概率论与数理统计 03

1、概率的性质

性质 1： 因为不可能事件ϕ与必然事件Ω互为对立事件，故 $P(\phi)=1-P(\Omega)=0$

性质 2：（有限可加性）若有限个事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$互不相容，则有$P(\cup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

性质 3： 对任一事件 A，有$P(\bar{A})=1-P(A)$

性质 4： 对于任意两个时间 A 与 B，若$A\supset B$，则$P(A-B)=P(A)-P(B)$

推论（单调性）若$A\supset B$，则$P(A)\geq P(B)$

性质 5: 对于任意两个事件 A 与 B,有$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$　　证明：因为$A-B=A-AB$，且$AB\subset A$,所以由性质 4 可以得到$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$

性质 6：（加法公式）对任意两个事件 A,B，有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

推论（半可加性）对任意两个事件 A,B，有$P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$，对任一 n 个事件有$P(\cup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

2、概率的连续性

（一）极限事件的定义

（1）对于$\mathcal{F}$中任一单调不减的事件序列$\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}_3\subset$

$\cdots\mathcal{F}_n\subset\cdots$，称可列并$\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$为$\{\mathcal{F}_n\}$的极限事件，记为

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{F}_n=\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$$

（2）对于$\mathcal{F}$中任一单调不增的事件序列$E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots E_n\supset\cdots$，称可列并$\cap_{n=1}^{\infty}E_n$为$\{E_n\}$的极限事件，记为

$$\lim_{n\to\infty}E_n=\cap_{n=1}^{\infty}E_n$$

对$\mathcal{F}$上的一个概率P：

若它对$\mathcal{F}$中任一单调不减的事件序列$\{\mathcal{F}_n\}$均成立，

$$\lim_{n\to\infty}P(\mathcal{F}_n)=P(\lim_{n\to\infty}\mathcal{F}_n)$$

若它对$\mathcal{F}$中任一单调不减的事件序列$\{E_n\}$均成立，

$$\lim_{n\to\infty}P(E_n)=P(\lim_{n\to\infty}E_n)$$

3、条件概率

条件概率的定义：条件概率涉及两个事件 A 与 B，在事件 B 已发生的条件下，事件 A 在发生的概率称为条件概率，记为$P(A|B)$

设 A 与 B 是基本空间Ω中的两个事件，且$P(B)>0$，则称$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$为“在 B 发生条件下 A 发生的条件概率”简称条件概率。

性质 1：条件概率是概率，所以满足概率的三条公理：

（1）非负性　$P(A|B)\geq 0$

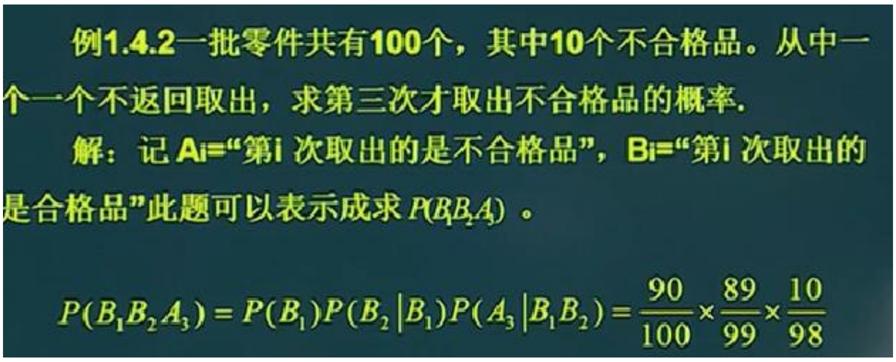
（2）正则性　$P(\Omega|B)=1$

（3）可加性　若事件$A_1,A_2,\ldots A_n,\ldots$互不相容，则$P(\cup_{n=1}^{\infty}A_n|B)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n|B)$，当$B=\Omega$时，条件概率转化为无条件概率。

性质 2：（乘法公式）求几个事件同时发生的概率

（1） 若$P(B)>0$，则$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$

（2） 若 $P(A_1,A_2,\ldots A_{n-1})>0$ ， 则 $P(A_1,A_2,\ldots A_{n-1})=P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$



性质三:（全概率公式） 求最后结果的概率

设$B_1,B_2,\ldots B_n$为样本空间Ω的一个分割，即$B_1,B_2,\ldots B_n$互不相容，且$\cup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，如果$P(B_i)>0,i=1,2,\ldots,n$ 则对于任一事件 A 有$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$

(1) 全概率公式的简单形式：设 A 与 B 是任意两个事件，假入$0<P(B)<1$，则$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})$

(2) 条件$B_1,B_2,\ldots B_n$的样本的一个分割，可改成$B_1,B_2,\ldots B_n$互不相容，且$A\subset\cup_{i=1}^{n}B_i$，全概率公式依然成立。

性质 4:（贝叶斯公式）已知“最后结果”，求“原因”的概率

设$B_1,B_2,\ldots B_n$为样本空间Ω的一个分割，即$B_1,B_2,\ldots B_n$互不相容，且$\cup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，如果$P(A)>0,P(B_i)>0,i=1,2,\ldots,n$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

（1） $B_1,B_2,\ldots B_n$可以看作是导致 A 发生的原因

（2） $P(B_i|A)$是在事件 A 发生的条件下，某个原因B_i发生的概率，成为后验概率

（3）　贝叶斯公式又称为“后验概率公式”或“逆概率公式”

（4）　$P(B_j)$为先验概率

4、两个事件的独立性

对于任意两个事件 A 与 B，若$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立，简称 A 与 B 独立，否则称 A 与 B 不独立或相依。

性质 1：若事件 A 与 B，则事件 A 与$\bar{B}$独立，$\bar{A}$与 B 独立，$\bar{A}$与$\bar{B}$独立

设有 n 个事件$A_1, A_2, \dots A_n$假如对所有可能的$1 \le i < j < k < \cdots \le n$，如果以下等式均成立：

$$\begin{cases} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) \\ P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ \dots \\ P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) \end{cases}$$

则称 n 个事件$A_1, A_2, \dots A_n$相互独立

如果只有$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$，只能是两两独立

若事件$A_1, A_2, \dots A_n$，满足两两独立，三三独立，…，nn 独立称为相互独立

5、多个事件的独立性

（一）定义：若实验 E_1 的任意结果与实验 E_2 的任意结果都是相互独立的事件，则称这两个实验相互独立，或称独立实验。

（二）伯努利实验：只有两个结果（成功与失败，或记为 A 与$\bar{A}$）的试验称为伯努利实验。在一次伯努利实验中，设成功的概率为 p，即$P(A)=p, P(\bar{A})=1-p, 0<p<1$

n 重伯努利实验：有 n 个（次）相同的、独立的伯努利实验组成的随机试验称为 n 重伯努利实验。