

# 数学模型



姓名： 杨阳    学号： 20114102    专业班级： 核工程与核技术 01 班    54

姓名： 刘蛰    学号： 20115095    专业班级：    自动化 06 班                      83

姓名： 熊莹    学号： 20112654    专业班级：    机自实验 01 班                      112

# 投资策略问题

## 摘要

本文对问题进行分析后，建立了投资组合模型。在做出相应的假设后，将该模型归于线性规划模型。由于该投资组合问题时序性强，通过逐年分析投资与收益，得出最终模型。使用 LINGO 对模型进行求解，并进行灵敏度分析。得出第五年末本息最大为 14.375 万元，每年初对 A 项目进行投资的金额分别为：3.478261 万元、3.913043 万元、0、4.5 万元；对 B 项目进行投资的金额为 4 万元；对 C 项目进行投资的金额为 3 万元；仅第一年初年初对 D 项目进行投资，投资金额为 6.521739 万元。投资 B、C 项目比 A、C 项目更赚钱。

## 1 问题的重述

某部门现有资金 10 万元，五年内有以下投资

项目供选择：

项目 A：从第一年到第四年每年初投资，次年未收回本金且获利 15%；

项目 B：第三年初投资，第五年末收回本金且获利 25%，最大投资额为 4 万元；

项目 C：第二年初投资，第五年末收回本金且获利 40%，最大投资额为 3 万元；

项目 D：每年初投资，年末收回本金且获利 6%；

确定投资策略使第五年末本息总额最大。

## 2 问题的分析

此问题是一个投资组合问题，可投资项目四个即：A、B、C 和 D。由题设知，A、B、C、D 四个投资项目利率恒定，且不存在风险与中途撤资问题，所以可归于 LP 问题对该模型进行求解。A 项目在第一年到第四年每年初投资，次年年末收回本金和利息，并且每次投资金额可变。B 项目与 C 项目在该五年内均只可进行一次投资，时间分别是第三年初与第二年初，且均在第五年末收回本金和利息，投资金额均可变，但 B 项目最大投资金额为四万元，C 项目最大投资金额为三万元。D 项目每年年初进行投资，年末收回本金和利息，投资金额可变。该投资问题具有较强的时序性，故应逐年对投资情况进行考虑。确定最佳投资策略，使第五年末本息总额最大。

## 3 模型的假设

- (1) A、B、C、D 四个投资项目均不存在风险，不考虑损失。
- (2) 确定投资方案后，就按题设项目要求进行投资，不允许中途撤资。
- (3) 每年年末收获本息与剩余资金均可用于次年初对项目进行投资。

## 4 符号约定

(1) 1、2、3、4 分别代表 A、B、C、D 四个可投资项目。

(2)  $x_{ij}$ ——第  $i$  年投资  $j$  项目的资金额                      单位：万元

(3)  $\omega_i$ ——第  $i$  年初可用于投资的金额                      单位：万元

(4)  $\psi_i$ ——第  $i$  年初投资后剩余资金                      单位：万元

(5)  $r_j$ ——投资项目的收益率

(6)  $Q(x)$ ——第五年末本息总额                      单位：万元

## 5 模型的建立

### 5.1 投资及收益情况简表

投资情况简表：

项目 时间	A	B	C	D
第一年初	$x_{11}$			$x_{14}$
第二年初	$x_{21}$		$x_{23}$	$x_{24}$
第三年初	$x_{31}$	$x_{32}$		$x_{34}$
第四年初	$x_{41}$			$x_{44}$
第五年初				$x_{54}$

收益情况简表：

项目 时间	A	B	C	D
第一年末				$(1+r_4)x_{14}$
第二年末	$(1+r_1)x_{11}$			$(1+r_4)x_{24}$
第三年末	$(1+r_1)x_{21}$			$(1+r_4)x_{34}$
第四年末	$(1+r_1)x_{31}$			$(1+r_4)x_{44}$
第五年末	$(1+r_1)x_{41}$	$(1+r_2)x_{32}$	$(1+r_3)x_{23}$	$(1+r_4)x_{54}$

## 5.2 逐年分析投资收益情况

由于该投资组合不存在风险，当将可用投资资金完全投资，即可获得最大收益，但考虑到对 B、C 项目的投资时间分别为第三年初和第二年初，最大投资总额分别为四万元和三万元，所以前两年投资取不等式约束，后三年投资取等式约束。

(1) 第一年：年初将可用十万元资金用于可投资的项目 A 和 D，即： $x_{11} + x_{14} \leq \omega_1$ ，其中  $\omega_1 = 10$ 。投资后剩余资金： $\psi_1 = 10 - (x_{11} + x_{14})$ 。年末收获本息  $(1+r_4)x_{14}$ 。

可用于第二年初的投资金额为： $\omega_2 = (1+r_4)x_{14} + \psi_1$ 。

(2) 第二年：年初将可用资金用于可投资的项目 A、C 和 D，即： $x_{21} + x_{23} + x_{24} \leq \omega_2$ 。投资后剩余资金： $\psi_2 = \omega_2 - (x_{21} + x_{23} + x_{24})$ 。年末收获本息  $(1+r_1)x_{11} + (1+r_4)x_{24}$ 。

可用于第三年初的投资金额为： $\omega_3 = (1+r_1)x_{11} + (1+r_4)x_{24} + \psi_2$ ，其中 C 项目最大投资金额为三万元，即： $x_{23} \leq 3$ 。

(3) 第三年：年初将可用资金用于可投资的项目 A、B 和 D，即： $x_{31} + x_{32} + x_{34} = \omega_3$ 。年末收获本息  $(1+r_1)x_{21} + (1+r_4)x_{34}$ 。可用于第四年初的投资金额为： $\omega_4 = (1+r_1)x_{21} + (1+r_4)x_{34}$ ，其中 B 项目最大投资金额为四万元，即： $x_{32} \leq 4$ 。

(4) 第四年：年初将可用资金用于可投资的项目 A 和 D，即： $x_{41} + x_{44} = \omega_4$ 。年末收获本息  $(1+r_1)x_{31} + (1+r_4)x_{44}$ 。可用于第五年初的投资金额为： $\omega_5 = (1+r_1)x_{31} + (1+r_4)x_{44}$ 。

(5) 第五年：年初将可用资金用于可投资的项目 D，即： $x_{54} = \omega_5$ 。年末收获本息  $Q(x) = (1+r_1)x_{41} + (1+r_2)x_{32} + (1+r_3)x_{23} + (1+r_4)x_{54}$ 。

## 5.3 整理模型

整理以上分析结果，可得线性规划模型：

$$\text{Max} \quad Q(x) = (1+r_1)x_{41} + (1+r_2)x_{32} + (1+r_3)x_{23} + (1+r_4)x_{54}$$

$$\text{s. t:} \quad x_{11} + x_{14} \leq 10$$

$$x_{21} + x_{23} + x_{24} \leq (1+r_4)x_{14} + 10 - (x_{11} + x_{14})$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = (1 + r_1)x_{11} + (1 + r_4)x_{24} + (1 + r_4)x_{14} + 10 - (x_{11} + x_{14}) - (x_{21} + x_{23} + x_{24})$$

$$x_{41} + x_{44} = (1 + r_1)x_{21} + (1 + r_4)x_{34}$$

$$x_{54} = (1 + r_1)x_{31} + (1 + r_4)x_{44}$$

$$x_{23} \leq 3$$

$$x_{32} \leq 4$$

## 6 模型的求解

有题设知：  $r_1 = 0.15$   $r_2 = 0.25$   $r_3 = 0.4$   $r_4 = 0.06$

将数据带入模型有：

$$\text{Max } Q(x) = 1.15x_{41} + 1.25x_{32} + 1.4x_{23} + 1.06x_{54}$$

$$\text{s. t. } x_{11} + x_{14} \leq 10$$

$$x_{21} + x_{23} + x_{24} \leq 1.06x_{14} + 10 - (x_{11} + x_{14})$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1.15x_{11} + 1.06x_{24} + 1.06x_{14} + 10 - (x_{11} + x_{14}) - (x_{21} + x_{23} + x_{24})$$

$$x_{41} + x_{44} = 1.15x_{21} + 1.06x_{34}$$

$$x_{54} = 1.15x_{31} + 1.06x_{44}$$

$$x_{23} \leq 3$$

$$x_{32} \leq 4$$

用 LINGO 求解，得到最优结果：  $Q(x) = 14.375$

$$x_{11} = 3.478261 \quad x_{21} = 3.913043 \quad x_{31} = 0 \quad x_{41} = 4.5$$

$$x_{32} = 4 \quad x_{23} = 3$$

$$x_{14} = 6.521739 \quad x_{24} = 0 \quad x_{34} = 0 \quad x_{44} = 0 \quad x_{54} = 0$$

## 7 模型的结果分析

最优投资策略如下表所示：

项目 时间	A	B	C	D
第一年初	3.478261			6.521739
第二年初	3.913043		3	0
第三年初	0	4		0
第四年初	4.5			0
第五年初				0

用 LINGO 求解得出的结果：

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	14.37500	1.000000
2	0.000000	0.7935000E-01
3	0.000000	0.1035000
4	0.000000	1.219000
5	0.000000	1.150000
6	0.000000	1.060000
7	0.000000	0.7750000E-01
8	0.000000	0.3100000E-01

对模型进行灵敏度结果：

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X41	1.150000	0.2924528E-01	0.000000
X32	1.250000	INFINITY	0.3100000E-01
X23	1.400000	INFINITY	0.7750000E-01
X54	1.060000	0.000000	INFINITY
X11	0.000000	0.000000	0.3293774E-01
X14	0.000000	0.3293774E-01	0.000000
X21	0.000000	0.3363208E-01	0.000000
X24	0.000000	0.3036000E-01	INFINITY
X31	0.000000	0.000000	INFINITY
X34	0.000000	0.000000	INFINITY
X44	0.000000	0.2640000E-01	INFINITY

结果分析：X32 与 X23 均为紧约束，说明投资 B、C 项目比 A、D 项目更赚钱。

## 8 模型的推广与改进

该模型是建立在利益恒定，并且中途不可撤资的基础上的。实际情况往往是利率是时间的函数，故可用一段时间的平均值，即数学期望来衡量。若中途有撤资，往往会有一定惩罚。

该模型中各投资不存在风险，投资越大，收益越大，所以后三年的可用资金全部用于年初投资是合理的。实际情况投资往往存在一定风险，除开国债与银行利息。本模型适合于无风险投资，如银行利息与国债。若投资有风险，如股票，则可由经济学模型使用均方差来度量风险。本模型中各投资项目之间相互独立，互不影响，实际情况中往往不同的投资项目之间有一定的关系，这时候可以通过计算协方差矩阵来度量各投资项目之间的影响。

## 9 附录

组合投资问题 LINGO 编程的程序如下：

```
model:
max=1.15*x41+1.25*x32+1.4*x23+1.06*x54;
x11+x14<=10;
x21+x23+x24<=1.06*x14+10-(x11+x14);
x31+x32+x34=1.15*x11+1.06*x24+1.06*x14+10-(x11+x14)-(x21+x23+x24);
x41+x44=1.15*x21+1.06*x34;
x54=1.15*x31+1.06*x44;
x23<=3;
x32<=4;
end
```