

原创

莫比乌斯反演

2019-08-23 17:18:29

我是一只计算鸡

阅读数 66

更多

版权声明：本文为博主原创文章，遵循 [CC 4.0 BY-SA](#) 版权协议，转载请附上原文出处链接和本声明。
本文链接：<https://blog.csdn.net/giftedpanda/article/details/100039486>

积性函数

若 $gcd(x, y) = 1, f(xy) = f(x)f(y)$, 则 $f(n)$ 是积性函数。

常见积性函数

单位函数: $\varepsilon(n) = [n = 1]$

常数函数: $1(n) = 1$

恒等函数: $id_k(n) = n^k id_1(n)$

欧拉函数:
$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^n [gcd(i, n) = 1]$$

莫比乌斯函数:
$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \exists d : d^2 | n \\ (-1)^k & otherwise \end{cases}$$

Dirichlet卷积

f, g 为两个数论函数, 定义 f, g 的狄利克雷卷积为

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

ε : 狄利克雷卷积单位元, 任何函数卷 ε 都为其本身

$$\varepsilon = \mu * 1 \Leftrightarrow \varepsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$$

$$\varphi = \mu * ID \Leftrightarrow \varphi(n) = \sum_{d|n} d \cdot \mu(\frac{n}{d})$$

莫比乌斯函数

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \exists d : d^2 | n \\ (-1)^k & otherwise \end{cases}$$

证明

$$\varepsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$$n = \sum_{i=0}^k p_i^{c_i}$$

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p_1) + \mu(p_2) + \dots + \mu(p_1 p_2) + \dots + \mu(p_1 p_2 \dots p_k)$$

$$= \binom{k}{0} (-1)^0 + \binom{k}{1} (-1)^1 + \dots + \binom{k}{k} (-1)^k$$

$$= (1 - 1)^k$$

$$\text{当 } k = 0 \text{ 即 } n = 1 \text{ 时, } \sum_{d|n} \mu(d) = 1, \text{ 否则 } \sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

1024

程序员节，为程序员加油！

关闭

于是得出: $\sum_{d|n} \mu(d) = [n = 1]$

反演结论

$$[gcd(i, j) = 1] \Leftrightarrow \sum_{d|gcd(i, j)} \mu(d)$$

证明

$$[gcd(i, j) = 1] = \epsilon(gcd(i, j)) = \sum_{d|gcd(i, j)} \mu(d)$$

结论 $\varphi * 1 = ID$

证明

$n = \sum_{i=0}^k p_i^{c_i}$, 由于 $\varphi(n)$ 为积性函数, 故证明 $n' = p^c$ 即可

$$\begin{aligned} \varphi * 1 &= \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{i=0}^c \varphi(p_i) \\ &= 1 + p^0 \cdot (p-1) + p^1 \cdot (p-1) + \dots + p^c \cdot (p-1) \\ &= 1 + (p-1) \frac{1-p^c}{1-p} = 1 - 1 + p^c = p^c = ID \end{aligned}$$

推论

$$\varphi * 1 = ID$$

两边同时卷 μ

$$\varphi * 1 * \mu = \sum_{d|n} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\varphi * \varepsilon = \sum_{d|n} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

莫比乌斯反演

$f(n)$ 、 $g(n)$ 为两个数论函数,

如果

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

那么

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

证明

$$f = g * 1$$

$$f * \mu = g * 1 * \mu$$

$$f * \mu = g * \varepsilon$$

$$g = f * \mu$$

莫比乌斯反演应用, 对于 $g(n)$ 我们很难直接求出其函数值, 但是很容易求出其约数或倍数和 $f(n)$, 于是通过莫比乌斯反演我们就能求出 $g(n)$

有 0 个人打赏

文章最后发布于: 2019-08-23 17:18:29

©2019 CSDN 皮肤主题: 终极编程指南 设计师: CSDN官方博客

1024

程序员节，为程序员加油！

关闭