复变函数 A

author：MEW

email：mew.ma@qq.com

1 基础概念

Definition 1. 复数

对有序二元数对(a,b)定义两个运算:

1.$(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)$

2.$(a,b)\circ(c,d)=(\mathrm{ac}-\mathrm{bd},\mathrm{ad}+\mathrm{bc})$

其中$a,b\in\mathbb{R}$

这样的运算构成一个数域，我们记为$\mathbb{C}$

考虑映射

$f\colon\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$a\longmapsto(a,0)$

$(a,0)*(c,d)=(a\cdot c-0\cdot d,a\cdot d+0\cdot c)=(ac,ad)=a(c,d)$

Notation 2. *imaginary number* i

如定义，我们进行如下运算:

$(0,1)\times(0,1)=((0\times0)-(1\times1),(0\times1)+(1\times0))=(-1,0)$

为方便我们记$(0,1)$为i

这意味着，在$\mathbb{R}$上无解的方程在$\mathbb{C}$中有解。

e.g $x^2+1=0$

Definition 3. 度量

建立度量

$d\colon\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{R}$

$\forall z=a+ib\in\mathbb{C},$

$d(z)=\sqrt{a^2+b^2}$

Definition 4. 复共轭

$\forall z=a+ib\in\mathbb{C},\bar{z}=a-ib$

Theorem 5. 三角不等式

$\forall z,w\in\mathbb{C}$

$|z+w|\leq|z|+|w|$

这显然导出度量空间$(\mathbb{C},d)$

又可定义开球$B(z,r)=\{w\in\mathbb{C}\mid|w-z|<r\}$

Definition 6. 可导

考虑$f\colon\mathbf{\Omega}\to\mathbb{C},\mathbf{\Omega}\subset\mathbb{C}$($\mathbf{\Omega}$连通且开)

对$z_0\in\mathbf{\Omega}$

被叫做在z_0可导当且仅当:

$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在

记作$f^{'}(z_0)$

Definition 7. 全纯函数（解析函数）

若f在$\mathbf{\Omega}$上可导，则我们称:

f是$\mathbf{\Omega}$上的全纯函数。

Notation 8. $\mathcal{O}(\mathbf{\Omega})$

$\mathcal{O}(\mathbf{\Omega}):=\{\text{all of the holomorphic function on }\mathbf{\Omega}\}$

也记做$H(\mathbf{\Omega})$

PS:f在z_0处解析$\Leftrightarrow f$在z_0处有一个开邻域解析

CR方程

注意到可导的定义，我们发现$z\to z_0$是没有规定方向的，那么我们从任何方向逼近都是正确的。

我们考虑两个特殊的方向：x轴和y轴。

1. x

   $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$

   我们注意到$f(z)\in\mathbb{C}$,即f可由如下表示:

   $f=\mathrm{Re}\,f+\mathrm{Im}\,f:=u(x)+iv(x)$

   则有:

   $\lim\limits_{h\to 0}\frac{[u(x_0+h,y_0)+iv(x_0,y_0)]-[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)]}{h}$

   $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h}+i\lim\limits_{h\to 0}\frac{v(x_0,y_0)-v(x_0,y_0)}{h}$

   $=u_x^{'}+iv_x^{'}$

2. y

   同理可得

   $\lim\limits_{k\to 0}\frac{[u(x_0,y_0+k)+iv(x_0,y_0)]-[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)]}{k}$

   PS:$k=0\Delta x+i\Delta y$

   $=-iu_y^{'}+v_y^{'}$

又由定义，我们知道，导数和逼近方向无关，则二者应该相等。

复数中相等则需$\mathrm{Re}=\mathrm{Re},\mathrm{Im}=\mathrm{Im}$

即：

$$\begin{cases} u_x^{'}=v_y^{'} \\ u_y^{'}=-v_x^{'} \end{cases}$$

这是很重要的一个东西，但注意到的是 我们是从可导推出CR.eqs还不能说明其等价！

为方便记忆可像行列式那样记：

$u_x^{'}$	$v_x^{'}$
$u_y^{'}$	$v_y^{'}$

主对角线 正相等

副对角线 负相等

Definition 9. *Cauchy-Riemann operator*

若$f\in C^1(\mathbf{\Omega})$，则令$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

Theorem 10. $\forall f\in C^1$,若$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}f=0\Leftrightarrow f\in\mathcal{O}(\mathbf{\Omega})$

pf:

必要：

1.已经连续

2.若f满足CR.eqs则$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}f=0$

充分显然

总的来说复分析就是研究

$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}f=g$

$g=0$时就是全纯函数

至此复变的基本概念介绍完毕。