原创 莫比乌斯反演

积性函数

若$gcd(x,\ y) = 1, f(xy) = f(x)f(y)$，则$f(n)$是积性函数。

常见积性函数

单位函数：$\varepsilon(n) = [n = 1]$

常数函数：$1(n) = 1$

恒等函数：$id_k(n) = n^k id_1(n)$

欧拉函数：$\varphi(n) = \sum_{i=1}^{n}[gcd(i,\ n) = 1]$

莫比乌斯函数：$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \exists d : d^2 | n \\ (-1)^k & otherwise \end{cases}$

Dirichlet卷积

f、g为两个数论函数，定义f、g的狄利克雷卷积为

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

ε：狄利克雷卷积单位元，任何函数卷ε都为其本身

$\varepsilon = \mu * 1 \Leftrightarrow \varepsilon(n) = \sum_{d|n}\mu(d)$

$\varphi = \mu * ID \Leftrightarrow \varphi(n) = \sum_{d|n} d \cdot \mu(\frac{n}{d})$

莫比乌斯函数

$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \exists d : d^2 | n \\ (-1)^k & otherwise \end{cases}$

证明

$\varepsilon(n) = \sum_{d|n}\mu(d) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$

$n = \sum_{i=0}^{k} p_i^{c_i}$

$\sum_{d|n}\mu(d) = \mu(1) + \mu(p_1) + \mu(p_2) + ... + \mu(p_1p_2) + ... + \mu(p_1p_2...p_k)$

$= \binom{k}{0}(-1)^0 + \binom{k}{1}(-1)^1 + ... + \binom{k}{k}(-1)^k$

$= (1-1)^k$

当k = 0即n = 1时，$\sum_{d|n}\mu(d) = 1$，否则 $\sum_{d|n}\mu(d) = 0$

于是得出：$\sum_{d|n} \mu(d) = [n=1]$

反演结论

$[gcd(i,\ j)=1] \Leftrightarrow \sum_{d|gcd(i,\ j)} \mu(d)$

证明

$[gcd(i,\ j)=1] = \epsilon(gcd(i,\ j)) = \sum_{d|gcd(i,\ j)} \mu(d)$

结论 $\varphi * 1 = ID$

证明

$n = \sum_{i=0}^{k} p_i^{c_i}$，由于$\varphi(n)$为积性函数，故证明$n^{'} = p^c$即可

$\varphi * 1 = \sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d})$

$= \sum_{i=0}^{c} \varphi(p_i)$

$= 1 + p^0 \cdot (p-1) + p^1 \cdot (p-1) + ... + p^c \cdot (p-1)$

$= 1 + (p-1)\frac{1-p^c}{1-p} = 1 - 1 + p^c = p^c = ID$

推论

$\varphi * 1 = ID$

两边同时卷μ

$\varphi * 1 * \mu = \sum_{d|n} d \cdot \mu(\frac{n}{d})$

$\varphi * \varepsilon = \sum_{d|n} d \cdot \mu(\frac{n}{d})$

$\varphi(n) = \sum_{d|n} d \cdot \mu(\frac{n}{d})$

莫比乌斯反演

$f(n)$、$g(n)$为两个数论函数，

如果

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

那么

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$$

证明

$f = g * 1$

$f * \mu = g * 1 * \mu$

$f * \mu = g * \varepsilon$

$g = f * \mu$

莫比乌斯反演应用，对于$g(n)$我们很难直接求出其函数值，但是很容易求出其约数或倍数和$f(n)$，于是通过莫比乌斯反演我们就能求出$g(n)$

有 0 个人打赏

文章最后发布于: 2019-08-23 17:18:29