1、排列：由 1，2，…n 组成的一个有序数组叫做 n 级排列，比如 123、132、213、231、321、312 就叫做一个三级排列

自然排列：1,2,3…,n，N(1,2,3,…,n)=0，也叫标准排列

逆序：大数排在小数前面的排列，比如 4123

逆序数：逆序的总数，比如 4123 的逆序数 N(4213)=3+1+0+0=4，即 4 后面有 3 个比他小的数，2 后面有 1 个，1，3 后面没有

此外，逆序数为偶数称为偶排序，逆序数为奇数称为奇排序，偶排序经过一次变换(比如 4213 变成了 4123)会变成奇排序，反之亦然。

2、行列式是定义的一种新运算，可以通过两种方法展开行列式，分别是①按行(列)展开和②利用代数余子式展开

①按行(列)展开

行标按标准排列，列标取排列的所有可能，从不同行不同列取出 n 个元素相乘，符号由列标排列的奇偶性决定

比如：行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

行标按标准排列，依次取 1，2，3，4 即第一行、第二行…第四行

列标取排列的所有可能，即 1234，1243，1243，…共 4！种

即为$a_{11} * a_{22} * a_{33} * a_{44} - a_{11} * a_{22} * a_{34} * a_{43} + \cdots$第一项为＋号是因为 N(1234)=0，第二个为一号是因为 N(1243)=1，以此类推

1. 上（下）三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

2. 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

在行列式中，空白的地方就是表示为 0

②行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和

余子式：n阶行列式中，把元素a_{ij}所在第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}

代数余子式：$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

3、行列式的性质(对行适用的性质，对列同样适用)

性质 1： 行列式与它的转置行列式相等，即$D^T = D$

性质 2： 互换行列式的两行，行列式变号

性质 3： 行列式中有两行元素相等，则行列式为 0

性质 4： 行列式中的某一行元素都乘以同一个数 k，等于用此数乘以该行列式

推论 1：行列式中的某一行中所有元素的公因子都可以提到行列式记号的外面

推论 2：$\begin{vmatrix} k*1 & k*2 & k*3 \\ k*2 & k*8 & k*5 \\ k*6 & k*5 & k*9 \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

性质 5： 行列式中如果有两行对应成比例，则此行列式为 0

性质 6：如果行列式中的某一行元素都是两数之和，那么该行列式可以拆成两个行列式的和，如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7+8 & 2+5 & 9+1 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 9 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 1 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

在这个性质中一定要注意，是将能够拆分的行拆开，其余行不变

性质 7：把行列式的某一行的各元素乘以同一个数然后加到同一行对应的元素上去，行列式的值不变

4、异乘变零：某行元素与另一行元素的代数余子式相乘为 0

证明过程如下：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$令这个矩阵的第三行和第一行元素的代数余子式相乘。

$$4*A_{11}+5*A_{12}+6*A_{13}+7*A_{14}$$

如果行列式变为$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$，那么按第一行展开可得

$$4*A_{11}+5*A_{12}+6*A_{13}+7*A_{14}$$

因为第一行和第三行相同，所以这个行列式的值为 0，即

$$4*A_{11}+5*A_{12}+6*A_{13}+7*A_{14}=0$$

所以结论得证，核心在于如果某行元素与另一行元素的代数余子式相乘，那么零一行元素是什么与其代数余子式是啥没关系，因为再求代数余子式的时候都给消了

拉普拉斯定理：取定k行，由k行元素(任意取k列)组成的所有k阶子式与代数余子式乘积之和等于行列式的值。

k阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$，取定前两行，任取两列，如下：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$，

两行两列交叉处的值组成一个2阶子式，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$，因为列是可以任意取的，所以$k$阶子式不是唯一的。代数余子式为$(-1)^{(1+2+1+2)}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$，

$1+2+1+2$分别表示第几行第几列相加

当矩阵中的某一行中有较多的0时，可以使用拉普拉斯定理来求解行列式，如$\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\1&1&1&1&1\\3&4&5&6&7\\8&9&2&4&5\end{vmatrix}$，如果使用拉普拉斯定理，取定前两行，在任取列式，当任取到第 3，4，5 列时，其 2 阶子式为 0，因此只需看取到第 1，2 列时的情况，$\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\1&1&1&1&1\\3&4&5&6&7\\8&9&2&4&5\end{vmatrix}$，因此，该行列式的值可以写成$\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}*(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix}1&1&1\\5&6&7\\2&4&5\end{vmatrix}$，因为两个行列式不同阶，所以不能直接使用行列式的乘法定理来计算，可分别算出行列式的值在做乘法。

5、行列式的计算

例 1：已知行列式$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\3&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，求$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$

$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-(-1)^{(4+1)}M_{41}+(-1)^{(4+2)}M_{42}-(-1)^{(4+1)}M_{43}+(-1)^{(4+1)}M_{44}$因此，$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-1*A_{41}+1*A_{42}-1*A_{43}+1*A_{44}$，所以，行列式可以变为$\begin{vmatrix}3&0&4&0\\3&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$，求出该行列式的值即为$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$的值

例 2：加边法，如$\begin{vmatrix}1+a_1&1&\dots&1\\1&1+a_2&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots\\1&\dots&1+a_{n-1}&1\\1&1&\dots&1+a_n\end{vmatrix}$，对这个行列式我们采取加一行加一列的做法：$\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\0&1+a_1&1&\dots&1\\0&1&1+a_2&\dots&1\\0&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&1&\dots&1+a_{n-1}&1\\0&1&1&\dots&1+a_n\end{vmatrix}$，从第二行到第 n 行均进行这样的处理，第 1 行乘以（-1）加到第i行上$(i>2)$，得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

（注，这种的叫做“三叉戟”模式，这种模式的解法都是一样的）

做如下操作，从第二列开始，分别都乘以$\frac{1}{a_i}$加到第一列上，则行列式变成了

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$ 这是一个上三角行列式，结果为主对角线上的元素相乘。

例 3 范德蒙德行列式，如下，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n} x_i - x_j$$

证明：每一行都加上它上一行乘以$(-x_1)$，得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & {x_2}^2-x_2x_1 & {x_3}^2-x_3x_1 & \cdots & {x_n}^2-x_nx_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & {x_2}^{n-1}-{x_2}^{n-2}x_1 & {x_3}^{n-1}-{x_3}^{n-2}x_1 & \cdots & {x_n}^{n-1}-{x_n}^{n-2}x_1 \end{vmatrix}$$

按列展开，可得

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ {x_2}^2-x_2x_1 & {x_3}^2-x_3x_1 & \cdots & {x_n}^2-x_nx_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {x_2}^{n-1}-{x_2}^{n-2}x_1 & {x_3}^{n-1}-{x_3}^{n-2}x_1 & \cdots & {x_n}^{n-1}-{x_n}^{n-2}x_1 \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {x_2}^{n-2} & {x_3}^{n-2} & \cdots & {x_n}^{n-2} \end{vmatrix}$$

变成了$n-1$阶行列式，根据数学归纳法可得范德蒙行列式。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 6 & 9 & -5 \\ 4 & 1 & 9 & 36 & 81 & 25 \\ 8 & -1 & 27 & 216 & 729 & 125 \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

当$j=1$时，$(x_2-x_1),(x_3-x_1),(x_4-x_1),(x_5-x_1),(x_6-x_1)$
当$j=2$时，$(x_3-x_2),(x_4-x_2),(x_5-x_2),(x_6-x_2)$
当$j=3$时，$(x_4-x_3),(x_5-x_3),(x_6-x_3)$
当$j=4$时，$(x_5-x_4),(x_6-x_4)$
当$j=5$时，(x_6-x_5)
所以，此行列式的值为上述多项式的乘积

例 4 对称行列式$\begin{vmatrix}1 & 2 & 6 & 7\\2 & 3 & 4 & 8\\6 & 4 & 0 & 9\\7 & 8 & 9 & 6\end{vmatrix}$

主对角线上的元素无要求
上下对应相等

反对称行列式$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\-1 & 0 & 4 & 5\\-2 & -4 & 0 & 6\\-3 & -5 & -6 & 0\end{vmatrix}$

主对角线上全是 0
上下位置对应成相反数

奇数阶的反对称行列式为 0

6、克莱姆法则(cramer)

D是多元线性方程组的系数行列式，D_i是用方程组解替换D中的第i列的值形成的新矩阵，则方程组的解为$x_i=\frac{D_i}{D}$

对于克莱姆法则要注意，在使用前应该先检验是否满足两个条件：方程的个数=未知数的个数，系数行列式$D\neq 0$

特别的，当方程组右侧数均为 0 时(齐次线性方程组)且满足方程的个数=未知数的个数，系数行列式$D\neq 0$这两个条件，则方程组的解均为；零解，而当$D=0$时，方程组的解为非零解

7、矩阵 Matrix

行列式中行数等于列数，而矩阵的行数可以不等于列数

$\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$都叫零矩阵，可以记为 0

矩阵相等的前提是矩阵必须是同型矩阵，因此两个 0 矩阵不一定相等

单位矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，主对角线上全是 1，其余位置都是 0 的一个方

阵

行列式是一个数，而矩阵是一个数表。

8、矩阵的运算（乘法运算口诀：中间相等、取两边）

矩阵的加减法都是在矩阵同型的前提下

在矩阵中，如果所有元素均有公因子k，则将k提到矩阵外即可，而在行列式中，如果所有元素均有公因子k，则需要将k^n提到行列式外

矩阵的乘法：矩阵相乘的前提是第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数，结果矩阵的形状为行数是第一个矩阵的行数，列数是第二个矩阵的列数

（1）矩阵的乘法不符合交换律$AB \neq BA$

（2）矩阵相乘等于 0，即$AB = 0$推不出$A = 0$ 或$B = 0$

（3）$AB = AC, A \neq 0$推不出来$B = C$

下述两条性质都是在满足矩阵相乘条件的基础上：

任何矩阵与单位矩阵相乘都是其本身，如$AE = A, EB = B$

任何矩阵与零矩阵相乘都是零矩阵

（1）矩阵相乘满足结合律：$(AB)C = A(BC)$

（2）矩阵相乘满足分配律：$(A + B)C = AC + BC, C(A + B) = CA + CB$　矩阵的相乘一定要注意两个矩阵的先后顺序

（3）矩阵相乘满足$k(AB) = (kA)B = A(kB)$

9、矩阵的幂运算

$(AB)^k \neq A^k B^k$，例如$(AB)^2 = ABAB \neq A^2 B^2$,同理，$(A + B)^2 = (A + B)A + (A + B)B = A^2 + BA + AB + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$，但是$(A +$

$E)^2 = A^2 + 2AE + B^2$.

例如$A = (1,2,3), B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,求$(BA)^{10}$

解：$AB = (1,2,3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6, BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$(BA)^{10} = BABA \dots BA = B(AB)^9 A = 6^9 BA$$

10、矩阵的转置，记为A^T或A'

转置的性质：（1）$(A^T)^T = A$

（2）$(A + B)^T = A^T + B^T$

（3）$(kA)^T = kA^T$

（4）$(AB)^T = B^T A^T$

11、特殊矩阵（方阵）

数量矩阵：主对角线上的元素均为 a，(a 可以为 0)其余地方全是 0，特别的，当 a=0 时，数量矩阵为零矩阵，当 a=1 时，数量矩阵为单位矩阵。因此，零矩阵和单位矩阵都是特殊的数量矩阵

$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & a_4 \end{pmatrix}$叫做对角矩阵，可以记作$diag(a_1, a_2, a_3, a_4)$

对称矩阵的主对角线无要求，其他位置的元素满足关系$a_{ij} = a_{ji}$，一提到对称矩阵就应该想到$A^T = A$，例如$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

反对称矩阵的主对角线为 0，其他位置的元素满足关系$a_{ij} = -a_{ji}$，一提到反对称矩阵就应该想到$A^T = -A$，例如$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

假设矩阵A, B对称同阶，则存在下列运算规则：

$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T=A\pm B$, $(kA)^T=kA^T=kA$，$(AB)^T=B^TA^T=BA$，一定要注意两个矩阵求转置要倒换顺序

12、方针 A 的行列式

$$|A^T|=|A|$$

$$|\boldsymbol{kA}|=\boldsymbol{k^n}|\boldsymbol{A}|$$

$$|AB|=|A||B|$$

13、只有方阵才有伴随矩阵，而且任何方阵都有伴随矩阵，具体的，求方阵中所有元素的代数余子式，把**按行求的代数余子式按列放**构成的矩阵叫做伴随矩阵，伴随矩阵具有如下性质：

性质 1：$AA^*=A^*A=|A|E$

证　　明　　：　　$AA^*=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A|&0&\dots&0\\0&|A|&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&|A|\end{pmatrix}=|A|E$，用到了行列式的性质，某一行乘以这一行的代数余子式为行列式的值，某一行乘以其他行的代数余子式的值为 0，列同理。

性质 2：$|AA^*|=|A||A^*|=|\,|A|E\,|=|A|^n$，即在$|A|\neq 0$的情况下，$|A^*|=|A|^{n-1}$，之后，会讲到即使$|A|=0$，这个式子也成立。

14、逆矩阵(任何情况下矩阵都不能放在分母上)必须是方阵

A 是一个 n 阶方阵，若存在一个 n 阶方阵 B，使得 AB=BA=E，则说 A、B 互逆，记作$A^{-1}=B$（A 的逆矩阵是 B），注意：未必所有的方阵都可逆，比如零矩阵，一旦矩阵可逆，则这个矩阵的逆矩阵一定是唯一的（设矩阵 A 可逆，假设其逆矩阵为B_1,B_2，则有$AB_1=B_1A=E,AB_2=B_2A=E$，$B_1=B_1E=B_1AB_2=EB_2=B_2$）。

矩阵 A 可逆的充要条件是$|A| \neq 0$

若方阵 A 的行列式不等于 0（$|A| \neq 0$），则称这个矩阵为非奇异矩阵或非退化矩阵或满秩矩阵或可逆矩阵

求解逆矩阵的两种方法：（1）伴随矩阵法　（2）初等变换法

（1）伴随矩阵法，根据伴随矩阵的性质 $AA^* = A^*A = |A|E$可知，$A\frac{A^*}{|A|} = E$，即$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$，但是这种方法比较复杂，实际应用中很少

（2）初等变换法，例$A + B = AB$，求证$A - E$是可逆的。

$$A + B = AB \to AB - B - A = 0 \to AB - B - A + E = E$$
$$= (A - E)B - (A - E) = E \to (A - E)(B - E) = E$$

所以$(A - E)^{-1} = B - E$

矩阵方程：已知$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$AX = A + 2X$，求 X

$AX = A + 2X \to (A - 2E)X = A \to$ **因为$|A| \neq 0$，所以A可逆**，因此可以左乘$(\mathrm{A} - 2\mathrm{E})^{-1}$，得到$X = (A - 2E)^{-1}A$

逆矩阵的性质

① 如果矩阵 A 是可逆的，则A^{-1}也是可逆的，而且$(A^{-1})^{-1} = A$

② 如果矩阵 A、B 均是可逆的，则 AB 是可逆的，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

③ 如果矩阵 A 可逆，那么A^T也是可逆的，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

④ 如果矩阵 A 可逆，且$k \neq 0$，则有$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

⑤ 如果矩阵 A 可逆，那么$|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$,$|A|$是一个数

⑥ 如果矩阵 A 可逆，那么A^*也是可逆的，且$(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$(由伴随矩阵的性质得出来的$AA^* = A^*A = |A|E$)，也有$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

15、分块矩阵，有两种常见的分块：按行分、按列分

比如一个矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, 按行分的话可以写成$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$, 按列分的话可以写成$(B_1, B_2, B_3)$

矩阵的标准型：左上角是个单位矩阵，其余子块为 0

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \cdots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \cdots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

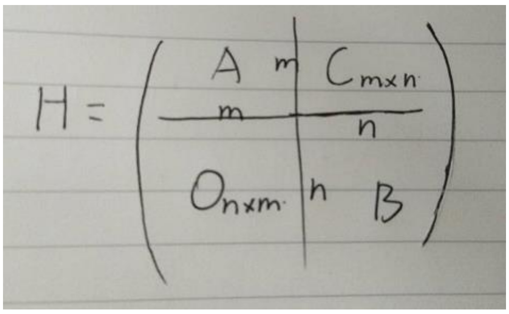
分块矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}$$

例如有两个矩阵，$A_{m\times n}$，$B_{n\times s}$，将 B 分块为$(B_1, B_2, \dots B_t)$
则$A\times B = A(B_1, B_2, \dots B_t) = (AB_1, AB_2, \dots AB_t)$，正确的理解是按照分块矩阵的乘法求出来的，显然 B 是按列分的，这个结果是 A 乘以每列块(因为不一定只有 1 列，$s \neq t$)的结果

分块矩阵求转置要分成两个步骤：（1）把矩阵中的子块看成元素，求转置（2）对每个子块求转置

设矩阵$H = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$,A 为 m 阶矩阵，B 为 n 阶矩阵，且两者都可逆,求 H 的逆矩阵



$|H| = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B| \neq 0$，所以 H 是可逆的，对这个式子的正确理解是按照拉普拉斯定理(Laplace)得出来的

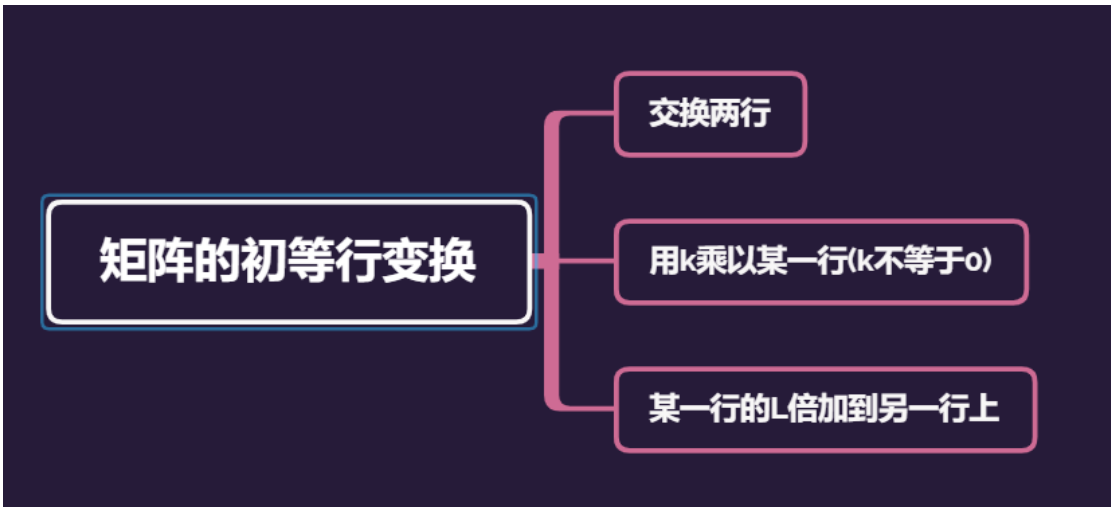
假设$H^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，根据可逆的定义可得$HH^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 + Cx_3 & Ax_2 + Cx_4 \\ Bx_3 & Bx_4 \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

所以，有$\begin{cases} Ax_1 + Cx_3 = E \\ Ax_2 + Cx_4 = 0 \\ Bx_3 = 0 \\ Bx_4 = E \end{cases}$,可得$\begin{cases} x_1 = A^{-1} \\ x_2 = -A^{-1}CB^{-1} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = B^{-1} \end{cases}$

在解方程组时要注意，$Bx_3 = 0$不能直接削去，因为矩阵的乘法不满足交换律、削去等，因此，这个方程应该这么求：$B^{-1}Bx_3 = B^{-1}0$，所以$x_3 = 0$

16、**矩阵的初等变换**(首先要注意的是矩阵经过初等变换不能用等号，要用→)



如果矩阵不是方阵的话，那么矩阵的初等变换和行列式的性质是没有任何联系的，只有当矩阵是方阵的时候，那么矩阵的行列式的值就符合行列式的性质

性质 1：任何一个矩阵经过初等变换(行或列)都能转换成标准形

性质 2：矩阵 A 经过初等变换后得到矩阵 B，则称矩阵 A 等价于矩阵 B，记作$A \cong B$，对于这个性质，存在反身性($A \cong A$)、对称性($A \cong B \leftrightarrow B \cong A$)、传递性($A \cong B, B \cong C \rightarrow A \cong C$)

通过性质 1 和性质 2 可以知道，任何一个矩阵 A 都等价于标准形

初等方阵(初等矩阵)：对单位矩阵 E 做一次初等变换，得到的一个矩阵

① 交换两行(列)：$E(i,j)$表示交换单位矩阵的i，j行或列

② 用$k(k \neq 0)$乘以某行(列)：$E(i(k))$表示用$k(k \neq 0)$乘以第i行(列)

③某一行(列)的k倍加到另一行上：$E(i,j(k))$表示第j行(列)的k倍加到第i行(列)上

初等方阵和初等变换的区别：初等变换是一个动作，而初等方阵是一个结果，一个对单位矩阵 E 执行了一次初等变换后的结果

初等方阵均可逆，其可逆矩阵也是初等方阵,同时，初等方阵的转置矩阵也是初等方阵

$$E^{-1}(i,j) = E(i,j)$$

$$E^{-1}(i(k)) = E(i(\frac{1}{k}))$$

$$E^{-1}(i,j(l)) = E(i,j(-l))$$

17、通过初等变换法求逆矩阵

对矩阵 A 实施一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的初等矩阵；对 A 实施一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的初等矩阵(**左乘↔行变换，右乘↔列变换**)

定义：对于任意一个矩阵 A，存在初等矩阵$P_1, P_2, \dots P_s, Q_1, Q_2, \dots Q_t$，使得$P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t$为标准形

在这里，引出其他两个矩阵 A 可逆的充要条件：（1）A 的标准形为 E（2）A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

在这里，引出一个推论：若矩阵 A,B 等价，则存在可逆矩阵 P,Q，使得$PAQ=B$

假设一个矩阵 A 是可逆矩阵，则其逆矩阵A^{-1}也是可逆矩阵，根据矩阵可逆的一个充要条件：若一个矩阵可逆，则该矩阵可以表示成一些初等矩阵的乘积，可以得到$A^{-1}=Q_1Q_2\cdots Q_t$，这个式子可以写成

$$Q_1Q_2\cdots Q_tA=E$$

$$Q_1Q_2\cdots Q_tE=A^{-1}$$

从第一个式子来看，对矩阵 A 进行一系列的初等行变换后 A 变成了单位矩阵 E，从第二个式子来看，对单位矩阵 E 进行了相同的初等行变化变成了A^{-1}，也就是说 A 经过初等行变化直到变为单位矩阵时，单位矩阵也变成了A^{-1}(注意，是只做行变换)

例题：求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&1\\-3&2&-5\end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}$

解：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&5&1&1\\0&0&1&\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&5&1&1\\0&0&1&\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{array}\right)，所以A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\5&1&1\\\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

一般情况下，如题目中为说矩阵可逆，则应该先判断一下矩阵是否可逆(行列式是否为 0)，但是初等变换法要是右边不能换成单位阵，也可以说明该矩阵没有逆矩阵

18、矩阵的秩

k 阶子式：给定一个矩阵，任取 k 行 k 列，行列交叉处的元素组成的行列式，叫做 k 阶子式

矩阵的秩:非零子式的最高阶数,零矩阵的秩为 0,秩的英文是 rank,因此矩阵 A 的秩记为 r(A)

矩阵的秩反应的是矩阵的结构，秩越高，结构越复杂

$$0 \leq rank(A|_{m\times n}) \leq \min\{m,n\}$$

若$rank(A)=m$，称为行满秩

若$rank(A)=n$，称为列满秩

既满足行满秩，又满足列满秩，称为矩阵满秩，这个满秩矩阵也一定是方阵

而如果$rank(A)<\min\{m,n\}$，则称为降秩

定理 1：如果方阵 A 是满秩的，那么矩阵 A 可逆

证明：如果是个$n\times n$的方阵而且满秩，即$r(n)=n$，也就是这个矩阵的 n 阶子式不为 0，也就是这个矩阵的行列式不为 0，所以这个矩阵可逆

定理 2：如果 $r(A)=r \leftrightarrow$ 有一个r阶子式不为 0，所有的$r+1$阶子式全为 0，比如一个 6 阶方阵的秩为 3，那么这个矩阵的 4，5，6 阶子式均为 0，这个可以这么理解：r(A)=3，则 4 阶子式均为 0，因为 5 阶子式(行列式)的值=第五行×他的代数余子式(均为 4 阶子式)，所以 5 阶子式为 0，同理 6 阶子式

阶梯形矩阵需要满足的条件：

（1）若有零行，则零行在非零行的下面

（2）对于从上到下的每一行，从左边开始首非零元左边零的个数随行数的增加而严格增加

行简化阶梯型，首先要满足是阶梯形矩阵，然后还需满足以下条件：

（1）非零行的首非零元是 1

（2）首非零元所在列的其余元素是 1

阶梯形矩阵的秩=非零行的行数

初等变换（行、列）不改变矩阵的秩，因此求解某个矩阵的秩可以利用上面公式，先将矩阵通过初等变换（多为初等行变换）变成阶梯形矩阵，然后通过非零行的个数=矩阵的秩，得出矩阵的秩

19、向量(vector)

行向量$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$　列向量$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$,通常用字母$\alpha, \beta, \gamma$来表示向量，

向量相等的前提条件是同维

在向量中，$k\alpha = 0 \leftrightarrow$能够推出$k = 0$或$\alpha = 0$，但是，

在矩阵中，$AB = 0$不能够推出$A = 0$ 或$B = 0$

20、向量间的线性关系

线性组合：有一组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$向量，若存在$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$，则称 β 是 α 向量组的线性组合，$k_1, k_2, \ldots k_n$这组系数可以全取 0，若全取零，则说明这个向量 β 是零向量

（1）零向量可以被任意一组向量表示，系数均取 0

（2）向量组中的任一向量可由向量组表示，如有一组向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，其中的任一向量可以表示成$\alpha_i = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 +$

$\cdots + 1\alpha_i + 0\alpha_{i+1} + \cdots + 0\alpha_n$

（3）任意一个向量都可以由 $\alpha_1(1,0,\dots,0),\alpha_2(0,1,0,\dots,0),\dots,\alpha_n(0,0,\dots 1)$表示

向量组等价：两个向量组可以相互线性表示，记作$\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\} \cong \{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\}$

矩阵等价：一个矩阵经过初等变换之后得到的另一个矩阵，两个矩阵等价

21、线性相关与线性无关

$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$是 n 个 m 维向量，若存在**一组**不全为 0 的常数$k_1,k_2,\dots,k_n$，使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$，则称$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$这些向量线性相关。同理，若不存在这样一组不全为 0 的常数，即想要$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$这个等式成立，$k_1,k_2,\dots,k_n$这些系数全为 0，则说明这些向量线性无关。

（1）向量组中两向量成比例，则这个向量组线性相关

（2）含零向量的任意一个向量组必线性相关

（3）特别的，一个零向量必线性相关

（4）任意一个非零向量必线性无关

（5）部分向量组线性相关，则整体组也线性相关，但是整体线性相关并不能证明部分向量组也线性相关。

（6）整体组线性无关，则部分祖也线性无关

（7）线性无关的向量组，接长之后的向量组也线性无关

（8）线性相关的向量组，截短之后的向量组也线性相关

（9）在向量个数等于向量维数的条件下，如果有这些向量组成的行列式(按行、按列构成都可以)不等于 0，那么这个向量组是线性相关的。

如果向量组是线性相关的，那么对应的线性方程存在一组非零解。

如果向量组是线性无关的，那么对应的线性方程只有零解。

如果一个向量是另一个向量的线性组合时，那么对应的方程有解

如果一个向量不是另一个向量的线性组合时，那么对应的方程无解

要注意线性组合和线性相关的区别

22、

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$线性相关的充要条件是：至少存在一个向量可由其余的向量表示

（2）若$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s,\beta$线性相关，则β可由$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$唯一表示

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s,\beta$线性相关，则存在一组不全为 0 的系数$k_1,k_2,\dots,k_s,k_{s+1}$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots,k_s\alpha_s+k_{s+1}\beta=0$，设$k_{s+1}=0$，则有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，与$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$线性无关矛盾，因此$k_{s+1}\neq 0$，因此β可由$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$表示，下面继续证明唯一性：

假设β可由两组不同的系数分别表示出来，即

$$\beta=m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+\cdots+m_s\alpha_s$$
$$\beta=n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\cdots+n_s\alpha_s$$

两式相减，可得$(m_1-n_1)\alpha_1+(m_2-n_2)\alpha_2+\cdots+(m_s-n_s)\alpha_s=0$，因为$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$线性无关，所以$m_1-n_1,\dots,m_s-n_s$均为 0，所以β可由$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$唯一表示

（3）替换定理：若$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$线性无关，这个$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$向量组可以由$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t$ 表示，那么$s\leq t$；反之，如果$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$向量组可以由$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t$ 表示，但是$s>t$，那么可以说明$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$线性相关

（4）若有m个n维向量，且$m > n$，那么这个向量组中的向量是线性相关。比如 5 个 3 维向量一定线性相关

（5）两个等价的线性无关组含向量的个数相同

23、极大线性无关组(简称极大无关组)：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$的部分组$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_t (t \leq s)$满足以下条件：

（1）$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_t$之间线性无关

（2）$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$中的每个向量都能够用$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_t$表示出来

那么便称$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_t$为极大线性无关组，这个定义也分为两层含义：

（1）极大：在$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$这个向量组中，能够找出的线性无关向量组中的向量个数最多是 t 个

（2）线性无关：$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_t$是线性无关的

极大线性无关组的性质：对于一个向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$他的极大线性无关组不是唯一的，而且任意两个极大线性无关组含有的向量个数是一样的，且任意两个极大线性无关组是等价的(传递性)。

24、向量组的秩：向量组的极大无关组包含的向量个数，记作$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s)$

$0 \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) \leq s$，其实这个公式可以进一步细化，s 代表向量组中向量的个数，根据 22 中的(4)可以知道比如 5 个 3 维向量一定线性相关，所以$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) \leq \min\{$向量个数，向量维度$\}$

若$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$线性无关，那么$r = s$

若$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$线性相关，那么$r < s$

25、矩阵的行秩=矩阵的列秩$= r(A)$

行秩：把一个矩阵所有的行，分成多个行向量，组成行向量组，这个向量组的秩称作行秩，列秩同理

初等行变换不改变矩阵列向量组的线性关系

例题：给定一组列向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-4\\8\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\-6\\0\\-6\end{pmatrix}$，求这组向量组的极大线性无关组，并用极大线性无关组把其他向量表示出来

解：（1）不管是行向量还是列向量，都按列组成矩阵

$$\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\-2&-4&4&-6\\2&8&-2&0\\-1&0&3&-6\end{pmatrix}$$

（2）对矩阵只做初等行变换，转化成**行最简阶梯型矩阵**

$$\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\-2&-4&4&-6\\2&8&-2&0\\-1&0&3&-6\end{pmatrix}\to.\begin{pmatrix}1&0&-3&6\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

（3）找出首非零元所在的列作极大线性无关组

即第一列和第二列组成极大线性无关组，β_1,β_2

（4）其余向量的表示中的系数直接从行简化阶梯形矩阵中直接读出$\begin{cases}\beta_3=-3\beta_1+\frac{1}{2}\beta_2\\ \beta_4=6\beta_1-\frac{3}{2}\beta_2\end{cases}$，因为初等换变换不会改变矩阵列向量的线

性关系，所以$\begin{cases}\alpha_3=-3\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2\\ \alpha_4=6\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2\end{cases}$，极大线性无关组是$(\alpha_1,\alpha_2)$

26、线性方程组

对于一个线性方程组，比如$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=1\\ x_1-2x_2+3x_3=2\\ 2x_1+5x_2+8x_3=7\end{cases}$，那么这个方程组的系数矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&-2&3\\2&5&8\end{pmatrix}$，增广矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&-3&1\\1&-2&3&2\\2&5&8&7\end{pmatrix}$，通常情况下，系数矩阵记作$A$，增广矩阵记作$\bar{A}$

对于任意一个方程组有如下结论：

（1）若$r(A)=r(\bar{A})$，那么方程组有解

① 当$r(A)=r(\bar{A})=n$时，方程组有唯一解

② 当$r(A)=r(\bar{A})<n$时，方程组有无穷多解

（2）若$r(A)\neq r(\bar{A})$时，方程组无解

在解决这类问题的时候，通常由以下三个步骤：

（1）写出增广矩阵$\bar{A}$

（2）只做初等行变换，将$\bar{A}$转化成阶梯形矩阵（矩阵的秩等于非零行的行数）

（3）判断$r(A),r(\bar{A})$是否相等，根据是否相等来判断解的形式，

（4）化成行简化阶梯型，按照行简化阶梯形矩阵写出各个解的表达式

27、线性齐次方程组（等号右边都是 0）

齐次方程一定有解(因为$r(A)$一定$=r(\bar{A})$)，至少有零解(都取 0)，所以在齐次方程中，重点讨论的是除了零解之外的非零解，但是零解也不要落下。

因为在齐次方程中，系数矩阵的秩一定等于增广矩阵的秩，所以在齐次方程中不用时刻都写$r(A)=r(\bar{A})=/<\cdots$

（1）当$r(A)=n$时，有唯一零解　　　互为充要条件

（2）当$r(A)<n$时，有非零解　　　互为充要条件

（3）当方程的个数<未知数的个数时，有非零解，因为如果设方程个数为m，未知数个数为n，那么$m<n$，$r(A)\le min\{m,n\}=m<n$，所以此时一定有非零解。另一种解释方法：假设方程组是$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0\\x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$，此时可以写成$x_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=0$

上述式子可以化简成$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$，根据向量组线性相关的结论：若向量的个数大于向量的维度，那么组成的向量组一定线性相关，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$一定线性相关，所以$x_1,x_2,x_3$一定不全为 0

（4）方程个数=未知数个数，有非零解，充要条件是$|A|=0$，因为$n+1$阶子式等于 0，此时$r(A)<n,A$不可逆。可以使用克莱默法则计算。

（5）方程个数=未知数个数，只有零解，充要条件是$|A|\neq0$，此时$r(A)=n,A$可逆。

28、线性方程组解的结构

基础解系中解的个数(自由变量的个数)=$n-r(A)$，$r(A)$等于方程左边变量的个数

（1）齐次线性方程组($Ax=0$)解的结构

例题：如果一个线性方程的系数矩阵化为**行简化阶梯型**后变成$\begin{pmatrix}1&0&-\frac{9}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&\frac{3}{4}&-\frac{7}{4}&\frac{5}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，那么便有$\begin{cases}x_1=\frac{9}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4-\frac{1}{4}x_5\\x_2=-\frac{3}{4}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{5}{4}x_5\end{cases}$，$x_3,x_4,x_5$分别为自由变量，假设$\eta_1,\eta_2,\eta_3$是该方程组的基础解系，令$(x_3,x_4,x_5)^T$分别取

$(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T$，带入原方程组可得$\eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\eta_1$，$\eta_2$，$\eta_3$是基础解系且线性无关，所以该方程组的通解为$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3$

例题 2：给定一个系数矩阵的行简化阶梯型为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，通过这个行简化阶梯型矩阵我们可以得到如下方程组$\begin{cases} x_1 = -x_6 \\ x_3 = 0 \end{cases}$，自由变量为$x_2, x_4, x_5, x_6$，因此，令$(x_2, x_4, x_5, x_6)^T$分别取$(1,0,0,0)^T$，$(0,1,0,0)^T$，$(0,0,1,0)^T$，$(0,0,0,1)^T$，带入原方程组可得，$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，所以原其次方程的通解为$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3 + c_4\eta_4$【注：一定要注意不能落下自由变量和自由变量的取值顺序】

一个结论：对于两个矩阵$A_{m\times n}, B_{n\times s}$，如果$AB = 0$，那么$r(A) + r(B) \le n$

（2）非齐次线性方程组$(Ax = b)$解的结构

对于非齐次线性方程组的解需要先**熟记**以下性质：

① 如果α_1, α_2是非齐次线性方程组$(Ax = b)$的解，那么$\alpha_1 - \alpha_2$便是齐次线性方程组$(Ax = 0)$的解

② 如果α_0是非齐次线性方程组的一个特解，η是齐次线性方程组的通解，那么$\alpha_0 + \eta$是非齐次线性方程组的通解

例题：对于一个四元非齐次线性方程组，$r(A) = 3$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是方程组的三个解，其中$\alpha_1 = (2,3,4,5)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (1,2,3,4)^T$，求这个方程组的通解。

解：由题意可知，α_1是方程组的一个特解。

因为题目中给出的是四元非齐次线性方程组，且$r(A) = 3$，所以由该四元非齐次

线性方程组导出的齐次线性方程组基础解系中解的个数为$n-r(A)=4-3=1$，即只有一个自由变量。
由性质①可知，$\alpha_1-\alpha_2$是导出的齐次方程的一个解；
同理$\alpha_1-\alpha_3$也是导出的齐次方程的另一个解；
所以，两个解相加，就是导出的齐次方程组的一个解，即$2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)$是齐次方程的一个解，记作$\eta=(3,4,5,6)^T$，所以非齐次方程的解为$\alpha_1+c\eta=\cdots$

求解非齐次线性方程组通解的步骤

（1）写出$\bar{A}$，只做初等行变换，**化成行简化阶梯型**

（2）非零行的首非零元的“1”留在左边，其余的挪到右边，写出非齐次的同解方程组，指出谁是自由变量(不在左边的就是自由变量，注意不要把系数为 0 的自由变量漏掉)

（3）令自由变量均取 0，得到$Ax=b$的一个特解

（4）令同解方程组右边常数项均取 0，得到$Ax=0$的同解方程组，求出该齐次方程组的一个基础解系(通解)

（5）非齐次线性方程组的通解(基础解系)=特解+齐次线性方程组的通解

29、矩阵的特征值与特征向量

A 是一个 n 阶方阵，对于一个数λ，存在**非零列向量**α，使得$A\alpha=\lambda\alpha$，那么就叫λ是一个特征值，α是对应于λ的特征向量，在计算中，特征向量是这么求的:$(\lambda E-A)x=0$，求解齐次线性方程组，通解就是特征向量。

特征值λ可以为 0，特征向量不能为零向量；

一个特征向量只能对应一个特征值

一个特征值可以对应多个特征向量

例题： 一个矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$，求该矩阵的特征值与特征向量

解：假设该矩阵的特征值和特征向量分别为λ,α,根据$A\alpha=\lambda\alpha$可得，

$(\lambda E-A)\alpha=0$，因为α为非零列向量，所以$|\lambda E-A|=0$

则有$\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=0$，得$(\lambda-2)(\lambda^2+5\lambda-14)=0$，解得

$\lambda_1=-7,\lambda_2=\lambda_3=2$

(1) 当$\lambda_1=-7$时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}$，只做初等行变换，变成行简化阶梯型矩阵，原式$=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\0&-9&-9\end{pmatrix}\to$
$\begin{pmatrix}0&-18&-18\\2&-5&-4\\0&-9&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-18&-18\\2&-5&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1\\2&-5&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\to$
$\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1/2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1/2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，由行简化阶梯型矩阵可以得出同解方程组为$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$，$x_3$为自由变量，所以取$x_3=1$，解得$\eta=(-\frac{1}{2},-1,1)^T$，所以说，此条件下通解为$c_1\eta$,$\color{red}{\boldsymbol{c_1\neq0}}$**，**此时的$(-\frac{1}{2},-1,1)^T$称为特征向量

(2) 当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}$，只做初等行变换，变成行简化阶梯型矩阵，原式$=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，由行简化阶梯型矩阵可以得出同解方程组为$x_1=-2x_2+2x_3$，$x_2,x_3$为自由变量，所以分别取$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，解得$\eta_1=(-2,1,0)^T$，$\eta_2=(2,0,1)^T$所以说，此条件下通解为$c_1\eta_1+c_2\eta_2$，$\color{red}{\boldsymbol{c_1,c_2}}$**不同时为0，**此时的$(-2,1,0)^T$，$(2,0,1)^T$称为特征向量

【注：在线性方程求通解时，最后的通解中的常数可以为 0，但是在这里不可以为 0】

30、特征值和特征向量的性质

特例：对于一个 0 矩阵，比如$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，他的特征值是 0，特征向量为$(1,0,0)^T,(0,1,0)^T,(0,0,1)^T$

性质 1：矩阵 A 和其转置矩阵A^T具有相同的特征值，但是特征向量不一定相同。

性质 2： 设$\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n$为 n 阶方阵 A 的全部特征值，则

（1）$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

（2）$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

$tr(A)$叫做矩阵的迹

由上述性质可以，n 阶方阵 A 可逆的充要条件是 A 的所有特征值都不为 0

性质 3： 互不相同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n$对应的特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n$线性无关。可用数学归纳法证明，证明过程如下：

① 当 m=1 时，$\alpha_1\neq 0$（单个的非零向量一定线性无关）
② 假设上述结论对 s-1 成立，即$\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_{s-1}$线性无关
③ 对 s，假设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$,【*】两边同时左乘 A
即$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=0$，根据定义$A\alpha=\lambda\alpha$可得下式，如下$k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2+\cdots+k_s\lambda_s\alpha_s=0$，对*式两边同时乘以$\lambda_s$,得如下式$k_1\lambda_s\alpha_1+k_2\lambda_s\alpha_2+\cdots+k_s\lambda_s\alpha_s=0$，和上面式子相减得：$k_1(\lambda_1-\lambda_s)\alpha_1+k_2(\lambda_2-\lambda_s)\alpha_2+\cdots+k_s(\lambda_{s-1}-\lambda_s)\alpha_{s-1}=0$，因为特征值互不相同，所以$\lambda_i-\lambda_s$不等于 0，也就是$k_1,k_2,\dots,k_{s-1}$要等于 0，带入③假设的式子中，可得$k_s\alpha_s=0$，因为$\alpha_s$是非零列向量，所以$k_s$等于 0，也就是$k_1,k_2,\dots,k_s$全为 0，即不存在不全为 0 得一组数使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$成立，也就是说$\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n$线性无关。

性质 4：设$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2(\lambda-5)^2$,若：

ξ_1,ξ_2,ξ_3是特征值 2 的三个线性无关的特征向量

ξ_4,ξ_5是特征值 3 的两个线性无关的特征向量

ξ_6,ξ_7是特征值 5 的三个线性无关的特征向量

那么$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5,\xi_6,\xi_7$线性无关

性质 5：k 重特征根对应的线性无关的特征向量的个数小于等于 k

比如一个 3 重特征根对应的特征向量个数不会超过 3 个

其他性质：λ是A的特征值，X 是对应的特征向量，那么有

（1）$k\lambda$是kA的特征值

（2）$A^mX=\lambda^mX$

（3）$A^{-1}X=\frac{1}{\lambda}X$

（4）$A^*X=\frac{|A|}{\lambda}X$, 因为$A^*$的特征值是$\frac{|A|}{\lambda}$, 因此使用$A^*$代替 A 可得$(A^*)^*$的特征值$\frac{|A^*|}{\lambda}=\frac{|A|^{n-1}}{\lambda}$，同理可得$((A^*)^*)^*$的特征是为$\frac{|A|^{(n-1)^2}}{\lambda}$

（5）$(aA^2+bA+cE)X=(a\lambda^2+b\lambda+c)X$

例题：比如 A 是四阶方阵，$|3E+A|=0$，那么可以把式子化成$|-(-3E-A)|=(-1)^4|-3E-A|=0$，所以 A 的特征值为-3

又比如$|3E+2A|=0$，那么可以把式子化成$\left|-2\left(-\frac{3}{2}E-A\right)\right|=0\rightarrow(-2)^4\left|-\frac{3}{2}E-A\right|=0$，所以 A 的特征值是$-\frac{3}{2}$

例题 2：矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&a&3\\6&-6&b\end{pmatrix}$,特征值分别为$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3$，求题中的未知数

$$2+\lambda_3=1+a+b$$
$$-8\times\lambda_3=|A|$$

然后再根据$|\lambda E-A|=0$任意带入一个λ即可再得一个方程

31、矩阵之间的三大关系：等价、相似、合同

矩阵相似的定义：存在两个 n 阶方阵 A,B，若存在一个可逆矩阵 P,如

果有$P^{-1}AP=B$，那么则记作$A\sim B$，相似也具有反身性、对称性和传递性。

性质 1:如果$A\sim B$,那么 A,B 具有**相同的特征值**,且$|A|=|B|$，$tr(A)=tr(B)$

性质 2: 如果$A\sim B$，那么 A 可逆⟷B 可逆，$A^{-1}\sim B^{-1}$,因为当$A\sim B$时，$|A|=|B|$，所以 A,B 同时可逆或者不可逆

性质 3：如果$A\sim B$，那么$A^m\sim B^m$

n 阶方阵 A 相似于一个对角矩阵的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。在做题过程中，如果矩阵的一个多重根对应的特征向量的个数与重数不相等时，那么这个矩阵不能够相似于对角型。

例题 1：$A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-2&-2&2\\3&6&-1\end{pmatrix}$，矩阵 A 是否相似于对角型，如果相似，那么可逆矩阵$P=?$，对角型矩阵是啥？

解：根据$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&1\\2&\lambda+2&-2\\-3&-6&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&1\\0&\lambda+2&-2\\\lambda-2&-6&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&\lambda+2&-2\\1&-6&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&\lambda+2&-2\\0&-4&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+2&-2\\-4&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-2)^2$，所以特征根有$\lambda_1=-4$，$\lambda_2=\lambda_3=2$(二重根)

当$\lambda_1=-4$时，对于$(\lambda_1E-A)x=0$有，$\begin{pmatrix}-7&-2&1\\2&-2&-2\\-3&-6&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-7&-2&1\\1&-1&-1\\-1&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-9&-6\\1&-1&-1\\0&-3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&3&2\\1&-1&-1\\0&-3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&2/3\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以同解方程组为$\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}x_3\\x_2=-\frac{2}{3}x_3\end{cases}$，另$x_3=3$，则特征向量$\alpha_1=(1,-2,3)^T$

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，对于$(\lambda_2 E-A)x=0$有$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -6 & 3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}\rightarrow$ $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,所以同解方程组为$x_1=-2x_2+x_3$，分别取$\begin{pmatrix}x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，得到

$\alpha_2=(1,0,1)^T$，$\alpha_3=(-2,1,0)^T$

所以使得矩阵 A 能够对角化的逆矩阵$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$，对角矩阵$diag=\begin{pmatrix}-4 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$

【注意，最后的 P 中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的顺序可以随意，但是对角矩阵中的值一定要和前面的顺序对应】

例题 2：对于一个 3 阶方阵 A，其特征值分别为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，他们所对应的特征向量分别为$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_3=(1,3,6)^T$
求矩阵 A，A^T的特征值和特征向量
解：因为特征值均为单根，而且都各自对应一个特征向量，所以矩阵 A 可以相似于对角型矩阵，另$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，根据相似的定义，有$P^{-1}AP=diag$，所以$A=PdiagP^{-1},diag=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix},P^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$,所以 A=$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & -9 & 7\end{pmatrix}$
因为 A 和A^T的特征值是相同的，所以A^T的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$
$P^{-1}AP=diag$ ， $(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^{-1})^T=P^TA^T(P^T)^{-1}=((P^T)^{-1})^{-1}A^T(P^T)^{-1}=diag^T=diag$，所以$(P^T)^{-1}$的列向量就是$A^T$的特征向量，

$$(P^T)^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

所以特征向量分别为$\alpha_1=(3,-3,1)^T,\alpha_2=(-3,5,-2)^T,\alpha_3=(1,-2,1)^T$

例题 3：$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，求$A^{100}$

解：对于矩阵 A，可分别计算得出 A 的特征值与对应的特征向量，分别为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$，对应的特征向量为$\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,1,1)^T,\alpha_3=(1,4,3)^T$，因此矩阵 A 相似于对角矩阵$diag=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}$，所以便有$P^{-1}AP=diag$，$(P^{-1}AP)^{100}=P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP\cdot\ldots\cdot P^{-1}AP=P^{-1}A^{100}P=diag^{100}=$

$\begin{pmatrix} (-1)^{100} & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，所以可以求出$A^{100}$

相似对角型在求高次方的应用十分广泛

32、所有的实对称矩阵都能对角化

向量α的长度(范数、模)记为$||\alpha||$，比如一个向量$\alpha=(1,-1,2)$，那么$||\alpha||=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$，其实是向量$\alpha$和它本身的内积开根号，内积就是高数中的数量积，比如两个向量α,β的内积在线性代数中记作(α,β)，数量积可能是负数

一组不含零向量的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_s$两两正交，那么称这个向量组为正交向量组【两个向量正交(垂直)：内积为 0】

标准正交向量组要满足两个条件：$(\alpha_i,\alpha_i)=||\alpha_i||^2=1$，$(\alpha_i,\alpha_j)=0$，就是标准正交向量组中的每个向量的长度都是 1，且与别的向量均正交

向量内积的性质：

① $|(\alpha,\beta)|\le||\alpha||\cdot||\beta||$，向量$\alpha,\beta$的内积的绝对值小于等于两个向量长度的乘积

② $||\alpha+\beta||\le||\alpha||+||\beta||$，可以构成一个三角形来理解大于号，等好的理解是因为两个向量有可能是同向的

③ 正交向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_s$中的向量$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_s$线性无关

证明：假设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_s$线性相关，即$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，存在一组不全为 0 的$k_1,k_2,\ldots k_s$使得上述等式成立，使左边式子和右边式子对$\alpha_1$做向量积，则有$(\alpha_1,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=(\alpha_1,0)$，任何向量和 0 向量做向量积都是零向量，所以$(\alpha_1,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=0$，也就是$k_1(\alpha_1,\alpha_1)+k_2(\alpha_1,\alpha_2)+\cdots+k_s(\alpha_1,\alpha_s)=0$，因为在正交向量组中，两两正交，所以$k_1(\alpha_1,\alpha_1)=0$，又因为正交向量组中不含零向量，所以$(\alpha_1,\alpha_1)\ne0$，所以$k_1=0$，同理可得其他的$k$均为 0，也就是不存在一组不全为 0 的$k_1,k_2,\ldots k_s$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$成

立

④ 施密特正交化，给定一组线性无关的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_s$，求与之等价的，正交的一组向量$\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_s$

比如，给定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性无关的，求与之等价且正交的$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$

那么，$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\boldsymbol{\alpha_2}-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$

$\beta_4=\alpha_4-\frac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_4,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3$，得到了这些可以在进行单位化，也就是$\eta_1=\frac{1}{||\beta_1||}\times\beta_1,\eta_2=\frac{1}{||\beta_2||}\times\beta_2,\ldots$

这类题一般是给出一组线性无关的向量组，先进行施密特正交化，然后再进行单位化处理。

33、对于方阵 A，如果满足$\boldsymbol{A^TA=E}$，则矩阵 A 是正交矩阵，性质：

① 矩阵 A 正交，则$|A|=1$或-1【转置矩阵的行列式等于矩阵的行列式】

② 矩阵A正交，那么$A^{-1}=A^T$，且A^{-1}和A^T都是正交矩阵【证明：因为$AA^{-1}=A^{-1}A=E$，所以$A^T=A$，$(A^{-1})^TA^{-1}=(A^T)^TA^{-1}=AA^{-1}=E$，所以$A^{-1}$是正交矩阵，同理$A^T$也是正交矩阵】

③ 矩阵 A,B 都是正交矩阵，那么 AB 也是正交矩阵【用定义证明】

④ 矩阵 A 是正交矩阵，α,β是 n 维列向量，那么有$(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$【证明：$(A\alpha,A\beta)=(A\alpha)^TA\beta=\alpha^TA^TA\beta=\alpha^T\beta=(\alpha,\beta)$】因为向量间的数量积一定是行❌列

⑤ 若矩阵 A 是正交的⟷A 的列(行)向量组是标准正交向量组

证明：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，$A^TA=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)^T(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$分块矩阵求转置分两步：先把矩阵中的分块矩阵当成元素看，行变列，然后再求转置，即

$$\begin{pmatrix} \alpha_1{}^T \\ \alpha_2{}^T \\ \cdots \\ \alpha_n{}^T \end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=\begin{pmatrix} \alpha_1{}^T\alpha_1 & \alpha_1{}^T\alpha_2 & \dots & \alpha_1{}^T\alpha_n \\ \alpha_2{}^T\alpha_1 & \alpha_2{}^T\alpha_2 & \dots & \alpha_2{}^T\alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n{}^T\alpha_1 & \alpha_n{}^T\alpha_2 & \dots & \alpha_n{}^T\alpha_n \end{pmatrix}=E=\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 \end{matrix},$$

也就是$\alpha_1{}^T\alpha_2=(\alpha_1,\alpha_2)=0$ ⋯ $\alpha_1{}^T\alpha_1=(\alpha_1,\alpha_1)=||\alpha_1||^2=1$，所以其列向量是标准正交向量组

34、实对称矩阵的对角化

实对称矩阵：如果有 n 阶矩阵 A，其矩阵的元素都为实数，且矩阵 A 的转置等于其本身（$a_{ij}=a_{ji},A^T=A$），则称 A 为实对称矩阵

实对称矩阵 A 的不同特征值对应的特征向量之间是正交的

证明：设实对称矩阵 A 有两个特征值分别是$\lambda_1,\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$，它们分别对应两个特征向量$\alpha_1,\alpha_2$，首先根据的特征值和特征向量的定义有：$\begin{cases}A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1\\A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2\end{cases}$,对$A\alpha_1$和$\alpha_2$做内积，

$$(A\alpha_1,\alpha_2)=(A\alpha_1)^T\alpha_2=(\lambda_1\alpha_1)^T\alpha_2=\lambda_1(\alpha_1,\alpha_2)$$
$$(A\alpha_1,\alpha_2)=(A\alpha_1)^T\alpha_2=\alpha_1{}^TA^T\alpha_2=\alpha_1{}^TA\alpha_2=\lambda_2(\alpha_1,\alpha_2)$$

因此,$\lambda_1(\alpha_1,\alpha_2)=\lambda_2(\alpha_1,\alpha_2),(\lambda_1-\lambda_1)(\alpha_1,\alpha_2)=0$,因为$\lambda_1\neq\lambda_2$,所以$(\alpha_1,\alpha_2)=0$，因此$\alpha_1\alpha_2$正交

若 A 是一个实对称矩阵，一定存在一个正交矩阵 Q，使得$Q^{-1}AQ=\wedge$

这一部分的例题：比如 A 是一个 3 阶实对称矩阵，

① A 有 3 个特征根，$\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=-1$，3 个根都是单根，因为实对称矩阵 A 的不同特征值对应的特征向量之间都是正交的，所以在这里不用正交化了，直接可以得出特征向量然后单位化

② A 有 3 个特征根，其中，$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$，因为实对称矩阵 A 的不同特征值对应的特征向量之间都是正交的，所以在这里λ_1和λ_2,λ_3对应的特征向量一定正交，因此，只需要对λ_2,λ_3对应的特征向量进行施密特正交化，得出特征向量然后单位化

③ A 有 3 个特征根，其中，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$，因为实对称矩阵 A 的 3 个特征值相等，所以在这里要对$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$对应的特征向量进行施

密特正交化，得出特征向量然后单位化

例题：一个实对称矩阵$A=\begin{pmatrix}4&-4&2\\-4&4&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$,求正交矩阵 Q 使得它相似于对角型矩阵，并写出对角型矩阵。

解：设矩阵 A 的特征值为λ，令$|\lambda E-A|=0$，即$\begin{vmatrix}\lambda-4&4&-2\\4&\lambda-4&2\\-2&2&\lambda-1\end{vmatrix}=0$，解得$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9$

① 对$\lambda_1=\lambda_2=0$时，$\begin{pmatrix}-4&4&-2\\4&-4&2\\-2&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，同解方程组为$x_1=x_2-\frac{1}{2}x_3$，令$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}$分别取$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，得到$\alpha_1=(-\frac{1}{2},0,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T$，对$\alpha_1,\alpha_2$进行施密特正交化，令$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

得到$\beta_1=(-\frac{1}{2},0,1)^T,\beta_2=(1,5,8)^T$，分别对$\beta_1,\beta_2$单位化，得到$\eta_1=(\frac{\sqrt{5}}{5},0,-\frac{2\sqrt{5}}{5})^T,\eta_1=(\frac{\sqrt{10}}{30},\frac{\sqrt{10}}{6},\frac{4\sqrt{10}}{15})^T$

② 对$\lambda_3=9$时，$\begin{pmatrix}5&4&-2\\4&5&2\\-2&2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，同解方程组为$\begin{cases}x_1=2x_3\\x_2=-2x_3\end{cases}$，令$x_3=1$，得到$\alpha_3=(2,-2,1)^T$，直接单位化，得到$\eta_3=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T$

所以，对角型矩阵为$\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix}$，$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^T$

35、类似于$x^2+y^2+2xy,{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+2x_1x_2-5x_1x_3$这种形式的就做二次型，其中$2xy,2x_1x_2,5x_1x_3$这种叫做交叉项，$x^2,y^2,{x_i}^2$这种叫做平方项，而对于这种形式的$x^2+y^2+2xy-\mathbf{1},x^2+y^2+2xy+\boldsymbol{x^3},x^2+y^2+2\boldsymbol{xy^2}$不叫二次型，n 元二次型一般记作$f(x_1,x_2,\dots x_n)$

（1）根据二次型写矩阵的表达形式

比如：${x_1}^2+{x_2}^2+2{x_3}^2+2x_1x_2-x_2x_3-2x_1x_3$

将平方项的系数直接做成主对角线上的元素，交叉项的系数除以 2 放

在两个对称的相应位置上。

这个二次型的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$

比如$2x_1x_2$，在矩阵的第一行第二列上的数为 1，第二行第 1 列上的数也为 1

那么上述二次型可以表示为$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

可以记作X^TAX,其中 A 就叫做二次型矩阵,A 的秩就是二次型的秩，而且二次型的矩阵一定是对称的，也就是说$A^T=A$

（2）由矩阵转化成二次型

已知二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$

主对角线上的元素直接作为平方项的系数,取主对角线右上角上的元素乘以 2 作为交叉项的系数，那么这个二次型为${x_1}^2+2{x_2}^2+3{x_3}^2+x_2x_3-2x_1x_3$

一定要注意,如果题目中给出的矩阵 A 不是对称矩阵,如题目中给出的是$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,我们可以看到这个矩阵并不对称，因此，可以把中间的系数阵换成$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$

只有平方项的叫做二次型的标准形

36、线性替换,对于一个二次型有如下表示$f(x)=X^TAX$,令$X=CY$,那么$f(x)=(CY)^TACY=Y^T(C^TAC)Y$,令$B=C^TAC$,那么二次型可以

有如下表示$f(x)=Y^TBY$，如果C^TAC是一个对角型矩阵，那么二次型的矩阵 B 也就是一个标准形，而$X=CY$叫做矩阵的一个线性替换

37、合同：有两个 n 阶方阵 A,B，如果存在一个可逆矩阵 C，使得$C^TAC=B$，那么称为矩阵 A,B 合同，记作$A\simeq B$

性质有反身性、对称性、传递性，还有：

（1）如果$A\simeq B$，那么$r(A)=r(B)$

（2）如果$A\simeq B$，那么$A^T=A$和$B^T=B$互为充要条件，即如果 AB 合同，A 是对称矩阵的话，B 也是对称矩阵

（3）如果$A\simeq B$，A,B 可逆，那么$A^{-1}\simeq B^{-1}$

（4）如果$A\simeq B$，那么$A^T\simeq B^T$

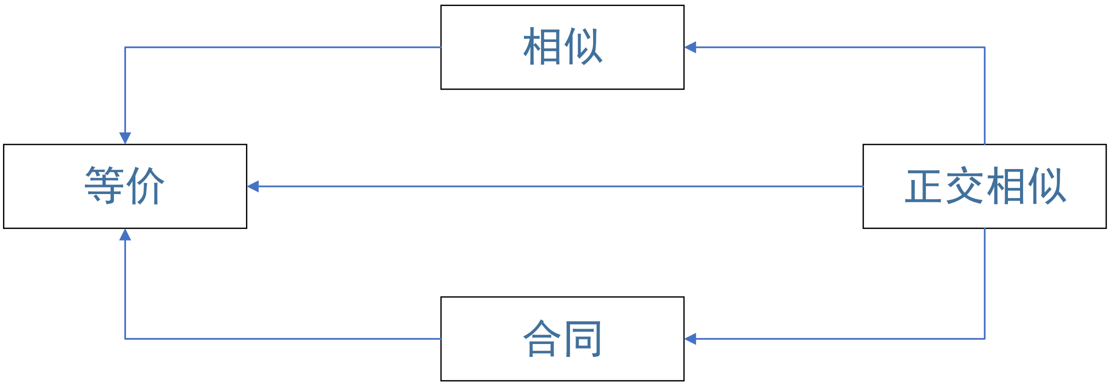
36、矩阵之间的关系

等价：A,B 是同型矩阵，如果存在可逆矩阵 P,Q，使得$PAQ=B$，那么称矩阵 A,B 等价

相似：A,B 是同阶方阵，如果存在可逆矩阵 P，使得$P^{-1}AP=B$，那么称矩阵 A,B 相似，特殊的，如果矩阵 P 是正交矩阵，那么称矩阵 A,B 为正交相似，又因为正交矩阵的转置等于逆矩阵，因此$P^{-1}AP=B$，又可以写作$P^TAP=B$，所以满足正交相似的两个矩阵肯定也满足合同关系。

合同：矩阵 A,B 是同阶方阵，存在可逆矩阵 P 使得$P^TAP=B$，那么成矩阵 A,B 是合同的

四种关系之间的联系如下图所示



37、将二次型换成标准形(线性替换)

共有三个方法：配方法、初等变换法、正交替换法

① 配方法

例题：$x_1{}^2-3x_2{}^2+4x_3{}^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$配方

原 式 $=x_1{}^2-2x_1(x_2-x_3)-3x_2{}^2+4x_3{}^2-6x_2x_3=x_1{}^2-2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2-(x_2-x_3)^2-3x_2{}^2+4x_3{}^2-6x_2x_3=(x_1-x_2+x_3)^2-(4x_2{}^2+4x_2x_3+x_3{}^2)+x_3{}^2+3x_3{}^2=(x_1-x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2+4x_3{}^2$

令$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3\\ y_2=2x_2+x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$，因为线性替换的定义是$X=CY$，所以应该写成这种形式$\begin{cases}x_1=y_1-\frac{y_2+y_3}{2}\\ x_2=\frac{y_2-y_3}{2}\\ x_3=y_3\end{cases}$

又如另一种题型，题目中只有交叉项，如$2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$，那么做题方法是令$\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\ x_2=y_1+y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$，带入原方程中，会产生平方项，如果题目中有$x_4$的交叉项，比如$2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3+5x_2x_4$，那么做题方法是$\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\ x_2=y_1+y_2\\ x_3=y_3\\ x_4=y_4\end{cases}$，有再多的未知量也是这样求解，只需要对前

面两项做这样的操作即可。

② 初等变换法

假设 A 是二次型的矩阵，$f(x) = X^TAX$,想要将 A 其化成标准形(对角型)，需要要做行变换和列变换。即

$$p_s{}^T \cdots p_2{}^T p_1{}^T A p_1 p_2 \cdots p_s = diag \qquad ①$$

做一次线性替换，即$X = CY$，那么$f(x) = Y^T\boldsymbol{C^TAC}Y$，因为 C 是一个可逆矩阵，有前面知识，任何一个可逆矩阵都能够通过一系列的矩阵初等变换而来，即$C = p_1p_2 \cdots p_s \to Ep_1p_2 \cdots p_s = C$ ②

由①②可知，将二次型矩阵化成标准形的步骤

（1）只对 A、E 做相同的初等列变换

（2）只对 A 做相应的初等行变换【比如（1）做了交换 1，3 列，那么在（2）步中要做交换 1，3 行】

（3）A 化成对角阵之时，E 化成的就是 C

从上面的 3 步来看，行和列是一套操作，做了列变换后一定要再做一次相应的行变换。

例题：有一个二次型的矩阵是$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

解　：$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&0\\1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\\1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&-1\\1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\to$$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以二次型的系数矩阵化成的对角型矩阵是

$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$，线性替换中的$C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

一次列一次行变换以后，矩阵肯定又变成对称矩阵，一定要记住做一次列变换，就要做一次行变换

在二次型换成标准形的过程中，上面的对角矩阵中的任何一个正数都可以换成 1，任何一个负数都可以换成-1，但是正数肯定不能换成负数，负数也一定不能换成正数

比如$\begin{pmatrix}1&&\\&-2&\\&&5\\\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}$第二列乘以$-\frac{1}{\sqrt{2}}$，同时第二行也要乘以$-\frac{1}{\sqrt{2}}$，这样就变成了-1，同理，第三列乘以$\frac{1}{\sqrt{5}}$，那么第三行同时也要乘以$\frac{1}{\sqrt{5}}$

二次型中的规范型：${y_1}^2+{y_2}^2+\cdots+{y_p}^2-{y_{p+1}}^2-{y_{p+2}}^2-\cdots {y_r}^2$

其矩阵为$\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\cdots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&-1&&&&&\\&&&&\cdots&&&&\\&&&&&-1&&&\\&&&&&&0&&\\&&&&&&&\cdots&\\&&&&&&&&0\end{pmatrix}$

一定要严格遵守这种矩阵，比如$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2$是规范型，而$x_1{}^2-x_2{}^2+x_3{}^2$、$x_1{}^2+x_2{}^2+x_4{}^2$就不是规范型了，1，-1，0 的顺序要很严格的排列

二次型矩阵的秩$r(A)$等于 1 和-1 的总数，1 的个数叫做正惯性指数，-1 的个数叫做负惯性指数，1 的个数减去-1 的个数叫做符号差，任意的一个二次型矩阵 A 一定与$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & & & & & & \\ & \cdots & & & & & & & \\ & & \mathbf{1} & & & & & & \\ & & & \mathbf{-1} & & & & & \\ & & & & \cdots & & & & \\ & & & & & \mathbf{-1} & & & \\ & & & & & & \mathbf{0} & & \\ & & & & & & & \cdots & \\ & & & & & & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$合同（任一的一个二次型都可以换成规范型）

合同的充要条件：两个矩阵的秩相同、正负惯性指数相同

③ 正交替换

求特征值、求特征向量、C 就是特征向量组、对角型就是特征值按顺序拍好在主对角线上。