

原创 杜教筛

2019-08-27 11:17:06 我是一只计算鸡 阅读数 43 更多

版权声明：本文为博主原创文章，遵循 CC 4.0 BY-SA 版权协议，转载请附上原文出处链接和本声明，转载请附上原文出处链接和本声明。

本文链接：<https://blog.csdn.net/giftedpanda/article/details/100049469>

杜教筛用于求数论函数前缀和。

比如常见的莫比乌斯函数、欧拉函数。

当  $n = 10^4$ , 我会 *for* 循环

当  $n = 10^6$ , 我会线性筛

当  $n = 10^9$ , 我。。。。

杜教筛可以低于线性时间复杂度求解数论函数前缀和,  $\Theta(n^{\frac{2}{3}})$ 。

对于数论函数  $f$ , 我们要求 
$$S(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$$

对于任意一个数论函数  $g$ ,

$$\sum_{i=1}^n (f * g)(i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} f(d) g\left(\frac{i}{d}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} g(i) f(j)$$

$$= \sum_{i=1}^n g(i) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} f(j)$$

$$= \sum_{i=1}^n g(i) S\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor\right)$$

$$= g(1)S(n) + \sum_{i=2}^n g(i) S\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor\right)$$

$$\Rightarrow g(1)S(n) = \sum_{i=1}^n (f * g)(i) - \sum_{i=2}^n g(i) S\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor\right)$$

如果我们很快的算出  $\sum_{i=1}^n (f * g)(i)$ , 然后用数论分块算出  $\sum_{i=2}^n g(i) S\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor\right)$ , 我们就能很快得到  $g(1)S(n)$

莫比乌斯函数

$$S(n) = \sum_{i=1}^n \mu(i)$$

$$f(i) = \mu(i)$$

$$\sum_{i=1}^n (1 * \mu)(i) = \sum_{i=1}^n S\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor\right), \text{ 由于 } 1 * \mu = \varepsilon$$

$$1 = S(n) + \sum_{i=2}^n S\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor\right)$$

$$S(n) = 1 - \sum_{i=2}^n S\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor\right)$$

欧拉函数

$$\sum_{i=1}^n \varphi(i)$$

$$f(i) = \varphi(i)$$

$$\sum_{i=1}^n (1 * \varphi)(i) = \sum_{i=1}^n S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor) \text{ , 由于 } 1 * \varphi = ID$$

$$\frac{1}{2}n(n+1) = S(n) + \sum_{i=2}^n S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

$$S(n) = \frac{1}{2}n(n+1) - \sum_{i=2}^n S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

当  $n = 10^4$ , 我会 $for$ 循环

当  $n = 10^6$ , 我会线性筛

当  $n = 10^9$ , 我会杜教筛

有 0 个人打赏

文章最后发布于: 2019-08-27 11:17:06

1024

程序员节，为程序员加油！

关闭