随机变量及其分布 02

1、离散型随机变量函数分布

设 X 是离散型随机变量，X 的分布列为

X	X_1	X_2	…	X_n	…
P	$P(X_1)$	$P(X_2)$	…	$P(X_n)$	…

则$Y=g(X)$也是一个离散型随机变量，此时Y的分布列就可很简单的表示为

X	$g(X_1)$	$g(X_2)$	…	$g(X_n)$	…
P	$P(X_1)$	$P(X_2)$	…	$P(X_n)$	…

当$g(X_1),g(X_2),\dots,g(x_n),\dots$中有某些值相等时，则把那些相等的值分别合并，并把对应的概率相加即可

2、连续型随机变量函数分布

（一）当$g(x)$为严格单增时

定理 1: 设 X 是连续随机变量，其密度函数为$p_x(x)$，$Y=g(X)$是另一个随机变量。若$y=g(x)$严格单调，其反函数$h(y)$有连续导函数，则

$Y=g(X)$的密度函数为$p_Y(y)=\begin{cases}P_X[h(y)]|h'(y)|,a<y<b\\ 0,其他\end{cases}$

其中，$a=min\{g(-\infty),g(\infty)\},b=max\{g(-\infty),g(\infty)\}$

证明： 假定$g(x)$为单调增函数，此时反函数$h(x)$也是单调增函数，且$h'(y)>0$，记$a=g(-\infty)b=g(\infty)$，这意味着$y=g(x)$仅在(a,b)取值，于是：

当$y<a$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当$y > b$时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = 1$

当$a \le y \le b$时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P\big(X \le h(y)\big) = \int_{-\infty}^{h(y)} P_X(x)\,dx$，由此得到$Y$的密度函数为$p_Y(y) = \begin{cases} P_X[h(y)]|h'(y)|, a < y < b \\ 0, 其他 \end{cases}$，当$g(x)$为单调减函数时同理

定理 2: 设随机变量X服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$, 则当$a \ne 0$时，有

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

定理 3: 设随机变量X服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，则$Y = e^X$的概率密度函数为：$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma} \exp\left\{-\frac{(\ln y - \mu)}{2\sigma^2}\right\}, y > 0 \\ 0, 其他 \end{cases}$这个分布被称为对数正态分布，记为$LN(\mu, \sigma^2)$, 其中$\mu$称为对数均值，$\sigma^2$称为对数方差

对数正态分布一般适用于：

（1）绝缘材料的寿命服从对数正态分布

（2）设备故障的维修时间服从对数正态分布

（3）家中仅有两个小孩的年龄差服从对数正态分布

定理4 设随机变量X服从伽玛分布$Ga(\alpha, \lambda)$，则当k>0时，有

$$Y = kX \sim Ga(\alpha, \lambda/k)$$

定理5： 若随机变量X的分布函数$F_X(x)$为严格单调增的连续函数，其反函数$F_X^{-1}(y)$存在，则$Y = F_X(X)$服从（0,1）上的均匀分布$U(0, 1)$.

(二) 当$g(x)$为其它形式时

当寻求$Y = g(X)$的分布有困难时，可直接由Y的分布函数$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$出发，按函数$g(x)$的特点来作为特例处理

3、分布的其他特征

（一）K 阶矩 $E(X-c)^k$

（二）K 阶中心矩 $E(X-EX)^k$

（三）变异系数　标准差/均值

（四）偏度与峰值

（五）中位数与分位数　$F(X_\alpha)=P(X\le x_\alpha)=\int_{-\infty}^{x_\alpha}p(x)\,dx=\alpha$

（六）众数