第 1 次习题课题目

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 确界

(1) 非空实数集 A 的最小上界 (若存在) 叫作 A 的上确界, 记作 $\sup A$; 它的最大下界 (若存在) 叫作 A 的下确界, 记作 $\inf A$.

(2) **上确界的刻画:** $\xi = \sup A$ 当且仅当 ξ 为 A 的上界且 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ 使得 $x > \xi - \varepsilon$.
否定形式: $\xi \neq \sup A$ 当且仅当 ξ 不是 A 的上界或 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $\forall x \in A$, $x \leqslant \xi - \varepsilon$.

(3) **上确界与下确界的关系:** $\sup A = -\inf(-A)$.

(4) **确界定理:** 有上界的非空数集必有上确界; 有下界的非空数集必有下确界.

2. 数列极限的定义

(1) **极限的定义:** 称数列 $\{a_n\}$ 有极限 $A \in \mathbb{R}$, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 我们均有 $|a_n - A| < \varepsilon$. 也称该数列收敛于 A, 记作 $a_n \to A$ $(n \to \infty)$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 数列有极限也称为收敛, 否则称为发散.

(2) **否定形式:** 数列 $\{a_n\}$ 不收敛到 $A \in \mathbb{R}$ 当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall N > 0$, $\exists n_N > N$ 满足 $|a_{n_N} - A| \geqslant \varepsilon_0$.

3. 数列极限的性质

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$.

(2) 从某项开始取常数的数列收敛到该常数, **反之不对**.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 而数列 $\{b_n\}$ 有界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

(4) **唯一性:** 若数列收敛, 则其极限唯一.

(5) **有限韧性:** 改变数列的有限项不改变其敛散性.

(6) **均匀性:** 数列收敛当且仅当它的任意子列均收敛到同一个实数. **该结论常用来证明数列不收敛.**

(7) **有界性:** 收敛的数列有界.

(8) **局部保序:** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.
 (a) 若 $A > B$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n > b_n$.
 (b) 若 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n \geqslant b_n$, 则 $A \geqslant B$.

(9) **局部保号:** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.
 (a) 若 $A > 0$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n > 0$.
 (b) 若 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n \geqslant 0$, 则 $A \geqslant 0$.
 (c) 若 $A \neq 0$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n \neq 0$.

(10) **四则运算法则:** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, 则

(a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = AB$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$ (若 $B \neq 0$).

(11) **夹逼原理:** 假设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}$ 满足下列条件:

(a) $\exists n_0 > 0$ 使得 $\forall n > n_0$, 均有 $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

则数列 $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

(12) 若数列 $\{a_n\}$ 非负且收敛于 A, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

4. 典型例题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ $(0 < |q| < 1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k^n\Big)^{\frac{1}{n}} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} a_k$, 其中 $a_k \geqslant 0$;

(5) $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}$.

5. 典型数列的增长速度比较

(1) **对数函数比常数增长得更快:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$;

(2) **幂函数比对数函数增长得更快:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$ (其中 $\alpha > 0$);

(3) **指数函数比幂函数增长得更快:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ (其中 $\alpha \in \mathbb{R}$, $a > 1$);

(4) **连乘积比指数函数增长得更快:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ $(a \in \mathbb{R})$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

(6) **平均性:** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = A$.

6. 单调有界定理

(1) **单调有界定理:** 单调有界数列收敛; 单调无界数列有极限.

(2) 应用单调有界定理的典型例子:

(a) $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}$, 并且 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n < e < \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}, \ \frac{1}{n+1} < \log\Big(1+\frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{n}.$$

特别地, 我们有 $2 = a_1 < e < b_5 < 3$.

(b) 数列 $\{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\}$ 收敛.

(c) 常用于计算由递归关系定义的数列的极限:

(i) 设 $c>0$, $a_1=\sqrt{c}$ 且 $\forall n\geqslant 1$, $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$. 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4c}).$$

(ii) 设 $b_1\geqslant a_1\geqslant 0$. $\forall n\geqslant 1$, 归纳定义 $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$, $b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$.
则数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛到同一个极限.

7. Stolz 定理及其应用

(1) **Stolz 定理:** 设 $A\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

(a) 若 $\{b_n\}$ 严格增趋于 $+\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

(b) 若 $\{b_n\}$ 严格单调趋于 0 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

(2) **Stolz 定理的典型应用:**

(a) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$ $(k\in\mathbb{N})$.

8. 关于实数系的基本定理

下述定理等价:

(1) **确界定理:** 有上界的非空集合有上确界, 有下界的非空集合有下确界.

(2) **单调有界定理:** 单调有界数列收敛.

(3) **区间套定理:** 区间长度趋于 0 的闭区间套的交为单点集.

(4) **Cauchy 判别准则 (收敛原理):** 数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它为 Cauchy 数列.

(a) **Cauchy 数列的定义:**

(i) $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall m,n>N$, 均有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$;

(ii) $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N$ 以及 $\forall p\geqslant 1$, 均有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$;

(b) **Cauchy 数列定义的否定表述:**

(i) $\exists\varepsilon_0>0$ 使得 $\forall N>0$, $\exists m,n>N$ 满足 $|x_m-x_n|\geqslant\varepsilon_0$.

(ii) $\exists\varepsilon_0>0$ 使得 $\forall N>0$, $\exists n>N$ 且 $\exists p>0$ 满足 $|x_{n+p}-x_n|\geqslant\varepsilon_0$.

(5) **Cauchy 判别准则的典型应用:**

(a) 设 $a>0$, $0<q<1$ 且 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant aq^n$. 则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(b) 数列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}\right\}$ 收敛.

(c) $\forall n\geqslant 1$, 令 $x_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$. 则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(d) 若 $\exists C>0$ 使得 $\forall n\geqslant 1$, $y_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_{k+1}-x_k|<C$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(e) 设 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, 且 $\forall n\geqslant 1$, $x_{n+1}\geqslant x_n+\frac{1}{n^\alpha}$. 则数列 $\{x_n\}$ 发散.

第 2 部分 习题课题目

1. 求证: 具有收敛子列的单调数列收敛.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+2n-3}-\sqrt{2n^2+n})$,
(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,
(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}}\right)$,
(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$ $(|x|<1)$,
(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$,
(6) $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\big(\cos(2\pi m!\,x)\big)^n$ $(x\in\mathbb{R})$.

3. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\big(\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^n\big)^{\frac{1}{n}}+\big(\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^{-n}\big)^{\frac{1}{n}}\right)$, 其中 $a_k>0$ $(1\leqslant k\leqslant m)$,
(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\big((n^k+1)^{-\frac{1}{k}}+(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\big)$,
(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$,
(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$,
(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})\cos(n^{10}!)$,
(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((\sin n!)\big(\frac{n-1}{n^2+1}\big)^{10}-\big(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\big)\frac{2n^2+1}{n^2-1}\right)$,
(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$,
(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n}x$ $(x\in\mathbb{R})$,
(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}$,
(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{10}\sqrt[n]{k}$.

4. 判断下列数列 $\{x_n\}$ 的收敛性:

(1) $x_n=\frac{(-1)^n n}{n+1}$, (2) $x_n=n^{(-1)^n}$.

5. 假设 $\forall n\geqslant1$, 均有 $x_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$.

6. 假设 $\forall n\geqslant1$, 均有 $x_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$.

7. 求证: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$,
(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}$ (其中 $p\geqslant1$ 为整数).

8. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=1$, $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

9. 设 $\alpha\geqslant2$ 为常数. $\forall n\geqslant1$, 令 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$. 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

10. 设$\{a_{n-1}\}$有界且 $\forall n \geqslant 1$, $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k q^k$ $(|q| < 1)$. 求证: 数列 $\{b_n\}$ 收敛.

11. 若 $\forall n \geqslant 1$, $|a_{n+1} - a_n| \leqslant b_n$, 而 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right\}$ 收敛, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

12. 设 $0 < c \leqslant 1$, $x_1 = \frac{c}{2}$ 且 $\forall n \geqslant 1$, $x_{n+1} = \frac{c+x_n^2}{2}$, 求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

13. $\forall n \geqslant 1$, 令 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. 求证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

14. 设 $b_1 > a_1 > 0$. $\forall n \geqslant 1$, 递归地定义 $a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. 证明: 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均收敛且有相同极限.

15. 设 $x_1 > x_2 > 0$ 且 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} x_n}$, 求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

补充题 (非常难,可以不用做):

16. 下述几种说法, 哪一种可以作为数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件:

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p, N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

(3) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p > 0$ 以及 $\forall N > 0$ 使得 $\forall n \geqslant N$, 均有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

(4) $\forall p \geqslant 1$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+p} - x_n) = 0$.

(5) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 只要 $n > N$, 就有 $|x_n - x_N| < \varepsilon$.

(6) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon > 0$ 且 $\exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}$, 只要 $n > N_\varepsilon$, 就有 $|x_n - A_\varepsilon| < \varepsilon$.

17. 设 $\{b_n\}$ 严格增趋于 $+\infty$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

18. 设 $\{b_n\}$ 严格单调趋于 0. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

19. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a \in \mathbb{R}$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k = 0$.

20. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k = a$.