地球流体动力学作业

QBO推导与重复

李洋

2018 年 6 月 27 日

1 模型简述

Holton & Lindzen(1972)通过底层向上传播Kelvin波与mixed gravity-Rossby波的扰动，与顶层半年循环的平均流强迫相互作业，模拟了一个准两年的东西风震荡。

Kelvin波与mixed gravity-Rossby波对平均流东西风的贡献，及其被平均流吸收的条件有很大不同。Kelvin波向上传递西风分量，本身相速度也向东。当基本气流是东风时， Kelvin波容易上传，使基本气流逐渐转为西风；但当西风较强，风速与波速接近时， Kelvin波的扰动很难再传上去。另一方面，mixed gravity-Rossby波向上传递东风分量，本身相速度也向西。当东风较强，风速与波速接近时，扰动很难再传上去。这两种波配合高空的半年循环产生了QBO现象。

2 推导摘要

2.1 基本方程

基本态满足：

$$\beta y U = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g$$

若基本气流只是高度的函数，则能推出：

$$ln\rho_0 = \frac{1}{2}\frac{\beta y^2}{g}\frac{dU}{dz} + F(z)$$

这里取$F(z) = -Sz$,即密度指数衰减。

进一步，如果扰动采取东西方向的行波解的形式，扰动方程可写作：

$$i\widehat{\omega}u + w\frac{dU}{dz} = -ik\Phi + \beta yv$$

$$i\widehat{\omega}v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \beta y u$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -g\frac{\delta \rho}{\rho_0}$$

$$i\widehat{\omega}\frac{\delta \rho}{\rho_0} - wS + \frac{\beta y}{g}\frac{dU}{dz}v = 0$$

$$iku + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

其中

$$\widehat{\omega} = \omega + kU - i\alpha$$

$$\Phi = \frac{\delta p}{\rho_0}$$

忽略$O\{(\frac{dU}{dz})^2/(gS)\}$项，可以得到关于单一变量$\Phi$的方程:

$$(\beta^2 y^2 - \widehat{\omega}^2)^2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2\beta y(\beta^2 y^2 - \widehat{\omega}^2)\frac{dU}{dz}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} + gS[(\beta^2 y^2 - \widehat{\omega}^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \beta\frac{dU}{dz}[\frac{\beta y^2}{gS}(\beta^2 y^2 - \widehat{\omega}^2)\frac{dU^2}{dz^2} - (\beta^2 y^2 + \widehat{\omega}^2)]\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$
$$-2gS\beta y^2\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{gSk}{\widehat{\omega}}[\beta(\beta^2 y^2 + \widehat{\omega}^2) - k\widehat{\omega}(\beta^2 y^2 - \widehat{\omega}^2)]\Phi = 0 \tag{1}$$

将上述方程中的y与z进行变量替换，即：

$$\tau = \epsilon z, \epsilon \ll 1$$

$$\widehat{z} = \int_0^z f(\tau)dz$$

$$\xi = y/l(\tau)$$

$$l = l_0(\tau) + \epsilon l_1(\tau) + \cdots$$

此时令

$$\Phi = \Phi_0(\widehat{z}, \tau, \xi) + \epsilon\Phi_1(\widehat{z}, \tau, \xi) + \cdots$$

带入(1)得到关于ϵ的0阶方程为[1]：

$$(\beta^2\xi^2 l_0^2 - \widehat{\omega}^2)^2 f^2\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \widehat{z}^2} + \frac{gS}{l_0^2}(\beta^2\xi^2 l_0^2 - \widehat{\omega}^2)^2\frac{\partial}{\partial \xi}[\frac{1}{\beta^2\xi^2 l_0^2 - \widehat{\omega}^2}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi}] + \frac{gSk}{\widehat{\omega}}[\beta(\beta^2\xi^2 l_0^2 + \widehat{\omega}^2) - k\widehat{\omega}(\beta^2\xi^2 l_0^2 - \widehat{\omega}^2)]\Phi_0 = 0 \tag{2}$$

对不同的n，这个方程都能得到[2]：

$$\beta^2 l_0^4 = \frac{gS}{f^2} = gh^{(n)} \tag{3}$$

[1] Lindzen (1971) [1]里对应这个公式的(23) 以及后面的1阶方程（36）都有写错的地方，从量纲即可看出

[2] 这里没看懂

关于ϵ的1阶方程为：

$$\frac{f^2 l_0^2}{gS}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\hat{z}^2}+\frac{\partial}{\partial\xi}[\frac{1}{\beta^2\xi^2l_0^2-\hat{\omega}^2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}]+\frac{l_0^2k}{\hat{\omega}}[\beta\frac{(\beta^2\xi^2l_0^2+\hat{\omega}^2)}{(\beta^2\xi^2l_0^2-\hat{\omega}^2)^2}-k\hat{\omega}\frac{1}{(\beta^2\xi^2l_0^2-\hat{\omega}^2)}]\Phi_1 = -\frac{l_0^2}{gS}[I_1+\frac{I_2}{(\beta^2\xi^2l_0^2-\hat{\omega}^2)}+\frac{I_3}{(\beta^2\xi^2l_0^2-\hat{\omega}^2)^2}] \tag{4}$$

其中，I_1, I_2, I_3与Φ_0与l_1相关。

2.2 Kelvin波波流相互作业推导

以下部分仅针对n=-1[3]，即Kelvin波进行推导，Yanai波（n=0）同理。

$$\Phi_0^{(-1)} = A_0^{(-1)}(\tau)exp(-\xi^2/2)exp(i\hat{z})$$

$$\sqrt{gh^{(-1)}} = -\frac{\hat{\omega}}{k} \tag{5}$$

方程（5）相对于没有牛顿冷却项的c加了一个虚数的部分$i\frac{\alpha}{k}$

方程（4）左侧与（2）是形式是相同的。这时应该考虑两个条件：

1. 如果方程（4）右侧的项与Φ_0成比例,这对Φ_1相当于给了一个共振频率的外强迫，会引起共振。

2. 当$\beta^2\xi^2l_0^2-\hat{\omega}^2=0$ 时，右侧第二项与第三项都是奇点，对应无限的强迫。至少应该要求，这两项对整个y(或ξ)积分应该是有限的。所以，被积分项最大只能有一阶极点，因此要求

$$I_3 \propto \beta^2\xi^2l_0^2-\hat{\omega}^2$$

得到:

$$l_1 = -\frac{1}{2}i\frac{dU/dz}{\sqrt{gS}}l_0$$

此时恰巧右侧第二项与第三项之和为0，让第一项对ξ的积分对Φ_0无投影来避免共振，最后得到

$$A_0 = \frac{constant}{\sqrt{fl_0}}$$

这样，记

$$-\frac{\hat{\omega}}{k} \equiv c-U$$

由方程（3、5）可知，$f \propto \frac{1}{c-U}$，$l_0 \propto (c-U)^{\frac{1}{2}}$, 从而

$$\Phi_0 \propto (c-U)^{\frac{1}{4}}exp(i\hat{z})$$

$$w_0 \propto (c-U)^{\frac{1}{4}}exp(i\hat{z})$$

$$u_0 \propto (c-U)^{-\frac{3}{4}}exp(i\hat{z})$$

[3] n的选择见 [2]

$$v_0 = 0$$

所以，记$\langle\ \rangle$为对y积分，$^-$代表对时间或纬向平均

$$\left\langle \bar{F}/\rho \right\rangle = \langle \overline{u_0 w_0} \rangle \propto \frac{1}{(c-U)^{1/2}} \frac{dy}{d\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-\xi^2) d\xi \ exp(2i\hat{z}) = Aexp(2i \ Im\{\hat{z}\}) \tag{6}$$

这里利用了之前l_1的结果，

$$exp(-\xi^2/2) \approx exp(-\frac{y^2}{l_0^2}(1 + Ri^{-1/2} i))$$

为了求$\hat{z}$的虚部，将f中的$i\frac{\alpha}{k}$恢复出来，c恢复为$-\frac{\omega}{k}$,泰勒展开得到

$$f^{(-1)} \approx \frac{\sqrt{gS}}{c-U}[1 - \frac{i\alpha}{k(c-U)}] \tag{7}$$

因此，Kevin波水平动量的垂直输送是

$$Aexp(-2\int_0^z g_0(z)dz)$$

$$g_0 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{gS}}{(c-U)^2}\frac{\alpha}{k}$$

如果带入具体的比例可知Kelvin波的通量恒为正（Yanai恒为负）。至此，全部需要的方程都以推导完毕。

3 数值重复

采用与Holton and Lindzen(1972) [3]同样的参数以及分辨率（250m，24hr），垂直差分采用中央差，垂直积分采用梯形近似，时间上采取最普通的欧拉前向积分。对$c-U$的绝对值加一个下界（0.002m/s）以防止超出数值范围。得到的结果图（）所示，确实存在东西风的准两年变化，这与Holton and Lindzen(1972) [3]的结果一致。

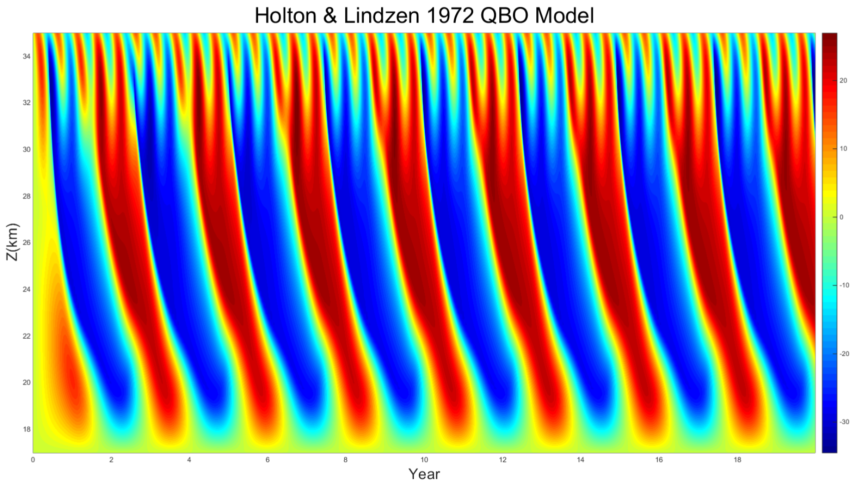

图 1: QBO模拟

参考文献

[1] Lindzen, Richard S. "Equatorial planetary waves in shear. Part I." Journal of the Atmospheric Sciences 28.4 (1971): 609-622.

[2] Holton, James R., and Richard S. Lindzen. "A note on Kelvin waves in the atmosphere." Mon. Wea. Rev 96 (1968): 385-386.

[3] Holton, James R., and Richard S. Lindzen. "An updated theory for the quasi-biennial cycle of the tropical stratosphere." Journal of the Atmospheric Sciences 29.6 (1972): 1076-1080.