并在其中选定一名主席的可能方式的两种计算方法。
2. 证明以下等式对*n* = 1, 2, 3, 4, 5都成立：



为了从组合角度证明上式，指出上式的两边都等于如下的可能选择方式：考虑有*n*个人，从中选择若干人组成一个委员会，并选定主席和秘书(有可能是同一人)。

1. 证明。

**解**

(a) 考虑从*n*人中选出若干人(人数可以为1, 2, … , *n*)组成委员会，并任命其中一人为主席，计算有多少种方法。

按委员会的人数来考虑问题。如果委员会只有1人，那么一共有种方法；如果委员会有2人，那么一共有种方法；以此类推，直至委员会有n人，此时一共有种方法。相加后即可得到组建委员会一共有种方法。

按照每个人是否加入委员会来考虑问题。委员会至少有一个主席，因此先从*n*个人中选出一人为主席。然后剩下的*n*−1个人中，每个人可以加入委员会，也可以不加入委员会，即每个人有2种选择，故*n*−1个人一共有2*n*−1种选择。所以，组建委员会一共有种方法。

所以，。

(b) 考虑从*n*人中选出若干人(人数可以为1, 2, … , *n*)组成委员会，并选出一个主席和一个秘书，主席和秘书有可能为同一人，计算有多少种方法。

按委员会的人数来考虑问题。假设委员会一共有*k*人。先选出*k*人，一共有种方法；然后从*k*人中选出主席和秘书，主席有*k*个人选，秘书也有*k*个人选，所以一共有*k*2种方法。将*k* = 1, 2, … , *n*的情况相加后即可得到组建委员会一共有种方法。

按照每个人是否加入委员会来考虑问题。如果主席和秘书为同一人，先选出一人作为主席兼秘书，一共有*n*种方法；剩下的*n*−1人中，每个人每个人可以加入委员会，也可以不加入委员会，即每个人有2种选择，故*n*−1个人一共有2*n*−1种选择；所以，组建委员会一共有种方法。如果主席和秘书为不同的人，先出两人分别作为主席和秘书，一共有*n*(*n*−1)种方法；剩下的*n*−2人中，每个人有2种选择(加入或不加入委员会)，故*n*−2个人一共有2*n*−2种选择；所以，组建委员会一共有种方法。将以上两种情况相加后即可得到组建委员会一共有 = 种方法。

所以，。

(c) 略。

1. 从*n*个人里面选*j*个人组成委员会，再从这委员会里选*i*个人组成分会，*i* ≤ *j*。
2. 用两种方法分别计算委员会和分会的可能选择数来导出组合恒等式。其中，第一种方法是先选择*j*个人组成委员会，再从中选择*i*个人组成分会。第二种是先选择*i*个人组成分会，再补充*j*−*i*个人组成委员会。
3. 利用(a)证明组合恒等式：。
4. 利用(a)和理论习题13证明。

**解**

(a) 考虑第一种方法。先选择*j*个人组成委员会，一共有种方法；再从*j*个人中选择*i*个人组成分会，一共有种方法。所以，选出*j*个人的委员会并从中选出*i*个人的分会一共有种方法。

考虑第二种方法。先选择*i*个人组成分会，一共有种方法；再从剩下的*n*−*i*人中补充*j*−*i*个人组成委员会，一共有种方法。所以，选出*j*个人的委员会并从中选出*i*个人的分会一共有种方法。

所以，。

(b) 利用(a)的结论，有

。

(c)



1. 令*Hk*(*n*)为向量(*x*1, *x*2, … , *xk*)的数目，其中*xi*是正整数且满足1 ≤ *xi* ≤ *n*及*x*1 ≤ *x*2 ≤ … ≤ *xk*。
2. 不用任何计算，说明

*H*1(*n*) = *n*



1. 利用上述递推公式计算*H*3(5)。

**解**

(a) 对于一维向量(*x*1)，*x*1可以取1 ~ *n*中的任意数字，故*H*1(*n*) = *n*。

对于*k*维向量(*x*1, *x*2, … , *xk*)，如果取*xk* = *j*，由于*x*1 ≤ *x*2 ≤ … ≤ *xk*，那么*k*−1维向量(*x*1, *x*2, … , *xk*−1)的数目为*Hk*−1 (*j*)，因为*x*1、*x*2、…、*xk*−1的取值范围为1 ~ *j*。将*j* = 1, 2, … , *n*的情况相加，即可得到。

(b) *H*2(1) = *H*1(1) = 1

*H*2(2) = *H*1(1) + *H*1(2) = 1 + 2 = 3

*H*2(3) = *H*1(1) + *H*1(2) + *H*1(3) = 1 + 2 + 3 = 6

*H*2(4) = *H*1(1) + *H*1(2) + *H*1(3) + *H*1(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10

*H*2(5) = *H*1(1) + *H*1(2) + *H*1(3) + *H*1(4) + *H*1(5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15。

*H*3(5) = *H*2(1) + *H*2(2) + *H*2(3) + *H*2(4) + *H*2(5) = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35。

1. 有*n*个选手参加比赛，最后排定成绩，同时允许选手排名相同。那么，就可按排名成绩将选手分成组，成绩最好的第一组，成绩其次的第二组，等等。记*N*(*n*)表示不同结果的可能数，比如*N*(2) = 3，因为在一个只有2名选手参加的比赛中，比赛结果一共有3种：第一个选手获第一，第二个选手获第一，两个选手并列第一。
2. 列出所有*n* = 3时的可能结果。
3. 令*N*(0) = 1，不用任何计算，说明。
4. 证明上述公式等价于。
5. 列出上述递推公式，求出*N*(3)和*N*(4)。

**解**

(a) 假设3个选手为A、B、C。

3个并列第一：ABC

2个并列第一：AB C AC B BC A

1个第一，2个并列第二：A BC B AC C AB

没有并列名次：A B C A C B

B A C B C A

C A B C B A

(b) 假设有*i*位选手并列第一。先从*n*位选手中选出*i*个作为并列第一，有种方法。然后对剩下的*n*−*i*位选手按排名分组，有*N*(*n*−*i*)种方法。所以，在有*i*位选手并列第一的条件下，一共有种方法。

将*i* = 1, 2, … , *n*的情况相加即可得到。

(c) 因为，所以。

(d)









1. 试从组合的角度解释。

**解**

的意思是将*n*个人分成*r*个一组和*n*−*r*个一组。可以先从*n*个人中选出*r*个人组成一组，有种方法；然后再将剩下的*n*−*r*个人分成一组，有种方法。根据计数基本法则，将*n*个人分成*r*个一组和*n*−*r*个一组一共有种方法。

所以，。

1. 证明



**解**

从组合角度来分析。假设有*n*个球，需要分成*r*组，每组包含球的个数为*n*1, *n*2, … , *nr*，一共有种方法。

假如有一个球很特殊，记为A，那么它可以被分在任意一组。如果它被分在第1组，那么再对剩下的*n*−1个球进行分组时，第1组只能被分*n*1−1到个球，其他组的球的个数不变，所以一共有种方法；如果它被分在第2组，同理有种方法；以此类推，直至它被分在第*r*组的情况，有种方法。将以上各种情况相加，即可得到将*n*个球分成*r*组一共有种方法。

所以，。

1. 将*n*个相同的球放到*r*个坛子里，要求第*i*个坛子至少有*mi*个球，*i* = 1, 2, … , *r*，一共有多少种放法？假设。

**解**

假设第*i*个坛子放*xi*个球，显然有*x*1 + *x*2 + ∙∙∙ + *xr* = *n*，并且*xi* ≥ *mi*。令*yi* = *xi* – *mi*，显然有，可以得到一个新的方程，。这个方程有个解，这也就是将*n*个相同的球放到*r*个坛子里的方法数。

1. 求向量(*x*1, *x*2, … , *xn*)的数目，其中*xi*为非负整数且满足。

**解**

求解以下方程的非负整数解的个数。

*x*1 + *x*2 + ∙∙∙ + *xn* = 0 

*x*1 + *x*2 + ∙∙∙ + *xn* = 1 

… …

*x*1 + *x*2 + ∙∙∙ + *xn* = *k* 

将以上结果相加，即可得到满足的条件时，向量(*x*1, *x*2, … , *xn*)的数目为



**自 检 习 题**

1. 字母A, B, C, D, E, F一共有多少种排列方式，如果

(a) A和B必须在一起； (b) A在B之前；

(c) A在B之前，B在C之前； (d) A在B之前，C在D之前；

(e) A和B必须在一起，C和D也必须在一起； (f) E不在最后。

**解**

(a) 先排列A和B顺序，一共有2!种方法。再将A和B看作单独一个人，与其他4个进行排列，一共有5!种方法。所以，如果A和B必须在一起，一共有2!·5! = 240种排列方法。

(b) 如果假设A和B是同一个字母，用X表示，那么一共有6!/2! = 360种排列方法。对于每一种排列，如果以排在前面的X为A，以排在后面的X为B，就可得到A在B之前的所有排列方式，一共有360种。

(c) 如果假设A, B和C是同一个字母，用X表示，那么一共有6!/3! = 120种排列方法。对于每一种排列，如果以排在最前面的X为A，以排在中间的X为B，以排在最后面的X为C，就可得到A在B之前并且B在C之前的所有排列方式，一共有120种。

(d) 如果假设A和B是同一个字母，用X表示，另外假设C和D是同一个字母，用Y表示，那么一共有6!/2!/2! = 180种排列方法。对于每一种排列，如果以排在前面的X为A，以排在后面的X为B，并且以排在前面的Y为C，以排在后面的Y为D，就可得到A在B之前并且C在D之前的所有排列方式，一共有180种。

(e) 先排列A和B顺序，一共有2!种方法。再排列C和D的顺序，一共有2!种方法。再将A和B看作单独一个字母，并且将C和D看作单独一个字母，与其他2个进行排列，一共有4!种方法。所以，如果A和B必须在一起，C和D也必须在一起，一共有2!·2!·4! = 96种排列方法。

(f) 如果E的位置可以随意，那么一共有6!种排列方式。如果E只能排在最后，那么一共有5!种排列方式。所以，如果E不在最后，那么一共有6! − 5! = 600种排列方式。

1. 由数字1, 2, … , 9组成的5位数一共有多少？这5个数字中不容许有数字重复多于2次（例如，41434是不容许的）。

**解**

如果没有重复的数字，那么这样的5位数一共有个。

如果只有一个数字重复2次，那么需要从1 ~ 9中选取4个数字，一共有种选法；然后选取其中一个数字作为重复2次的数字，一共有种选法；再对5个数字(包含重复数字)进行排列，一共有5!/2!种排法。所以如果只有一个数字重复2次，那么这样的5位数一共有个。

如果只有两个数字重复2次，那么需要从1 ~ 9中选取3个数字，一共有种选法；然后选取其中两个数字作为重复2次的数字，一共有种选法；再对5个数字(包含重复数字)进行排列，一共有5!/2!/2!种排法。所以如果有两个数字重复2次，那么这样的5位数一共有个。

显然，5位数不可能有3上及3个以上的数重复2次。综上所述，5位数的个数一共有



1. 从7个男人、8个女人中选取6人组成委员会。如果要求至少3个女人、2个男人，一共有多少种选取方法?

**解**

分两种情况考虑。1) 3女3男，有种方法；2) 4女2男，有有种方法。所以一共有种选取方法。

注意：或许有人会这样考虑问题，先从8个女人中选取3个，再从7个男人中选取2个，剩下的5女5男一共还有10人，最后从这10人中选取1人。这样就一共有种方法。但是这样考虑是不正确的。因为计数法则要求每一个试验是独立，不重合的。这里一共有3个试验：1) 从8个女人中选取3个，2) 从7个男人中选取2个，3) 从剩下的10人中选取1个。显然，试验1)和3)有重合部分，因为试验1)在8个女人中选，试验3)的选择范围的一部分也在这8个女人中。同理，试验2)和试验3)也重合。故采用这种方法来计数是不正确的。

1. 一个艺术品收藏拍卖会一共有15件艺术品，其中4件达利的，5件凡高的，6件毕加索的。一共有5名艺术品收藏家买下了这批艺术品。而某记者只记载了每位收藏家得到的达利、凡高和毕加索作品的数量，问销售记录能有多少种不同的结果？

**解**

用*xi*表示第*i*个收藏者得到的达利的作品，用*yi*表示第*i*个收藏者得到的达利的作品，用*zi*表示第*i*个收藏者得到的达利的作品。于是可以得到3个方程：

*x*1 + *x*2 + *x*3 + *x*4 + *x*5 = 4

*y*1 + *y*2 + *y*3 + *y*4 + *y*5 = 5

*z*1 + *z*2 + *z*3 + *z*4 + *z*5 = 6

第一个方程有个非负整数解，第二个方程有个非负整数解，第三个方程有个非负整数解。

所以，销售记录总共能有种不同的结果。

1. *n*个学生参加保险精算师的考试，公榜结果只列出那些通过考试的学生名单，并且按照他们的分数由高到底进行排序，例如，公榜结果为“Brown，Cho”意味着只有Brown和Cho通过了考试，而且Brown分数比Cho高。如果没有相同的分数，那么公布的考试结果一共有多少种情况？

**解**

如果有*i*个学生通过考试，那么一共有种结果。将*i* = 0, 1, … , *n*的情况相加即可得到总共的考试结果，为。