概率论与数理统计 03

1、概率的性质

性质 1： 因为不可能事件ϕ与必然事件Ω互为对立事件，故$P(\phi)=1-P(\Omega)=0$

性质 2：（有限可加性）若有限个事件$A_1,A_2,\dots,A_n$互不相容，则有$P(\cup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

性质 3： 对任一事件 A，有$P(\bar{A})=1-P(A)$

性质 4： 对于任意两个时间 A 与 B，若$A\supset B$，则$P(A-B)=P(A)-P(B)$

推论（单调性）若$A\supset B$，则$P(A)\geq P(B)$

性质 5：对于任意两个事件 A 与 B，有$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$ 证明：因为$A-B=A-AB$，且$AB\subset A$，所以由性质 4 可以得到$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$

性质 6：（加法公式）对任意两个事件 A,B，有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

推论（半可加性）对任意两个事件 A,B，有$P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$，对任一 n 个事件有$P(\cup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

2、概率的连续性

（一）极限事件的定义

（1）对于$\mathcal{F}$中任一单调不减的事件序列$\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}_3\subset$

$\cdots \mathcal{F}_n \subset \cdots$，称可列并$\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$为$\{\mathcal{F}_n\}$的极限事件，记为

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

（2）对于$\mathcal{F}$中任一单调不增的事件序列$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots E_n \supset \cdots$，称可列并$\cap_{n=1}^{\infty} E_n$为$\{E_n\}$的极限事件，记为

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \cap_{n=1}^{\infty} E_n$$

对$\mathcal{F}$上的一个概率P：

若它对$\mathcal{F}$中任一单调不减的事件序列$\{\mathcal{F}_n\}$均成立，

$$\lim_{n\to\infty} P(\mathcal{F}_n) = P(\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n)$$

若它对$\mathcal{F}$中任一单调不减的事件序列$\{E_n\}$均成立，

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P(\lim_{n\to\infty} E_n)$$

3、条件概率

条件概率的定义：条件概率涉及两个事件 A 与 B，在事件 B 已发生的条件下，事件 A 在发生的概率称为条件概率，记为$P(A|B)$

设 A 与 B 是基本空间Ω中的两个事件，且$P(B) > 0$，则称$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 为“在 B 发生条件下 A 发生的条件概率”简称条件概率。