

清华大学大学数学竞赛培训教材

1, 2, 3, 5 章及其经典习题

第一部分 例题精讲与习题

第一章 极限与连续性

1.1 基本概念与内容提要

1) .极限存在的条件：左极限等于右极限。

相关联的题型：(1) 函数连续性和可导性的判断及应用；(2) 求函数的间断点：①第一类间断点（左右极限存在）：a>可去间断点：左右极限存在且相等但函数在该点无定义或函数值不等于极限值。b>跳跃间断点：左右极限存在但不相等。②第二类间断点：

除第一类间断点以外所有的间断点；(3) 用定义求导数，若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在，

则函数在 x_0 处可导且 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 。所以，判断可导性就是判断极限

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 是否存在；(4) 求函数的渐近线：①水平渐近线： $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ，则

$y=A$ 是 $f(x)$ 的水平渐近线；②铅直（垂直）渐近线： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ，则 $x = x_0$ 是 $y = f(x)$

的铅直（垂直）渐近线；③斜渐近线： $y = kx + b$ 其中 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$ ；

④斜渐近线最多有两条，水平渐近线最多有两条，水平渐近线与斜渐近线的总条数最多有两条。

2) .连续函数的极限

3) .常用极限： $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccot x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arccot x = \pi, \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

4) .极限的四则运算

5) 恒等变形、约去零因子、有理化等常用化简方法

6) .极限存在准则（夹逼定理、单调有界定理）

7) .两个重要极限及其变形： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

8) .洛比达法则（重点），常与洛比达法则一起交替使用，常考的共有七种不定式极限：

① $\frac{0}{0}$ 型，常用方法：约去零因子；等价无穷小替换；变量代换；洛比达法则；恒等变形

② $\frac{\infty}{\infty}$ 型，常用方法：分子分母同时除以最高次幂项；变量替换；洛比达法则

③ $\infty - \infty$ 型，常用方法：通分；倒代换；有理化

④ $0 \cdot \infty$ 型，常用方法：变形；变量代换；取倒数化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

⑤ 0^0 型，常用方法：取对数化为 $0 \cdot \infty$ 型；恒等变形；变量代换

⑥ ∞^0 型，常用方法：取对数化为 $0 \cdot \infty$ 型；恒等变形消除不定式；利用重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \text{ 等价替换}$$

⑦ $1^{+\infty}$ 型，常用方法：取对数化为 $0 \cdot \infty$ 型；利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

9) . 无穷小得比较

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0, \beta(x) \neq 0$ ，则 $\alpha(x), \beta(x)$ 即为无穷小量，

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ ，则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，

记为 $\alpha(x) = o[\beta(x)]$ ，或者说当 $x \rightarrow x_0$ 时 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小；

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C (C \neq 0)$ ，则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha(x)$ 是与 $\beta(x)$ 同

阶的无穷小。特别的，当 $C=1$ 时，称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为

$\alpha(x) \sim \beta(x) (x \rightarrow x_0)$ ；

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C (C \neq 0)$ ，则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha(x)$ 是与 $\beta(x)$

的 k 阶无穷小。

等价无穷小替换求极限（注意：有界函数与无穷小的积是无穷小）：等价无穷小是指在乘积型极限中，一个无穷小因式可以用与它等价的无穷小因式代替。

常用等价无穷小：当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sin x \sim x, \tan x \sim x, e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x,$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^a - 1 \sim ax, a^x - 1 \sim x \ln a, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x, \arcsin x \sim x,$$

$\arctan x \sim x$ 。注意：高阶无穷小、 k 阶无穷小的判断及应用。

补充：无穷大量比较：

① 当 $n \rightarrow \infty$ 时，无穷大的阶数由低到高排列为：
 $\ln n, n^\alpha (\alpha > 0), n^\beta (\beta > \alpha > 0), a^n (a > 1), n^n$ ；

② 当 $x \rightarrow \infty$ 时，无穷大的阶数由低到高排列为：
 $\ln x, x^\alpha (\alpha > 0), x^\beta (\beta > \alpha > 0), a^x (a > 1), x^x$ 。

9) 利用泰勒公式、中值定理求极限，求极限常用迈克劳林公式有：

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

10) 利用定积分的定义求极限

11) 证明数列极限存在的方法：①夹逼定理②单调有界定理③级数敛散法：若级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在④级数收敛的必要条件：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

补充：给定数列 $\{a_n\}$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 收敛。

所以，判断数列的敛散性可以转化为判断级数的敛散性。

12) 抓大头公式： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, n = m \\ 0, n < m \\ \infty, n > m \end{cases}$ ，数列极限也可用。

13) 中值定理求极限：关键是将欲求的极限写成中值定理的形式，在求函数式具有规律比或其分子分母之项具有中值定理那样的关联或函数式非常复杂难以化简时，尤其是像求类未定的极限如 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ ，可以考虑使用中值定理。

14) 利用级数收敛的必要条件求极限：若 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 。
求极限可以转化为求定积分、判断级数的敛散性等。

1.2 例题选讲

例 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ 。

解：方法一：由拉格朗日中值定理得 $e^{\tan x} - e^{\sin x} = e^{\xi} (\tan x - \sin x)$ ，其中 ξ 在 $\sin x$ 与 $\tan x$ 之间，当 $x \rightarrow 0$ 时 $\xi \rightarrow 0, e^{\xi} \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\xi} (\tan x - \sin x)}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x + \cos^2 x) = 3 \end{aligned}$$

方法二：先处理一下，在使用等价无穷小和洛比达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} (e^{\tan x - \sin x} - 1)}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} = 3$$

例 2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x} dx$ 。

解： $\exists \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 使得 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{\xi^n}{2(1+\xi)}$ ， $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi^n}{2(1+\xi)} = 0$

例 3. 设 $D_r: x^2 + y^2 \leq r^2$ ，则 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^2} \iint_{D_r} e^{-x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy =$ _____。

解： $\exists (\xi, \eta) \in D_r$ 使得 $\iint_{D_r} e^{-x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy = \pi r^2 e^{-\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta)$ ，

当 $r \rightarrow 0^+$ 时 $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$ ，

$$\therefore \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^2} \iint_{D_r} e^{-x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy = \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \pi e^{-\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta) = \pi$$

例 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} (\cos^2 \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos^2 \frac{n-1}{n} \pi) =$ _____。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\cos^2 \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos^2 \frac{n-1}{n} \pi \right) = \pi \int_0^1 \cos^2 \pi x dx$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{1 + \cos 2\pi x}{2} dx = \pi \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

例 5. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (n+1-k) \left[n C_n^k \right]^{-1}$ 。

解：当 $k \leq n-1$ 时， $\frac{n+1-k}{n C_n^k} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{k(k-1)(k-2)\dots 2}{(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-k)} \leq \frac{1}{n^2}$

$$\therefore 0 \leq \frac{n+1-k}{n C_n^k} \leq \frac{1}{n^2} (k \leq n-1)$$

$$\therefore 0 \leq \sum_{k=1}^n (n+1-k) [nC_n^k]^{-1} \leq \frac{n-1}{n^2} + \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n^2}$$

$$\text{即 } 0 < \sum_{k=1}^n (n+1-k) [nC_n^k]^{-1} \leq \frac{2n-1}{n^2}, \text{ 又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2} = 0,$$

$$\text{由夹逼定理得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (n+1-k) [nC_n^k]^{-1} = 0$$

例 6. 证明：数列 $\sqrt{7}, \sqrt{7-\sqrt{7}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}}, \dots$ 收敛，并求其极限。

证明：设该数列通项为 x_n ，则 $x_{n+2} = \sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}$ ，令 $f(x) = \sqrt{7-\sqrt{7+x}}$ ，则 $f(2)=2$ ， $x_{n+2} = f(x_n)$ ， $x_{n+2} - 2 = f(x_n) - f(2)$ ，由拉格朗日中值定理得：存在 ξ 介于 x ， 2 之间，使得 $f(x) - f(2) = f'(\xi)(x-2)$ ，

$$\therefore f'(x) = -\frac{1}{4\sqrt{7+x}\sqrt{7-\sqrt{7+x}}},$$

$$\therefore |x_{n+2} - 2| = |f(x_n) - f(2)| = |f'(\xi_n)| \cdot |x_n - 2|, \text{ 由题意得 } 0 < x_n < 7,$$

$$\therefore 0 < \xi_n < 7, |f'(\xi_n)| = \frac{1}{4\sqrt{7+\xi_n}\sqrt{7-\sqrt{7+\xi_n}}} < \frac{1}{4\sqrt{7}\sqrt{7-\sqrt{14}}} < 1$$

$$\text{即 } \alpha = |f'(\xi_n)|, \text{ 则 } |x_{n+2} - 2| = \alpha |x_n - 2|, 0 < \alpha < 1$$

$$\therefore |x_{2k} - 2| = \alpha^{k-1} |x_2 - 2|,$$

$$\text{由 } 0 \leq |x_{2k} - 2| = \alpha^{k-1} |x_2 - 2| \text{ 且 } \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{k-1} |x_2 - 2| = 0,$$

$$\text{由夹逼定理得 } \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{2k} - 2| = 0 \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = 2, \text{ 同理可得 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = 2,$$

所以， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ ，即原数列的极限为 2。

$$\text{例 7. 设函数 } f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < -1 \\ x^3, & -1 \leq x < 2 \\ x^2+4, & x \geq 2 \end{cases} \text{ 又设 } \alpha, \beta \text{ 分别是 } y = f(x) \text{ 的反函数}$$

$y = g(x)$ 的不可导点中横坐标最小者和最大者。求：

$$(1) \text{ 求 } \alpha, \beta; (2) \text{ 设 } x_0 \in (\alpha, \beta), x_{n+1} = \frac{2(1+x_n)}{2+x_n}, n = 0, 1, 2, \dots, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

解：(1) $\because g'(x) = \frac{1}{f'(x)}$, $g(x)$ 的不可导点即 $f'(x)$ 不存在或 $f'(x) = 0$ 的点的

取值, 显然 $f'(0) = 0$, 又 $\because f(2) = 8, \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$,

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12, \therefore f'(2)$ 不存在, 同理可得 $f'(-1)$ 不存

在, $\therefore g(x)$ 在 $x_1 = f(0) = 0, x_2 = f(-1) = -1, x_3 = f(2) = 8$ 处均不可导,

$\therefore \alpha = -1, \beta = 8$

(2) 由题意得 $x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}}(x_n - \sqrt{2})$,

$\therefore |x_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{2 - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} |x_n - \sqrt{2}| < (2 - \sqrt{2}) |x_n - \sqrt{2}|$,

$\therefore 0 < |x_n - \sqrt{2}| \leq (2 - \sqrt{2})^n |x_0 - \sqrt{2}|$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt{2})^n |x_0 - \sqrt{2}| = 0$,

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \sqrt{2}| = 0, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$

例 8. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2 + 1}{n}}$ 。

解: $\because \frac{i^2}{n^2} < \frac{i^2 + 1}{n^2} < \frac{(i+1)^2}{n^2}, \therefore$ 由介值定理得 $\exists \xi_i \in \left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ 使得 $\xi_i^2 = \frac{i^2 + 1}{n^2}$,

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2 + 1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{i^2 + 1}{n^2}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \frac{n^2 + 1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \xi_i^2}$

$= \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

例 9. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k$ 。

解: $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1} \therefore \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n \sum_{k=1}^n (k-1) C_{n-1}^{k-1} + n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1}$

$\therefore \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n(n-1) \cdot 2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = \frac{1}{4}$$

例 10. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \sin \frac{k\pi}{n^2}$ 。

解：由泰勒公式得 $\sin \frac{k\pi}{n^2} = \frac{k\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \sin \frac{k\pi}{n^2} &= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \pi \int_0^1 x(1+x) dx = \frac{5}{6} \pi \end{aligned}$$

例 11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + \sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x^2 + \sqrt[5]{x}}$ 关于 x 的阶为_____。

$$\text{解: } \sqrt[5]{x^2 + \sqrt[3]{x}} = x^{\frac{1}{15}} \left(1 + x^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{15}} \left[1 + \frac{1}{5} x^{\frac{5}{3}} + o\left(x^{\frac{5}{3}}\right)\right]$$

$$\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[5]{x}} = x^{\frac{1}{15}} \left(1 + x^{\frac{9}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{15}} \left[1 + \frac{1}{3} x^{\frac{9}{5}} + o\left(x^{\frac{9}{5}}\right)\right]$$

$$\therefore f(x) = x^{\frac{1}{15}} \left[\frac{1}{5} x^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{3} x^{\frac{9}{5}} + o\left(x^{\frac{5}{3}}\right) - o\left(x^{\frac{9}{5}}\right) \right] \text{ 是关于 } x \text{ 的 } \frac{1}{15} + \frac{5}{3} = \frac{26}{15} \text{ 阶。}$$

例 12. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=A$, 且 $f'(x) = \frac{1}{e^x + |f(x)|}$

($x > 0$), 求证: $1 \leq A \leq 1 + \ln 2$ 。

证明: 由 $f'(x) = \frac{1}{e^x + |f(x)|} > 0$ 得 $f(x)$ 单调递增, $\therefore f(x) > f(0) = 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{e^x + |f(x)|} < \frac{1}{e^x + 1}, \therefore f(x) - f(0) \leq \int_0^x \frac{dt}{e^t + 1} = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + \ln 2$$

$$\therefore 1 \leq f(x) \leq 1 + \ln 2 + \ln \frac{e^x}{e^x + 1}, \therefore 1 \leq A \leq 1 + \ln 2。$$

例 13. 求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ 的表达式。

解：当 $|x| < 1$ 时 $f(x)=1$ ；当 $|x| > 2$ 时 $f(x) = \frac{x^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{x^2}\right)^n + \left(\frac{2}{x}\right)^n} = \frac{x^2}{2}$ ；

当 $1 < x < 2$ 时 $f(x) = x \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^n} + \left(\frac{x}{2}\right)^n} = x$ ；

当 $-2 < x < -1$ 时，若 n 为偶数 $f(x) = -x \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^n} + \left(\frac{x}{2}\right)^n} = -x$ ，

若 n 为奇数 $f(x) = x \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^n} + \left(\frac{x}{2}\right)^n} = x$ ，

\therefore 当 $-2 < x < -1$ 时该极限不存在，即 $f(x)$ 不存在；

又 $f(1)=1, f(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{n+1}} = 2$ ，

当 $x = -1$ 时，若 n 为偶数 $f(-1)=1$ ，若 n 为奇数 $f(-1) = \frac{1}{2}$ ， $\therefore f(-1)$ 不存在；

当 $x = -2$ 时，若 n 为偶数 $f(-2)=2$ ，若 n 为奇数 $f(-2) = 1$ ， $\therefore f(-2)$ 不存在；

故， $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x \leq 1, \\ x, & 1 < x \leq 2, \\ \frac{x^2}{2}, & x > 2 \text{ 或 } x < -2 \end{cases}$ ，其定义域为 $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$

例 14. 已知 $x_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{17}{16} \cdot \dots \cdot \frac{1 + 2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}}}$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：分子 $= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1) \dots (2^{2^{n-1}} + 1) = 2^{2^n} - 1$ ，

分母 $= 2^{1+2+2^2+\dots+2^{n-1}} = 2^{2^n - 1}$ ，

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n} - 1}{2^{2^n - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^{2^n - 1}} \right) = 2$ 。

真题演练：设 $x_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^{2^n})$ ，其中 $|a| < 1$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

答案： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1-a}$

例 15. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$ 。

解：由迈克劳林公式得： $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 + 1 - \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{8}x^4 + o(x^4), \cos x - e^{x^2} = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{x^2 \left[-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \right]} = \frac{\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{12}$$

例 16. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \ln n}{n - \ln n} \right)^{\frac{n}{\ln n}}$ 。

$$\text{解：} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \ln n}{n - \ln n} \right)^{\frac{n}{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2 \ln n}{n - \ln n} \right)^{\frac{n - \ln n}{2 \ln n} \cdot \frac{2n}{n - \ln n}} = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n - \ln n} \right)$$

$$= \exp \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x - \ln x} \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 - \frac{1}{x}} \right) = e^2$$

例 17. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right]$

解：设 $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ，则

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2 \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{2n} + \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln 2 \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right] = \ln 2
 \end{aligned}$$

例 18. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta - (n-1)^\beta} = 2011$, 求 α, β 的值。

解: $\because \frac{n^\alpha}{n^\beta - (n-1)^\beta} = \frac{n^{\alpha-\beta}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\beta}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta - (n-1)^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\beta-\alpha}}{1 - (1-x)^\beta} = 2011, \therefore \beta - \alpha > 0, \beta \neq 0$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\beta-\alpha}}{1 - (1-x)^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\beta-\alpha}}{\beta x} = \frac{1}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} x^{\beta-\alpha-1} = 2011$$

$$\therefore \beta - \alpha - 1 = 0, \frac{1}{\beta} = 2011, \therefore \alpha = -\frac{2010}{2011}, \beta = \frac{1}{2011}$$

例 19. 已知有整数 $n (n > 4)$ 使极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x^n + 7x^4 + 2)^\alpha - x \right] = A \neq 0$, 求 α 。

解: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x^n + 7x^4 + 2)^\alpha - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^{n\alpha} (1 + 7x^{4-n} + 2x^{-n})^\alpha - x \right]$

由极限的存在性得 $n\alpha = 1, n = \frac{1}{\alpha}$,

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 + 7x^{4-n} + 2x^{-n} \right)^\alpha - x \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 + 7t^{n-4} + 2t^n \right)^\alpha - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha \left(7t^{n-4} + 2t^n \right)}{t} = \alpha \lim_{t \rightarrow 0} \left(7t^{n-5} + 2t^{n-1} \right) = A \neq 0, \therefore n = 5, \alpha = \frac{1}{n} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

例 20. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \frac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \right)$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{(k+1)^2 - (k+1) + 1}{k^2 - k + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

例 21. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 5}{(k+3)!}$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!} \right] = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

例 22. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3 + 1^2} + \frac{2^2}{n^3 + 2^2} + \dots + \frac{n^2}{n^3 + n^2} \right)$.

$$\text{解: 设 } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2}, \because \frac{k^2}{n^3 + n^2} \leq \frac{k^2}{n^3 + k^2} \leq \frac{k^2}{n^3 + 1}$$

$$\text{又 } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

$$\therefore \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3 + n^2)} \leq x_n \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3 + 1)}$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3 + n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3 + 1)} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3} \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3 + 1^2} + \frac{2^2}{n^3 + 2^2} + \dots + \frac{n^2}{n^3 + n^2} \right) = \frac{1}{3}$$

例 23. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$

解：原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

$$\therefore \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{n}, \therefore \frac{2n+2}{n+1} \leq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{2n+2}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n} = 2, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2$$

例 24. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!}$

解： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \dots + (n-1)!}{n!}$

$$\therefore 0 < \frac{1! + 2! + \dots + (n-1)!}{n!} < \frac{(n-2)(n-2)! + (n-1)!}{n!} = \frac{2n-3}{n(n-1)}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{n(n-1)} = 0, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \dots + (n-1)!}{n!} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!} = 1$$

例 25. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + n} \right) \right|$

解：原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sin \pi \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sin \frac{\pi n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \right| = 1$

例 26. 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 求证: $\exists \xi \in \mathbb{R}$ 使得 $f(\xi) + \xi = 0$ 。

证明：令 $F(x) = f(x) + x$, 则 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right] = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right] = +\infty$$

$\therefore \exists N > 0$ 使得 $F(N) > 0, F(-N) < 0$,

由零点定理得: $\exists \xi \in R$ 使得 $F(\xi) = 0$ 即 $f(\xi) + \xi = 0$

例 27. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}{2} \right)^n \left[\frac{2}{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2} \right]^{\left[\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}{2} \right]} \\ &= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}{2} \right) \right] = \exp \left[\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right) \right] \\ &= e^{\frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{2} \ln b} = \sqrt{ab} \end{aligned}$$

例 28. 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=1$,

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) + f(1+2\sin x) - 2f(1-3\tan x)}{x}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) + f(1+2\sin x) - 2f(1-3\tan x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1) + f(1+2\sin x) - f(1) - 2[f(1-3\tan x) - f(1)]}{x} \\ &= f'(1) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\sin x) - f(1)}{2\sin x} \cdot \frac{2\sin x}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-3\tan x) - f(1)}{-3\tan x} \cdot \frac{-3\tan x}{x} \\ &= 1 + f'(1) \cdot 2 - 2f'(1) \cdot (-3) = 1 + 2 + 6 = 9 \end{aligned}$$

例 29. 设 $F(x)$ 除 $x=0$ 与 $x=1$ 两点外, 对全体实数有定义, 且满足 $F(x) + F\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1+x$,

求函数 $F(x)$ 。

解: $F(x) + F\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1+x$ (1), 将 x 代换成 $\frac{x-1}{x}$,

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right) + F\left(\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}\right) = F\left(\frac{x-1}{x}\right) + F\left(\frac{-1}{x-1}\right) = 1 + \frac{x-1}{x} = \frac{2x-1}{x} \quad (2)$$

$$x \text{ 代换成 } \frac{-1}{x-1}, \quad F\left(\frac{-1}{x-1}\right) + F\left(\frac{\frac{-1}{x-1}-1}{\frac{-1}{x-1}}\right) = F\left(\frac{-1}{x-1}\right) + F(x) = 1 + \frac{-1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1} \quad (3)$$

(1)+(3)-(2)得

$$2F(x) = (1+x) + \frac{x-2}{x-1} - \frac{2x-1}{x} = \frac{x(x^2-1) + x(x-2) - (x-1)(2x-1)}{x(x-1)} = \frac{x^3 - x^2 - 1}{x(x-1)}$$

$$\text{即 } F(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{2x(x-1)}$$

例 30. 设 $a_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots$,

$$x_n = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

证明: $\because a_n > 0, n = 1, 2, \dots, \therefore \{x_n\}$ 单调增加, $x_1 = 1 - \frac{1}{1+a_1}$,

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 - \frac{1}{1+a_1} + \frac{1+a_2-1}{(1+a_1)(1+a_2)} = 1 - \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_1} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)} \\ &= 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)} \end{aligned}$$

$$\text{设 } x_{n-1} = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})}$$

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \\ &= 1 - \frac{1+a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})(1+a_n)} + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \\ &= 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \end{aligned}$$

$\therefore x_n < 1, \{x_n\}$ 单调有界, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

例 31. n 为自然数, $f(x)$ 在 $[0, n]$ 上连续, $f(0) = f(n)$,

试证: 存在 $a, a+1 \in [0, n]$, 使 $f(a) = f(a+1)$ 。

证明: 当 $n=1$, 存在 $a=0$, 使 $f(0) = f(1)$, 结论成立;

当 $n>1$, 令 $g(x) = f(x+1) - f(x)$, $g(x)$ 在 $[0, n-1]$ 上连续, 存在最小值 m 和最大值 M ,

$$m \leq \frac{1}{n} [g(0) + g(1) + \cdots + g(n-1)] \leq M$$

由介值定理, 存在 $a \in [0, n-1]$ (即有 $a, a+1 \in [0, n]$), 使

$$g(a) = \frac{1}{n} [g(0) + g(1) + \cdots + g(n-1)]$$

$$= \frac{1}{n} [f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + \cdots + f(n) - f(n-1)] = \frac{1}{n} [f(n) - f(0)] = 0$$

即有 $a, a+1 \in [0, n]$, 使 $g(a) = f(a+1) - f(a) = 0$, 即 $f(a) = f(a+1)$.

例 32. 如果 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, 求 $f(x)$.

解: 对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $\exists T > 0$ 使 $f(x) = f(x+nT)$

由 $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ 得: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x+nT) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

例 33. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x - \ln x \cdot \sin x)$

解: $x - \ln x \cdot \sin x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \sin x\right)$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, $\sin x$ 有界,

$\frac{\ln x}{x} \sin x \rightarrow 0$, $x - \ln x \cdot \sin x \rightarrow +\infty$, $\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x - \ln x \cdot \sin x) = \frac{\pi}{2}$

例 34. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(\arctan \frac{2x^2+5}{x^2+1} - \arctan \frac{2x^2+7}{x^2+2} \right)$

解: $\because x \rightarrow \infty$ 时 $\arctan \frac{2x^2+5}{x^2+1} - \arctan \frac{2x^2+7}{x^2+2} \rightarrow 0$

$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(\arctan \frac{2x^2+5}{x^2+1} - \arctan \frac{2x^2+7}{x^2+2} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \tan \left(\arctan \frac{2x^2+5}{x^2+1} - \arctan \frac{2x^2+7}{x^2+2} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \frac{\frac{2x^2+5}{x^2+1} - \frac{2x^2+7}{x^2+2}}{1 + \frac{2x^2+5}{x^2+1} \cdot \frac{2x^2+7}{x^2+2}}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4}{(x^2+1)(x^2+2) + (2x^2+5)(2x^2+7)} = \frac{3}{5}$

例 35. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{xe^x + xe^{-x}}{2} \sin \frac{xe^x - xe^{-x}}{2}}{x^3}$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xe^x + xe^{-x}}{2} \frac{xe^x - xe^{-x}}{2}}{x^3} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{x} \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x}(e^{4x} - 1)}{x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x} = -2
 \end{aligned}$$

例 36. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(a+a_n)} - x \right)$

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[n]{\left(1 + \frac{a_1}{x}\right)\left(1 + \frac{a_2}{x}\right)\dots\left(1 + \frac{a_n}{x}\right)} - 1 \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1}{n} \left[\left(1 + \frac{a_1}{x}\right)\left(1 + \frac{a_2}{x}\right)\dots\left(1 + \frac{a_n}{x}\right) - 1 \right] \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+a_1t)(1+a_2t)\dots(1+a_nt) - 1}{nt} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}
 \end{aligned}$$

例 37. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{1+(x-1)})(1-\sqrt[3]{1+(x-1)})\dots(1-\sqrt[n]{1+(x-1)})}{(1-x)^{n-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2}(x-1)\left[-\frac{1}{3}(x-1)\right]\dots\left[-\frac{1}{n}(x-1)\right]}{(1-x)^{n-1}} = \frac{1}{n!}
 \end{aligned}$$

例 38. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \bullet \frac{\ln(x + e^x)}{x} \right]$

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \bullet \frac{x + \ln\left(\frac{x}{e^x} + 1\right)}{x} \right] \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t+t^2+t^3+t^4)^{\frac{1}{4}} - (1+t+t^2+t^3)^{\frac{1}{3}}}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}(t+t^2+t^3+t^4) - \frac{1}{3}(t+t^2+t^3)}{t} = -\frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

例 39. 设 $F(x, y) = \frac{f(y-x)}{2x}$, $F(1, y) = \frac{1}{2}y^2 - y + 5$, $x_0 > 0$, $x_1 = F(x_0, 2x_0), \dots$, $x_{n+1} = F(x_n, 2x_n)$, $n = 1, 2, \dots$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限值。

证明: 令 $x=1$ 得:

$$F(1, y) = \frac{f(y-1)}{2} = \frac{1}{2}y^2 - y + 5, f(y-1) = y^2 + 2y + 10 = (y-1)^2 + 9,$$

$$\therefore f(y-x) = (y-x)^2 + 9, F(x, y) = \frac{(y-x)^2 + 9}{2x},$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 9}{2x_0}, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 9}{2x_n}, n = 1, 2, \dots,$$

$$x_n > 0, \therefore x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{9}{x_n} \right) \geq 3, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{9}{x_n^2} \right) \leq 1 \text{ 即 } 3 \leq x_{n+1} \leq x_n$$

$\therefore \{x_n\}$ 单调递减且有下界, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

设 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 对 $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 9}{2x_n}$ 两边同时取极限得 $A = \frac{A^2 + 9}{2A}$, 解得 $A = 3$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$

例 40. 设 $a_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_1}, \dots, a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 a_2 \dots a_n$ 。

解: 设 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 则 $a_1 = \cos \frac{\theta}{2}, a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\theta}{2} \right)} = \cos \frac{\theta}{2^2}, \dots$

由数学归纳法可得 $a_n = \cos \frac{\theta}{2^n}$,

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 a_2 \dots a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \dots \cos \frac{\theta}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \dots \cos \frac{\theta}{2^n} \sin \frac{\theta}{2^n}}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{2^n \cdot \frac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

例 41. 设 $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1}^2 - 1 (n \geq 2)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$ 。

解: 由 $a_1 = 3 > 1, a_n = 2a_{n-1}^2 - 1$ 及数学归纳法得 $a_n > 1$

$$a_n^2 - 1 = (a_n + 1)(a_n - 1) = 2^2 a_{n-1}^2 (a_{n-1}^2 - 1) = 2^4 a_{n-1}^2 a_{n-2}^2 (a_{n-2}^2 - 1) \\ = \dots = 2^{2n-2} a_{n-1}^2 a_{n-2}^2 \dots a_1^2 (a_1^2 - 1) = 2^{2n+1} a_{n-1}^2 a_{n-2}^2 \dots a_1^2 = 2 \left(2^n a_1 a_2 \dots a_{n-1} \right)^2$$

$$\text{得 } \frac{a_n^2 - 1}{\left(2^n a_1 a_2 \dots a_{n-1} \right)^2} = 2, \text{ 又 } a_n > 1, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = 0,$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(2^n a_1 a_2 \dots a_{n-1} \right)^2} = 0,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{\left(2^n a_1 a_2 \dots a_{n-1} \right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - 1}{\left(2^n a_1 a_2 \dots a_{n-1} \right)^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(2^n a_1 a_2 \dots a_{n-1} \right)^2} = 2$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \sqrt{2}$$

例 42. 设 $f''(0)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - xf'(x)}{x^3} = 1$, 求

$f(0), f'(0), f''(0)$ 的值。

$$\text{解: 由 } 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - xf'(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - f'(x) - xf''(x)}{3x^2} \text{ 得:}$$

$$1 - f'(0) = 0 \therefore f'(0) = 1$$

$$\text{由 } 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - f'(x) - xf''(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2} - 2f''(x) - xf'''(x)}{6x} \text{ 得:}$$

$$f''(0) = 0, \text{ 由 } 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{(1+x^2)^2} - \frac{2f''(x)}{x} - f'''(x)}{6} \text{ 得:}$$

$$-2 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x} - f'''(0) = 6 \therefore 3f'''(0) = -8, f'''(0) = -\frac{8}{3}$$

$$\therefore f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -\frac{8}{3}$$

例 43. 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$$

例 44. 已知 $f(x)$ 在 $x=6$ 的邻域内为可导函数,

$$\text{且 } \lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 6} f'(x) = 2010, \text{ 求极限 } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\int_6^x \left[t \int_t^6 f(u) du \right] dt}{(6-x)^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\int_6^x \left[t \int_t^6 f(u) du \right] dt}{(6-x)^3} &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x \int_x^6 f(u) du}{-3(x-6)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\int_x^6 f(u) du - xf(x)}{-6(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-2f(x) - xf'(x)}{-6} = 2010 \end{aligned}$$

$$\text{例 45. 求极限 } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + te^{\frac{1}{t}}}{te^{\frac{1}{t}} - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{t}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + te^{\frac{1}{t}}}{te^{\frac{1}{t}} - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{t}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t} + e^{\frac{1}{t}}}{e^{\frac{1}{t}} - \frac{2}{\pi t} \arctan \frac{1}{t}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + e^x}{e^x - \frac{2}{\pi} x \arctan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^x}{e^x - \frac{2}{\pi} \arctan x - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x - \frac{4}{\pi(1+x^2)^2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{例 46. 计算: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^t \cos t dt - x - \frac{x^2}{2}}{(x - \tan x)(\sqrt{x+1} - 1)}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^t \cos t dt - x - \frac{x^2}{2}}{(x - \tan x)(\sqrt{x+1} - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^t \cos t dt - x - \frac{x^2}{2}}{(x - \tan x) \cdot \frac{1}{2}x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - 1 - x}{x - \tan x - x \tan^2 x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - 1 - x}{x^3} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - e^x \sin x - 1}{3x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^x \sin x}{6x} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

例 47. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x + \ln(1 - 2x)]}$

解: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\ln(1 - 2x) = -2x - \frac{1}{2}(-2x)^2 + o(x^2) = -2x - 2x^2 + o(x^2)$$

由此得到:

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - [1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)]}{[2x - 2x - 2x^2 + o(x^2)]x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{-2x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{24}$$

例 48. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导函数, 且 $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)>0$. 在曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x, f(x))$ ($x \neq 0$) 作曲线的切线, 此切线在 x 轴上的截距记作

μ , 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(\mu)}{\mu f(x)}$

解: 过点 $(x, f(x))$ 的曲线 $y=f(x)$ 的切线方程为: $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$

注意到由于 $f'(0)=0$, $f''(0)>0$, 所以 $x \neq 0$ 时 $f'(x) \neq 0$. 因此切线在 x 轴上的截

距为: $\mu = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \mu = \lim_{x \rightarrow 0} x - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$;

将 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处展成泰勒公式得:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2 = \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2, \quad \xi_1 \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间};$$

将 $x=\mu$ 代入得:

$$f(\mu) = f(0) + f'(0)\mu + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\mu^2 = \frac{1}{2}f''(\xi_2)\mu^2, \quad \xi_2 \text{ 在 } 0 \text{ 与 } \mu \text{ 之间};$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(\mu)}{\mu f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} f''(\xi_2) \mu^2}{\mu \cdot \frac{1}{2} f''(\xi_1) x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(\xi_2)}{f''(\xi_1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mu}{x} = \frac{f''(0)}{f''(0)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f'(x) - f(x)}{x f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{\frac{f'(x)}{x} + f''(x)} = \frac{f''(0)}{f''(0) + f''(0)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 49. 设当 $x \rightarrow 1$ 时, $1 - \frac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}$ 是 $x-1$ 的等价无穷小, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\begin{aligned}\text{解: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - mx + m - 1}{x^{m+1} - x^m - x + 1} = \frac{m-1}{2} = 1 \\ \therefore m &= 3\end{aligned}$$

例 50. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+\sqrt{n}} + \frac{1}{n+\sqrt{2n}} + \frac{1}{n+\sqrt{3n}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n \cdot n}} \right)$

$$\begin{aligned}\text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+\sqrt{n}} + \frac{1}{n+\sqrt{2n}} + \frac{1}{n+\sqrt{3n}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n \cdot n}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{1+\sqrt{\frac{2}{n}}} + \frac{1}{1+\sqrt{\frac{3}{n}}} + \cdots + \frac{1}{1+\sqrt{\frac{n-1}{n}}}}{n}\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2tdt}{1+t} = 2 \left[t - \ln(1+t) \right] \Big|_0^1 = 2 - 2\ln 2$$

例 51. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^n} = C \neq 0$, 试确定常数 n 和 C 的值。

$$\begin{aligned}\text{解: 法 1: } \ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right] + \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right] = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3),\end{aligned}$$

$$\text{又} \because \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2), \therefore \arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\therefore \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - (2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3))}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{x^n} = C$$

可知: $n = 3$, $C = -\frac{4}{3}$.

法 2: 运用洛必达法则可知:

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-4x^2}{1-x^4}}{nx^{n-1}} = -\frac{4}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^{n-1}} = C$$

故 $n=3$, $C = -\frac{4}{3}$.

例 52. 设 $f(x) = \sin x(1 + \sin x)(2 + \sin x) \dots (2010 + \sin x)$, 求 $f'(0)$

解: 设 $f(x) = \sin x g(x)$, $g(x) = (1 + \sin x)(2 + \sin x) \dots (2010 + \sin x)$

则 $f'(x) = \sin x g'(x) + \cos x g(x)$, $\therefore f'(0) = g(0) = 2010!$

例 53. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n + \frac{1}{k}}$ 。

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n + \frac{1}{k}} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n} = \int_0^1 e^x dx = e - 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n + \frac{1}{k}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e - 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n + \frac{1}{k}} = e - 1$$

例 54. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$, 且对 $x \geq 1$ 时, 有 $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$,

证明: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在 (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}$ 。

证明: (1) $\because f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)} > 0 \therefore f(x)$ 递增, $\therefore f(x) \geq f(1) = 1$,

$$\therefore 0 < f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)} \leq \frac{1}{1+x^2} \therefore \int_1^x f'(x) dx \leq \int_1^x \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\text{即 } f(x) - 1 \leq \arctan x - \frac{\pi}{4}, f(x) \leq 1 - \frac{\pi}{4} + \arctan x$$

$$\therefore 1 \leq f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\pi}{4} + \arctan x \right) = 1 + \frac{\pi}{4}$$

$f(x)$ 单调且有界, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在

(2) 由 $f(x) \leq 1 - \frac{\pi}{4} + \arctan x$ 得:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\pi}{4} + \arctan x \right) = 1 + \frac{\pi}{4}$$

例 55. 设函数 $y = y(x)$ 是由 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$) 确定, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x}$ 。

解: 由题意得: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y \rightarrow -\infty$ 且

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3 = 3axy, x+y = \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2},$$

$$\frac{y}{x} = -1 + \frac{3ay}{x^2 - xy + y^2} = -1 + \frac{6ay}{x^2 + y^2 + (x-y)^2} \therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = -1$$

例 56. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n + \frac{1}{1}} + \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n + \frac{1}{2}} + \dots + \frac{\ln\left(1 + \frac{n}{n}\right)}{n + \frac{1}{n}} \right]$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{n + \frac{1}{k}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{n} = \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln 2 - 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{n + \frac{1}{k}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{n}$$

$$= \int_0^1 \ln(1+x) dx = \ln 2 - 1 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{n + \frac{1}{k}} = 2 \ln 2 - 1$$

例 57. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x}$

解: 由麦克劳林公式得: $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$$\tan(\tan x) = \tan x + \frac{(\tan x)^3}{3} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} \left(x + \frac{x^3}{3} \right)^3 + o(x^3)$$

$$= x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3!} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{3!} \right)^3 + o(x^3)$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \right) - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right)}{\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = 2$$

例 58. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$ ，其中 n 是给定的自然数。

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}) - \ln n}{x}}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \dots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}} = e^{\frac{1+2+\dots+n}{n}} = e^{\frac{n+1}{2}}$$

例 59. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $n \sin \frac{1}{n+1} < x_n < (n+2) \sin \frac{1}{n+1}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n x_k = \underline{\hspace{2cm}}.$$

STOLZ (施托尔茨定理):

设 $\{y_n\}$ 严格单增, 且 $y_n \rightarrow +\infty$, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a (-\infty \leq a \leq +\infty)$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$$

推论:

(1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在 ($x_n > 0$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$\text{由 (1) 可证 } \because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n$$

(3) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$ 存在 ($x_n > 0$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

$$\text{证明 显然, } \because n \sin \frac{1}{n+1} < x_n < (n+2) \sin \frac{1}{n+1} \therefore x_n \rightarrow 1;$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = 1$$

例 60. 设 $x_0 > 0$, $x_n = \frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}$ ($n=1, 2, 3, \dots$). 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求之.

分析: 证明数列极限存在的方法: ①夹逼定理②单调有界定理③级数敛散法: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在④级数收敛的必要条件: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 给定数列 $\{a_n\}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 收敛, 所以,

判断数列的敛散性可以转化为判断级数的敛散性. 下面对各种解法给出示例.

证明: 方法一 (单调有界定理). 由题意得 $x_n > 0$, 对于一切的 n 恒有

$$x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}} > 1, \quad x_n = 2 - \frac{2}{2+x_{n-1}} < 2, \text{ 因此知数列 } \{x_n\} \text{ 有界; 又}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(2 - \frac{2}{2+x_n}\right) - \left(2 - \frac{2}{2+x_{n-1}}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2+x_{n-1}} - \frac{1}{2+x_n}\right) = \frac{2(x_n - x_{n-1})}{(2+x_{n-1})(2+x_n)} \end{aligned}$$

$$x_n - x_{n-1} = \frac{2(x_{n-1} - x_{n-2})}{(2+x_{n-2})(2+x_{n-1})}, \dots, \quad x_2 - x_1 = \frac{2(x_1 - x_0)}{(2+x_0)(2+x_1)}$$

于是可知 $x_{n+1} - x_n$ 与 $x_1 - x_0$ 同号, 故当 $x_1 > x_0$ 时数列 $\{x_n\}$ 单调递增; 当 $x_1 < x_0$ 时数

列 $\{x_n\}$ 单调递减. 即数列 $\{x_n\}$ 为单调数列, 从而数列 $\{x_n\}$ 必有极限.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}} = \frac{2(1+A)}{2+A}$, 解之得 $A = \sqrt{2}$,

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

方法二 (级数敛散法) 由方法一得 $1 < x_n < 2$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2(1+x_n)}{2+x_n} - x_n = \frac{2-x_n^2}{2+x_n} = \frac{2-x_{n-1}^2}{(2+x_{n-1})(3+2x_{n-1})}$$

$$x_n - x_{n-1} = \frac{2-x_{n-1}^2}{2+x_{n-1}}, \therefore \left| \frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}} \right| = \frac{1}{3+2x_{n-1}} < \frac{1}{5} < 1$$

由正项级数的比值判别法得: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛,

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 收敛, 以下同方法一。

方法三 (级数收敛的必要条件)

$$\frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = \frac{\frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}} - \sqrt{2}}{\frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}} + \sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = (3-2\sqrt{2}) \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}}$$

由正项级数的比值判别法得: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}}$ 绝对收敛

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = 0 \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$$

例 61. 设 $f_n(x) = C_n^1 \cos x - C_n^2 \cos^2 x + \dots + (-1)^{n-1} C_n^n \cos^n x$, 求证:

(1) 对于任意自然数 n , 方程 $f_n(x) = \frac{1}{2}$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内仅有一解;

(2) 设 $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$ 。

证明: (1) $f_n(x) = 1 - (1 - \cos x)^n$, $f_n(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续,

$f_n(0) = 1, f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 根据介值定理得 $\exists x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $f_n(x) = \frac{1}{2}$ 。

由 $f'_n(x) = -n \sin x (1 - \cos x)^{n-1} < 0 \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$ 得 $f_n(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ 上递减，故根 x_n 唯一。

$$(2) \because f_n\left(\arccos \frac{1}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\arccos \frac{1}{n}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1 - \frac{1}{e} > \frac{1}{2} = f_n(x_n) = \frac{1}{2}$$

故 $\exists N > 0$ 当 $n > N$ 时 $f_n\left(\arccos \frac{1}{n}\right) > f_n(x_n)$ ，由 $f_n(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ 上递减得

$$\arccos \frac{1}{n} < x_n < \frac{\pi}{2} \text{ 又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$$

例 62. 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$ ， $F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}}$ 。

解：令 $u = x^n - t^n$ 则 $F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt = \frac{1}{n} \int_0^{x^n} f(u) du$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \int_0^{x^n} f(u) du}{x^{2n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n) x^{n-1}}{2n x^{2n-1}} \\ &= \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n)}{x^n} = \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n) - f(0)}{x^n} = \frac{f'(0)}{2n} \end{aligned}$$

例 63. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (n!)^{\frac{1}{n}}$

$$\text{解：} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (n!)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{i}{n}} = e^{\int_0^1 \ln x dx} = e^{-1}$$

例 64. 设函数 $f(x)$ 在 $(-L, L)$ 上连续，在 $x=0$ 处可导且 $f'(0) \neq 0$ ；

(1) 求证：对于任意给定的 $0 < x < L$ ，存在 $0 < \theta < 1$ 使得 $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$ ；

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta$ 。

(1) 证明：设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt$ ，则 $F(0)=0$ ， $F(x)$ 在 $[0, x]$ 上可微，由拉格朗日中值定理得 $F(x) - F(0) = F'(\theta x)x$ ， $0 < \theta < 1$ 即 $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$

$$(2) \text{ 解: 由 (1) 得 } \frac{\int_0^x f(t)dt + \int_0^{-x} f(t)dt}{2x^2} = \frac{f(\theta x) - f(-\theta x)}{2\theta x} \cdot \theta$$

令 $x \rightarrow 0^+$ 由 $f(0)$ 存在且 $f'(0) \neq 0$ 得上式的:

$$\text{左边} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(-x)}{4x} = \frac{1}{2} f'(0)$$

$$\text{右边} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta x) - f(-\theta x)}{2\theta x} \cdot \theta = \frac{1}{2} f'(0) \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{例 65. 求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(x + e^x)}{x} \right]$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)^{\frac{1}{4}} - \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{x + \ln\left(\frac{x}{e^x} + 1\right)}{x} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 \right)^{\frac{1}{4}} - \left(1 + t + t^2 + t^3 \right)^{\frac{1}{3}}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}(t + t^2 + t^3 + t^4) - \frac{1}{3}(t + t^2 + t^3)}{t} = -\frac{1}{12}$$

例 66. 求函数 $f(x) = e^{-x^2} \sin x^2$ 的值域。

解: 要求 $f(x) = e^{-x^2} \sin x^2$ 的值域, 只需求出函数的最大值与最小值即可. 注意到函数 $f(x) = e^{-x^2} \sin x^2$ 为偶函数, 故只需考虑 $x \geq 0$ 的情况. 为计算方便, 令 $t = x^2$, 得到 $g(t) = e^{-t} \sin t$, $t > 0$, 显然, $g(t)$ 与 $f(x)$ 有相同的值域. 求 $g(t)$ 的驻点:
 $g'(t) = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t = e^{-t} (\cos t - \sin t)$

令 $g'(t) = 0$, 得到驻点 $t_k = \frac{\pi}{4} + k\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$, 其对应的函数值为

$$g(t_k) = e^{-\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)} \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)}$$

显然, 当 $k = 2m (m = 0, 1, 2, \dots)$ 时, $g(t_{2m}) > 0$, 其中最大值为 $g(t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$;

当 $k = 2m + 1 (m = 0, 1, 2, \dots)$ 时, $g(t_{2m+1}) < 0$, 其中最大值为 $g(t_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5\pi}{4}}$.

于是得到函数 $g(t)$ 的值域, 亦即函数 $f(x)$ 的值域为: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5\pi}{4}}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$.

例 67. 若 $f(x) \in C[a, b]$ 且对任意 $x \in [a, b]$ 存在相应的 $y \in [a, b]$ 使得

$|f(y)| \leq \frac{1}{2} |f(x)|$, 证明: 至少存在一点 x_0 使 $f(x_0) = 0$ 。

证明：假设 $\forall x \in [a, b]$ 有 $f(x) \neq 0$ ，则 $f(x) > 0$ 或 $f(x) < 0$ 仅取其一。不妨设 $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ ，由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续得 $f(x)$ 有最小值，记 $f(x_0) = \min f(x) > 0$ ，由题意得 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得

$$f(\xi) = |f(\xi)| \leq \frac{1}{2}|f(x_0)| < f(x_0) \text{ 而这与 } f(x_0) \text{ 是最小值矛盾。}$$

1.3. 练习题

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} \right)^n$ 。

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1+2}{n^3} + \dots + \frac{1+2+\dots+n}{n^3} \right)$ 。

3. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n}$ 。

4. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{a} \right)^n$ ，其中 $a > 0, b > 0$ 。

5. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) (x > 0)$ 。

6. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$ 。

7. 设 $a > 0, x_1 > 0$ ，定义 $x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(3x_n + \frac{a}{x_n^3} \right), n = 1, 2, \dots$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

8. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{e^{2x^2} - 2e^{x^2} + 1}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ ，在 $x = 0$ 处连续，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} \right]$ 。

11. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^x - 1} \ln \left[1 + \frac{f(x)}{1 - \cos x} \right] = 4$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 已知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线在 y 轴上的截距为 -1 ,

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + f\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]^n$

13. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f''(t) dt$ 的导数与 x^2 为等价无穷小, 求 $f''(0)$ 。

14. 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

15. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, $a_i > 0, i = 1, 2, \dots$ 。

17. 设函数 $f(x)$ 在点 a 处可微, 且 $f(a) \neq 0$, 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n$ 。

18. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [\sqrt{n^2 - 1} + 2\sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + (n-1) \cdot \sqrt{n^2 - (n-1)^2}]$ 。

19. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{\ln(1 - 2x) + c(1 - e^{-x^2})} = 2$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

20. 设要使函数 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

21. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + f(x) \tan x} - 1}{e^{2x} - 1} = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

22. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n + \frac{1}{n}} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{\sin \pi}{n + 1} \right]$

23. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right)$

24.

第二章 微分学

2.1.基本概念与内容提要

1. 导数的概念: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

2. 平面曲线的切线和法线方程

3. 一元求导法则

(1). 参数方程的导数: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 所确定的函数的一阶、二阶导数分别是:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

(2). 求隐函数的导数的方法: ①方程两边同时对 x 求导, 要记住 y 是 x 的函数, 求导时 y' 别忘了; ②公式法: 由 $F(x, y) = 0$ 得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ ③利用微分形式不变性, 对方

程两边同时取微分, 然后解出 $\frac{dy}{dx}$ 。

(3). 反函数求导: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'}, \frac{d^2x}{dy^2} = \left(\frac{1}{y'} \right)'_x \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{(y')^3},$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = -\left(\frac{y''}{y'} \right)'_x \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{3(y'')^2 - y' \cdot y'''}{(y')^5}$$

(4). 高阶导数的求法: ①求一元函数的高阶导数: 利用直接法、函数的麦克劳林展开

式或递推公式， $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$ 。

展开成幂级数（两种方法、两种类型）之后直接求导。

②求分式有理函数的高阶导数：先将有理假分式通过多项式除法化为整式与有理真分式之和，再将有理真分式写成部分分式之和，最后仿 $(x^m)^{(n)}$ 的表达式写出给定的有理函数的 n 阶导数；③求由三角函数通过四则运算构成函数的高阶导数：利用三角函数中积化和差与倍角公式把函数的次数逐次降低，最后变成 $\sin kx, \cos kx$ 之和或之差的形式，

再用公式 $\sin^{(n)} kx = k^n \sin\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$,

$\cos^{(n)} kx = k^n \cos\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$ ，将给定函数的 n 阶导数写出来。

几个常见高阶导数公式： $\sin^{(n)} kx = k^n \sin\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$,

$\cos^{(n)} kx = k^n \cos\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right), \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

$(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

$(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (1 \leq k \leq n), (x^n)^{(k)} = 0 (k > n)$

4. 必须掌握的三种常见变限函数求导是：

(1) $y = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$ ，则 $y' = f[h(x)]h'(x) - f[g(x)]g'(x)$ ；

(2) $y = \int_0^x f(x)g(t)dt$ ，则 $y = f(x)\int_0^x g(t)dt$ ，
 $y' = f'(x)\int_0^x g(t)dt + f(x)g(x)$ ；

(3)① $y = \int_0^x f(xt)dt$ ，方法是变量代换，令 $u = xt$ ，则 $t = \frac{u}{x}, dt = \frac{1}{x} du$ ，

$y = \frac{\int_0^{x^2} f(u)du}{x}, y' = \frac{2x^2 f(x^2) - \int_0^{x^2} f(u)du}{x^2}$ ；

② $y = \int_0^x f(x-t)dt$ ，方法也是变量代换，令 $u = x-t$ ，则

$t = x-u, dt = -du, y = \int_0^x f(u)du, y' = f(x)$

5. 利用导数判断函数单调性：导函数大于0原函数递增，导函数小于0原函数递减。

6. 极值的判别方法

(1) 极值的定义

例. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ ()

A. 不可导 B. 可导, 且 $f'(0) \neq 0$ C. 取得极大值 D. 取得极小值

解: 由极限的存在性得 $f(0)=0$, 又由极限的保号性得: $x \in U^0(0), \frac{f(x)}{1 - \cos x} > 0$,

$\therefore f(x) > 0 = f(0)$, $f(0)$ 是极小值。

(2) 利用导数判断单调性后得出极值点: 导函数在极值点的左右符号不同

(3) 用高阶导数判断极值: 设 $f'(x_0)=0, f''(x_0) \neq 0$, 若 $f''(x_0) > 0$ 则 $f(x_0)$ 为极小值; 若 $f''(x_0) < 0$ 则 $f(x_0)$ 为极大值

7. 函数的最值: 闭区间内最值可能出现在极值点、断点

8. 函数图象的凹凸性与二阶导数有关: 正凹负凸; 凹凸性改变的点 (二阶导数改变符号的点) 即为拐点。

补充: 不动点为 $f(x)=x$ 点; 零点为 $f(x)=0$ 的点; 驻点为 $f'(x)=0$ 的点; 极值点为 $f'(x)$ 改变符号的点; 拐点为 $f''(x)$ 改变符号的点。

6. 多元函数微分学及应用

全微分: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$ 具有形式不变性。

偏导数的几何意义: $f'_x(x_0, y_0)$ 和 $f'_y(x_0, y_0)$ 分别表示曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 (x_0, y_0, z_0)

处的切线对 x 轴和 y 轴的斜率。函数的连续性和可微、可导必须会用定义判断。

连续的混合高阶偏导数与求导顺序无关。

二元函数的偏导数存在是连续的既不充分又不必要条件。

二元函数存在两个偏导数是可微的必要不充分条件。

偏导数连续是函数可微的充分不必要条件。函数连续是可微的必要不充分条件。

全微分的近似计算: $\Delta z \approx dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$

多元复合函数的求导法: $z = f[u(t), v(t)]$ $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$

$z = f[u(x, y), v(x, y)]$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

当 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 时, $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$

隐函数的求导公式:

隐函数 $F(x, y) = 0$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{F'_x}{F'_y}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{F'_x}{F'_y}) \cdot \frac{dy}{dx}$

隐函数 $F(x, y, z) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$

$$\text{隐函数方程组: } \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}$$

7. 多元函数微分学在几何上的应用:

$$1). \text{ 空间曲线 } \begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \text{ 在点 } M(x_0, y_0, z_0) \text{ 处的切线方程: } \frac{x-x_0}{\phi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)},$$

曲线在点 M 处的切向量为 $\vec{T} = \{\phi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\}$, 同时也是法平面的法向量,

在点 M 处的法平面方程: $\phi'(t_0)(x-x_0) + \psi'(t_0)(y-y_0) + \omega'(t_0)(z-z_0) = 0$

2). 空间曲线 $y=y(x), z=z(x)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切向量 $\vec{T} = \{1, y'(x_0), z'(x_0)\}$, 切线方程为

$$\frac{(x-x_0)}{1} = \frac{(y-y_0)}{y'(x_0)} = \frac{(z-z_0)}{z'(x_0)}, \text{ 法平面方程为 } (x-x_0) + y'(x_0)(y-y_0) + z'(x_0)(z-z_0) = 0$$

3). 若空间曲线方程为: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 过该曲线的曲面束方程为 $F(x, y, z) + \lambda G(x, y, z) = 0$

$$\text{则切向量 } \vec{T} = (F_x, F_y, F_z) \times (G_x, G_y, G_z) = \left\{ \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right\},$$

$$\text{切线方程为 } \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}},$$

$$\text{法平面方程: } \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} (x-x_0) + \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix} (y-y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} (z-z_0) = 0$$

(还有一种方法自己到书上去查)

4). 曲面 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的法向量 $\vec{n} = \{f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\}$,

切平面方程 $z-z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y-y_0)$

$$\text{法线方程 } \frac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

5). 曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量: $\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$

切平面方程: $F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$

$$\text{法线方程: } \frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

方向导数与梯度:

函数 $z = f(x, y)$ 在一点 $p(x, y)$ 沿任一方向 l 的方向导数为：
$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \phi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \phi,$$

其中 ϕ 为 x 轴到方向 l 的转角。方向导数与方向有关，
$$\frac{\partial f}{\partial(-l)} = -\frac{\partial f}{\partial l}$$

对 $u = f(x, y, z)$ ，
$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$
 其中 α, β, γ 为 l 的方向角。

函数 $z = f(x, y)$ 在一点 $p(x, y)$ 的梯度：
$$\text{grad} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j}$$
，它与方向导数的关系是：

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad} f(x, y) \cdot \bar{e}$$
，其中 $\bar{e} = \cos \phi \cdot \bar{i} + \sin \phi \cdot \bar{j}$ 为 l 方向上的单位向量。

$\frac{\partial f}{\partial l}$ 是 $\text{grad} f(x, y)$ 在 l 上的投影。沿梯度方向函数的方向导数最大，函数变化最快。

8. 多元函数的极值及其求法：

设 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ ，令： $f_{xx}(x_0, y_0) = A$ ， $f_{xy}(x_0, y_0) = B$ ， $f_{yy}(x_0, y_0) = C$ ， $\Delta = B^2 - AC$

则：当 $\Delta < 0$ 时， $\begin{cases} A < 0, f(x_0, y_0) \text{ 为极大值} \\ A > 0, f(x_0, y_0) \text{ 为极小值} \end{cases}$ ；当 $\Delta > 0$ 时，无极值；当 $\Delta = 0$ 时，不确定

拉格朗日乘法求极值：

函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下极值的求法：令 $F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$

由
$$\begin{cases} F'_x(x, y) = f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y) = f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$
，求解的驻点 (x_0, y_0) 就可能是极值点，三元函数同理。

9. 高数中处理中值定理的四种思维定势

- 1) 在题设条件下若函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导，“不管三七二十一”，把 $f(x)$ 在指定点展开成泰勒公式再说。
- 2) 在题设条件或欲证结论中有定积分的表达式时，则先用积分中值定理对该积分式处理一下再说。
- 3) 在题设条件下若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 或 $f(a) = f(b) = 0$ ，则先用拉格朗日中值定理或洛尔定理处理一下再说。

如：(1) 若 $f(a) = 0$ ，则 $f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$ ，或

$$f(x) = \int_a^x f'(t) dt - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$$

(2) 若 $f(a) = f(b) = 0$ 可得 ① $\exists \xi \in (a, b), f'(\xi) = 0$

② $f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x - a)$ ， $f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x - b)$

- 4) 对定限或变限函数，若被积函数或其主部分为复合函数，则先做变量代换使之成为简单形式再说。

例：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数，且 $f(a) = f(b) = 0$ ， $M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ ，求证：

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M。$$

证明：由思维 3， $f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a)$,

$f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b)$, $\therefore |f(x)| \leq M(x-a), |f(x)| \leq M(b-x)$

$$\therefore \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x) dx = \frac{(b-a)^2}{4} M$$

$$\therefore \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

10. 零点定理证明:

1). 一般用连续函数介值定理证。证明 (或由已知) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(a)f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$ 。

2). 证明 $f(x)$ 至多几个零点: 设函数 $f(x)$ 有 k 个零点, 则 $f'(x)$ 有 $k-1$ 个零点, $f''(x)$ 有 $k-2$ 个零点, \dots , $f^{(k-1)}(x)$ 有 1 个零点, $f^{(k)}(x)$ 没有零点。

注: 函数只有连续性, 考虑用零点定理、介值定理。函数一阶可导考虑用罗尔定理、中值定理。函数二阶或二阶以上可导, 考虑用泰勒公式或对低一阶用中值定理或罗尔定理。

11. 中值定理证明:

第一积分中值定理: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi)$

第二积分中值定理: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x) dx = g(\xi) \int_a^b f(x) dx$ 又叫广义积分中值定理。

1). 欲证结论: 至少存在一点 ξ 使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的命题。

思路一: 验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理条件, 由该定理即可得证;

思路二: 验证 ξ 为 $f^{(n-1)}(x)$ 的最值或极值点, 用费马定理即可得证。

2). 欲证结论: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f^{(n)}(\xi) = k$ 及其代数式的命题。

思路提示: ①作辅助函数 $F(x)$; ②验证 $F(x)$ 满足罗尔定理条件; ③由定理的结论即可得证。

构造辅助函数的方法: (1) 原函数法:

①将欲证结论中的 ξ 换成 x ; ②通过恒等变形将结论化为易消除导数符号的形式 (或称之为易积分形式); ③用观察法或积分法求出原函数 (即不含导函数的式子), 为简便积分常数取作 0; ④移项使等式一边为 0, 则另一边即为所求辅助函数。

(2) 常数 k 值法: ①令常数部分为 k ; ②恒等变形, 使等式一端为 a 及 $f(a)$ 构成的代数式, 另一端为 b 及 $f(b)$ 构成的代数式; ③分析关于端点的表达式是否为对称式或轮换对称式, 若是只要把端点 a 改成 x , 相应的函数值 $f(a)$ 改成 $f(x)$, 则换变量后的端点表达式就是所求辅助函数 $F(x)$ 。

3). 欲证结论: 至少存在一点 $\xi, \eta \in (a, b)$ 且 $\xi \neq \eta$ 满足某种关系式的命题。

思路: 使用两次拉格朗日中值定理或者柯西中值定理, 或者一次拉格朗日中值定理、一次柯西中值定理, 然后再将它们做某种运算。

4). 用拉格朗日中值定理求极限: 关键是将欲求的极限写成中值定理的形式。

例： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ 。

解：由拉格朗日中值定理得 $e^{\tan x} - e^{\sin x} = e^{\xi} (\tan x - \sin x)$ ，其中 ξ 在 $\sin x$ 与 $\tan x$ 之间，当 $x \rightarrow 0$ 时 $\xi \rightarrow 0, e^{\xi} \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\xi} (\tan x - \sin x)}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x + \cos^2 x) = 3 \end{aligned}$$

5) .用积分中值定理求极限

例 1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x} dx$ 。

解： $\exists \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 使得 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{\xi^n}{2(1+\xi)}$ ， $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi^n}{2(1+\xi)} = 0$

例 2. 设 $D_r: x^2 + y^2 \leq r^2$ ，则 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^2} \iint_{D_r} e^{-x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy =$ _____。

解： $\exists (\xi, \eta) \in D_r$ 使得 $\iint_{D_r} e^{-x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy = \pi r^2 e^{-\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta)$ ，

当 $r \rightarrow 0^+$ 时 $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$ ，

$$\therefore \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^2} \iint_{D_r} e^{-x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy = \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \pi e^{-\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta) = \pi$$

6) .用泰勒公式求极限

7) .泰勒公式的乘法和长除法：

例：将 $\frac{\ln(1+x)}{e^x}$ 展开到 x^3 项。

解：方法一： $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ ， $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ ，

$$\therefore \frac{\ln(1+x)}{e^x} = e^{-x} \ln(1+x) = \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right] \bullet \left[1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right]$$

$$= \left(x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 \right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 \right) + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

方法二：长除法 $\frac{\ln(1+x)}{e^x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$ 。

练习：用长除法可得 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

8). 泰勒公式在微分有关证明题中的应用：泰勒公式是高等数学的一个重要内容，它在近似计算、极限运算、微积分证明、级数与广义积分的敛散性判断等方面有着广泛的应用。泰勒公式建立了函数及其导数之间的联系，使用时，**展开点通常选择在区间的端点、中点、极值点和已知点**。常考的一些题型有：①利用泰勒展开式求高阶导数②求极限③判断级数的敛散性④判断无穷小的阶数⑤利用展开式进行证明，常与连续函数的介值定理、最大值和最小值定理、费马定理等中值定理结合使用。

若函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a, b) 内存在 $n+1$ 阶的导数，则当 x 在 (a, b) 内时， $f(x)$ 可以表示为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad \text{其中}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{叫做拉格朗日余项，这里 } \xi \text{ 是介于 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间的某个值。或者}$$

$R_n(x) = o[(x-x_0)^n] (x \rightarrow x_0)$ 叫做皮亚诺余项。在证明题中一般用带拉格朗日余项的泰勒公式。

9). 泰勒公式在微分问题中关于等式的证明

例1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有三阶连续导数，试证：存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得

$$f(b) = f(a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$$

此题可用 k 值法构造辅助函数来解决。在此使用泰勒公式来证明。

思路分析：题目给的条件很简单，又是三阶（高阶）可导，具备泰勒公式的条件，关键是怎样选择合适的 x_0 点。观察到结论中出现了 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ，不妨取 $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ，而 a, b 是两个特殊点，也应满足泰勒公式。

证明：由条件得： $f(x)$ 在 $x_0 = \frac{a+b}{2} \in (a, b)$ 处的泰勒公式为

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3$$

这里 ξ 介于 x 与 $x_0 = \frac{a+b}{2}$ 之间。

当 $x=a$ ， $x=b$ 时分别有

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}f''(\xi_1)\left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \quad (1)$$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \quad (2)$$

其中， ξ_1 介于 a 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间， ξ_2 介于 $\frac{a+b}{2}$ 与 b 之间。

式 (2) 减去 (1) 得

$$f(b) - f(a) = f' \left(\frac{a+b}{2} \right) (b-a) + \frac{1}{48} [f''(\xi_1) + f''(\xi_2)] (b-a)^3$$

因为 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，由介值定理得：存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $2f''(\xi) = f''(\xi_1) + f''(\xi_2)$

$$\text{所以 } f(b) - f(a) = f' \left(\frac{a+b}{2} \right) (b-a) + \frac{1}{24} f''(\xi) (b-a)^3$$

在证明微分中的等式问题时，其条件都是高阶（二阶或二阶以上）可导或可微，其关键是要根据已知条件，选择恰当的 x_0 ，然后使用泰勒公式，就可得到所要的结论。

10) 泰勒公式在微分问题中关于不等式的证明

例2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二次可微，且 $f(0)=f(1)=0$ ， $\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1$ ，求证：存在一点

$\xi \in (0, 1)$ 使得 $f''(\xi) \geq 8$ 。

思路分析： $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二次可微且有最小值 $-1 \neq 0$ ，所以在 $(0, 1)$ 内一定有极值点，该点的导数为 0。又高阶可导，想到泰勒公式，要证的结论中无一阶导数，故选最小值点为 x_0 。

证明：由题意，不妨设 $x_0 \in (0, 1)$ 为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值点，则 $f(x_0) = -1, f'(x_0) = 0$ 。
 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式为：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2$$

即 $f(x) = -1 + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2$ ，这里 ξ 介于 x 与 x_0 之间。

分别令 $x=0, 1$ 得： $f(0) = -1 + \frac{1}{2} f''(\xi_1)x_0^2, f(1) = -1 + \frac{1}{2} f''(\xi_2)(1-x_0)^2$

其中 $0 < \xi_1 < x_0 < \xi_2 < 1$ ，由 $f(0)=f(1)=0$ 得 $f''(\xi_1) = \frac{2}{x_0^2}, f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-x_0)^2}$

所以，当 $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时 $f''(\xi_1) = \frac{2}{x_0^2} \geq 8$ ，当 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时 $f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-x_0)^2} \geq 8$

综上所述，存在一点 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f''(\xi) \geq 8$ 。

另解：由题意得 $f''(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续， \therefore 由介值定理得 $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得

$$f''(\xi) \geq \frac{1}{2} [f''(\xi_1) + f''(\xi_2)], \therefore f''(\xi) \geq \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{(1-x_0)^2} \geq \frac{2}{x_0(1-x_0)} \geq 8$$

在证明微分问题的不等式问题时，其条件只要是高阶（二阶或二阶以上）可导或可微，利用泰勒公式处理问题时，其关键是要根据已知条件，选择恰当的 x_0 ，将泰勒公式进行适当的放大或缩小，就可以接近目标，使问题得以解决。

(11) 泰勒公式在微分问题中其他问题的证明

例 3. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上三阶可导，且 $f^{(3)}(x)$ 和 $f(x)$ 有界，求证： $f'(x), f''(x)$ 也有界。

思路分析：该题条件是函数 $f(x)$ 高阶（三阶）可导，应能想到利用泰勒公式求解。其关键是如何选择合适的 x_0 点，并要选择在某处将函数展开，并恰好约掉多余项，利用 $f^{(3)}(x)$ 和 $f(x)$ 有界的条件，从而得到结论。注意到 $x+1, x-1$ 与 x 正好相差 1 和 -1，不妨取 $x_0 = x$ ，且 x 取 $x+1, x-1$ 时，利用泰勒公式，约掉其中一个未知量，即可得到另一个未知量的结论。

证明：根据题目条件， $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)^3$$

这里 ξ 介于 x 与 x_0 之间。分别取 $x_0 = x$ ，且 x 取 $x+1, x-1$ 有：

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1), \\ f(x-1) &= f(x) - f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2), \end{aligned} \quad \text{其中 } x-1 < \xi_2 < x < \xi_1 < x+1$$

两式相加消去 $f'(x)$ 得

$$f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}[f'''(\xi_2) - f'''(\xi_1)]$$

两式相减消去 $f''(x)$ 得

$$f'(x) = \frac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)] - \frac{1}{12}[f'''(\xi_2) + f'''(\xi_1)]$$

由 $f^{(3)}(x)$ 和 $f(x)$ 有界，可知 $f'(x), f''(x)$ 也有界。

这类问题的证明，使用泰勒公式时有一定的技巧性，要多注意归纳、总结，才能灵活使用泰勒公式解决问题。

(12) 利用泰勒展开式判断级数的敛散性：

例：判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 的敛散性。

$$\begin{aligned} \text{解：} \because \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{(-1)^n}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \therefore \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\ \therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + \sum_{n=2}^{\infty} o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \text{三个级数都收敛，故原级数也收敛。} \end{aligned}$$

敛。

在判断级数的敛散性时，可以利用泰勒公式展开，很容易判断一般项趋于 0 的速度，在级数敛散性的题目中用泰勒公式判断应用很广且是一种有效的方法。

12. 中值定理的常用方法总结：

1) 所证式仅与 ξ 相关

① 观察法与凑方法

例1: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$

试证至少存在一点 $\zeta \in (a,b)$ 使得 $f''(\zeta) = \frac{2f'(\zeta)}{1-\zeta}$.

分析: 把要证的式子中的 ζ 换成 x , 整理得 $f''(x) - xf''(x) - 2f'(x) = 0 \cdots (1)$

由这个式可知要构造的函数中必含有 $f'(x)$, 从 $xf''(x)$ 找突破口

因为 $[xf'(x)]' = xf''(x) + f'(x)$, 那么把(1)式变一下:

$$f''(x) - f'(x) - [xf''(x) + f'(x)] = 0 \Rightarrow f''(x) - f'(x) - [xf'(x)]' = 0$$

这时要构造的函数就看出来了 $F(x) = (1-x)f'(x) - f(x)$

②原函数法

例2: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $f(a) = f(b) = 0$, 又 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

求证: $\exists \zeta \in (a,b)$ 使得 $f'(\zeta) = g(\zeta)f(\zeta)$.

分析: 这时不论观察还是凑都不容易找出要构造的函数, 于是换一种方法

现在把与 f 有关的放一边, 与 g 有关的放另一边, 同样把 ζ 换成 x

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g(x) \xrightarrow{\text{两边积分}} \ln f(x) = \int g(x)dx + \ln C \Rightarrow f(x) = Ce^{\int g(x)dx}$$

$\Rightarrow f(x)e^{-\int g(x)dx} = C$ 现在设 $C = 0$, 于是要构造的函数就很明显了

$$F(x) = f(x)e^{-\int g(x)dx}$$

③一阶线性齐次方程解法的变形法

对于所证式为 $f' + pf = 0$ 型, (其中 p 为常数或 x 的函数)

可引进函数 $u(x) = e^{\int p dx}$, 则可构造新函数 $F(x) = f \cdot e^{\int p dx}$

例: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导数, 又存在 $c \in (a,b)$, 使得 $f'(c) = 0$

求证: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b-a}$

分析: 把所证式整理一下可得: $f'(\xi) - \frac{f(\xi) - f(a)}{b-a} = 0$

$$\Rightarrow [f(\xi) - f(a)]' - \frac{1}{b-a}[f(\xi) - f(a)] = 0, \text{这样就变成了 } f' + pf = 0 \text{ 型}$$

引进函数 $u(x) = e^{\int -\frac{1}{b-a} dx} = e^{-\frac{x}{b-a}}$ (令 $C=0$), 于是就可以设 $F(x) = e^{-\frac{x}{b-a}}[f(x) - f(a)]$

注: 此题在证明时会用到 $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f(b) = f(a)$ 这个结论

2). 所证式中出现两端点

①凑拉格朗日

例3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导

证明: 至少存在一点 $\zeta \in (a,b)$ 使得 $\frac{bf(b) - af(a)}{b-a} = f(\zeta) + \zeta f'(\zeta)$.

分析: 很容易就找到要证的式子的特点, 那么可以试一下, 不妨设

$F(x) = xf(x)$, 用拉格朗日定理验证一下

$$F'(\zeta) = f(\zeta) + \zeta f'(\zeta) = \frac{bf(b) - af(a)}{b-a}$$

②柯西定理

例4 设 $0 < x_1 < x_2$, $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 可导, 证明在 (x_1, x_2) 至少存在一点 c , 使得

$$\frac{1}{e^{x_1} - e^{x_2}} \begin{vmatrix} e^{x_1} & e^{x_2} \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(c) - f'(c)$$

分析: 先整理一下要证的式子 $\frac{e^{x_1} f(x_2) - e^{x_2} f(x_1)}{e^{x_1} - e^{x_2}} = f(c) - f'(c)$

这题就没上面那道那么容易看出来了

发现 $e^{x_1} f(x_2) - e^{x_2} f(x_1)$ 是交叉的, 变换一下, 分子分母同除一下 $e^{x_1+x_2}$

$$\frac{\frac{f(x_2)}{e^{x_2}} - \frac{f(x_1)}{e^{x_1}}}{\frac{1}{e^{x_2}} - \frac{1}{e^{x_1}}} \text{ 于是这个式子一下变得没有悬念了}$$

用柯西定理设好两个函数就很容易证明了

③k 值法

仍是上题

分析: 对于数四, 如果对柯西定理掌握的不是很好上面那题该怎么办呢? (k 值法)

第一步是要把含变量与常量的式子分写在等号两边

$$\text{设 } \frac{e^{x_1} f(x_2) - e^{x_2} f(x_1)}{e^{x_1} - e^{x_2}} = k \text{ 整理得 } e^{-x_1} [f(x_1) - k] = e^{-x_2} [f(x_2) - k]$$

很容易看出这是一个对称式, 也是说互换 x_1, x_2 还是一样的

那么进入第二步, 设 $F(x) = e^{-x} [f(x) - k]$, 验证可知 $F(x_1) = F(x_2)$

记得回带 k , 用罗尔定理证明即可。

以此题为例已经是规范的形式了, 现在就看常量的这个式子

④泰勒公式法

老陈常说的一句话, 管它是什么, 先泰勒展开再说。当定理感觉都起不上作用时, 泰勒法往往是可行的, 而且对于有些题目, 泰勒法反而会 simpler。

3)、所证式同时出现 ξ 和 η

①两次中值定理

例5 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = f(b) = 1$

试证存在 $\zeta, \eta \in (0, 1)$ 使得 $e^{\eta-\zeta} [f(\eta) + f'(\eta)] = 1$

分析: 首先把 ζ 与 η 分开, 那么就有 $e^{\eta} [f(\eta) + f'(\eta)] = e^{\zeta}$

一下子看不出来什么, 那么可以先从左边的式子下手试一下

很容易看出 $e^{\eta} [f(\eta) + f'(\eta)] = [e^{\eta} f(\eta)]'$, 设 $F(x) = e^x f(x)$

利用拉格朗日定理可得 $F'(\eta) = \frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b - a}$ 再整理一下

$$e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)] = \frac{e^b - e^a}{b - a} \text{ 只要找到 } \frac{e^b - e^a}{b - a} \text{ 与 } e^{\zeta} \text{ 的关系就行了}$$

这个更容易看出来了，令 $G(x) = e^x$ 则再用拉格朗日定理就得到

$$G'(\zeta) = e^{\zeta} = \frac{e^b - e^a}{b - a} = e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)]$$

②柯西定理（与之前所举例类似）

有时遇到 ξ 和 η 同时出现的时候还需要多方考虑，可能会用到柯西定理与拉氏定理的结合使用，在习题里经常出现类似的题。

2.2.例题选讲

例 1. 是否存在可微函数 $f(x)$ 使得 $f[f(x)] = 1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5$ ，若存在，请求出 $f(x)$ 的解析式；若不存在，请给出证明。

解：令 $g(x) = f[f(x)] - x = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$, $g(-1) = 6 \neq 0$,

当 $x \neq -1$ 时 $g(x) = \frac{1 - x^6}{1 + x}$ ，由 $g(x) = 0$ 得 $x = 1$ ($x = -1$ 舍去)， $\therefore x = 1$ 是 $g(x) = 0$ 的唯一

解。令 $f(1) = t$ ，则 $g(1) = f(t) - 1 = 0$ ， $\therefore f(t) = 1$ ，

则 $g(t) = f(1) - t = 0 \therefore t = 1, f(1) = 1 \therefore g'(x) = f'[f(x)]f'(x) - 1$ ，

$\therefore g'(1) = [f'(1)]^2 - 1 \geq -1$ ，另一方面 $g'(x) = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4$ ，

$g'(1) = -3$ 与 $g'(1) \geq -1$ 矛盾，所以不存在满足题意的 $f(x)$ 。

例 2. 设 $f(x) \in C_{[a,b]} \cap D_{(a,b)}$ ，且 $f'(x) \neq 0$ ，

证明： $\exists \xi, \eta \in (a, b)$ 使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$ 。

证明：

例 3. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上可微，且 $f(0) = 0$ ， $|f'(x)| \leq p|f(x)|, 0 < p < 1$ ，

证明: $f(x) \equiv 0, x \in R$ 。

证明: 由拉格朗日中值定理得 $f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi_1)x$, ξ_1 介于 0, x 之间,

$$\therefore \text{当 } x \in [0, 1] \text{ 时, } |f(x)| = |f'(\xi_1)|x \leq |f'(\xi_1)| \leq p|f(\xi_1)|, \xi_1 \in [0, x],$$

$$\therefore |f(\xi_1)| \leq p|f(\xi_2)|, \xi_2 \in [0, \xi_1], \dots, \therefore |f(x)| \leq p^n |f(\xi_n)|,$$

$$\xi_n \in [0, \xi_{n-1}] \subset [0, \xi_{n-2}] \subset \dots \subset [0, 1], \therefore f(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上连续, } \therefore f(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上有界, 又 } 0 < p < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} p^n |f(\xi_n)| = 0,$$

$$\therefore f(x) \equiv 0, x \in [0, 1], f(1) = 0$$

$$\text{当 } x \in [1, 2] \text{ 时, 同上 } |f(x)| = |f(x) - f(1)| = |f'(\eta_1)|(x-1) \leq |f'(\eta_1)|$$

$$\therefore |f(x)| \leq p|f(\eta_1)| \leq p^2 |f(\eta_2)| \leq \dots \leq p^n |f(\eta_n)|,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} p^n |f(\eta_n)| = 0, \therefore f(x) \equiv 0, x \in [1, 2]$$

依次可得 $f(x) \equiv 0, x \in [0, +\infty)$

$$\text{当 } x \in [-1, 0] \text{ 时 } |f(x)| = |f(x) - f(0)| = |f'(\zeta_1)|x \leq |f'(\zeta_1)|$$

$$\therefore |f(x)| \leq p|f(\zeta_1)| \leq p^2 |f(\zeta_2)| \leq \dots \leq p^n |f(\zeta_n)|,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} p^n |f(\zeta_n)| = 0, \therefore f(x) \equiv 0, x \in [-1, 0]$$

同理, 依次可得 $f(x) \equiv 0, x \in (-\infty, 0]$, 所以 $f(x) \equiv 0, x \in R$

例 4. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 R 上的不可导点为_____。

$$\text{解: 当 } |x| < 1 \text{ 时 } f(x) = 1, \text{ 当 } |x| = 1 \text{ 时 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1,$$

$$\text{当 } |x| > 1 \text{ 时 } f(x) = |x|^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{-3n}} = |x|^3$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} |x|^3, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时,} \end{cases}, \text{ 显然 } f(x) \text{ 的不可导点为 } x = \pm 1$$

$$\text{例 5. 当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, 求证: } \frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}.$$

证明: 令 $f(x) = \tan x \sin x - x^2$,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \sin x - 2x \geq 2\sqrt{\frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot \sin x} - 2x = 2\tan x - 2x > 0$$

$\therefore f(x)$ 递增, $\therefore f(x) > f(0) = 0$, 即 $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}$

例 6. 求 $f(x) = \int_0^x \left[1 + \frac{(x-t)}{1!} + \frac{(x-t)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] e^{nt} dt$ 的 n 阶导数。

解: 设 $g_k(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} e^{nt} dt$, 则 $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(x)$,

$$\therefore g'_k(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{nt} dt = g_{k-1}(x)$$

$$\therefore g_k^{(k)}(x) = g_{k-1}^{(k-1)}(x) = \dots = g'_1(x) = g_0(x) = \int_0^x e^{nt} dt = \frac{e^{nx} - 1}{n}$$

$g_k^{(k+1)}(x) = e^{nx}$, 当 $n > k$ 时 $g_k^{(n)}(x) = n^{n-k-1} \bullet e^{nx}$, 由 $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(x)$ 得:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k^{(n)}(x) = e^{nx} \sum_{k=0}^{n-1} n^{n-k-1} = e^{nx} (n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n + 1)$$

例 7. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上由连续的二阶导数, $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 且二元函数

$$z = (x^2 + y^2) f(x^2 + y^2) \text{ 满足 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

求: (1) $f(x)$; (2) $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最大值。

解: (1) 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $z = r^2 f(r^2)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2rf(r^2) \bullet \frac{x}{r} + r^2 f'(r^2) \bullet 2r \bullet \frac{x}{r} = 2xf(r^2) + 2xr^2 f'(r^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f(r^2) + (8x^2 + 2r^2) f'(r^2) + 4x^2 r^2 f''(r^2)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f(r^2) + (8y^2 + 2r^2) f'(r^2) + 4y^2 r^2 f''(r^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4f(r^2) + 12r^2 f'(r^2) + 4r^4 f''(r^2)$$

$$\therefore f(r^2) + 3r^2 f'(r^2) + r^4 f''(r^2) = 0,$$

$$\text{令 } r^2 = e^x, \text{ 则 } f(e^x) + 3e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x) = 0$$

令 $g(x) = f(e^x)$, 则 $g'(x) = e^x f'(e^x)$, $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$

$\therefore g''(x) + 2g'(x) + g(x) = 0$, 解得 $g(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$

$\therefore f(e^x) = g(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$, $f(x) = \frac{c_1 + c_2 \ln x}{x}$

由 $f(1) = 0, f'(1) = 1$ 得 $c_1 = 0, c_2 = 1$, $\therefore f(x) = \frac{\ln x}{x}$

(2) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $1 < x < e$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $x > e$ 时 $f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$ 在 $[1, e]$ 上递增, 在 $[e, +\infty)$ 上递减, $\therefore f(x)$ 的最大值为 $f(e) = \frac{1}{e}$ 。

例 8. 设 $x(t)$ 是方程 $5x'' + 10x' + 6x = 0$ 的解, 证明: 函数 $f(t) = \frac{x^2(t)}{1 + x^4(t)} (t \in R)$

有最大值, 并求出此最大值。

解: 解原微分方程: 特征根方程为 $5r^2 + 10r + 6 = 0$, 解得 $r = -1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5}i$,

则 $x(t) = e^{-t} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{5}}{5}t + c_2 \sin \frac{\sqrt{5}}{5}t \right)$,

又 $f(t) = \frac{x^2(t)}{1 + x^4(t)} = \frac{1}{x^2(t) + \frac{1}{x^2(t)}} \leq \frac{1}{2}$

对于 $\forall t \in R$, 若 $x(t) \equiv 0$, 则 $f(t) \equiv 0$, 最大值为 0;

若 $x(t) \not\equiv 0$, 则 c_1, c_2 不全为 0, 不妨设 $c_1 > 0$, 取 $t_k = -2\sqrt{5}k\pi, k \in N$

则 $x(t_k) = e^{2\sqrt{5}k\pi} c_1$, 当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $t_k \rightarrow -\infty, x(t_k) \rightarrow +\infty$

又 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 < 1, \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = +\infty > 1$,

由连续函数的介值定理得: $\exists t_0 \in (-\infty, +\infty)$ 使得 $x(t_0) = 1$, 此时 $f(t_0) = \frac{1}{2}$,

$\therefore x(t) \not\equiv 0$ 时, $f(t)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$ 。

综上, 当 $x(t) \equiv 0$ 时最大值为 0, 当 $x(t) \not\equiv 0$ 时最大值为 $\frac{1}{2}$ 。

例 9. 设 $P(x) = \frac{d^n}{dx^n} (1-x^m)^n$, 其中 m, n 是正整数, 则 $P(1) =$ _____。

解: $(1-x^m)^n = (1-x)^n (1+x+x^2+\dots+x^{m-1})^n$

令 $u(x) = (1-x)^n, v(x) = (1+x+x^2+\dots+x^{m-1})^n$, 则 $P(x) = \frac{d^n}{dx^n} (uv)$

$\therefore P(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, 当 $k>0$ 时 $u^{(n-k)} = (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k-1)!} (1-x)^k$,

$u^{(n-k)}(1) = 0, \therefore P(1) = C_n^0 u^{(n)}(1) v^{(0)}(1) = (-1)^n \cdot n! \cdot m^n$

例 10. 设 $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^n \cos \frac{\pi x^2}{16}$, 求 $f^{(n)}(2)$

解: $f(x) = (x-2)^n (x-1)^n \cos \frac{\pi x^2}{16}$,

令 $g(x) = (x-2)^n, h(x) = (x-1)^n \cos \frac{\pi x^2}{16}$, 则 $f(x) = g(x)h(x)$

$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x)$

$\therefore f^{(n)}(2) = \sum_{k=0}^n C_n^k g^{(n-k)}(2) h^{(k)}(2) = C_n^0 g^{(n)}(2) h^{(0)}(2) = \frac{\sqrt{2}}{2} n!$

例 11. 求一函数 $f(x)$, 使其在任一有限区间上有界, 且满足 $f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = x - x^2$

解: 令 $x=0$ 得 $f(0)=0$, 对原方程求导得: $f'(x) - \frac{1}{4} f'\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2x$

$f''(x) - \frac{1}{8} f''\left(\frac{x}{2}\right) = -2, f^{(3)}(x) - \frac{1}{2^4} f^{(3)}\left(\frac{x}{2}\right) = 0, \dots$

令 $x=0$ 得 $f(0)=0, f'(0)=\frac{4}{3}, f''(0)=-\frac{16}{7}, f^{(3)}(0)=0, \dots,$

$f^{(n)}(0)=0 (n \geq 3)$

$\therefore f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)x^3 + \dots = \frac{4}{3}x - \frac{8}{7}x^2$

例 12. 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上无穷阶可导, 且满足 (1) $\exists L > 0$ 使得 $|f^{(n)}(x)| \leq L, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

$$(2) f\left(\frac{1}{n}\right)=0, n \in N^*, \text{ 求证: } f(x)=0, x \in R.$$

证明: 记 $x_n = \frac{1}{n}, n \in N^*$, 由题意得 $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ 在 $x=0$ 处

$$\text{连续, } \therefore f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

$$\because f(x_n) = f(x_{n+1}), \text{ 由罗尔定理得 } \exists y_n \in (x_{n+1}, x_n) \text{ 使 } f'(y_n) = 0, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(y_n) = 0$$

$$\because f'(y_n) = f'(y_{n+1}), \text{ 由罗尔定理得 } \exists z_n \in (y_{n+1}, y_n) \text{ 使 } f''(z_n) = 0, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0, f''(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f''(z_n) = 0$$

$$\text{同理, 可得 } f^{(3)}(0) = 0, \dots, f^{(n)}(0) = 0,$$

$$\therefore f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$$

$$\text{对 } \forall x \in R \text{ 有 } f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n, \xi \text{ 介}$$

$$\text{于 } 0, x \text{ 之间, } \therefore f(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n, |f(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n \right| \leq \frac{L}{n!}|x|^n$$

$$\because \text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|} \text{ 收敛, } \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0, \therefore f(x) \equiv 0$$

例 13. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f'(a) = f'(b) = 0$, 求证: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$|f''(\xi)| \geq 4 \frac{|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}$$

证明: 将 $f(x)$ 在 $x=a, x=b$ 处用泰勒公式展开得

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2, \xi_1 \text{ 介于 } x, a \text{ 之间,}$$

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2, \xi_2 \text{ 介于 } x, b \text{ 之间,}$$

$$\therefore f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{1}{8}f''(\xi_1)(b-a)^2,$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{1}{8}f''(\xi_2)(b-a)^2$$

$$\text{两式相减得 } f(b) - f(a) = \frac{1}{8}(b-a)^2 [f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]$$

$$\text{设 } |f''(\xi)| = \max \{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}, \text{ 则}$$

$$|f(b) - f(a)| = \frac{1}{8}(b-a)^2 [|f''(\xi_1)| - f''(\xi_2)]$$

$$\leq \frac{1}{8}(b-a)^2 [|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|] \leq \frac{1}{4}(b-a)^2 |f''(\xi)|$$

$$\therefore |f''(\xi)| \geq 4 \frac{|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}$$

例 14. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导，对于 $[a, b]$ 内每一点 x ，有 $f(x)f''(x) \geq 0$ ，且在 $[a, b]$ 的任一子区间上 $f(x)$ 不恒等于 0，求证： $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中至多有一个零点。

证明：方法一：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有两个零点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)，

$$\text{令 } g(x) = f(x)f'(x), \text{ 则 } g'(x) = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x) \geq 0$$

$$\therefore g(x) \text{ 单调递增, } \because g(x_1) = g(x_2) = 0, \therefore \forall x \in [x_1, x_2] \text{ 有 } g(x) = 0,$$

$$\therefore f(x)f'(x) = 0, \text{ 积分得 } \frac{1}{2}[f(x)]^2 = C, \text{ 由 } f(x_1) = 0 \text{ 得 } C=0,$$

$$\therefore \forall x \in [x_1, x_2] \text{ 有 } f(x) = 0, \text{ 与题意在 } [a, b] \text{ 的任一子区间上 } f(x) \text{ 不恒等于 } 0 \text{ 矛盾}$$

方法二：设 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的两个相邻零点，即在 (x_1, x_2) 之间无其他零点，不妨设对 $\forall x \in (x_1, x_2)$ 有 $f(x) > 0$ ，则 $f''(x) \geq 0$

$$\therefore f'(x) \text{ 在 } (x_1, x_2) \text{ 上递增, 在 } x_1 \text{ 的右邻域内 } f(x) > 0 = f(x_1),$$

$$\therefore f'(x_1) = f'(x_1+) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0$$

$$\text{在 } x_2 \text{ 的左邻域内 } f(x) > 0 = f(x_2),$$

$$\therefore f'(x_2) = f'(x_2-) = \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} < 0$$

$\because x_1 < x_2, f'(x)$ 递增, $\therefore f'(x_1) < f'(x_2)$, 与 $f'(x_1) > 0 > f'(x_2)$ 矛盾。

例 15. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续在 (a, b) 内可导且 $f(a) = f(b) = 0$

求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$

证明: 令 $F(x) = e^{\frac{x^2}{2}} f(x)$,

$F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $F(a) = F(b) = 0$,

由罗尔定理得 $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $F'(\xi) = 0$, 即 $\xi e^{\frac{\xi^2}{2}} f(\xi) + e^{\frac{\xi^2}{2}} f'(\xi) = 0$,

$\because e^{\frac{\xi^2}{2}} \neq 0, \therefore \xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$

例 16. 设一元函数 $u = f(r)$ 当 $0 < r < +\infty$ 时有连续的二阶导数, 且 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 又

$u = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, 试求 $f(r)$ 的表达式。

$$\because u = f(r(x, y, z)), u_x = f' \cdot \frac{x}{r} \quad (f': f'(r))$$

$$u_{xx} = \frac{f'}{r} + x \left(\frac{f''}{r} - \frac{f'}{r^2} \right) \cdot \frac{x}{r} = \frac{f'}{r} + \frac{x^2 f''}{r^2} - \frac{x^2 f'}{r^3}$$

$$\text{对称地, } u_{yy} = \frac{f'}{r} + \frac{y^2 f''}{r^2} - \frac{y^2 f'}{r^3}, u_{zz} = \frac{f'}{r} + \frac{z^2 f''}{r^2} - \frac{z^2 f'}{r^3}$$

$$\therefore u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f'' + 2 \frac{f'}{r} = 0$$

$$\text{令 } P = f', \frac{P'}{P} = -\frac{2}{r}, \ln P = \ln \frac{1}{r^2} + \ln C = \ln \frac{C}{r^2}$$

$$P = f'(r) = \frac{C}{r^2} = \frac{1}{r^2} (\because f'(1) = 1) \therefore f(r) = -\frac{1}{r} + C = -\frac{1}{r} (\because f(1) = 0)$$

注 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, 称为(三维)拉普拉斯方程, 又名调和方程、位势方程,

是一种偏微分方程。因为由法国数学家拉普拉斯首先提出而得名。在一般条件下解拉普拉斯方程超出考试范围。本题是讨论特殊条件下的拉普拉斯方程求解问题。

补充题 1: 设 $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, 且 u 满足(二维)拉普拉斯方程,

求 $u = f(x, y)$ 的表达式。

分析: 函数 $u = f(x, y)$ 是 $x^2 + y^2$ 的函数, 可以考虑用极坐标进行转化, 利用求微分方程的方法得到表达式。

$$\text{解: 令 } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ 则 } u = f(x, y) = f(r), \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} f'(r)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} f''(r) + \frac{y^2}{r^3} f'(r) \text{ 同理可得 } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} f''(r) + \frac{x^2}{r^3} f'(r)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = 0, \frac{f''(r)}{f'(r)} = -\frac{1}{r} \text{ 积分得}$$

$$\ln f'(r) = -\ln r + \ln c_0, f'(r) = \frac{c_0}{r}, f(r) = c_0 \ln r + c_1$$

$$u = \frac{1}{2} c_0 \ln(x^2 + y^2) + c_1 = c_2 \ln(x^2 + y^2) + c_1$$

补充题 2: $u = f(x, y)$, 试求出 (二维) 拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

在极坐标系下的表达式。

例 17. 设 $u = f(x, y, z)$, f 是可微函数, 若 $\frac{f'_x}{x} = \frac{f'_y}{y} = \frac{f'_z}{z}$, 证明 u 仅为 r 的函数, 其中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

利用球坐标变换: 设 $x = r \sin \phi \cos \theta, y = r \sin \phi \sin \theta, z = r \cos \phi$

以下只需证明 $\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ 即可。

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = f'_x r \cos \phi \cos \theta + f'_y r \cos \phi \sin \theta - f'_z r \sin \phi$$

$$\text{令 } \frac{f'_x}{x} = \frac{f'_y}{y} = \frac{f'_z}{z} = t, \text{ 则 } \frac{\partial f}{\partial \phi} = tr(x \cos \phi \cos \theta + y \cos \phi \sin \theta - z \sin \phi)$$

$$= tr^2(\sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta + \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta - \cos \phi \sin \phi) = 0$$

类似可证 $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ 。

例 18. 设函数 $u(x, y)$ 的所有二阶偏导数都连续, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 且 $u(x, 2x) = x, u'_1(x, 2x) = x^2$,

求 $u''_{11}(x, 2x)$ 。

解: $u(x, 2x) = x$ 两边对 x 求导, 得到: $u'_1(x, 2x) + 2u'_2(x, 2x) = 1$, 代入 $u'_1(x, 2x) = x^2$ 求得:

$$u'_2(x, 2x) = \frac{1-x^2}{2};$$

$$u'_1(x, 2x) = x^2 \text{ 两边对 } x \text{ 求导, 得到: } u''_{11}(x, 2x) + 2u''_{12}(x, 2x) = 2x;$$

$$u'_2(x, 2x) = \frac{1-x^2}{2} \text{ 两边对 } x \text{ 求导, 得到 } u''_{21}(x, 2x) + 2u''_{22}(x, 2x) = -x.$$

以上两式与 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 联立, 又二阶导数连续, 所以 $u''_{12} = u''_{21}$, 故 $u''_{11}(x, 2x) = -\frac{4}{3}x$

例 19. 设变换 $\begin{cases} u = x + a\sqrt{y} \\ v = x + 2\sqrt{y} \end{cases}$ 把方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求 a 。

解: 计算一、二阶偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{a}{2\sqrt{y}} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{1}{\sqrt{y}} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{a^2}{4\sqrt{y}} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{a}{\sqrt{y}} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \right),$$

代入方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (2-a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$$

$$\text{于是有} \begin{cases} 1 - \frac{a^2}{4} = 0 \\ 2 - a \neq 0 \end{cases}, \text{ 所以 } a = -2.$$

例 20. 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 点处的 100 阶导数值.

解: 方法 1: 利用莱布尼兹公式

$$f^{(100)}(x) = x^2 [\ln(1+x)]^{(100)} + 100 [\ln(1+x)]^{(99)} \cdot (2x) + \frac{100 \times 99}{2} [\ln(1+x)]^{(98)} \cdot 2,$$

$$\text{而 } [\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}, \quad [\ln(1+x)]'' = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad [\ln(1+x)]''' = \frac{2!}{(1+x)^3},$$

$$[\ln(1+x)]^{(4)} = -\frac{3!}{(1+x)^4}, \dots, \text{ 由归纳可得: } [\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \text{ 故}$$

$$[\ln(1+x)]^{(98)} = -\frac{97!}{(1+x)^{98}}; \text{ 所以 } f^{(100)}(0) = -990 \times 97!.$$

$$\text{方法 2: 利用泰勒公式 } f(x) = x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} - \dots - \frac{x^{100}}{98} + \dots$$

$$\text{故 } \frac{1}{100!} f^{(100)}(0) = -\frac{1}{98}, \quad f^{(100)}(0) = -990 \times 97!.$$

例 21. 设 $f(u, v)$ 有一阶连续偏导数, $z = f(x^2 - y^2, \cos(xy))$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 证

$$\text{明: } \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \sin \theta = 2x \frac{\partial z}{\partial u} - y \frac{\partial z}{\partial v} \sin(xy).$$

解: 设: $u = x^2 - y^2$, $v = \cos(xy)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial y}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= 2 \frac{\partial z}{\partial u} (x \cos \theta - y \sin \theta) - \frac{\partial z}{\partial v} \sin(xy) \cdot (y \cos \theta + x \sin \theta) \end{aligned}$$

类似可得 $\frac{\partial z}{\partial r} = -2r \frac{\partial z}{\partial u} (x \sin \theta + y \cos \theta) + \frac{\partial z}{\partial v} r \sin(xy) \cdot (y \sin \theta - x \cos \theta)$, 代入原式左边得:

$$\frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \sin \theta = 2 \cos \theta \cdot \frac{\partial z}{\partial u} (x \cos \theta - y \sin \theta) - \cos \theta \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \sin(xy) (y \cos \theta + x \sin \theta)$$

$$+ 2 \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \sin \theta (x \sin \theta + y \cos \theta) - \frac{\partial z}{\partial v} \sin(xy) \sin \theta (y \sin \theta - x \cos \theta) = 2x \frac{\partial z}{\partial u} - y \frac{\partial z}{\partial v} \sin(xy)$$

例 22. 已知函数 $z=z(x, y)$ 满足 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, 设
$$\begin{cases} u = x \\ v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \\ \phi = \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \end{cases}$$
, 对函数

$\phi = \phi(u, v)$, 求证: $\frac{\partial \phi}{\partial u} = 0$ 。

证明: 由题意得 $x = u, y = \frac{u}{1+uv}$, 则 $\phi = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$ 是 u, v 的复合函数, 则

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = -\frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{(1+uv)^2} \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned} \because \frac{y}{x} &= \frac{1}{1+uv} \therefore \frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{u^2} - \frac{1}{x^2 z^2} \left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

例 23. 设整数 $n > 1$, 求证: $\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}$ 。

证明: 先证右边, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, 即 $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} > 0$

令 $x = \frac{1}{n} \in (0, 1)$, $f(x) = (1-x) \ln(1-x) + x$, $f'(x) = -\ln(1-x) > 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递增, $\therefore f(x) > f(0) = 0$

$\therefore \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} > 0$ 得证。

再证左边, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$, 即 $\frac{1}{n} \ln \left(1 - \frac{1}{2n}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} > 0$

则 $g(x) = x \ln \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \ln(1-x) - x$, $g'(x) = \ln \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2-x} + \frac{1}{1-x} - 1$

$$g''(x) = \frac{x(x^2 + 5x + 5)}{(2-x)^2(1-x)^2} > 0 \therefore g'(x) \text{ 在 } (0,1) \text{ 上递增,}$$

$$\therefore g'(x) > g'(0) = 0 \therefore g(x) \text{ 在 } (0,1) \text{ 上递增, } g(x) > g(0) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{n} \ln \left(1 - \frac{1}{2n} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} > 0 \text{ 得证.}$$

$$\text{故, } \frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n < \frac{1}{ne}.$$

例 24. 证明不等式 $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

证明: 设 $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$, 则

$$f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

令 $f'(x) = 0$, 得到驻点 $x = 0$. 由 $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$ 可知 $x = 0$ 为极小值点, 亦即最小值点, 最小值为 $f(0) = 0$, 于是对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x) \geq 0$, 即所证不等式成立.

例 25. 证明: 当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$.

证明: 令 $F(x) = (1+x)e^{-2x} + x - 1$, 则 $F'(x) = e^{-2x} - 2(1+x)e^{-2x} + 1 = 1 - (2x+1)e^{-2x}$,

$$F''(x) = -2e^{-2x} + 2(2x+1)e^{-2x} = 4xe^{-2x}$$

由于在 $(0,1)$ 上 $F''(x) > 0$, 故知 $F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, 又 $F'(0) = 0$,

故 $F'(x) > 0$, 从而函数 $F(x)$ 也在 $[0,1]$ 上单调递增, 且由 $F(0) = 0$ 可知当 $x \in (0,1)$

时 $F(x) > F(0) = 0$, 即 $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$.

例 26. 试确定 a 值, 使方程 $\frac{x^2}{2} - \ln(1+x^2) = a$ 在 $[-1, 1]$ 上有两个相异的实根.

解: 令 $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(1+x^2)$, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是偶函数, 则 $f(x) = a$ 在 $(0, 1]$ 上

$$\text{仅有一个根. 在 } (0, 1] \text{ 上 } f'(x) = x - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x(x^2-1)}{1+x^2} < 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 的最小值是 $f(1) = \frac{1}{2} - \ln 2$, 最大值是 $f(0) = 0$

由题意得 $\frac{1}{2} - \ln 2 \leq a < 0$

例 27. 设正值函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 求函数

$$F(x) = \int_1^x \left[\left(\frac{2}{x} + \ln x \right) - \left(\frac{2}{t} + \ln t \right) \right] f(t) dt \text{ 的最小值点.}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } F'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{2}{x} + \ln x \right) \int_1^x f(t) dt - \int_1^x \left(\frac{2}{t} + \ln t \right) f(t) dt \right] \\ &= \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \right) \int_1^x f(t) dt + \left(\frac{2}{x} + \ln x \right) f(x) - \left(\frac{2}{x} + \ln x \right) f(x) = \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \right) \int_1^x f(t) dt \end{aligned}$$

注意到: 在 $[1, +\infty)$ 上 $f(x) > 0$, 因此当 $x > 1$ 时, $\int_1^x f(t) dt > 0$.

令 $F'(x) = 0$ 得 $-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$, 解得此方程的唯一驻点 $x = 2$; 又当 $1 < x < 2$ 时, $F'(x) < 0$; 当 $2 < x$ 时, $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在点 $x = 2$ 处取得最小值 $F(2)$.

例 28. 设 $F(x) = -\frac{1}{2}(1 + e^{-1}) + \int_{-1}^1 |x - t| e^{-t^2} dt$, 试证明在区间 $[-1, 1]$ 上 $F(x)$ 有且仅有两个实根.

$$\begin{aligned} \text{证明: } F(x) &= -\frac{1}{2}(1 + e^{-1}) + \int_{-1}^x (x - t) e^{-t^2} dt + \int_x^1 (t - x) e^{-t^2} dt \\ &= -\frac{1}{2}(1 + e^{-1}) + x \int_{-1}^x e^{-t^2} dt - \int_{-1}^x t e^{-t^2} dt + \int_x^1 t e^{-t^2} dt - x \int_x^1 e^{-t^2} dt \\ \text{由 } -\int_{-1}^x t e^{-t^2} dt + \int_x^1 t e^{-t^2} dt &= e^{-x^2} - e^{-1}, \\ \int_x^1 e^{-t^2} dt &= \int_x^0 e^{-t^2} dt + \int_0^1 e^{-t^2} dt = -\int_0^x e^{-t^2} dt - \int_0^{-1} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

$$\text{代入得: } F(x) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-1} + e^{-x^2} + 2x \int_0^x e^{-t^2} dt$$

由于 e^{-x^2} 是偶函数, 所以 $\int_0^x e^{-t^2} dt$ 是奇函数, $2x \int_0^x e^{-t^2} dt$ 是偶函数, 于是知 $F(x)$ 为偶函数.

$$\text{又注意到: } F(0) = \frac{e-3}{2e} < 0,$$

$$F(1) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2e}\right) + 2 \int_0^1 e^{-t^2} dt > -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2e}\right) + 2 \int_0^1 e^{-t} dt = \frac{3}{2} - \frac{5}{2e} > 0$$

$$F'(x) = -2xe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} + 2 \int_0^x e^{-t^2} dt > 0 \quad (x > 0)$$

因此函数 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个实根; 又由 $F(x)$ 为偶函数, 故 $F(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内同样有且仅有一个实根. 于是知函数 $F(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上有且仅有两个实根.

例 29. 设常数 $k > \ln 2 - 1$, 证明: 当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $(x-1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) > 0$.

证明: 设函数 $f(x) = x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1$ ($x > 0$), 故要证

$(x-1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) > 0$, 只需证: 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$; 当 $1 < x$ 时, $f(x) > 0$.

$$\text{显然: } f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2k}{x} = \frac{1}{x}(x - 2 \ln x + 2k),$$

令 $\varphi(x) = x - 2 \ln x + 2k$, 则 $\varphi'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$. 当 $x = 2$ 时, $\varphi'(x) = 0$, $x = 2$ 为唯一驻点;

又 $\varphi''(x) = \frac{2}{x^2}$, $\varphi''(2) = \frac{1}{2} > 0$, 所以 $x=2$ 为 $\varphi(x)$ 的唯一极小值点,

故 $\varphi(2) = 2(1 - \ln 2) + 2k = 2[k - (\ln 2 - 1)] > 0$ 为函数 $\varphi(x)$ 的最小值 ($x > 0$),

即当 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 严格单调递增. 又因 $f(1) = 0$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$; 当 $1 < x$ 时, $f(x) > 0$.

故, $(x-1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) > 0$.

例 30. 设 $f(x)$ 二次可微, $f(0)=f(1)=0$, $\max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 2$, 证明: $\min_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \leq -16$.

证明: 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 有最大值和最小值, 又因最大值是 2, 端点处函数值是 0, 故最大值在 $(0, 1)$ 内部取得. 即存在 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $f(x_0) = \max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 2$, 于是 $f(x_0)$ 是极大值, $\therefore f'(x_0) = 0$,

在 $x = x_0$ 处按泰勒公式展开, $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$ 使得

$$0 = f(0) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(0 - x_0)^2 = 2 + \frac{1}{2} f''(\xi)x_0^2$$

$$0 = f(1) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\eta)(1 - x_0)^2 = 2 + \frac{1}{2} f''(\eta)(1 - x_0)^2$$

$$\therefore \min_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \leq \min \{f''(\xi), f''(\eta)\} = \min \left\{ -\frac{4}{x_0^2}, -\frac{4}{(1-x_0)^2} \right\}$$

$$\leq -2 \left[\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{(1-x_0)^2} \right] \leq -\frac{4}{x_0(1-x_0)} \leq -16$$

例 31. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, $f'(a) = f'(b) = 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

证明: 应用泰勒公式将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 分别在点 a, b 处展开, 注意到

$$f'(a) = f'(b) = 0, \exists \xi_1, \xi_2, a < \xi_1 < \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b \text{ 使得}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{1}{2} f''(\xi_1) \left(\frac{b-a}{2}\right)^2, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{1}{2} f''(\xi_2) \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \text{ 两式}$$

$$\text{相减得 } f(b) - f(a) + \frac{1}{8} [f''(\xi_1) - f''(\xi_2)] (b-a)^2 = 0$$

$$\therefore \frac{4|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2} = \frac{1}{2} |f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| \leq \frac{1}{2} [|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|] \leq |f''(\xi)|$$

其中当 $|f''(\xi_1)| \geq |f''(\xi_2)|$ 时 $\xi = \xi_1$; 当 $|f''(\xi_2)| \geq |f''(\xi_1)|$ 时 $\xi = \xi_2$

例 32. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶连续导数, $f(0) = f(1) = 0$, 且当 $x \in (0, 1)$ 时

$|f''(x)| \leq M$ ，求证： $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}M$ 。

分析：对于函数具有二阶或二阶以上连续导数，且最高阶导数的大小或上下界已知的命题可以考虑用泰勒公式。方法是写出比最高阶低一阶的函数展开成泰勒公式，适当选取等式两边的变量，根据已知条件对展开式进行放缩。

证明：由题意将 $f(x)$ 在任一点 x_0 处展开成一阶泰勒公式得：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 \text{ 其中 } \xi \text{ 在 } x, x_0 \text{ 之间。}$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 则 } \exists \xi_1, 0 < \xi_1 < x_0 \leq 1, f(0) = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2$$

令 $x=1$ ，则

$$\exists \xi_2, 0 < \xi_2 < x_0 \leq 1, f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1 - x_0)^2$$

$$\text{将上面两式相减得： } f'(x_0) = \frac{1}{2}[f''(\xi_1)x_0^2 - f''(\xi_2)(1 - x_0)^2]$$

又 $x \in (0, 1)$ 时 $|f''(x)| \leq M$ ，

$$\therefore |f'(x_0)| \leq \frac{M}{2}[x_0^2 + (1 - x_0)^2] = \frac{M}{2}(2x_0^2 - 2x_0 + 1) \leq \frac{M}{2}$$

由于 x_0 的任意性知 $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}M$ 。

例 33. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负单调递减的连续函数，且 $0 < a < b < 1$ ，

$$\text{证明： } \int_0^a f(x)dx \geq \frac{a}{b-a} \int_a^b f(x)dx。$$

证明：由积分中值定理得： $\int_0^a f(x)dx = af(\xi_1) \geq af(a), \xi_1 \in [0, a]$ ，

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi_2) \leq (b-a)f(a), \xi_2 \in [a, b],$$

$$\therefore \frac{1}{a} \int_0^a f(x)dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \therefore \int_0^a f(x)dx \geq \frac{a}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

例 34. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导，且 $f(a) = f(b) = 0$ 及 $|f''(x)| \leq 8$ ，

求证： $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq (b-a)^2$ 。

证明：把 $f(a)$ 、 $f(b)$ 分别在 $x = \frac{a+b}{2}$ 点处展开得：

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

其中 $x_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right), x_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ 因为 $f(a) = f(b) = 0$ ，两式相加得：

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{8}[f''(x_1) + f''(x_2)](b-a)^2 = 0$$

$$\therefore \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| = \frac{1}{16}|f''(x_1) + f''(x_2)|(b-a)^2$$

$$\leq \frac{1}{16}[|f''(x_1)| + |f''(x_2)|](b-a)^2 \leq (b-a)^2$$

例 35. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导且 $|f''(x)| \leq M$ ， $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ ， $b-a \leq 1$ ，求证：

$$|f(a) + f(b)| \leq \frac{1}{4}M。$$

证明：把 $f(a)$ 、 $f(b)$ 分别在 $x = \frac{a+b}{2}$ 点处展开，结合 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ 得：

$$f(a) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(x_1)\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$f(b) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(x_2)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\text{两式相加得：} f(a) + f(b) = \frac{1}{8}[f''(x_1) + f''(x_2)](b-a)^2$$

$$\therefore |f(a) + f(b)| = \frac{1}{8}[|f''(x_1)| + |f''(x_2)|](b-a)^2$$

$$\leq \frac{1}{8}[|f''(x_1)| + |f''(x_2)|](b-a)^2 \leq \frac{1}{4}M$$

例 36. 设 $f''(x) \leq 0, x \in [0, 1]$ ，证明： $\int_0^1 f(x^2)dx \leq f\left(\frac{1}{3}\right)$ 。

证明：把 $f(x^2)$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 点处展开得

$$f(x^2) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\because f''(x) \leq 0, \therefore f(x^2) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{两边同时积分得} \int_0^1 f(x^2)dx \leq \int_0^1 f\left(\frac{1}{3}\right)dx + \int_0^1 f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)dx = f\left(\frac{1}{3}\right)$$

例 37. 设函数 $f(x) > 0$ ， $f''(x) \leq 0$ ，证明： $f(x) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ 。

证明：设函数在 $x = x_0$ 处取得最大值，把最大值点在任意点处展开得：

$$f(x_0) = f(x) + f'(x)(x_0 - x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x_0 - x)^2 \leq f(x) + f'(x)(x_0 - x)$$

$$\text{两边积分得 } \int_a^b f(x_0)dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)(x_0 - x)dx$$

$$\therefore (b-a)f(x_0) \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b (x_0 - x)df(x)$$

$$= 2\int_a^b f(x)dx - (b-x_0)f(b) - (x_0-a)f(a) \leq 2\int_a^b f(x)dx$$

$$\therefore f(x_0) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

因为 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的最大值，所以 $f(x) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ 。

例 38. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶连续可导，且 $f(a) = f(b) = 0, f(x) \neq 0$,

$$\text{证明：} \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \frac{4}{b-a}.$$

证明：令 $|f(x_0)| = M = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ，由 $f(a) = f(b) = 0$ 得 $x_0 \in (a, b)$

在区间 $[a, x_0], [x_0, b]$ 上分别用拉格朗日中值定理得

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0)}{x_0 - a}, x_1 \in (a, x_0), f'(x_2) = \frac{f(x_0)}{x_0 - b}, x_2 \in (x_0, b)$$

$$\therefore \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \frac{1}{M} \int_a^b |f''(x)| dx \geq \frac{1}{M} \left| \int_a^b f''(x) dx \right| \geq \frac{1}{M} \left| \int_{x_1}^{x_2} f''(x) dx \right|$$

$$= \frac{1}{M} |f'(x_2) - f'(x_1)| = \frac{1}{M} \left| \frac{f(x_0)}{x_0 - b} - \frac{f(x_0)}{x_0 - a} \right| = \left| \frac{1}{b - x_0} + \frac{1}{x_0 - a} \right|$$

$$= \frac{b-a}{(b-x_0)(x_0-a)} \geq \frac{4}{b-a}$$

例 39. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有一阶连续导函数，且 $f(0) = f(1) = 0$ ，求证：

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4} \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)|.$$

证明：令 $M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ ，由拉格朗日中值定理得：

$$f(x) - f(0) = f'(x_1)(x-0) \text{ 即 } f(x) = f'(x_1)x \therefore M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|,$$

$$\therefore |f(x)| \leq Mx \therefore \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx \leq M \int_0^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{8} M$$

同理 $f(1) - f(x) = f'(x_2)(1-x)$ 即 $f(x) = -f'(x_2)(1-x)$

$$\therefore |f(x)| \leq M(1-x) \therefore \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)| dx \leq M \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) dx = \frac{1}{8} M$$

$$\therefore \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)| dx \leq \frac{1}{4} M = \frac{1}{4} \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

例 40. 设函数 $f(x) \in C[a, b]$ 且不恒为 0, $0 \leq f(x) \leq M$, 求证:

$$\left[\int_a^b f(x) \cos x dx \right]^2 + \left[\int_a^b f(x) \sin x dx \right]^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12} \geq \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2$$

证明: 构造辅助函数

$$F(t) = \left[\int_a^t f(x) \cos x dx \right]^2 + \left[\int_a^t f(x) \sin x dx \right]^2 + \frac{M^2(t-a)^4}{12} - \left[\int_a^t f(x) dx \right]^2$$

$$F'(t) = 2f(t) \cos t \int_a^t f(x) \cos x dx + 2f(t) \sin t \int_a^t f(x) \sin x dx$$

$$+ \frac{1}{3} M^2 (t-a)^3 - 2f(t) \int_a^t f(x) dx$$

$$= \frac{1}{3} M^2 (t-a)^3 - 2f(t) \int_a^t f(x) [1 - \cos(x-t)] dx$$

$$\geq \frac{1}{3} M^2 (t-a)^3 - 2M^2 \int_a^t [1 - \cos(x-t)] dx$$

$$= 2M^2 \left[\frac{1}{6} (t-a)^3 - t + a + \sin(t-a) \right]$$

$$\text{令 } g(t) = \frac{1}{6} (t-a)^3 - t + a + \sin(t-a), g'(t) = \frac{1}{2} (t-a)^2 - 1 + \cos(t-a)$$

$$g''(t) = t - a - \sin(t-a) \geq 0, \therefore g'(t) \text{ 单调递增, } g'(t) \geq g'(a) = 0, \therefore g(t) \text{ 单调递增,}$$

$$g(t) \geq g(a) = 0, \therefore F'(t) \geq 0 \therefore F(t) \text{ 单调递增,}$$

$$\therefore F(b) \geq F(a) = 0 \text{ 即}$$

$$\left[\int_a^b f(x) \cos x dx \right]^2 + \left[\int_a^b f(x) \sin x dx \right]^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12} \geq \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2$$

例 41. 设 $x \in [0, 1], p > 1$, 求证: $2^{1-p} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$ 。

证明: 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$, 则 $f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1}$ 令 $f'(x) = 0$ 得驻点

$$x = \frac{1}{2}, \text{ 当 } x \in \left[0, \frac{1}{2} \right) \text{ 时 } f'(x) < 0, \text{ 当 } x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right] \text{ 时 } f'(x) > 0,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } \left[0, \frac{1}{2} \right] \text{ 上递减, 在 } \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \text{ 上递增, } \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{1-p} \text{ 是函数的最小值, 又}$$

$$f(0) = f(1) = 1, \text{ 所以 } 2^{1-p} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

例 42. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二次连续可微, $f(1)=0$, $M = \max_{x \in [0,2]} |f''(x)|$, 证明:

$$\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{3}.$$

证明: $f(x)$ 在 $x=1$ 处展开得 $f(x) = f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2$

$$\therefore f'(1)(x-1) - \frac{1}{2}M(x-1)^2 \leq f(x) \leq f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}M(x-1)^2$$

$$\therefore -\frac{M}{3} = \int_0^2 \left[f'(1)(x-1) - \frac{1}{2}M(x-1)^2 \right] dx \leq \int_0^2 f(x) dx$$

$$\leq \int_0^2 \left[f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}M(x-1)^2 \right] dx = \frac{M}{3} \therefore \left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{3}$$

例 43. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 且 $f''(x) \neq 0$, 满足 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 0$. 证明: $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上恰好有两个零点.

证: 因为 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内不能同号, 从而由闭区间上连续函数的性质知, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点.

假定 $x = \alpha$ 是 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内的唯一零点, 不妨设当 $0 < x < \alpha$ 时, $f(x) < 0$, 当 $\alpha < x < 1$ 时, $f(x) > 0$, 则 $\int_0^1 (x - \alpha)f(x) dx > 0$, 但是 $\int_0^1 (x - \alpha)f(x) dx = 0$, 矛盾. 所以, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有两个零点.

如果 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上至少有 3 个零点, 设为 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$, 则 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$, 则罗尔定理知, 存在点 $a \in (x_1, x_2), b \in (x_2, x_3)$, 使 $f'(a) = 0, f'(b) = 0$. 对 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上应用罗尔定理知, 存在 $\xi \in (a, b) \subset (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = 0$, 这与 $f''(x) \neq 0$ 矛盾. 所以, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上恰好有两个零点.

例 44. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $|f(x)| \leq M_0, 0 < |f''(x)| \leq M_2$, ($a \leq x \leq +\infty$). 证明 $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

证明: 对任意 $x \in [a, +\infty)$, 及任意的 $h > 0$, 使得 $x+h \in (a, +\infty)$, 于是有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(\xi)h^2, \text{ 其中 } \xi \in [x, x+h].$$

$$\text{即 } f'(x) = \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - \frac{h}{2}f''(\xi); \text{ 故}$$

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2, \quad (x \in [a, +\infty), h > 0)$$

令 $g(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2$, 下面求其最小值: 由 $g'(h) = -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{1}{2}M_2 = 0$

得到 $h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$. $g''(h) = \frac{4M_0}{h^3} > 0$, 所以 $g(h)$ 在 $h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ 处得极小值, 亦即最小值

且最小值为 $g(h_0) = 2\sqrt{M_0 M_2}$,

故 $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2} \quad (x \in [a, +\infty))$

例 45. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$,

试证明：对于任意给定的正数 a 和 b ，在开区间 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ 和 η ，使得

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$$

证明：取数 $\mu \in (0,1)$ ，由连续函数介值定理知，存在 $C \in (0,1)$ ，使得 $f(C) = \mu$ 。在区间 $[0,C]$ 与 $[C,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理有

$$f'(\xi) = \frac{f(C) - f(0)}{C - 0} = \frac{\mu}{C}, \quad 0 < \xi < C$$

$$f'(\eta) = \frac{f(1) - f(C)}{1 - C} = \frac{1 - \mu}{1 - C}, \quad C < \eta < 1$$

显然 $\xi \neq \eta$ ；于是

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = \frac{a}{\frac{\mu}{C}} + \frac{b}{\frac{1-\mu}{1-C}} = \frac{aC(1-\mu) + b\mu(1-C)}{\mu(1-\mu)} = \frac{b\mu + C(a - b\mu - a\mu)}{\mu(1-\mu)}$$

注意到 $\mu = \frac{a}{a+b}$, $1-\mu = \frac{b}{a+b}$ 且 $\mu, 1-\mu \in (0,1)$ ，代入上式得

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = \frac{\frac{ab}{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b}}}{\frac{ab}{a+b}} = a + b.$$

例 46. 设函数在 $[a,b]$ 上有连续导数，且 $f(a) = f(b) = 0$ ，证明：

$$\max_{x \in [a,b]} |f'(x)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx.$$

证明：设 $M = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$ 由拉格朗日中值定理得

$$f(x) = f'(\xi_1)(x-a), \quad a < \xi_1 < x,$$

$$f(x) = f'(\xi_2)(x-b), \quad x < \xi_2 < b$$

$$\therefore \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(\xi_1)|(x-a) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(\xi_2)|(b-x) dx$$

$$\leq M \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x) dx \right] = M \cdot \frac{1}{4} (b-a)^2$$

$$\therefore M = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx$$

例 47. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且满足

$$|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b \quad (a > 0, b > 0), \text{ 证明：对任意 } x \in (0,1) \text{ 有}$$

$$|f'(x)| \leq 2a + \frac{b}{2}.$$

证明：利用泰勒公式，对 $\forall x \in (0,1)$ 有

$$f(0) = f(x) - f'(x)x + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2, \xi_1 \in (0, x)$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2, \xi_2 \in (x, 1)$$

$$\therefore f(1) - f(0) = f'(x) + \frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-x)^2 - f''(\xi_1)x^2]$$

$$|f'(x)| = \left| f(1) - f(0) - \frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-x)^2 - f''(\xi_1)x^2] \right|$$

$$\leq |f(1)| + |f(0)| + \frac{1}{2}|f''(\xi_2)(1-x)^2| + \frac{1}{2}|f''(\xi_1)x^2|$$

$$\leq 2a + \frac{1}{2}b[x^2 + (1-x)^2] \leq 2a + \frac{b}{2}$$

例 48. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$,

$\min_{x \in (0, 1)} f(x) = -1$, 证明: $\max_{x \in [0, 1]} f''(x) \geq 8$ 。

证明: 由 $f(0) = f(1) = 0, \min_{x \in (0, 1)} f(x) = -1$ 得 $\exists a \in (0, 1)$ 使得

$f(a) = -1, f'(a) = 0$, 利用泰勒公式展开得:

$$f(0) = f(a) - f'(a)a + \frac{1}{2}f''(\xi_1)a^2, \xi_1 \in (0, a)$$

$$f(1) = f(a) + f'(a)(1-a) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-a)^2, \xi_2 \in (a, 1)$$

$$\therefore f''(\xi_1) = \frac{2}{a^2}, f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-a)^2}$$

$$\therefore \max_{x \in [0, 1]} f''(x) \geq \max_{x \in [0, 1]} \left\{ \frac{2}{a^2}, \frac{2}{(1-a)^2} \right\} \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(1-a)^2} \geq \frac{2}{a(1-a)} \geq 8$$

例 49. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶可导, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$, 则在 (a, b) 内必存在一点 ξ

使得 $|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$ 。

证明: 由泰勒公式得:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + f'(a)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2$$

$$= f(a) + \frac{1}{8}f''(\xi_1)(b-a)^2, \xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(b) + f'(b)\left(\frac{a+b}{2} - b\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 \\
 &= f(b) + \frac{1}{8}f''(\xi_2)(b-a)^2, \xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right) \\
 \therefore f(b) - f(a) &= \frac{1}{8}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)](b-a)^2 \\
 |f(b) - f(a)| &\leq \frac{1}{8}[|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|](b-a)^2 \\
 \text{令 } |f''(\xi)| &= \max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\}, \text{ 则 } |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{4}|f''(\xi)|(b-a)^2 \\
 \text{故 } |f''(\xi)| &\geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|
 \end{aligned}$$

例 50. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上具有连续的二阶导数，证明： $\exists \xi \in (a, b)$ ，使得

$$\frac{4}{(b-a)^2} \left[f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = f''(\xi)$$

证明：将函数 $f(x)$ 在点 $x_0 = \frac{a+b}{2}$ 处作泰勒展开，并分别取 $x = a$ 和 $x = b$ 得到

$$\begin{aligned}
 f(a) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2, \text{ 其中 } \xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right); \\
 f(b) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2, \text{ 其中 } \xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right).
 \end{aligned}$$

$$\text{两式相加得到 } f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = \frac{1}{2}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)]\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

由于 $f''(x)$ 连续，由介值定理知，存在 $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ ，使得 $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$ ，从而得：

$$f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi)$$

$$\text{即 } f''(\xi) = \frac{4}{(b-a)^2} [f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)].$$

例 51. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-2, 2]$ 上具有二阶导数， $|f(x)| \leq 1$ ，且

$$[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4, \text{ 证明：存在一点 } \xi \in (-2, 2), \text{ 使得 } f(\xi) + f''(\xi) = 0.$$

证明：在区间 $[-2, 0]$ 和 $[0, 2]$ 上分别对函数 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理得

$$\exists \eta_1 \in (-2, 0) \text{ 使 } f'(\eta_1) = \frac{f(0) - f(-2)}{2}; \quad \exists \eta_2 \in (0, 2) \text{ 使 } f'(\eta_2) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

注意到 $|f(x)| \leq 1$ ，因此 $|f'(\eta_1)| = \left| \frac{f(0) - f(-2)}{2} \right| \leq 1$ ， $|f'(\eta_2)| \leq 1$ 。命

$$F(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$$

则 $F(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上可导，且

$$F(\eta_1) = [f(\eta_1)]^2 + [f'(\eta_1)]^2 \leq 2, \quad F(\eta_2) = [f(\eta_2)]^2 + [f'(\eta_2)]^2 \leq 2, \quad F(0) = 4$$

故 $F(x)$ 在区间 $[\eta_1, \eta_2]$ 上的最大值 $F(\xi) = \max_{x \in (\eta_1, \eta_2)} \{f(x)\} \geq 4$ ，且 $\xi \in (\eta_1, \eta_2)$ 。由费马引理知

$$F'(\xi) = 0. \text{ 而 } F'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x)$$

$$\text{故 } F'(\xi) = 2f'(\xi)[f(\xi) + f''(\xi)]$$

由于 $F(\xi) = [f(\xi)]^2 + [f'(\xi)]^2 \geq 4$, 所以 $f'(\xi) \neq 0$, 从而 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

例 52. 设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上具有二阶连续导数, $f(0) = 0$, 证明: 在 $[-a, a]$

上至少存在一点 ξ 使得 $a^3 f''(\xi) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$.

证明: 由泰勒公式得: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$

$$f(x) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$$

$$\therefore \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a \left[f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi_1)x^2 dx$$

$\because f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 故 $f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上有最小值 m 和最大值 M , 故

$$\frac{2}{3}a^3 m = m \int_{-a}^a x^2 dx \leq \int_{-a}^a f''(\xi_1)x^2 dx \leq M \int_{-a}^a x^2 dx = \frac{2}{3}a^3 M$$

$$\text{即 } m \leq \frac{\int_{-a}^a f''(\xi_1)x^2 dx}{\frac{2}{3}a^3} \leq M, \text{ 由介值定理得, } \exists \xi \in [-a, a] \text{ 使得}$$

$$f''(\xi) = \frac{\int_{-a}^a f''(\xi_1)x^2 dx}{\frac{2}{3}a^3} \therefore \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi_1)x^2 dx = \frac{1}{3}a^3 f''(\xi)$$

$$\therefore a^3 f''(\xi) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$$

例 53. 设 $f''(x)$ 连续且 $f''(x) > 0, f(0) = f'(0) = 0$, $u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点

$(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距, 试求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{u(x)} f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$.

分析: 当 $x \rightarrow 0$ 时所求极限为 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 可考虑用等价无穷小和洛必达法则, 因此

要对变上限函数的定积分求导, 所以先要求出 $u(x), u'(x)$, 进而可利用 $f(x), f'(x)$ 的泰勒公式求得极限.

解: 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线方程为: $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$,

注意到由于 $f'(0) = 0, f''(x) > 0$, 所以 $x \neq 0$ 时 $f'(x) > 0$. 令 $Y=0$ 得切线

在 x 轴上的截距为: $u(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f'(x)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{f''(x)} = 0, u'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

将 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处展成泰勒公式得:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2 = \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2, \quad \xi_1 \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间};$$

将 $x = u(x)$ 代入得:

$$f[u(x)] = \frac{1}{2}f''(\xi_2)[u(x)]^2, \quad \xi_2 \text{ 在 } 0 \text{ 与 } u(x) \text{ 之间};$$

$$\therefore f'(x) = f''(\xi_1)x, f''(x) = f''(\xi_1), \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u(x)}{x} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2}{f''(\xi_1)x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore u(x) \sim \frac{1}{2}x(x \rightarrow 0^+), f[u(x)] = \frac{1}{2}f''(\xi_2)[u(x)]^2 \sim \frac{1}{8}f''(\xi_2)x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{u(x)} f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f[u(x)]}{f(x)} \cdot \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f[u(x)] \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(\xi_1)}{[f''(\xi_1)]^2} \cdot \frac{1}{8}f''(\xi_2)x^2 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

例 54. 若 $a \leq f(x) \leq b, x \in [a, b]$ 且 $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, 其中 k 为常数

且 $0 < k < 1$, 设 $x_1 \in [a, b], x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$, 证明:

(1) 存在唯一的 $x \in [a, b]$ 使得 $f(x) = x$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

分析: 证明存在性的方法有很多, 一般来说, 和函数有关的可以利用连续函数的介值定理, 和导数有关的可以利用中值定理。

证明: (1) 由 $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ 知 $f(x)$ 连续, 所以 $g(x) = f(x) - x$ 连续, 由于 $a \leq f(x) \leq b, \therefore g(a) \geq 0, g(b) \leq 0$, 由介值定理得: $\exists x \in [a, b]$ 使得 $g(x) = 0$ 即 $f(x) = x$ 。假设另有 $x_0 \neq x$ 且 $f(x_0) = x_0$, 则 $|x_0 - x| = |f(x_0) - f(x)| \leq k|x_0 - x| < |x_0 - x|$ 矛盾。这就说明, 存在唯一的 $x \in [a, b]$ 使得 $f(x) = x$ 。

$$(2) |x_n - x| = |f(x_{n-1}) - f(x)| \leq k|x_{n-1} - x| \leq k^2|x_{n-2} - x| \leq \dots \leq k^{n-1}|x_1 - x|$$

$\therefore |x_n - x| \leq k^{n-1}|x_1 - x|, k < 1, \therefore 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^{n-1}|x_1 - x| = 0$ 由夹逼定理

得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

例 55. 设 $f(x)$ 在 $[a, b] \left(0 \leq a < b \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 证明: 在 (a, b) 内

至少存在两点 ξ_1, ξ_2 使得 $f'(\xi_2) \tan \frac{a+b}{2} = f'(\xi_1) \frac{\sin \xi_2}{\cos \xi_1}$ 。

证明: 由柯西中值定理得 $\frac{f(b) - f(a)}{\sin b - \sin a} = \frac{f'(\xi_1)}{\cos \xi_1}, a < \xi_1 < b$

同理可得 $\frac{f(b) - f(a)}{\cos b - \cos a} = \frac{f'(\xi_2)}{-\sin \xi_2}, a < \xi_2 < b$

$$\therefore \frac{f'(\xi_1)}{\cos \xi_1} (\sin b - \sin a) = \frac{f'(\xi_2)}{-\sin \xi_2} (\cos b - \cos a)$$

$$\therefore \frac{\sin \xi_2}{\cos \xi_1} f'(\xi_1) = -f'(\xi_2) \frac{\cos b - \cos a}{\sin b - \sin a}$$

$$\text{即 } f'(\xi_2) \tan \frac{a+b}{2} = f'(\xi_1) \frac{\sin \xi_2}{\cos \xi_1}$$

例 56. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有界且导数连续, 又对于任意实数 x 有 $|f(x) + f'(x)| \leq 1$,

证明: $|f(x)| \leq 1$ 。

证明: 令 $g(x) = e^x f(x), g'(x) = e^x [f(x) + f'(x)] \therefore |g'(x)| \leq e^x$,

即 $-e^x \leq g'(x) \leq e^x$, 积分得 $-\int_{-\infty}^x e^t dt \leq \int_{-\infty}^x g'(t) dt \leq \int_{-\infty}^x e^t dt$

即 $-e^x \leq e^x f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x f(x) \leq e^x \therefore -1 \leq f(x) \leq 1 \therefore |f(x)| \leq 1$

例 57. 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导,

$f(a) = f(b) = 0, \int_a^b f(x) dx = 0$, 求证:

(1) 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi) = f(\xi)$;

(2) 在 (a, b) 内至少存在一点 $\eta (\eta \neq \xi)$ 使得 $f''(\eta) = f(\eta)$ 。

证明: (1) 法一. 由积分中值定理得: $\exists c \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c) = 0, \therefore f(c) = 0, \text{ 设 } g(x) = e^{-x} f(x),$$

则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $g(a) = g(b) = g(c) = 0$, 由罗尔定理

得: $\exists \xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$ 使得 $g'(\xi_1) = g'(\xi_2)$, 而 $g'(x) = e^{-x} [f'(x) - f(x)]$,

所以，在 (a, b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi) = f(\xi)$ 。

法二. 令 $h(x) = f(x) - \int_a^x f(t)dt$ ，则 $h(a) = h(b) = 0$ ，由罗尔定理得： $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $h'(\xi) = 0$ ，即 $f'(\xi) = f(\xi)$ 。

(2) 由 (1) 得 $f'(\xi_1) - f(\xi_1) = 0, f'(\xi_2) - f(\xi_2) = 0$,

令 $F(x) = e^x [f'(x) - f(x)]$ ，则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，

且 $F(\xi_1) = F(\xi_2) = 0$ ，由罗尔定理得 $\exists \eta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ 使得 $F'(\eta) = 0$ ，

又 $F'(x) = e^x [f''(x) - f(x)]$ ，所以 $f''(\eta) = f(\eta)$ 且 $\eta \neq \xi$ 。

例 58. 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，且 $g'(x) \neq 0$ ，

证明：存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ 。

证明：令 $h(x) = f(a)g(x) + f(x)g(b) - f(x)g(x)$ ，

则 $h(a) = h(b) = f(a)g(b)$ ，又 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，由罗尔定理得：

存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $h'(\xi) = 0$ ，

又 $h'(x) = f(a)g'(x) + f'(x)g(b) - f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$

故，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ 。

例 59. 将均匀的抛物形体 $\Omega: x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ 放在水平桌面上，证明：当形体处于稳定平

衡时，它的轴线与桌面的夹角为 $\theta = \arctan \sqrt{\frac{3}{2}}$ 。

解：当重心最低时，物体处于稳定平衡状态。由于

$$M = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^1 dz = \frac{\pi}{2}, \quad M_{xy} = \iiint_{\Omega} z dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^1 z dz = \frac{\pi}{3},$$

于是 $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{2}{3}$ 。所以，物体的重心为 $P(0, 0, \frac{2}{3})$ 。

求点 P 到抛物面 $z = x^2 + y^2$ 的最短距离。作拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z),$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2\left(z - \frac{2}{3}\right) - \lambda = 0 \end{cases} \quad \text{解得 } x = y = \frac{1}{\sqrt{12}}, z = \frac{1}{6}.$$

$$\text{记 } Q\left(\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{6}\right), \text{ 则 } \overrightarrow{QP} = \left[-\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{2}\right] = \sqrt{\frac{5}{12}} \left[-\sqrt{\frac{1}{5}}, -\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right].$$

$$\text{所以, } \sin \theta = \cos \gamma = \sqrt{\frac{3}{5}}, \text{ 故 } \tan \theta = \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ 因此 } \theta = \arctan \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

例 60. 设函数 $f(u)$ 可导且 $f'(u) \neq 0$, 证明: 旋转曲面 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 的法线与转轴相交。

$$\text{证: 方法 1 设 } u = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 则 } z = f(u). \text{ 因为 } \frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \frac{x}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \frac{y}{u},$$

所以旋转面上 $P(x, y, z)$ 点处的法线 l 的方程为

$$\frac{X-x}{\frac{x}{u}f'(u)} = \frac{Y-y}{\frac{y}{u}f'(u)} = \frac{Z-z}{-1}.$$

易见旋转面的转轴为 z 轴, 其方程为 $\begin{cases} X=0 \\ Y=0 \end{cases}$, 解它们联立的方程组得 l 与 z 轴相交且交点

$$\text{为 } \left(0, 0, z + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{f'(\sqrt{x^2 + y^2})}\right).$$

方法 2 设 $u = \sqrt{x^2 + y^2}, z = f(u)$, 于是旋转面在点 $P(x, y, z)$ 处的法线 l 的方向向量可取为 $s = [xf'(u), yf'(u), -u]$, 而旋转面转轴为 z 轴, 其方向向量为 $k = (0, 0, 1)$, 又 z 轴上点 $O(0, 0, 0)$ 到 l 上点 $P(x, y, z)$ 的向量为 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, 由于三向量 $k, s, \overrightarrow{OP}$ 的混合积

$$[k, s, \overrightarrow{OP}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ xf'(u) & yf'(u) & -u \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

所以法线 l 与 z 轴共面。若 P 为 $(0, 0, f(0))$, 则 P 点已在 z 轴上。否则, $P(x, y, z) \neq (0, 0, f(0))$, 因为 $f'(u) \neq 0$, 故必有 k 与 s 不平行。于是, l 与 z 轴共面又不平行, 则 l 与 z 轴必为相交。

例 61. 求 $f(x, y) = x^2 + 2x^2y + y^2$ 在 $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ 上的最大值与最小值。

解: 方法 1: 令 $F(x, y, \lambda) = x^2 + 2x^2y + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, 并令:

$$\begin{cases} F_x = 2x + 4xy + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 2x^2 + 2y + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \text{ 及 } \begin{cases} x=\pm \frac{\sqrt{6}}{3} \\ y=\pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases},$$

从而得 6 个可能极值点:

$$(0, 1), (0, -1), \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\text{对应函数值分别为: } 1, 1, 1 + \frac{4}{9}\sqrt{3}, 1 - \frac{4}{9}\sqrt{3}, 1 + \frac{4}{9}\sqrt{3}, 1 - \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

$$\text{故函数的最大值为 } 1 + \frac{4}{9}\sqrt{3}, \text{ 最小值为 } 1 - \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

方法 2: 将 $x^2 + y^2 = 1$ 代入函数 $f(x, y) = x^2 + 2x^2y + y^2$ 可将函数化为一元函数:

$$F(y) := (1 - y^2)^2 + 2(1 - y^2)y + y^2 = 1 + 2y - 2y^3 \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

$$F'(y) = 2 - 6y^2, \quad \text{令 } F'(y) = 0 \text{ 解得驻点 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{且由 } F(-1) = 1, \quad F(1) = 1, \quad F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 + \frac{4}{9}\sqrt{3}, \quad F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{4}{9}\sqrt{3}$$

$$\text{可知函数的最大值为 } 1 + \frac{4}{9}\sqrt{3}, \text{ 最小值为 } 1 - \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

例 62.

2.3 练习题

1. 设 π 为不共线的三点 A, B, C 组成的平面, O 为原点, 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{OB} = \vec{\beta}, \overrightarrow{OC} = \vec{\gamma}$, 则 $\vec{n} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta} + \vec{\beta} \times \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \times \vec{\alpha}$ 与平面 π 的夹角为_____。

2. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可导, 且 $f(x) = f(x+4)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 求 $f'(5)$

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$ 与 ax^n 是等价无穷小, 求 a 与 n

4. 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(x^2) dx$, $g(x) = x^3 + x^4$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, ()

- (A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶但非等价无穷小; (B) $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小;
(C) $f(x)$ 是比 $g(x)$ 更高阶的无穷小; (D) $f(x)$ 是比 $g(x)$ 更低阶的无穷小

5. 设摆线方程为 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, 则此曲线在 $t = \frac{\pi}{3}$ 处的法线方程为_____。

6. 设 $z = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(-1, 1)$ 处沿方向 $\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ 的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 选择 (1). 曲线 $y = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有 ()

- (A) 1 条; (B) 2 条; (C) 3 条; (D) 4 条.

8. 设 $u = f(x, y, z)$, $\varphi(x^2, y, z) = 0$, $y = \sin x$, 其中 f, φ 具有连续的一阶偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

9. a, b, c 为何值时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x - ax} \int_b^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} = c$ 成立?

10. 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分 $dz = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 设 $z = \frac{1}{x} f(xy) + y\varphi(x+y)$, 其中 f 、 φ 具有二阶连续导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

12. 设 $z = f(xy, \frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

13. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2 \\ y = \int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du \end{cases} (t > 1)$ 所确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=9}$.

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, 证明: 存在点 $\xi \in (0,1)$, 使 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = f'(\xi)$.

15. 设 f 在 $[0,2]$ 上可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = f(2)$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0,2)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

16. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $4 \int_{\frac{3}{4}}^1 f(x)dx = f(0)$, 求证: 在开区间 $(0,1)$ 内存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内二阶可导, 且 $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$,

$2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = f(2)$. 证明: 存在 $\xi \in (0,2)$ 使得 $f''(\xi) = 0$.

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 对于任意的实数 α 都存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\alpha f(\xi) = f'(\xi)$.

19. 设 $x \in [0,1], p > 1$, 求证: $2^{1-p} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$.

20. 设 $f(x), g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且

$\forall x \in (a,b), f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$, 又 $f(x)$ 在 (a,b) 内有两个零点 x_1, x_2 . 证明: $\exists x_0 \in (a,b)$ 使 $g(x_0) = 0$.

21. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的非负可导函数, 且 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$,

证明: 在 $(0,1)$ 内存在唯一的 ξ 使得 $\xi f(\xi) = \int_{\xi}^1 f(x)dx$.

22. 设函数在 $[0,a]$ 上有二阶连续导数, 且 $|f''(x)| \leq M$, 又 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值. 证明: $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma$.

23. $n \in N, x \in (0,1)$, 证明: $x^n(1-x) < \frac{1}{ne}$.

24. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $0 < f(x) < 1$ 且 $f'(x) \neq 1$, 证明: 在 $(0,1)$ 内必有唯一的点 x_0 使 $f(x_0) = x_0$.

25. 证明: 曲线 $y = e^x$ 与 $y = ax^2 + bx + c$ 的交点不多于三个.

26. 设 C 是常数, 函数 $f(x)$ 满足下列两个等式, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f'''(x) = C$, 求证: $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$ 。

27. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 其中 $a > 0$ 且 $f(a) = 0$, 证明: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$ 。

28. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = a, \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, 求证: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi) = f(\xi) - \xi + 1$ 。

29. 在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 是函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点沿方向 $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j}$ 的方向导数最大。

30.

第四章 无穷级数

4.1. 基本概念与内容提要

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 收敛性相同。若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 也收敛,

且 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 。若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 不一定发散。

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 必发散。

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛不能得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, 当 $|q| < 1$ 时收敛且 $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$; 当 $|q| \geq 1$ 时发散。

P 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $0 < p \leq 1$ 发散。其中调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散。

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+k}$ 发散, 其中 k 为正常数。级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在。

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必发散。

改变一个级数的任意有限项, 不改变其敛散性, 但在收敛时原级数的和改变。收敛级数加括号后仍收敛于原级数和。若加括号后所得级数发散, 则原级数也发散。

正项级数审敛法:

1.正项级数的收敛准则： $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow S_n \leq M$

2.正项级数比较判别法：大收小必收，小散大必散。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l (l > 0)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

解题时常将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 比较，以判定 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性。

3.根值判别法：设： $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ ，则当 $0 \leq \rho < 1$ 时，级数收敛；当 $\rho > 1$ 时，级数发散；当 $\rho = 1$ 时，不确定。注意： $\rho = 0$ 时级数也收敛。

4.比值判别法：设： $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ，则当 $0 \leq \rho < 1$ 时，级数收敛；当 $\rho > 1$ 时，级数发散；当 $\rho = 1$ 时，不确定。注意： $\rho = 0$ 时级数也收敛。

5.积分判别法： $f(x)$ 是在 $[1, +\infty)$ 上单调递减的正项连续函数，

则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 具有相同的收敛性。

广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 的敛散性的判别方法与正项级数的相同。

6.定义法： $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$; $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 存在，则收敛；否则发散。

交错级数 $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$ (或 $-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots, u_n > 0$) 的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足 $\begin{cases} u_n \geq u_{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{cases}$ ，那么级数收敛且其和 $s \leq u_1$ ，其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。交

错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 判断收敛一般用下述方法：

(1) 莱布尼兹定理：如果交错级数满足 $a_n \geq a_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 那么级数收敛且其和 $s \leq a_1$ ，

其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq a_{n+1}$ 。如果 $\{a_n\}$ 不满足条件，则一般可改用：

(2) 取通项的绝对值所构成的级数，若收敛则原级数绝对收敛；若此绝对值所构成的级数用比值法或根值法判定发散，则通项不趋于 0，原级数发散。

(3) 拆项或并项的方法，将通项拆成两项，若以此两项分别作通项的级数均收敛，则原级数收敛；若一级数收敛另一发散，则原级数发散。若并项后的级数发散，则原级数也发散。

(4) 如果能立即看出 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必发散。

绝对收敛与条件收敛：

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且称为绝对收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛则称为条件收敛。

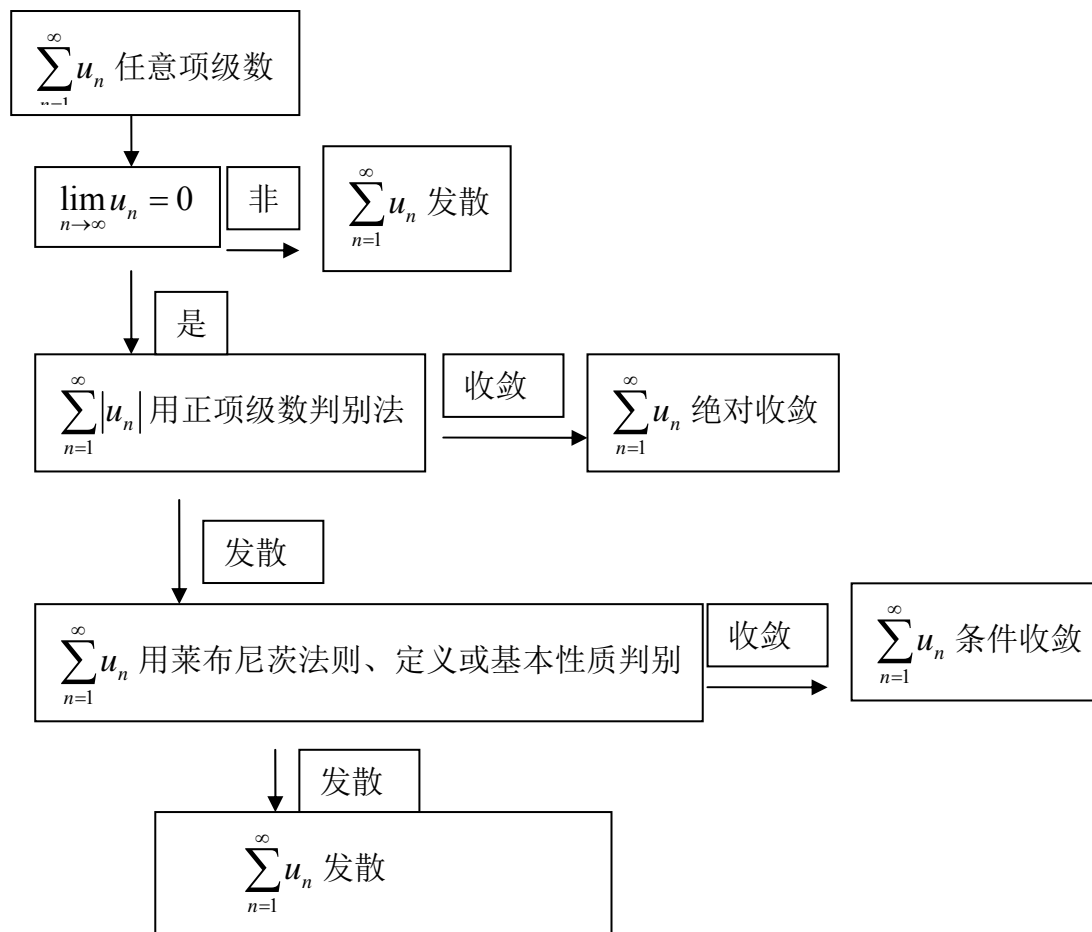
由 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散不能断言 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散。但如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 的发散是由比值法（或根值法）

推断出的，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$ ，从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ，于是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散。

调和级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散，而 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛；级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛。

绝对收敛级数的和仍绝对收敛，绝对收敛级数与条件收敛级数的和是条件收敛。

任意项级数的判别法：①绝对值判别：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。即绝对收敛的级数一定收敛。②拆项或并项的方法，将通项拆成两几项之和，利用交错级数和正项级数的判别方法。其一般判别步骤如下图所示：



幂级数：

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \begin{cases} |x| < 1 \text{ 时, 收敛于 } \frac{1}{1-x} \\ |x| \geq 1 \text{ 时, 发散} \end{cases}$$

对于级数 $(3) a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ ，如果它不是仅在原点收敛，也不是在全

数轴上都收敛，则必存在 R ，使 $\begin{cases} |x| < R \text{ 时收敛} \\ |x| > R \text{ 时发散} \\ |x| = R \text{ 时不定} \end{cases}$ ，其中 R 称为收敛半径。

求收敛半径的方法：设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ ，其中 a_n, a_{n+1} 是(3)的系数，则
$$\begin{cases} \rho \neq 0 \text{ 时}, R = \frac{1}{\rho} \\ \rho = 0 \text{ 时}, R = +\infty \\ \rho = +\infty \text{ 时}, R = 0 \end{cases}$$
 幂

级数在收敛域上的性质：

若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1 ， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2 ，则

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ ，收敛半径 $R = \min\{R_1, R_2\}$ 。

例：幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} \right) x^n$ 的收敛域为_____

解：由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ ， $\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} x^n$ 的收敛半径为1, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ 的收敛

半径为2, $\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} \right) x^n$ 的收敛半径为1，当 $x = \pm 1$ 时，级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} \right) x^n$ 绝对收敛，

所以，收敛域为 $[-1, 1]$ 。

当两个幂级数的收敛域不同时，它们的和的收敛域是两个收敛域的交集，这种方法可以简化求幂级数的收敛域。

幂级数在收敛域 $(-R, R)$ 上绝对收敛，且和函数 $S(x)$ 为连续函数。若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $-R$ 或 R 处收敛，则 $S(x)$ 在 $-R$ 或 R 处分别右连续、左连续。和函数 $S(x)$ 为可导函数且 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1}$ ，逐项求导后收敛半径不变。和函数 $S(x)$ 为可积函数且

$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt$ ，逐项积分后收敛半径不变。逐项求导、逐项积分后，收敛半径不变但收敛域可能改变，在端点处的敛散性可能改变。

若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处发散，则当 $|x| > |x_0|$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散。如果在某点 $x = x_0$ 处幂级数条件收敛，则 $x = x_0$ 必位于该幂级数的收敛域的端点。

例：设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 在 $x=3$ 处 (C)

A. 条件收敛 B. 绝对收敛 C. 发散 D. 收敛性与 $\{a_n\}$ 相关

解：原幂级数在 $x=3$ 处条件收敛说明收敛半径为 $3-1=2$ 。幂级数经逐项积分、平移后，收敛半径不变，所以后一幂级数的收敛域为 $(-2, 2]$ 。 $x=3$ 在收敛域外，所以在该点处发散。

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径的求法：设 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 或 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (ρ 可以为 ∞)，则当

$\rho = 0$ 时 $R = \infty$; 当 $\rho = \infty$ 时 $R = 0$; 当 $\rho \neq 0, \infty$ 时 $R = \frac{1}{\rho}$ 。此种求收敛半径的方法是充分条件，

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 不存在时并不能说收敛半径不存在，因为收敛半径总是存在的。对于类似

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{3n}$ 等级数的收敛半径不能这样做，应根据 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ 求收敛半径。

例：求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 的收敛半径。解：设 $u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ ，用比值判别法，

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} x^2 = 4x^2$ 得：当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时 $4x^2 < 1$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 绝对收敛；

当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时 $4x^2 > 1$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 发散；所以收敛半径为 $R = \frac{1}{2}$ 。

错解：由公式 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$ ，所以 $R = \frac{1}{4}$ 。

小试身手：幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n}$ 的收敛半径为_____（答案： $\sqrt{3}$ ）

级数的和的求法：

观察所给幂级数通项 x^n 的系数 a_n ，若 a_n 为 n 的简单有理式，则通过拆项将其拆成更简单的分式之和；通过逐项积分，设法消去分式中分子的 n (或 $n-1, n+1$ 等)；通过逐项求导，设法消去分式中分母的 n (或 $n-1, n+1$ 等)；最后设法利用级数之和 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 。

若 a_n 的分母为 $n!$ 或 $(2n)!$ 或 $(2n-1)!$ 也可通过上述方法化简，最后利用 $e^x, \sin x, \cos x$ 的展开式求和。若 a_n 的分母为 $(2n)!!$ 或 $(2n-1)!!$ 也可通过上述方法化简，最后利用 $(1+x)^m$ 的展开式求和。幂级数求和还应求出收敛域。常用方法举例：设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ，用下列两种

途径求和函数 $s(x)$ ：(1) $s(x) = \int_0^x (\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}) dx$ ；(2) $s(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right)'$ 。

用幂级数求和的方法求某些数项级数的和时，要找到一个适当的幂级数，求出它的和，再命 x 为某值得到欲求的数项级数的和。已知某些和求另一些与此相关的和时，关键步骤时，将欲求的前 n 项部分和表示成已知部分和，然后取极限。

函数展开成幂级数：

直接展开法：利用泰勒级数公式，将函数在某个区间上直接展开成指定点的泰勒级数。

函数展开成泰勒级数： $f(x) = f(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$

余项： $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $f(x)$ 可以展开成泰勒级数的充要条件是： $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$

$x_0 = 0$ 时即为麦克劳林公式： $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$

$f(x)$ 展开成 x 的幂级数的步骤：

(1) 求出 $f^{(n)}(x)$ ($n=1, 2, \dots$); (2) 求 $f^{(n)}(0)$ ($n=1, 2, \dots$);

(3) 写出 $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$ 并求出敛散半径 R ;

(4) 当 $x \in (-R, R)$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0$ (ξ 位于0与 x 之间)是 $f(x)$ 的

迈克劳林级数收敛的充要条件。此时 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$

间接展开法：通过一定的运算（主要是加减法，数乘运算，逐项积分和逐项求导运算）将函数转化为其它函数，进而利用新函数的幂级数（主要是一些简单函数的迈克劳林展开式）展开将原来函数展开为幂级数。间接法是将函数展开为幂级数的主要方法，具体方法是：①先求导，展开成幂级数后在积分；②先积分，展开成幂级数后在求导。当然，中间还要通过一些适当的运算。

一些常用函数展开成幂级数：

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \quad (-1 < x \leq 1), \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \quad (-1 \leq x < 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (-1 < x < 1), \quad \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

欧拉公式： $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$

三角级数：

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中， $a_0 = aA_0$ ， $a_n = A_n \sin \varphi_n$ ， $b_n = A_n \cos \varphi_n$ ， $\omega t = x$ 。

正交性： $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x \cdots \sin nx, \cos nx \cdots$ 任意两个不同项的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分=0。

傅立叶级数：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \text{周期} = 2\pi,$$

$$\text{其中 } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1, 2, 3 \cdots)$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}, \quad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{24}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \text{ (相加)}, \quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12} \text{ (相减)}$$

$$\text{正弦级数: } a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n=1, 2, 3 \cdots \quad f(x) = \sum b_n \sin nx \text{ 是奇函数}$$

$$\text{余弦级数: } b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n=0, 1, 2 \cdots \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx \text{ 是偶函数}$$

$$\text{周期为 } 2l \text{ 的周期函数的傅立叶级数: } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}),$$

$$\text{周期为 } 2l, \text{ 其中 } a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, 3 \cdots)$$

当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，该级数收敛于 $f(x)$ ；当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，该级数收敛于 $f(x)$ 在该点的左右极限的平均值 $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ 。

4.2.例题选讲

例 1. 试求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1}$ 的和。

解：由于 $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$,

$$\therefore \text{当 } |x-y| < \frac{\pi}{2} \text{ 时有 } x-y = \arctan [\tan(x-y)] = \arctan \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\therefore \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1} = \arctan \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}} = \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{\pi}{4}$$

例 2. 设 $\{U_n\}$ 是单调递增且有界的正数数列，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{U_n}{U_{n+1}}\right)$ 收敛。

证明：由于 $\{U_n\}$ 单调递增，则 $0 \leq 1 - \frac{U_n}{U_{n+1}} = \frac{U_{n+1} - U_n}{U_{n+1}} \leq \frac{U_{n+1} - U_n}{U_1}$,

$$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{U_{i+1} - U_i}{U_1} = \frac{U_{n+1} - U_1}{U_1}, \text{ 由 } \{U_n\} \text{ 单调递增且有界得 } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \text{ 存在}$$

$$\therefore \text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{n+1} - U_n}{U_1} \text{ 收敛, } \therefore \text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{U_n}{U_{n+1}}\right) \text{ 收敛}$$

例 3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$ 的和。

$$\text{解: } \frac{1}{2n^2} = \frac{\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}}{1 + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n}} = \tan \left(\arctan \frac{n}{n+1} - \arctan \frac{n-1}{n} \right)$$

$$\therefore \arctan \frac{1}{2n^2} = \arctan \frac{n}{n+1} - \arctan \frac{n-1}{n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4}$$

例 4. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n} (a > 0)$ 的敛散性。

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = a \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = a \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)} = \frac{a}{e}$$

当 $a > e$ 时，级数发散；当 $0 < a < e$ 时，级数收敛。

例 5. 求级数 $\frac{1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{3 \cdot 4} x^4 + \frac{1}{5 \cdot 6} x^6 + \cdots + \frac{1}{2n(2n-1)} x^{2n} + \cdots$ 的收敛域并求其和。

$$\text{解: 设 } s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)} x^{2n}, \text{ 则 } s''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2}, x \in (-1, 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore s'(x) &= \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \\ s(x) &= \frac{1}{2} \int \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) \\ x = \pm 1 \text{ 时, } s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 \therefore \text{收敛域为} [-1, 1], \text{和函数} \\ s(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \ln(1-x^2), & x \in (-1, 1) \\ \ln 2, & x = \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

例 6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 绝对收敛.}$$

证 因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 则

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \text{ 且 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

证 方法 1 由洛必达法则, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2},$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{|f''(0)|}{2}, \text{ 由比较判别法知, 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 绝对收敛.}$$

方法 2 因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 则 $f''(x)$ 在该邻域内的某闭子区间 $[-a, a]$ 上有界, 即存在常数 $M > 0$, 使得 $|f''(x)| \leq M$. 由泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)}{2!} x^2 = \frac{f''(\theta x)}{2} x^2, \quad 0 < \theta < 1$$

知, 在区间 $[-a, a]$ 上, $|f(x)| \leq \frac{Mx^2}{2}$, 从而存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2} \frac{1}{n^2}. \text{ 由此比较判别法知, 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 绝对收敛.}$$

例 7. 设 $a_n = \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx, n=1, 2, \dots$, 试求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 的值。

解: 令 $x = n\pi - t$, 则

$$a_n = -\int_{n\pi}^0 (n\pi - t) |\sin t| dt = n\pi \int_0^{n\pi} |\sin x| dx - \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx,$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{n\pi}{2} \int_0^{n\pi} |\sin x| dx = \frac{n^2\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = n^2\pi, n=1, 2, \dots.$$

$$\text{记 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n, -1 < x < 1, \text{ 因为 } \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1$$

$$\text{逐项求导, 得 } \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1,$$

$$\text{整理得 } \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.$$

$$\text{再次逐项求导, 得 } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad -1 < x < 1$$

$$\text{整理得 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \quad -1 < x < 1.$$

例 8. 设 $a_0 = 4, a_1 = 1, a_{n-2} = n(n-1)a_n, n \geq 2$, (1) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$; (2) 求 $S(x)$ 的极值。

解: (1) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-R, R)$, 逐项求导得

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \quad x \in (-R, R).$$

$$\text{依题意, 得 } S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ 所以, 有 } S''(x) - S(x) = 0.$$

解此二阶常系数齐次线性微分方程, 得 $S(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. 代入初始条件 $S(0) = a_0 = 4, S'(0) = a_1 = 1$.

$$\text{得 } C_1 = \frac{5}{2}, C_2 = \frac{3}{2}. \text{ 于是, } S(x) = \frac{5}{2} e^x + \frac{3}{2} e^{-x}.$$

$$(2) \text{ 令 } S'(x) = \frac{5}{2} e^x - \frac{3}{2} e^{-x} = 0, \text{ 得 } x = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}. \text{ 又 } S''(x) = \frac{5}{2} e^x + \frac{3}{2} e^{-x} > 0, \text{ 所以 } S(x) \text{ 在 } x = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5} \text{ 处取极小值.}$$

例 9. 设 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上递减的连续函数, 且 $f(x) > 0$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 其中

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx.$$

$$\because a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(x)) dx \leq 0;$$

$$(\because f(n+1) - f(x) \leq 0)$$

$$\text{又} \because a_n = [f(1) - \int_1^2 f(x) dx] + [f(2) - \int_2^3 f(x) dx] + \dots +$$

$$[f(n-1) - \int_{n-1}^n f(x) dx] + f(n) \geq 0 \therefore \{a_n\} \text{收敛}$$

$$\text{注 } a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \text{收敛, 它的极限值记为C,}$$

$$\text{称为欧拉常数, } \therefore 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n = C + o(l) (o(l) \text{表示无穷小}).$$

$$\text{欧拉公式: } H_n = \ln n + c + o(l), \text{ 其中 } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad c = 0.57721\dots,$$

$o(l)$ 表示无穷小, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) = c$ 。欧拉常数 c , 其近似值约为 0.57721566490153286060651209, 目前还不知道它是有理数还是无理数。在微积分学中, 欧拉常数有许多应用, 如求某些数列的极限。

用欧拉公式求解有关级数的问题:

$$(1) \text{ 求级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)} \text{ 的和。}$$

$$\text{解: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{H_n}{n+1} - \frac{H_{n+1} - \frac{1}{n+1}}{n+2} \right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}}{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{H_1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$(2) \text{ 求积分 } \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) dx。$$

$$\text{解: } I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x} - 2 \right) dx + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{x} - n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$I_N = \sum_{n=1}^N \left(\ln \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \ln(N+1) - H_{N+1} + 1$$

$$\therefore I = \lim_{N \rightarrow \infty} I_N = \lim_{N \rightarrow \infty} [\ln(N+1) - H_{N+1}] + 1 = 1 - c$$

$$(3) \text{ 判定级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}} \text{ 的敛散性}$$

$$\text{解: } \frac{1}{3^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{3^{\ln n + c + o(l)}} = \frac{1}{3^{c+o(l)}} \cdot \frac{1}{n^{\ln 3}}, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{3^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}}{n^{\ln 3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{c+o(l)}} = \frac{1}{3^c}$$

$$\because \ln 3 > 1, \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln 3}} \text{ 收敛, } \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}} \text{ 收敛}$$

例如可以这样求数列 $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ 的极限值:

$$\text{由 } 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n = C + o(1),$$

$$\text{和 } 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln 2n = C + o(1),$$

$$\therefore \text{两式相减, 得: } x_n - \ln 2 = o(1), x_n \rightarrow \ln 2.$$

通常也可以使用定积分的定义法求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$$

例 10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a > 0, \text{ 证明 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 收敛, 而 } \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 发散.}$$

$$\text{证明: 由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a > 0 \Rightarrow f(0)=0 \text{ 和 } f'(0)=a > 0$$

$$(\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0))$$

再由导数的连续性, 存在 $x=0$ 的某邻域 I ,

使得 $f'(x) > 0 (x \in I) \therefore f(x) \uparrow (x \in I)$,

$\therefore f\left(\frac{1}{n}\right) > 0$, 且单调递减并以零为极限 (n 为自然数)。

$$\text{交错级数 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 收敛. 再由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = a > 0$$

\therefore 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 同敛散, \therefore 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散。

例 11. 证明 $\pi^2 + \frac{\pi^4}{3!} + \frac{\pi^6}{5!} + \dots + \frac{\pi^{2n}}{(2n-1)!} + \dots$ 收敛，并求和

$$\text{证明: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^{2n+2}}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{2n(2n+1)} = 0, \text{ 级数收敛}$$

$$\text{设 } s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{1}{2} x (e^x - e^{-x}),$$

$$\therefore s(\pi) = \frac{\pi}{2} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \text{ 即所求和为 } \frac{\pi}{2} (e^{\pi} - e^{-\pi}).$$

例 12. 设 $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$, $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$, 求证: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$ 。

证明: 将 $f(x)$ 按马克劳林展开得 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 其中 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$,

$$\because f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}, \therefore 1 = (1-x-x^2)f(x) = (1-x-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$1 = (1-x-x^2) \left(a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \right)$$

$$= a_0 + (a_1 - a_0)x + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+2} - a_{n+1} - a_n)x^{n+2}$$

$$\therefore a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \therefore a_{n+2} - a_{n+1} = a_n > 0$$

$$a_{n+1} > a_n \geq a_0 = 1, \therefore a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \geq a_{n+1} + 1, \therefore a_n \geq n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2} - a_n}{a_n a_{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) = 2$$

$$\text{故, 级数 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}, \text{ 且 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}} = 2$$

例 13. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan(\sqrt{n^2 + 2\pi})$ 的敛散性。

解：设 $u_n = \tan\left(\sqrt{n^2 + 2}\pi\right) = \tan\pi\left(\sqrt{n^2 + 2} - n\right) = \tan\frac{2\pi}{n + \sqrt{n^2 + 2}} > 0$,

u_n 递减且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ， $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\left(\sqrt{n^2 + 2}\pi\right)$ 是收敛的交错级数。又

$$u_n = \tan\frac{2\pi}{n + \sqrt{n^2 + 2}} > \frac{2\pi}{n + \sqrt{n^2 + 2}} > \frac{2\pi}{n + \sqrt{n^2 + 2n^2}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)\pi}{n} > \frac{1}{n}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散， $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，所以原级数条件收敛。

例 14. 证明： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}, x \in [-\pi, \pi]$ ，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 。

证明：将 x^2 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成余弦级数，则 $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2$ ，

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{1}{n^3} \sin nx \right] \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2}, b_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

所以， x^2 的傅里叶级数为 $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, x \in [-\pi, \pi]$

整理得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}, x \in [-\pi, \pi]$ ，令 $x=0$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ 。

例 15. 设函数 $f(x)$ 在 $|x| \leq 1$ 上有定义，在 $x=0$ 的某邻域内有连续的二阶导数， $x \neq 0$ 时

$$f(x) \neq 0, \text{ 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时 } f(x) \text{ 是 } x \text{ 的高阶无穷小, 且 } \forall n \in N \text{ 有 } \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \leq \left| \frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f\left(\frac{1}{n}\right)} \right|,$$

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|b_n b_{n+1}|}$ 收敛。

证明： $\because x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小， $\therefore f(0) = 0, f'(0) = 0$ ，在 $x=0$ 的某邻域

内将 $f(x)$ 展成泰勒公式，有 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(\xi)x^2 = \frac{1}{2} f''(\xi)x^2, \xi$ 介

于 0, x 之间， $\because f''(x)$ 连续， $\therefore |f''(\xi)| \leq M, |f(x)| \leq \frac{1}{2} Mx^2$

\therefore 当 n 充分大时有 $\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n^2}, \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{2n^2}$ 收敛， $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ 收敛

$$\text{又 } \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \leq \left| \frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f\left(\frac{1}{n}\right)} \right|, \therefore \left| \frac{b_2}{b_1} \right| \leq \left| \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f\left(\frac{1}{1}\right)} \right|, \left| \frac{b_3}{b_2} \right| \leq \left| \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{f\left(\frac{1}{2}\right)} \right|, \dots,$$

$$\text{累乘得 } \left| \frac{b_n}{b_1} \right| \leq \left| \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{f\left(\frac{1}{1}\right)} \right|, \therefore |b_n| \leq \left| \frac{b_1}{f(1)} \right| \cdot \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \text{ 收敛}, \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{b_1}{f(1)} \right| \cdot \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \text{ 收敛}, \therefore \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \text{ 收敛}$$

$$\therefore \sqrt{|b_n b_{n+1}|} \leq \frac{|b_n| + |b_{n+1}|}{2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (|b_n| + |b_{n+1}|) \text{ 收敛}, \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|b_n b_{n+1}|} \text{ 收敛}$$

例 16.

4.3 练习题

1. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 的和函数 $S(x)$ 。
2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n n!} x^n$ 的和函数 $S(x)$ 。
3. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 的收敛域为 $(-4, 2)$ ，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-3)^n$ 的收敛区间为 _____。
4. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的收敛区间，若令 $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ，求 $\int_0^1 S(x) dx$ 。
5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (b_n \geq 0)$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 收敛，证明： $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛。
6. 求下列级数的收敛域：(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{(3n-1)2^n}$ ；(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$
7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[3^n + (-2)^n]} x^n$ 的收敛域。

第五章 常微分方程

5.1.基本概念与内容提要

1. 可分离变量方程：经过变形后形如 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ 的
2. 齐次方程：形如 $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ，设 $u = \frac{y}{x}$ ，则 $y = ux, y' = u + x \frac{du}{dx} = f(u)$ ，则

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}, \text{ 即 } \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \text{ 两边同时积分即可。}$$

3. 一阶线性方程：形如 $y' + p(x)y = q(x)$ 的解是

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

其中， $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ 是方程 $y' + p(x)y = 0$ 的通解，

$y = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$ 是原方程的特解。

4. 贝努里方程：形如 $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ ，当 $\alpha = 0$ 时是一阶线性方程；当 $\alpha = 1$ 时是可分离变量方程；当 $\alpha \neq 0, 1$ 时，令 $z = y^{1-\alpha}$ ，则有
 $z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$ ，先解出 z 再解 y 。

5. 可降阶的高阶方程：①形如 $y'' = f(x)$ 连积两次分②形如

$y'' = f(x, y')$ ，设 $p = y'$ 则 $p' = f(x, p)$ 解出 p 后再积分即可③形如 $y'' = f(y, y')$ 不含自变量 x ，可令 $p = y'$ 利用复合函数求导法则将 y'' 化为对 y 的导数，

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}, \text{ 从而 } p \frac{dp}{dy} = f(y, p) \text{ 先解出 } p \text{ 再分离变量并积分即可}$$

6. 二阶常系数齐次线性方程： $y'' + p_1y' + p_2y = 0$ 的解法：求出特征根方程 $r^2 + p_1r + p_2 = 0$ 的两根 r_1, r_2 ，根据两根的不同情况写出通解：

$r^2 + p_1r + p_2 = 0$ 的根	$y'' + p_1y' + p_2y = 0$ 的解
两不等实根 $r_1 \neq r_2$	$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$
两相等实根 $r_1 = r_2$	$y = (c_1 + c_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $\alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

7. n 阶常系数齐次线性方程： $y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}y' + p_ny = 0$ 的解

法：求出特征根方程 $r^n + p_1r^{n-1} + \dots + p_{n-1}r + p_n = 0$ 的解，根据特征根的情况写出通解中的对应项：

特征根方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	一项: ce^{rx}
k 重实根 r	k 项: $(c_1 + c_2x + \dots + c_kx^{k-1})e^{rx}$
一对单共轭复根 $\alpha \pm \beta i$	两项: $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$
一对 k 重共轭复根 $\alpha \pm \beta i$	2k 项: $y = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2x + \dots + C_kx^{k-1})\cos \beta x +$ $y = (D_1 + D_2x + \dots + D_kx^{k-1})\sin \beta x]$

由于 n 次代数方程有 n 个根，而每一个根对应着通解中的一项，且每一项各含一个任意常数，这样就得到 n 阶常系数齐次线性方程的通解是：
 $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ 。 n 阶齐次线性方程有且仅有 n 个线性无关的解。

8. 二阶常系数非齐次线性方程: $y'' + p_1y' + p_2y = q(x)$, p_1, p_2 是实常数。 $q(x)$ 是指数函数 $e^{\alpha x}$ 、多项式函数 $P_n(x)$ 、三角函数 $a \cos \beta x + b \sin \beta x$ 或者是它们的乘积。将方程右边非齐次项 $q(x)$ 分解成几个容易求解的部分的和，利用线性叠加原理，再分成几个子方程求解。具体方程求解方法是：

(1) $q(x) = p_n(x)e^{\alpha x}$ ，其中 $p_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式， α 是常数，特解是 $y^* = x^k q_n(x)e^{\alpha x}$ ，其中 $q_n(x)$ 是与 $p_n(x)$ 同次 (n 次) 的多项式，而 k 按 α 是特征根方程根的重数分别取 0、1、2 (即 α 不是特征根方程的根 k 取 0，是特征根方程的单根 k 取 1，是二重根 k 取 2)。此结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性方程，但须注意 k 是特征根方程的根 α 的重复次数 (即若 α 不是特征根方程的根 k 取 0，是特征根方程的 m 重根 k 取 m)。

(2) $y'' + p_1y' + p_2y = e^{\alpha x}[p_l^{(1)}(x)\cos \beta x + p_n^{(2)}(x)\sin \beta x]$ 的特解可设为 $y^* = x^k e^{\alpha x}[R_m^{(1)}(x)\cos \beta x + R_m^{(2)}(x)\sin \beta x]$ 其中 $m = \max\{l, n\}$ ， $R_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式， k 是特征根方程中含根 $\alpha + \beta i$ (或 $\alpha - \beta i$) 的重复次数，可推广到 n 阶。

9. 解微分方程时，若是齐次的只有通解；若是非齐次的就先解出方程对应的齐次方程的通解，再求出非齐次的特解，二者相加即为非齐次方程的解。非齐次方程的两个解相减就是对应的齐次方程的解。

例：设 $y_1 = e^x(1 + \sin x)$, $y_2 = e^x(1 - \cos x)$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的两个解，则该方程是_____。

解： $y_1 - y_2 = e^x(\sin x + \cos x)$ 是其对应得齐次方程的解，则特征方程的根是 $r = 1 \pm i$ ， \therefore 特征方程是 $r^2 - 2r + 2 = 0$ ，设方程为 $y'' - 2y' + 2y = f(x)$ ，将 y_1 代入得： $f(x) = e^x$ ， \therefore 原微分方程为 $y'' - 2y' + 2y = e^x$ 。

10. 高阶线性微分方程解的结构: 参考教材 P285 内容。

11. 常数变易法：通过把对应齐次线性方程的通解中的任意常数，变易为待定函数去求非齐次线性方程通解的方法。

设非齐次线性方程为 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (1)，其对应的齐次线性方程为 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (2)。用常数变易法求解非齐次线性方程通解的方法是：设已知齐次线性方程的两个线性无关解为 $y_1(x), y_2(x)$ ，则 $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ 是方程 (2) 的通解，其中 c_1, c_2 是常数。考虑 (1) 解时， c_1, c_2 是两个待定函数，即 $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ 是 (1) 的特解。则有：

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

解题步骤：①求方程 (2) 的解 $y_1(x), y_2(x)$ ；

②根据上述方程组得出 $c_1'(x), c_2'(x)$ ，在积分得到 $c_1(x), c_2(x)$ ；

③写出 (1) 的解 $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ 。

例：解微分方程 $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$ 。

解：①求方程 (2) 的解 $y_1(x), y_2(x)$ ：特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$ ，解得 $r_1 = -1, r_2 = -2$ ，
∴ 方程 (2) 的通解为 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$ ，

其中 $y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = e^{-2x}$ ；

②设方程 (1) 的特解为 $y = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-2x}$ ，

根据方程组
$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ c_1'(x)e^{-x} + 2c_2'(x)e^{-2x} = -\frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$
 解得
$$\begin{cases} c_1'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \\ c_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{1+e^x} \end{cases}$$
，

积分得到
$$\begin{cases} c_1(x) = \ln(e^x + 1) \\ c_2(x) = -e^x + \ln(1 + e^x) \end{cases}$$
；

③写出 (1) 的解 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + e^{-x} \ln(1 + e^x) + e^{-2x} \ln(1 + e^x)$ 。

12. 解欧拉方程：作变量代换，令 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$

解拉普拉斯方程：作变量代换，令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 或 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

解全微分方程：设 $du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ，即 $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ ：

(1) 若 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ，则原方程是全微分方程。

解法一：由 $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ 积分得 $u(x, y) = \int M(x, y)dx + C(y)$ ，再由 $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$

确定 $C(y)$ 。即可解得方程。

解法二：利用积分与路径无关，积分可得

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Mdx + Ndy = \int_{x_0}^x Mdx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy.$$

(2) 若 $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, 则原方程不是全微分方程。 $\mu Mdx + \mu Ndy = 0$ 才是全微分方程,

其中 $\mu(x, y)$ 是积分因子。

$$\therefore \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \text{ 即 } M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \varphi(x) \text{ 时, } \mu(x, y) = \mu(x) = e^{\int \varphi(x) dx};$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = \phi(y) \text{ 时, } \mu(x, y) = \mu(y) = e^{\int \phi(y) dy}.$$

5.2.例题选讲

例 1. 解微分方程 $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$ 。

解: 令 $g = yy'$, 则 $g' = yy'' + (y')^2$, 原方程化为 $g' = -1$,

$$\text{积分得 } g = yy' = -x + c_1, \frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} x^2 + c_1 x + c_2$$

例 2. 设对于半空间 $x > 0$ 内任意的光滑有向封闭曲面都有

$$\oiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdx dy = 0, \text{ 其中函数 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 内具有连}$$

续的一阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 存在, 求 $f(x)$ 。

解: 对任意光滑封闭曲面由高斯公式得

$$\oiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdx dy = \iiint_V [xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x}]dV \text{ 由}$$

题意得 $xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x} = 0 (x > 0)$ 恒成立

$$\therefore f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) f(x) = \frac{1}{x} e^{2x}, \text{ 解得 } f(x) = \frac{e^{2x} + Ce^x}{x}$$

由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 存在得: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} + Ce^x}{x}$ 存在 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} + Ce^x) = 0 \therefore C = -1$

$$\therefore f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$$

例 3. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, $f(1)=3$, 且

$$\int_1^{xy} f(t)dt = x \int_1^y f(t)dt + y \int_1^x f(t)dt \quad (x > 0, y > 0), \text{ 求 } f(x)。$$

解: 方程两边同时对 x 求导得 $yf'(xy) = \int_1^y f(t)dt + yf'(x)$

$$\text{两边对 } y \text{ 求导得 } xyf''(xy) + f'(xy) = f'(x) + f'(y)$$

$$\text{令 } y=1 \text{ 得 } xf''(x) + f'(x) = f'(x) + 3 \therefore f''(x) = \frac{3}{x}, f'(x) = 3\ln x + C$$

$$\text{由 } f(1)=3 \text{ 得 } C=3, \therefore f'(x) = 3\ln x + 3$$

例 4. 设函数 $f(x, y)$ 可微, $f'_x(x, y) = -f(x, y), f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1$, 且满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f\left(0, y + \frac{1}{n}\right)}{f(0, y)} \right)^n = e^{\cot y}, \text{ 求 } f(x, y)。$$

解: 方法 1 先计算极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(0, y + \frac{1}{n}\right)}{f(0, y)} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{f\left(0, y + \frac{1}{n}\right) - f(0, y)}{f(0, y)} \right]^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(0, y + \frac{1}{n}\right) - f(0, y)}{\frac{1}{n} f(0, y)}} = e^{\frac{f'_y(0, y)}{f(0, y)}},$$

依题意, 得 $\frac{f'_y(0, y)}{f(0, y)} = \frac{d \ln f(0, y)}{dy} = \cot y$, 对 y 积分

$\ln f(0, y) = \ln \sin y + \ln C$, 故 $f(0, y) = C \sin y$ 。代入 $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1$ 得 $C = 1$, 即

又由 $\frac{\partial f}{\partial x} = -f$ 积分得 $f(x, y) = \varphi(y)e^{-x}$, 由 $f(0, y) = \sin y$ 和 $\varphi(y) = \sin y$, 所以 $f(x, y) = e^{-x} \sin y$ 。

方法 2 视 y 为常数, 求解分离变量方程 $\frac{df(x, y)}{f(x, y)} = -dx$, 得

$$\ln f(x, y) = -x + \ln \varphi(y), \text{ 即 } f(x, y) = \varphi(y)e^{-x}。$$

$$\text{依题意得 } e^{\cot y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi\left(y + \frac{1}{n}\right)}{\varphi(y)} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\varphi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \varphi(y)}{\varphi(y)} \right)^n = e^{\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}}$$

及 $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ 。于是, 有 $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \cot y$, 两边积分并整理得 $\varphi(y) = C \sin y$, 代入初

始条件得 $C = 1$, 所以, $f(x, y) = e^{-x} \sin y$ 。

例 5. 设 $f(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有连续的二阶导数, $f(1)=0$, $f'(1)=1$, 且二元函数

$z = (x^2 + y^2)f(x^2 + y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 求 $f(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最大值。

解: 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 则 $z = r^2 f(r^2)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} [2rf(r^2) + 2r^3 f'(r^2)] = 2x [f(r^2) + r^2 f'(r^2)]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2[f(r^2) + r^2 f'(r^2)] + 2x [4rf'(r^2) + 2r^3 f''(r^2)] \frac{x}{r} \\ &= 2f(r^2) + 2r^2 f'(r^2) + 4x^2 [2f'(r^2) + r^2 f''(r^2)] \end{aligned}$$

$$\text{由对称性得 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f(r^2) + 2r^2 f'(r^2) + 4y^2 [2f'(r^2) + r^2 f''(r^2)]$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4f(r^2) + 4r^2 f'(r^2) + 4r^2 [2f'(r^2) + r^2 f''(r^2)] = 0 \quad \text{即}$$

$$r^4 f''(r^2) + 3r^2 f'(r^2) + f(r^2) = 0$$

此为欧拉方程, 令 $r^2 = e^t$, 并记 $g(t) = f(e^t)$, 得二阶常系数线性方法

$$g''(t) + 2g'(t) + g(t) = 0, \text{ 解得 } f(e^t) = g(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t},$$

$$\text{即 } f(r^2) = \frac{c_1 + c_2 \ln r^2}{r^2}, \therefore f(t) = \frac{c_1 + c_2 \ln t}{t} \quad \text{由 } f(1)=0, \quad f'(1)=1 \text{ 得}$$

$$c_1 = 0, c_2 = 1, \therefore f(t) = \frac{\ln t}{t}, f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}, \text{ 当 } t > e \text{ 时 } f'(t) < 0, \text{ 当 } t < e \text{ 时}$$

$f'(t) > 0$, 所以 $f(t)$ 在 $[e, +\infty)$ 上递减, 在 $[1, e]$ 上递增,

$$\therefore f(t) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上的最大值为 } f(e) = \frac{1}{e}.$$

例 6. 解微分方程 $(x^2 \ln x)y'' - xy' + y = 0$ 的通解。

解: $\because y_1 = x$ 是原方程的解, 设 $y_2 = xu(x)$, 求一阶、二阶导数后代入原方程得

$$(x^2 \ln x)[xu''(x) + 2u'(x)] - x[xu'(x) + u(x)] + xu(x) = 0$$

$$\text{即 } (x^3 \ln x)u''(x) + x^2(2 \ln x - 1)u'(x) = 0$$

$$\therefore \frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{2 \ln x - 1}{x \ln x} \text{ 解得 } u'(x) = -\frac{c_1 \ln x}{x^2}$$

$$\therefore u(x) = -\int \frac{c_1 \ln x}{x^2} dx = c_1 \frac{\ln x + 1}{x} + c_2 \therefore y_2 = c_1 (\ln x + 1) + c_2 x$$

所以，原方程的通解为 $y = c_1 (\ln x + 1) + c_2 x$ 。

例 7.

5.3. 练习题

1. 设 $y_1 = 1, y_2 = e^x, y_3 = 2e^x, y_4 = e^x + \frac{1}{\pi}$ 都是某二阶常系数线性微分方程的解，则

此二阶常系数线性微分方程为_____。

2. 求出满足方程 $\int_0^x f(t) dt = x + \int_0^x t f(x-t) dt$ 的 $f(x)$ 。

3. 设函数 $Q(x, y)$ 在 xOy 平面内具有一阶连续偏导数，曲线积分

$\int_L 2xy dx + Q(x, y) dy$ 与路径无关，并对任意实数 t 都有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy, \text{ 求 } Q(x, y)。$$

4. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数， $f(0)=0, f'(0)=1$ ，且方程

$[xy(x+y) - f(x)y] dx + [f'(x) + x^2 y] dy = 0$ 为一全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解。

5. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导， $f(1)=3$ 且 $\int_1^{xy} f(t) dt = x \int_1^y f(t) dt + y \int_1^x f(t) dt$

$(x > 0, y > 0)$ ，求 $f(x)$ 。

6. 以四个函数 $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = 3\cos 3x, y_4 = 4\sin 3x$ 为解的 4 阶常系数线性齐次微分方程是_____，该方程的通解为_____。

7.

第三部分 竞赛真题与模拟题及参考答案

第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷一（非数学类）

考试形式：闭卷 考试时间：120 分钟 满分：100 分 试卷难度系数：0.55

一、计算题（每小题 5 分，满分 20 分）

1. 计算： $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2})^n$

2. 确定自然数 m 的取值范围，使函数 $f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的二阶导数存在。

3. 计算二重积分 $\iint_D |x - y^2| dx dy$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

4. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n}$ 的收敛区域.

二、（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数， L 是上半平面 $(y > 0)$ 内的有向分段光滑曲线， L 的起点为 (a, b) , 终点为 (c, d) . 记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy.$$

1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关；

2) 当 $ab = cd$ 时，求 I 的值。

三、（本题满分 10 分）证明不等式 $1 \leq \iint_D (\sin y^2 + \cos x^2) dx dy \leq \sqrt{2}$, 其中 D 为正方形

区域： $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

四、（本题满分 15 分）已知曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线相

同，求此切线方程，并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f(\frac{k}{n})$, 其中 k 为一非零常数.

五、（本题满分 15 分）设函数 $f(x)$ 定义在 $[0, c]$ 上， $f'(x)$ 在 $(0, c)$ 内存在且单调下降，又 $f(0) = 0$. 证明：对于 $0 \leq a \leq b \leq a + b \leq c$, 恒有 $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$.

六、（本题满分 15 分）设 $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 具有二阶连续偏导数，且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2 + y^2, \text{ 试求函数 } u \text{ 的解析式.}$$

七、（本题满分 15 分）求出使得下列不等式对所有的自然数 n 都成立的最大的数 α 及最小的数 β ： $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$ 。

第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷一参考答案

二、计算题（每小题 15 分，满分 60 分）

$$1. \text{ 解: } \because \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{x(n + \frac{x}{2})}{n^2}\right)^n < \left[1 + \frac{x(n + \frac{x}{2})}{n^2 - \frac{x^2}{4}}\right]^n = \left[1 + \frac{x}{n - \frac{x}{2}}\right]^n$$

$$\text{易知 } \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \text{ 对 } \left[1 + \frac{x}{n - \frac{x}{2}}\right]^n \text{ 进行变量代换, 令 } n - \frac{x}{2} = m, \text{ 则当 } n \rightarrow \infty \text{ 时 } m \rightarrow \infty,$$

$$\text{并且 } n = m + \frac{x}{2}, \text{ 因此有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{x}{n - \frac{x}{2}}\right]^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{\frac{x}{2}}\right] = e^x$$

$$\text{由夹逼原理得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2}\right)^n = e^x.$$

2. 解: 要使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, m 应满足以下条件:

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, 对任意自然数 } m, \text{ 都存在 } f'(x) = (x^m \sin \frac{1}{x})' = mx^{m-1} \sin \frac{1}{x} - x^{m-2} \cos \frac{1}{x}, \quad (1)$$

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-1} \sin \frac{1}{x}, \text{ 要使此极限存在, } m \text{ 应满足 } m-1 > 0, \quad (2)$$

由①, ②知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶导为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^{m-1} \sin \frac{1}{x} - x^{m-2} \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (mx^{m-2} \sin \frac{1}{x} - x^{m-3} \cos \frac{1}{x}),$$

要使以上极限存在, m 应满足 $m > 3$, ③

由②, ③知要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶导存在, m 的取值范围为: $m > 3$ 。

3. 解: 令 $x - y^2 = 0$, 抛物线 $x = y^2$ 将区域 D 分成 D_1 和 D_2 两块, 其中

$$D_1 = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x} \leq y \leq 1, \end{cases} \quad D_2 = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}, \end{cases}$$

$$\text{在 } D_1 \text{ 中, } |x - y^2| = y^2 - x, \text{ 而在 } D_2 \text{ 中 } |x - y^2| = x - y^2.$$

$$\text{于是 } \iint_D |x - y^2| dx dy = \iint_{D_1} |x - y^2| dx dy + \iint_{D_2} |x - y^2| dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{D_1} (y^2 - x) dx dy + \iint_{D_2} (x - y^2) dx dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 (y^2 - x) dy + \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} (x - y^2) dy \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{3}{2}} \right] dx + \int_0^1 \left[x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} - x + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right] dx = \frac{11}{30}.
 \end{aligned}$$

4. 解：令 $x^2 = t$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} t^n$ 的收敛半径

$$R_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left| \frac{2^{n+1} + (-3)^{n+1}}{2^n + (-3)^n} \right| = 3, \text{ 于是原级数的收敛半径 } R = \sqrt{3}.$$

当 $x = \pm\sqrt{3}$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(\pm\sqrt{3})^{2n}}{2^n + (-3)^n} \right| \neq 0$, 故该级数的收敛区域为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

二、(本题满分 20 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内的有向分段光滑曲线, L 的起点为 (a, b) , 终点为 (c, d) . 记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy.$$

1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关;

2) 当 $ab = cd$ 时, 求 I 的值.

$$1) \text{ 证明: 由于 } \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] \right\} = f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf'(xy) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] \right\}$$

在上半平面内处处成立, 所以在上半平面内曲线积分 I 与路径 L 无关.

2) 解: 由于曲线积分 I 与路径 L 无关, 故可取路径为: 由点 (a, b) 到点 (c, b) 再到点 (c, d) .

$$\text{所以 } I = \int_a^c \frac{1}{b} [1 + b^2 f(bx)] dx + \int_b^d \frac{c}{y^2} [y^2 f(cy) - 1] dy$$

$$= \frac{c-a}{b} + \int_a^c bf(bx) dx + \int_b^d cf(cy) dy + \frac{c}{d} - \frac{c}{b}.$$

$$\text{令 } t = bx, u = cy, \text{ 则 } I = \frac{c}{d} - \frac{c}{b} + \int_{ab}^{bc} f(t) dt + \int_{bc}^{cd} f(u) du = \frac{c}{d} - \frac{c}{b} + \int_{ab}^{cd} f(t) dt,$$

$$\text{由条件 } ab = cd, \text{ 得 } I = \frac{c}{d} - \frac{c}{b}.$$

三、(本题满分 20 分) 证明: 由于 D 关于 $y = x$ 对称, 由对称性可知

$$\iint_D \sin y^2 dx dy = \iint_D \sin x^2 dx dy, \text{ 故 } \iint_D (\sin y^2 + \cos x^2) dx dy = \iint_D (\sin x^2 + \cos x^2) dx dy$$

$$= \sqrt{2} \iint_D (\sin x^2 \cos \frac{\pi}{4} + \cos x^2 \sin \frac{\pi}{4}) dx dy = \sqrt{2} \iint_D \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) dx dy.$$

由于当 $(x, y) \in D$ 时, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) \leq 1$, 所以

$$1 = \sqrt{2} \iint_D \frac{1}{\sqrt{2}} dx dy \leq \iint_D (\sin y^2 + \cos x^2) dx dy \leq \sqrt{2} \iint_D dx dy = \sqrt{2}, \text{ 从而结论成立.}$$

四、(本题满分 20 分) 解: 设 $g(x) = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$,

$$\text{故 } f'(x)|_{x=0} = g'(x)|_{x=0} = e^{-(\arctan x)^2} \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=0} = 1,$$

于是得, $g(x)$ 在 $(0, 0)$ 点处的切线方程为: $y = x$.

$$\text{由 } g(0) = 0, \text{ 得 } f(0) = 0, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{k}{n}\right) = k \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right) - 0}{\frac{k}{n} - 0} = k f'(0) = k.$$

五、(本题满分 15 分) 证明: 由于 $f(0) = 0$, $f'(x)$ 在 $(0, c)$ 上存在, 由 L -中值定理, $\exists \xi_1 \in (0, a)$, 使得 $f(a) - f(0) = af'(\xi_1)$, ①

同理可知, $\exists \xi_2 \in (b, a+b)$, 使得 $f(a+b) - f(b) = (a+b-b)f'(\xi_2) = af'(\xi_2)$. ②

由于函数 f' 单调下降, 且 $0 \leq a \leq b \leq a+b \leq c$, 故有 $\xi_2 > \xi_1$, 于是得 $f'(\xi_2) \leq f'(\xi_1)$,

由以上①, ②两式得: $f(a+b) - f(b) \leq f(a)$, 即: $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$.

六、(本题满分 15 分) 解:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + \frac{1}{(2n)!})}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!},$$

$$\text{由 } \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x)^{2n} \frac{1}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty, \text{ 得: } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} = \cos \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{设 } s(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad x \in (-1, 1), \text{ 则 } \int_0^x [\int_0^x s(x) dx] dx = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x}$$

$$\text{所以 } s(x) = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$\text{于是由 } \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4}{27}, \text{ 得 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n} = \frac{4}{27} + \cos \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

七. (本题 15 分) 解: 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} \frac{du}{dr}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{x^2}{r^3} \frac{du}{dr}$$

同理可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{y^2}{r^3} \frac{du}{dr}$

代入原方程化简得 $\frac{d^2 u}{dr^2} + u = r^2$

解此二阶常系数非齐次微分方程, 得其通解为: $u = C_1 \cos r + C_2 \sin r + r^2 - 2$,

故, 函数 u 的表达式为 $u = C_1 \cos \sqrt{x^2 + y^2} + C_2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 - 2$,

其中 C_1, C_2 为常数。

七. (本题 15 分) 解: 要证 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$,

即证 $(n+\alpha) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1 \leq (n+\beta) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 即证 $\alpha \leq \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n \leq \beta$,

令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, x \in (0, 1]$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)} = \frac{(x+1)\ln^2(x+1) - x^2}{x^2(x+1)\ln^2(x+1)}$,

令 $g(x) = (x+1)\ln^2(x+1) - x^2$, 则

$$g'(x) = 2\ln(x+1) + \ln^2(x+1) - 2x, g''(x) = \frac{2}{1+x} [\ln(x+1) - x] < 0$$

$\therefore g'(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, $\therefore g'(x) < g'(0) = 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减

$\therefore g(x) < g(0) = 0$ 即 $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减

$$\therefore \alpha = f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1, \beta = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\ln(1+x) + \frac{x}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x + (x+1)\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 + \ln(x+1)} = \frac{1}{2}$$

所以, $\alpha = \frac{1}{\ln 2} - 1, \beta = \frac{1}{2}$

第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷二（非数学类）

考试形式：闭卷 考试时间：120 分钟 满分：100 分 试卷难度系数：0.6

一. 填空题（本题共有 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sin x \tan 2x} = \underline{-\frac{1}{4}}$$

$$(2) \text{ 设 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8, \text{ 则 } a = \underline{\ln 2}$$

$$(3) \text{ 设 } y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}, y^{(100)} = \frac{100!}{(x-3)^{101}} - \frac{100!}{(x-2)^{101}}$$

$$(4) \text{ 函数 } F(x) = \int_1^x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt \quad (x > 0) \text{ 的单调减少区间为 } \underline{\left(0, \frac{1}{4} \right) \text{ 或 } \left(\frac{1}{4}, 1 \right)}$$

$$(5) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \underline{0}$$

二.（本题满分 10 分）设 $f(x) = nx(1-x)^n$ （ n 为正整数），

（1）求 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的最大值 $M(n)$ ；（2）求 $\lim_{n \rightarrow \infty} M(n)$

$$\text{三.（本题满分 10 分）设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0 \\ 6, & x = 0 \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0 \end{cases}$$

（1） a 为何值时， $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续；

（2） a 为何值时， $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

四（本题满分 10 分，每题 5 分）

（1）设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 3-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ ，试求 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ，并讨论 $F(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性。

（2）设 $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$ ，求 $\int_0^1 xf(x) dx$

五.（本题满分 10 分）已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos \theta$ ，求该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线方程。

六.（本题满分 10 分）已知 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 所确定，求 $y''(0)$ 。

七.（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0) \neq 0$ ，求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}$ 。

八. (本题满分 10 分) 已知 $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$, 求 $f(x)$

九. (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上连续、正值偶函数, 又设

$$F(x) = \int_{-a}^a |x-t| f(t) dt, \quad -a \leq x \leq a \quad (a > 0)$$

(1) 试证: $F''(x) > 0$; (2) 求 $F(x)$ 最小值点。

十. (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内可导,

且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3$, $f(3) = 1$ 。试证必存在 $\xi \in (0, 3)$, 使 $f'(\xi) = 0$ 。

第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷二参考答案

一. 填空题 (本题共有 5 小题, 每小题 2 分, 满分 10 分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sin x \tan 2x} = \underline{-\frac{1}{4}}$$

$$(2) \text{ 设 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8, \text{ 则 } a = \underline{\ln 2}$$

$$(3) \text{ 设 } y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}, \quad y^{(100)} = \frac{100!}{(x-3)^{101}} - \frac{100!}{(x-2)^{101}}$$

$$(4) \text{ 函数 } F(x) = \int_1^x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt \quad (x > 0) \text{ 的单调减少区间为 } \underline{\left(0, \frac{1}{4} \right) \text{ 或 } \left(0, \frac{1}{4} \right]}$$

$$(5) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \underline{0}$$

二. (本题满分 10 分) 解: $f'(x) = n[(1-x)^n - nx(1-x)^{n-1}] = n(1-x)^{n-1}(1-x-nx)$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = \frac{1}{1+n}$, $x_2 = 1$,

当 $0 < x < \frac{1}{1+n}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $\frac{1}{1+n} < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$;

故 $x_1 = \frac{1}{1+n}$ 为 $f(x)$ 的极大值点, $f(x_1) = f\left(\frac{1}{1+n}\right) = \frac{n}{1+n} \left(1 - \frac{1}{1+n}\right)^n$ 为对应的极大值。

又 $f(0) = f(1) = 0$ 故 $f(x_1)$ 即为 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的最大值:

$$M(n) = \frac{n}{1+n} \left(1 - \frac{1}{1+n}\right)^n$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} M(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+n} \left(1 - \frac{1}{1+n}\right)^n = e^{-1}$$

三. (本题满分 10 分) 解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2(\sqrt{1-x^2}+1)}{(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)} = -6a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2}$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} (a^2 e^{ax} + 2) = 2a^2 + 4$$

命 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ，即 $-6a = 2a^2 + 4$ ，解得 $a = -1$ ， $a = -2$ ，

当 $a = -1$ 时， $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6 = f(0)$ ，故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点处连续。

当 $a = -2$ 时， $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 12 \neq f(0) = 6$ ，故 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

四（本题满分 10 分，每题 5 分）（1）解：当 $0 \leq x < 1$ 时， $F(x) = \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3$ ；

当 $1 \leq x \leq 2$ 时， $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt$

$$= \frac{1}{3}t^3 \Big|_0^1 + \left(3t - \frac{1}{2}t^2 \right) \Big|_1^x = \frac{1}{3} + \left(3x - \frac{1}{2}x^2 \right) - 3 + \frac{1}{2} = -\frac{13}{6} + 3x - \frac{1}{2}x^2,$$

$$\text{因此， } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{13}{6} + 3x - \frac{1}{2}x^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{13}{6} + 3x - \frac{1}{2}x^2 \right) = \frac{1}{3},$$

因此， $F(x)$ 在 $x = 1$ 处连续。

$$(2) \text{ 解： } \int_0^1 xf(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx^2 = \frac{1}{2} \left[x^2 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x^2 f'(x) dx \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot 2x dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \sin x^2 \cdot 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \sin x^2 dx^2 = \frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} [\cos 1 - 1]$$

五.（本题满分 10 分）解：由直角坐标与极坐标之间的关系 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

得到此曲线的参数方程： $\begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta = \cos \theta - \cos^2 \theta \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta = \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \end{cases}$

以 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 代入，得到切点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

由参数方程求导公式得切线斜率为 $\frac{dy}{dx} \Big|_{\theta = \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{d\theta}{d\theta}} \Big|_{\theta = \frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} = 1$

所以曲线切线、法线的直角坐标方程分别为：

$$x - y + \frac{5}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{3} = 0, \quad x + y - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

六. (本题满分 10 分) 解: 令 $x=0$, 则 $y(0)=1$, 对方程两端求导, 得到 $e^y y' + y + xy' = 0$ (1), 将 $x=0, y=1$ 代入, 得 $y'(0) = -e^{-1}$

对 (1) 式两端再求导, 得 $e^y (y')^2 + e^y y'' + 2y' + xy'' = 0$

代入上述结果, 得 $y''(0) = e^{-2}$

$$\text{七. (本题满分 10 分) 解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt},$$

令 $x-t=u$, 则 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x f(u)du$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)}$$

利用积分中值定理, 存在 ξ , 介于 0 与 x 之间, 因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(\xi)}{xf(\xi) + xf(x)} = \frac{1}{2}$$

八. (本题满分 10 分) 解: 令 $\sin^2 x = t$, 则 $\cos 2x + \tan^2 x = 1 - 2t + \frac{t}{1-t}$,

$$\text{所以 } f'(x) = 1 - 2x + \frac{x}{1-x} = -2x + \frac{1}{1-x},$$

$$f(x) = \int \left(-2x + \frac{1}{1-x} \right) dx = -x^2 - \ln|1-x| + c$$

九. (本题满分 10 分) 解: (1) $F(x) = x \int_{-a}^x f(t)dt - \int_{-a}^x tf(t)dt + x \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$

$$F'(x) = \int_{-a}^x f(t)dt + \int_a^x f(t)dt, \quad F''(x) = 2f(x) > 0$$

$$(2) \quad F'(x) = \int_{-a}^x f(t)dt + \int_a^x f(t)dt$$

由于 $f(x)$ 为偶函数, 对于 $\int_a^x f(t)dt$, 作变量替换: $t = -u$, 则有

$$\int_a^x f(t)dt = \int_{-x}^{-a} f(u)du = \int_{-x}^{-a} f(t)dt, \quad \text{于是}$$

$$F'(x) = \int_{-a}^x f(t)dt + \int_a^x f(t)dt = \int_{-a}^x f(t)dt + \int_{-x}^{-a} f(t)dt = \int_{-x}^x f(t)dt$$

由积分中值定理, $\int_{-x}^x f(t)dt = f(\xi)2x$

令 $F'(x) = 0$, 得到 $x = 0$, 而 $F''(0) = 2f(0) > 0$,

因此, $x = 0$ 是唯一的极小值点, 故 $x = 0$ 也是最小值点。

十. (本题满分 10 分) 证明: 因为 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 于是 $m \leq f(0) \leq M$,

$$m \leq f(1) \leq M, \quad m \leq f(2) \leq M$$

$$\text{故 } m \leq \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \leq M$$

由介值定理知，存在 $c \in [0, 2]$ ，使 $f(c) = \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1$

因为 $f(c) = 1 = f(3)$ ，且 $f(x)$ 在 $[c, 3]$ 上连续，在 $(c, 3)$ 内可导，因此由罗耳中值定理知，存在 $\xi \in (c, 3) \subset (0, 3)$ ，使 $f'(\xi) = 0$ 。

第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷三（非数学类）

考试形式：闭卷 考试时间：120 分钟 满分：100 分 试卷难度系数：0.6

一、计算题（每小题 4 分，满分 20 分）

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \sin \frac{i\pi}{n}$ 。

2. 计算不定积分 $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx$ 。

3. 设 $f(x) = (\tan \frac{\pi x}{4} - 1)(\tan \frac{\pi x}{4} - 2) \cdots (\tan \frac{\pi x^{100}}{4} - 100)$ ，求 $f'(1)$ 。

4. 设 $\begin{cases} x = \cot t \\ y = \frac{\cos 2t}{\sin t} \end{cases}, t \in (0, \pi)$ ，求此曲线的拐点。

5. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = 1$ ，求常数的值 a, b 。

二、（满分 10 分）设 $f(0) = 0, 0 < f'(x) < 1$ ，证明：当 $x > 0$ 时， $(\int_0^x f(t) dt)^2 > \int_0^x f^3(t) dt$

三、（满分 10 分）设 $g(x) = \int_{-1}^1 |x-t| e^{t^2} dt$ ，求 $g(x)$ 的最小值。

四、（满分 15 分）已知点 $A(1, 0, 0)$ 与点 $B(1, 1, 1)$ ， Σ 是由直线 AB 绕 Oz 轴旋转一周而成的旋转曲面介于平面 $z = 0$ 与 $z = 1$ 之间部分的外侧，函数 $f(u)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有连续导数，计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) - 2x] dydz + [y^2 - yf(xy)] dzdx + (z+1)^2 dx dy。$$

五、（满分 10 分）设 $F(t) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2t \cos x + t^2) dx$ ，证明：

(1) $F(t)$ 为偶函数；(2) $F(t^2) = 2F(t)$

六、（满分 10 分）设 f 为连续函数，且 $0 \leq f(x) \leq 1$ ，证明在 $[0, 1]$ 上方程 $2x - \int_0^x f(t) dt = 1$ 有唯一解。

七、（满分 15 分）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n$ ($a, b > 0$) 的收敛半径和收敛域。

八、（满分 10 分）设对于半空间 $x > 0$ 内任意的光滑有向封闭曲面都有

$\oint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdx dy = 0$ ，其中函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 存在，求 $f(x)$ 。

第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷三参考答案

一、计算题（每小题 4 分，满分 20 分）

$$\begin{aligned} 1. \text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \sin \frac{i\pi}{n} &= \int_0^1 x \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 x d \cos \pi x = -\frac{1}{\pi} (x \cos \pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos \pi x dx) \\ &= -\frac{1}{\pi} (-1 - \frac{1}{\pi} \sin \pi x \Big|_0^1) = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$2. \text{解} \quad \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx = -\frac{4}{3} \int d\sqrt{1-x\sqrt{x}} = -\frac{4}{3} \sqrt{1-x\sqrt{x}} + C$$

$$3. \text{解} \quad f(x) = (\tan \frac{\pi x}{4} - 1) [(\tan \frac{\pi x^2}{4} - 2) \cdots (\tan \frac{\pi x^{100}}{4} - 100)]$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\pi}{4} \sec^2 \frac{\pi x}{4} [(\tan \frac{\pi x^2}{4} - 2) \cdots (\tan \frac{\pi x^{100}}{4} - 100)] \\ &\quad + (\tan \frac{\pi x}{4} - 1) [(\tan \frac{\pi x^2}{4} - 2) \cdots (\tan \frac{\pi x^{100}}{4} - 100)]' \end{aligned}$$

$$f'(1) = \frac{\pi}{4} \sec^2 \frac{\pi}{4} [(1-2) \cdots (1-100)] = -\frac{\pi}{2} \times 99!$$

$$4. \text{解: } \frac{dy}{dt} = -\csc t \cot t - 2 \cos t, \quad \frac{dx}{dt} = -\csc^2 t$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos t (1 + 2 \sin^2 t), \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -3 \sin^3 t \cos 2t$$

$$\text{令 } \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \text{ 得 } t_1 = \frac{\pi}{4}, t_2 = \frac{3\pi}{4}, \text{ 当 } 0 < t < \frac{\pi}{4} \text{ 时, } \frac{d^2 y}{dx^2} < 0, \text{ 当 } \frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4} \text{ 时, } \frac{d^2 y}{dx^2} > 0,$$

$$\text{当 } \frac{3\pi}{4} < t < \pi \text{ 时, } \frac{d^2 y}{dx^2} < 0, \text{ 因此拐点为 } (1, 0), (-1, 0)$$

$$5. \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + ax^2 + bx - 1)}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + 2ax + b)}{2x}} = 1$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 2ax + b) = 0, \quad b = -1, \text{ 由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + 2a)}{2} = 0, \text{ 得 } a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{另解: } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^x + ax^2 + bx - 1)^{\frac{1}{e^x + ax^2 + bx - 1} \cdot \frac{e^x + ax^2 + bx - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + ax^2 + bx - 1}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + ax^2 + bx - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + ax^2 + bx - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+b)x + (\frac{1}{2} + a)x^2 + o(x^2)}{x^2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -1$$

二、(满分 10 分) 证明: 设 $F(x) = (\int_0^x f(t)dt)^2 - \int_0^x f^3(t)dt$

$$\text{则 } F(0) = 0, \quad F'(x) = f(x)[2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)],$$

由 $f(0) = 0$ 且 $0 < f'(x) < 1$, 知当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$ 。

$$\text{又设 } g(x) = 2\int_0^x f(t)dt - f^2(x) \text{ 则 } g(0) = 0, g'(x) = 2f(x)[1 - f'(x)] > 0,$$

所以 $F'(x) > 0$, 从而 $F(x) > F(0)$, 不等式得证.

三、(满分 10 分) 解: 当 $x > 1$ 时, $g(x) = 2x\int_0^1 e^{t^2} dt$, $g'(x) = 2\int_0^1 e^{t^2} dt > 0$, 故当 $x \geq 1$ 时 $g(x)$ 单调增加; 当 $x < -1$ 时, $g(x) = -2x\int_0^1 e^{t^2} dt$, $g'(x) = -2\int_0^1 e^{t^2} dt < 0$ 故当 $x \leq -1$ 时 $g(x)$ 单调减少;

$$\begin{aligned} \text{当 } -1 < x < 1 \text{ 时, } g(x) &= \int_{-1}^x (x-t)e^{t^2} dt + \int_x^1 (t-x)e^{t^2} dt \\ &= x\int_{-1}^x e^{t^2} dt - \int_{-1}^x te^{t^2} dt + \int_x^1 te^{t^2} dt - x\int_x^1 e^{t^2} dt, \\ g'(x) &= \int_{-1}^x e^{t^2} dt - \int_x^1 e^{t^2} dt = \int_{-x}^x e^{t^2} dt. \end{aligned}$$

由 $g'(x) = 0$ 得 $x = 0$ 。当 $-1 < x < 0$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$,

故 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的极小值点, 又 $g(1) = g(-1) = 2\int_0^1 e^{t^2} dt > 2\int_0^1 dt = 2$

$g(0) = 2\int_0^1 te^{t^2} dt = e^{t^2} \Big|_0^1 = e - 1$, 故 $g(x)$ 的最小值为 $g(0) = e - 1$

四、(满分 15 分) 解: 直线 AB 的方程为 $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, 直线 $AB: \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$ 绕 z 轴旋

转而成的旋转曲面 Σ 的方程为 $x^2 + y^2 = 1 + z^2$, 即 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$,

记 $P = xf(xy) - 2x, Q = y^2 - yf(xy), R = (z+1)^2$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f(xy) + xyf'(xy) - 2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y - f(xy) - xyf'(xy), \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2(z+1),$$

$$\text{于是 } \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2y + 2z.$$

补面 $\Sigma_1: z=0 (x^2 + y^2 \leq 1)$, 下侧; $\Sigma_2: z=(x^2 + y^2 \leq 2)$, 上侧。由高斯公式知

$$\begin{aligned} I_0 &= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \\ &= \iiint_{\Omega} (2y + 2z) dV, \text{ 由对称性知, } \iiint_{\Omega} y dV = 0, \text{ 利用截面法得:} \end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} z dV = \int_0^1 z dz \iint_{D_z: x^2+y^2 \leq 1+z^2} d\sigma = \pi \int_0^1 (z + z^3) dz = \frac{3}{4}\pi, \text{ 故 } I_0 = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} = \frac{3}{2}\pi.$$

$$\text{又 } I_1 = \iint_{\Sigma_1} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Sigma_1} dx dy = -\iint_D dx dy = -\pi,$$

$$I_2 = \iint_{\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iint_{\Sigma_2} 4dx dy = -\iint_D dx dy = 8\pi,$$

所以, $I = I_0 - I_1 - I_2 = \frac{3}{2}\pi - (-\pi) - 8\pi = -\frac{11}{2}\pi$ 。

五、(满分 10 分) 证明: (1) $F(-t) = \int_0^\pi \ln(1 + 2t \cos x + t^2) dx$

$$= \int_0^{\pi-u} \ln(1 - 2u \cos x + u^2) dx = \int_0^\pi \ln(1 - 2t \cos x + t^2) dx = F(t)$$

(2) $2F(t) = F(t) + F(-t) = \int_0^\pi \ln[(1+t^2)^2 - 4t^2 \cos^2 x] dx$

$$= \int_0^\pi \ln(1 + 2t^2 \cos 2x + t^4) dx \stackrel{2x=\pi-y}{=} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \ln(1 - 2(-t^2) \cos y + (-t^2)^2) dy$$

$$= \int_0^\pi \ln(1 - 2(-t^2) \cos y + (-t^2)^2) dy = F(-t^2) = F(t^2)$$

六、(满分 10 分) 证明: 设 $F(x) = 2x - \int_0^x f(t) dt - 1$,

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $F(0) = -1 < 0$

$F(1) = 1 - \int_0^1 f(t) dt$, 当 $f(x) = 1$ 时, $F(1) = 0$, $x=1$ 是方程 $2x - \int_0^x f(t) dt = 1$ 的解;

当 $0 \leq f(x) < 1$ 时, $F(1) = 1 - \int_0^1 f(t) dt > 0$, 由零点定理, 得至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ 使

$F(\xi) = 0$, 即方程 $2x - \int_0^x f(t) dt = 1$ 至少有一解。

又 $F'(x) = 2 - f(x) > 0$, 故 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调递增, 因此在 $[0,1]$ 上方程 $2x - \int_0^x f(t) dt = 1$ 有唯一解。

七、(满分 15 分) 解: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^2} x^n$,

$$\text{设 } a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} x^n, b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^2} x^n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{b^n}{n^2}} = b \therefore R = \min \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\}$$

①当 $a > b > 0$ 时, $R = \frac{1}{a}, x = \frac{1}{a}$ 时,

$$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散}, b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{b}{a} \right)^n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(\frac{1}{a} \right)^n \text{ 发散}$$

$$x = -\frac{1}{a} \text{ 时}, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \frac{1}{n} \text{ 递减} \therefore a_n \text{ 收敛}$$

$$b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(-\frac{b}{a} \right)^n \text{ 绝对收敛} \therefore b_n \text{ 收敛}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(-\frac{1}{a} \right)^n \text{ 收敛} \therefore \text{收敛域为} \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a} \right)$$

②当 $b \geq a > 0$ 时, $R = \frac{1}{b}$, $x = \frac{1}{b}$ 时,

$$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b} \right)^n \text{ 收敛}, b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(\frac{1}{b} \right)^n \text{ 收敛}$$

$$x = -\frac{1}{b} \text{ 时}, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{a}{b} \right)^n \text{ 绝对收敛}, \therefore a_n \text{ 收敛}$$

$$b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ 绝对收敛}, \therefore b_n \text{ 收敛}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(-\frac{1}{b} \right)^n \text{ 收敛} \therefore \text{收敛域为} \left[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b} \right]$$

所以, 当 $a > b > 0$ 时, 收敛半径 $R = \frac{1}{a}$, 收敛域为 $\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a} \right)$;

当 $b \geq a > 0$ 时, 收敛半径 $R = \frac{1}{b}$, 收敛域为 $\left[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b} \right]$ 。

八、(满分 10 分) 解: 对任意光滑封闭曲面由高斯公式得:

$$\oiint_S xf'(x) dydz - xyf(x) dzdx - e^{2x} z dx dy = \iiint_V [xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x}] dV \text{ 由}$$

题意得 $xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x} = 0 (x > 0)$ 恒成立

$$\therefore f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) f(x) = \frac{1}{x} e^{2x}, \text{ 解得 } f(x) = \frac{e^{2x} + Ce^x}{x}$$

由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 存在得: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} + Ce^x}{x}$ 存在 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} + Ce^x) = 0 \therefore C = -1$

$$\therefore f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$$

第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷四 (非数学类)

考试形式: 闭卷 考试时间: 120 分钟 满分: 100 分 试卷难度系数: 0.45

一. 填空题 (每题 4 分, 共 20 分)

1. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \cdot \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \cdot \sin x^n$ 是比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于 _____。

2. 设 $y = \sin^2(x^4)$, 则 $\frac{dy}{d(x^3)} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d(x^3)} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{3x^2}$ _____。

3. 不定积分 $\int \frac{x \cdot e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx =$ _____。

4. $[(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}] \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$ _____。

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = e$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)]$, 则 c 的值为_____。

二. (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 且其反函数为 $g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2 e^x$, 求 $f(x)$ 。

三、(本题满分 10 分) 已知 $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$,

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \varphi(t)dt - x}{\left(\sqrt[3]{1+x} - e^x\right) \ln(1+x^2)}$ 。

四、(本题满分 10 分) 计算 $I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \right| dx$, 其中 n 为自然数。

五、(本题满分 10 分) 求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x) dx (a > 0)$ 。

六、(本题满分 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a > 0$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散。

七、(本题满分 10 分) 计算 $\oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ 其中 Σ 是 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外

侧。

八、(本题满分 15 分) 求出所有在 $[0, +\infty)$ 上的正值连续函数 $g(x)$,

使得 $\frac{1}{2} \int_0^x [g(t)]^2 dt = \frac{1}{x} \left[\int_0^x g(t) dt \right]^2, \forall x > 0$ 。

第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷四参考答案

一. 填空题 (每题 4 分, 共 20 分)

1. 2

2. $\frac{8}{3} x \cos(x^4) \sin(x^4)$

3. 解: $\int \frac{x \cdot e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \stackrel{\text{令 } \arctan x = t}{=} \int \frac{\tan t \cdot e^t}{\sec^3 t} d(\tan t) = \int \sin t \cdot e^t dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + C$

$$= \frac{1}{2} e^{\arctan x} \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} + c.$$

4. 解: $\because (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$ 与 \vec{a} 共线, 而 $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$, $\therefore (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$,
 $\Rightarrow [(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}] \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$.

5. 解: $\because \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = e^{2c}$, 又由拉格朗日中值定理有 $f(x) - f(x-1) = f'(\xi) \cdot 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)] = \lim_{\xi \rightarrow \infty} f'(\xi) = e, \Rightarrow e^{2c} = e, \quad c = \frac{1}{2}.$$

二、(本题满分 10 分) 解: $\because f(x)$ 与 $g(x)$ 互为反函数, $\therefore g[f(x)] = x$

由 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2 e^x$, 得 $g[f(x)] \cdot f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$,

$$\Rightarrow f'(x) = 2e^x + xe^x, \therefore f(x) = \int (2e^x + xe^x)dx = e^x + xe^x + C,$$

$$\because f(0) = 0, \Rightarrow c = -1, \therefore f(x) = e^x + xe^x - 1$$

三、(本题满分 10 分)

$$\text{解: } \because \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \varphi(t)dt - x}{\left(\sqrt[3]{1+x} - e^x\right) \ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \varphi(t)dt - x}{\left(\frac{1}{3}x - x\right) \cdot x^2} = -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{3x^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{12}$$

四、(本题满分 10 分)

$$\text{解: } I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \right| dx = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| -\sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right| dx = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \right| dx$$

$$\begin{aligned} & \text{令 } \ln \frac{1}{x} = u \\ &= \int_0^{2n\pi} |\sin u| du = 2n \int_0^{\pi} |\sin u| du = 4n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{或令 } \frac{1}{x} = t \\ &= \int_{e^{2n\pi}}^1 |\sin(\ln t)| \cdot t \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_1^{e^{2n\pi}} |\sin(\ln t)| d(\ln t) \stackrel{\text{令 } \ln t = u}{=} \int_0^{2n\pi} |\sin u| du = 4n \end{aligned}$$

五、(本题满分 10 分) 解: 令 $\varphi(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x) dx$, 则 $\varphi(1) = 0$, 当 $a \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin^2 x}{\cos^2 x + a^2 \sin^2 x} dx \stackrel{\text{令 } t = \tan x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2at^2}{(1+a^2 t^2)(1+t^2)} dt \\ &= \frac{2a}{a^2-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{1+a^2 t^2} \right) dt = \frac{2a}{a^2-1} \left(\arctan t - \frac{1}{a} \arctan at \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{a+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \varphi(a) = \int \varphi'(a) da = \int \frac{\pi}{a+1} = \pi \ln(a+1) + C \text{ 由 } \varphi(1) = 0 \text{ 得 } C = -\pi \ln 2$$

$$\therefore \varphi(a) = \pi \ln \frac{a+1}{2} \text{ 即 } I = \pi \ln \frac{a+1}{2}$$

六、（本题满分 15 分）证明：由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a > 0 \Rightarrow f(0)=0$ 和 $f'(0) = a > 0$

$$(\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0))$$

再由导数的连续性，存在 $x=0$ 的某邻域 I ,

使得 $f'(x) > 0 (x \in I) \therefore f(x) \uparrow (x \in I)$,

$\therefore f(\frac{1}{n}) > 0$, 且单调递减并以零为极限 (n 为自然数)。

交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛。再由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = a > 0$

\therefore 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 同敛散, \therefore 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散。

七、（本题满分 10 分）解：方法一（一二型相互转化）。球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上任一

点处的单位法向量是 $\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

$$\oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = \oiint_{\Sigma} \frac{\cos \alpha dydz + \cos \beta dzdx + \cos \gamma dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} \oiint_{\Sigma} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) ds = \frac{1}{a^2} \oiint_{\Sigma} ds = 4\pi$$

方法二（高斯公式）。将积分区域函数代入被积函数化简得：

$$I = \frac{1}{a^3} \oiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy, \text{ 记 } \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,$$

$$\text{由高斯公式得 } I = \frac{1}{a^3} \iiint_{\Omega} 3dV = 4\pi$$

八、（本题满分 15 分）解：等式两边同时求导得：

$$\frac{1}{2} [g(x)]^2 = \frac{2}{x} g(x) \int_0^x g(t) dt - \frac{1}{x^2} \left[\int_0^x g(t) dt \right]^2$$

由于当 $x \in [0, +\infty)$ 时 $g(x) > 0$, 于是 $\int_0^x g(t) dt > 0$

由 $\frac{x^2}{2} [g(x)]^2 - 2xg(x) \int_0^x g(t) dt + \left[\int_0^x g(t) dt \right]^2 = 0$ 解方程得：

$$\int_0^x g(t)dt = xg(x) \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^2 g^2(x)} = \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)xg(x) \quad \text{由于 } g(x) \text{ 连续, 所以求导得}$$

$$g(x) = \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)[g(x) + xg'(x)] \text{ 所以 } g(x) = (-1 \pm \sqrt{2})xg'(x)$$

$$\text{即 } \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{x}, \text{ 所以 } \ln g(x) = (1 \pm \sqrt{2})\ln x + C_1, g(x) = Cx^{1 \pm \sqrt{2}}$$

$$\because g(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处左连续 } \therefore g(0) \text{ 存在。故 } g(x) = Cx^{1 \pm \sqrt{2}}, C > 0$$

第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷五（非数学类）

考试形式：闭卷 考试时间：120 分钟 满分：100 分 试卷难度系数：0.45

一、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1. 设 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$, 则 $f(x)$ 导数不存在得点为_____。

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) =$ _____。

3. $\oint_L (e^x + x^2 y^2 z^3) dx + (e^y - y^2 z) dy + (e^z + yz^2) dz =$ _____, 其中 L 是圆周

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = R^2 \\ x = 0 \end{cases}, \text{ 从 } x \text{ 轴正向看去, 曲线是逆时针方向。}$$

4. 以四个函数 $e^x, 2xe^x, 3\cos 3x, 4\sin 3x$ 为解的 4 阶常系数线性齐次微分方程是_____, 该方程的通解是_____。

5. 设函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} (0 \leq x \leq 1)$, 则 $f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) =$ _____。

二、(本题满分 5 分) 设 $x_n = \frac{n}{n^2 + n + 1} + \frac{n}{n^2 + 2n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + nn + n}, n = 1, 2, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

三、(本题满分 10 分) 若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数, 且 $f(0)=1$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right|$ 的敛散性。

四、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 ($a > 0$), 在 (a, b) 上可导, 证明: $\exists \xi, \eta \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)$ 。

五、(本题满分 15 分) 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上的二元函数, $f(0, 0) = 0$,

且在点(0,0)处 $f(x,y)$ 可微, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t,u) du}{1 - e^{-\frac{x^4}{4}}}$ 。

六、(本题满分 15 分) 计算曲面积分 $I = \iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 S 是曲面

$$1 - \frac{z}{7} = \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} \quad (z \geq 0) \text{ 的上侧。}$$

七、(本题满分 10 分) 设 a 为任意实数, 求 $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$ 。

八、(本题满分 10 分) 设当 $x > -1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{1+x} \int_0^x f(t) dt = 0, f(0) = 1, \text{ 求 } f'(x)。$$

第三届中国大学生数学竞赛模拟试卷五参考答案

一、填空题 (每小题 5 分, 共 25 分)

1. $x=0, x=1$ 2. 1 3. $\frac{1}{2}\pi R^4$

4. 微分方程为 $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 10y'' - 18y' + 9y = 0$,

通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$

5. $\frac{\pi^2}{6}$

二、(本题满分 5 分) 解: $\because x_n < \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+2n} + \dots + \frac{n}{n^2+nn}$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

又 $x_n > \frac{n}{n^2+n+n} + \frac{n}{n^2+2n+n} + \dots + \frac{n}{n^2+nn+n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k+1}$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} < x_n < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ln 2$$

三、（本题满分 10 分）解：由 $f(x)$ 是偶函数得 $f'(0) = 0$

$$\therefore f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + f'(0)\frac{1}{n} + \frac{1}{2}f''(0)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2}f''(0)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right|}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2}f''(0) + \frac{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \right| = \frac{1}{2}|f''(0)|$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛, 故级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right| \text{ 收敛.}$$

四、（本题满分 10 分）证明：由拉格朗日中值定理得 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(a) - f(b)}{a^2 - b^2}(a + b)$$

$$\text{由柯西中值定理得 } \exists \eta \in (a, b) \text{ 使得 } \frac{f(a) - f(b)}{a^2 - b^2} = \frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

$$\text{故, } f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta), \text{ 得证.}$$

五、（本题满分 15 分）解：交换积分次序有

$$\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du = - \int_0^{x^2} dt \int_{\sqrt{t}}^x f(t, u) du = - \int_0^x du \int_0^{u^2} f(t, u) dt$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-\frac{x^4}{4}}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x du \int_0^{u^2} f(t, u) dt}{\frac{x^4}{4}}$$

$$\text{由洛比达法则得 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-\frac{x^4}{4}}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} f(t, x) dt}{x^3}$$

$$\text{由积分中值定理得 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-\frac{x^4}{4}}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 f(\xi, x)}{x^3} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi, x)}{x}$$

其中, $\xi \in (0, x^2)$, 由二元函数的泰勒公式得:

$$f(\xi, x) = f(0, 0) + f'_x(0, 0)\xi + f'_y(0, 0)x + o(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-\frac{x^4}{4}}} &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'_x(0, 0)\xi + f'_y(0, 0)x + o(x)}{x} \\ &= -f'_y(0, 0) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'_x(0, 0)\xi}{x} \\ \therefore \left| \frac{f'_x(0, 0)\xi}{x} \right| &< \left| \frac{f'_x(0, 0)x^2}{x} \right| = |f'_x(0, 0)x|, \lim_{x \rightarrow 0} |f'_x(0, 0)x| = 0 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'_x(0, 0)\xi}{x} &= 0, \therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-\frac{x^4}{4}}} = -f'_y(0, 0) \end{aligned}$$

六、(本题满分 15 分)

解：记 $P = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, Q = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, R = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

则 $I = \iiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy,$

除原点外, P, Q, R 及其偏导数连续, 且有 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$, 则曲面积分与积分曲面

无关。取 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2 (z \geq 0)$, ε 是较小的正常数可以保证 S_1 在 S 的内部, 取其上侧为正; 将 xoy 面上位于 S_1 与 S 的边界曲线之间的部分记为 S_2 , 取其上侧为正; 设 S, S_1, S_2 所围空间区域为 V , 记 xoy 平面上由 S_1 边界所围部分为 S_3 , 取其上侧为正; 设 S_1 与 S_3 所围半球体区域为 V_1 , 则有

$$I = \oiint_{S^+ + S_1^- + S_2^-} - \iint_{S_1^-} - \iint_{S_2^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

由高斯公式得 $\oiint_{S^+ + S_1^- + S_2^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = 0$

S_2 与 S_3 位于 xoy 平面上, 则有 $\iint_{S_2^-} = \iint_{S_3^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = 0$

$$\therefore I = - \iint_{S_1^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iint_{S_1^+} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

$$= \oiint_{S_1^+ + S_3^-} - \iint_{S_3^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \oiint_{S_1^+ + S_3^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

$$= \oiint_{S_1^+ + S_3^-} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\varepsilon^2} \oiint_{S_1^+ + S_3^-} xdydz + ydzdx + zdx dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{V_1} 3dV = \frac{3}{\varepsilon^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi\varepsilon^3}{3} = 2\pi$$

七、(本题满分 10 分) 解: 令 $x = \tan t$, 则 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \tan^a t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cot^a t}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^a t dt}{1 + \tan^a t} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\tan^a t}{1 + \tan^a t} + \frac{1}{1 + \tan^a t} \right) dt = \frac{\pi}{4}$$

八、(本题满分 10 分) 解: 将已知方程化成 $(x+1)f'(x) + (x+1)f(x) - \int_0^x f(t)dt = 0$,

两边同时对 x 求导得: $(x+1)f''(x) + (x+2)f'(x) = 0$

即 $\frac{f''(x)}{f'(x)} = -\frac{x+2}{x+1} = -1 - \frac{1}{x+1}$, 积分得 $\ln|f'(x)| = -x - \ln(x+1) + c_1$

$\therefore f'(x) = \frac{c}{(x+1)e^x}$, 由 $f(0)=1$ 得 $f'(0) = -1, \therefore c = -1, \therefore f'(x) = -\frac{1}{(x+1)e^x}$

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷（非数学类，2009）

考试形式：闭卷 考试时间：120 分钟 满分：100 分 试卷难度系数：0.35

一、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}} dx dy =$ _____, 其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两

坐标轴所围成三角形区域.

2. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且满足 $f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x)dx - 2$, 则 $f(x) =$ _____.

3. 曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 平行于平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程是_____.

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f' \neq 1$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

二、(5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$, 其中 n 是给定的正整数.

三、(15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, A 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

四、(15 分) 已知平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$, L 为 D 的正向边界, 试证: (1) $\oint_L xe^{\sin y} dy - ye^{-\sin x} dx = \oint_L xe^{-\sin y} dy - ye^{\sin x} dx$;

$$(2) \oint_L xe^{\sin y} dy - ye^{-\sin x} dx \geq \frac{5}{2}\pi^2.$$

五、(10 分) 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$, $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程.

六、(10 分) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2 \ln c$ 过原点. 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y \geq 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c , 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积最小.

七、(15 分) 已知 $u_n(x)$ 满足 $u'_n(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x (n=1, 2, \cdots)$, 且 $u_n(1) = \frac{e}{n}$, 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和.

八、(10 分) 求 $x \rightarrow 1^-$ 时, 与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷参考答案

一、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

1. 解: 令 $x+y=u, x=v$, 则 $x=v, y=u-v$, $dx dy = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} du dv = du dv$,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{(x+y) \ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}} dx dy &= \iint_D \frac{u \ln u - u \ln v}{\sqrt{1-u}} du dv \\ &= \int_0^1 \left(\frac{u \ln u}{\sqrt{1-u}} \int_0^u dv - \frac{u}{\sqrt{1-u}} \int_0^u \ln v dv \right) du = \int_0^1 \frac{u^2 \ln u}{\sqrt{1-u}} - \frac{u(u \ln u - u)}{\sqrt{1-u}} du = \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}} du \quad (*) \end{aligned}$$

令 $t = \sqrt{1-u}$, 则 $u = 1-t^2$, $du = -2t dt$, $u^2 = 1-2t^2+t^4$,

$$(*) = -2 \int_1^0 (1 - 2t^2 + t^4) dt = 2 \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt = 2 \left[t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 \right]_0^1 = \frac{16}{15}$$

2. 解：令 $A = \int_0^2 f(x) dx$ ，则 $f(x) = 3x^2 - A - 2$ ，

$$A = \int_0^2 (3x^2 - A - 2) dx = 8 - 2(A + 2) = 4 - 2A, \text{解得 } A = \frac{4}{3}。 \text{因此 } f(x) = 3x^2 - \frac{10}{3}。$$

3. 解：因平面 $2x + 2y - z = 0$ 的法向量为 $(2, 2, -1)$ ，而曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 在 (x_0, y_0) 处的

法向量为 $(z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0), -1)$ ，故 $(z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0), -1)$ 与 $(2, 2, -1)$ 平行，因此，

由 $z_x = x$ ， $z_y = 2y$ 知 $2 = z_x(x_0, y_0) = x_0, 2 = z_y(x_0, y_0) = 2y_0$ ，即 $x_0 = 2, y_0 = 1$ ，

又 $z(x_0, y_0) = z(2, 1) = 5$ ，于是曲面 $2x + 2y - z = 0$ 在 $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ 处的切平面方程是 $2(x - 2) + 2(y - 1) - (z - 5) = 0$ ，

即曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 平行于平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程是 $2x + 2y - z - 1 = 0$ 。

4. 解：方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 的两边对 x 求导，得 $e^{f(y)} + xf'(y)y'e^{f(y)} = e^y y' \ln 29 = y'xe^{f(y)}$

$$\text{故 } \frac{1}{x} + f'(y)y' = y', \text{ 即 } y' = \frac{1}{x(1 - f'(y))},$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' &= -\frac{1}{x^2(1 - f'(y))} + \frac{f''(y)y'}{x[1 - f'(y)]^2} \\ &= \frac{f''(y)}{x^2[1 - f'(y)]^3} - \frac{1}{x^2(1 - f'(y))} = \frac{f''(y) - [1 - f'(y)]^2}{x^2[1 - f'(y)]^3} \end{aligned}$$

$$\text{二. (5 分) 解: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{n} \right)^{\frac{n}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}} \right\}^{\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{n} \cdot \frac{e}{x}}$$

$$\because \text{幂指数部分的极限值} = \frac{e}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{1} = \frac{n+1}{2} e, \therefore \text{原式} = e^{\frac{n+1}{2} e}$$

三. (15 分) 解：由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 和 $f(x)$ 连续，有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

$$\text{显然 } g(0) = \int_0^1 f(0) dt = f(0) = 0,$$

$$x \neq 0 \text{ 时, } g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} = f(0) = 0$$

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } g'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du + \frac{f(x)}{x},$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du + \frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}$$

这表明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

四 (15 分) 证: 因被积函数的偏导数连续在 D 上连续, 故由格林公式知

$$(1) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (x e^{\sin y}) - \frac{\partial}{\partial y} (-y e^{-\sin x}) \right] dx dy = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy$$

$$\oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (x e^{-\sin y}) - \frac{\partial}{\partial y} (-y e^{\sin x}) \right] dx dy = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) dx dy$$

而 D 关于 x 和 y 是对称的, 即知 $\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) dx dy$

$$\text{因此 } \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx$$

$$(2) \text{ 因 } e^t + e^{-t} = 2(1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots) \geq 2(1 + t^2)$$

$$\text{故 } e^{\sin x} + e^{-\sin x} \geq 2 + \sin^2 x = 2 + \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{5 - \cos 2x}{2}$$

$$\text{由 } \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) dx dy$$

$$\text{知 } \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \frac{1}{2} \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy + \frac{1}{2} \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin y}) dx dy + \frac{1}{2} \iint_D (e^{-\sin x} + e^{\sin x}) dx dy = \iint_D (e^{-\sin x} + e^{\sin x}) dx dy$$

$$= \pi \int_0^\pi (e^{-\sin x} + e^{\sin x}) dx \geq \pi \int_0^\pi \frac{5 - \cos 2x}{2} dx = \frac{5}{2} \pi^2, \text{ 即 } \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2$$

五. (10 分) 解: 设 $y_1 = x e^x + e^{2x}$, $y_2 = x e^x + e^{-x}$, $y_3 = x e^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是非齐次微分方程的三个解, 则容易推出 e^{2x} 和 e^{-x} 都是对应的齐次微分方程的解, 因此对应的齐次微分方程为 $y'' - y' - 2y = 0$, 再利用 $y^* = x e^x$ 是特解, 代入知, $f(x) = (1 - 2x)e^x$, 二阶常系数线性非齐次微分方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2x e^x$.

六. (10 分) 解: 因抛物线 $y = ax^2 + bx + 2 \ln c$ 过原点, 故 $c = 1$, 于是

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 (ax^2 + bx) dt = \left[\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} \text{ 即 } b = \frac{2}{3}(1 - a)$$

而此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积

$$V(a) = \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dt = \pi \int_0^1 (ax^2 + \frac{2}{3}(1 - a)x)^2 dt$$

$$= \pi a^2 \int_0^1 x^4 dt + \pi \frac{4}{3} a(1-a) \int_0^1 x^3 dt + \pi \frac{4}{9} (1-a)^2 \int_0^1 x^2 dt = \frac{1}{5} \pi a^2 + \pi \frac{1}{3} a(1-a) + \pi \frac{4}{27} (1-a)^2$$

$$\text{即 } V(a) = \frac{1}{5} \pi a^2 + \pi \frac{1}{3} a(1-a) + \pi \frac{4}{27} (1-a)^2$$

$$\text{令 } V'(a) = \frac{2}{5} \pi a + \pi \frac{1}{3} (1-2a) - \pi \frac{8}{27} (1-a) = 0, \text{ 得 } 54a + 45 - 90a - 40 + 40a = 0$$

$$\text{即 } 4a + 5 = 0, \text{ 因此 } a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 1.$$

七、(15分) 解: $u'_n(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x$, 即 $y' - y = x^{n-1}e^x$

由一阶线性非齐次微分方程公式知 $y = e^x(C + \int x^{n-1}dx)$, 即 $y = e^x(C + \frac{x^n}{n})$

因此 $u_n(x) = e^x(C + \frac{x^n}{n})$, 由 $\frac{e}{n} = u_n(1) = e(C + \frac{1}{n})$ 知, $C = 0$, 于是 $u_n(x) = \frac{x^n e^x}{n}$

下面求级数的和: 令

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n} = e^x s_1(x), s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (x \in [-1, 1))$$

$$s'_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} (s_1(0) = 0), s_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x)$$

$$S(x) = -e^x \ln(1-x) (x \in [-1, 1))$$

八、(10分) 解: 令 $f(t) = x^{t^2}$, 则因当 $0 < x < 1$, $t \in (0, +\infty)$ 时, $f'(t) = 2tx^{t^2} \ln x < 0$, 故

$f(t) = x^{t^2} = e^{-t^2 \ln \frac{1}{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调减。因此

$$\int_0^1 f(t) dt \leq f(0) = \int_0^1 f(0) dt, \int_1^2 f(t) dt \leq f(1) \leq \int_0^1 f(t) dt$$

$$\int_2^3 f(t) dt \leq f(2) \leq \int_1^2 f(t) dt, \int_3^4 f(t) dt \leq f(3) \leq \int_2^3 f(t) dt \dots\dots$$

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

⋮

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \leq f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n f(t) dt$$

$$\text{即 } \int_0^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \leq 1 + \int_0^{+\infty} f(t) dt,$$

$$\text{又 } \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln \frac{1}{x}} dt = \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{再由 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x}}{-1} = 1, \sqrt{\ln \frac{1}{x}} \sim \sqrt{1-x},$$

所以，当 $x \rightarrow 1^-$ 时，与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量是 $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$ 。

首届中国大学生数学竞赛决赛试卷（非数学类，2010）

考试形式：闭卷 考试时间：150 分钟 满分：100 分 试卷难度系数：0.3

一、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

(1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} (1 + \frac{k}{n}) \sin \frac{k\pi}{n^2}$ ；

(2) 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ，其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧， $a > 0$ ；

(3) 现要设计一个容积为 V 的一个圆柱体的容器，已知上下两底的材料费为单位面积 a 元，而侧面的材料费为单位面积 b 元。试给出最节省的设计方案：即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少？

(4) 已知 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 内满足 $f'(x) = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ ，求 $f(x)$ 。

二、(10 分) 求下列极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right)$ ； (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3} \right]^n$ ，其中 $a > 0, b > 0, c > 0$ 。

三、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 点附近有定义，且在 $x=1$ 点可导， $f(1)=0, f'(1)=2$ ，求

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2 + x \tan x}$ 。

四、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，无穷积分 $\int_0^{\infty} f(x) dx$ 收敛。求 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \int_0^y x f(x) dx$ 。

五、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可微，且 $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$ 。证明：

(1) 存在 $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$ ，使得 $f(\xi) = \xi$ ；(2) 存在 $\eta \in (0, \xi)$ 使得 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$ 。

六、(14 分) 设 $n > 1$ 为整数， $F(x) = \int_0^x e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \right) dt$ 。证明：方程 $F(x) = \frac{n}{2}$ 在

$(\frac{n}{2}, n)$ 内至少有一个根。

七、(12 分) 是否存在 R^1 中的可微函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x)) = 1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5$ ？若存在，请给出一个例子；若不存在，请给出证明。

八、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续，且对于固定的 $x \in [0, +\infty)$ ，当自然数 $n \rightarrow \infty$ 时

$f(x+n) \rightarrow 0$ 。证明：函数序列 $\{f(x+n): n=1,2,\dots\}$ 在 $[0,1]$ 上一致连续于 0。

首届中国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案

一、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 解：方法一：由泰勒公式得 $\sin \frac{k\pi}{n^2} = \frac{k\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \sin \frac{k\pi}{n^2} &= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \pi \int_0^1 x(1+x) dx = \frac{5}{6} \pi \end{aligned}$$

方法二： $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \sin \frac{k\pi}{n^2} = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3}\right)$

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n(n+1)}{2n^2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \right] = \frac{5}{6} \pi$$

2. 解：方法一：将 Σ （或分片后）投影到相应坐标平面上化为二重积分逐块计算。

$$I_1 = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} ax dy dz = -2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} dy dz, \text{ 其中 } D_{yz} \text{ 为 } yoz \text{ 平面上的半圆}$$

$$y^2 + z^2 \leq a^2, z \leq 0, \text{ 得 } I_1 = -2 \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr = -\frac{2}{3} \pi a^3$$

$$\text{同理, } I_2 = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} (z+a)^2 dx dy = \frac{1}{a} \iint_{D_{xy}} \left[a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right]^2 dx dy, \text{ 其中 } D_{xy} \text{ 为}$$

xoy 平面上的圆域 $x^2 + y^2 \leq a^2$ ，利用极坐标，

$$\text{得 } I_2 = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \left(a - \sqrt{a^2 - r^2} \right)^2 dr = \frac{\pi}{6} a^3,$$

$$\text{所以 } I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{2} a^3$$

方法二：（补面利用高斯公式） $I = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} ax dy dz + (z+a)^2 dx dy,$

作面 $S: z=0, x^2 + y^2 \leq a^2$ 的下侧，则 $\Sigma + S$ 构成封闭区域

$\Omega: -\sqrt{a^2 - y^2 - x^2} \leq z \leq 0$ 的内侧，由高斯公式得：

$$I + \frac{1}{a} \iint_S ax dy dz + (z+a)^2 dx dy = -\frac{1}{a} \iiint_{\Omega} (2z+3a) dV$$

$$\begin{aligned}\therefore I &= -\frac{1}{a} \iiint_{\Omega} (2z + 3a) dV - a \iint_S dx dy \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-a}^0 (2z + 3a) dz \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2 - z^2} dx dy + \pi a^3 \\ &= -\frac{\pi}{a} \int_{-a}^0 (2z + 3a) (a^2 - z^2) dz + \pi a^3 = -\frac{\pi}{2} a^3\end{aligned}$$

3. 解：设圆柱容器的高为 h ，上下底的半径为 r ，则有 $\pi r^2 h = V$ 或 $h = \frac{V}{\pi r^2}$ ，

$$\text{所需费用为 } F(r) = 2a\pi r^2 + 2b\pi r h = 2a\pi r^2 + \frac{2bV}{r},$$

显然 $F'(r) = 4a\pi r - \frac{2bV}{r^2}$ ，那么，费用最少意味着 $F'(r) = 0$ ，也即 $r^3 = \frac{bV}{2a\pi}$ ，

这时高与底的直径的比为 $\frac{h}{2r} = \frac{V}{2\pi r^3} = \frac{a}{b}$ 。

2. 解：由 $\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \left[1 + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]$ 得：

$$I = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \left[1 + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]}, \quad \text{令 } u = \frac{\pi}{4} - x \text{ 得}$$

$$I = -\sqrt{2} \int \frac{du}{\cos u [1 + 2\sin^2 u]} = -\sqrt{2} \int \frac{d \sin u}{\cos^2 u [1 + 2\sin^2 u]}, \quad \text{令 } t = \sin u, \text{ 则}$$

$$I = -\sqrt{2} \int \frac{dt}{(1-t^2)(1+2t^2)} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \left[\int \frac{dt}{1-t^2} + 2 \int \frac{dt}{1+2t^2} \right]$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{3} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \sqrt{2} \arctan \sqrt{2} t \right] + c$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{6} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \right| - \frac{2}{3} \arctan \left[\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right] + c$$

二. (10分) 解: (1) 由 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - e = e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - e$

$$= e \left[e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right] = e \left[-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} e \left[-\frac{1}{2} + n o\left(\frac{1}{n}\right) \right] = -\frac{e}{2}$$

(2) 方法一: 由泰劳公式得, $n \rightarrow +\infty$ 时, $a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln a} = 1 + \frac{1}{n} \ln a + o\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$b^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln b} = 1 + \frac{1}{n} \ln b + o\left(\frac{1}{n}\right), c^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln c} = 1 + \frac{1}{n} \ln c + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{3} \left(a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} \right) = 1 + \frac{1}{3n} \ln(abc) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3} \right)^n = \left[1 + \frac{1}{3n} \ln(abc) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n,$$

记 $\alpha_n = \frac{1}{3n} \ln(abc) + o\left(\frac{1}{n}\right)$, 则 $\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3} \right)^n = \left[(1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} \right]^{n\alpha_n}$

显然, $n \rightarrow +\infty$ 时 $\alpha_n \rightarrow 0, (1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} \rightarrow e, n\alpha_n \rightarrow \frac{1}{3} \ln(abc)$

所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} \right]^{n\alpha_n} = \sqrt[3]{abc}$

方法二:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} - 3}{3} \right)^{\frac{3}{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} - 3} \cdot \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} - 3}{3} \cdot n}$$

$$\exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} - 3}{3 \frac{1}{n}}\right) = \exp\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{c^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}\right)\right] = \sqrt[3]{abc}$$

三. (10 分) 解: 由题意得 $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y) - f(1)}{y - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y)}{y - 1} = f'(1) = 2$,

令 $y = \sin^2 x + \cos x$, 那么当 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 1$, $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{\sin^2 x + \cos x - 1} = 2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2 + x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2 + x \tan x}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2 + x \tan x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\cos x - 1}{x^2}}{1 + \frac{\tan x}{x}} = \frac{1}{2}$$

四. (10 分) 解: 设 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = l$, 并令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$,
则 $F'(x) = f(x)$, 并有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l$, 对于任意的 $y > 0$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \int_0^y x f(x) dx &= \frac{1}{y} \int_0^y x dF(x) = \frac{x}{y} F(x) \Big|_{x=0}^{x=y} - \frac{1}{y} \int_0^y F(x) dx \\ &= F(y) - \frac{1}{y} \int_0^y F(x) dx \end{aligned}$$

根据洛比达法则, 有 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \int_0^y F(x) dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = l$

$$\therefore \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \int_0^y x f(x) dx = l - l = 0$$

五. (12 分) 证明: (1) 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且有

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0, F(1) = -1 < 0, \text{ 由介值定理得: } \exists \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ 使得 } F(\xi) = 0$$

即 $f(\xi) = \xi$

(2) 令 $G(x) = e^{-x} F(x)$, 则 $G(0) = G(\xi) = 0$, 由罗尔定理得: $\exists \eta \in (0, \xi)$ 使

得 $G'(\eta) = 0$ 即 $G'(\eta) = e^{-\eta} [f'(\eta) - 1] - e^{-\eta} [f(\eta) - \eta] = 0$,

即 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$

六. (14 分) 证明: $\because e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) < 1, \forall t > 0$,

$\therefore F\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^{\frac{n}{2}} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) dt < \frac{n}{2}$, 下面只需证明 $F(n) > \frac{n}{2}$ 即可。

$$\begin{aligned} F(n) &= \int_0^n e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) dt = -\int_0^n \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) de^{-t} \\ &= 1 - e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right) + \int_0^n e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right) dt \end{aligned}$$

由此, 可以推出

$$\begin{aligned} F(n) &= 1 - e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right) + 1 - e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \right) \\ &+ \dots + 1 - e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} \right) + 1 - e^{-n} = n + 1 - e^{-n} \left[(n+1) + n \frac{n}{1!} + (n-1) \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right] \end{aligned}$$

$$\text{又} \because (n+1) + n \frac{n}{1!} + (n-1) \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} < \frac{n+2}{2} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right)$$

$$\therefore F(n) = n + 1 - e^{-n} \left[(n+1) + n \frac{n}{1!} + (n-1) \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right]$$

$$> n + 1 - \frac{n+2}{2} e^{-n} \left[1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right] > n + 1 - \frac{n+2}{2} = \frac{n}{2}$$

$$\therefore F\left(\frac{n}{2}\right) < \frac{n}{2}, F(n) > \frac{n}{2}, F(x) \text{ 连续, 由介值定理得 } F(x) = \frac{n}{2} \text{ 在 } \left(\frac{n}{2}, n\right) \text{ 内}$$

七. (12 分) 解: 假设存在满足题意的 $f(x)$, 考虑方程 $f[f(x)] = x$,

即 $1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5 = x, (x-1)(x^4 + x^2 + 1) = 0$, 此方程有唯一实数根 $x=1$,

即 $f[f(x)]$ 有唯一不动点 $x=1$, 下面说明 $x=1$ 也是 $f(x)$ 的不动点。

令 $f(1) = t$, 则 $f(t) = f[f(1)] = 1, f[f(t)] = f(1) = t \therefore t = 1$ 即 $f(1) = 1$

记 $g(x) = f[f(x)]$, 则 $g'(x) = f'[f(x)]f'(x)$, $g'(1) = [f'(1)]^2 \geq 0$

另一方面 $g'(x) = 2x + 4x^3 - 3x^2 - 5x^4$, $g'(1) = -2 < 0$ 与 $g'(1) \geq 0$ 自相矛盾
所以, 不存在满足题意的可微函数 $f(x)$

八. (12 分) 证明: 由于 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 只要 } |x_1 - x_2| < \delta (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

取一个充分大的自然数 m , 使得 $m > \delta^{-1}$, 并在 $[0, 1]$ 中取 m 个点:

$$x_1 = 0 < x_2 < \dots < x_m = 1,$$

其中 $x_j = \frac{j}{m} (j = 1, 2, \dots, m)$, 这样对于每一个 j , 有 $|x_{j+1} - x_j| = \frac{1}{m} < \delta$.

有由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0$, 故对于每一个 x_j , 存在一个 N_j 使得

$$|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 只要 } n > N_j,$$

这里的 ε 是前面给定的。

令 $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_m\}$, 那么 $|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 只要 $n > N$

其中 $j = 1, 2, \dots, m$ 。设 $x \in [0, 1]$ 是任意一点, 这时总有一个 x_j 使得 $x \in [x_j, x_{j+1}]$ 。

由 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续性及 $|x - x_j| < \delta$ 可知,

$$|f(x_j + n) - f(x + n)| < \frac{\varepsilon}{2} (\forall n = 1, 2, \dots)$$

另一方面, $|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 只要 $n > N$

这样, $|f(x + n)| < \varepsilon$, 只要 $n > N$, $x \in [0, 1]$, 这里的 N 的选取与点 x 无关, 这就证明了函数序列 $\{f(x + n) : n = 1, 2, \dots\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 0。

第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷 (非数学类, 2010)

考试形式: 闭卷 考试时间: 120 分钟 满分: 100 分 试卷难度系数: 0.35

一 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤)。

1. 设 $x_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^{2^n})$, 其中 $|a| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$

3. 设 $s > 0$, 求 $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx (n=1, 2, \dots)$

4. 设函数 $f(t)$ 有二阶连续的导数, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = f\left(\frac{1}{r}\right)$,

求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

5. 求直线 $l_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 的距离。

二 (本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上具有二阶导数, 并且 $f''(x) > 0$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0$, 且存在一点 x_0 使得 $f(x_0) < 0$,

证明: 方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内恰有两个实根。

三 (本题 15 分) 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \varphi(t) \end{cases} (t > -1)$ 确定, 且

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$, 其中 $\varphi(t)$ 具有二阶导数, 曲线 $y = \varphi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{3}{2e}$

在 $t=1$ 处相切, 求函数 $\varphi(t)$ 。

四 (本题 15 分) 设 $a_n > 0, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 证明:

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha \leq 1$, 且 $S_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散。

五 (本题 15 分) 设 L 是过原点, 方向为 (α, β, γ) (其中 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) 的直线,

均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ (其中 $0 < c < b < a$, 密度为 1) 绕 L 旋转。

(1) 求其转动惯量; (2) 求其转动惯量关于方向 (α, β, γ) 的最大值和最小值。

六 (本题 15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C

上，曲线积分 $\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$ 的值为常数。

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ ，证明： $\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = 0$

(2) 求函数 $\varphi(x)$ ；

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$ 。

第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案

一（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

1. 解：将 x_n 恒等变形得

$$\begin{aligned} x_n &= (1-a)(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^{2^n}) \frac{1}{1-a} \\ &= (1-a^2)(1+a^2)\dots(1+a^{2^n}) \frac{1}{1-a} \\ &= (1-a^4)(1+a^4)\dots(1+a^{2^n}) \frac{1}{1-a} = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} \end{aligned}$$

由于 $|a| < 1$ 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2^n} = 0$ ，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1-a}$

$$\begin{aligned} 2. \text{ 解：} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x e^{-1} \right]^x \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right] \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right] \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - 1 \right] \right) = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

3. 解： $\because s > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-sx} x^n = 0$,

$$I_n = -\frac{1}{s} \int_0^{+\infty} x^n de^{-sx} = -\frac{1}{s} \left[x^n e^{-sx} \Big|_0^{+\infty} - n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-sx} dx \right] = \frac{n}{s} I_{n-1}$$

$$\text{由此可得 } I_n = \frac{n}{s} I_{n-1} = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} I_{n-2} = \dots = \frac{n!}{s^n} I_0 = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$4. \text{ 解: } \because \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \therefore \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} f' \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^6} f'' \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{2x^2 - y^2}{r^5} f' \left(\frac{1}{r} \right),$$

$$\text{利用对称性可得 } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{r^4} f'' \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r^3} f' \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$5. \text{ 解: 直线 } l_1 \text{ 的对称式方程 } l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}, \text{ 记两直线的方向向量分别为}$$

$$\vec{l}_1 = (1, 1, 0), \vec{l}_2 = (4, -2, -1), \text{ 两直线上的定点分别为 } P_1(0, 0, 0), P_2(2, 1, 3),$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (2, 1, 3), \vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = (-1, 1, -6), \text{ 由向量的性质可知, 两直线的距离}$$

$$d = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{l}_1 \times \vec{l}_2)|}{|\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|} = \frac{|-2 + 1 - 18|}{\sqrt{1 + 1 + 36}} = \sqrt{\frac{19}{2}}$$

二（本题 15 分）证明：方法一：由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \alpha > 0$ 必有一个充分大的 $a > x_0$,

使得 $f'(a) > 0$. 由 $f''(x) > 0$ 得 $y=f(x)$ 是凹函数，从而 $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) (x > a)$ ，当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) \rightarrow +\infty$ ，

故存在 $b > a$ ，使得 $f(b) > f(a) + f'(a)(b-a) > 0$ (6 分)

同样，由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0$ ，必有 $c < x_0$ ，使得 $f'(c) < 0$ 。由 $y=f(x)$ 是凹函数，

从而 $f(x) > f(c) + f'(c)(x-c) (x < c)$ ，当 $x \rightarrow -\infty$ 时 $f(x) \rightarrow +\infty$ ，

故存在 $d < c$ ，使得 $f(d) > f(c) + f'(c)(d-c) > 0$ (10 分)

在 $[x_0, b]$ 和 $[d, x_0]$ 利用零点定理， $\exists x_1 \in (x_0, b), x_2 \in (d, x_0)$ 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ (12 分)

下面证明方程 $f(x)=0$ 在 \mathbb{R} 只有两个实根。

用反证法，假设方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有三个实根，不妨设为 x_1, x_2, x_3 且 $x_1 < x_2 < x_3$ ，对 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 和 $[x_2, x_3]$ 上分别应用罗尔定理，则各至少存在

一点 $\xi_1 (x_1 < \xi_1 < x_2)$ 和 $\xi_2 (x_2 < \xi_2 < x_3)$ ，使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ ，再将 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上使用罗尔定理，则至少存在一点 $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ ，使得 $f''(\eta) = 0$ ，此与条件 $f''(x) > 0$ 矛盾，从而方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不多于两个根，所以，方程 $f(x) = 0$ 在 \mathbb{R} 只有两个实根。..... (15 分)

方法二.先证方程 $f(x) = 0$ 至少有两个实根，

由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0$ ，必有一个充分大的 $a > x_0$ 使得 $f'(a) > 0$ ，因 $f(x)$ 具有二

阶连续导数，故 $f'(x), f''(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上均连续，由拉格朗日中值定理，对于

$$x > a \text{ 有 } f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

$$= f'(\xi)(x-a) - f'(a)(x-a) = [f'(\xi) - f'(a)](x-a)$$

$$= f''(\eta)(\xi-a)(x-a), \text{ 其中 } a < \eta < \xi < x, \text{ 又 } f''(\eta) > 0, \text{ 则}$$

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a), (x > a)$$

又因 $f'(a) > 0$ ，故存在 $b > a$ 使得 $f(b) > f(a) + f'(a)(b-a)$ (6 分)

又已知 $f(x_0) < 0$ ，由连续函数的介值定理，至少存在一点 $x_1 \in (x_0, b)$ 使得 $f(x_1) = 0$ ，即方程 $f(x) = 0$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上至少有一根 x_1 。..... (7 分)

同理可证方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上至少有一根 x_2 。..... (12 分)

下面证方程 $f(x) = 0$ 在 \mathbb{R} 只有两个实根（以下方法同上）。..... (15 分)

$$\text{三. (本题 15 分) 解: } \because \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{2+2t}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{2+2t} \cdot \frac{(2+2t)\varphi''(t) - 2\varphi'(t)}{(2+2t)^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{(1+t)\varphi''(t) - \varphi'(t)}{4(1+t)^3} = \frac{3}{4(1+t)}, \therefore (1+t)\varphi''(t) - \varphi'(t) = 3(1+t)^2$$

$$\text{即 } \varphi''(t) - \frac{1}{1+t}\varphi'(t) = 3(1+t),$$

$$\text{解得 } \varphi'(t) = e^{\int \frac{dt}{1+t}} \left[\int 3(1+t)e^{-\int \frac{dt}{1+t}} + c_1 \right] = (1+t)(3t + c_1) \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{由曲线 } y = \varphi(t) \text{ 与 } y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{3}{2e} \text{ 在 } t=1 \text{ 处相切得 } \varphi(1) = \frac{3}{2e}, \varphi'(1) = \frac{2}{e},$$

$$\therefore c_1 = \frac{1}{e} - 3, \varphi(t) = \int (3t^2 + (3+c_1)t + c_1) dt = t^3 + \frac{3+c_1}{2}t^2 + c_1t + c_2,$$

由 $\varphi(1) = \frac{3}{2e}$ 得 $c_2 = 2$ ，于是 $\varphi(t) = t^3 + \frac{1}{2e}t^2 + \left(\frac{1}{e} - 3\right)t + 2 (t > -1)$ (15 分)

四 (本题 15 分) 证明: (1) 令 $f(x) = x^{1-\alpha}$, $x \in [S_{n-1}, S_n]$, 将 $f(x)$ 在区间 $[S_{n-1}, S_n]$ 上应用拉格朗日中值定理得:

$$\exists \xi \in (S_{n-1}, S_n) \text{ 使得 } f(S_n) - f(S_{n-1}) = f'(\xi)(S_n - S_{n-1}),$$

$$\text{即 } S_n^{1-\alpha} - S_{n-1}^{1-\alpha} = (1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$(1) \text{ 当 } \alpha > 1 \text{ 时 } \frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} = (\alpha-1) \frac{a_n}{\xi^\alpha} \geq (\alpha-1) \frac{a_n}{S_n^\alpha}, \text{ 显然 } \left\{ \frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} \right\}$$

的前 n 项和有界, 从而收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛。..... (8 分)

(2) 当 $\alpha = 1$ 时, 因为 $a_n > 0, S_n$ 单调递增, 所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}, \text{ 因为 } S_n \rightarrow +\infty \text{ 对任意 } n,$$

$$\text{当 } p \in N, \frac{S_n}{S_{n+p}} < \frac{1}{2}, \text{ 从而 } \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{2}, \text{ 所以级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} \text{ 发散。} \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

$$\text{当 } \alpha < 1 \text{ 时 } \frac{a_n}{S_n^\alpha} \geq \frac{a_n}{S_n}, \text{ 由 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} \text{ 发散及比较判别法得 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha} \text{ 发散。} \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$

五 (本题 15 分) 解: (1) 设旋转轴 L 的方向向量为 $\vec{l} = (\alpha, \beta, \gamma)$, 椭球内任意一点

$P(x, y, z)$ 的径向量为 \vec{r} , 则点 P 到旋转轴 L 的距离的平方为

$$\begin{aligned} d^2 &= \vec{r}^2 - (\vec{r} \cdot \vec{l})^2 \\ &= (1-\alpha^2)x^2 + (1-\beta^2)y^2 + (1-\gamma^2)z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz \end{aligned}$$

由积分区域的对称性可知 $\iiint_{\Omega} (2\alpha\beta xy + 2\alpha\gamma xz + 2\beta\gamma yz) dV = 0$,

$$\text{其中 } \Omega = \left\{ (x, y, z) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right. \right\} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{而 } \iiint_{\Omega} x^2 dV = \int_{-a}^a x^2 dx \iint_{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2}} dy dz = \pi bc \int_{-a}^a x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{15} a^3 bc \pi$$

$$(\text{或 } \iiint_{\Omega} x^2 dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 a^3 bcr^4 \sin^3 \varphi \cos^2 \theta dr = \frac{4}{15} a^3 bc \pi)$$

对结果进行轮换得到 $\iiint_{\Omega} y^2 dV = \frac{4}{15} ab^3 c \pi, \iiint_{\Omega} z^2 dV = \frac{4}{15} abc^3 \pi \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

所以，转动惯量为

$$J = \iiint_{\Omega} d^2 dV = \frac{4abc\pi}{15} \left[(1-\alpha^2)a^2 + (1-\beta^2)b^2 + (1-\gamma^2)c^2 \right] \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

(2) 考虑目标函数 $F(\alpha, \beta, \gamma) = (1-\alpha^2)a^2 + (1-\beta^2)b^2 + (1-\gamma^2)c^2$ 在约束条件 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ 下的条件极值。

设拉格朗日函数为

$$G(\alpha, \beta, \gamma) = (1-\alpha^2)a^2 + (1-\beta^2)b^2 + (1-\gamma^2)c^2 + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1)$$

$$\text{由} \begin{cases} G'_\alpha = -2a^2\alpha + 2\lambda\alpha = 0 \\ G'_\beta = -2b^2\beta + 2\lambda\beta = 0 \\ G'_\gamma = -2c^2\gamma + 2\lambda\gamma = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

解得极值点 $Q_1(\pm 1, 0, 0), Q_2(0, \pm 1, 0), Q_3(0, 0, \pm 1) \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

比较可知，绕 z 轴（短轴）的转动惯量最大，为 $J_{\max} = \frac{4abc\pi}{15} (a^2 + b^2)$ ；

绕 x 轴（长轴）的转动惯量最小，为 $J_{\min} = \frac{4abc\pi}{15} (b^2 + c^2)$ 。..... (15 分)

六（本题 15 分）解：(1) 设 $I = \oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$ ，闭曲线 L 由 $L_i (i=1, 2)$ 组成，

设 L_0 为不经过原点的光滑曲线，使得 $L_0 \cup L_1^-$ （其中 L_1^- 为 L_1 的反向曲线）和 $L_0 \cup L_2$ 分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线 $C_i (i=1, 2)$ 。由曲线积分的性质和题设条件：

$$\oint_L \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = \int_{L_1} + \int_{L_2} \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$= \int_{L_2} + \int_{L_0} - \int_{L_0} - \int_{L_1^-} \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} = I - I = 0$$

(2) 设 $P = \frac{2xy}{x^4 + y^2}, Q = \frac{\varphi(x)}{x^4 + y^2}$ ，由题意得 $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$

$$\text{即 } \frac{\varphi'(x)(x^4 + y^2) - 4x^3\varphi(x)}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{2x^5 - 2xy^2}{(x^4 + y^2)^2}, \text{ 解得 } \varphi(x) = -x^2 \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

(3) 设 D 为正向闭曲线 $C_a: x^4 + y^2 = 1$ 所围区域,

$$\text{由 (1) 得 } I = \oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = \oint_{C_a} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2} = \oint_{C_a} 2xydx - x^2dy$$

$$\text{由格林公式和对称性得 } I = \iint_D (-4x) dxdy = 0 \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$

第二届中国大学生数学竞赛决赛试卷（非数学类，2011）

考试形式：闭卷 考试时间：150 分钟 满分：100 分 试卷难度系数：0.45

一. 计算下列各题（本题共 3 小题，每小题各 5 分，共 15 分，要求写出重要步骤。）

$$(1) \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}};$$

$$(2) \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right);$$

$$(3) \text{ 已知 } \begin{cases} x = \ln(1 + e^{2t}) \\ y = t - \arctan e^t \end{cases}, \text{ 求 } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

二. (本题 10 分) 求方程 $(2x + y - 4)dx + (x + y - 1)dy = 0$ 的通解。

三. (本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0), f'(0), f''(0)$ 均不为 0，证明：存在唯一一组实数 k_1, k_2, k_3 ，使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0.$$

四. (本题 17 分) 设 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 其中 $a > b > c > 0$, $\Sigma_2: z^2 = x^2 + y^2$,

Γ 为 Σ_1 与 Σ_2 的交线，求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值。

五. (本题 16 分) 已知 S 是空间曲线 $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成的椭球面的上半部分

($z \geq 0$) 取上侧， Π 是 S 在 $P(x, y, z)$ 点处的切平面， $\rho(x, y, z)$ 是原点到切平

面 Π 的距离, λ, μ, ν 表示 S 的正法向的方向余弦。计算:

$$(1) \iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS; (2) \iint_S z(\lambda x + 3\mu y + \nu z) dS$$

六. (本题 12 分) 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 内的可微函数, 且 $|f'(x)| < mf(x)$, 其中

$0 < m < 1$, 任取实数 a_0 , 定义 $a_n = \ln f(a_{n-1}), n = 1, 2, \dots$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$

绝对收敛。

七. (本题 15 分) 是否存在区间 $[0, 2]$ 上的连续可微函数 $f(x)$, 满足 $f(0) = f(2) = 1$,

$|f'(x)| \leq 1, \left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq 1$? 请说明理由。

第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案

一. 计算下列各题 (本题共 3 小题, 每小题各 5 分, 共 15 分, 要求写出重要步骤。)

(1) 解: 方法一 (用两个重要极限):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)^{\frac{x}{\sin x - x} \cdot \frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\frac{1}{2}x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{3}{2}x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{3}{2}x^2}} = e^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

方法二 (取对数):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)}{1 - \cos x} \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{\frac{1}{2}x^2} \right] \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\frac{1}{2}x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{3}{2}x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{3}{2}x^2}} = e^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(2) 解: 方法一 (用欧拉公式) 令 $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$

由欧拉公式得 $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n = C + o(1)$,

$$\text{则 } 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2n = C + o(1),$$

其中, $o(1)$ 表示 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小量,

$$\therefore \text{两式相减, 得: } x_n - \ln 2 = o(1), \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ln 2.$$

方法二 (用定积分的定义)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$$

$$(3) \text{ 解: } \frac{dx}{dt} = \frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}, \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{e^t}{1+e^{2t}} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{e^t}{1+e^{2t}}}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}} = \frac{e^{2t} - e^t + 1}{2e^{2t}}$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t - 2}{2e^{2t}} \cdot \frac{1+e^{2t}}{2e^{2t}} = \frac{(1+e^{2t})(e^t - 2)}{4e^{4t}}$$

二. (本题 10 分) 解: 设 $P = 2x + y - 4, Q = x + y - 1$, 则 $Pdx + Qdy = 0$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \therefore Pdx + Qdy = 0 \text{ 是一个全微分方程, 设 } dz = Pdx + Qdy$$

方法一: 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = P = 2x + y - 4$ 得

$$z = \int (2x + y - 4) dx = x^2 + xy - 4x + C(y)$$

$$\text{由 } \frac{\partial z}{\partial y} = x + C'(y) = Q = x + y - 1 \text{ 得 } C'(y) = y - 1, \therefore C(y) = \frac{1}{2}y^2 - y + c$$

$$\therefore z = x^2 + xy - 4x + \frac{1}{2}y^2 - y + c$$

$$\text{方法二: } z = \int dz = \int Pdx + Qdy = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x + y - 4) dx + (x + y - 1) dy$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \therefore \text{该曲线积分与路径无关}$$

$$\therefore z = \int_0^x (2x - 4) dx + \int_0^y (x + y - 1) dy = x^2 - 4x + xy + \frac{1}{2}y^2 - y$$

三. (本题 15 分)

证明：由极限的存在性： $\lim_{h \rightarrow 0} [k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)] = 0$

即 $[k_1 + k_2 + k_3 - 1]f(0) = 0$ ，又 $f(0) \neq 0$ ， $\therefore k_1 + k_2 + k_3 = 1$ ①

由洛比达法则得

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_1 f'(h) + 2k_2 f'(2h) + 3k_3 f'(3h)}{2h} = 0 \end{aligned}$$

由极限的存在性得 $\lim_{h \rightarrow 0} [k_1 f'(h) + 2k_2 f'(2h) + 3k_3 f'(3h)] = 0$

即 $(k_1 + 2k_2 + 3k_3)f'(0) = 0$ ，又 $f'(0) \neq 0$ ， $\therefore k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0$ ②

再次使用洛比达法则得

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_1 f'(h) + 2k_2 f'(2h) + 3k_3 f'(3h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_1 f''(h) + 4k_2 f''(2h) + 9k_3 f''(3h)}{2} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore (k_1 + 4k_2 + 9k_3)f''(0) = 0 \because f''(0) \neq 0$

$\therefore k_1 + 4k_2 + 9k_3 = 0$ ③

由①②③得 k_1, k_2, k_3 是齐次线性方程组 $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_1 + 4k_2 + 9k_3 = 0 \end{cases}$ 的解

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，则 $Ax = b$ ，

增广矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，则 $R(A, b) = R(A) = 3$

所以，方程 $Ax = b$ 有唯一解，即存在唯一一组实数 k_1, k_2, k_3 满足题意，

且 $k_1 = 3, k_2 = -3, k_3 = 1$ 。

四.(本题 17 分)解: 设 Γ 上任一点 $M(x, y, z)$ ，令 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ ，

则 $F'_x = \frac{2x}{a^2}, F'_y = \frac{2y}{b^2}, F'_z = \frac{2z}{c^2}$, \therefore 椭球面 Σ_1 在 Γ 上点 M 处的法向量为:

$\vec{n} = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right)$, $\therefore \Sigma_1$ 在点 M 处的切平面为 Π :

$$\frac{x}{a^2}(X-x) + \frac{y}{b^2}(Y-y) + \frac{z}{c^2}(Z-z) = 0$$

原点到平面 Π 的距离为 $d = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$, 令 $G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$,

$$\text{则 } d = \frac{1}{\sqrt{G(x, y, z)}},$$

现在求 $G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$, 在条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z^2 = x^2 + y^2$ 下的条件极值,

$$\text{令 } H(x, y, z) = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} + \lambda_1 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) + \lambda_2 (x^2 + y^2 - z^2)$$

则由拉格朗日乘数法得:

$$\begin{cases} H'_x = \frac{2x}{a^4} + \lambda_1 \frac{2x}{a^2} + 2\lambda_2 x = 0 \\ H'_y = \frac{2y}{b^4} + \lambda_1 \frac{2y}{b^2} + 2\lambda_2 y = 0 \\ H'_z = \frac{2z}{c^4} + \lambda_1 \frac{2z}{c^2} - 2\lambda_2 z = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = z^2 = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x^2 = z^2 = \frac{a^2 c^2}{a^2 + c^2} \\ y = 0 \end{cases},$$

$$\text{对应此时的 } G(x, y, z) = \frac{b^4 + c^4}{b^2 c^2 (b^2 + c^2)} \text{ 或 } G(x, y, z) = \frac{a^4 + c^4}{a^2 c^2 (a^2 + c^2)}$$

$$\text{此时的 } d_1 = bc\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b^4 + c^4}} \text{ 或 } d_2 = ac\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^4 + c^4}}$$

又因为 $a > b > c > 0$ ，则 $d_1 < d_2$

所以，椭圆面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值分别为：

$$d_2 = ac\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^4 + c^4}}, \quad d_1 = bc\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b^4 + c^4}}$$

五. (本题 16 分) 解: (1) 由题意得: 椭圆面 S 的方程为 $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1 (z \geq 0)$

令 $F = x^2 + 3y^2 + z^2 - 1$, 则 $F'_x = 2x, F'_y = 6y, F'_z = 2z$,

切平面 Π 的法向量为 $\vec{n} = (x, 3y, z)$,

Π 的方程为 $x(X - x) + 3y(Y - y) + z(Z - z) = 0$,

原点到切平面 Π 的距离为 $\rho(x, y, z) = \frac{x^2 + 3y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + 9y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9y^2 + z^2}}$

$$\therefore I_1 = \iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS = \iint_S z\sqrt{x^2 + 9y^2 + z^2} dS$$

将一型曲面积分转化为二重积分得: 记 $D_{xz}: x^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0$

$$\begin{aligned} \therefore I_1 &= 4 \iint_{D_{xz}} \frac{z[3 - 2(x^2 + z^2)]}{\sqrt{3(1 - x^2 - z^2)}} dx dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^1 \frac{r^2(3 - 2r^2)}{\sqrt{3(1 - r^2)}} dr \\ &= 4 \int_0^1 \frac{r^2(3 - 2r^2)}{\sqrt{3(1 - r^2)}} dr = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta (3 - 2\sin^2 \theta)}{\sqrt{3}} d\theta \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \end{aligned}$$

$$(2) \text{方法一: } \lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9y^2 + z^2}}, \mu = \frac{3y}{\sqrt{x^2 + 9y^2 + z^2}}, \nu = \frac{z}{\sqrt{x^2 + 9y^2 + z^2}}$$

$$\therefore I_2 = \iint_S z(\lambda x + 3\mu y + \nu z) dS = \iint_S z\sqrt{x^2 + 9y^2 + z^2} dS = I_1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

方法二 (将一型曲面积分转化为二型):

$$I_2 = \iint_S z(\lambda x + 3\mu y + \nu z) dS = \iint_S xz dy dz + 3yz dz dx + z^2 dx dy$$

记 $\Sigma: z=0, x^2+3y^2 \leq 1, \Omega: x^2+3y^2+z^2 \leq 1 (z \geq 0)$ ，取面 Σ 向下， Ω 向外，

由高斯公式得：
$$I_2 + \iiint_{\Sigma} xzdydz + 3yzdzdx + z^2dxdy = \iiint_{\Omega} 6zdV$$

$\therefore I_2 = \iiint_{\Omega} 6zdV$ ，求该三重积分的方法很多，现给出如下几种常见方法：

$$\textcircled{1} \text{ 先一后二: } I_2 = 6 \iint_{x^2+3y^2 \leq 1} d\sigma \int_0^{\sqrt{1-x^2-3y^2}} zdz = 3 \iint_{x^2+3y^2 \leq 1} (1-x^2-3y^2) d\sigma$$

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3}} r(1-r^2) dr = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ 先二后一: } I_2 = 6 \int_0^1 zdz \iint_{x^2+3y^2 \leq 1-z^2} d\sigma = \frac{6}{\sqrt{3}} \pi \int_0^1 z(1-z^2) dz = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

$$\textcircled{3} \text{ 广义极坐标代换: } I_2 = \frac{24}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^3 \sin^2 \varphi dr = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

六. (本题 12 分) 证明： $a_n - a_{n-1} = \ln f(a_{n-1}) - \ln f(a_{n-2})$

由拉格朗日中值定理得： $\exists \xi$ 介于 a_{n-1}, a_{n-2} 之间，使得

$$\ln f(a_{n-1}) - \ln f(a_{n-2}) = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} (a_{n-1} - a_{n-2})$$

$$\therefore |a_n - a_{n-1}| = \left| \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} (a_{n-1} - a_{n-2}) \right|, \text{ 又 } |f'(\xi)| < mf(\xi) \text{ 得 } \left| \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \right| < m$$

$$\therefore |a_n - a_{n-1}| < m |a_{n-1} - a_{n-2}| < \dots < m^{n-1} |a_1 - a_0| \because 0 < m < 1$$

$$\therefore \text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} m^{n-1} |a_1 - a_0| \text{ 收敛, } \therefore \text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| \text{ 收敛,}$$

$$\text{即 } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) \text{ 绝对收敛.}$$

七. (本题 15 分) 解：假设存在，当 $x \in [0, 1]$ 时，由拉格朗日中值定理得：

$$\exists \xi_1 \text{ 介于 } 0, x \text{ 之间, 使得 } f(x) = f(0) + f'(\xi_1)x,$$

同理，当 $x \in [1, 2]$ 时，由拉格朗日中值定理得：

$$\exists \xi_2 \text{ 介于 } x, 2 \text{ 之间, 使得 } f(x) = f(2) + f'(\xi_2)(x-2)$$

$$\text{即 } f(x) = 1 + f'(\xi_1)x, x \in [0, 1]; f(x) = 1 + f'(\xi_2)(x-2), x \in [1, 2]$$

$$\therefore -1 \leq f'(x) \leq 1,$$

$$\therefore 1-x \leq f(x) \leq 1+x, x \in [0,1]; x-1 \leq f(x) \leq 3-x, x \in [1,2]$$

$$\text{显然, } f(x) \geq 0, \int_0^2 f(x) dx \geq 0$$

$$1 \leq \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx \leq \int_0^2 f(x) dx \leq \int_0^1 (1+x) dx + \int_1^2 (3-x) dx = 3$$

$$\therefore \left| \int_0^2 f(x) dx \right| \geq 1, \text{ 又由题意得 } \left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq 1, \therefore \left| \int_0^2 f(x) dx \right| = 1$$

$$\text{即 } \int_0^2 f(x) dx = 1, \therefore f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0,1] \\ x-1, & x \in [1,2] \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x-1} = -1$$

$\therefore f'(1)$ 不存在, 又因为 $f(x)$ 是在区间 $[0,2]$ 上的连续可微函数, 即 $f'(1)$ 存在, 矛盾故, 原假设不成立, 所以, 不存在满足题意的函数 $f(x)$ 。