高数知识点总结

1、映射，有两个**非空集合** X 和 Y，对于 X 中的每个元素 x 根据某种规则 f 在 Y 中都有唯一的一个 y 与之对应。$f: X \to Y$

不可以存在$x \begin{matrix} \nearrow y_1 \\ \searrow y_2 \end{matrix}$，但却可以存在多个 x 对应一个 y

注意，映射定义中要求 X 和 Y 都是非空集合，但集合不一定是必须是数值集合；组成映射的三要素：非空集合 X，规则 f，值域R_f，$(R_f \in Y)$因为在映射关系中，根据定义，非空集合 X 肯定是都能被用到，而 Y 中的元素不一定都被映射到；满射$R_f = Y$，单射$x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$；逆映射，只要在单射的条件下才可以定义逆映射(若无逆映射，则与映射定义相悖)，在逆映射的定义中，$f^{-1}: Y \to X, y \in R_f$，不是$y \in Y$，因为不一定是满射

2、函数的定义说白了就是自变量 x 在规则 f 的条件下向因变量 y 的映射，可以记作$y = f(x), x \in D$，函数的值域一定会落在实数集中。函数的几个特性：有界性、奇偶性(在判断一个函数的奇偶性前，首先要看这个函数的定义域是否是对称的)、单调性、周期性：∃正数l，$f(x+l) = f(l)$，但是一般我们所说的周期都是最小周期，但是并非每个周期函数都有最小周期，如$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q^c \end{cases}$，Q 是有理数，$Q^c$是无理数，对于这个函数，任何正有理数 r 都是其周期，但是并不存在一个最小的正有理数。

3、单射肯定存在反函数，且如果 f 单调，则其反函数f^{-1}必单调，且单调性相同，原函数与反函数关于 y=x 对称

4、数列极限的定义：$\{x_n\}$是数列，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，使当$n > N$时，

$|x_n - a| < \varepsilon$，则称 a 为数列的极限。对于这个定义的理解：$\forall\varepsilon > 0$的意思是取任意小的一个距离，$\exists N$存在数列的某一项，使得$n > N$这项后面的所有项，都落在$|x_n - a| < \varepsilon$这个小区间内。

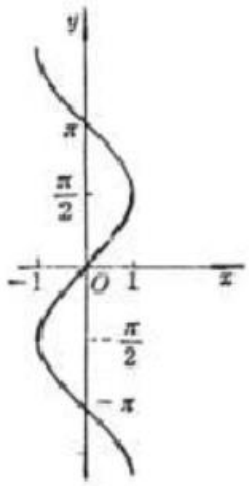
例题：$|q| < 1,1,q,q^2,\ldots,q^{n-1},\ldots$的极限是 0

思路：根据定义可知$|x_n - a| < \varepsilon \to |x_n - 0| = |q|^{n-1} < \varepsilon \to (n-1)\ln|q| < \ln\varepsilon \to n - 1 > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} \to n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} + 1$

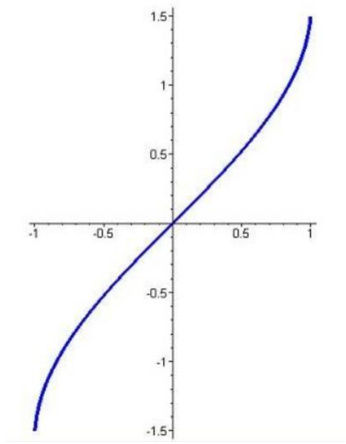
解：$\forall\varepsilon > 0$，取 N=$\left\lfloor\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} + 1\right\rfloor$,当$n > N$时，$|x_n - 0| = |q|^{n-1} < \varepsilon$，由此可得数列的极限为 0

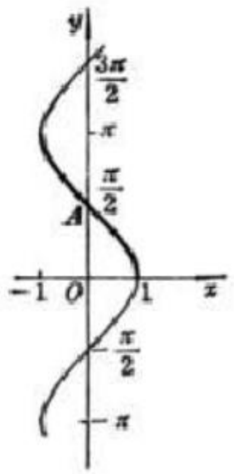
5、反三角函数，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$

$\arcsin x$的图象为：

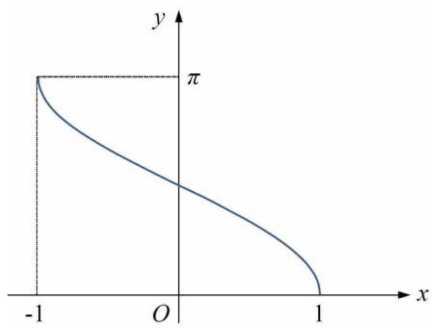


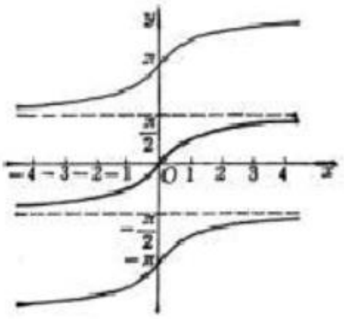
其实这个图像是不严格的，因为他不符合函数的定义（一个 x 仅对应一个 y），所以 arcsinx 仅采用一段区间作为其函数图像，其他的反函数也一样

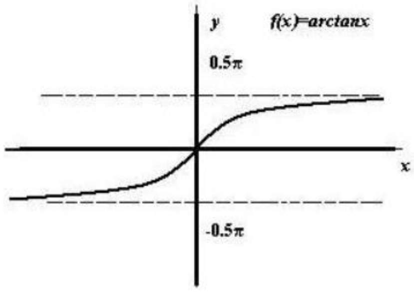


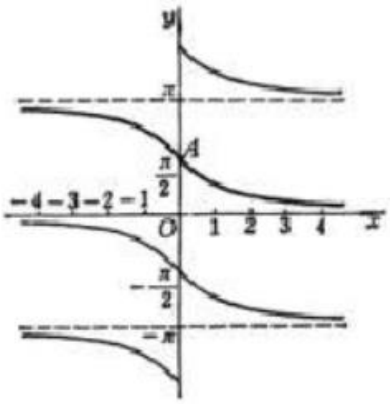


arccosx

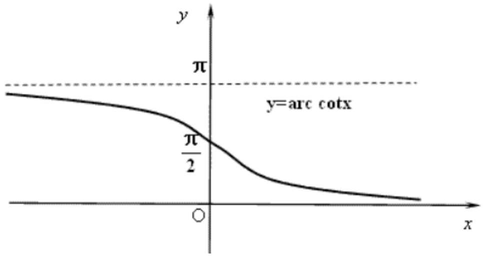




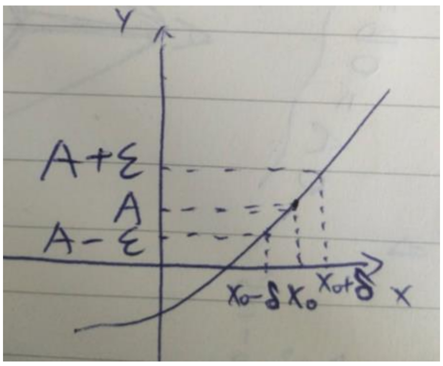




arccotx



6、函数的极限，$f(x)$在x_0的去心邻域内有定义(在x_0处可以没有定义)，$\exists A$(**极限**)，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$(**找到一个大于0的数**)，$0 < |x - x_0| < \delta$(**使$\mathbf{x - x_0}$在这一区间内**)时，$|f(x) - A| < \varepsilon$,使得$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = A$



例题：$\lim_{x \to 1} 2x - 1 = 1$

证：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}$(**后写**)，使得当 $0 < |x - x_0| = |x - 1| < \delta$时，$|f(x) - A| = |2x - 1 - 1| = 2|x - 1| < \varepsilon$, **即可以取**$\boldsymbol{\delta} = \frac{\varepsilon}{2}$

左极限：从左边逼近，$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$

右极限：从右边逼近，$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$

$x \to x_0, f(x)$极限存在 $\Leftrightarrow$ 函数的左右极限均存在且相等，函数在某一

点的极限是否存在，是多少与这一点的函数值是多少，是否有意义没有任何关系。

函数极限的性质：函数极限具有唯一性，局部有界性(已知$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,则$\exists M > 0$(界)$,\delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta$时，$|f(x) \le M|$)，局部保号性(已知$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, A > 0$则$\exists\delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta$时，$f(x) > 0$，也就是说，在某一个范围内，函数值的正负与这一范围内某个点的极限符号相同)

函数极限与数列极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \{x_n\} \to x_0, \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

当函数极限存在时，相应数列的极限也存在，但是当数列极限存在时，相应函数的极限却不一定存在，因为数列上的点是一系列离散的点。

比如：

$$f(x) = \begin{cases} x-1, x<0 \\ 0, x=0 \\ x+1, x>0 \end{cases}$$

取数列$x_n = \frac{1}{n}, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$，但是$f(x)$在$x_0 = 0$这一点的极限并不存在

7、无穷小与无穷大

无穷小是趋于 0(正负都包括)，而不是-100000000000 之类的，比如 0.00000001 这个叫做很小的数，是一个确切的数，不能叫做无穷小

无穷大包括两部分，$+\infty$和$-\infty$统称为∞

8、极限运算法则

（1）**有限个**无穷小的和还是无穷小

（2）有界函数(题目中多数情况下会是 sinx,cosx)与无穷小的乘积是无穷小

（3）$\lim\big(f(x)\pm g(x)\big)=limf(x)\pm limg(x)=A\pm B$，这个公式的前提是$f(x)$和$g(x)$的极限必须存在，才能分开求极限，乘除也一样

（4）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)$这种多项式形式的直接把$x_0$带入即可

（5）在$x\to\infty$的前提下，两个有理多项式相除只看两项最高次幂即可。

9、夹逼定理，数列$\{x_n,y_n\},\exists n_0\in N,n>n_0,y_n\le x_n\le z_n,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a,$则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，同理，当存在$g(x)<f(x)<h(x)$，$\lim g(x)=A,\lim h(x)=A$时，则$\lim f(x)=A$，当求函数极限时，使用夹逼定理的难点在于构造 g(x)和 f(x)，使用放缩。

10、两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{\to 0}\frac{\sin}{\quad}=1$，这个重要极限的要点在于未知量是趋于零的，而且分母和 sin 中的数是一致的。$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

当无 sinx，有 tan，cos，acrcsin，arccos 时，需要把他们转化成 sin

当无 x 时，需要构造出 x

（2）单调有界数列必有极限，收敛一定有界，但是有界却不一定收敛。

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ 等价于 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$$\lim_{\to\infty}(1+\frac{1}{\quad})\quad=e$$

这个重要极限的要点是：分母是啥、次数就要是啥，分子也必须是 1，必须是+号

11、无穷小的比较（谁趋于 0 的速度快）

以下的α、β均为函数

当有$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$时，则称$\beta$是$\alpha$的高阶无穷小，记作$\beta=o(\alpha)$

当有$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$时，则称$\beta$是$\alpha$的低阶无穷小

当有$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$时，则称$\beta$是$\alpha$的同阶无穷小

当有$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$时，则称$\beta$是$\alpha$的 k 阶无穷小

当有$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$时，则称$\beta$是$\alpha$的等价无穷小，记作$\alpha\sim\beta$

12、常见的等价无穷小

$\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}$时$,\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x\,,\arctan x\sim x,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$

定理 1：若β与α等价，则$\beta=\alpha+o(\alpha)$，两者互为充要条件

定理 2：当$\alpha\sim\tilde{\alpha},\beta\sim\tilde{\beta}$，且$\lim\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$存在，则$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$

只能是相比，相加、相减、相乘都不能使用等价无穷小替换

13、函数连续其实就是函数的增量在增加范围趋于 0 的条件下也为 0，函数连续可表示为：$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\triangle y=\lim\limits_{\triangle x\to 0}f(x+\triangle x)-f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=0$

函数的连续性需要满足三个条件

（1）函数在$x=x_0$处有定义

（2）函数在$x=x_0$有极限

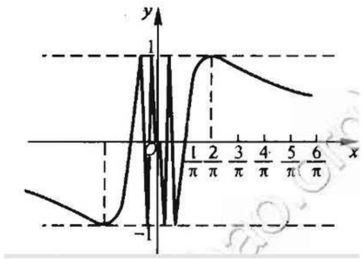
（3）函数在$x=x_0$处的极限值等于函数值，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

不满足上述三点的任一一条即为函数存在间断点，因此也可分为三种情况：①函数在$x=x_0$处无定义 ② 函数在$x=x_0$处不存在极限

③ 函数在$x=x_0$处的极限值不等于函数值，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$

如$y=\tan x$在$x=\frac{\pi}{2}$处是间断的，此时的间断点称为无穷间断点

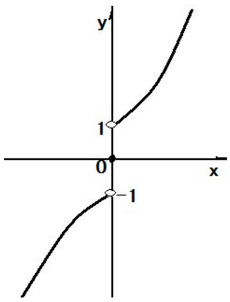
又如$y=\sin\frac{1}{x}$，当$x\to 0$时，$\frac{1}{x}$变化的也越来越频繁(剧烈)，如图，



此时称$x=0$为$y=\sin\frac{1}{x}$的震荡间断点

又如$y=\frac{x^2-1}{x-1}$，可知，函数的定义域中不包括0，因此$y=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$，在图像中要把$x=1$去掉，因此$x=1$叫做函数的可去间断点

又如下图



函数在 0 处的极限存在，但是左右极限不相等，而且在$x=0$这一点的函数值与极限值也不相等，此时$x=0$称为函数的跳跃间断点

第一类间断点：函数在某点的左右极限都存在，包括可去间断点和跳跃间断点

第二类间断点：左右极限至少有一个不存在，包括震荡间断点和无穷间断点

14、零点存在定理：函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$，$f(b)$异号，即$f(a).f(b)<0$，那么$\exists\xi$，使得$f(\xi)=0$

介值定理：函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$f(a)=A$，$f(b)=B$，且$A\neq B$，存在C介于 A,B 之间，那么至少存在一个$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=C$

证明：已知函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$f(a)=A$，$f(b)=B$，且$A\neq B$，存在C介于 A,B 之间，设$\Phi(x)=f(x)-C$,那么$\Phi(A)=A-C,\Phi(B)=B-C$，因为C介于 A,B 之间，所以$\Phi(A)$，$\Phi(B)$异号，因为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，根据零点存在定理，至少存在一点ξ，使得$\Phi(\xi)=0$,即$f(\xi)-C=0,f(\xi)=C$

注：零点存在定理和介值定理的证明过程是一样的，从原理上看都是将函数图象向下平移 C 个单位，

推论：函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且该函数在此区间内的值域为$[m,M]$，则m,M分别为函数在区间$[a,b]$上的最值

15、导数的定义：$y=f(x)$在x_0的邻域内有定义，在x_0处取一个变化量$\triangle x$，则$\triangle y=f(x+\triangle x)-f(x_0)$

导数在某一点x_0的三种定义方式：

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

可以记作$f'(x_0),\frac{dy}{dx}|_{x=x_0},y'|_{x=x_0},\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

如果写作$f'(x)$，那么便称为导函数，表示函数$f(x)$在某一段区间内可导，而$f'(x_0)$则表示在点x_0处可导。

16、$(x^n)'=\begin{cases}1,n=1\\nx^{n-1},n>1\end{cases}$，如果写在一起，那么$x^{n-1}$暗含了$x\neq 0$的条件，但是平时记得时候就写成和在一起的就好。

17、单侧导数，一个函数可导与这个函数的左右导数都存在且相等互为充要条件。

18、函数可导可以表示为$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$存在，函数连续的定义为$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\triangle y=$

0, 可以看出, 若 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$存在, 则$\triangle y\to 0$, 因此可导的函数必定连续, 而连续的函数虽然 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\triangle y=0$，但是$\triangle y\to 0$的速度和$\triangle x\to 0$，不能确定，因此连续不一定可导。(也可以这么理解：连续函数一定是能够一笔画出来的, 而可导函数的曲线一定是光滑函数(在某点的切线不能与 x 轴垂直), 光滑的曲线一定能够一笔画出来，而一笔画出来的曲线不一定是光滑的，有可能“有尖儿”)

19、导数公式

（1）$C'=0$(C 为常数)

（2）$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$(μ为实数，不一定是整数)

（3）三角函数的导数

$(\sin x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(\tan x)'=sec^2x$	$(\cot x)'=-csc^2x$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$(\csc x)'=-\csc x\cot x$
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

正割$\sec x=\frac{1}{\cos x}$　余割$\csc x=\frac{1}{\sin x}$　余切$\cot x=\frac{1}{\tan x}$

（4）$(a^x)'=a^x\ln a$，特殊的，$(e^x)'=e^x$

（5）$(\log_a x)'=\frac{1}{x\,lna}$，特殊的，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

（6）$(uvw)'=u'vw+v'uw+w'uv$

20、反函数的求导法则

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$，定理的条件是函数单调，可导

这个公式不能够以类似于$(\frac{2}{3}=\frac{1}{\frac{3}{2}})$这种来理解，因为$\frac{dy}{dx}$是一个整体，而

$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{1}{\triangle x/\triangle y}$可以用($\frac{2}{3}=\frac{1}{\frac{3}{2}}$)这种方式来理解，因为$\triangle x$,$\triangle y$都是实数，两边取极限，若$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$(这个式子可以记作$\frac{dy}{dx}$)存在，因为$\triangle x\to 0$但是$\triangle x$永远不会为0,但是$\triangle y$可以为0,而右侧取极限dy的话，$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{1}{\frac{\triangle x}{\triangle y}}$,

当$\triangle y=0$时，这个式子是没有意义的，所以这里就用到了定理中的条件，$f(x)$是单调的，因此$f(x+\triangle x)-f(x)\neq 0$，也就是$\triangle y\neq 0$，从而，可证反函数求导定理。

21、高阶导数

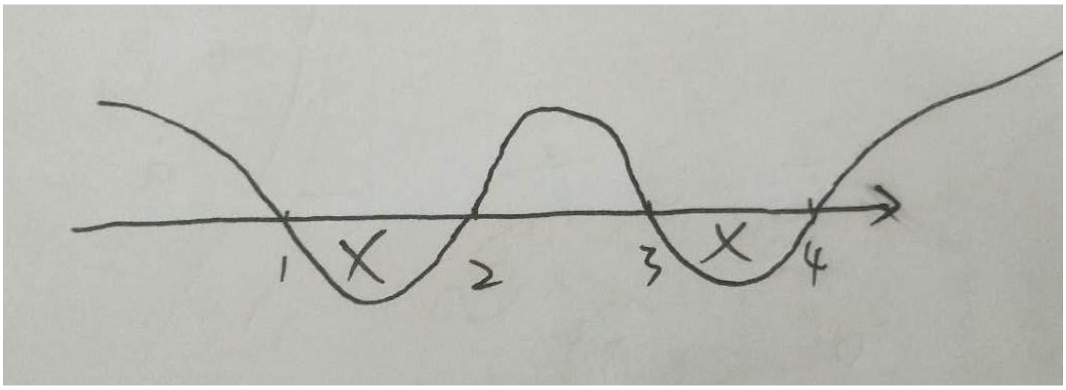
一阶导数$\frac{dy}{dx}$，可以记作y'

二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$，可以记作$y''$

三阶导数$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dx}\langle\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})\rangle$，可以记作$y'''$

n 阶导数$\frac{d^ny}{dx^n}$，可以记作$y^{(n)}$

22、例题$y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，定义域为$x\neq 3$ 且$x\neq 4$



当$x>4$时，$\ln y=\frac{1}{2}\langle\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)\rangle$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$$

则$y'=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

当$2<x<3$时，$\ln y=\frac{1}{2}\langle\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(3-x)-\ln(4-x)\rangle$,

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3-x}-\frac{1}{4-x})$$

则$y'=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3-x}-\frac{1}{4-x})\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

当$x<1$时，$\ln y=\frac{1}{2}\langle\ln(1-x)+\ln(2-x)-\ln(3-x)-\ln(4-x)\rangle$，

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2-x}-\frac{1}{3-x}-\frac{1}{4-x})$$

则$y'=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2-x}-\frac{1}{3-x}-\frac{1}{4-x})\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

23、对于一个函数$y=f(x)$在某邻域内有定义，对于一个函数增量$\triangle y=f(x+\triangle x)-f(x)$(精确值)如果可以表示为$\triangle y=A\triangle x+o(\triangle x)$A 不依赖于$\triangle x$(A 相对于$\triangle x$是常数),则说这个函数是可微的，将其线性主部记作$dy$，即$dy=A\triangle x$(近似值)。在之后的计算中，使用$dy\approx\triangle y$或者$f(x+\triangle x)=f^{'}(x_0)\triangle x+f(x_0)$,当求近似值时可以是使用微分的方法。

可微一定可导，可导也一定可微。

证明：$\frac{\triangle y}{\triangle x}=A+\frac{o(\triangle x)}{\triangle x}$，两边取极限，$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=A=f'(x_0)$

由可导证可微：$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=f'(x_0)$，$\frac{\triangle y}{\triangle x}=f'(x_0)+\alpha$($\alpha$是一个趋近于 0 的数)，所以$\triangle y=f'(x_0)\triangle x+o(\triangle x)$

$$dy=f'(x)dx$$

24、微分中值定理

费马引理：$f(x)$在x_0的一个邻域内有定义，在x_0处可导，如果对于在x_0邻域内的任意 x，都有$f(x)\le f(x_0)$，则$f'(x_0)=0$

罗尔定理：函数$f(x)$满足以下三个条件：

（1）在$[a,b]$内连续

（2）在(a,b)内可导

（3）$f(a)=f(b)$

则至少$\exists\xi\epsilon(a,b),f'(\xi)=0$

拉格朗日中值定理： 函数$f(x)$满足以下两个条件：

（1）在$[a,b]$内连续

（2）在(a,b)内可导

则至少$\exists\xi\epsilon(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，即$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

柯西中值定理： 若存在两个函数$f(x)$和$F(x)$，若满足以下三个条件：

（1）在$[a,b]$内连续

（2）在(a,b)内可导

（3）$\forall x\in(a,b),F'(x)\neq 0$

则至少存在一点ξ，使得$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

25、洛必达法则(处理$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$)

小结论：当$x\to+\infty$时，$\ln x<x^n<e^x$

26、泰勒公式$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+R_n(x)$,$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$，$\xi$介于$x_0$与$x$之间

当$x_0=0$时，泰勒公式变为$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+R_n(x),R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}}{(n+1)!}$，$\theta$介于0与1之间，这个公式叫做麦克劳林公式。

几个重要函数的麦克劳林公式

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2m}$$

$R_{2m}=(-1)^n\frac{\cos\theta x\ x^{2n+1}}{(2n+1)!}$拉格朗日余项，$R_{2m}=o(\ x^{2n-1})$佩亚诺余项

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2m}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

27、拐点：经过这一点后，函数的凹凸性发生变化

$f''(x) > 0$ —— 凹函数

$f''(x) < 0$ —— 凸函数

28、不定积分的积分表，按照导数表记就好，其中一个比较特殊的就是$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

在不定积分中，$\int f(x)g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \int g(x)\,dx$

（1） 第一类换元积分法(凑)，把 dx 换成 du

$$\int \csc x\,dx = \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$= \int \frac{sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2} = \ln|\tan\frac{x}{2}| + c$$

$$= \ln|\csc x - \cot x| + c$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdots\cdots(1)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdots\cdots(2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdots\cdots(3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdots\cdots(4)$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{sin\,(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\cdots\cdots(5)$$

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\cdots\cdots(6)$$

（2）第二类换元积分法，主要处理有根号的

$$\int\tan x\,dx=-\ln|\cos x|+c$$

$$\int\cot x\,dx=\ln|\sin x|+c$$

$$\int\sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+c$$

$$\begin{aligned}\int\csc x\,dx&=\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{\sin x}{sin^2x}dx=-\int\frac{1}{1-cos^2x}dcosx\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos x-1}-\frac{1}{\cos x+1}dcos\,x\\&=\frac{1}{2}\langle\ln|1-\cos x|-\ln|1+\cos x|\rangle+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-cosx}{1+cosx}\right|+c\\&=\ln|\tan\frac{x}{2}|+c=\ln|\csc x-\cot x|+c\end{aligned}$$

在积分中常见的换元

$\sqrt{a^2-x^2}$常使用$x=a\sin t$来替换

$\sqrt{x^2-a^2}$常使用$x=a\sec t$来替换

$\sqrt{x^2+a^2}$常使用$x=a\tan t$来替换

（3）分部积分法$\int u\,dv=uv-\int v\,du$

在这个方法里面，通常把$e^x,\sin x,\cos x,x^n$等提到d后面

29、连续函数一定可积；有界函数，**有限个**间断点可积

性质 1：$|\int_a^b f(x)\,dx| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

性质 2：假设$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值分别是M,m，则有$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

定积分中值定理：$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \xi \in [a,b]$

积分函数求导$[\int_{\Phi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt]' = f\big(\varphi(x)\big)\varphi(x)' - f(\Phi(x))\Phi(x)'$

如果$f(x)$在区间$[-a,a]$上为偶函数，那么有$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

如果$f(x)$在区间$[-a,a]$上为奇函数，那么有$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

求定积分的方法

① 牛顿-莱布尼茨公式$\int_a^b f(x)\,dx = F(X)|_a^b = F(b) - F(a)$

② 定积分的换元法(一定要注意上下限的变化,原始函数的上限对应换元后的上限，下限对应下限)

无三角函数的： $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx(a > 0)$，另 $x = a\sin t, dx = a\cos t\,dt$, 当$x = a$时，$a\sin t = a, t = \frac{\pi}{2}$, 当$x = 0$ 时，$a\sin t = 0, t = 0$,因此, 原式$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t * \mathrm{a}\cos t\ dt = \frac{\pi}{4}a^2$, 一定要注意上下限的变化,

需要特别注意的是，当这种类型的题$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5 x \sin x\ dx$，很自然的能够想到将$sinx$提到$d$后面，即$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5 x\ dsin\,x$，事实上这种写法是不严谨的，因为变换后函数的积分变量已经由之前的x变成了现在的$sinx$，所以对应的积分变量上下限也应该变化，但是这种上下限不变化并不会影响最终的结果，因此，一般不写这一步，直接从原式写到最后，知道这个事就可。

有三角函数的

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{f(\sin x)\, dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{f(\cos x)\, dx}$**（结论）**看到$sinx$和$cosx$分别在两侧，要想到$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = cosx$，即使用$x+\frac{\pi}{2}$代替$x$

$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx$, 证明过程用 $x+t$ 代替 x，下面是例题：$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+cos^2 x} dcosx$（这里不换积分限的原因见上）$= -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$

换元法的综合运用例题$\int_0^3 \frac{x^2}{(x^2-3x+3)^2} dx$

分析$x^2-3x+3 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$，因此可以假设$x-\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan x$

解：使用$\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$替换$x-\frac{3}{2}$，则原式$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t)^2}{\frac{9}{16}sec^2 t} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times sec^2 t\, dt = \cdots = 1 + \frac{8\sqrt{3}}{9}$

例题 2：$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\cos x}, -\pi < x < 0 \\ xe^{-x^2}, x \geq 0 \end{cases}$，求$\int_1^4 f(x-2)\, dx$

解：令 t=x-2，则$\int_1^4 f(x-2)\, dx = \int_{-1}^2 f(t)\, dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{1+\cos t}, dt + \int_0^2 te^{-t^2}\, dt$

③ 定积分的分部积分法：同不定积分的分部积分法

30、反常积分(无穷限)$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\, dx$

如果极限存在，则称这个无穷积分是收敛的

如果极限不存在，则称这个无穷积分是发散的

31、无界函数的反常积分 (瑕积分)

如果函数 f(x)在点 a 的任一邻域内都无界，那么点 a 称为函数 f(x)的瑕点（也称无界间断点）。无界函数的反常积分又称为瑕积分。

瑕点也就是广义积分 积分限中使积分函数不存在的点。

例题：$\int_{-1}^1 x^2\, dx = \int_{-1}^0 x^2\, dx + \int_0^1 x^2\, dx = -\infty$，如果不考虑瑕积分，

那么这个题就会得出错误答案-2

32、伽马函数Γ函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{s-1}dx \qquad (s>0)$$

结论$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)=s!$

33、X 型区域$(y_1=f(x),y_2=g(x))$，Y 型区域$(x_1=f(y),x_2=g(y))$

对于 X 型区域而言，在求定积分的时候，就是以$\int_a^b \quad dx$这种形式出现，对于 Y 型区域而言，在求定积分的时候，就是以$\int_a^b \quad dy$这种形式出现，两种区域的积分变量不同，但无论是哪一种区域，都应该是大的函数减去小的函数。在以$\int_a^b \quad dx$这种形式求解定积分的时候，选择的是 y 值较大的函数减去 y 值较小的函数(上−下)；在以$\int_a^b \quad dy$这种形式求解定积分的时候，选择的是 x 值较大的函数减去 y 值较小的函数(右−左)。综上，无论是哪种区域，都是大的减去小的。在实际做题中，可以用笔比划。

34、定积分求旋转体体积

例题：$x=a(t-\sin t)\quad y=a(1-\cos t)\qquad 0\le t\le 2\pi$，绕 y 轴旋转形成的图形体积

解：函数图像为

$V=\int_0^{2a}\pi\,{x_2}^2(y)\,dy-\int_0^{2a}\pi\,{x_1}^2(y)\,dy=\int_{2\pi}^{\pi}\pi\,[a(t-\sin t)]^2\,a\sin t\,dt-\int_0^{\pi}\pi\,[a(t-\sin t)]^2\,a\sin t\,dt$因为是 0 到 2a,因此，前一部分是$2\pi$到$\pi$

35、定积分求弧长

参数方程形式$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 弧长$s=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$

$y=f(x)$形式，可画成参数方程形式$\begin{cases}x=x\\y=f(x)\end{cases}$弧长$s=\sqrt{1+f'^2(x)}$

极坐标形式，$\rho=\rho(\theta)$ 弧长$s=\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}$

36、微分方程

（1）在微分方程这一章里面，$\int\frac{dy}{y}$可以直接写成$\ln y$，因为最后求的微分方程会有常数，常数能够把由绝对值产生的正负号吸收进去。

（2）齐次方程$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$，即$x,y$是以整体出现的，解决这类问题通常是通过以下三步：① 令$u=\frac{y}{x}$ ② $y=ux$ ③ $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$。

对于$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$这种方程存在常数，不能够直接换成齐次方程，因此可以假设$x=X+h,y=Y+k$，所以原式$=\frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}{a_2X+b_2Y+a_2h+b_2k+c_2}$，假如$\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0\\a_2h+b_2k+c_2=0\end{cases}$，那么$\frac{dy}{dx}$很容易化成齐次方程。因此当$\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$时，可通过直接求解二元一次方程组得到$k$和$h$的值，当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$时，可以假设$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\lambda$，即$a_1=\lambda a_2,b_1=\lambda b_2$，因此$\frac{dY}{dX}=\frac{(a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k)+c_1}{\lambda(a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k)+c_2}$，设$v=a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k$，也就是$\frac{dv}{dX}=a_1+b_1\frac{dY}{dX}$，带入，变成了只有$v$和$x$的可分离变量形式

（3）一阶线性微分方程，形式为$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$

则$y=e^{-\int p(x)dx}(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c)$

伯努利方程$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^n$

两边同除以y^n，变成$\frac{dy^{1-n}}{dx}+p(x)y^{1-n}=Q(x)$，设$z=y^{1-n}$，可得

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=Q(x)\rightarrow \boldsymbol{\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)Q(x)}$$

令$(1-n)p(x)=P(x),(1-n)Q(x)=q(x)$

套用一阶线性微分方程可得，$z=e^{-\int P(x)dx}(\int q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c)$

注意，这球出来的是$z=y^{1-n}$的函数，注意换回去。

37、可降阶的微分方程

（1）第一种形式$y^{(n)}=f(x)$

对于这种形式的，多次求积分即可，最后的结果中有 n 个常数系数

（2）第二种形式$y''=f(x,y')$

对于这种形式，假设$y'=p$，那么$y''=p'$，则$p'=f(x,p)$

例题：$(1+x^2)y''=2xy'$

解：假设$y'=p$，那么$y''=p'$，原式$=(1+x^2)p'=2xp$

$p'=\frac{dp}{dx}$ 从微分方程的角度，dp,dx可以分开，那么便有

$$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx$$

两边同时求积分$\int\frac{dp}{p}=\int\frac{2x}{1+x^2}dx$，可得$\ln p=\ln(1+x^2)+c$

因此，$p=c_1(1+x^2)$,【注：在上面我们说到过在微分方程里面积分结果是 ln 的不用加绝对值】

$$y=\int c_1(1+x^2)\,dx=\frac{1}{3}c_1x^3+c_1x$$

（3）第三种形式$y''=f(y,y')$ 没有 x

对于这种形式，假设$y'=p$，那么$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\times\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$

于是，第三种形式变为$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

例题：$yy''-y'^2=0$

解：假设$y'=p$，那么$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\times\frac{dy}{dx}=y\frac{dp}{dy}$

原式$=y\times p\frac{dp}{dy}-p^2=0$，移项，两边同时求积分:

① 若$p=0$，那么$y=c$，即y是常数

② 若$p \neq 0$，那么$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{p}dp$，两边同时积分$\ln y = \ln p + c$,即$y = c_1 p$,$c_2 y = \frac{dy}{dx}$→两边同时积分，$c_2 x = \ln y + c_3$,所以$y = \frac{1}{c_4}e^{c_2 x}$，这个表达式，包含了①这种情况

38、常系数线性齐次微分方程

$y'' + py' + qy = 0$对应的特征方程是$r^2 + pr + q = 0$

① $\triangle = p^2 - 4q > 0$ $r_1 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ $r_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$

此时，$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

② $\triangle = p^2 - 4q = 0$ $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$

此时，$y = (c_1 + c_2 x)e^{r_1 x}$

③ $\triangle = p^2 - 4q < 0$ 存在两个共轭复跟$r_1 = \alpha + \beta i, r_2 = \alpha - \beta i$

此时，$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

39、向量的知识点

方向余弦：设一个向量为$\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2, x_3)$，那么这个向量的方向余弦分别是$\cos\alpha = \frac{x_1}{|\overrightarrow{AB}|}, \cos\beta = \frac{x_2}{|\overrightarrow{AB}|}, \cos\gamma = \frac{x_3}{|\overrightarrow{AB}|}$

投影是一个标量，但是有正负（简单地理解他就是一个数），$P_{rj_a}b$表示的是b在a上的投影

数量积公式$a \cdot b = |a||b|\cos\langle a, b\rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$，也叫内积

向量积公式$a \times b$，向量积得出来的是一个向量,模为$|c| = |a||b|\sin\theta$,方向为“右手准则”，垂直于两个向量

因此，两个向量垂直的充要条件是数量积为 0，$a \cdot b = 0$

两个向量平行的充要条件是向量积为 0，$a \times b = 0$

向量积的求法：已知$\vec{a} = (2,1,1), \vec{b} = (1,-1,2)$，那么$a \times b =$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$，求这个三阶行列式即可

40、平面及方程

（1）点法式方程：知道一个点和一个面的法线就能确定这个面

设点$M(x_0,y_0,z_0)$，法线向量为$\vec{n}=(A,B,C)$，设面上一点为$M(x,y,z)$

可得$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

例题：给出一个面上的三个点$M_1(2,-1,4),M_2(-1,3,-2),M_3(0,2,3)$，确定这个平面

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,4,-6),\overrightarrow{M_1M_3}=(-2,3,-1)$$

那么法向量$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

求出法向量，然后利用点法式方程求出来(3 个点任意带进去一个)

（2）平面的一般方程$Ax+By+Cz+D=0$

① 当$D=0$时，平面过原点，$Ax+By+Cz=0$

② 当$A=0$时，平行于x轴形成的平面，$By+Cz+D=0$，法线方向垂直于 x 轴，其余当$B=0$或$C=0$时，类似

③ 当$A=B=0$时，方程为$Cz+D=0$即$z=-\frac{D}{C}$，z为常数

（3）平面的截距式方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$a,b,c$分别为平面的截距

41、两平面的夹角（在 0 到$\frac{\pi}{2}$之间），本质上是两个平面法向量的夹角

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{{A_1}^2+{B_1}^2+{C_1}^2}\sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2+{C_2}^2}}$$

（1）若两平面垂直，那么$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

（2）若两平面平行或重合$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

平面外一点$p_0(x_0,y_0,z_0)$，到平面$Ax+By+Cz+D=0$上的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D=0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

42、空间直线及其方程

（1）**一般方程**$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

（2）**对称式方程**，已知这条直线的方向向量$s=(m,n,p)$和这条直线上的一个点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,那么方程为$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$

这种的参数方程只需要让比值等于t，然后写就可以了

这里一种常见的例题：$\begin{cases}x+y+z+1=0\\2x-y+3z+4=0\end{cases}$，用对称式方程表示这个直线

解：令$x=1$，那么$\begin{cases}y+z=-2\\-y+3z=-6\end{cases}$，解得$\begin{cases}y=0\\z=-2\end{cases}$，所以这条直线过点$(1,0,-2)$,两个平面的法向量分别是$(1,1,1),(2,-1,3)$,因为直线的方向向量肯定垂直于上述两个法向量，因此两个法向量求向量积可得直线的方向向量，即$\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&1\\2&-1&3\end{vmatrix}=4i-j-3k$，因此，对称式方程为$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3}$

43、两直线之间的夹角&直线与平面之间的夹角

（1）两直线之间的夹角(方向向量的夹角)

$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{{m_1}^2+{n_1}^2+{p_1}^2}\sqrt{{m_2}^2+{n_2}^2+{p_2}^2}}$，性质也与两平面之间的夹角性质一样

（2）直线与平面之间的夹角

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

当直线与平面垂直时$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$

当直线与平面平行时$Am+Bn+Cp=0$

与前面直线与直线、平面与平面性质刚好相反

44、点线面 相关习题

（1）求一条直线和一个平面之间的交点时，通常会把直线的对称式变成参数方程，带入平面方程中，得到t值，从而得到点值

（2）平面束，对于空间直线$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$是由两个平面相交得出来的，但是这个空间直线的得出可以有许多对平面相交得出，这些平面组成的集合就叫做平面束

例题：直线$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$在平面$x+y+z=0$上的投影

解：直线的平面束为$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z=-1)=0$

【注意：写平面束时两个平面的左边常数项一定要是0】

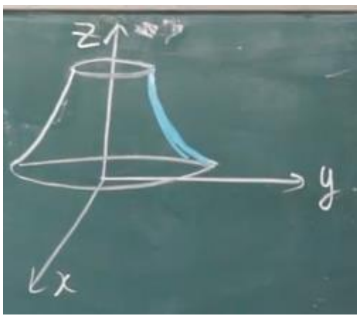
所以有$(1+\lambda)\times 1+(1-\lambda)\times 1+(-1+\lambda)\times 1=0$，得到$\lambda=-1$

所以平面束为$y-z-1=0$，所以投影为$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

45、空间曲线及其方程

空间曲线在坐标面上的投影，比如求这个曲面$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$在 xoy 上的投影，消去 z，由$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，削去 z 得到$H(x,y)$，那么投影为$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，在另外两个面上的投影一样的做法

46、旋转曲面



对于左图，假设在 yoz 平面上有一曲线 f(y,z)，由曲线上一点向 z 轴做曲线，得到半径为 **y**，若使其绕着 z 轴旋转得到如图所示的方程，绕 z 轴旋转，所以 z 轴上的高度不变，将这个立体图形的任意一个水平横截面向 xoy 做投影，得到圆的半径是$\sqrt{x^2+y^2}$，因此这里$\boldsymbol{y}=\sqrt{x^2+y^2}$,因此，旋转后的立体图形的方程为$f(\sqrt{x^2+y^2},z)$，其他的情况同理

伸缩：例如对于$x^2+y^2=1$，沿着 y 轴伸缩 2 倍，那么方程式变成了$x^2+\frac{y^2}{4}=1$，为什么是沿着 y 轴伸缩 2 倍，而 y 的系数却变小了了呢？原因是后面方程式里的 y 与最开始方程式中的 y 是不同的，回归题目，对$x^2+y^2=1$，沿着 y 轴伸缩 2 倍，假设伸缩后的$y'=2y$，则有$y=\frac{1}{2}y'$，带入原方程可得$x^2+\frac{(y')^2}{4}=1$，为了符合一般认识上的写法，故改写为$x^2+\frac{y^2}{4}=1$，其余伸缩的道理也是这样的

二次曲面包括：

（1）椭圆锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$

（2）椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

（3）双曲抛物面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$，又称为马鞍面

（4）椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

（5）单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

47、一元函数的极限：$x\to x_0, f(x)\to a, \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，一元函数的极限是$f(x)$上的点沿着$f(x)$**这条曲线的方向**从$x_0$两侧逼近$x_0$这一点。

二元函数的极限$(x,y)\to(x_0,y_0), f(x,y)\to A, \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，

二元函数的极限是$f(x,y)$上的点沿着**任意方向**逼近(x_0,y_0)

因此，对于一元函数而言，可导一定连续；而对于二元函数，如果偏导存在，函数未必连续，因为如果偏导存在，只能说明这个二元函数在$f(x)$的方向和$h(y)$的方向上的极限相同，但是其他方向上的极限并不能确定，因此函数未必连续。

48、多元复合函数求导

先看实际上是对谁的函数来决定是求导，还是求偏导，多余一个分支

求偏导，一个分支求导

① $z=f(u,v)\ \ u=\varphi(t),v=\psi(t)$，那么$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$

因为 z 其实是对 t 的函数，所以是$\frac{dz}{dt}$

② $z=f(u,v)\ \ u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$，那么$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$，同理，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$

因为 z 其实是对(x,y)的二元函数，所以应该是偏导$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

③$z=f(u,v,w)\ \ u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y),w=\omega(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$，同理，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$

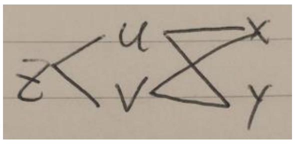
④ $z=f(u,v)\ \ u=\varphi(x,y),v=\psi(y)$，那么$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$，同理，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}$，因为 v 只有一个分叉，对应的是 y，因此是$\frac{dv}{dy}$

⑤ $z=f(u,x,y)\ \ u=\varphi(x,y)$ $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}$，同理，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$，为什么这个和前面的不一样：等号左侧是$\partial z$，而等号右边却成了$\partial f$，因为在等号左侧把函数$z$看成了是$x,y$的函数，而等号右边$f$是把$u,x,y$看成了三个变量，$u$和$x,y$一样，都是一个变量

综上，对于多元符合函数的求导基本上都要先画出一个路径图，然后根据路径图来判断是$\frac{\partial z}{\partial x}$还是$\frac{dz}{dx}$，是$\partial z$还是$\partial f$

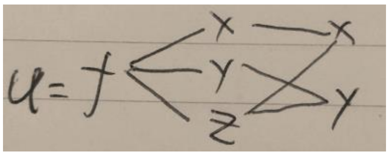
例题 1：$z=e^u\sin v\quad u=xy\quad v=x+y$

首先画出路径图



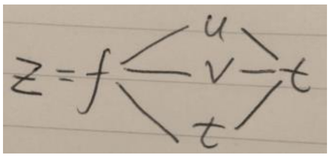
那么便有如下公式$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1=e^{xy}\sin(x+y)\cdot y+e^{xy}\cos(x+y)$，同理可得$\frac{\partial z}{\partial x}$

例题 2：$u=f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2},z=x^2\sin y$

首先画出路径图 

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2+z^2}+2ze^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x\sin y$$

例题 3：$z=f(u,v,t)=uv+\sin t\quad u=e^t,v=\cos t$

首先画出路径图，

z 实质上是一个变量 t 的函数，所以是$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}=v\cdot e^t-u\cdot\sin t+\cos t=e^t(\cos t-\sin t)+\cos t$

49、隐函数求导，主要分成两种情形：只有 1 个方程，方程组

（1）只有 1 个方程求隐函数

① 定理：对于隐函数$F(x,y)=0,y是x$的函数，那么$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}$

F_x'表示函数对 x 求偏导数，这个公式可由 48 中的复合函数求导得出

二阶偏导数直接把一阶偏导数带入，再求一边即可

② 定理：对于隐函数$F(x,y,z)=0$，z 是x,y的函数，那么$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$

例题：已知$x^2+y^2+z^2-4z=1$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$

解：设$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z-1$，那么$F_x'=2x$，$F_y'=2y$

$F_z'=2z-4$，这里我认为重点是再求F_x',F_y',F_z'时，把x,y,z都看成了同等的变量，比如求F_z'时，x,y都是常数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{2x}{2z-4}=\frac{x}{2-z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(2-z)-x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}$$

（2）$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$，$u,v$都是关于$x,y$的函数，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$，求

这种方程组的偏导数可以使用雅可比矩阵：$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u}&\frac{\partial F}{\partial v}\\\frac{\partial G}{\partial u}&\frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$，有

如下结论：$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$，比如 u 对 y 求偏导，就在下面把 u 的位置换成 y

在实际做题中没必要使用雅可比行列式，比如下题：

$\begin{cases}xu-yv=0\\yu+xv=1\end{cases}$，$u,v$都是关于$x,y$的函数，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$

对于题目中的式子，两个方程的两边同时对x求偏导，即

$$\begin{cases}u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\y\dfrac{\partial u}{\partial x}+v+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}u+x\,u_x{}'-y\,v_x{}'=0\\y\,u_x{}'+v+xv_x{}'=0\end{cases}$$

也就是$\begin{cases}x\,u_x{}'-y\,v_x{}'=-u\\y\,u_x{}'+x\,v_x{}'=-v\end{cases}$，根据克莱默法则，$u_x{}'=\dfrac{\begin{vmatrix}-u&-y\\-v&x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x&-y\\y&x\end{vmatrix}}$

$v_x{}'=\dfrac{\begin{vmatrix}x&-u\\y&-v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x&-y\\y&x\end{vmatrix}}$，其余两个以此类推

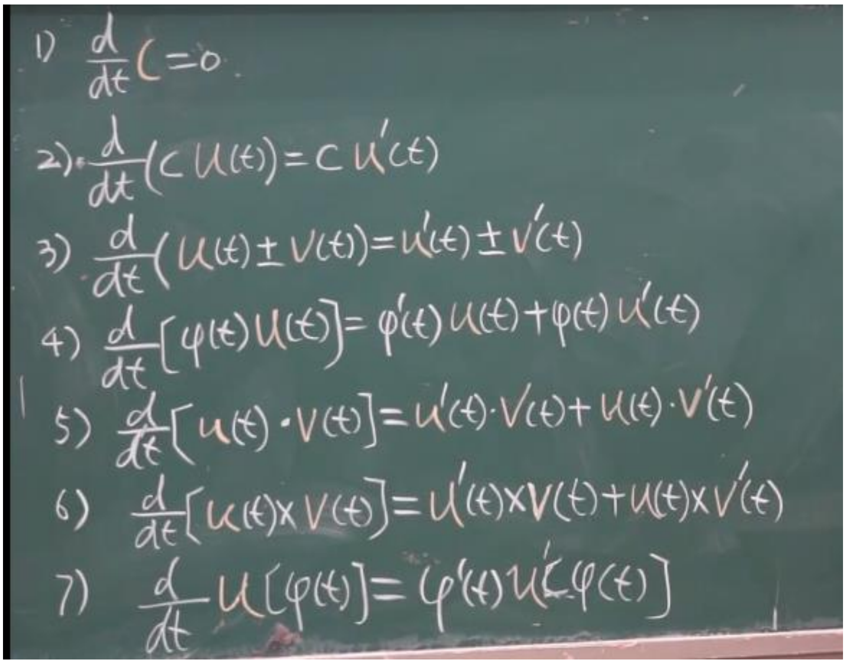
50、一元向量值函数

设$\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\varphi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$，写成向量形式，$\vec{r}=x\,i+y\,j+z\,k=\phi(t)i+\varphi(t)j+\omega(t)\,k$，对于这个三维向量组，这样的一种对应关系就叫向量(值)函数，一般形式如下：$\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\,i+f_2(t)\,j+f_3(t)\,k=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$，黑体的 f 是向量值函数，$f_1(t)$等是数量函数(就是平常的那种正常函数)

对于向量值函数求极限，就是它里面包含的函数均取极限

对于向量值函数求导，就是它里面包含的函数均求导

下述公式的推理过程一般都是将向量展开，分别求导，然后再合并



51、**空间曲线的切线和法平面**

（1）空间曲线以参数方程的形式给出

设$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\varphi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}, t\in[\alpha,\beta]$，则该空间曲线在点$(x_0,y_0,z_0)$处的切向量为

$T=(\phi'(t_0),\varphi'(t_0),\omega'(t_0))$，所以切线是$\frac{x-x_0}{\phi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$，

法平面是$\phi'(t_0)(x-x_0)+\varphi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

（2）空间曲线以 y,z 对 x 的函数形式给出

$\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\omega(x) \end{cases}$，这种形式的可以再加上一个$\begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x) \\ z=\omega(x) \end{cases}$，利用上面的参数方程求解即可

（3）通过两个平面的交线形式给出

例题：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，求在点$(1,-2,1)$处的切线和法平面

解决这种问题有固定的步骤，根据 Cramer 法则。

解：对方程组求对 x 的偏导，则有

$$\begin{cases} x+y\cdot\dfrac{dy}{dx}+z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \to \begin{cases} y\cdot y'+zz'=-x \\ y'+z'=-1 \end{cases}$$

根据 Cramer 法则，得到$y'=\dfrac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$，$z'=\dfrac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$

可得$y_x{}'=\frac{-x+z}{y-z}, z_x{}'=\frac{-y+x}{y-z}$,所以在$(1,-2,1)$点出的切向量为$(1,0,-1)$，之后切线，法平面即可得。

52、空间曲面的切平面和法线

（1）如果给出的曲面是一个隐函数$F(x,y,z)=0, x,y,z$是F的三个变量，对其中一个求偏导时，另外两个看作常数

切平面方程为 $F_x{}'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y{}'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z{}'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

法线方程为$\frac{x-x_0}{F_x{}'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y{}'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z{}'(x_0,y_0,z_0)}$

（2）如果给出的是这种$z=f(x,y)$形式，那么可以令$F=f(x,y)-z$ x,y,z是F的三个变量，对其中一个求偏导时，另外两个看作常数。利用上述方法可得，切平面的方程为 $f_x{}'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y{}'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

法线的方程是$\frac{x-x_0}{f_x{}'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y{}'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$

53、方向导数存在，偏导数不一定存在

方向导数指的是多元函数（以二元函数为例）曲面上的沿着某一点的

某一个方向的切线的斜率，记作 $\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$

如果二元函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微，那么方向导数存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0,y_0)} = {f_x}'(x_0,y_0)\cos\alpha + {f_y}'(x_0,y_0)\cos\beta$$

同理，如果三元函数$f(x,y,z)$在(x_0,y_0,z_0)处可微，那么方向导数存在，

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0,y_0,z_0)} = {f_x}'(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + {f_y}'(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + {f_z}'(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

例题：求$z = xe^{2y}$，求在$p(1,0)$处，从$p(1,0)$到$q(2,-1)$的方向导数

$$\overrightarrow{pq} = (1,-1), e_l = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,0)} = e^{2y}|_{(1,0)} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,0)} = 2xe^{2y}|_{(1,0)} = 2$$

所以$\frac{\partial z}{\partial l}|_{(1,0)} = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,0)}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,0)}\cos\beta = 1\times\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\times\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

因此，方向导数是沿着某一方向的在某一点的斜率，是一个数

总结：在多元函数中，如果：

① 偏导存在$\nrightarrow$多元函数连续，因为偏导仅限于有限的方向导数存在

② 如果函数在某点可微$\rightarrow$在这一点的偏导存在

③ 如果函数在某点的偏导存在且连续$\rightarrow$函数在这一点可微

④ 在函数这某点可微$\rightarrow$在这一点连续

⑤ 如果函数在某点可微$\rightarrow$在这一点的方向导数存在

54、梯度是一个向量，在某点(x_0,y_0)处的梯度为$grad(x_0,y_0)$

$$grad(x_0,y_0)=\left(f_x{}'(x_0,y_0),f_y{}'(x_0,y_0)\right)=\nabla f(x_0,y_0)$$

因此，方向导数可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0,y_0)}=\left(f_x{}'(x_0,y_0),f_y{}'(x_0,y_0)\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)$$

$$=\ grad(x_0,y_0)\cdot\overrightarrow{e_l}=|grad(x_0,y_0)|\cdot|\overrightarrow{e_l}|\cdot\cos\theta$$

θ指的是梯度的模和单位向量之间的夹角，同时$|\overrightarrow{e_l}|=1$

① $\theta=0$时，$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0,y_0)}=|grad(x_0,y_0)|$，因此，梯度表示某一函数在该点处的方向导数沿着该方向取得最大值，即函数在该点处沿着该方向（此梯度的方向）变化最快，变化率最大（为该梯度的模）。

② $\theta=\pi$时，$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0,y_0)}=-|grad(x_0,y_0)|$

③ $\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0,y_0)}=0$，方向导数为 0，也就是函数值不变，即一圈圈的等温线，可以连想爬山问题，方向导数等于 0，就是高度没变，在一个高度上一圈圈的转

例题：$f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$，在$p_0(1,1,0)$处沿什么方向变化最快？

变化最快有两重含义：一是增加最快，二是减小最快

解：$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y^2,\frac{\partial f}{\partial y}=-2xy,\frac{\partial f}{\partial z}=-1,$

因此$\nabla f=(3x^2-y^2,-2xy,-1)$，因此沿着$\nabla f(1,1,0)=(2,-2,1)$这个方向增加最快，沿着$-\nabla f(1,1,0)=(-2,2,-1)$这个方向减小最快

55、多元函数的极值

在一元函数中，导数等于 0 的点就是驻点，在多元函数中，使偏导同时等于 0 的点叫做驻点。

判断二元函数的一个驻点是不是极值点

给定一个函数$z=f(x,y)$，首先是找出驻点，即满足$f_x{}'(x_0,y_0)=0,f_y{}'(x_0,y_0)=0$,的点，然后令$A=f_{xx}{}''(x_0,y_0),B=f_{xy}{}''(x_0,y_0),C=f_{yy}{}''(x_0,y_0)$，如果

① $AC-B^2>0$，那么存在极值$\begin{cases}A<0,\text{极大值}\\A>0,\text{极小值}\end{cases}$

② $AC-B^2=0$，无法判断是否存在极值点

③ $AC-B^2<0$，那么不存在极值点

函数的最值可能存在三个地方：驻点、端点、偏导不存在的点

56、拉格朗日乘数法

求一个函数$z=f(x,y)$的极值或者最值，其有一个约束$\varphi(x,y)=0$，则需要定义一个辅助函数$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

通过$\begin{cases}L_x{}'=0\\L_y{}'=0\\\varphi(x,y)=0\end{cases}$ 根据这三个方程可以得出使得 z 取极值或最值的点

对于多于两个约束条件的函数，比如$u=f(x,y,z,t)$，已知其约束条件有两个，$\varphi(x,y,z,t)=0,\phi(x,y,z,t)=0$

通过$\begin{cases}u_x{}'=0\\u_y{}'=0\\u_z{}'=0\\u_t{}'=0\\\varphi(x,y,z,t)=0\\\phi(x,y,z,t)=0\end{cases}$，通过这些方程即可求出所对应的点

例题：一个长方体的表面积为a^2，求使得体积最大的长方体的长宽高

解：已知$2(xy+yz+xz)=a^2$，求使得$v=xyz$最大的xyz的值

那么设辅助函数$L(x,y,z)=xyz+2(xy+yz+xz)-a^2$

令$\begin{cases} L_x{}' = 0 \\ L_y{}' = 0 \\ L_z{}' = 0 \\ 2(xy + yz + xz) = a^2 \end{cases}$，可以解得$x = y = z = \frac{a}{\sqrt{6}}$

57、二重积分的概念：曲顶柱体的体积，定义式为

$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \triangle \sigma_i f(\xi_i, \eta_i)$, λ是指每个区域中的两个点的距离(这里叫做直径), 二重积分的完整定义为,$f(x, y)$是区域D上的有界函数, 将区域分成 n 个区域，$\triangle \sigma_1$,$\triangle \sigma_2, \ldots$,$\triangle \sigma_n$，在每个$\triangle \sigma_i$上任取一点$(\xi_i, \eta_i)$，那么曲顶柱体的体积为$f(\xi_i, \eta_i)\ \triangle \sigma_i$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \triangle \sigma_i f(\xi_i, \eta_i) = \iint_D f(x, y)\, d\sigma$$

二重积分的做题模式主要有两种：直角坐标系和极坐标系

在直角坐标系下，即使用直角坐标来分割区域，也就是$d\sigma = dxdy$，所以$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \iint_D f(x, y)\, dxdy$，在极坐标系下的表示在**60**

58、二重积分中比较重要的性质:

① D 由D_1，D_2组成

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\, d\sigma$$

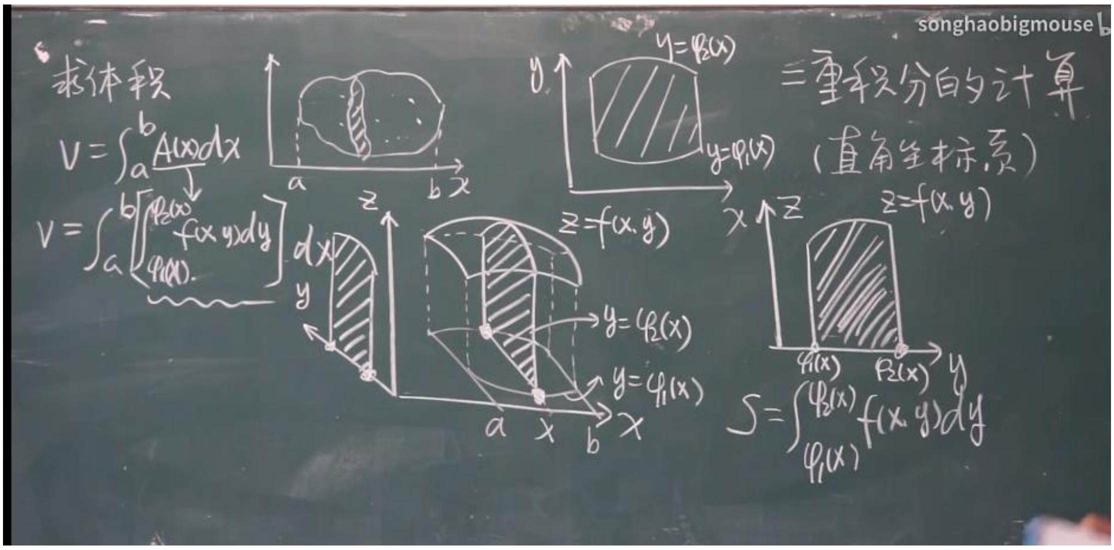
② M，m 分别是 f(x,y)的最大值和最小值，那么存在

$$m\sigma \le \iint_D f(x, y)\, d\sigma \le M\sigma$$

由此，可以得到$m \le \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y)\, d\sigma \le M$，也就是说，在区域 D 内肯定存在一点使得$f(\xi_i, \eta_i) = \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y)\, d\sigma$

59、在直角坐标系中求解二重积分

（下图是公式推出来的过程）



对 X 型区域的二重积分

$$V=\int_a^b\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\}\,dx=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

对 Y 型区域的二重积分

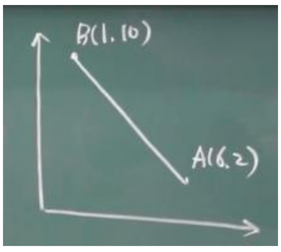
$$V=\int_c^d\{\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx\}\,dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx$$

用 X 型区域就是用笔垂直于 x 轴平移，用 Y 型区域就是用笔垂直于 y 轴平移，

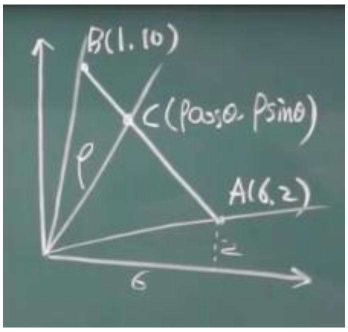
一般能用直角坐标系求出来的题比较简单，再求二重积分的时候，比较难的是极坐标下的二重积分和二重积分的换元

60、极坐标的基础知识：ρ是极坐标上的点到原点的距离，θ是这个点与原点和及坐标轴的方向形成的夹角。

在做题过程中，将直角坐标转化成极坐标是最重要的一步，比如下面的例子



比如给两个点 A, B 坐标已给出，将其转化成极坐标的第一步是先求出角度，“旋转---与原点分别连接”，很显然，θ的范围是$(arctan1/3, arctan10)$，然后是求ρ，方法是从直线上任取一点与原点连接



如左图所示，从 c 点到原点的距离是ρ，方向是θ，那么c点的坐标是$(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$，根据三点共线(相似、或者斜率)都可以用$\theta$表示出$\rho$

最终的结果是$\rho = \frac{58}{8\cos\theta + 5\sin\theta}$

简便的方法：对于直角坐标转换成极坐标，只需要记住转换公式

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

转换成极坐标后，二重积分的计算公式可以变成

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\boldsymbol{\rho} d\rho d\theta$$

在这里要注意将一个区域换成极坐标的方法，大概和将直线换成极坐标相同，先“旋转”得出角度，在从原点(极坐标中好像叫极点)沿着方向θ发射一条射线，看这条射线与区域所交的点的范围

例题：求$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$，D 是半径为$a$，圆心在原点的圆

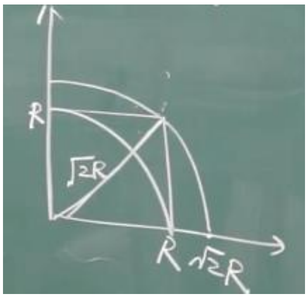
解：可将直角坐标转换成极坐标：$0 \le \theta \le 2\pi$，$\rho = a$

则原式=$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-\rho^2}\boldsymbol{\rho} d\rho$　**[注意：一定不要忘记$\boldsymbol{\rho}$]**

可得原式=$\pi(1 - e^{-a^2})$

根据上面$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \pi(1 - e^{-a^2})$还可以求$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

具体求法：做如下 3 个区域面积



那么便有

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \le \iint_S e^{-x^2-y^2}\,dxdy \le \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

根据上面的结果则有 D1 是小圆，D2 是大圆，S 是正方形

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) \le \iint_S e^{-x^2-y^2}\,dxdy \le \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2})$$

同理，$\iint_S e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^R dx \int_0^R e^{-x^2-y^2} dy = \int_0^R e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = (\int_0^R e^{-x^2} dx)^2$

当$R \to +\infty$时，$\int_0^R e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$，即

$$\frac{\pi}{4} \le \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4}$$

根据夹逼定理，可得$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

二重积分的换元法

在连续的条件下，令$x = x(u,v)$，$y = y(u,v)$即将x,y换成u,v的函数，变量从之前的x,y换成了现在的u,v，那么积分区域由之前的 D 变成了D'，在$x(u,v)$，$y(u,v)$均可取偏导的情况下，雅可比行列式

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0$$

则二重积分变成了

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f\{x(u,v),y(u,v)\}\,|J(u,v)|dudv$$

例题：求$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$，D 是由 x 轴，y 轴，$x+y=2$围成的区域

解：令$u = y - x, v = y + x$,那么$x = \frac{v-u}{2}, y = \frac{u+v}{2}$

最重要的是积分区域的变换

题目中给出的积分区域的三根线分别变成了由另外三根线围成的区域

$$x = 0 \quad \to \quad u = v$$

$$y = 0 \quad \to \quad u = -v$$

$$x + y = 2 \quad \to \quad v = 2$$

则，原式$=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}dudv=e-e^{-1}$

注意：如果在某个点或者某条线上雅可比行列式为 0，公式仍然成立

当积分区域不好表示、被积函数不好积的时候常常采用换元

61、三重积分的引入是求密度不均匀的物体的质量，即取出极小的一块用一个点$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$来表示这一块的密度，$\triangle v$表示这一块的体积，那么该物体的质量为$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\triangle v$，可以记作：

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv$$

Ω是一个三维的积分区域

求三重积分$\iiint_\Omega z^2\,dxdydz$，$\Omega$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

解:原式$=\int_{-c}^{c}dz\iint_{D_z}z^2\,dxdy$, D_z是z一定时,由x,y组成的一个切面,即$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}\to\frac{x^2}{(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}})^2}=1$

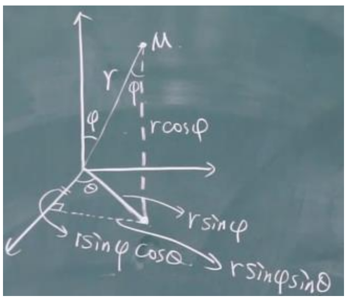
$$\int_{-c}^{c}dz\iint_{D_z}z^2\,dxdy=\int_{-c}^{c}z^2dz\iint_{D_z}dx\,dy=\int_{-c}^{c}z^2\cdot\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=$$

$$\pi ab\int_{-c}^{c}z^2\cdot\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

62、柱面坐标，把x,y换成极坐标

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv\to\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\\z=z\end{cases}\to\iiint_\Omega f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\,\boldsymbol{\rho}d\rho d\theta dz$$

球面坐标



$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv \to \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\to \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta\,, r\sin\varphi\sin\theta\,, r\cos\varphi)\,\boldsymbol{r^2\sin\varphi}\,drd\varphi d\theta$$

63、重积分的应用

（1）求曲面面积 A

对于曲面$z = f(x,y)$，曲面的面积$A = \iint_D \sqrt{1 + (f_x{}')^2 + (f_y{}')^2}\,d\sigma$，D 是曲面 A 在$xoy$平面上的投影。

例题：求球心在原点，半径为a的球面的表面积

解：取上半球面$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，其在$xoy$平面上的投影为$D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le a^2\}$，$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

所以$A = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,d\sigma = \iint_D \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,d\sigma$，令$x = \rho\cos\theta\,, y = \rho\sin\theta$，那么$0 \le \theta \le 2\pi, \rho \to a$，所以$A = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \sqrt{\frac{a^2}{a^2-\rho^2}}\,\rho d\rho = 2\pi a^2$，所以整个球的表面积为$4\pi a^2$

（2）求质心$(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\,\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma}$$

$\mu(x,y)$表示密度函数，如果密度是均匀的，那么便有如下公式：

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma} = \frac{\iint_D x\ \,d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{1}{A}\iint_D x\ \,d\sigma$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\,\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma} = \frac{\iint_D y\ \,d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{1}{A}\iint_D y\,d\sigma$$

例题：有两个圆，分别是$\rho = 4\sin\theta\,, \rho = 2\sin\theta$，求这两个圆产生的阴影面积的质心。（均匀）

因为均匀，而且这个图形对称，所以$\bar{x}=0$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,d\sigma=\frac{1}{3\pi}\iint_D y\,d\sigma=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho\sin\theta\,\rho d\rho=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta^4\,d\theta=\frac{7}{3}$$

（3）求转动惯量

$\mu(x,y)$表示密度函数

$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\,d\sigma$$

$$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\,d\sigma$$

（4）求引力

$$F=\left(\iiint_\Omega \frac{G\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dv,\iiint_\Omega \frac{G\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}dv,\iiint_\Omega \frac{G\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}dv\right)$$

64、曲线积分

（1）第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）

$$\int_L f(x,y)\,ds$$

$f(x,y)$是被积函数，可以当成密度，L是曲线，是积分区域

如果曲线L可以用参数方程表示$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，$\alpha\le t\le\beta$，那么有

$$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt$$

对于三维的，如下述：

$$\int_L f(x,y,z)\,ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\omega'(t))^2}dt$$

例题：$\int_L\sqrt{y}\,ds$　　$L{:}\,y=x^2,O(0,0)\;B(1,1)$形成的一段弧，求积分

L 可以写成如下的参数方程$\begin{cases}x=t\\y=t^2\end{cases},0\le t\le 1$,所以

$$\int_L\sqrt{y}\,ds=\int_0^1\sqrt{t^2}\sqrt{1+(2t)^2}dt=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

（2）第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）

$$\int_L P(x,y)\,dx+\int_L Q(x,y)\,dy=\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy$$

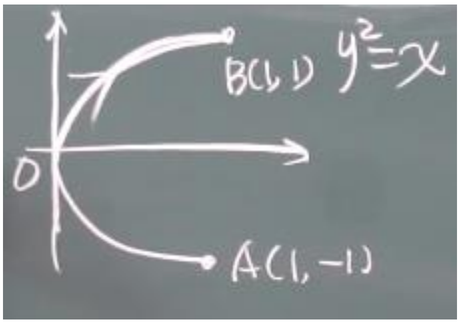
这里的 L 是一段有向曲线，要指明其起点和终点

如果曲线L可以用参数方程表示$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, α对应的是起点，β对应的是终点，那么第二类曲线积分可以由下面表示

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\,dt$$

一定要注意，α不一定比β小，但是起点终点一定要区分好。

例题 1：$\int_L xy\,dx$,曲线如下图



方法 1：用 x 的方向：$A\to O$，$O\to B$

那么，原式$=\int_{AO}xy\,dx+\int_{OB}xy\,dx=\int_1^0 x\cdot(-\sqrt{x})\,dx+\int_0^1 x\cdot(\sqrt{x})\,dx=2\int_0^1 x\cdot(\sqrt{x})\,dx=\frac{4}{5}$

方法 2：用 y 的方向，那么，原式$=\int_{AB}xy\,dx=\int_{-1}^1 y^3\cdot 2ydy=\frac{4}{5}$

所以，对于第二类曲线积分，重要的是先明确起点和终点，然后再取判断是用 x 还是用 y

例题 2：$\int_L y^2\,dx$，L 是上半圆周$x^2+y^2=a^2$

解：设 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, 0\le\theta\le\pi$ 所以，原式$=\int_0^\pi(a\sin\theta)^2(-a\sin\theta)\ d\theta=-\frac{4}{3}a^3$

第一类积分和第二类积分的转换

$$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt \quad (1)$$

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P(\varphi(t),\psi(t))\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}}$$

$$+ Q(\varphi(t),\psi(t))\frac{\psi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}}\}\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P(\varphi(t),\psi(t))\cos\alpha + Q(\varphi(t),\psi(t))\cos\beta\}\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$$

将所得的式子与（1）比较，可得，最新的这个式子$= \int_L \{P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\}\,ds$，即

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \int_L \{P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\}\,ds$$

基本上都是将第二类转化成第一类

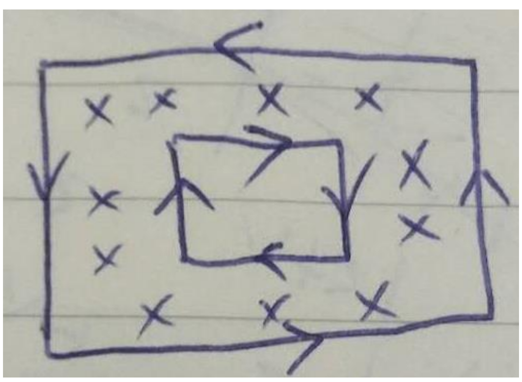
65、格林公式

闭区间 D 由分段光滑的曲线 L 围成，P(x,y),Q(x,y)在 D 上有一阶连续偏导，那么有

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

即由一个在 D 上的二重积分变成了在闭曲线 L 上的曲线积分，L 是 D 的正方向上的边界曲线。

正方向就是要始终保持区域内的点始终在左侧



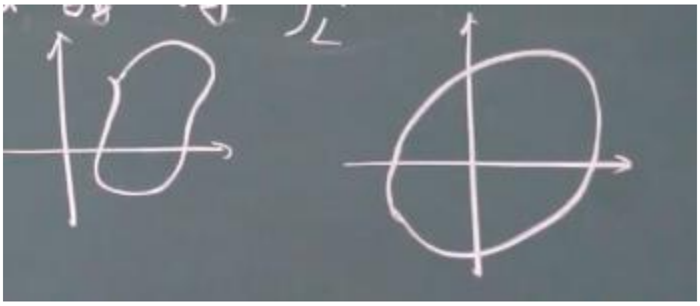
例题：$\iint_D e^{-y^2}\,dxdy$，D 是由原点，$A(1,1)$，$B(0,1)$构成的面积

思路：根据常规想法，$\iint_D e^{-y^2}\,dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}\,dy$，$e^{-y^2}$的定积分很难求，所以可以使用格林公式。

解：设$Q=x\cdot e^{-y^2}$,$P=0$，那么$\iint_D e^{-y^2}\,dxdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy=\oint_L x\cdot e^{-y^2}dy=\int_{OA}x\cdot e^{-y^2}dy+\int_{AB}x\cdot e^{-y^2}dy+\int_{BO}x\cdot e^{-y^2}dy=\int_{OA}x\cdot e^{-y^2}dy=\int_0^1 x\cdot e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$

例题 2：$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，L 是无重点，分段光滑，不过原点的连续闭曲线。

题目解析：不过原点有两种，分别如下图：



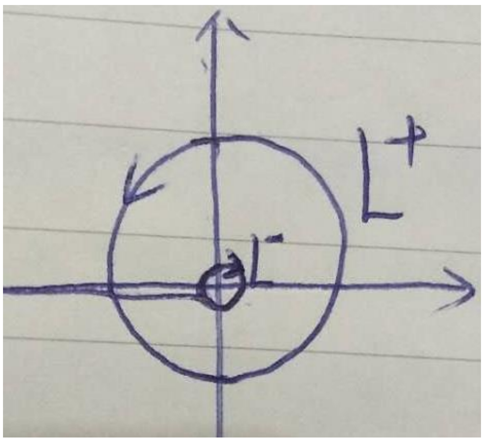
（0，0）有可能在区域 D 内，也有可能不在原点内

因此，本题要分成两种情况。

解：设$P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，经过计算可得$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

（1）第一种情况，$(0,0)\notin D$,此时原式$=0$

（2）第二种情况，$(0,0)\in D$，此时在区域 D 内去**适当小**的一个圆，即



$$\oint_{L^+}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\oint_{L^-}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$$

那么$\oint_{L^+}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\oint_{L^-}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，设$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，

所以，原式$=-\int_{2\pi}^{0}\frac{r^2}{r^2}d\theta=2\pi$，

所以，此时$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$

66、常数项级数的概念和性质

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

这就叫做无穷级数，常数项级数是无穷级数的一种，他的每一项都是常数，无穷项的和就做无穷级数，u_n叫做一般项。其中$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$，这个叫做部分和，如果$\lim_{n\to\infty} S_n = A$，那么称无穷级数$S_n$是收敛的，否则就称为发散的。假设无穷级数所有项的和是 S，那么$S - S_n$叫做余项，记作$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$

例题：$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$，$a \neq 0, q$是公比，求其的敛散性

解：

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

① $q \neq 1$时

（1）若$|q| > 1$，则S_n是发散的

（2）若$|q| < 1$，则$S_n = \frac{a_1}{1-q}$，即S_n是收敛的

② 若$q = 1$时

无穷级数变成了无穷个a相加，显然此时是发散的。

综上，**当$|q| \geq 1$时，等比级数是发散的，当$|q| < 1$时，等比级数是收敛的。注意等比级数求和公式$\frac{a}{1-q}$**

比如$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \cdots$的和是$\frac{1}{1-q}$

类似于$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$，$a \neq 0, q$是公比这种的就叫做等比级数（或称为几何级数）

性质 1：如果$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于 S，那么$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = ks$

性质 2：如果$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$分别收敛于s和σ，那么$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm v_n = s + \sigma$，也就是说两个收敛的级数相加减后一定也收敛，但是相加减后收敛的两个级数未必收敛

性质 3：无穷级数去掉、添加或更改有限项后，其敛散性不变，和有可能变，也可能不变。

性质 4:$\sum u_n$收敛，则对其中的每项任意加括号后所得的级数也收敛，且和不变。但是加括号后收敛的级数未必收敛，而如果加括号后的级数发散，则原级数也发散。加括号的无穷级数可以化成子级数

调和级数是$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$是发散的，因为虽然其通项是$\frac{1}{n}$，是越来越小的，但是这个和确实越来越大的。严格的证明是：

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

如果调和级数是收敛的，那么$S_{2n}-S_n=0$，但是$S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}$，所以调和级数是发散的。

67、正项级数

定理 1：正向级数$\sum u_n$收敛的充要条件是部分和$\{s_n\}$是有界的

定理 2：$\sum u_n, \sum v_n$都是正向级数，且$u_n \le v_n$

如果$\sum u_n$是发散的，那么$\sum v_n$也是发散的

如果$\sum v_n$是收敛的，那么$\sum u_n$也是收敛的

注意：$\sum u_n$是收敛的，$\sum v_n$不一定收敛；$\sum v_n$是发散的，$\sum u_n$不一定发散，因为比瘦子胖的不一定是胖子，而比胖子瘦的不一定是瘦子。

例题：证明$\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$是发散的

$\because n(n+1) < (n+1)^2$, $\therefore \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \sum \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \sum \frac{1}{n+1}, \sum \frac{1}{n+1}$是一个调和级数（去掉了第一项），是发散的，所以$\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$是发散的（因为比胖子还胖的肯定是胖子）

P 级数$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$，当$p \leq 1$时，$n^p \leq n, \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$，此时 P 级数是发散的，当$p > 1$时，P 级数是收敛的。

可以看出，调和级数是 P 级数的一种特殊情况，上述例题使用的方法是比较审敛法。

定理 3：改进的比较审敛法，$\sum v_n$，$\sum u_n$都是正项级数

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \ (0 \leq l < +\infty)$此时，若$\sum v_n$收敛，则$\sum u_n$收敛，而当$l = +\infty$时，若$\sum v_n$收敛，则$\sum u_n$无法判断。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \ (l > 0,$可以等于$+\infty)$此时，若$\sum v_n$发散，则$\sum u_n$发散，而当$l = 0$时，若$\sum v_n$发散，则$\sum u_n$无法判断。

例题：

定理 4：比值审敛法，如果$\sum u_n$是正项级数，如果存在$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，若$\rho < 1$，则正项级数收敛，若$\rho > 1$，则正项级数发散，若$\rho = 1$，则无法判断该正项级数的敛散性，只能够更换别的方法。

定理 5：根植审敛法（柯西审敛法），如果$\sum u_n$是正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，如果若$\rho < 1$，则正项级数收敛，若$\rho > 1$，则正项级数发散，若$\rho = 1$，则无法判断该正项级数的敛散性，只能够更换别的方法。

68、交错级数（莱布尼茨定理）

对于交错级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$，如果满足以下两个条件：① $u_n \geq u_{n+1}$ ② $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则该级数收敛

比如：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$这就是个交错级数，而且满足上述的两个条件，因此，这个交错级数是收敛的。

69、任意项级数（u_n正负未知）

定理 1：如果$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，那么$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

绝对收敛：如果$\sum|u_n|$收敛，那么称$\sum u_n$绝对收敛

条件收敛：如果$\sum u_n$是收敛的，而$\sum|u_n|$是发散的，那么称$\sum u_n$条件收敛

定理 2：$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=u_1+u_2+u_3+\cdots$是任意项级数，如果存在

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l$$

（1）$l<1$时，$\sum u_n$绝对收敛

（2）$l>1$时（包括+∞），$\sum u_n$发散

70、幂级数

形如$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$就叫做幂级数，$a_0,a_1,a_2\ldots$等叫做系数，$x,x^2,\ldots,x^n$叫做 x 的函数。

阿贝尔定理：对于幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$，如果当$x=x_0$时收敛，在区间$|x|<|x_0|$中，幂级数绝对收敛。如果当$x=x_0$时发散，在区间$|x|>|x_0|$中，幂级数发散。

R叫做收敛半径，$(-R,R)$叫做收敛区间，然后再判断在端点处是否收敛，即收敛域包括$(-R,R),[-R,R),(-R,R],[-R,R]$

怎么样求收敛半径？

定理：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，$R=\frac{1}{\rho}$,

如果$\rho=0$，那么$R=\infty$，即幂级数在$x\in(-\infty,+\infty)$上都是收敛的，

如果$\rho=+\infty$，那么$R=0$，即幂级数只有在$x=0$处才是收敛的

如果$\rho=c$，那么$R=\frac{1}{c}$，幂级数在$x\in(-\frac{1}{c},\frac{1}{c})$之间是收敛的，在端点处时候收敛需要判断。**而对于只取到偶数项或者奇数项的幂级数，便不能再使用这个定理，再求积分区间时可以使用比值审敛法，如下例题：** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛半径

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}x^{(2n+1)}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}}=4|x|^2<1$，那么$|x|<\frac{1}{2}$，即$R=\frac{1}{2}$

性质 1：$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在收敛域 I 上是连续的

性质 2：$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在收敛域 I 上可积，$\int_0^x S(t)\,dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},x\in I$

幂级数逐项积分后与原幂级数的收敛半径相同，重新考察端点处得出新的收敛域

性质 3：$S(x)$在$(-R,R)$内可导，$S'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$，幂级数逐项积分后与原幂级数的收敛半径相同，重新考察端点处得出新的收敛域

例题：$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的收敛域，和函数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1=\rho,R=\frac{1}{\rho}=1$,所以收敛区间为$(-1,1)$，当$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n-1}$，是发散的，当$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n$同样是发散的，因此幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的收敛域为$(-1,1)$，设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，两边同时取积分，即

$$\int_0^x S(x)\,dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\,dt$$

即$\int_0^x S(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$，所以$S(x)=\frac{1}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$

$S\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{2})^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=4$，因此，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}S(x)=2$

其他例题：$\sum\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$的和函数

令$S(x)=\sum\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=x\cdot\sum\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$,

令$S_1(x)=\sum\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$,${S_1}'(x)=2\sum\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$

令 $S_2(x)=\sum\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$ ， ${S_2}'(x)=\sum(-1)^{n-1}x^{2n-2}=(-x^2)^{n-1}=\frac{1}{1+x^2}$ ， 所 以 $S_2(x)=arc\tan x$ ， ${S_1}'(x)=2arc\tan x$ ， $S_1(x)=2\int_0^x arc\tan x\,dx=2xarc\tan x-\ln(1+x^2)$ ， 所 以 $S(x)=2x^2arc\tan x-x\ln(1+x^2)$

其实无论题目怎么变，都要将他先求导或者积分，消除掉 n，将式子化成x^n，因为我们只知道$\sum x^n=\frac{1}{1-x}$

71、函数展开成幂级数

（1） $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$

（2） $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\ (-\infty<x<\infty)$

（3） $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\quad(-1<x<1)$

（4）$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots\quad(-1<x<1)$

（5）$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots(-1<x<1)$

（6）$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$

（7）$a^x=1+x\ln a+\frac{x^2(\ln a)^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n(\ln a)^n}{n!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$

（8）$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6-\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots(-1<x<1)$

（9）$arctanx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots(-1\le x\le 1)$

这九个公式只要记住前三个就好了，后六个都是根据前三个推出来的，

比如$a^x = e^{\ln a^x} = e^{xlna}$，然后将$x$换成$xlna$即可，又比如$\ln(1-x)$它是$1-x$的定积分，因此，其展开式直接“积回去”就可以了。

例题：将$f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$展成$(x-1)$的幂级数

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{1}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{3+x})$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{2}}\right) = \frac{1}{2}\sum(-1)^n\left(\frac{(x-1)}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{4+(x-1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{4}}\right) = \frac{1}{4}\sum(-1)^n\left(\frac{(x-1)}{4}\right)^n$$

所以$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{3+x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+3}})(x-1)^n$

收敛区间为$-1 < \frac{(x-1)}{2} < 1$且$-1 < \frac{(x-1)}{4} < 1$，即$-3 < x < 5$，当$x = -3$时，$f(x)$为发散的，当$x = 5$时，$f(x)$为发散的，所以收敛域为$x \in (-3,5)$

在做这种题时，一定要注意将题目中要求的换成已知的 9 个公式中的一种，然后还要注意收敛域的变换。