# 重 庆 大 学

# 学 生 实 验 报 告

实验课程名称__________________________________

开课实验室 __________________________________

学 院 __________年级______专业班________

学 生 姓 名 ______________学 号______________

开 课 时 间 ________至________学年第______学期

| | |
|---|---|
| 总 成 绩 | |
| 教师签名 | |

数 学 与 统 计 学 院 制

**开课学院、实验室：** **实验时间 ： 年 月 日**

| 课程名称 | | 实验项目名　称 | | 实验项目类型 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 验证 | 演示 | 综合 | 设计 | 其他 |
| 指导教师 | | 成　绩 | | | | | | |

## 实验目的

[1] 了解最小二乘拟合的原理，掌握用 MATLAB 作最小二乘拟合的方法。

[2] 通过实例学习如何用拟合方法解决实际问题，注意与插值方法的区别；通过实例理解参数辨识的方法。

[3] 通过实验体验用函数拟合解决实际问题的全过程。

## 基础实验

**一、实验内容**

**数据拟合**

**二、实验过程**（一般应包括实验原理或问题分析，算法设计、程序、计算、图表等， 实验结果及分析）

**人口预测问题**

1. 下表给出了近两个世纪某国人口的统计数据，试预测 2010 年该国的人口。

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 年 | **1790** | **1800** | **1810** | **1820** | **1830** | **1840** | **1850** |
| 人口 | **3.9** | **5.3** | **7.2** | **9.6** | **12.9** | **17.1** | **23.2** |
| 年 | **1860** | **1870** | **1880** | **1890** | **1900** | **1910** | **1920** |
| 人口 | **31.4** | **38.6** | **50.2** | **62.9** | **76** | **92** | **106.5** |
| 年 | **1930** | **1940** | **1950** | **1960** | **1970** | **1980** | **1990** |
| 人口 | **123.2** | **131.7** | **150.7** | **179.3** | **204** | **226.5** | **251.4** |

1） 可先用以上数据拟合 Multhus 人口指数增长模型，根据检验结果进一步讨论马尔萨斯人口模型的改进。

2） Malthus 模型的基本假设是：人口的增长率为常数，记为 r。记时刻 t 的人口为 x(t)，且初始时刻的人口为 $x_0$，于是得到如下微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

3） Malthus 模型在短期内能比较好的拟合数据，但从长期来看，该模型的增长速度过快导致和实际的常识不相符。为此，一个改进是考虑种群内部的竞争。比如

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx(1 - x/A) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

**<1>. 分析过程：**

<2>.MATLAB 代码:

**主函数：**

```
x0=[0];
x1=[1,1];
tdata=[1790,1800,1810,1820,1830,1840,1850,1860,1870,1880,1890,1900,1910,1920,1930,1940,1950,1960,1970,1980,1990];
xdata=[3.9 5.3 7.2 9.6 12.9 17.1 23.2 31.4 38.6 50.2 62.9 76 92 106.5 123.2 131.7 150.7 179.3 204 226.5 251.4];
Xdata=log(xdata);
r11=dsolve('Dx=r*x','x(0)=x0')
r2=dsolve('Dx=r*x*(1-x/A)','x(0)=x0')
[a,resnorm,residual,flag,output]=lsqcurvefit(@myfun,x0,tdata,Xdata);
[b,resnorm,residual,flag,output]=lsqcurvefit(@myfun1,x1,tdata,xdata);
ti=1790:1:2010;
xi=exp(myfun(a,ti));
xii=myfun1(b,ti);
plot(tdata,xdata,'o',ti,xi,'r',ti,xii,'k')
a
b
```

**myfun 函数:(未考虑阻滞时候的函数，由主函数调用)**

```
function F=myfun(x,tdata)
F=log(3.9)+x(1)*(tdata-1790);
```

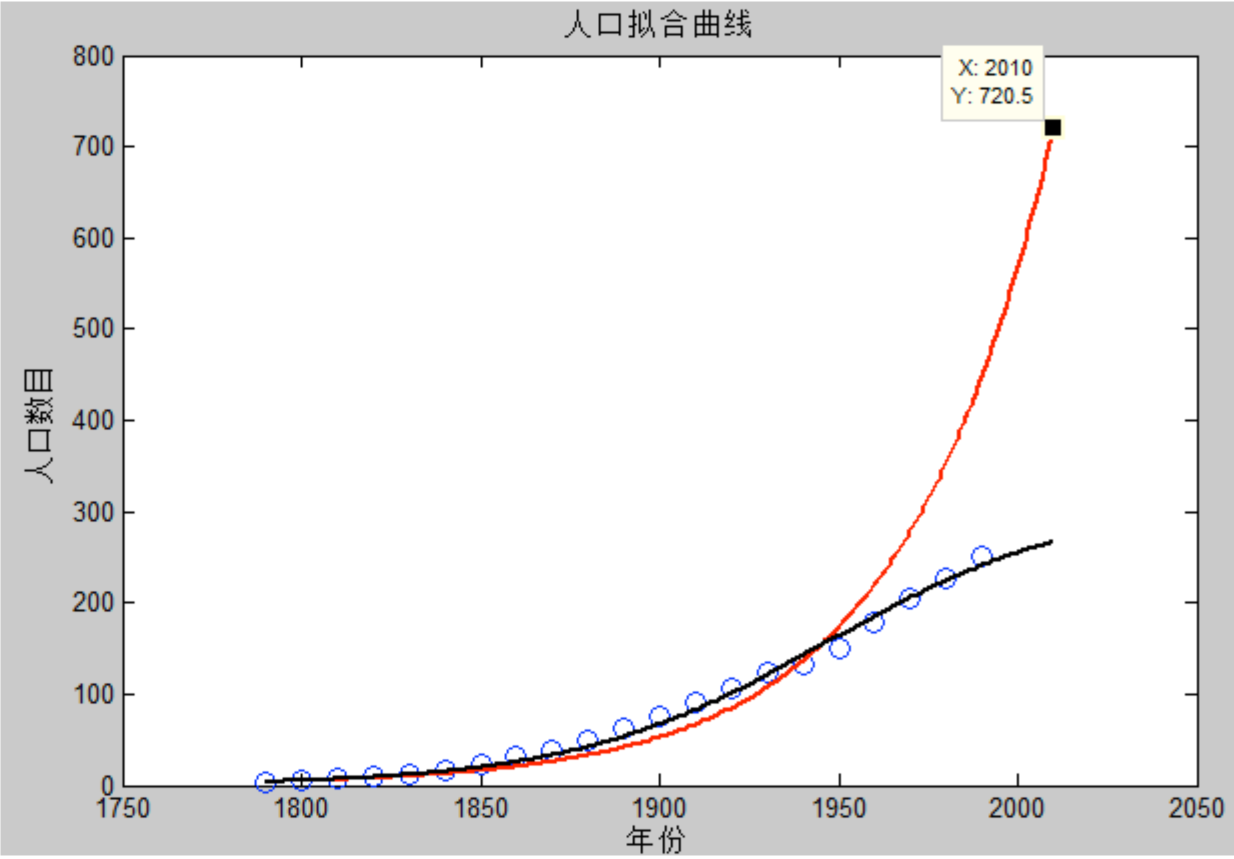
**myfun2 函数：（考虑了阻滞因素时候的函数，由主函数调用）**

```
function F=myfun1(x,tdata)
F=x(1)./(1-exp(-x(2)*(tdata-1790))*(-x(1)+3.9)/3.9);
```

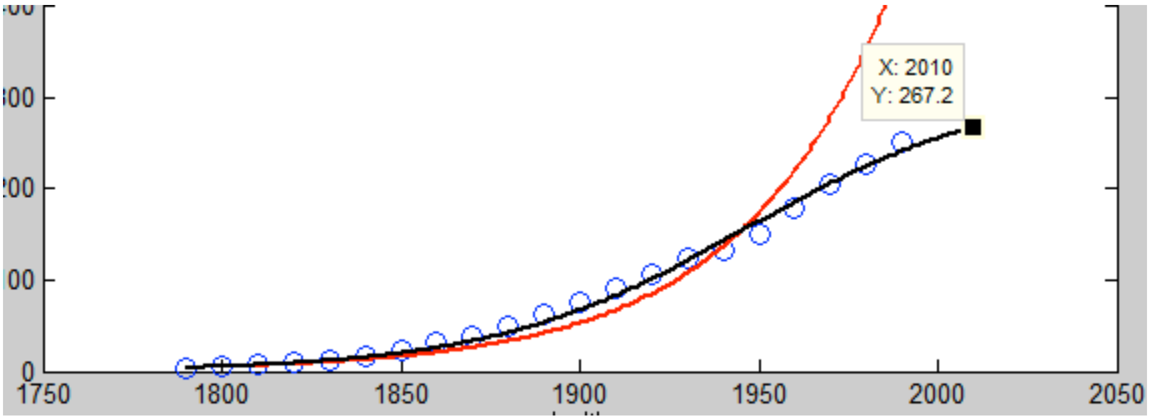
运行结果:

```
>> ex06_1

r11 =

x0*exp(r*t)                //第一个模型的微分方程对应的符号解



r2 =

A/(1-exp(-r*t)*(-A+x0)/x0)        //第二个模型的微分方程对应的符号解


Optimization terminated: first-order optimality less than OPTIONS.TolFun,
 and no negative/zero curvature detected in trust region model.
Optimization terminated: relative function value
 changing by less than OPTIONS.TolFun.

a =

    0.0237                 //第一个模型中拟合出来的增长系数r的值


b =

  311.9525    0.0280            //分别表示第二个模型中阻滞系数A的值和增长系数r的值

>>
```

**拟合效果图：**




从图中可以看出未考虑阻滞因素的模型前期与数据还符合的较好，后期由于增长的过快，明显与数据不匹配，该模型预测出来的 2010 年的人口数为 720.5




考虑了阻滞因素的模型无论是前期还是后期都与数据吻合的非常好，该模型预测出来 2010 年的人口数为 267.2. 与未考虑阻滞因素时比较，人口数少了许多。因此为了能较好预测，一定要考虑影响因素，得到更细致的模型。

**旧车价格预测**

2.某年美国旧车价格的调查资料如下表其中 $x_i$ 表示轿车的使用年数，$y_i$ 表示相应的平均价格。试分析用什么形式的曲线来拟合上述的数据，并预测使用 4.5 年后轿车的平均价格大致为多少？

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2615 | 1943 | 1494 | 1087 | 765 | 538 | 484 | 290 | 226 | 204 |

**<1>分析过程：**

**<2>Matlab 代码：**

**主函数：**

```
xdata=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10];

ydata=[2615 1943 1494 1087 765 538 484 290 226 204];

aa=polyfit(xdata,ydata,5);

xi=1:0.01:15;
```

```
yi=polyval(aa,xi);
subplot(1,2,1),plot(xdata,ydata,'o',xi,yi,'r')

Ydata=log(ydata);
x0=[-1];
[a,resnorm,residual,flag,output]=lsqcurvefit(@fun,x0,xdata,Ydata)
Xi=1:0.01:15;
Yi=exp(fun(a,Xi));
subplot(1,2,2),plot(xdata,ydata,'o',Xi,Yi,'r')
```

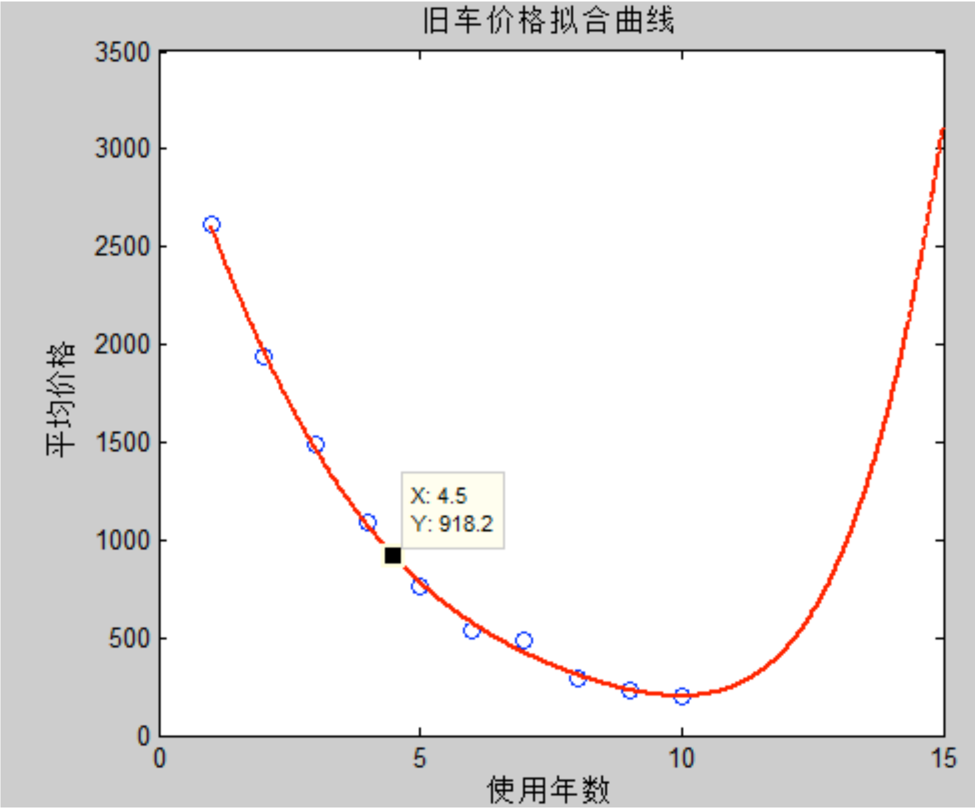
**fun 函数：（指数函数模型函数，由主函数调用）**

```
function F=fun(x,xdata)
F=log(2615)+x(1)*xdata;
```

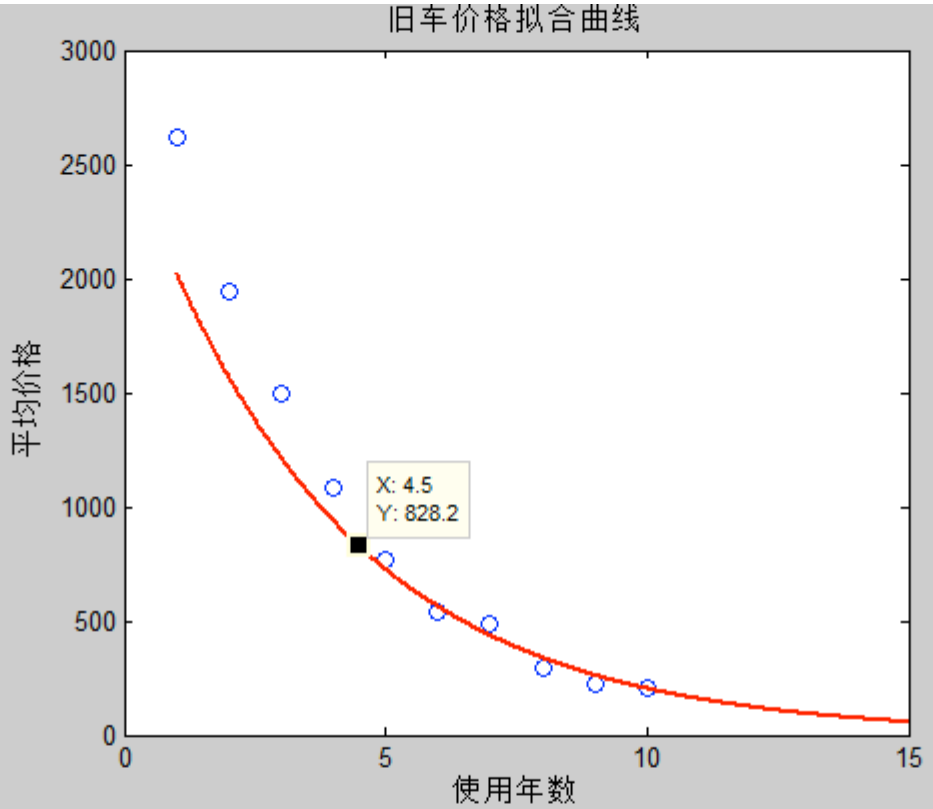
**运行结果：**

```
>> ex06_2
Optimization terminated: first-order optimality less than OPTIONS.TolFun,
 and no negative/zero curvature detected in trust region model.

a =

   -0.2555


resnorm =

    0.2358

>>
```

拟合图象：




通过观察发现用 5 次多项式拟合数据，尽管在数据区域内与数据吻合的较好，但是在区域外严重偏离发展趋势，通过多项式拟合数据的得到使用 4.5 年的汽车的平均价格为 918.2



使用指数衰减模型，与数据后期吻合的较好，而且反应出了数据后期的发展规律，通过指数模型拟合数据的到，使用寿命为 4.5 年的汽车的平均价格为 828.2。与第一种方法比较差距不大。

**确定圆心和半径**

3. 平面上的圆可以由三个参数确定，半径和圆心和坐标。通过提取圆上点的坐标也能确定圆的方程，而最少的点数是 3 个点。为减小误差，在实际中一般会得到多个点的坐标通过拟合的方法得到圆的方程。下面的数据来源于一个圆，使用这些数据确定圆的方程。

x=(14.5081 13.7508 13.3520 11.6870  10.3406), y=(1.8410 3.6362 3.9491 4.3287 3.7139).

**<1>. 分析过程：**

利用主函数把数据点录入到向量 x，y 中分别保存，然后再把两个列向量和并为 XY 一个 5 行 2 列的矩阵，第一列代表 x 数据第二列代表 y 数据。

把 taubin 函数数要求格式的矩阵 XY 带入 taubin 函数，执行三角形网格的 Gabriel Taubin 算法，然后将数据放入一个[a,b,R]的矩阵中。

做出数据点的图，并做出圆的图。

Circle 函数接收 a，b，R 三个参数后利用圆的参数方程将圆产生并做出。

<2>.Matlab 代码

**主函数：**

```
x=[14.5081 13.7508 13.3520 11.6870   10.3406];
y=[1.8410 3.6362 3.9491 4.3287 3.7139];
XY=zeros(5,2);
for i=1:5
    XY(i,1)=x(i);
end

for i=1:5
    XY(i,2)=y(i);
end



[a,b,R]=CircleFitByTaubin(XY)
plot(x,y,'o',a,b,'*');
hold on;
circle(a,b,R);
axis([9 15 -1 5])
```

**CircleFitByTaubin 函数：（用于实现 taubin 法圆拟合的函数，由主函数调用）**

```
function [a,b,R]= CircleFitByTaubin(XY)

%------------------------------------------------------------------------
%
%     Circle fit by Taubin
```

```
%      G. Taubin, "Estimation Of Planar Curves, Surfaces And Nonplanar
%                  Space Curves Defined By Implicit Equations, With
%                  Applications To Edge And Range Image Segmentation",
%      IEEE Trans. PAMI, Vol. 13, pages 1115-1138, (1991)
%
%     Input:  XY(n,2) is the array of coordinates of n points x(i)=XY(i,1), y(i)=XY(i,2)
%
%     Output: Par = [a b R] is the fitting circle:
%                           center (a,b) and radius R
%
%     Note: this fit does not use built-in matrix functions (except "mean"),
%           so it can be easily programmed in any programming language
%
%--------------------------------------------------------------------------

n = size(XY,1);      % number of data points

centroid = mean(XY);   % the centroid of the data set

%     computing moments (note: all moments will be normed, i.e. divided by n)

Mxx = 0; Myy = 0; Mxy = 0; Mxz = 0; Myz = 0; Mzz = 0;

for i=1:n
    Xi = XY(i,1) - centroid(1);  %  centering data
    Yi = XY(i,2) - centroid(2);  %  centering data
    Zi = Xi*Xi + Yi*Yi;
    Mxy = Mxy + Xi*Yi;
    Mxx = Mxx + Xi*Xi;
```

```
    Myy = Myy + Yi*Yi;
    Mxz = Mxz + Xi*Zi;
    Myz = Myz + Yi*Zi;
    Mzz = Mzz + Zi*Zi;
end

Mxx = Mxx/n;
Myy = Myy/n;
Mxy = Mxy/n;
Mxz = Mxz/n;
Myz = Myz/n;
Mzz = Mzz/n;

%    computing the coefficients of the characteristic polynomial

Mz = Mxx + Myy;
Cov_xy = Mxx*Myy - Mxy*Mxy;
A3 = 4*Mz;
A2 = -3*Mz*Mz - Mzz;
A1 = Mzz*Mz + 4*Cov_xy*Mz - Mxz*Mxz - Myz*Myz - Mz*Mz*Mz;
A0 = Mxz*Mxz*Myy + Myz*Myz*Mxx - Mzz*Cov_xy - 2*Mxz*Myz*Mxy + Mz*Mz*Cov_xy;
A22 = A2 + A2;
A33 = A3 + A3 + A3;

xnew = 0;
ynew = 1e+20;
epsilon = 1e-12;
IterMax = 20;
```

```
% Newton's method starting at x=0

for iter=1:IterMax
    yold = ynew;
    ynew = A0 + xnew*(A1 + xnew*(A2 + xnew*A3));
    if abs(ynew) > abs(yold)
       disp('Newton-Taubin goes wrong direction: |ynew| > |yold|');
       xnew = 0;
       break;
    end
    Dy = A1 + xnew*(A22 + xnew*A33);
    xold = xnew;
    xnew = xold - ynew/Dy;
    if (abs((xnew-xold)/xnew) < epsilon), break, end
    if (iter >= IterMax)
        disp('Newton-Taubin will not converge');
        xnew = 0;
    end
    if (xnew<0.)
        fprintf(1,'Newton-Taubin negative root:  x=%f\n',xnew);
        xnew = 0;
    end
end

%  computing the circle parameters

DET = xnew*xnew - xnew*Mz + Cov_xy;
Center = [Mxz*(Myy-xnew)-Myz*Mxy , Myz*(Mxx-xnew)-Mxz*Mxy]/DET/2;
```

```
a=Center(1)+centroid(1);

b=Center(2)+centroid(2);

R=sqrt(Center*Center'+Mz);

end    %    CircleFitByTaubin
```

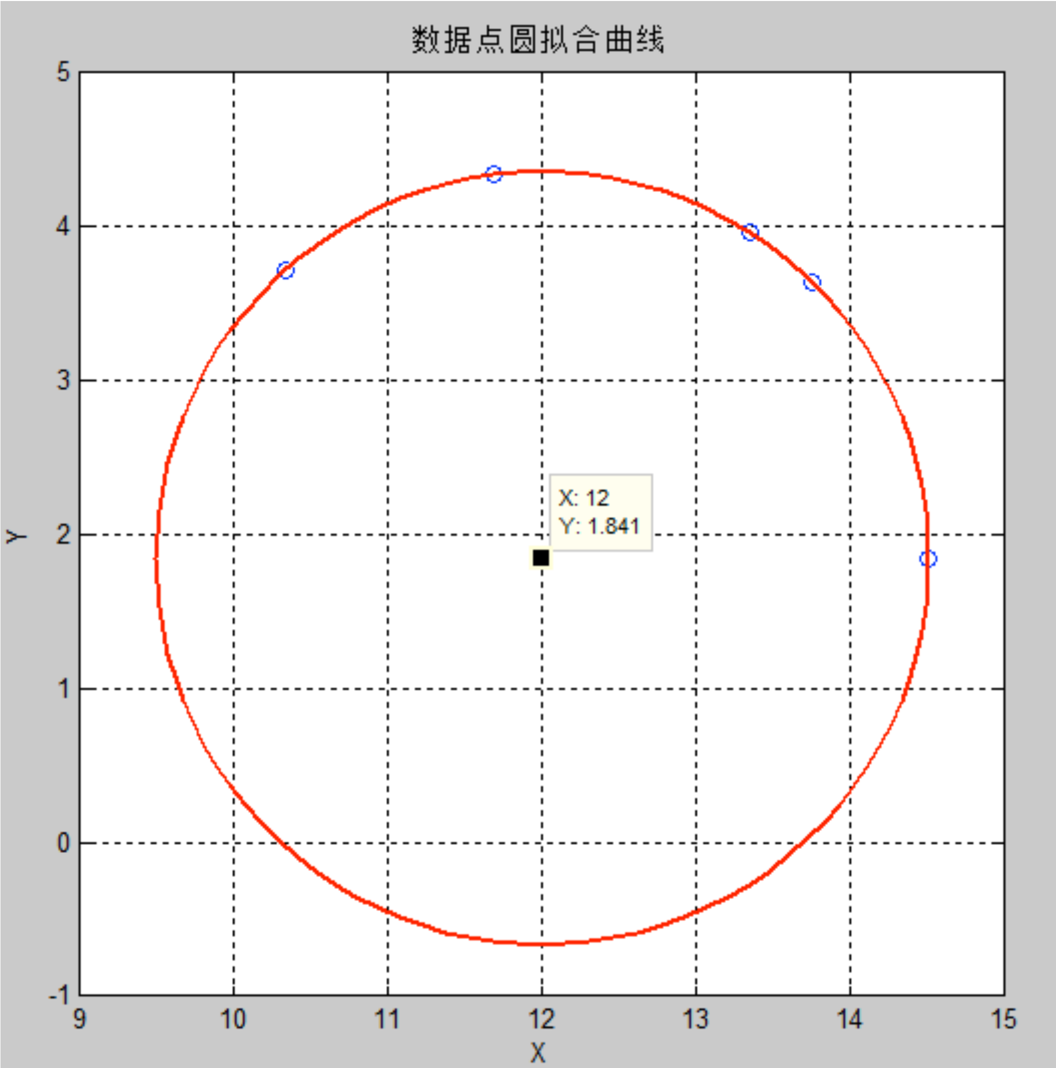
**circle 函数：（用于由 a，b，R 三个圆的特征参数做出圆的图象）**

```
function circle(a,b,R)

alpha=0:pi/50:2*pi;%角度[0,2*pi] %R=2;%半径

x=R*cos(alpha)+a;

y=R*sin(alpha)+b;

plot(x,y,'r')

axis equal

grid on
```

**<3>.运行结果：**

```
>> ex06_3

a =

   12.0028                          //拟合出来的圆的圆心的 X 坐标

b =

    1.8414                          //拟合出来的圆的圆心的 Y 坐标

R =
```

2.5049 //拟合出来的圆的半径




从图象上来看出拟合出来的圆与所给的数据点几乎完全重合，拟合的很成功。

Taubin 法作为圆拟合的方法不仅精确性高而且时间复杂度低，是一种高效的算法，在圆目标识别领域有一定的应用空间。

## 应用实验（或综合实验）

### 一、实验内容

5 号宋体

### 二、问题分析

5 号宋体

### 三、数学模型的建立与求解(一般应包括模型、求解步骤或思路，程序放在后面的附录中)

5 号宋体

### 四、实验结果及分析

5 号宋体

### 五、附录（程序等）

5 号宋体

## 总结与体会

通常我们所遇到的问题都不能够直接得到问题的方程，往往知道的是一些有用的大量的实验数据点，通过这次实验我学会了如何处理这些离散的数据点，通过分析问题的成因提出自己的假设然后建立起数学模型即一些方程，这些方程中有一些待定的系数，通过数据拟合的一些方法例如最小二乘法等可以确定这些系数，确定了系数后的到的模型再与实际数据点进行比较，观察是否符合客观事实，如何符合则建模成功，如果不符合或符合的不好，就要考虑更多的因素对原有模型进行修正。此外还学到了在目标识别中广泛应用的圆拟合的方法，如 taubin 法，pratt 法，kassa 法等，并了解到了各种方法的特点。

杨阳

John.Y.Yang

教师签名

年　月　日

备注：

1、同一章的实验作为一个实验项目，每个实验做完后提交电子稿到服务器的“全校任选课数学实验作业提交”文件夹，文件名为“学院学号姓名实验几”，如“机械 20073159 张新实验一”。
2、提交的纸质稿要求双面打印，中途提交批改不需要封面，但最后一次需将该课程所有实验项目内页与封面一起装订成册提交。
3、综合实验要求 3 人合作完成，请在实验报告上注明合作者的姓名。