电磁场数值计算

邢庆子

Tel: 62781684(o), 13661226717

E-mail: xqz@tsinghua.edu.cn

清华大学工物系加速器实验室 刘卿楼**309**

上节内容

3.3 平行平面场中拉普拉斯方程与泊松方程的有限元方程组

3.3.3 μ 不等于常数时的有限元方程组

3.4 轴对称场中泊松方程的有限元方程组

3.4.1 泊松方程的等价变分问题

3.4.2 等价变分问题离散化

3.4.3 对称轴的处理

3.5 定态时变场的有限元分析

本节内容

3.6 有限元方程组的求解

3.8 有限元素的自动剖分

3.6 有限元方程组的求解

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{R}_{1} - \boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{d} \end{cases}$$

γ ＝常数时：线性方程组

$\gamma \neq$ 常数时：非线性方程组

3.6.1 有限元线性方程组解法

- 高斯-若尔当解法

注意有限元方程组系数矩阵的特点：

(1) 对称性

(2) 稀疏性与正定性

3.6.2 有限元非线性方程组解法

- 最速下降法，共轭梯度法等。

- 线性化方法：如逐次线性化方法、牛顿-拉夫逊迭代法及改进型的牛顿-拉夫逊迭代法等。

逐次线性化方法：收敛性好，但收敛速度慢。适宜在求解方程的阶数不是特别高时采用；

牛顿-拉夫逊迭代法：收敛速度快，但在形成方程组时需要很大的计算量，并要求有很好的初值。

改进型的牛顿-拉夫逊迭代法。

1. 牛顿-拉夫逊迭代法

待求的非线性方程组： $\boldsymbol{KA}=\boldsymbol{R}$ （直角坐标系）

若 $\boldsymbol{A}$ 是近似解，定义余矢量：

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{KA}-\boldsymbol{R}$$

将 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ 用泰勒级数表示，取一次项：

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\right)+\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{A}}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{A}^{(0)}}\left[\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{A}^{(0)}\right]$$

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\right)+\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{A}}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{A}^{(0)}}\left[\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{A}^{(0)}\right]$$

F*(*A*)** 的雅可比矩阵在A*⁽⁰⁾**处的值：

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\right)=\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{A}}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{A}^{(0)}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1^{(0)}}{\partial A_1} & \frac{\partial F_1^{(0)}}{\partial A_2} & \cdots & \frac{\partial F_1^{(0)}}{\partial A_n} \\ \frac{\partial F_2^{(0)}}{\partial A_1} & \frac{\partial F_2^{(0)}}{\partial A_2} & \cdots & \frac{\partial F_2^{(0)}}{\partial A_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n^{(0)}}{\partial A_1} & \frac{\partial F_n^{(0)}}{\partial A_2} & \cdots & \frac{\partial F_n^{(0)}}{\partial A_n} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\right)+\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\right)\left[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{(0)}\right]$$

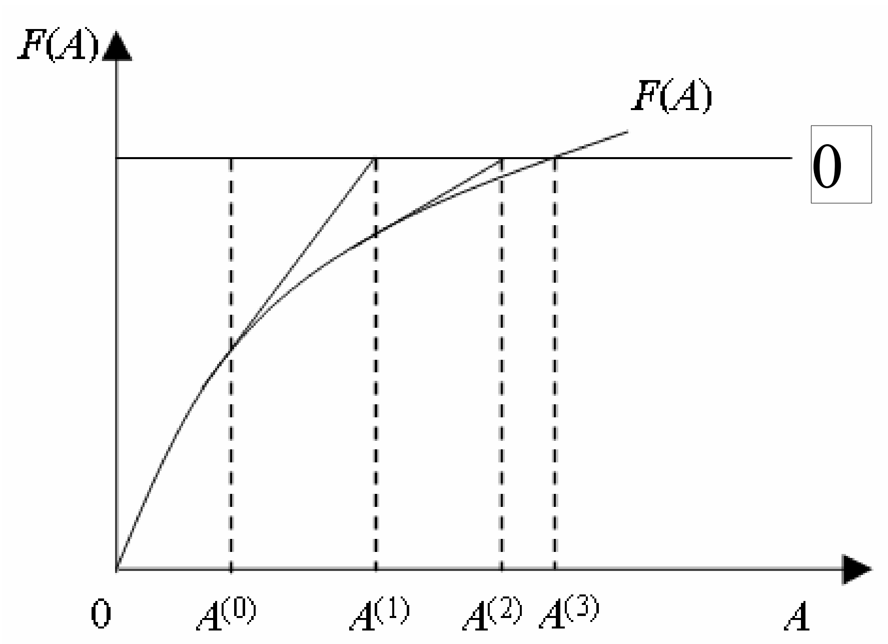
3.6.2 有限元非线性方程组解法

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\right)+\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\right)\left[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{(0)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\right)+\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\right)\left[\boldsymbol{A}^{(1)}-\boldsymbol{A}^{(0)}\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^{(1)}=\boldsymbol{A}^{(0)}-\left[\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^{(K+1)}=\boldsymbol{A}^{(K)}-\left[\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{A}^{(K)}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}^{(K)}\right)$$



$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{A}^{(K)}\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1^{(K)}}{\partial A_1} & \dfrac{\partial F_1^{(K)}}{\partial A_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1^{(K)}}{\partial A_n}\\ \dfrac{\partial F_2^{(K)}}{\partial A_1} & \dfrac{\partial F_2^{(K)}}{\partial A_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2^{(K)}}{\partial A_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial F_n^{(K)}}{\partial A_1} & \dfrac{\partial F_n^{(K)}}{\partial A_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_n^{(K)}}{\partial A_n}\end{bmatrix}$$

3.6.2 有限元非线性方程组解法

一个单元的余矢量：

$$\boldsymbol{F}^{(e)}=\boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{A}^{(e)}-\boldsymbol{R}^{(e)}=\begin{bmatrix} K_{ii}^{(e)}A_i+K_{ij}^{(e)}A_j+K_{im}^{(e)}A_m-R_i^{(e)} \\ K_{ji}^{(e)}A_i+K_{jj}^{(e)}A_j+K_{jm}^{(e)}A_m-R_j^{(e)} \\ K_{mi}^{(e)}A_i+K_{mj}^{(e)}A_j+K_{mm}^{(e)}A_m-R_m^{(e)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_i^{(e)} \\ f_j^{(e)} \\ f_m^{(e)} \end{bmatrix}$$

单元雅可比矩阵：

$$\boldsymbol{J}^{(e)}(\boldsymbol{A})=\frac{\partial \boldsymbol{F}^{(e)}}{\partial \boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_i^{(e)}}{\partial A_i} & \dfrac{\partial f_i^{(e)}}{\partial A_j} & \dfrac{\partial f_i^{(e)}}{\partial A_m} \\ \dfrac{\partial f_j^{(e)}}{\partial A_i} & \dfrac{\partial f_j^{(e)}}{\partial A_j} & \dfrac{\partial f_i^{(e)}}{\partial A_m} \\ \dfrac{\partial f_m^{(e)}}{\partial A_i} & \dfrac{\partial f_m^{(e)}}{\partial A_j} & \dfrac{\partial f_m^{(e)}}{\partial A_m} \end{bmatrix}$$

以 $\dfrac{\partial f_i^{(e)}}{\partial A_i}$ 为例，看雅可比矩阵第 ii 项元素对单元 e 的贡献：

$$K_{st}^{(e)} = \frac{\gamma}{4\Delta}\left(b_t b_s + c_t c_s\right) \qquad \textbf{（3.66）}$$

$$\frac{\partial f_i^{(e)}}{\partial A_i} = K_{ii}^{(e)} + \frac{\partial K_{ii}^{(e)}}{\partial A_i} A_i + \frac{\partial K_{ij}^{(e)}}{\partial A_i} A_j + \frac{\partial K_{im}^{(e)}}{\partial A_i} A_m$$

$$\frac{\partial K_{st}^{(e)}}{\partial A_i} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial A_i} K_{st}^{(e)}$$

$$\frac{\partial f_i^{(e)}}{\partial A_i} = K_{ii}^{(e)} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial A_i}\left(K_{ii}^{(e)} A_i + K_{ij}^{(e)} A_j + K_{im}^{(e)} A_m\right)$$

下面求 $\dfrac{\partial \gamma}{\partial A_i}$。

$$A = N_i A_i + N_j A_j + N_m A_m$$

$$= \frac{1}{2\Delta}\left[\left(a_i + b_i x + c_i y\right) A_i + \left(a_j + b_j x + c_j y\right) A_j + \left(a_m + b_m x + c_m y\right) A_m\right]$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial A_i} = \frac{\partial \gamma}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial A_i} = \frac{\partial \gamma}{\partial B}\frac{1}{2B}\left[2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) + 2\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial \gamma}{\partial B}\frac{1}{B}\frac{1}{\Delta\gamma}\frac{\gamma}{4\Delta}\left[\left(b_i^2 + c_i^2\right) A_i + \left(b_i b_j + c_i c_j\right) A_j + \left(b_i b_m + c_i c_m\right) A_m\right]$$

$$= \frac{\partial \gamma}{\partial B}\frac{1}{B}\frac{1}{\Delta\gamma} g_i^{(e)}$$

式中 $$g_i^{(e)} = K_{ii}^{(e)} A_i + K_{ij}^{(e)} A_j + K_{im}^{(e)} A_m$$

因此
$$\frac{\partial f_i^{(e)}}{\partial A_i}=K_{ii}^{(e)}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial A_i}\left(K_{ii}^{(e)}A_i+K_{ij}^{(e)}A_j+K_{im}^{(e)}A_m\right)$$
$$=K_{ii}^{(e)}+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial B}\frac{1}{B}\frac{1}{\Delta\gamma}g_i^{(e)}\right)g_i^{(\mathrm{e})}$$

作业：补8：推导下面两个公式：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_i^{(e)}}{\partial A_j}=K_{ij}^{(e)}+\dfrac{g_i^{(e)}g_j^{(e)}}{\gamma^2 B\Delta}\dfrac{\partial \gamma}{\partial B}=\dfrac{\partial f_j^{(e)}}{\partial A_i}\\[2ex] \dfrac{\partial f_i^{(e)}}{\partial A_m}=K_{im}^{(e)}+\dfrac{g_i^{(e)}g_m^{(e)}}{\gamma^2 B\Delta}\dfrac{\partial \gamma}{\partial B}=\dfrac{\partial f_m^{(e)}}{\partial A_i}\end{cases}$$

单元雅可比矩阵元素统一表示为：

$$J_{st}^{(e)} = K_{st}^{(e)} + \frac{1}{\gamma^2}\frac{g_s^{(e)} g_t^{(e)}}{B\Delta}\frac{\partial\gamma}{\partial B} \qquad s,t = i,\ j,\ m$$

$\Downarrow$ （ γ、B 对各单元均不相同）

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{k})}\right) = \sum_{\boldsymbol{e}=1}^{\boldsymbol{Ne}} \boldsymbol{J}^{(\boldsymbol{e})}\left(\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{k})}\right)$$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{A}^{(k+1)} = \boldsymbol{A}^{(k)} - \left[\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{A}^{k}\right)\right]^{-1} \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}^{(k)}\right)$$

$\dfrac{\partial \gamma}{\partial B}$ 的计算：

- 磁场磁化曲线采用逐段线性插值函数逼近：

当 $\boldsymbol{H}$ 值在 $\boldsymbol{H}_{K+1}$ 与 $\boldsymbol{H}_K$ 之间时，有

$$H = H_K + \frac{H_{K+1} - H_K}{B_{K+1} - B_K}\left(B - B_K\right)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial B} = \frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{H}{B}\right) = B^{-1}\frac{\partial H}{\partial B} - HB^{-2} = \frac{H_{K+1}B_K - H_K B_{K+1}}{B^2\left(B_{K+1} - B_K\right)}$$

2. 改进型的牛顿-拉夫逊迭代法

- 牛顿-拉夫逊迭代法的优点：

（1）收敛速度快，按平方律收敛；

（2）自校正功能，即 $\boldsymbol{A}^{(K+1)}$ 仅依赖于 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{A}^{(K)}$，前面迭代的舍入误差不会一步步传递下去。

- 其缺点：

（1）每次迭代都要形成一次 $\boldsymbol{J}^{(K)}$，而 $\boldsymbol{J}^{(K)}$ 的计算时间往往比迭代一次所需要的时间多；

（2）对初值要求较高，选择不当会引起振荡。

(1) 修正的牛顿—拉夫逊迭代法

全部求解过程都用$\boldsymbol{J}^{(0)}$，即每次迭代不需要形成新的系数矩阵。

将使迭代次数增加而影响收敛速度，但如初值选取较好，总体上将节省运算时间。

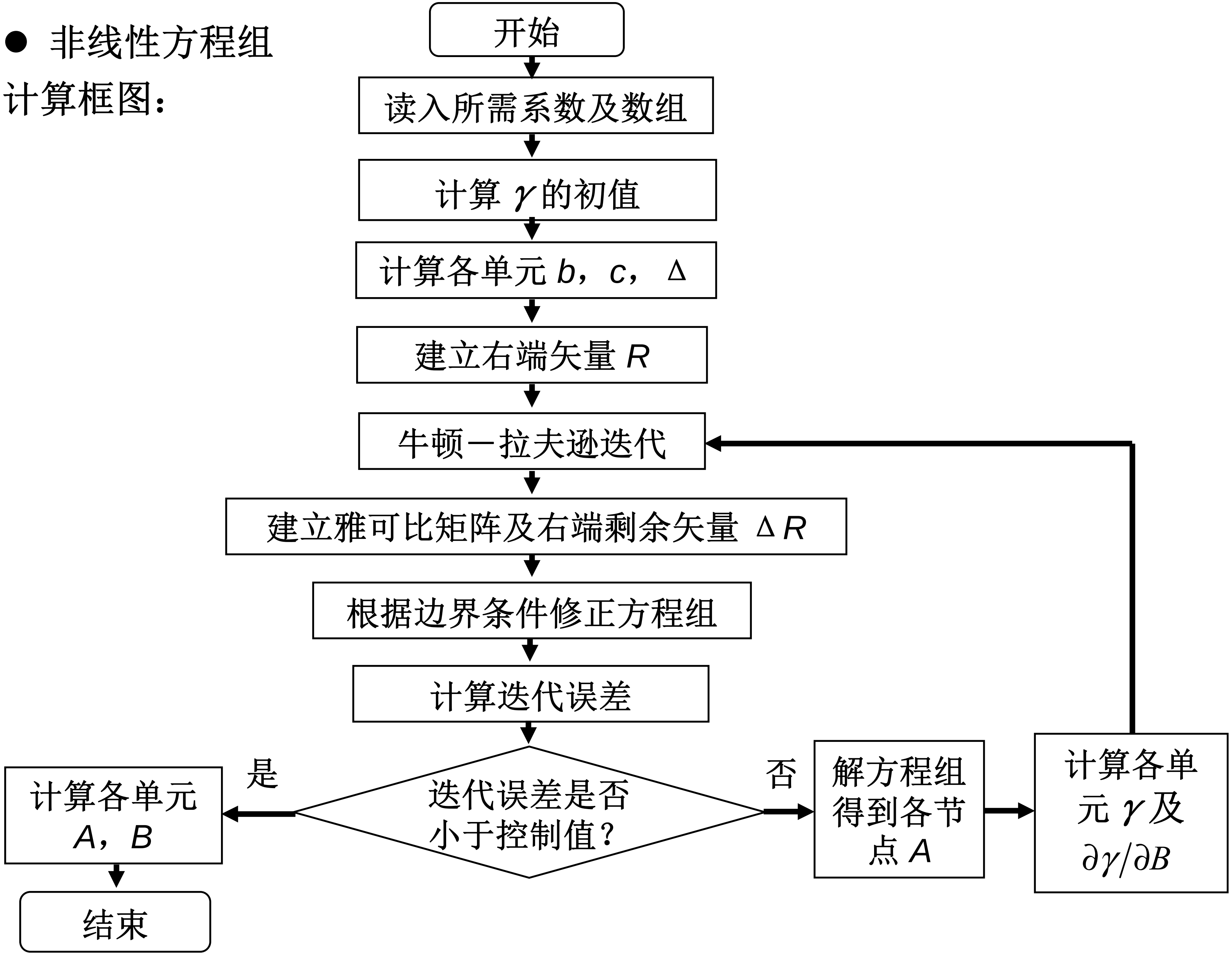
(2) 采用欠松弛因子的方法

欠松弛迭代的方法为 $$A^{(\mathrm{K}+1)} = A^{(\mathrm{K})} + \omega\Delta A^{(\mathrm{K})}$$

式中 ω 为收敛因子，$0<\omega<1$；$\Delta \boldsymbol{A}^{(K)}$ 为每次迭代近似解的误差

● 非线性方程组

计算框图：


开始
读入所需系数及数组
计算 γ 的初值
计算各单元 b，c， Δ
建立右端矢量 R
牛顿－拉夫逊迭代
建立雅可比矩阵及右端剩余矢量 ΔR
根据边界条件修正方程组
计算迭代误差
迭代误差是否小于控制值？
是
否
计算各单元 A，B
结束
解方程组得到各节点 A
计算各单元 γ 及 ∂γ/∂B

3.8 有限元素的自动剖分

- 采取自动剖分的必要性：

- 注意以下问题：

(1) 三角形各边不要相差太悬殊，避免出现尖锐的三角形；

(2) 一个节点周围，不宜集中过多的三角形单元，为压缩存储创造条件；

(3) 三角形单元内物理参数 (γ 或 μ) 变化连续，即媒质交界面应与单元的边界重合；

(4) 精度要求不同的区域，网格的密度应不同；

(5) 网格节点编排应规格化。

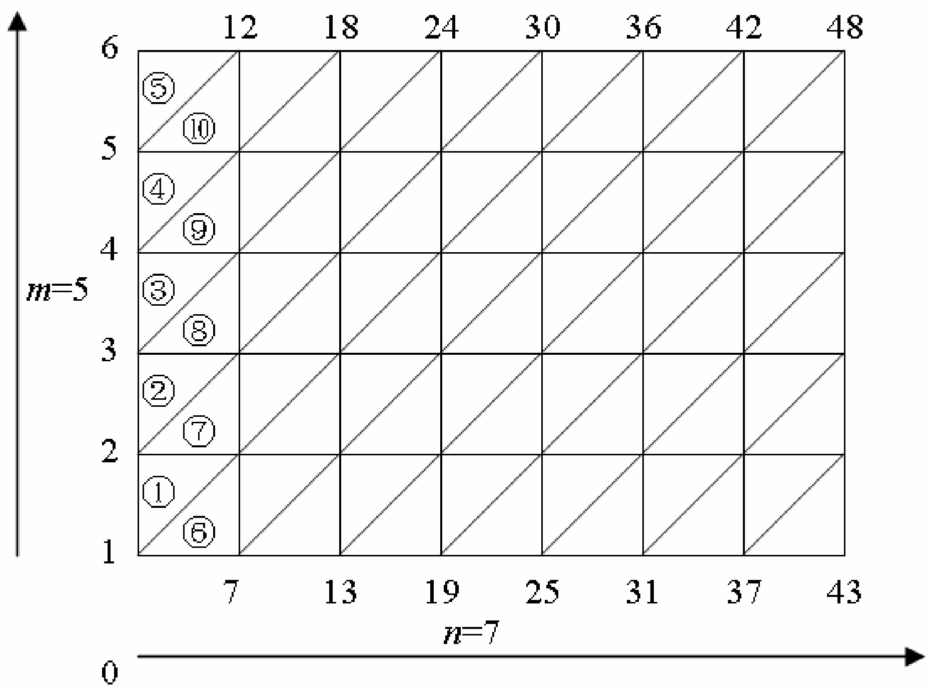
3.8.1 直线内插法

1. 确定 x 方向、y方向节点数及总节点数

x 方向节点数 $N_x = n+1$

y 方向节点数 $N_y = m+1$

节点总数 $N_0 = (n+1)(m+1)$



2. 确定各节点的坐标

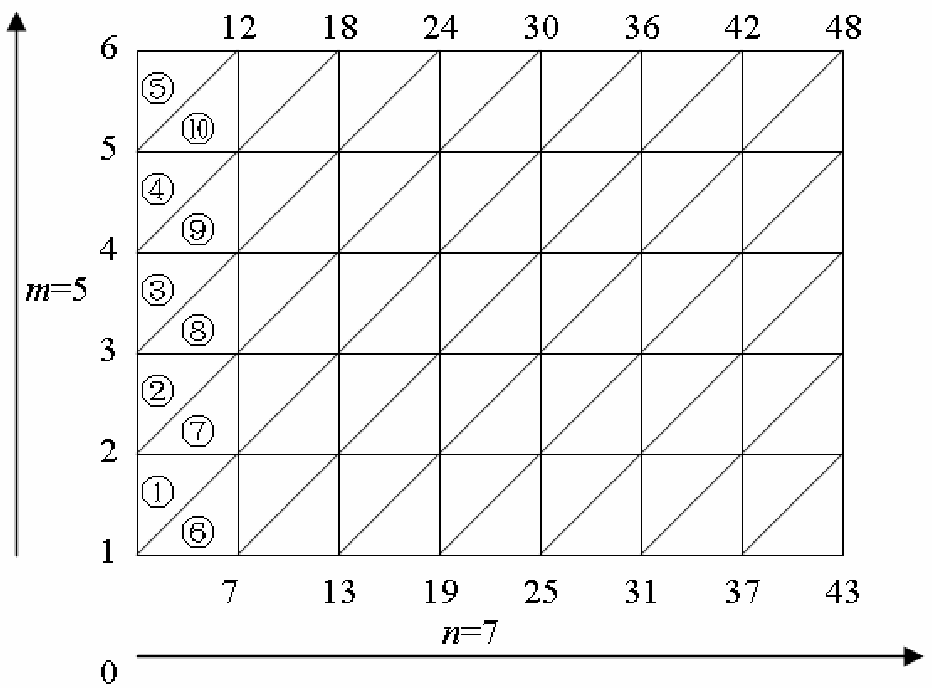
x 和 ***y*** 方向节点坐标最小值为 x_1、y_1，最大值为x_m、y_m，则节点坐标增量分别为：

$$\frac{x_m - x_1}{n} \qquad \frac{y_m - y_1}{m}$$

可推得第 $\boldsymbol{N}_{\mathrm{i}}$ 列 $\boldsymbol{N}_{\mathrm{j}}$ 行的第 $\boldsymbol{N}_{\mathrm{k}}$ 个节点的编号为：

$$N_{\mathrm{k}} = (N_{\mathrm{i}} - 1)N_{\mathrm{y}} + N_{\mathrm{j}}$$

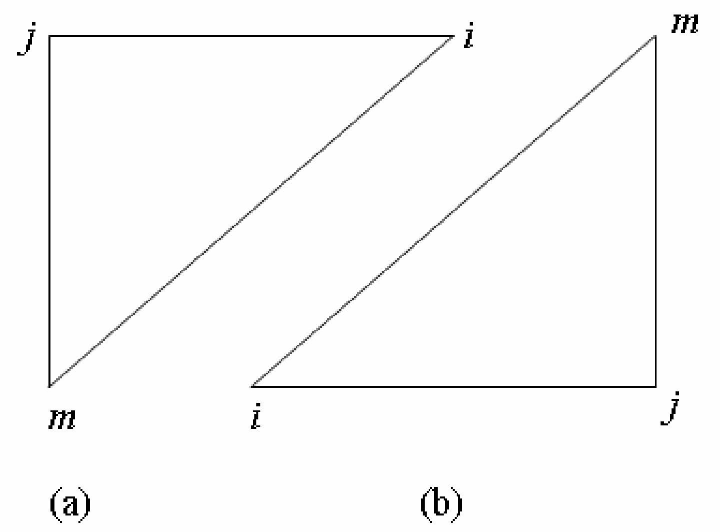
式中 $$\begin{cases} N_i = 1,2,\cdots N_x \\ N_j = 1,2,\cdots N_y \end{cases}$$



第 $\boldsymbol{N}_{\mathrm{k}}$ 个节点的坐标值为：

$$\begin{cases} x(N_k) = x_1 + \dfrac{(x_m - x_1)}{n}(N_i - 1) \\ y(N_k) = y_1 + \dfrac{(y_m - y_1)}{m}(N_j - 1) \end{cases}$$

3.确定三角形单元编号及各三角形单元3顶点(节点)按规定顺序的的总体编号



图(a)：单元编号 E 与行、列的关系为：

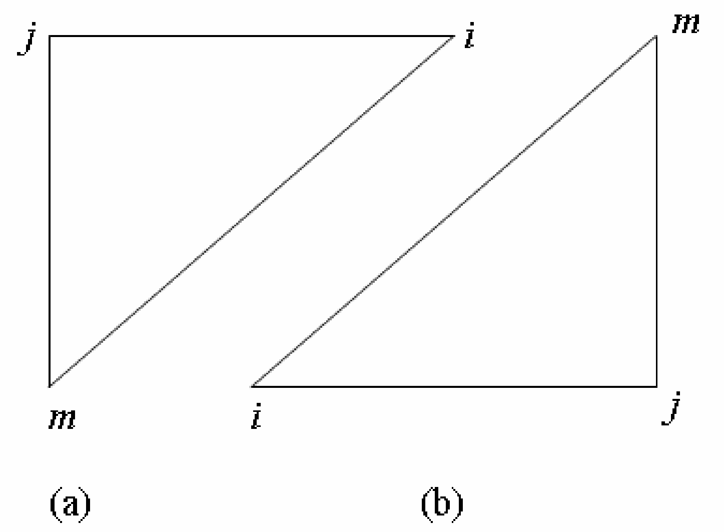
$$E=2(N_i-1)(N_y-1)+N_j$$

式中 $N_i=1，2，3\ldots，(N_x-1)$;

$N_j=1，2，3\ldots，(N_y-1)$。

图(a)中第 E 个三角形单元的 3 节点，i, j, m的总体编号与行、列的关系分别为：

$$\begin{cases} I(E)=2(N_i-1)N_y/2+N_y+N_j+1 \\ J(E)=I(E)-N_y \\ M(E)=J(E)-1 \end{cases}$$



图(b)：单元编号 ***E*** 与行、列的关系为

$$\boldsymbol{E}=(2\boldsymbol{N}_{\mathrm{i}}\text{-}1)(\boldsymbol{N}_{\mathrm{y}}\text{-}1)+\boldsymbol{N}_{\mathrm{j}}$$

式中 $\boldsymbol{N}_{\mathrm{i}}$＝**1，2，3…，(**$\boldsymbol{N}_{\mathrm{x}}$**-1);**

$\boldsymbol{N}_{\mathrm{j}}$ ＝**1，2，3…，(**$\boldsymbol{N}_{\mathrm{y}}$**-1)**。

3节点 *i*, *j*, *m*的总体编号与行、列的关系分别为：

$$\begin{cases} I(E)=(2N_i-2)N_y/2+N_j \\ J(E)=I(E)+N_y \\ M(E)=J(E)+1 \end{cases}$$

3.8.2 等势剖分

1962年，W.P. Crowley

- 等势剖分的思路：

1）定义两个势函数：$\varphi(x,y)$和 $\psi(x,y)$，满足拉氏方程；

2）求出拉氏坐标的反坐标方程，导出求解公式；

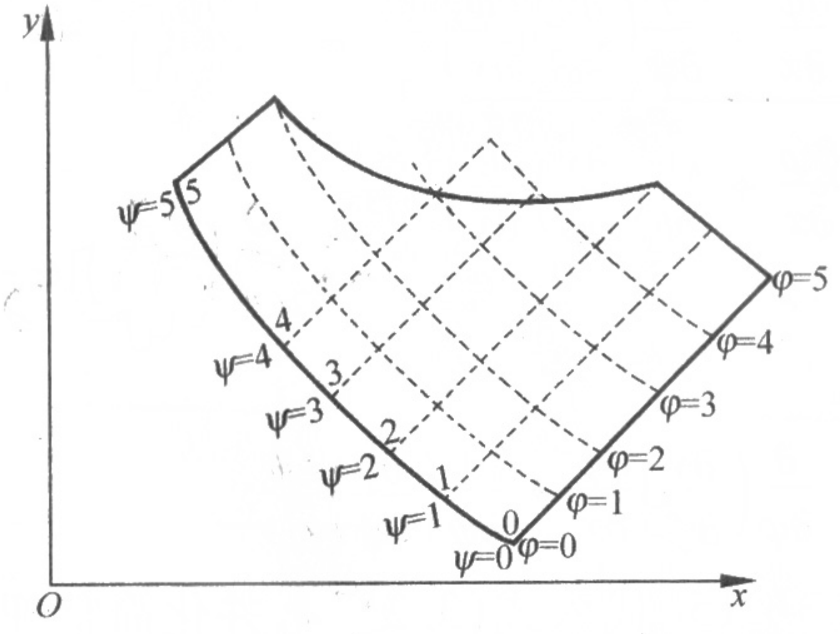
3）利用近似计算，根据三角形形状导出求解方程组；

4）使用已有方法求解方程组。

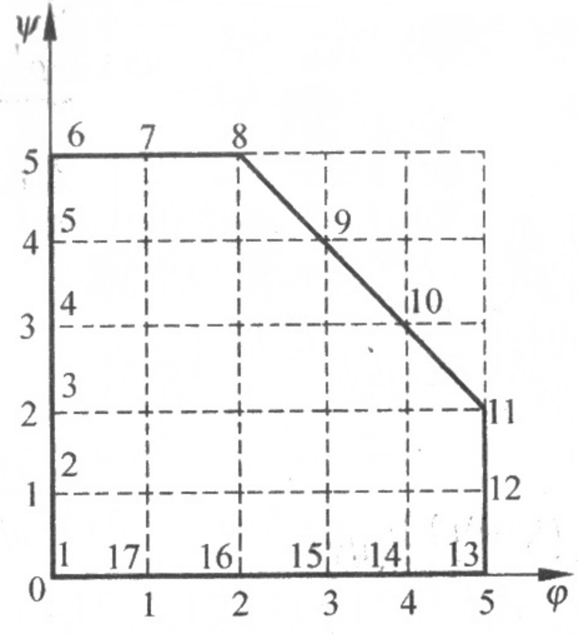
1. 微分方程的推导

把网格线看成平面上两个势函数的等势线，定义两个函数 **φ (x,y)** 及 **ψ (x,y)**，它们在整个计算区域内部满足拉普拉斯方程：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 & \varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0 \\
\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 & \psi_{xx}+\psi_{yy}=0
\end{cases}
$$



(a) x y平面区域



(b) 逻辑网格

- 当边界 φ_s和 ψ_s 给定后，可以解出场域内φ 和 ψ 的分布，求出等势线。

$$\varphi(x,y)=\varphi_i \qquad i=1,2,3......,n$$

$$\psi(x,y)=\psi_j \qquad j=1,2,3......,m$$

- 两族曲线的交点就是剖分所要确定的节点，但是得到的节点坐标是φ和 ψ 值，需要的是等势线交点在 **(*x*, *y*)** 平面上的坐标！

本节目的：将 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 & \varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0 \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 & \psi_{xx}+\psi_{yy}=0 \end{cases}$

转化为 ***x***、***y*** 的方程。

$$\begin{cases} x=x(\varphi,\psi) \\ y=y(\varphi,\psi) \end{cases} \xrightarrow{\text{两端对 } x \text{ 求导}} \begin{cases} 1=\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial x}{\partial\psi}\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial y}{\partial\psi}\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial x}{\partial \psi}\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial y}{\partial \psi}\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \psi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \psi} \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\partial x}{\partial \psi} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} & \dfrac{\partial y}{\partial \psi} \end{vmatrix}$$

令

$$J=-\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \psi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \psi} \end{vmatrix}=x_{\psi}y_{\varphi}-x_{\varphi}y_{\psi} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{\mathrm{x}}=\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{J}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\partial x}{\partial \psi} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} & \dfrac{\partial y}{\partial \psi} \end{vmatrix} \\ \psi_{\mathrm{x}}=\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{J}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & 1 \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \end{vmatrix} \end{cases}$$

3.8.2 等势剖分

$$\begin{cases}\varphi=\varphi(x,y)\\ \psi=\psi(x,y)\end{cases} \xrightarrow{\text{两端对 } x \text{ 求导}} \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\ \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\end{cases}$$

与上页结果比较可得：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial\psi}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial\psi}\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial\psi} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial\psi} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)=0$$

其中：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)=\frac{1}{J^2}\frac{\partial J}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\psi}-\frac{1}{J}\frac{\partial^2 y}{\partial \mathrm{x}\partial\psi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\mathrm{d}\psi}\right)=\frac{1}{J^2}\frac{\partial J}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \psi}-\frac{1}{J}\frac{\partial^2 y}{\partial \mathrm{x}\partial \psi}$$

其中：

$$\frac{\partial J}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial \varphi}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)$$

$$=\frac{\partial y}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]+\frac{\partial x}{\partial \psi}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]$$

$$-\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \psi}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{x}}\right]-\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial \psi}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)=\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

将式 **(3.208)**、 **(3.209)**、 **(3.210)** 、 **(3.213)**、 **(3.214)**、 **(3.215)** 及 $\partial J/\partial y$ 表达式代入式 **(3.212)** ，化简可得：

$$\frac{1}{J^3}\left[\frac{\partial x}{\partial\psi}\left(\alpha\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-2\beta\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi\partial\psi}+\gamma\frac{\partial^2 y}{\partial\psi^2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\partial y}{\partial\psi}\left(\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-2\beta\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi\partial\psi}+\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial\psi^2}\right)\right]=0$$

同理

$$\frac{1}{J^3}\left[\frac{\partial x}{\partial\varphi}\left(\alpha\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-2\beta\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi\partial\psi}+\gamma\frac{\partial^2 y}{\partial\psi^2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\left(\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-2\beta\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi\partial\psi}+\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial\psi^2}\right)\right]=0$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 = x_\psi^2 + y_\psi^2 \\
\beta &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi} = x_\varphi x_\psi + y_\varphi y_\psi \\
\gamma &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = x_\varphi^2 + y_\varphi^2
\end{aligned}\right\}$$

以上方程式有唯一解的条件为 $J \neq 0$，因此

$$\begin{cases}
\alpha x_{\varphi\varphi} - 2\beta x_{\varphi\psi} + \gamma x_{\psi\psi} = 0 \\
\alpha y_{\varphi\varphi} - 2\beta y_{\varphi\psi} + \gamma y_{\psi\psi} = 0
\end{cases}$$

3.8.2 等势剖分

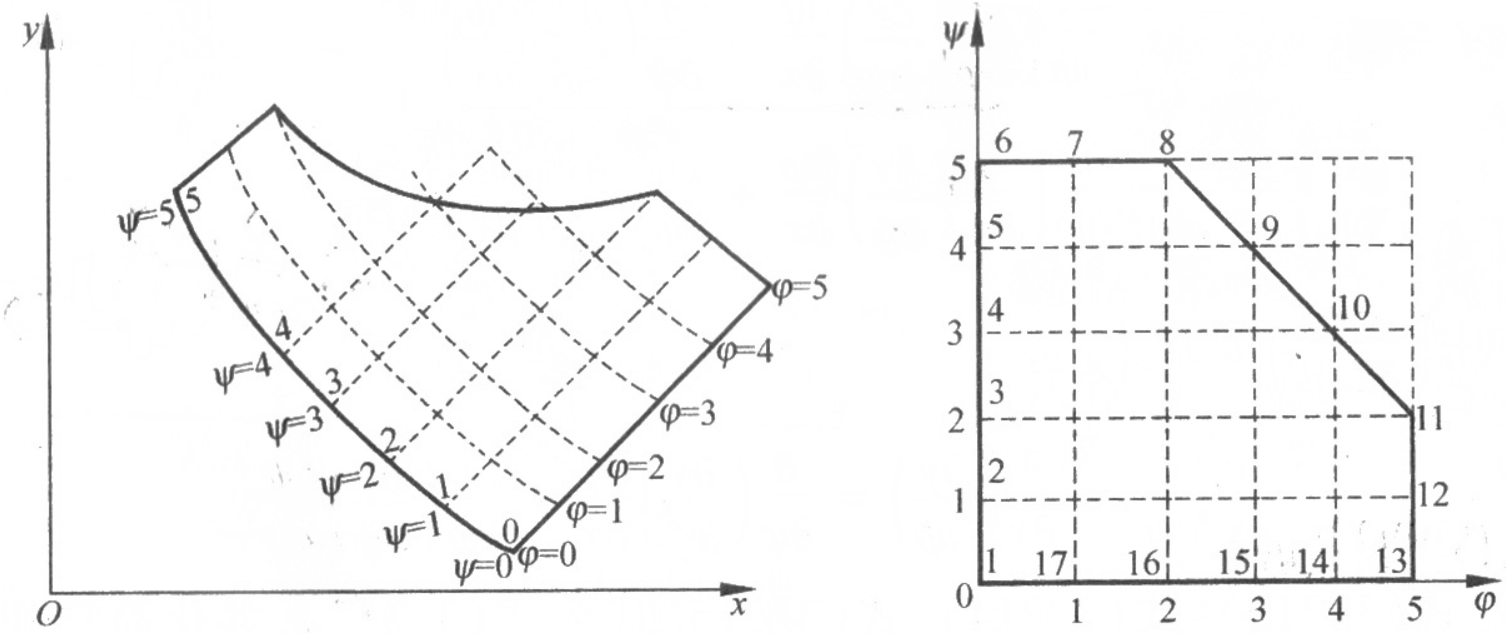
- 若在(φ，ψ)平面得到两组数值解 $x(\varphi, \psi)$ 和 $y(\varphi, \psi)$，则对于定域内每一确定的 φ_i 、 ψ_i， 就有一对 x_i 和 y_i，就是要求的某两条网格线相交处的节点坐标。

- (φ，ψ)平面上网格与节点数与 (x, y) 平面上是相等的，但在(φ，ψ)平面是等距的网格，在 (x, y)平面却是用相应边界确定的，各单元密度过渡是平滑的，但并不是等距网格。

2. 等势剖分计算公式的推导

$$\begin{cases} \alpha x_{\varphi\varphi} - 2\beta x_{\varphi\psi} + \gamma x_{\psi\psi} = 0 \\ \alpha y_{\varphi\varphi} - 2\beta y_{\varphi\psi} + \gamma y_{\psi\psi} = 0 \end{cases}$$

（1）边界值的确定

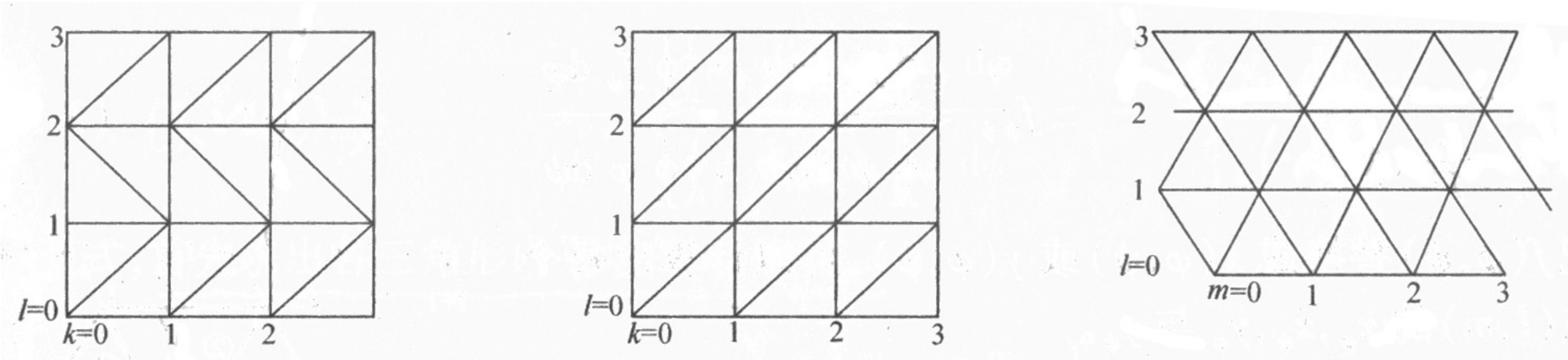


(a) x y平面区域　　**(b) 逻辑网格**

网格与边界的划分

（2）三角形网格的逻辑坐标

在空间坐标中用三角形网格剖分时， 在 (φ, ψ)坐标中，等φ线和等 ψ 线有多种取法。



(a) (b) (c)

不同的逻辑网格方式

（3）对等边三角形逻辑网格求解以下差分方程：

$$\begin{cases}\alpha x_{\varphi\varphi}-2\beta x_{\varphi\psi}+\gamma x_{\psi\psi}=0\\ \alpha y_{\varphi\varphi}-2\beta y_{\varphi\psi}+\gamma y_{\psi\psi}=0\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi&=l\\ \psi&=m\end{aligned}}$$

积分中值定理：$\int_S f_\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\psi \approx f_\varphi \int_S \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\psi$

二重积分中值定理：

设D为平面上有界闭区域，**$f(x,y)$**在D上连续，**$g(x,y)$**在D上可积且不变号，则至少存在一点**(x_0,y_0)**$\in$**D**，使得

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(x_0,y_0)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3.8.2 等势剖分

$$f_{\varphi} \approx \frac{\int_S f_{\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi}{\int_S \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi} \xrightarrow{\text{格林公式}} f_{\varphi} \approx \frac{\oint_{\mathrm{L}} f\,\mathrm{d}\psi}{\oint_{\mathrm{L}} \varphi\,\mathrm{d}\psi}$$

$$\int_S f_{\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi = \oint_L f\,\mathrm{d}\psi$$

$$\int_S \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi = \oint_L \varphi\,\mathrm{d}\psi$$

3.8.2 等势剖分

$$f_\psi \approx \frac{\oint_L f \mathrm{d}\varphi}{\oint_L \psi \mathrm{d}\varphi} = \frac{-\oint_L f \mathrm{d}\varphi}{\oint_L \varphi \mathrm{d}\psi}$$

对于二次积分，同样应用积分中值定理和格林公式：

$$f_{\varphi\varphi} = \frac{\oint_L f_\varphi \mathrm{d}\psi}{\oint_L \varphi \mathrm{d}\psi}$$

$$f_{\varphi\psi} = \frac{\oint_L f_\varphi \mathrm{d}\varphi}{\oint_L \psi \mathrm{d}\varphi} = -\frac{\oint_L f_\varphi \mathrm{d}\varphi}{\oint_L \varphi \mathrm{d}\psi}$$

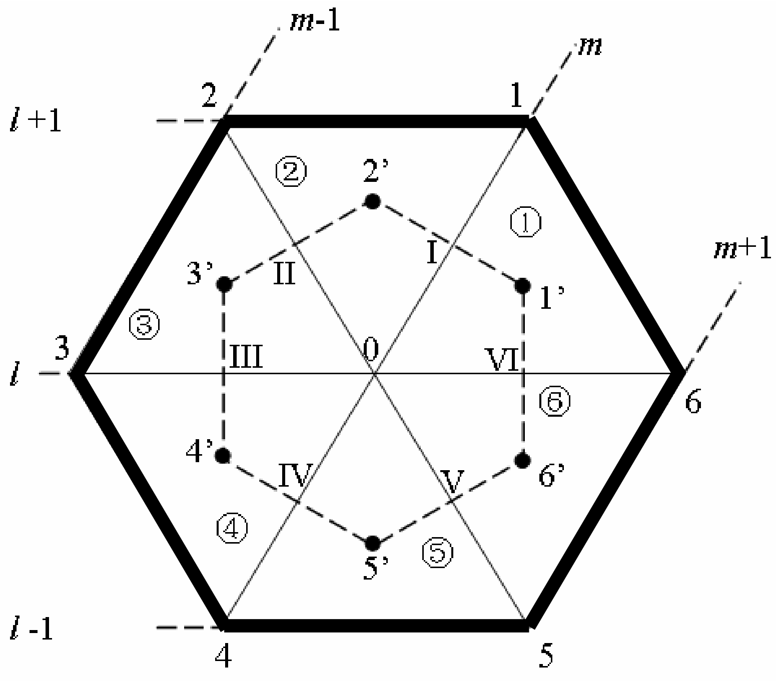
$$f_{\psi\psi} = \frac{\oint_L f_\psi \mathrm{d}\varphi}{\oint_L \psi \mathrm{d}\varphi} = -\frac{\oint_L f_\psi \mathrm{d}\varphi}{\oint_L \varphi \mathrm{d}\psi}$$

求 x_φ 的回路积分是沿6个三角形的外边界积分：

$$x_\varphi = x_l = \frac{\oint x \mathrm{d}m}{\oint l \mathrm{d}m} = \frac{\sum_{i=1}^{6} \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\left(m_{i+1} - m_i\right)}{\sum_{i=1}^{6} \frac{l_i + l_{i+1}}{2}\left(m_{i+1} - m_i\right)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i\left(m_{i+1} - m_{i-1}\right)}{\sum_{i=1}^{6} l_\mathrm{i}\left(m_{i+1} - m_{i-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\left(x_2 + 2x_1 + x_6\right) - \left(x_3 + 2x_4 + x_5\right)\right\}$$



等边三角形节点编号

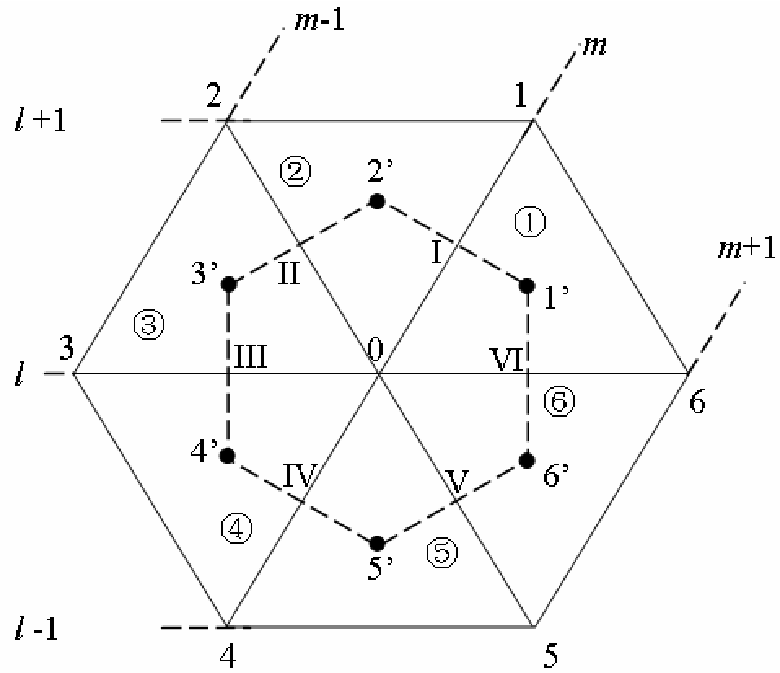
同理可得

$$x_{\psi} = x_{m} = \frac{-\oint_{L} x\mathrm{d}l}{\oint_{L} l\mathrm{d}m}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_{i}\left(l_{i+1} - l_{i-1}\right) = \frac{1}{6}\left\{\left(x_{1} + 2x_{6} + x_{5}\right) - \left(x_{2} + 2x_{3} + x_{4}\right)\right\}$$

y_{φ}, y_{ψ} 与上面求法完全相同，即将 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}$ 换成 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{i}}$，以上式子对 $\boldsymbol{y}$ 全部成立。由此可进一步求出 α，β，γ。

为求出 $x_{\varphi\varphi}$ ，对质心构成包围 (l, m)节点的六边形进行积分。



$$x_{\varphi\varphi} = \frac{\oint_L x_\varphi \mathrm{d}\psi}{\oint_L \varphi \mathrm{d}\psi} = \frac{\oint_L x_l \mathrm{d}m}{\oint_L l \mathrm{d}m}$$

$$x_{\varphi\psi} = \frac{\oint_L x_\varphi \mathrm{d}\varphi}{\oint_L \psi \mathrm{d}\varphi} = -\frac{\oint_L x_\varphi \mathrm{d}\varphi}{\oint_L \varphi \mathrm{d}\psi}$$

$$x_{\psi\psi} = \frac{\oint_L x_\psi \mathrm{d}\varphi}{\oint_L \psi \mathrm{d}\varphi} = -\frac{\oint_L x_\psi \mathrm{d}\varphi}{\oint_L \varphi \mathrm{d}\psi}$$

对应图示各点 (m, l)：

1’ [(m+1/3), (l+1/3)]　I [m, (l+1/2)]

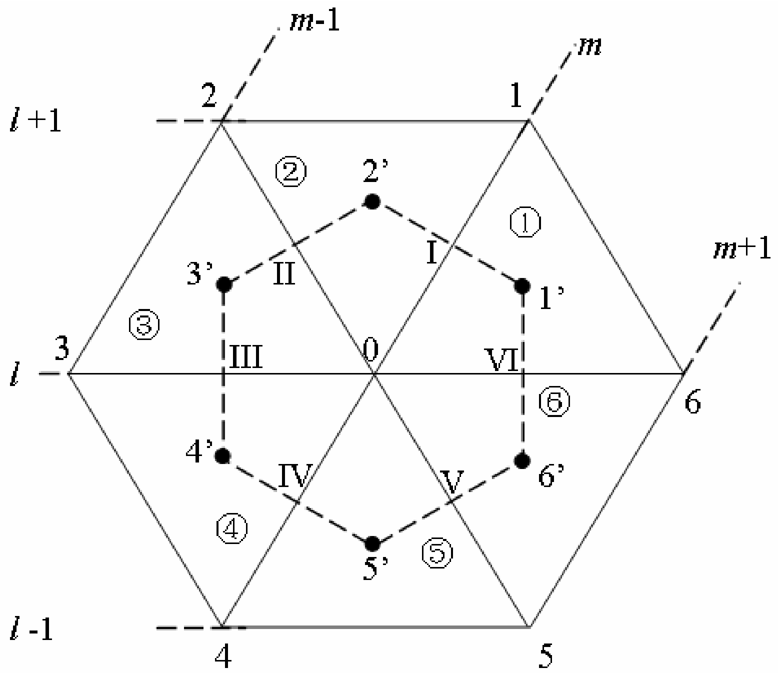
2’ [(m-1/3), (l+1/3)]　II [(m-1/2), (l+1/2)]

3’ [(m-2/3), (l+1/3)]　III [(m-1/2), l]

4’ [(m-1/3), (l-1/3)]　IV [m, (l-1/2)]

5’ [(m+1/3), (l-2/3)]　V [(m+1/2), (l-1/2)]

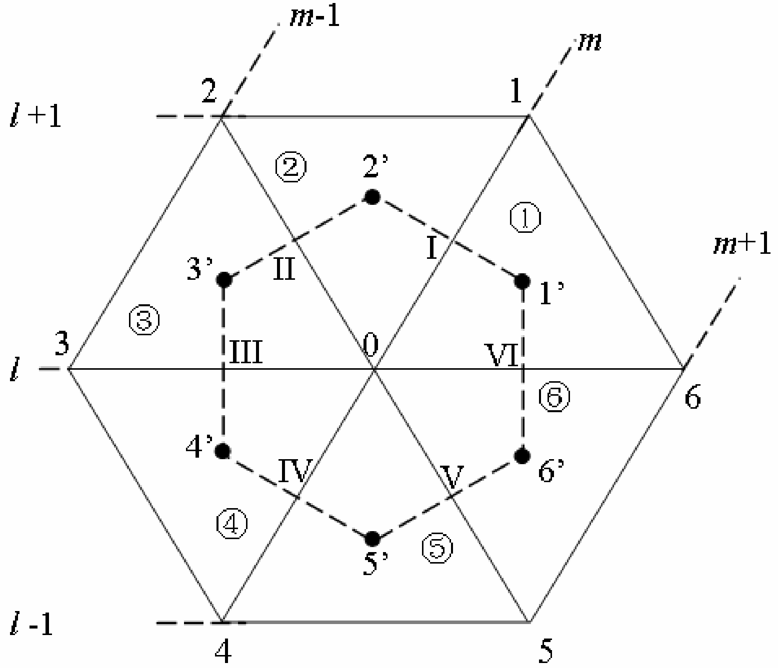
6’ [(m+2/3), (l-1/3)]　VI [(m+1/2), l]



各三角形内平均的 x_φ 和 x_ψ：

$$x_\varphi = \mathrm{x}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{3} x_j\left(m_{j+1}-m_{j-1}\right)}{\sum_{j=1}^{3} l_j\left(m_{j+1}-m_{j-1}\right)}$$

利用上式，求出各三角形的 x_l：



$$\left.\begin{array}{ll}
\Delta 106 & x_{l1} = x_1 - x \\
\Delta 102 & x_{l2} = x_1 - x \\
\Delta 203 & x_{l3} = x_2 - x_3 \\
\Delta 304 & x_{l4} = x - x_4 \\
\Delta 405 & x_{l5} = x - x_4 \\
\Delta 506 & x_{l6} = x_6 - x_5
\end{array}\right\}$$

再沿图中虚线做环路积分，求出

$$x_{\varphi\varphi} = x_{ll} = x_1 - 2x + x_4$$

同理可得

$$x_{\varphi\psi} = x_{lm} = x_{ml} = \frac{1}{2}\left\{\left(x_1 + x_6 + x_3 + x_4\right) - \left(x_2 + x_5 + 2x\right)\right\}$$

$$x_{\psi\psi} = x_{\mathbf{m}m} = x_6 - 2x + x_3$$

同理可得到 $y_{\varphi\varphi}, y_{\varphi\psi}$,$y_{\psi\psi}$ 类似的关系。

将它们代入

$$\begin{cases} \alpha x_{\varphi\varphi} - 2\beta x_{\varphi\psi} + \gamma x_{\psi\psi} = 0 \\ \alpha y_{\varphi\varphi} - 2\beta y_{\varphi\psi} + \gamma y_{\psi\psi} = 0 \end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases} (\alpha-\beta)(x_1 - 2x + x_4) + \beta(x_2 - 2x + x_5) + (\gamma-\beta)(x_3 - 2x + x_6) = 0 \\ (\alpha-\beta)(y_1 - 2y + y_4) + \beta(y_2 - 2y + y_5) + (\gamma-\beta)(y_3 - 2y + y_6) = 0 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases}(\alpha-\beta)(x_1-x)+\beta(x_2-x)+(\gamma-\beta)(x_3-x)\\ \qquad +(\alpha-\beta)(x_4-x)+\beta(x_5-x)+(\gamma-\beta)(x_6-x)=0\\ (\alpha-\beta)(y_1-y)+\beta(y_2-y)+(\gamma-\beta)(y_3-y)\\ \qquad +(\alpha-\beta)(y_4-y)+\beta(y_5-y)+(\gamma-\beta)(y_6-y)=0\end{cases}$$

统一形式：
$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{6} w_i(x_i-x)=0\\ \sum_{i=1}^{6} w_i(y_i-y)=0\end{cases}$$

上面推导的是等边三角形的情况。

对于不同的逻辑网格，$\mathbf{w_i}$ 的取值将不同！

3. 差分方程组的求解

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{6} w_i \left(x_i - x \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{6} w_i \left(y_i - y \right) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3.236)}$$

非线性代数方程，**n** 个内部节点有 **2n** 个坐标，有 **2n** 个方程，可采用高斯-赛德尔迭代。计算步骤为：

(1) 边界顶点坐标已知，其它节点赋初值。

(2) 从左下角开始计算 α，β，和 γ 。

(3) 计算**(3.236)**式，求 ***x*, *y***，经过多次迭代，最后得到各节点坐标值。

- Jacobi迭代

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1) \\ x_2 = \dfrac{-1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n - b_2) \\ \quad \vdots \\ x_n = \dfrac{-1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1} - b_n) \end{cases}$$

- Gauss－Seidel迭代

在**Jacobi**迭代中，使用最新计算出的分量值

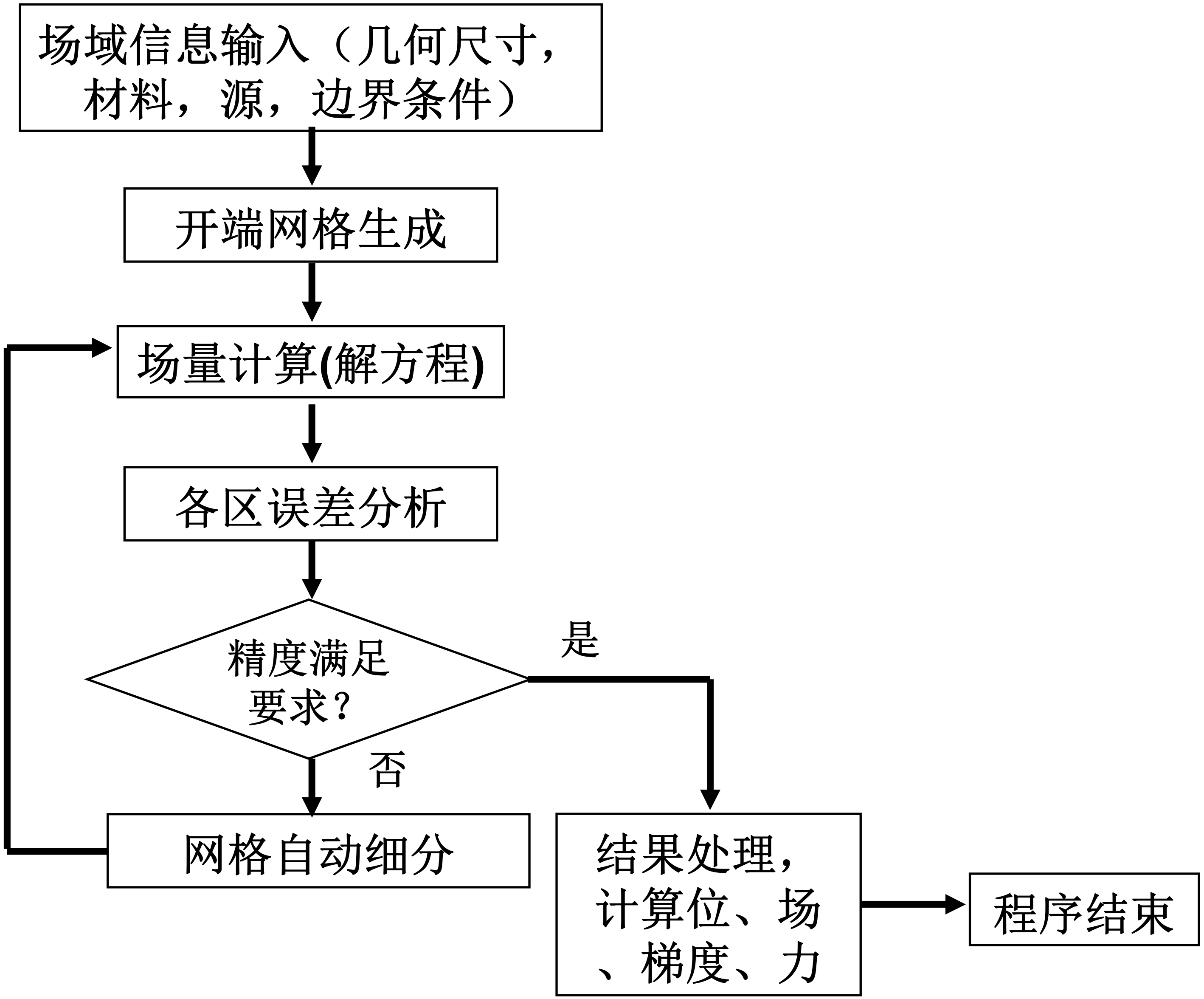
$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{-1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{-1}{a_{22}}(\boxed{a_{21}x_1^{(k+1)}} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_2) \\
\qquad\vdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{-1}{a_{nn}}(\boxed{a_{n1}x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}} - b_n)
\end{cases}
$$

3.8.3 自适应剖分技术

网格自动剖分在有限元方法中占有很重要的地位，它直接决定了生成矩阵的特性。目前二维有限元网格剖分算法已经趋于成熟和完善，几乎可以处理任意复杂的场域，已不需要一般性工作。

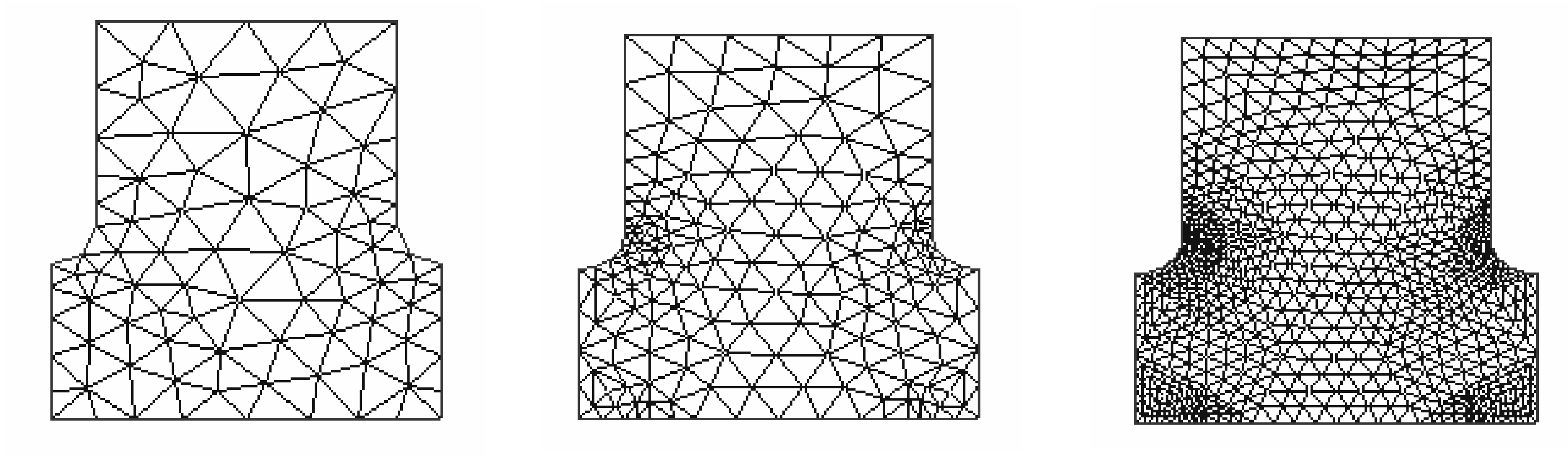
但网格的自适应细分仍然是一个热门课题，目的是使网格分别自动适应于场域结构或场量分布，使场域中每个单元都能给出几乎相同的计算精度，这样就要求程序本身能自行判断何处的单元需要细分，细分到何种程度。

3.8.3 自适应剖分技术



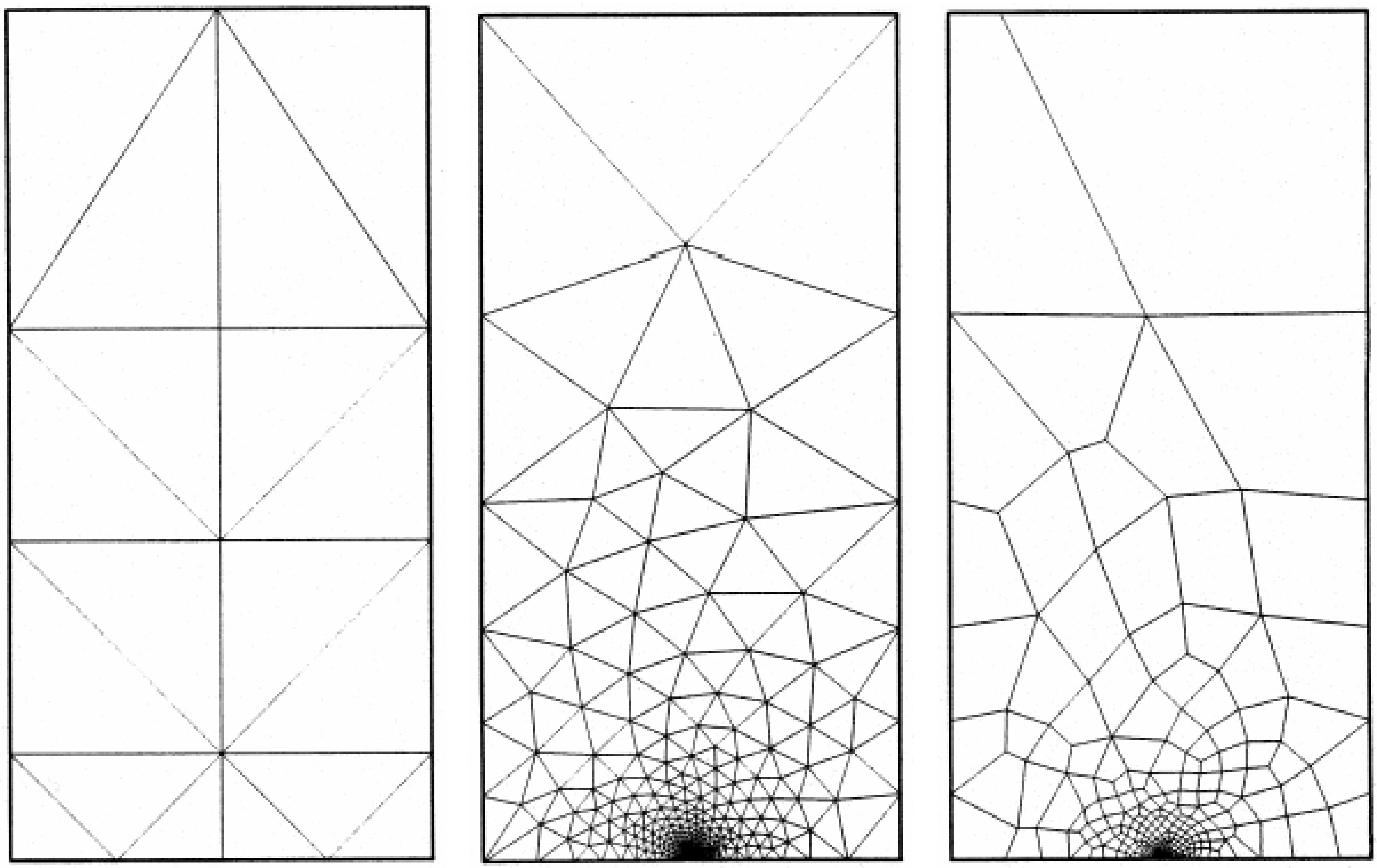
自适应剖分流程图

3.8.3 自适应剖分技术



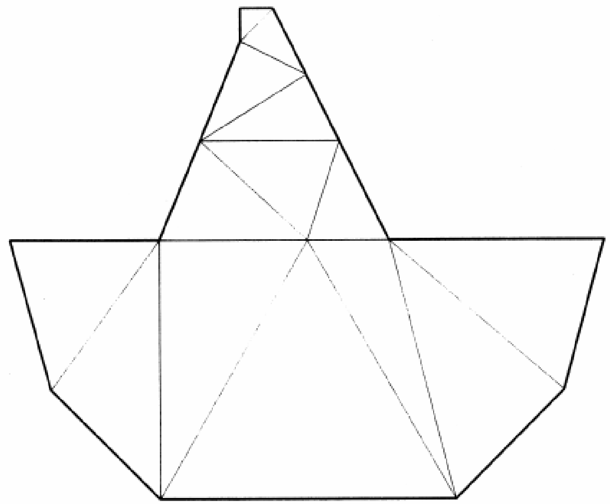
网格初始剖分　　采用自适应技术后网格一次细分　　网格二次细分

Matlab 提供 PDETOOL 软件包就具有网格自动剖分和自适应细分功能，并且它采用CAD输入方式，既简单又直观，所以可选用它作为有限元计算的前处理程序。

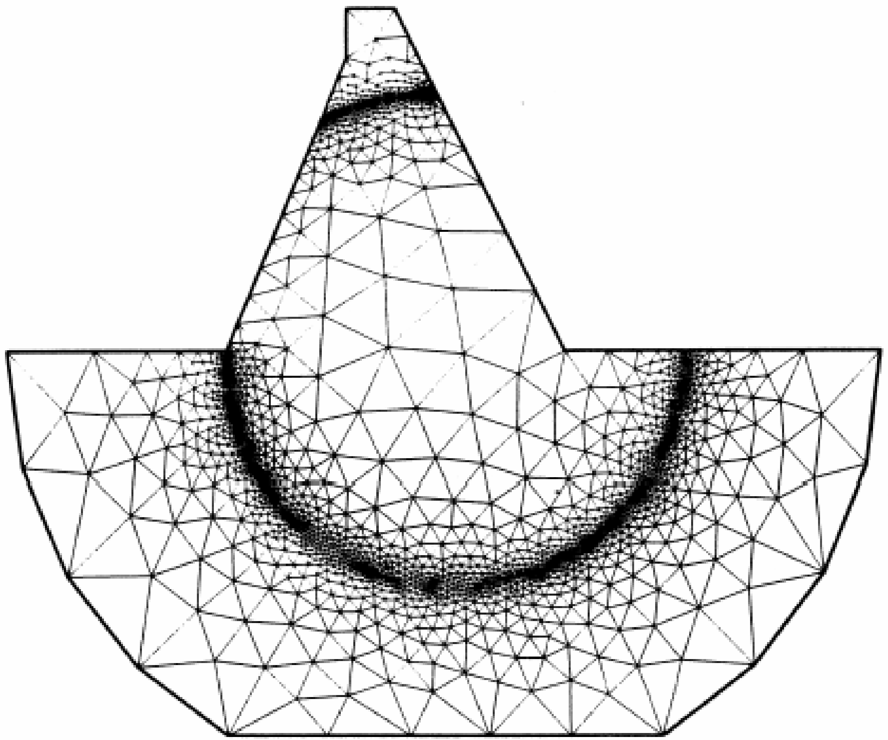


(a) Initial mesh. (b) Final triangular mesh. (c) Final quadrilateral mesh.

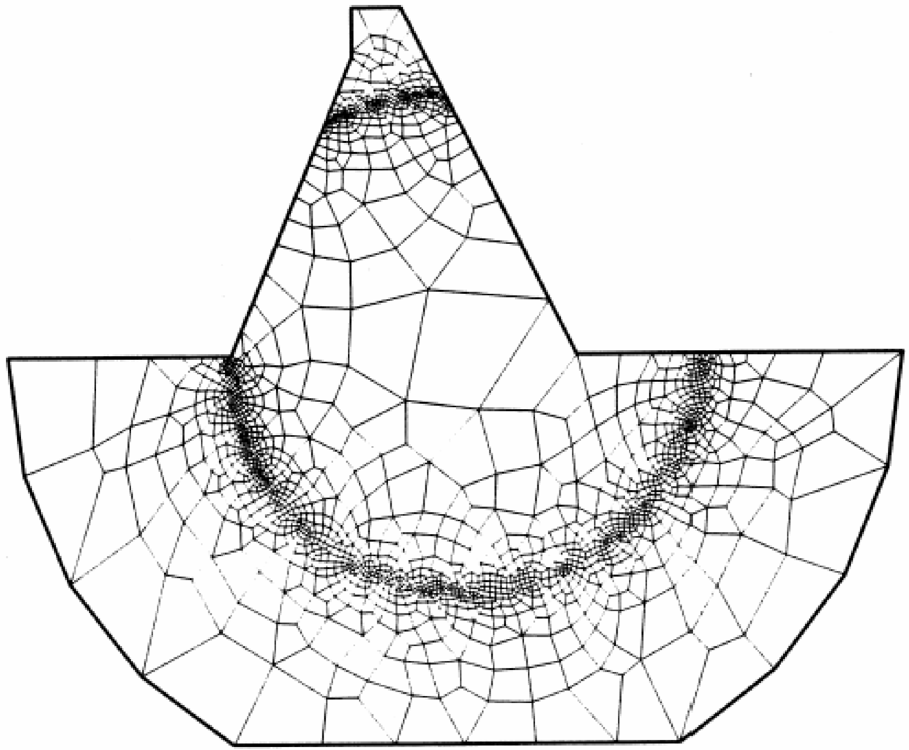
From: C.K. Lee, et al., Automatic adaptive finite element mesh generation over arbitrary two-dimensional domain using advancing front technique, Computers and Structures 71 (1999) 9-34



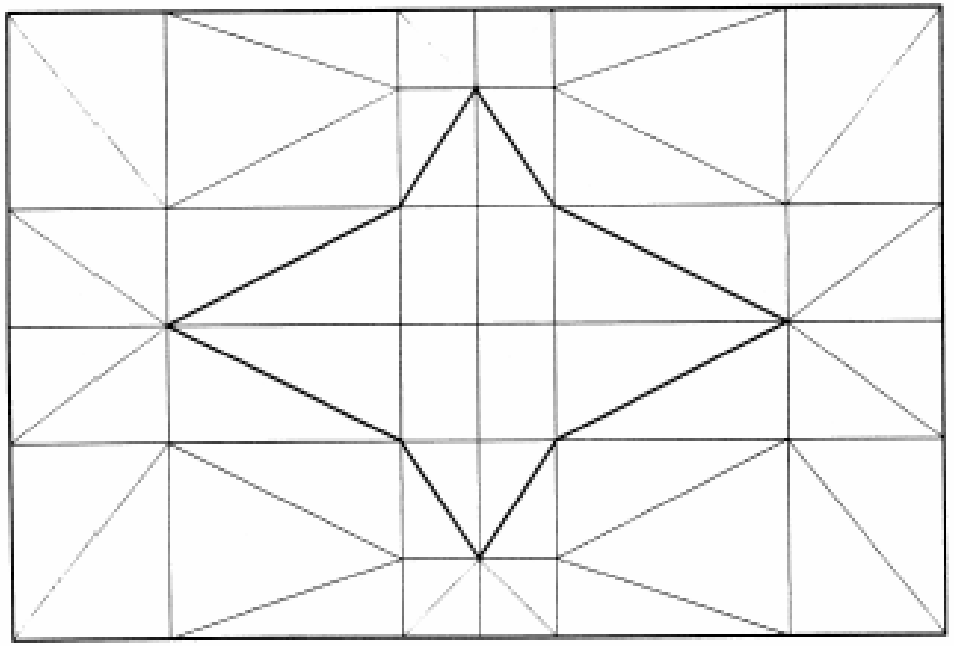
(a) Initial mesh.



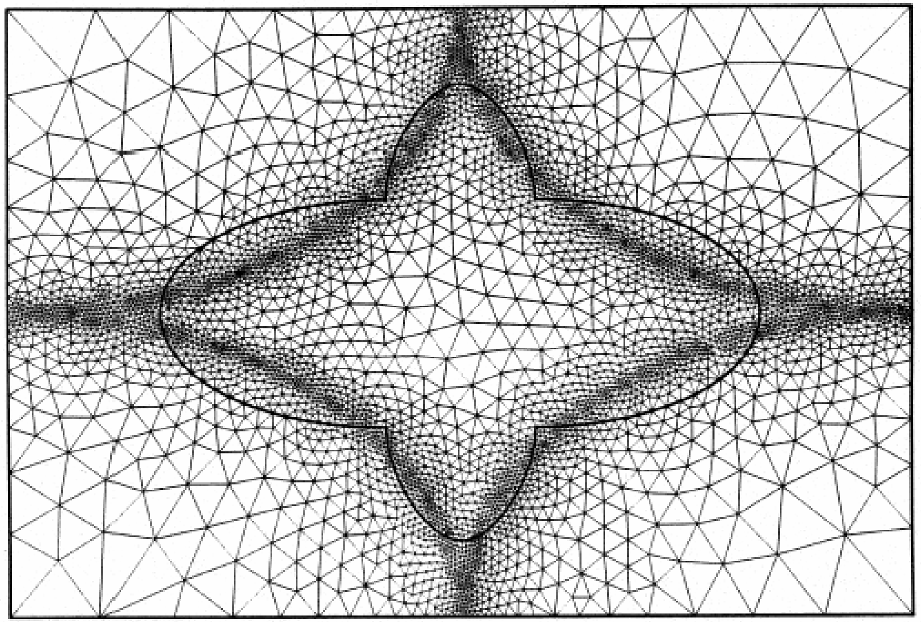
(b) Final triangular mesh.



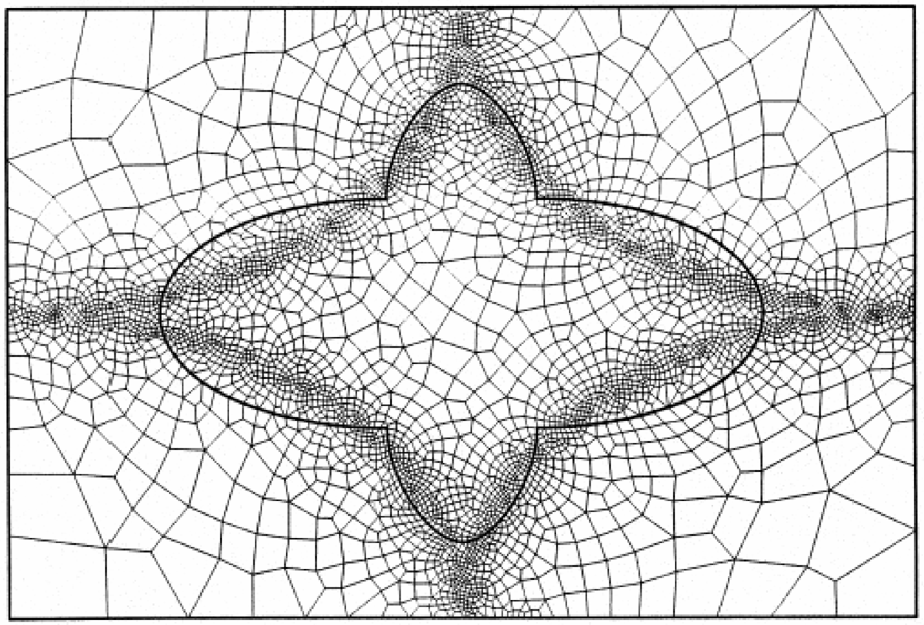
(c) Final quadrilateral mesh.



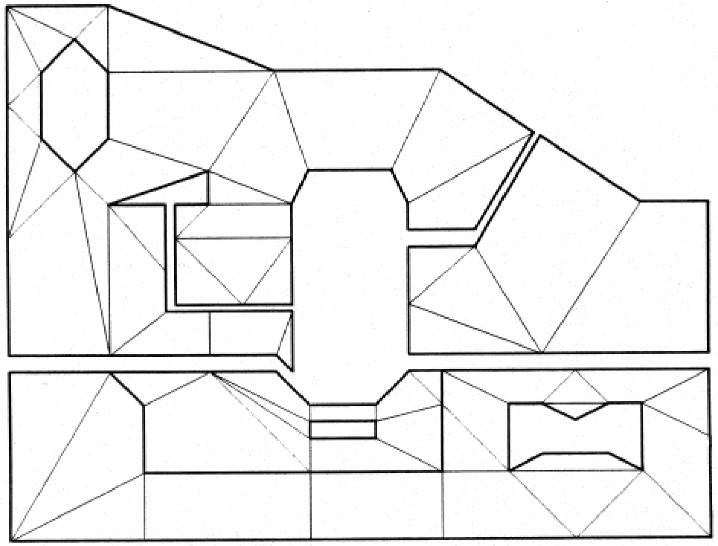
(a) Initial mesh.



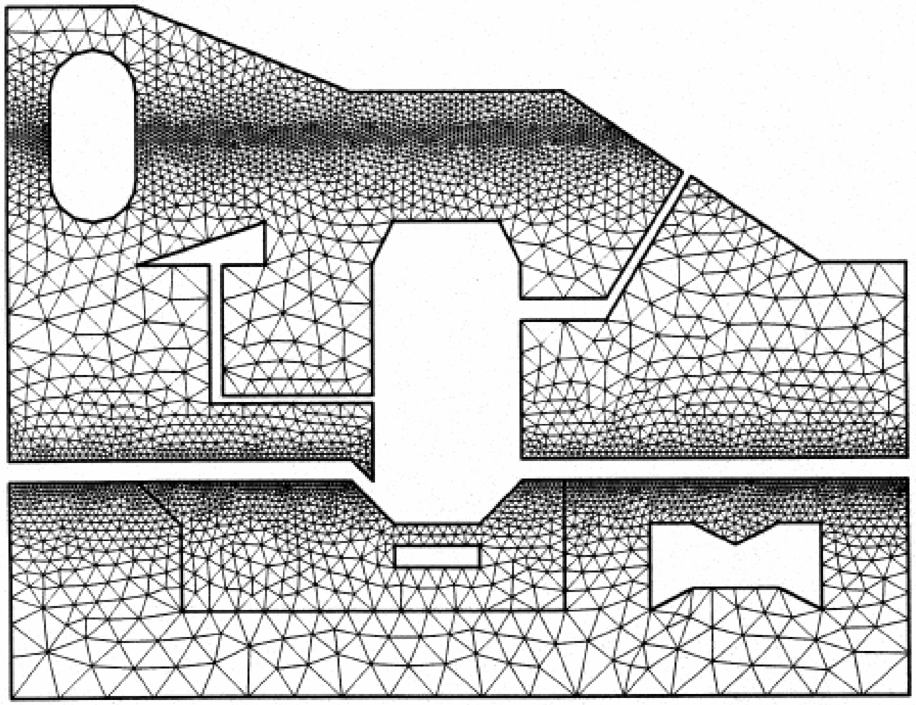
(b) Final triangular mesh.



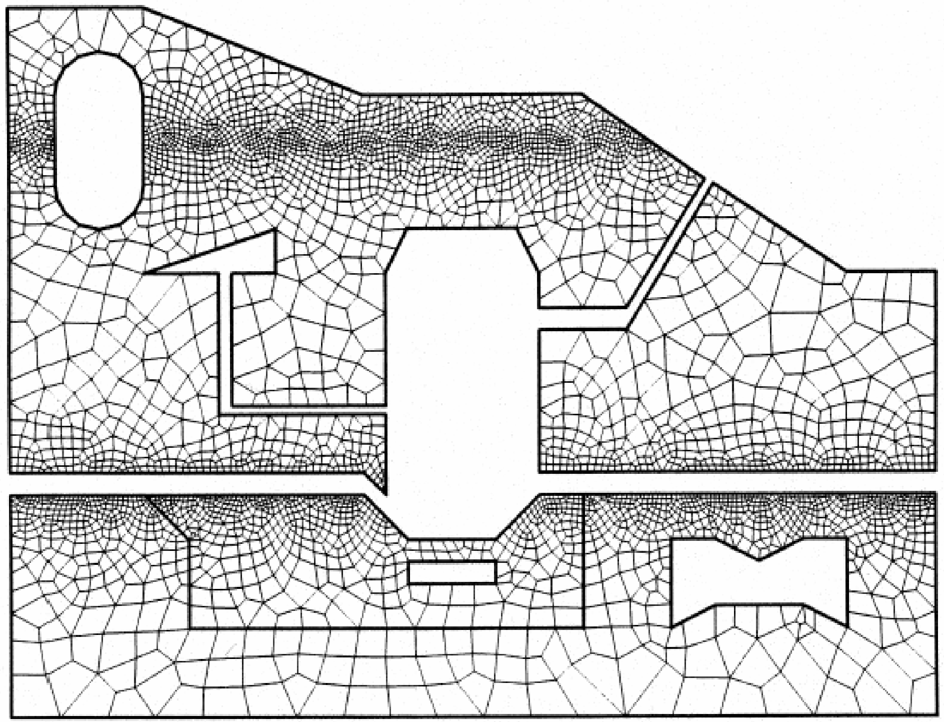
(c) Final quadrilateral mesh.



(a) Initial mesh.



(b) Final triangular mesh.



(c) Final quadrilateral mesh.

作业：

补**8**：推导下面两个公式：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_i^{(e)}}{\partial A_j} = K_{ij}^{(e)} + \dfrac{g_i^{(e)} g_j^{(e)}}{\gamma^2 B\Delta} \dfrac{\partial \gamma}{\partial B} = \dfrac{\partial f_j^{(e)}}{\partial A_i} \\ \dfrac{\partial f_i^{(e)}}{\partial A_m} = K_{im}^{(e)} + \dfrac{g_i^{(e)} g_m^{(e)}}{\gamma^2 B\Delta} \dfrac{\partial \gamma}{\partial B} = \dfrac{\partial f_m^{(e)}}{\partial A_i} \end{cases}$$