原创 【BZOJ 1257】数论分块

2019-08-20 19:20:21 我是一只计算鸡 阅读数 22 更多

数论分块：在某个区间内 $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ 为一定值，将该值相同的区间分为一块。

对于含有 $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ 的求和式子，对于任意一个 i (i <= n),我们需要找到一个最大的 j (i <= j <= n)使得 $\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$

$j = \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor$，这个很好得出，既然我们要对含有 $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ 的式子求和，那我们就要找到区间 $[i, j]$ 的都含有 $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$。假设 i 是第一次出现满足 $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ 要求的下标，段区间 $[i, j]$ 内都是 $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ 的倍数，所以用 n 除以 $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$，就得到了最大的那个下标。然后每次以 $[i, j]$ 为一块，进行分块求和。

证明：

$$\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \le \frac{n}{i}$$

$$\Rightarrow \quad \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor \ge \left\lfloor \frac{n}{\frac{n}{i}} \right\rfloor = \lfloor i \rfloor = i$$

$$\Rightarrow \quad i \le \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor$$

得证：$$j = \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor$$

BZOJ1257：余数之和

$$\sum_{i=1}^{n} k \ mod \ i$$

给定n和k，求上面式子的值，1 <= n, k <= 10^9。

显然不能通过 $\theta(n)$ 时间复杂度内算出，我们可以化简一下式子

$$k \ mod \ i = k - i * \left\lfloor \frac{k}{i} \right\rfloor$$

$$\sum_{i=1}^{n} k \ mod \ i = nk - \sum_{i=1}^{n} i * \left\lfloor \frac{k}{i} \right\rfloor$$

利用 $\left\lfloor \frac{k}{i} \right\rfloor$ 在区间 $[l, r]$ 为定值进行分块，在某一块中，$\left\lfloor \frac{k}{i} \right\rfloor * [l + (l+1) + (l+2) + ... + r]$，然后用等差数列求和公式即可算出该区间值。时间复杂

```
#include<cstdio>
#include<iostream>
using namespace std;
typedef long long ll;
ll n, k;
int main()
{
        while(scanf("%lld %lld", &n, &k) == 2) {
                ll ans, r;
                ans = n*k;
                for(ll l = 1; l <= n; l = r+1) {
                        if(k / l) r = min(n, k/(k/l));
                        else r = n;
```

```
                ans -= (k/l)*(l+r)*(r-l+1)/2;
            }
        printf("%lld\n", ans);
    }
    return 0;
}
```

有 0 个人打赏

文章最后发布于: 20