假设检验

1、在假设检验中，常把一个被检验的假设称为原假设，用H_0表示，通常将不应轻易加以否定的假设作为原假设或零假设。当H_0被拒绝时接收的假设称为备择假设或对立假设，用H_1表示，他们通常成对出现。如果θ_0中只含一个点，我们称之为简单原假设。否则就称为复杂或符合原假设。

当H_0为简单假设时，其形式可写成$H_0: \theta = \theta_0$，此时的备择假设通常为三种可能：

$$H_1: \theta \neq \theta_0, H_1: \theta < \theta_0, H_1: \theta > \theta_0$$

第一种情况我们成为双侧假设或双边假设，后两种我们称为单侧假设或单边假设。

当备择假设在原假设一侧时的检验称为单侧检验；
当备择假设分散在原假设两侧时的检验称为双侧检验。

2、假设检验的基本步骤

① 建立两个假设，原假设和备择假设

② 选择检验统计量，给出拒绝域形式

由样本对原假设进行判断总是通过一个统计量完成的，该统计量称为检验统计量。使原假设被拒绝的样本观测值所在区域称为拒绝域，一般用W表示。此时即将样本空间划分为两个互不相交区域W和$\overline{W}$(接受域)，当样本属于W时，拒绝H_0；否则不拒绝H_0

③ 选择显著性水平

检验可能犯一下两类错误：

（1）H_0为真但样本观测值落在拒绝域中，从而拒绝原假设H_0，这种错误称为第一类错误，其发生的概率称为犯**第一类错误**的概率，或称拒真概率，通常记为α

（2）H_0不真（即H_1为真）但样本观测值落在接受域中，从而接受原假设H_0，这种错误称为第二类错误，其发生的概率称为犯**第二类错误**的概率，或称受伪概率，通常记为β

犯第一类错误的概率α和犯第二类错误的概率β可以用同一个函数表示，即所谓的**势函数**。势函数是假设检验中最重要的概念之一，定义如下：

设检验问题

$$H_0:\theta\in\theta_0\ \ vs\ \ H_1:\theta\in\theta_1$$

的拒绝域为W，则样本观测值落在拒绝域内的概率称为该检验的势函数，记为

$$g(\theta)=P_0(X\in W),\theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$$

势函数$g(\theta)$是定义在参数空间θ上的一个函数。犯两类错误的概率都是参数θ的函数，并可由势函数算得，即：

$$g(\theta)=\begin{cases}\alpha(\theta),\theta\in\Theta_0\\1-\beta(\theta),\theta\in\Theta_1\end{cases}$$

在样本量一定的条件下不可能找到一个使α和β都小得检验，因此通常情况下我们仅限制犯第一类错误的概率，这就是费希尔的显著性检验

对检验问题$H_0:\theta\in\theta_0\ \ vs\ \ H_1:\theta\in\theta_1$，如果一个检验满足对任意的$\theta\in\Theta_0$都有$g(\theta)\le\alpha$，则称该检验师显著性水平$\alpha$的显著性检验，简称水平为$\alpha$的检验

④ 给出拒绝域

确定显著水平后，可以给定出检验的拒绝域 W

⑤做出判断

再有了明确的拒绝域后，根据样本观测值我们可以做出判断

3、检验 P 值

当改变显著性水平之后，拒绝域会改变，结论也会改变。因此可以采用 P 值进行检验。

定义：在一个假设检验问题中，利用样本观测值能够做出拒绝原假设的最小显著性水平称为检验的 P 值

由检验的 P 值与人们心目中的显著性水平α进行比较可以很容易做出检验的结论：

如果$\alpha\ge p$，则在显著性水平为α下拒绝H_0

如果$\alpha<p$，则在显著性水平为α下接受H_0

4、正态总体参数的假设检验

（1）单个正态总体均值的检验

①已知σ时的$u(/z)$检验

②未知σ时的t检验

表 7.2.1 单个正态总体均值的假设检验

检验方法	H_0	H_1	检验统计量	拒绝域	P 值
u 检验 （σ已知）	$\mu_1 \le \mu_2$ $\mu_1 \ge \mu_2$ $\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$ $\mu_1 \ne \mu_2$	$u = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\{u \ge u_{1-\alpha}\}$ $\{u \le u_\alpha\}$ $\{\lvert u\rvert \ge u_{1-\alpha/2}\}$	$1-\Phi(u_0)$ $\Phi(u_0)$ $2(1-\Phi(\lvert u_0\rvert))$
t 检验 （σ未知）	$\mu_1 \le \mu_2$ $\mu_1 \ge \mu_2$ $\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$ $\mu_1 \ne \mu_2$	$t = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$\{t \ge t_{1-\alpha}(n-1)\}$ $\{t \le t_\alpha(n-1)\}$ $\{\lvert t\rvert \ge t_{1-\alpha/2}(n-1)\}$	$P(t \ge t_0)$ $P(t \le t_0)$ $P(\lvert t\rvert \ge \lvert t_0\rvert)$

注：$u_0 = \sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)/\sigma, t_0 = \sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)/s$，$t$是服从$t(n-1)$的随机变量。

单个正态总体均值的假设检验

检验方法	H_0	H_1	检验统计量	拒绝域	P 值
u 检验 (σ已知)	$\mu_1 \le \mu_2$ $\mu_1 \ge \mu_2$ $\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$ $\mu_1 \ne \mu_2$	$u = \dfrac{(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma\sqrt{n}}$	$\{u \ge u_{1-\alpha}\}$ $\{u \le u_\alpha\}$ $\{\lvert u\rvert \ge u_{1-\alpha/2}\}$	$1-\Phi(u_0)$ $\Phi(u_0)$ $2(1-\Phi(\lvert u_0\rvert))$
t 检验 (σ未知)	$\mu_1 \le \mu_2$ $\mu_1 \ge \mu_2$ $\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$ $\mu_1 \ne \mu_2$	$t = \dfrac{(\bar{x}-\mu_0)}{s\sqrt{n}}$	$\{t \ge t_{1-\alpha}(n-1)\}$ $\{t \le t_{1-\alpha}(n-1)\}$ $\{\lvert t\rvert \ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$	$P(t \ge t_0)$ $P(t \le t_0)$ $P(\lvert t\rvert \ge \lvert t_0\rvert)$

注：$u_0 = \frac{(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}}, t_0 = \frac{(\bar{x}-\mu_0)}{s/\sqrt{n}}$，$s, t$是服从$t(n-1)$的随机变量

例题：从甲地发送一个讯号到乙地。设乙地接收到的讯号值服从正态分布$N(\mu, 0.2^2)$，其中μ为甲地发送的真实讯号值。现甲地重复发送同意讯号 5 次，乙地接收到的讯号值为 8.05，8.15，8.2，8.1，8.25，设接收方有理由猜测甲地发送

的讯号值为 8，问能否接受这猜测？
解：这是一个假设检验问题，总体$X \sim N(\mu, 0.2^2)$检验假设为：

$$H_0: \mu = 8 \quad v.s. \quad H_1: \mu \neq 8$$

这个双侧检验问题的拒绝域为$\{|u| \geq u_{1-\alpha/2}\}$，取置信水平为$\alpha = 0.05$，则查表可知$u_{0.975} = 1.96$，$u = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.6771$, u 值未落入拒绝域内，故不能拒绝原假设，可认为猜测成立。

（2）单个正态总体方差的检验

设$x_1, \ldots, x_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，对方差亦可考虑如下三个检验问题

$$H_0: \sigma^2 \leq {\sigma_0}^2 \quad VS \quad H_1: \sigma^2 > {\sigma_0}^2$$

$$H_0: \sigma^2 \geq {\sigma_0}^2 \quad VS \quad H_1: \sigma^2 < {\sigma_0}^2$$

$$H_0: \sigma^2 = {\sigma_0}^2 \quad VS \quad H_1: \sigma^2 \neq {\sigma_0}^2$$

通常假定μ未知，他们采用的检验统计量是相同的，均为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2}$$

若取显著性水平为α，则对应三个检验问题的拒绝域依次分别为

$$W = \{\chi^2 \geq {\chi_{1-\alpha}}^2(n-1)\}$$

$$W = \{\chi^2 \leq {\chi_\alpha}^2(n-1)\}$$

$$W = \{\chi^2 \geq {\chi_{1-\alpha/2}}^2(n-1)\}\text{或}W = \{\chi^2 \leq {\chi_{\alpha/2}}^2(n-1)\}$$

（3）两个正态总体方差的检验

设$x_1, \ldots, x_m$是来自正态总体$N(\mu_1, {\sigma_1}^2)$的样本， 设$y_1, \ldots, y_n$是来自正态总体$N(\mu_2, {\sigma_2}^2)$的样本，两个样本相互独立，考虑如下三类检验问题

$$H_0: {\sigma_1}^2 \leq {\sigma_2}^2 \quad VS \quad H_1: {\sigma_1}^2 > {\sigma_2}^2$$

$$H_0: {\sigma_1}^2 \geq {\sigma_2}^2 \quad VS \quad H_1: {\sigma_1}^2 < {\sigma_2}^2$$

$$H_0: {\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 \quad VS \quad H_1: {\sigma_1}^2 \neq {\sigma_2}^2$$

此处，μ_1，μ_2均未知，记${s_x}^2$ ，${s_y}^2$分别是由$x_1, \ldots, x_m$算得的${\sigma_1}^2$得的无偏估计和$y_1, \ldots, y_n$算得的${\sigma_2}^2$的无偏估计，则建立如下的检验统计量

$$F = \frac{{s_x}^2}{{s_y}^2}$$

当${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$时，$F \sim F(m-1, n-1)$，由此给出三个问题检验问题对应的拒绝域依次为

$$W = \{F \geq F_{1-\alpha}(m-1, n-1)\}$$

$$W = \{F \leq F_{\alpha}(m-1, n-1)\}$$

$$W = \{F \geq F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)\} \text{或} W = \{F \leq F_{\alpha/2}(m-1, n-1)\}$$

5、正态性检验

正态分布是最常用的分布，用来判断总体分布是否为正态分布的检验方法称为正态性检验，他在实际问题中大量使用。

正态概率图可用来作正态性检验，方法如下：

利用样本数据在概率图上描点，用目测方法看这些点是否在一条直线附近，若是的话，可以认为该数据来自的总体为正态分布，若明显不在一条直线附近，则认为非正态。

其他正态性检验

（1）夏皮洛−威尔克(Shapiro-Wilk)检验（W 检验）

（2）爱波斯−普利(Epps-Pulley)检验（EP 检验）

注：斯皮尔曼是检验相关性的