第49卷第4期 数 学 进 展 Vol. 49, No. 4
2020年7月 ADVANCES IN MATHEMATICS (CHINA) July, 2020

doi: 10.11845/sxjz.2019065b

正则型 Sturm-Liouville 微分算子特征值关于边界条件的连续依赖性

杨昕雅

(陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安, 陕西, 710119)

摘要: 本文以隐函数存在定理为主要工具, 重新研究 Sturm-Liouville 微分算子特征值关于边界条件参数的连续依赖性问题. 我们不仅给出了该结果一个简单的新证明, 而且明确地呈现了第 n 个特征值关于边界条件参数的导数, 进而得到了在实耦合型边界条件下二重特征值产生的位置及个数的新结果.

关键词: 正则 Sturm-Liouville 算子; 特征值; 隐函数存在定理
MSC(2020) 主题分类: 34B24; 34L05 / **中图分类:** O175.3
文献标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2020)04-0443-10

0 引言

数学物理中许多问题都能归结为确定微分算子的特征值和特征函数的问题. 因此, 微分算子的谱理论一直吸引人们的极大注意. 近年来, Kong, Wu 和 Zettl 等人在一系列文章 [6–11] 中考虑正则 Sturm-Liouville (S-L) 微分算子的特征值关于边界、边界条件、系数函数的扰动问题. 他们视特征值为这些参数之一的一元函数, 分析得到该函数是连续的, 且导数几乎处处存在, 并给出了导函数. 这些结果在谱理论和特征值的数值计算方面都具有重要的应用价值, 参见文 [1–2, 4, 13, 15] 及其参考文献. 特别地, 利用特征值关于边界的连续变化关系, 能实现特征值逼近连续谱的结果 [1−2, 4, 15]; 利用特征值关于边界条件的单调连续性, 能建立不定与定型 S-L 算子之间的特征值不等式 [13].

本文以隐函数存在定理为主要工具, 研究 S-L 算子特征值关于边界条件的连续依赖关系. 该研究不仅给出了上述结果一个简单的新证明, 而且更明确地呈现了第 n 个特征值关于边界条件参数的导数; 进而得到了在实耦合型边界条件下二重特征值产生的位置及个数的新结果. 我们的方法建立在已有的特征值不等式基础上, 即: 分离型边界条件对应的任一特征值介于两个 Dirichlet 特征值之间 [14]; 耦合型边界条件对应的任一特征值介于两个分离型边界条件所对应的特征值之间 [5], 这些不等式提供了隐函数存在定理的应用平台. 事实上, 这也是解决特征值关于边界、系数函数等参数连续依赖关系的一个简明有效的途径. 另外, 由于实耦合型边界条件所对应的特征值可能会出现重特征值, 所以甄别重特征值产生的位置显得尤为重要. 利用本文的方法可以有效地解决这一问题.

本文安排如下: 第 1 节阐述了 S-L 算子的基本概念及后文需要的两个引理. 第 2 节考虑分离型边界条件对应的第 n 个特征值关于边界条件的连续依赖问题. 第 3 节考虑耦合型边界条件

收稿日期: 2019-06-10. 录用日期: 2020-04-21.
基金项目: 国家自然科学基金 (No. 11571212).
E-mail: yangxinya@snnu.edu.cn

对应的同一问题, 并分析了二重特征值产生的位置及个数.

1 预备知识

考虑定义在闭区间 $[0,1]$ 上的正则 S-L 微分算子 [3]

$$Ly =: \frac{1}{r(x)}[-(p(x)y')' + q(x)y], \quad y \in \mathfrak{D}(L), \tag{1.1}$$

$$\mathfrak{D}(L) = \{y \in L_r^2[0,1] \,|\, y, y^{[1]} \in \mathrm{AC}[0,1],\, Ly \in L_r^2[0,1],\, y \text{ 满足下述 } (1.3) \text{ 或 } (1.5)\},$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 为谱参数, $y^{[1]} = (py')(x)$ 为函数 y 的拟导数, $L_r^2[0,1]$ 表示 $[0,1]$ 上加权 r 的 L^2 函数空间, $\mathrm{AC}[0,1]$ 表示 $[0,1]$ 上绝对连续的函数集, 系数 p, q, r 均为实值的, 且满足下列条件

$$\frac{1}{p}, q, r \in L^1[0,1], \quad p(x), r(x) > 0 \ \text{ a.e. } x \in [0,1]. \tag{1.2}$$

我们考虑微分算子 L 基于两类自伴边界条件 —— 分离型和耦合型边界条件的情形, 参见下述 (1.3) 和 (1.5).

(i) 分离型边界条件:

$$\begin{cases} y^{[1]}(0) - h_- y(0) = 0, \\ y^{[1]}(1) + h_+ y(1) = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中, 当 $h_- = \infty$, $h_+ = \infty$ 时, (1.3) 式为 Dirichlet 条件. 熟知, 基于 (1.3) 式算子 L 的谱由特征值组成, 它是单重的和下半有界的, 可以按以下顺序排列:

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \to +\infty. \tag{1.4}$$

另外, 第 n 个特征值 λ_n 对应的特征函数 $u(x,\lambda_n)$ 在定义区间 $(0,1)$ 内恰有 n 个零点, 参见 [15, p. 73].

(ii) 耦合型边界条件:

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y^{[1]}(1) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} K \begin{pmatrix} y(0) \\ y^{[1]}(0) \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

其中 K 满足 $K = (k_{ij})_{2\times 2}$, $k_{ij} \in \mathbb{R}$, $|K| = 1$, $\theta \in (-\pi, \pi)$. S-L 算子 (1.1) 和 (1.5) 的谱由至多二重且下半有界的实特征值组成, 可以按以下顺序排列:

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots \to +\infty,$$

上式中不可能连续出现两个等号. 特别地, 若 $\theta \ne 0$, 则特征值是单重的, 参见 [15, p. 72].

考虑分离型边界条件对应算子 L 的特征值 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, 第 n 个特征值 λ_n 是关于 h_-, h_+ 的二元实值函数. 若固定 $h_- \in \mathbb{R}$, 则 λ_n 为关于自变量 $h_+ \in \mathbb{R}$ 的一元实值函数. 本文的目标在于考虑函数 $\lambda_n = \lambda_n(h_+)$ 的连续可微性. 同样地, 可以考虑 $\lambda_n = \lambda_n(h_-)$ 的情况. 为记号简单, 以下用 $\lambda_n^D(h_\pm)$ 表示 $h_\pm$ 固定、$h_\mp$ 的 Dirichlet 特征值. 关于 $\lambda_n = \lambda_n(h_-, h_+)$ 有如下不等关系.

引理 1.1[14] 设 $h_-, h_+ \in \mathbb{R}$, 则下述不等式成立:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{n-1}^D(h_+) \\ \lambda_{n-1}^D(h_-) \end{pmatrix} < \lambda_n(h_-, h_+) < \begin{pmatrix} \lambda_n^D(h_+) \\ \lambda_n^D(h_-) \end{pmatrix}.$$

对于耦合型边界条件, 第 n 个特征值 λ_n 能看作 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}K$ 的函数, 即 $\lambda_n=\lambda_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}K)$, 它满足如下不等关系.

引理 1.2[5]　设 $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\nu_n\}_{n=0}^{\infty}$ 分别是赋予算子 L 分离型边界条件

$$\begin{aligned}&y(0)=0,\quad k_{22}y(1)-k_{12}y^{[1]}(1)=0,\\&y^{[1]}(0)=0,\quad k_{21}y(1)-k_{11}y^{[1]}(1)=0\end{aligned}$$

的特征值, 则

(1) 当 $k_{11}>0$, $k_{12}<0$ 时, 对于任意的 $\theta\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$, 有下列不等式:

$$\begin{aligned}\nu_0\le\lambda_0(K)&<\lambda_0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}K)<\lambda_0(-K)\le\{\mu_0,\nu_1\}\\&\le\lambda_1(-K)<\lambda_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}K)<\lambda_1(K)\le\{\mu_1,\nu_2\}\\&\le\lambda_2(K)<\lambda_2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}K)<\lambda_2(-K)\le\{\mu_2,\nu_3\}\\&\le\lambda_3(-K)<\lambda_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}K)<\lambda_3(K)\le\{\mu_3,\nu_4\}\le\cdots;\end{aligned}$$

(2) 当 $k_{11}\le 0$, $k_{12}<0$ 时, 对于任意的 $\theta\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$, 有下列不等式:

$$\begin{aligned}\lambda_0(K)&<\lambda_0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}K)<\lambda_0(-K)\le\{\mu_0,\nu_0\}\\&\le\lambda_1(-K)<\lambda_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}K)<\lambda_1(K)\le\{\mu_1,\nu_1\}\\&\le\lambda_2(K)<\lambda_2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}K)<\lambda_2(-K)\le\{\mu_2,\nu_2\}\\&\le\lambda_3(-K)<\lambda_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}K)<\lambda_3(K)\le\{\mu_3,\nu_3\}\le\cdots;\end{aligned}$$

(3) 若 K 不属于情形 (1) 和 (2), 则 $-K$ 一定属于情形 (1) 或 (2).

特征值关于边界条件参数的函数是一个多值函数. 为了实现本文的目标, 利用引理 1.1 和引理 1.2 中的不等式将 $\mathbb{R}$ 进行区间划分, 在划分小区间上考虑边界条件参数对应第 n 个特征值的生成函数, 这为隐函数存在定理的应用提供了必要准备. 下面针对两种自伴边界条件, 以隐函数存在定理为工具, 给出第 n 个特征值关于边界条件的连续依赖关系及相应的导数.

2 分离型边界条件

本节考虑分离型边界条件 (1.3) 对应的第 n 个特征值关于参数 h_- 或 h_+ 的连续依赖关系. 对于 $h_-,h_+\in\mathbb{R}$, 设 $\varphi(x,\lambda)$ 和 $\psi(x,\lambda)$ 分别是 S-L 微分方程

$$Ly=\lambda y \tag{2.1}$$

满足初始条件 $\varphi(0,\lambda)=1$, $\varphi^{[1]}(0,\lambda)=h_-$ 和 $\psi(1,\lambda)=-1$, $\psi^{[1]}(1,\lambda)=h_+$ 的解. 对任意的 $x\in[0,1]$, 已知 $\varphi(x,\lambda)$ 和 $\psi(x,\lambda)$ 是关于 λ 的整函数. 根据 Liouville 公式, φ,ψ 的 Wronski 行列式

$$w(x,\lambda)=W(\varphi,\psi)=\begin{vmatrix}\varphi(x,\lambda)&\psi(x,\lambda)\\\varphi^{[1]}(x,\lambda)&\psi^{[1]}(x,\lambda)\end{vmatrix}$$

是与 x 无关的函数, 将 $w(x,\lambda)$ 记作 $w(x)$. 将 $x=0,1$ 代入 φ 和 ψ 的 Wronski 行列式可得

$$w(\lambda)=\psi^{[1]}(0,\lambda)-h_-\psi(0,\lambda)=\varphi^{[1]}(1,\lambda)+h_+\varphi(1,\lambda).$$

容易验证 λ_0 是 S-L 算子 (1.1) 和 (1.3) 的特征值的充要条件是 λ_0 是整函数 $w(\lambda)$ 的零点.

引理 2.1 记 $\varphi_n = \varphi(x, \lambda_n)$, $\psi_n = \psi(x, \lambda_n)$, 则

$$\dot{w}(\lambda_n) = -\frac{(\varphi_n, \varphi_n)}{\varphi(1, \lambda_n)} = \frac{(\psi_n, \psi_n)}{\psi(0, \lambda_n)} \neq 0, \tag{2.2}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\lambda} = \dot{w}(\lambda)$, $(\varphi_n, \varphi_n) = \int_0^1 |\varphi(x, \lambda_n)|^2 r(x) \mathrm{d}x$.

证明 对 $L\varphi_n = \lambda\varphi_n$ 两边关于 λ 求导得 $L\dot{\varphi}_n = \lambda\dot{\varphi}_n + \varphi_n$, 其中 $\frac{\mathrm{d}\varphi_n}{\mathrm{d}\lambda} =: \dot{\varphi}_n$. 对 $\dot{\varphi}_n, \varphi_n$ 在 $[0,1]$ 上应用 Green 公式

$$(L\dot{\varphi}_n, \varphi_n) - (\dot{\varphi}_n, L\varphi_n) = [\dot{\varphi}_n \overline{\varphi}_n]_0^1,$$

化简得

$$(\varphi_n, \varphi_n) = -\dot{w}(\lambda_n)\varphi(1, \lambda_n).$$

由于 $\varphi(1, \lambda_n) \neq 0$ (否则根据初值解唯一性定理有 $\varphi(x, \lambda_n) \equiv 0$, 矛盾), 前一等式得证. 后一等式同理可证. 证毕. □

我们先固定边界条件参数 h_-, 研究第 n 个特征值关于参数 h_+ 的依赖关系.

定理 2.1 设参数 $h_- \in \mathbb{R}$ 固定, 则 $\lambda_n = \lambda_n(h_+)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是连续可微的, 且导数为

$$\lambda_n'(h_+) = \frac{|\varphi(1, \lambda_n)|^2}{(\varphi_n, \varphi_n)}. \tag{2.3}$$

证明 对任意 $h_- \in \mathbb{R}$, 根据引理 1.1, 对于 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 有不等式

$$\lambda_{n-1}^D(h_-) < \lambda_n(h_-, h_+) < \lambda_n^D(h_-),$$

其中 $\lambda_{-1}^D(h_-) = -\infty$. 考虑关于 h_+ 和 λ 的二元函数 $F: \mathbb{R} \times (\lambda_{n-1}^D(h_-), \lambda_n^D(h_-)) \to \mathbb{R}$,

$$F(h_+, \lambda) = \varphi^{[1]}(1, \lambda) + h_+\varphi(1, \lambda).$$

利用特征值的性质不难验证函数 $F(h_+, \lambda)$ 满足下列条件:

(1) 任给 $h_+^0 \in \mathbb{R}$, 在区间 $(\lambda_{n-1}^D(h_-), \lambda_n^D(h_-))$ 内必有 h_+^0 对应的特征值, 记为 λ_n^0, F 在以 $P_0(h_+^0, \lambda_n^0)$ 为内点的某一区域 $D \subset \mathbb{R} \times (\lambda_{n-1}^D(h_-), \lambda_n^D(h_-))$ 上连续;

(2) $F(h_+^0, \lambda_n^0) = 0$;

(3) $F_\lambda(h_+, \lambda) = \dot{\varphi}^{[1]}(1, \lambda) + h_+\dot{\varphi}(1, \lambda)$ 是连续的;

(4) $F_\lambda(h_+^0, \lambda_n^0) \neq 0$.

根据隐函数存在定理 [12], 方程 $F(h_+, \lambda) = 0$ 在点 P_0 的邻域 $U(P_0)$ 上唯一决定了一个定义在区间 $(h_+^0 - \delta, h_+^0 + \delta)$ 上的 (隐) 函数 $\lambda_n = \lambda_n(h_+)$, 使得当 $h_+ \in (h_+^0 - \delta, h_+^0 + \delta)$ 时, $(h_+, \lambda_n(h_+)) \in U(P_0)$ 且 $F(h_+, \lambda_n(h_+)) \equiv 0$, $\lambda_n(h_+^0) = \lambda_n^0$; $\lambda_n(h_+)$ 在 $(h_+^0 - \delta, h_+^0 + \delta)$ 上连续.

由于初始点 h_+^0 是在 $\mathbb{R}$ 上任意取的, 而且在 h_+^0 的邻域内确定的隐函数是唯一的, 在 $\mathbb{R}$ 上反复应用隐函数存在定理, 我们就得到了一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续 (隐) 函数 $\lambda_n = \lambda_n(h_+)$.

事实上, $F(h_+, \lambda)$ 还存在连续的偏导数 $F_{h_+}(h_+, \lambda) = \varphi(1, \lambda)$, 因而由方程 $F(h_+, \lambda) = 0$ 确定的隐函数 $\lambda_n = \lambda_n(h_+)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续导函数

$$\lambda_n'(h_+) = -\frac{F_{h_+}(h_+, \lambda_n)}{\dot{F}(h_+, \lambda_n)} = -\frac{F_{h_+}(h_+, \lambda_n)}{\dot{w}(\lambda_n)} = \frac{|\varphi(1, \lambda_n)|^2}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

定理获证. □

类似地, 固定参数 h_+, 我们得到第 n 个特征值关于参数 h_- 的依赖关系.

定理 2.2 设参数 $h_+ \in \mathbb{R}$ 固定, 则 $\lambda_n = \lambda_n(h_-)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是连续可微的, 且导数为

$$\lambda_n'(h_-) = \frac{|\psi(0,\lambda_n)|^2}{(\psi_n,\psi_n)}. \tag{2.4}$$

根据 (2.3)–(2.4), 有 $\lambda_n'(h_+), \lambda_n'(h_-) > 0$, 则 λ_n 分别关于 h_+, h_- 是严格单调递增的. 根据上述讨论, 我们得到第 n 个特征值连续光滑且严格单调递增地依赖于参数 h_+, h_-. 进一步, 从隐函数存在定理可以看出, 其导函数也是光滑的.

3 耦合型边界条件

对于耦合型边界条件, 在讨论其特征值关于边界条件的依赖关系之前, 我们先给出特征值函数. 设 $u_1(x,\lambda), u_2(x,\lambda)$ 是方程 (2.1) 的基本解, 即满足初始条件

$$(u_1(0,\lambda), u_1^{[1]}(0,\lambda)) = (1,0), \quad (u_2(0,\lambda), u_2^{[1]}(0,\lambda)) = (0,1).$$

由 [5, Lemma 2.1] 知,

$$\Delta(\lambda) =: (-k_{11}u_2^{[1]} + k_{12}u_1^{[1]} + k_{21}u_2 - k_{22}u_1)(1,\lambda) + 2\cos\theta \tag{3.1}$$

为 S-L 算子 (1.1) 和 (1.5) 的特征值函数, 即 λ_0 是 S-L 算子 (1.1) 和 (1.5) 的特征值的充分必要条件为: $\Delta(\lambda_0) = 0$.

引理 3.1 设 λ_n 是 S-L 算子 (1.1) 和 (1.5) 的第 n 个特征值, 则

$$\dot{\Delta}(\lambda_n) = (\varphi_n,\varphi_n)(-k_{12}u_2^{[1]} + k_{22}u_2)(1,\lambda_n), \tag{3.2}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\lambda} =: \dot{\Delta}(\lambda)$, $\varphi_n =: \varphi(x,\lambda_n) = u_1(x,\lambda_n) + d_n u_2(x,\lambda_n)$ 是第 n 个特征值 λ_n 对应的特征函数,

$$d_n = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}k_{11} - u_1}{u_2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}k_{12}}(1,\lambda_n). \tag{3.3}$$

证明 显然, $\frac{\mathrm{d}\varphi_n}{\mathrm{d}\lambda} =: \dot{\varphi}_n$ 是满足带有初始条件 $y(0,\lambda) = y^{[1]}(0,\lambda) = 0$ 的非齐次线性方程 $(L-\lambda)y = \varphi$ 的解. 利用常数变易法, 解得

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1(1,\lambda_n) &= (u_1,u_2)u_1(1,\lambda_n) - (u_1,u_1)u_2(1,\lambda_n),\\
\dot{u}_2(1,\lambda_n) &= (u_2,u_2)u_1(1,\lambda_n) - (u_1,u_2)u_2(1,\lambda_n),
\end{aligned}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\lambda} =: \dot{u}_i(1,\lambda)$, $\frac{\mathrm{d}u_i^{[1]}}{\mathrm{d}\lambda} =: \dot{u}_i^{[1]}(1,\lambda)$, $i = 1,2$. 于是,

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}(\lambda_n) &= (-k_{11}\dot{u}_2^{[1]} + k_{12}\dot{u}_1^{[1]} + k_{21}\dot{u}_2 - k_{22}\dot{u}_1)(1,\lambda_n)\\
&= (u_2,u_2)(-k_{11}u_1^{[1]} + k_{21}u_1)(1,\lambda_n) + (u_1,u_1)(-k_{12}u_2^{[1]} + k_{22}u_2)(1,\lambda_n)\\
&\quad + (u_1,u_2)(k_{11}u_2^{[1]} + k_{12}u_1^{[1]} - k_{21}u_2 - k_{22}u_1)(1,\lambda_n).
\end{aligned}$$

由于 φ_n 满足边界条件 (1.5), 我们得到齐次线性方程组

$$\begin{cases}
(u_1 + d_n u_2)(1,\lambda_n) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(k_{11} + k_{12}d_n),\\
(u_1^{[1]} + d_n u_2^{[1]})(1,\lambda_n) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(k_{21} + k_{22}d_n),
\end{cases}$$

解得

$$d_n = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} k_{11} - u_1}{u_2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} k_{12}}(1, \lambda_n) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} k_{21} - u_1^{[1]}}{u_2^{11} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} k_2}(1, \lambda_n).$$

利用上述关系化简算式

$$\begin{aligned}(-k_{11}u_1^{[1]} + k_{21}u_1)(1, \lambda_n) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}[-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}k_{11} - u_1)u_1^{[1]} + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}k_{21} - u_1^{[1]})u_1](1, \lambda_n) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} d_n[-(u_2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}k_{12})u_1^{[1]} + (u_2^{[1]} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}k_{22})u_1](1, \lambda_n) \\ &= d_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}[(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}k_{11} - u_1)u_2^{[1]} - (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}k_{21} - u_1^{[1]})u_2](1, \lambda_n) \\ &= |d_n|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}[(u_2 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}k_{12})u_2^{[1]} - (u_2^{[1]} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}k_{22})u_2](1, \lambda_n) \\ &= |d_n|^2(-k_{12}u_2^{[1]} + k_{22}u_2)(1, \lambda_n),\end{aligned}$$

类似地, 有

$$(k_{11}u_2^{[1]} + k_{12}u_1^{[1]} - k_{21}u_2 - k_{22}u_1)(1, \lambda_n) = 2\,\mathrm{Re}\, d_n(-k_{12}u_2^{[1]} + k_{22}u_2)(1, \lambda_n),$$

整理即得引理结论. □

基于引理 3.1, 类似于对分离型边界条件的处理, 可应用隐函数存在定理研究耦合型边界条件第 n 个特征值关于参数的依赖关系. 由于复耦合型边界条件的特征值是单重的, 实耦合型边界条件的特征值可能是二重的, 故分两节讨论.

3.1 复耦合型边界条件

首先考虑参数 $K = (k_{ij})_{2\times 2}$ 固定, θ 变化的情形.

定理 3.1 设参数 K 固定, 则 $\lambda_n = \lambda_n(\theta)$ 在 $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ 上是连续可微的, 且导数为

$$\lambda_n'(\theta) = \frac{-2\,\mathrm{Im}(\varphi\overline{\varphi}^{[1]})(1, \lambda_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}. \tag{3.4}$$

证明 不妨设 $k_{11} > 0$, $k_{12} \le 0$. 根据引理 1.2, 对于 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 有不等式

$$\max\{\mu_{n-1}, \nu_n\} < \lambda_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}K) < \min\{\mu_n, \nu_{n+1}\},$$

其中记 $\mu_{-1} = \nu_0$. 考虑定义在 $[(-\pi, 0) \cup (0, \pi)] \times (\max\{\mu_{n-1}, \nu_n\}, \min\{\mu_n, \nu_{n+1}\})$ 上的二元实值函数

$$F(\theta, \lambda) = (-k_{11}u_2^{[1]} + k_{12}u_1^{[1]} + k_{21}u_2 - k_{22}u_1)(1, \lambda) + 2\cos\theta.$$

类似于定理 2.1 即得结论. □

定理 2.1, 定理 2.2 及定理 3.1 给出了 [10, Theorem 4.2] 中特征值关于边界条件连续依赖关系的一个新证明. 除证明方法更简洁外, 我们还对特征值进行了标号处理, 所得特征值关于边界条件的导数也是连续的.

考虑参数 θ 固定, $K = (k_{ij})_{2\times 2}$ 变化的情形. 这里考虑 $k_{11} = k$, $k_{12} = k_{21} = 0$, $k_{22} = \frac{1}{k}$ $(k > 0)$ 的情形.

定理 3.2 设参数 θ 固定, 则 $\lambda_n = \lambda_n(k)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上是连续可微的, 且导数为

$$\lambda_n'(k) = \frac{2d_n}{k(\varphi_n, \varphi_n)}, \tag{3.5}$$

其中 d_n 如 (3.3) 式所述.

证明 记 F 是定义在 $\mathbb{R}_+ \times (\max\{\mu_{n-1}, \nu_n\}, \min\{\mu_n, \nu_{n+1}\})$ 上关于 k 和 λ 的二元实值函数:

$$F(k,\lambda) = 2\cos\theta - \left(ku_2^{[1]} + \frac{u_1}{k}\right)(1,\lambda).$$

类似于定理 2.1 即得结论. □

事实上, 利用隐函数存在定理, 第 n 个特征值关于一般情形的 $K = (k_{ij})_{2\times 2}$ 的依赖关系也不难得出.

3.2 实耦合型边界条件

与前面情形不同的是带有实耦合型边界条件的 S-L 算子 (1.1) 和 (1.5) 的特征值可能是二重的. 为使问题简化, 我们分析拟周期边界条件第 n 个特征值关于边界条件参数 k 的连续依赖关系. 考虑

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y^{[1]}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y^{[1]}(0) \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

不妨设 $k > 0$ (若不然, 考虑 $-K$ 即可), S-L 算子 (1.1) 和 (3.6) 的第 n 个特征值是关于 k 的一元函数.

本节不仅通过隐函数存在定理得到第 n 个特征值的生成函数 $\lambda_n = \lambda_n(k)$ 在单重特征值处的连续可微性及相应的导数, 并分析了 λ_n 在二重特征值处的连续可微性, 还基于已有结论引理 3.2 得到 λ_n 二重特征值产生的位置及个数的新结果.

引理 3.2[5] 算子 (1.1) 和 (3.6) 的特征值 λ 是二重的当且仅当 $\lambda = \mu_n = \nu_m$.

在 n 为奇数的情形下 (n 为偶数的情形是类似的), 根据引理 1.2, 有不等关系

$$\max\{\mu_{n-1}, \nu_n\} \leq \lambda_n(-k) < \lambda_n(k) \leq \min\{\mu_n, \nu_{n+1}\},$$

此时 $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{\nu_n\}_{n=0}^{\infty}$ 分别表示 Dirichlet 特征值和 Neumann 特征值. 根据引理 3.2, 第 n 个特征值 $\lambda_n = \lambda_n(k)$ 在参数 k 变化下出现二重特征值的必要前提是 $\mu_n = \nu_{n+1}$.

引理 3.3 若 $\mu_n = \nu_{n+1}$, 则以下三条相互等价:

(1) $u_1(1, \lambda_n(k)) = k$;

(2) $u_2(1, \lambda_n(k)) = 0$;

(3) $\lambda_n = \lambda_n(k)$ 是二重特征值.

证明 (1)⇒(2): 若 $u_1(1, \lambda_n(k)) = k$, 由于 $u_1(1, \lambda_n(k)) + d_n u_2(1, \lambda_n(k)) = \varphi(1, \lambda_n(k)) = k$, 则有 $d_n u_2(1, \lambda_n(k)) = 0$. 若 $u_2(1, \lambda_n(k)) = 0$, 结论已证; 若 $d_n = 0$, 此时特征函数 $\varphi_n = u_1$, 于是 u_1 满足边界条件 (3.6), 得到 $u_1^{[1]}(1, \lambda_n(k)) = 0$, 从而 $\lambda_n(k) = \nu_{n+1} = \mu_n$. 因此, $u_2(1, \lambda_n(k)) = u_2(1, \mu_n) = 0$.

(2)⇒(3): 若 $u_2(1, \lambda_n(k)) = 0$, 则有 $\lambda_n(k) = \nu_{n+1} = \mu_n$, 即 $\lambda_n = \lambda_n(k)$ 是二重特征值.

(3)⇒(1): 若 $\lambda_n = \lambda_n(k)$ 是二重特征值, 则必有 $\lambda_n(k) = \nu_{n+1} = \mu_n$. 于是

$$u_2(1, \lambda_n(k)) = u_2(1, \mu_n) = 0, \quad u_1^{[1]}(1, \lambda_n(k)) = u_1^{[1]}(1, \nu_{n+1}) = 0.$$

显然, $F(k,\lambda_n(k))=0$, $\dot F(k,\lambda_h(k))=0$, 则有方程组

$$\begin{cases} ku_2^{[1]}(1,\lambda_n(k))+\dfrac{u_1(1,\lambda_n(k))}{k}=2,\\ ku_2^{[1]}(1,\lambda_n(k))-\dfrac{u_1(1,\lambda_n(k))}{k}=0,\end{cases}$$

解得 $u_1(1,\lambda_n(k))=k$, $u_2^{[1]}(1,\lambda_n(k))=\frac{1}{k}$. 证毕. □

定理 3.3 若 $\mu_n=\nu_{n+1}$, 则正则 S-L 算子 (1.1) 和 (3.6) 的第 n 个特征值 $\lambda_n=\lambda_n(k)$ 在唯一的 $k_0=u_1(1,\nu_{n+1})$ 处为二重特征值.

证明 根据引理 3.3, 若 $\lambda_n^0=\lambda_n(k_0)$ 是二重特征值, 则有

$$k_0=u_1(1,\lambda_n(k_0))=u_1(1,\nu_{n+1}).$$

根据特征函数的振荡性质, $u_1(1,\nu_{n+1})$ 在区间 $(0,1)$ 内恰有 $n+1$ (偶数) 个零点. 由于 $u_1(0,\nu_{n+1})=1>0$, 则有 $u_1(1,\nu_{n+1})\geq 0$. 若 $u_1(1,\nu_{n+1})=0$, 根据初值解的唯一性定理, 则有 $u_1(x,\nu_{n+1})\equiv 0$, 矛盾. 故 $u_1(1,\nu_{n+1})>0$. 证毕. □

熟知, 单重特征值在对应边界条件参数的邻域内仍是单重的, 这为隐函数存在定理的应用提供了有力保障. 下面给出第 n 个特征值的生成函数 $\lambda_n=\lambda_n(k)$ $(k\in\mathbb{R}_+)$ 的解析性质.

定理 3.4 正则 S-L 算子 (1.1) 和 (3.6) 的第 n 个特征值 $\lambda_n=\lambda_n(k)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上是连续可微的, 且导数为

$$\lambda_n'(k)=\frac{2\hat d_n(k)}{k(\varphi_n,\varphi_n)},\tag{3.7}$$

其中 $\hat d_n(k)$ 是关于 k 的一元函数, 定义如下:

$$\hat d_n(k)=\begin{cases}\dfrac{k-u_1(1,\lambda_n)}{u_2(1,\lambda_n)}, & k\neq k_0,\\ 0, & k=k_0.\end{cases}$$

注 3.1 当 $\mu_n=\nu_{n+1}$ 时, $\lambda_n'(k_0)=0$ 但 $\lambda_n'(k)\neq 0$, $k\in\mathbb{R}_+\backslash\{k_0\}$, 即 k_0 是函数 $\lambda_n(k)$ 唯一的稳定点. 由于 $\lambda_n(k)$ 在 k_0 处达到最大值, 故该函数在区间 $(0,k_0)$ 单调递增, $(k_0,+\infty)$ 单调递减. 函数 $\lambda_{n+1}=\lambda_{n+1}(k)$ 的解析性质是类似的. 因此, 我们得到函数 $\lambda_n=\lambda_n(k)$ 与 $\lambda_{n+1}=\lambda_{n+1}(k)$ 的关系图 (见图 1).

定理 3.4 的证明 记 F 是定义在 $(\mathbb{R}_+\setminus\{k_0\})\times(\max\{\mu_{n-1},v_n\},\min\{\mu_n,v_{n+1}\})$ 上关于 k,λ 的二元实值函数:

$$F(k,\lambda)=2-\left(ku_2^{[1]}+\frac{1}{k}u_1\right)(1,\lambda).$$

类似于定理 2.1, 得到定义在 $\mathbb{R}_+\setminus\{k_0\}$ 上连续可微的 (隐) 函数 $\lambda_n=\lambda_n(k)$, 并且 $\lambda_n=\lambda_n(k)$ 关于 k 的导数为

$$\lambda_n'(k)=\frac{2\hat d_n(k)}{k(\varphi_n,\varphi_n)}.$$

隐函数存在定理已经说明函数 $\lambda_n=\lambda_n(k)$ 在 $\mathbb{R}_+\setminus\{k_0\}$ 的连续可微性. 下面首先验证该函数在 k_0 处的连续性. 根据 (3.7) 式及引理 3.3, 当 $\mu_n=\nu_{n+1}$ 时, $\lambda_n'(k)\neq 0$, $k\in\mathbb{R}_+\setminus\{k_0\}$, 即

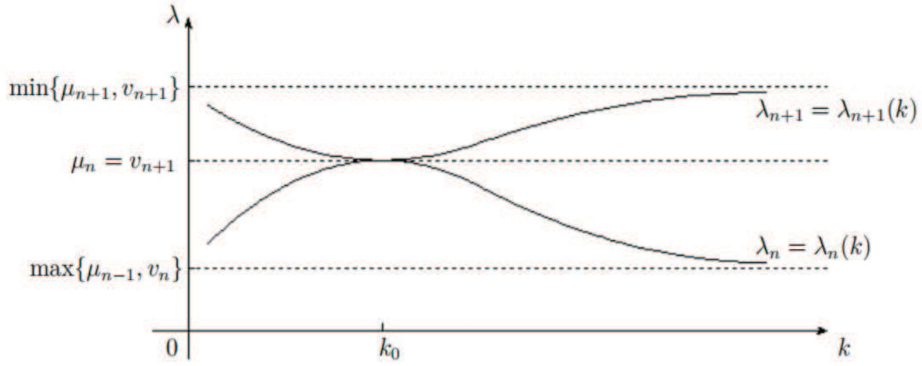

图 1 当 $\mu_n = \nu_{n+1}$ 时, 函数 $\lambda_n = \lambda_n(k)$ 与 $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}(k)$ 关系图

$\lambda_n(k)$ 在非 k_0 处无稳定点. 由于 $\lambda_n(k)$ 在 k_0 处达到最大值, 故该函数在区间 $(0, k_0)$ 上单调递增, 且在区间 $(k_0, +\infty)$ 上单调递减. 由于 $\lambda_n(k)$ 在 k_0 的邻域内单调有界, 则该函数在 k_0 处有极限, 记为 λ_n^0. 根据二元函数 $F(k, \lambda_n(k))$ 的连续性, 有

$$0 = \lim_{k \to k_0} F(k, \lambda_n(k)) = F(k_0, \lambda_n^0).$$

又 $F(k_0, \lambda_n(k_0)) = 0$, 由于同一个边界条件对应的第 n 个特征值是唯一的, 则

$$\lambda_n(k_0) = \lambda_n^0.$$

因此, $\lambda_n(k)$ 在 k_0 处连续.

再证 $\lambda_n(k)$ 在 k_0 处的连续可微性. 将 $\varphi_n = u_1 + \hat{d}_n u_2$ 与 u_2 作内积, 得到 $(\varphi_n, u_2) = (u_1, u_2) + \hat{d}_n(u_2, u_2)$. 由于 $(u_2, u_2) \neq 0$, 得到

$$\hat{d}_n(k) = \frac{(\varphi_n - u_1, u_2)}{(u_2, u_2)},$$

则极限 $\lim_{k \to k_0} \hat{d}_n(k)$ 存在, 从而极限 $\lim_{k \to k_0} \lambda'_n(k)$ 存在. 由于函数 $\lambda_n = \lambda_n(k)$ 在闭区间 $[k_0 - \delta, k_0 + \delta]$ 上连续, $\lambda'_n(k)$ 在点 k_0 的空心邻域 $U^0(k_0, \delta)$ 上连续, 则 $\lambda'_n(k_0) = \lim_{k \to k_0} \lambda'_n(k)$ 存在, 故 $\lambda_n(k)$ 在 k_0 处可微. 又 $\lambda_n(k)$ 在 k_0 处达到极大值, 则 $\lambda'_n(k_0) = 0$, 此时 $\lim_{k \to k_0} \hat{d}_n(k) = 0 = \hat{d}_n(k_0)$, 即该函数在 k_0 处的导数可由 (3.7) 式表示, 且 $\hat{d}_n(k)$ 在 k_0 处连续. 从而, 函数 $\lambda'_n(k)$ 在 k_0 处也是连续的. 证毕. □

基于上述分析, 我们得到在 $\mu_n = \nu_{n+1}$ 的前提下, 第 n 个特征值的生成函数 $\lambda_n = \lambda_n(k)$ 二重特征值产生的位置及个数, 以及该函数的解析性质.

致谢 感谢魏广生老师对本文写作的悉心指导.

参考文献

[1] Bailey, P.B., Everitt, W.N. and Zettl, A., Regular and singular Sturm-Liouville problems with coupled boundary conditions, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1996, 126(3): 505-514.

[2] Bailey, P.B., Gordon, M.K. and Shampine, L.F., Automatic solution of the Sturm-Liouville problem, *ACM Trans. Math. Software*, 1978, 4(3): 193-208.

[3] Coddington, E.A. and Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, New York: McGraw-Hill, 1955.

[4] Eastham, M.S.P., The Spectral Theory of Periodic Differential Equations, Edinburgh: Scottish Academic Press, 1973.

[5] Eastham, M.S.P., Kong, Q.K., Wu, H.Y. and Zettl, A., Inequalities among eigenvalues of Sturm-Liouville problems, *J. Inequal. Appl.*, 1999, 3(1): 25-43.

[6] Everitt, W.N., Möller, M. and Zettl, A., Discontinuous dependence of the nth Sturm-Liouville eigenvalue, In: General Inequalities, 7 (Oberwolfach, 1995), Internat. Ser. Numer. Math., Vol. 123, Basel: Birkhäuser, 1997, 145-150.

[7] Kong, Q.K., Wu, H.Y. and Zettl, A., Dependence of eigenvalues on the problem, *Math. Nachr.*, 1997, 188: 173-201.

[8] Kong, Q.K., Wu, H.Y. and Zettl, A., Geometric aspects of Sturm-Liouville problems, I. Structures on spaces of boundary conditions, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2000, 130(3): 561-589.

[9] Kong, Q.K. and Zettl, A., Dependence of eigenvalues of Sturm-Liouville problems on the boundary, *J. Differential Equations*, 1996, 126(2): 389-407.

[10] Kong, Q.K. and Zettl, A., Eigenvalues of regular Sturm-Liouville problems, *J. Differential Equations*, 1996, 131(1): 1-19.

[11] Pöschel, J. and Trubowitz, E., Inverse Spectral Theory, Pure and Applied Mathematics, Vol. 130, Boston, MA: Academic Press, 1987.

[12] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis, Third Edition, Beijing: China Machine Press, 2004.

[13] Wei, G.S. and Xu, Z.B., Inequalities among eigenvalues between indefinite and definite Sturm-Liouville problems, *Acta Math. Sinica* (*Chin. Ser.*), 2005, 48(4): 773-780 (in Chinese).

[14] Weidmann, J., Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1258, Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[15] Zettl, A., Sturm-Liouville Theory, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 121, Providence, RI: AMS, 2005.

Continuous Dependence of Eigenvalues of Regular Sturm-Liouville Differential Operators on the Boundary Condition

YANG Xinya

(*School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi, 710119, P. R. China*)

Abstract: In this paper, we study the continuous dependence of eigenvalue of Sturm-Liouville differential operators on the boundary condition by using of implicit function theorem. The work not only provides a new and elementary proof of the above results, but also explicitly presents the expressions for derivatives of the n-th eigenvalue with respect to given parameters. Furthermore, we obtain the new results of the position and number of the generated double eigenvalues under the real coupled boundary condition.

Keywords: regular Sturm-Liouville operator; eigenvalue; implicit function theorem