原创 # 杜教筛

杜教筛用于求数论函数前缀和。

比如常见的莫比乌斯函数、欧拉函数。

当$n = 10^4$, 我会for循环

当n = 10^6，我会线性筛

当$n = 10^9$，我。。。

杜教筛可以低于线性时间复杂度求解数论函数前缀和，$\Theta(n^{\frac{2}{3}})$。

对于数论函数f，我们要求 $S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$

对于任意一个数论函数g，

$$\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(d)g(\frac{i}{d})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor} g(i)f(j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} g(i)\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor} f(i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} g(i)S(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor)$$

$$=g(1)S(n)+\sum_{i=2}^{n} g(i)S(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor)$$

$$\Rightarrow g(1)S(n)=\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)-\sum_{i=2}^{n} g(i)S(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor)$$

如果我们可以很快的算出 $\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)$，然后用数论分块算出$\sum_{i=2}^{n} g(i)S(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor)$，我们就能很快得到$g(1)S(n)$

莫比乌斯函数

$$S(n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(i)$$

$$f(i)=\mu(i)$$

$\sum_{i=1}^{n}(1*\mu)(i)=\sum_{i=1}^{n} S(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor)$，由于$1*\mu=\varepsilon$

$$1=S(n)+\sum_{i=2}^{n} S(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor)$$

$$S(n)=1-\sum_{i=2}^{n} S(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor)$$

欧拉函数

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(i)$$

$$f(i) = \varphi(i)$$

$\sum_{i=1}^{n}(1 * \varphi)(i) = \sum_{i=1}^{n} S(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor)$，由于 $1 * \varphi = ID$

$$\frac{1}{2}n(n+1) = S(n) + \sum_{i=2}^{n} S(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor)$$

$$S(n) = \frac{1}{2}n(n+1) - \sum_{i=2}^{n} S(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor)$$

当 $n = 10^4$, 我会for循环

当 $n = 10^6$，我会线性筛

当 $n = 10^9$，我会杜教筛

有 0 个人打赏 文章最后发布于: 2019-08-27 11:17:06