

地球流体动力学作业

QBO推导与重复

李洋

2018 年 5 月 25 日

1 模型简述

Holton & Lindzen(1972)通过底层向上传播Kelvin波与mixed gravity-Rossby波的扰动，与顶层半年循环的平均流强迫相互作业，模拟了一个准两年的东西风震荡。

Kelvin波与mixed gravity-Rossby波对平均流东西风的贡献，及其被平均流吸收的条件有很大不同。Kelvin波向上传递西风分量，本身相速度也向东。当基本气流是东风时，Kelvin波容易上传，使基本气流逐渐转为西风；但当西风较强，风速与波速接近时，Kelvin波的扰动很难再传上去。另一方面，mixed gravity-Rossby波向上传递东风分量，本身相速度也向西。当东风较强，风速与波速接近时，扰动很难再传上去。这两种波配合高空的半年循环产生了QBO现象。

2 推导摘要

2.1 基本方程

基本态满足：

$$\beta y U = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y}$$
$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g$$

若基本气流只是高度的函数，则能推出：

$$\ln \rho_0 = \frac{1}{2} \frac{\beta y^2}{g} \frac{dU}{dz} + F(z)$$

这里取 $F(z) = -Sz$,即密度指数衰减。

进一步，如果扰动采取东西方向的行波解的形式，扰动方程可写作：

$$i\hat{\omega}u + w \frac{dU}{dz} = -ik\Phi + \beta yv$$

$$\begin{aligned}
i\hat{\omega}v &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \beta yu \\
\frac{\partial\Phi}{\partial z} &= -g\frac{\delta\rho}{\rho_0} \\
i\hat{\omega}\frac{\delta\rho}{\rho_0} - wS + \frac{\beta y}{g}\frac{dU}{dz}v &= 0 \\
iku + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\hat{\omega} &= \omega + kU - i\alpha \\
\Phi &= \frac{\delta p}{\rho_0}
\end{aligned}$$

忽略 $O\{(\frac{dU}{dz})^2/(gS)\}$ 项，可以得到关于单一变量 Φ 的方程：

$$\begin{aligned}
(\beta^2 y^2 - \hat{\omega}^2)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2\beta y(\beta^2 y^2 - \hat{\omega}^2) \frac{dU}{dz} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} + gS[(\beta^2 y^2 - \hat{\omega}^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \beta \frac{dU}{dz} [\frac{\beta y^2}{gS}(\beta^2 y^2 - \hat{\omega}^2) \frac{dU^2}{dz^2} - (\beta^2 y^2 + \hat{\omega}^2)] \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\
- 2gS\beta y^2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{gSk}{\hat{\omega}} [\beta(\beta^2 y^2 + \hat{\omega}^2) - k\hat{\omega}(\beta^2 y^2 - \hat{\omega}^2)] \Phi = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

将上述方程中的 y 与 z 进行变量替换，即：

$$\begin{aligned}
\tau &= \epsilon z, \epsilon \ll 1 \\
\hat{z} &= \int_0^z f(\tau) dz \\
\xi &= y/l(\tau) \\
l &= l_0(\tau) + \epsilon l_1(\tau) + \dots
\end{aligned}$$

此时令

$$\Phi = \Phi_0(\hat{z}, \tau, \xi) + \epsilon \Phi_1(\hat{z}, \tau, \xi) + \dots$$

带入(1)得到关于 ϵ 的0阶方程为¹：

$$(\beta^2 \xi^2 l_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 f^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \hat{z}^2} + \frac{gS}{l_0^2} (\beta^2 \xi^2 l_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\beta^2 \xi^2 l_0^2 - \hat{\omega}^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \right] + \frac{gSk}{\hat{\omega}} [\beta(\beta^2 \xi^2 l_0^2 + \hat{\omega}^2) - k\hat{\omega}(\beta^2 \xi^2 l_0^2 - \hat{\omega}^2)] \Phi_0 = 0 \tag{2}$$

对不同的 n ，这个方程都能得到²：

$$\beta^2 l_0^4 = \frac{gS}{f^2} = gh^{(n)} \tag{3}$$

¹Lindzen (1971) [1]里对应这个公式的(23) 以及后面的1阶方程 (36) 都有写错的地方，从量纲即可看出

²这里没看懂

关于 ϵ 的1阶方程为:

$$\frac{f^2 l_0^2}{gS} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \hat{z}^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\beta^2 \xi^2 l_0^2 - \hat{\omega}^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right] + \frac{l_0^2 k}{\hat{\omega}} \left[\beta \frac{(\beta^2 \xi^2 l_0^2 + \hat{\omega}^2)}{(\beta^2 \xi^2 l_0^2 - \hat{\omega}^2)^2} - k \hat{\omega} \frac{1}{(\beta^2 \xi^2 l_0^2 - \hat{\omega}^2)} \right] \Phi_1 = -\frac{l_0^2}{gS} \left[I_1 + \frac{I_2}{(\beta^2 \xi^2 l_0^2 - \hat{\omega}^2)} + \frac{I_3}{(\beta^2 \xi^2 l_0^2 - \hat{\omega}^2)^2} \right] \quad (4)$$

其中, I_1, I_2, I_3 与 Φ_0 与 l_1 相关。

2.2 Kelvin波波流相互作用推导

以下部分仅针对 $n=-1^3$, 即Kelvin波进行推导, Yanai波 ($n=0$) 同理。

$$\Phi_0^{(-1)} = A_0^{(-1)}(\tau) \exp(-\xi^2/2) \exp(i\hat{z})$$

$$\sqrt{gh^{(-1)}} = -\frac{\hat{\omega}}{k} \quad (5)$$

方程 (5) 相对于没有牛顿冷却项的 c 加了一个虚数的部分 $i \frac{\alpha}{k}$

方程 (4) 左侧与 (2) 是形式是相同的。这时应该考虑两个条件:

1. 如果方程 (4) 右侧的项与 Φ_0 成比例, 这对 Φ_1 相当于给了一个共振频率的外强迫, 会引起共振。
2. 当 $\beta^2 \xi^2 l_0^2 - \hat{\omega}^2 = 0$ 时, 右侧第二项与第三项都是奇点, 对应无限的强迫。至少应该要求, 这两项对整个 y (或 ξ) 积分应该是有限的。所以, 被积分项最大只能有一阶极点, 因此要求

$$I_3 \propto \beta^2 \xi^2 l_0^2 - \hat{\omega}^2$$

此时恰巧右侧第二项与第三项之和为0, 让第一项对 ξ 的积分对 Φ_0 无投影来避免共振, 最后得到

$$A_0 = \frac{\text{constant}}{\sqrt{f l_0}}$$

这样, 记

$$-\frac{\hat{\omega}}{k} \equiv c - U$$

由方程 (3、5) 可知, $f \propto \frac{1}{c-U}$, $l_0 \propto (c-U)^{\frac{1}{2}}$, 从而

$$\Phi_0 \propto (c-U)^{\frac{1}{4}} \exp(i\hat{z})$$

$$w_0 \propto (c-U)^{\frac{1}{4}} \exp(i\hat{z})$$

$$u_0 \propto (c-U)^{-\frac{3}{4}} \exp(i\hat{z})$$

$$v_0 = 0$$

³ n 的选择见 [2]

所以，记 $\langle \rangle$ 为对 y 积分， $-$ 代表对时间或纬向平均

$$\langle \bar{F}/\rho \rangle = \langle \overline{u_0 w_0} \rangle \propto \frac{1}{(c-U)^{1/2}} \frac{dy}{d\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2) d\xi \exp(2i\hat{z}) = A \exp(2i \text{Im}\{\hat{z}\}) \quad (6)$$

为了求 \hat{z} 的虚部，将 f 中的 $i\frac{\alpha}{k}$ 恢复出来， c 恢复为 $-\frac{\omega}{k}$ ，泰勒展开得到

$$f^{(-1)} \approx \frac{\sqrt{gS}}{c-U} \left[1 - \frac{i\alpha}{k(c-U)} \right] \quad (7)$$

因此，Kevin波水平动量的垂直输送是

$$A \exp\left(-2 \int_0^z g_0(z) dz\right)$$

$$g_0 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{gS}}{(c-U)^2} \frac{\alpha}{k}$$

如果带入具体的比例可知Kelvin波的通量恒为正（Yanai恒为负）。至此，全部需要的方程都以推导完毕。

3 数值重复

采用与Holton and Lindzen(1972) [3]同样的参数以及分辨率（250m，24hr），垂直差分采用中央差，垂直积分采用梯形近似，时间上采取最普通的欧拉前向积分。对 $c-U$ 的绝对值加一个下界（0.002m/s）以防止超出数值范围。得到的结果图（）所示，确实存在东西风的准两年变化，这与Holton and Lindzen(1972) [3]的结果一致。

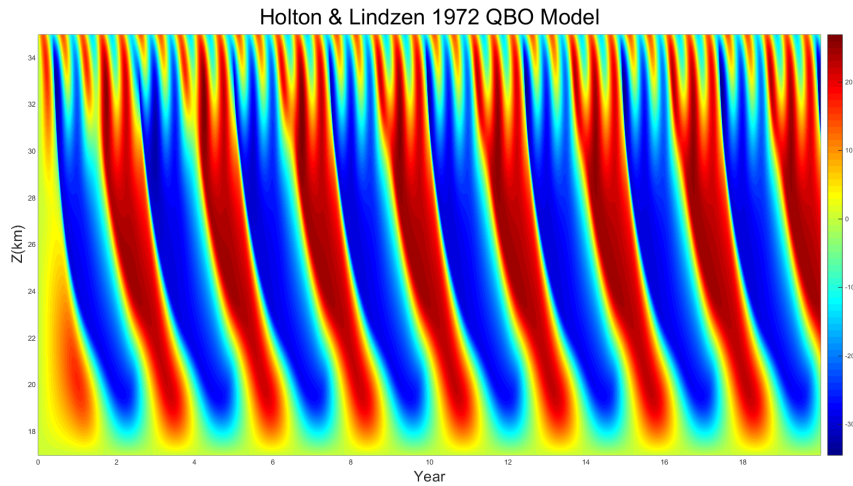


图 1: QBO模拟

参考文献

- [1] Lindzen, Richard S. "Equatorial planetary waves in shear. Part I." *Journal of the Atmospheric Sciences* 28.4 (1971): 609-622.
- [2] Holton, James R., and Richard S. Lindzen. "A note on Kelvin waves in the atmosphere." *Mon. Wea. Rev* 96 (1968): 385-386.
- [3] Holton, James R., and Richard S. Lindzen. "An updated theory for the quasi-biennial cycle of the tropical stratosphere." *Journal of the Atmospheric Sciences* 29.6 (1972): 1076-1080.