量子力学真题

1. 一个处于一维无限深势阱的粒子，求归一化。

$$\psi(x)=\begin{cases} Ax & \left(0<x<\frac{a}{2}\right) \\ A(a-x) & \left(\frac{a}{2}<x<a\right) \\ O & (x\leq 0, x\geq a) \end{cases}$$

2. 证明。P 是动量算符，l_z是角动量 z 分量算符。

（a）$[AB,C]=[A,C]B+A[B,C]$

（b）$[x^n,P]=i\hbar n x^{n-1}$

（c）$[l_z,P^2]=0$

3. 某个三能级体系的 H 矩阵表示为$H=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix}$，a、b、c 为实数。若体系初始态为$|\Psi(0)>=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, 求$|\Psi(t)>$ 。

4. 两自旋为$\frac{1}{2}$ 的粒子耦合在一起，总自旋 $S=S_1+S_2$ 。

（a）计算 S_+ 作用在$|s=0,\mathrm{m}=0>$上的结果。

（b）S^2作用在χ_{11}和χ_{1-1}的结果。

5. 一个电荷 q 处于一维谐振子势。假如打开一个弱电场 E_{ext}，从而产生额外势能$H'=-qE_{ext}x$ 。使用非简并微扰论计算能级的一级和二级修正。

6. 取高斯函数$\Psi(x)=Aexp(-bx^2)$作为试探函数用变分法求 H 量。$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\alpha x^2$的基态能量的最优上限。（其中 A 是归一化系数，b 和α为实数）

7. wkB 近似半边无穷高势阱的量子化条件为

$\int_0^a P[x]\,dx=\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi\hbar$。

利用该条件求解半个谐振子势 $V(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}m\omega^2x & (x>0)\\ O & (x\leq 0)\end{cases}$

（提示：先利用$V(x)$求a）

8. 有一个二能级体系，哈密顿量为 H0，能级记为 E_1、E_2（$E_1<E_2$），相应本征态$\psi_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\Psi_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 。t=0 时刻，体系处于ψ_1态，体系受到微扰H'作用，设在 H0 表象中$H'=\begin{pmatrix}0 & \gamma\\ \gamma & 0\end{pmatrix}\cos\omega t$ （γ为实数）。求 t>0 时，体系处于Ψ_2态的概率。

9. （a）写出态$|\Psi n>$在某个参数空间$\vec{R}$一个周期的绝热循环的几何相位γ_n的定义式。

（b）假设一个环路的面积是 S，有大小为 B 的均匀磁场垂直穿过该环路，写出一个电子（电荷为-e）绕环路一圈所积累的 Aharonov-Bohm 相位。