3.5:Induktionsbeweis II: Binomialkoeffizienten

$\forall$ n,k $\geqslant$ 0 : bin(n, k) $\equiv \frac{(n+k)!}{k! \cdot n!} = \binom{n+k}{k}$ =: $P_{n,k}$

Induktionsanfang:

bin(0,0)= $\frac{(0+0)!}{0! \cdot 0!}$ =1 //true

bin(1,1)= $\frac{(1+1)!}{1! \cdot 1!}$ =2 //true

bin(n,k) $\equiv \frac{(n+k)!}{k! \cdot n!}$

=bin(n-1,k)+bin(n,k-1) //hypothesis

bin(n+1,k+1)$\equiv \frac{(n+k+2)!}{(k+1)! \cdot (n+1)!} = \frac{(n+k)!(n+k+1)(n+k+2)}{k! \cdot n!(k+1)(n+1)}$

$$= \frac{(n+k)!(n^2 + kn + 2n + kn + k^2 + 2k + n + k + 2)}{k! \cdot n!(k+1)(n+1)}$$

$$= \frac{(n+k)![n^2 + n + 2(kn + k + n + 1) + k^2 + k)}{k! \cdot n!(k+1)(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)(n+k+1)(n+k)! + (n+k+1)(k+1)(n+k)!}{k! \cdot n!(k+1)(n+1)}$$

$$= \frac{(n+k)!(n+k+1)}{k! \cdot n!(k+1)} + \frac{(n+k)!(n+k+1)}{k! \cdot n!(n+1)}$$

=bin(n,k+1)+bin(n+1,k) //true

//Fertig

Terminierungsfunktion:T(i)=2i

Begruendung:T(0)=1,T(1)=2,T(2)=4,T(3)=6, T(4)=8,....T(i)=2i