

【数值分析】拉格朗日插值法

2019-08-15 15:48:34 我是一只计算鸡 阅读数 145 更多

版权声明：本文为博主原创文章，遵循 CC 4.0 BY-SA 版权协议，转载请附上原文出处链接和本声明。

本文链接：<https://blog.csdn.net/giftedpanda/article/details/99621691>

在数值分析中，拉格朗日插值法是以法国十八世纪数学家约瑟夫·拉格朗日命名的一种多项式插值方法。许多实际问题中都用函数来表示某种内在联系，而有些函数都只能通过实验和观测来了解。如对实践中的某个物理量进行观测，在若干个不同的地方得到相应的观测值，拉格朗日插值法可以找到多项式来反映各个观测点的值。这样的多项式称为拉格朗日（插值）多项式。数学上来说，拉格朗日插值法可以给出一个恰好穿过二维平面上若干个已知点的函数。

拉格朗日插值法的应用：我们在数值分析中，比如数学家建模、机器学习中经常得到一大堆离散的点，我们需要找到一个函数经过这些点，拉格朗日插值法可以给出这个函数。

简单一点儿来说就是，对于给定的 $n+1$ 个点，求出一个 n 次多项式满足这 $n+1$ 个点的取值。换句话说，就是已知 $n+1$ 个点，求出一个一元 n 次函数。

对于某个多项式函数，已知 $k+1$ 个点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ ， x_i 为多项式函数自变量的取值， y_i 在自变量 x_i 多项式函数的取值。拉格朗日插值法可以给出一个恰好穿过这 $k+1$ 个点的函数。

$$L(x) = \sum_{j=0}^k y_j * l_j(x)$$

$l_j(x)$ 为拉格朗日基本多项式（插值基函数）

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \frac{x - x_1}{x_j - x_1} \dots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \dots \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

$l_j(x)$ 在点 x_j 处的函数值为1，其余点 $x_i, i \neq j$ 处为0。

推导过程如下：

假设我们有 $k+1$ 个点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ ， $L(x_0) = y_0, L(x_1) = y_1, \dots, L(x_k) = y_k$ ，我们要找到的多项式就必须满足这个条件。

假设我们现在有 $k+1$ 根 k 次多项式函数，每一根 k 次多项式函数在点 x_i 处取值为1，其他点处取值为0，这样我们在此基础上乘以 y_i 就满足了 $L(x_i) = y_i$ ，的其中一根多项式函数满足了其中一个点，同理我们可以找出 $k+1$ 根多项式函数，然后相加就能得到多项式函数， $L(x) = L(x_0) + L(x_1) + \dots + L(x_k)$ 这个函数能满足 $k+1$ 个点，也就是我们要找的那个函数了。

接下来要找到一个在某个点取值为1，其他点取值为0的函数。

以 x_j 点为例，除了 x_j 点取1，其余点都取0。

考虑到我们在其他点要取0，所以肯定会出现形如 $(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k)$ ，首先这样我们可以保证不管取那个点都能得到0。然后由于我们要在 x_j 点取1，所以我们要在 $(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k)$ 中不能出现 $x_j - x_j$ 这一项，否则就不能取到1了，进一步可以得出 $(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_k)$ ，这个式子不为0。但是我们要保证在 x_j 处的取值为1，所以我们除以这个式子在 x_j 处的值 $(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_k)$ 就能得到1了。

这就得出了拉格朗日基本多项式，也就是插值基函数。

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \frac{x - x_1}{x_j - x_1} \dots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \dots \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

重心拉格朗日插值法

在最开始的推导过程中，我们首先得到了 $(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k)$ ，然后才去掉 $x_j - x_j$ 这一个点。

$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_k)$ 和 $\frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k)}{x - x_j}$ 等价。

我们令 $l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k)$

那么， $l_j(x) = \frac{l(x)}{x - x_j} \frac{1}{\prod_{i=0, i \neq j}^k (x_j - x_i)}$

重心:
$$w_j = \frac{1}{\prod_{i=0, i \neq j}^k (x_j - x_i)}$$

那么拉格朗日多项式就可以写为,
$$L(x) = y_i \sum_{i=0}^k \frac{w_j}{x - x_j} l(x)$$

重心拉格朗日的好处是，比如新增加一个点 x_{k+1} ，原来的拉格朗日插值法会重新计算所有的值，时间复杂度为 $\theta(n^2)$ 。但是重心拉格朗日插值法只需要以 $x_j - x_{k+1}$ ，重新定义重心，就可以在 $\theta(n)$ 的时间复杂度内完成计算。

有 0 个人打赏

文章最后发布于: 201

1024

程序员节，为程序员加油！

关闭