第 5 周额外习题课题目解答

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 映射与函数

(1) **映射的定义:**

(a) 映射 $f: X \to Y$ 为对应规则使得 $\forall x \in X$, 均有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应, 记 y 为 $f(x)$. 称 X 为映射 f 的定义域, Y 为 f 的取值范围, 并将 X 记为 $D(f)$. 称 $R(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$ 为映射 f 的值域, 也叫 f 的像集, 记作 $f(X)$ 或 $\mathrm{Im} f$. 定义域与值域均为数集的映射被称为函数.

(b) 对于由表达式 $y = f(x)$ 所定义的函数, 使得表达式有意义的所有 x 组成的集合被称为函数 f 的自然定义域, 而由所有取值组成的集合则被称为 f 的值域.

(c) 数列恰好就是定义在正整数集 $\mathbb{N}^*$ 上的函数.

(d) **函数的四则运算:** 线性组合, 乘法, 除法.

(e) 映射的复合.

(2) **映射的性质:**

(a) **单射:** 不同元有不同像; 像同则原像同.

(b) **满射:** 取值范围与值域重合.

(c) **双射:** 既是单射也是满射, 也称可逆映射. 双射有逆映射, 反之亦然.

(d) **函数的基本性质:** 有界性 (像集的有界性), 周期性, 奇偶性, 单调性等. 严格单调函数为单射, 其反函数与之有相同的单调性. 有反函数的函数不一定严格单调.

(3) **基本初等函数:** 常值函数, 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数.

(4) **初等函数:** 由上述基本初等函数经过有限多次四则运算和复合运算后所得到的函数, 被称为初等函数. 常用的初等函数包括: 多项式, 有理函数, 正切, 余切, 双曲正弦, 双曲余弦, 双曲正切, 双曲余切.

2. 函数极限的定义

(1) 邻域 $B_X(a,\varepsilon)$ 与去心邻域 $\mathring{B}_X(a,\varepsilon)$.

(2) **极限点:** 点 $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty, \pm\infty\}$ 被称为 X 的极限点, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 均有 $\mathring{B}_X(x_0,\varepsilon) \neq \emptyset$. 点 a 为 X 的极限点当且仅当在 $X \setminus \{a\}$ 中存在收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$.

(3) **函数极限:** 设 X 为非空数集, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$ 为 X 的极限点, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, $f: X \to \mathbb{R}$ 为函数. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0,\delta)$, $f(x) \in B(a,\varepsilon)$, 则称当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 趋近到 a (或以 a 为极限), 并将 a 记为 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x)$. 当 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ 时, 才说"当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 收敛于 a".

(4) **函数极限的否定表述:** 当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 不趋近于点 a **当且仅当** $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, $\exists x \in \mathring{B}_X(x_0,\delta)$ 使 $f(x) \notin B(a,\varepsilon_0)$.

(5) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$, 其中 $x_0 \in \mathbb{R}$.

(6) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

3. 函数极限的性质

(1) **函数极限与数列极限的关系:** $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x)=a$ 当且仅当对于 $X\backslash\{x_0\}$ 中的以 x_0 为极限的任意数列 $\{a_n\}$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=a$. **该结论常用来证明函数极限不存在.**

(2) **唯一性:** 函数极限若存在且有限, 必唯一.

(3) **局部有界性:** 若函数 f 在点 x_0 处收敛, 则 f 在该点的某个去心邻域内有界.

(4) **局部保序性:** 设 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} g(x)=b$.

(a) 若 $a>b$, 则 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x\in \mathring{B}_X(x_0,\delta)$, 我们均有 $f(x)>g(x)$.

(b) 若 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x\in \mathring{B}_X(x_0,\delta)$, 我们均有 $f(x)\geqslant g(x)$, 则 $a\geqslant b$.

(5) **局部保号性:** 设 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x)=a$.

(a) 若 $a>0$, 则 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x\in \mathring{B}_X(x_0,\delta)$, 我们均有 $f(x)>0$.

(b) 若 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x\in \mathring{B}_X(x_0,\delta)$, 我们均有 $f(x)\geqslant 0$, 则 $a\geqslant 0$.

(4) **四则运算法则:** 设 X 为非空数集, 而函数 $f,g:X\to\mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{X\ni x\to x_0} f(x)=a,\ \lim_{X\ni x\to x_0} g(x)=b.$$

则下列结论成立 (若等式右边有意义):

(a) $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}(\lambda f+\mu g)(x)=\lambda a+\mu b,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

(b) $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}(fg)(x)=ab$.

(c) $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\frac{f}{g}(x)=\frac{a}{b}$.

(5) **夹逼原理:** 设 X 为非空的数集, x_0 为 X 的极限点, 而 $f,g,h:X\to\mathbb{R}$ 为函数使得:

(a) $\exists\delta_0>0$ 使得 $\forall x\in \mathring{B}_X(x_0,\delta_0)$, 均有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,

(b) $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{X\ni x\to x_0} h(x)\ =a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

则我们有 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x)=a$.

(5) **复合函数极限法则:** 设 X,Y 为数集, 点 x_0 为 X 的极限点而 $y_0\in\mathbb{R}\cup\{\infty,\pm\infty\}$, 并且函数 $f:X\to\mathbb{R}$, $g:Y\to\mathbb{R}$ 满足下列性质:

(a) $\forall x\in X\backslash\{x_0\}$, 均有 $f(x)\in Y\backslash\{y_0\}$, (b) $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x)=y_0$, $\lim\limits_{Y\ni y\to y_0} g(y)=a$.

则我们有 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} g(f(x))=a$.

注: 复合函数极限法则实质上是在做变量替换.

(6) **单调有界定理:** 单调函数的单侧极限存在.

(7) **Cauchy 准则:** 假设 X 为数集, 点 x_0 为 X 的极限点, 而 $f:X\to\mathbb{R}$ 为函数. 则极限 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x)$ 收敛当且仅当 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x,x'\in \mathring{B}_X(x_0,\delta)$, 我们均有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

(8) **典型函数的增长速度比较:** 对数函数比常数增长得更快, 幂函数比对数函数增长得更快, 指数函数比幂函数增长得更快.

(9) **典型的函数极限:**

(a) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ 不存在.

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e,\quad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a\ (a>0),\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2-3x}{2+3x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-3}$.

(e) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to x_0}e^x=e^{x_0},\ \lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}\ (a>0),\ \lim\limits_{x\to x_0}x^\alpha=x_0^\alpha\ (x_0>0,\ \alpha\in\mathbb{R})$.

(f) $\lim\limits_{x\to x_0}\log x=\log x_0\ (x_0>0)$.

(g) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0,\quad \lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

(h) $\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin x=\arcsin x_0\ (x_0\in[-1,1])$.

4. 无穷小量与无穷大量

(1) **无穷小量的定义与性质:**

(a) **定义:** 趋于零的函数被称为无穷小量, 简称无穷小. 若 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\alpha(x)=0$, 则记

$$\alpha(x)=o(1)\quad(X\ni x\to x_0).$$

(b) α 为无穷小量当且仅当 $|\alpha|$ 亦如此.

(c) 非零的常数与无穷小量之和在局部的范围内与该常数同号.

(d) 有限多个无穷小量之和为无穷小量.

(e) 无穷小量乘以常数后还是无穷小量.

(f) 有界函数与无穷小量之积为无穷小量.

(2) **无穷小量的比较:** 设 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\beta(x)=0$. 另外我们还假设 $\beta(x)\neq 0$.

(a) 若 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, 则称 $X\ni x\to x_0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量, 记作

$$\alpha(x)=o(\beta(x))\quad(X\ni x\to x_0).$$

此时 $o(\beta(x))=\beta(x)o(1)\quad(X\ni x\to x_0)$.

(b) 若 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$, 称 $X\ni x\to x_0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小量.

(c) 若 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, 则称 $X\ni x\to x_0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小量, 记作

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\quad(X\ni x\to x_0).$$

注: 等价无穷小量的价值在于简化极限计算.

(c) 设 $x_0\in\mathbb{R}$, 而 $k\in\mathbb{N}^*$. 若 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^r}=c\neq 0$, 则称 $X\ni x\to x_0$ 时, $\alpha(x)$ 为 k 阶无穷小量.

(3) **典型的等价无穷小量**

当 $x \to 0$ 时, 我们有

(a) $\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\tan x \sim x$,

(b) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3$,

(c) $\log(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $a^x - 1 \sim x \log a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$,

(d) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

(4) **无穷大量的定义与性质:**

(a) **定义:** 极限等于无穷的函数被称为无穷大量, 简称无穷大.

(b) 无穷大量的倒数为无穷小量, 不等于零的无穷小量的倒数为无穷大量.

(c) 同无穷小量一样, 我们对无穷大量也可以进行类似的讨论.

5. 函数的连续性

(1) **连续性:**

(a) **定义:** 设 $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. 称函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 在点 x_0 连续, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in B_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(b) 若 x_0 不为 X 的极限点, 则 f 在该点连续. 以后将总假设 x_0 为 X 的极限点.

(c) 若 x_0 为 X 的极限点, 则 f 在点 x_0 处连续当且仅当 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(d) 若函数 f 在 X 的每点连续, 则称之为 X 上的连续函数. 记 $\mathscr{C}(X)$ 为 X 上的所有连续函数的集合.

(e) 函数 $f \in \mathscr{C}(a, b)$ 当且仅当 $\forall x_0 \in (a, b)$, 均有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(f) 函数 $f \in \mathscr{C}[a, b]$ 当且仅当 $f \in \mathscr{C}(a, b)$, 且 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

(g) 若 f 在点 x_0 处连续, 则 $|f|$ 也在该点连续.

(2) **单侧连续:** 设 X 为区间, $x_0 \in X$, 而 $f : X \to \mathbb{R}$ 为函数.

(a) 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 称 f 在点 x_0 左连续.

(b) 若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 称 f 在点 x_0 右连续.

(c) 左、右连续称为单侧连续.

(d) 若 x_0 为 X 的内点, 则函数 f 在点 x_0 连续当且仅当 f 在点 x_0 处左、右连续.

(3) **连续的局部性质:**

(a) 设 X 为数集, $x_0 \in X$. 则函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续当且仅当对于 X 中收敛到点 x_0 的任意数列 $\{a_n\}$, 均有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0)$.

(b) 若 X 中有收敛到点 x_0 的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(b_n)$, 则 f 在点 x_0 处不连续. 该结论常用来证明函数不连续.

(c) **局部有界:** 若 f 在点 x_0 处连续, 则它在点 x_0 某个邻域内有界.

(d) **局部保序性:** 设 X 为数集, $x_0 \in X$, 而函数 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续.

(i) 若 $f(x_0) > g(x_0)$, 则 $\exists \delta > 0$ 使 $\forall x \in B_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) > g(x)$.

(ii) 若 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, $f(x) \geqslant g(x)$, 则 $f(x_0) \geqslant g(x_0)$.

(e) **局部保号性:** 设 X 为数集, $x_0 \in X$, 而函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续.

(i) 若 $f(x_0) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in B_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) > 0$.

(ii) 若 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) \geqslant 0$, 则 $f(x_0) \geqslant 0$.

(f) **四则运算法则:** 设 X 为数集, $x_0 \in X$, 而函数 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续. 则

(i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ 在点 x_0 处连续,

(ii) fg 在点 x_0 处连续,

(iii) $\frac{f}{g}$ 在点 x_0 处连续 (若 $g(x_0) \neq 0$).

(f) **复合法则:** 设 X, Y 为数集, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, 而函数 $f : X \to Y$, $g : Y \to \mathbb{R}$ 分别在点 x_0, $y_0 = f(x_0)$ 处连续, 则 $g \circ f$ 在点 x_0 处连续.

(g) **初等函数的连续性:** 初等函数在其定义域内连续.

(h) **间断点:** 设 X 为数集, x_0 为其极限点, 而 $f : X \to \mathbb{R}$ 为函数.

(i) **定义:** 若 f 在点 $x_0 \in X$ 不连续, 则称 f 在该点间断. 此时, 或者极限 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x)$ 不存在或无限, 或者 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x)$ 存在且有限但异于 $f(x_0)$.

(ii) **可去间断点:** 若极限 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x)$ 存在且有限, 但不等于 $f(x_0)$ 或者 f 在点 x_0 无定义, 则称点 x_0 为 f 的 可去间断点.

(iii) **跳跃间断点:** 设 X 为区间, 而 x_0 为其内点. 若 f 在点 x_0 处的左、右极限 $f(x_0 - 0)$、$f(x_0 + 0)$ 存在且有限, 但却不相等, 则称点 x_0 为 f 的跳跃间断点.

(iv) **第一类间断点:** 可去间断点以及跳跃间断点. 其特点是函数在该点处的左、右极限 (若有意义) 存在且有限.

(v) **第二类间断点:** 不属于第一类间断点的其它间断点. 其特点是函数在该点处至少有一个单侧极限不存在或无限.

(vi) 区间上的单调函数只能有第一类间断点.

(4) **连续函数的整体性质:**

(a) **连续函数介值定理:** 若 $f \in \mathscr{C}[a, b]$, 而 $\mu \in \mathbb{R}$ 介于 $f(a), f(b)$ 之间, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \mu$.

(b) **广义连续函数介值定理:** 设 $f \in \mathscr{C}(a, b)$ 使得 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = c_1$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = c_2$, 其中 c_1, c_2 不等. 若 $\mu \in \mathbb{R}$ 严格介于 c_1, c_2 之间, 则 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $\mu = f(\xi)$.

(c) **零点存在定理:** 若 $f \in \mathscr{C}[a, b]$ 使得 $f(a)f(b) \leqslant 0$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = 0$.

(d) **零点存在定理的应用:**

(i) 若 $f : [a, b] \to [a, b]$ 为连续函数, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \xi$.

(ii) 任何实系数奇次多项式方程有实根.

(e) **连续性、单射、单调性以及像集的结构:**

(i) 若 X 为区间, 而 $f : X \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 则像集 $\mathrm{Im} f$ 为区间.

(ii) 若 X 为区间而 $f \in \mathscr{C}(X)$ 为单射, 则 f 必为严格单调函数.

(iii) 设 X 为区间而 $f : X \to \mathbb{R}$ 单调, 则 $f \in \mathscr{C}(X)$ 当且仅当 $\mathrm{Im} f$ 为区间.

(f) **反函数定理:** 若 X 为区间而 $f \in \mathscr{C}(X)$ 为单射, 则反函数 $f^{-1} : \mathrm{Im} f \to X$ 连续.

(g) **最值定理:** 若 $f \in \mathscr{C}[a, b]$, 则 f 有最值.

(h) **介值定理+最值定理:** 若 $f \in \mathscr{C}[a, b]$, 则 $\mathrm{Im} f$ 为闭区间.

第 2 部分 习题课题目解答

1. 利用极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right)=0$, (2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\frac{1}{1-x}=\frac{\pi}{2}$.

证明: (1) $\forall\varepsilon>0$, 令 $M=\frac{1}{\varepsilon}$. 则 $\forall x\in\mathbb{R}$, 当 $|x|>M$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right|\\
=\ &\left|2\sin\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}{2}\cos\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}\right|\\
\leqslant\ &2\left|\sin\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}{2}\right|\\
\leqslant\ &\left|\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right|\\
=\ &\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}\\
<\ &\frac{1}{|x|}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

故所证结论成立.

(2) $\forall\varepsilon>0$, 令 $\bar{\varepsilon}=\min(\varepsilon,\frac{\pi}{4})$, $\delta=\tan\bar{\varepsilon}=\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\bar{\varepsilon})}>0$. 则 $\forall x\in(1-\delta,1)$, 我们有 $0<1-x<\delta=\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\bar{\varepsilon})}$, 从而

$$\frac{\pi}{2}-\varepsilon\leqslant\frac{\pi}{2}-\bar{\varepsilon}<\arctan\frac{1}{1-x}<\frac{\pi}{2},$$

也即 $|\arctan\frac{1}{1-x}-\frac{\pi}{2}|<\varepsilon$. 得证.

2. 讨论下列极限的存在性:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$, (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right)$.

解: (1) 由于 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}=0$, 故所求极限不存在.

(2) 由题设立刻可知

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+1}}\\
=\ &\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{4}\sqrt{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+1}}\\
=\ &\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=-\frac{1}{4}\sqrt{2},
\end{aligned}$$

故所求极限不存在.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 以及 $\forall x \in [1, +\infty)$, 定义

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 若\ 1 \leqslant x \leqslant n, \\ x^n, & 若\ n < x \leqslant n+1, \\ \frac{1}{x}, & 若\ x > n+1. \end{cases}$$

(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 计算 $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

(2) $\forall x \geqslant 1$, 计算 $F(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$.

(3) 计算 $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

解: (1) 固定 $n \in \mathbb{N}^*$. 则 $\forall x > n+1$, 我们有 $f_n(x) = \frac{1}{x}$, 因此 $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

(2) 设 $x \geqslant 1$. 若 $x = 1$, 则 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $f_n(x) = 1$, 故 $F(x) = 1 = x$.

若 $x > 1$, 则 $\exists N \geqslant 1$ 使得 $N < x \leqslant N+1$. 任取 $k \in \mathbb{N}^*$. 若 $k < N$, 则 $f_k(x) = \frac{1}{x}$. 若 $k > N$, 则 $f_k(x) = 1$. 从而我们有

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x^{N-1}} \cdot x^N \cdot 1 = x.$$

(3) 由 (2) 立刻可知 $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

4. 假设函数 $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 使得 $\forall x > 0$, 均有 $f(x^2) = f(x)$, 并且

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

求证: $\forall x \in (0, +\infty)$, 均有 $f(x) = f(1)$.

证明: 由题设可知, $\forall x \in (0, +\infty)$, 我们均有 $f(x) = f((\sqrt{x})^2) = f(\sqrt{x})$. 于是对任意的整数 $n \geqslant 1$, 我们有 $f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x^{\frac{1}{2^2}}) = \cdots = f(x^{\frac{1}{2^n}})$. 注意到 $\lim\limits_{n \to \infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$, 则由复合函数极限法则可知

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = \lim_{y \to 1} f(y) = f(1).$$

5. (Dirichlet 函数) $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义

$$D(x) = \begin{cases} 1, & 若\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & 若\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

求证: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} D(x)$ 不存在.

证明: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 由于 $\mathbb{Q}$ 及 $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ 均在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 故存在收敛于 x_0 的有理数数列 $\{x_n\}$ 以及无理数数列 $\{y_n\}$, 从而

$$\lim_{n \to \infty} D(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n \to \infty} D(y_n),$$

由此可知极限 $\lim\limits_{x \to x_0} D(x)$ 不存在.

6. (Riemann 函数) $\forall x\in\mathbb{R}$, 定义

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & \text{若 } x=\frac{p}{q}\ (p,q\text{ 为互素整数且 } q>0),\\ 0, & \text{若 } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

求证: $\forall a\in\mathbb{R}$, 均有 $\lim\limits_{x\to a}R(x)=0$.

证明: $\forall a\in\mathbb{R}$ 以及 $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$. 由于 $(a-1,a+1)$ 中仅有限多个有理数使得其既约表示的分母 $\leqslant N$, 则 $\exists\delta>0$ 使得 $(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$ 中的所有有理数的既约表示的分母均 $>N$. 从而 $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$, 我们有

$$R(x)<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

故所证结论成立.

7. 设函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall x,y\in(0,+\infty)$, 均有 $f(xy)=f(x)+f(y)$, 并且当 $x>1$ 时, 还有 $f(x)<0$. 求证: 函数 f 严格递减.

证明: $\forall x,y\in(0,+\infty)$, 若 $x>y$, 则 $f(x)=f(y\cdot\frac{x}{y})=f(y)+f(\frac{x}{y})<f(y)$. 故函数 f 严格递减.

8. 求函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $2f(x)+f(1-x)=x^2$.

解: $\forall x\in\mathbb{R}$, 由题设可知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$, $2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$. 由此立刻可得 $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1)$.

9. 计算下列极限:

$$\begin{array}{llll}
(1) & \lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}), & (2) & \lim\limits_{x\to1^+}(1-x)^2e^{\frac{1}{x-1}},\\
(3) & \lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}, & (4) & \lim\limits_{x\to0}\Big(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\Big),\\
(5) & \lim\limits_{x\to0}\frac{1-\prod\limits_{k=1}^{n}\cos(kx)}{x^2}, & (6) & \lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\pi}{2}-\arctan x),\\
(7) & \lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}\ (m,n\in\mathbb{N}^*), & (8) & \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x^k)^n,\ (|x|<1).
\end{array}$$

解: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi(\sqrt{n^2+n}-n))$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to1^+}(1-x)^2e^{\frac{1}{x-1}}\overset{y=\frac{1}{x-1}}{=\!=}\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y^2}=+\infty.$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\big((\sqrt{1+x}-1)+(\sqrt{1-x}-1)\big)\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x^2}\big(\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}+\frac{-x}{\sqrt{1-x}+1}\big)=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x}\cdot\frac{(\sqrt{1-x}+1)-(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1-x}+1)}$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})}{x}\cdot\frac{1}{2\times2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$
$=\lim\limits_{x\to0}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=-\frac{1}{2}.$

(4) 由题设可知

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$

$\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{-x}\right)=2-1=1,$

于是我们有 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\prod\limits_{k=1}^{n}\cos(kx)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1-\cos(jx)}{x^2}\prod\limits_{i=0}^{j-1}\cos(ix)$

$=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(jx)}{\frac{1}{2}(jx)^2}\cdot\frac{j^2}{2}\right)\left(\lim\limits_{x\to0}\prod\limits_{i=0}^{j-1}\cos(ix)\right)$

$=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{j^2}{2}=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1).$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\pi}{2}-\arctan x)\overset{y=\frac{\pi}{2}-\arctan x}{=}\lim\limits_{y\to0^+}\frac{y}{\tan y}=\lim\limits_{y\to0^+}\frac{y\cos y}{\sin y}=1.$

(7) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}\overset{x=1+y}{=}\lim\limits_{y\to0}\frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{\sqrt[n]{1+y}-1}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{y}\cdot\frac{y}{\sqrt[n]{1+y}-1}=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{m}.$

(8) 由题设可知, 我们有

$\lim\limits_{n\to\infty}\log(1+\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x^k)^n=\lim\limits_{n\to\infty}n\log(1+\frac{x-x^{n+1}}{n(1-x)})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log(1+\frac{x-x^{n+1}}{n(1-x)})}{\frac{x-x^{n+1}}{n(1-x)}}\cdot\frac{x-x^{n+1}}{1-x}=\frac{x}{1-x}.$

由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x^k)^n=e^{\frac{x}{1-x}}.$

10. 已知 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=5$, 求 a, b.

解: 由题设我们立刻可知

$$4+2a+b=\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}\cdot(x-2)=0,$$

故 $b=-2a-4$, 进而我们可得

$$5=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+a+2)=4+a.$$

于是我们有 $a=1$, $b=-6$,

11. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x-1}\right)^{x-1}=e^{-2}$, 求常数 a.

解: 由题设可知 $a\neq1$. 在极限两边取对数可得

$$\begin{aligned}-2 &= \lim_{x\to\infty}(x-1)\log\left(\frac{x-a}{x-1}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{1-a}\log\left(1+\frac{1-a}{x-1}\right)\cdot(1-a)\\ &\overset{y=\frac{1-a}{x-1}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+y)}{y}\cdot(1-a)=1-a,\end{aligned}$$

由此可知 $a=3$.

12. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$, 求 a,b.

解: 由题设可知

$$0=\lim_{x\to0}(\sin x)(\cos x-b)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)\cdot(e^x-a)=5(1-a),$$

从而我们有 $a=1$, 进而可得 $5=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot(\cos x-b)=1-b$. 于是我们有 $b=-4$.

13. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(e^{-\cos\frac{1}{x}}-e^{-1}\right)$,

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(3x)-\cos x}{x^2}$, (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos(\frac{x}{2^k})$,

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}}\right)$, (6) $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(1-\sin x)}{\sin 2x}}$,

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x}{3x^2+5}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}$, (8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+a_1x+\cdots+a_nx^n}-1}{x}$,

(9) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$, (10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$,

(11) $\lim\limits_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$, (12) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$,

(13) $\lim\limits_{x\to0}(1-\tan x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$, (14) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(1-\cos\frac{x}{2})}{x^3\log(1+x)}$,

(15) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x-\tan^2x}{x\sin^3x}$, (16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$,

(17) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$, (18) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$,

(19) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\arctan x}{x+\arctan x}$, (20) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2(ax)-\sin^2(bx)}{x\sin x}$ $(ab\neq0)$.

解: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\log\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\log\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)$
$=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\sin\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$,
由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(e^{-\cos\frac{1}{x}}-e^{-1}\right)\overset{x=\frac{1}{y}}{=}\lim\limits_{y\to0^+}\frac{1}{ey^2}\left(e^{1-\cos y}-1\right)$
$=\lim\limits_{y\to0^+}\frac{1-\cos y}{ey^2}=\lim\limits_{y\to0^+}\frac{\frac{1}{2}y^2}{ey^2}=\frac{1}{2e}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(3x)-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(3x)-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=-4$.

(4) 对 x 的取值分情况讨论. 若 $x=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos(\frac{x}{2^k})=1$.

若 $x\neq0$, 则 $\forall m>\log_2\frac{|x|}{\pi}$, 均有 $0<\frac{|x|}{2^m}<\pi$, 从而 $\sin\frac{x}{2^m}\neq0$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin(\frac{x}{2^n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2 3^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})\log 3}-1\right)$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{\log 3}{x(x+1)}}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{\log 3}{x(x+1)}=\log 3$.

(6) 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{\sin(2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1-\sin x)}{\sin(2x)}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

(7) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\log\left(\frac{3x^2-x}{3x^2+5}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}\log\left(1+\frac{-x-5}{3x^2+5}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{-x-5}{3x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1-\frac{5}{x}}{3+\frac{5}{x^2}}=-\frac{1}{3}$,

于是我们有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x}{3x^2+5}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}=e^{-\frac{1}{3}}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+a_1x+\cdots+a_nx^n}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{m}(a_1x+\cdots+a_nx^n)}{x}=\frac{a_1}{m}$.

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}\overset{x=1+y}{=}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{\sqrt[n]{1+y}-1}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\frac{y}{m}}{\frac{y}{n}}=\frac{n}{m}$.

(10) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\log(\frac{x^2-1}{x^2+1})^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\log(1+\frac{-2}{x^2+1})=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{-2}{x^2+1}=-2$,

于是我们有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=e^{-2}$.

(11) 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\log(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\big(1+(\sin x+\cos x-1)\big)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x}=1$,

从而我们有 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e$.

(12) 因 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+(\frac{\sin x}{x}-1))}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\frac{1}{2}x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}}{\frac{1}{2}x^3}=-\frac{1}{3}$,

于是我们有 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{-\frac{1}{3}}$.

(13) 因 $\lim\limits_{x\to 0}\log(1-\tan x)^{\frac{1}{\sin 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1-\tan x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}=-\frac{1}{2}$, 于是我们有 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\tan x)^{\frac{1}{\sin 2x}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos\frac{x}{2})}{x^3\log(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\frac{x}{2})^2}{x^3\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2)^2}{x^4}=\frac{1}{2^7}$.

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\tan^2 x}{x\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x\sin x\cos^2 x}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos^2 x}=-1$.

(16) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\log\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x\overset{x=\frac{1}{y}}{=}\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\log\left(1+\frac{-y}{1+2y}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\frac{-y}{1+2y}=-1$,

故我们有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x=e^{-1}$.

(17) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)\overset{x=\frac{1}{y}}{=}\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}=1$.

(18) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\cos 2x}\overset{y=x-\frac{\pi}{4}}{=}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin y}{-\sin 2y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt{2}y}{-2y}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(19) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\arctan x}{x+\arctan x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\arctan x}{x}}{1+\frac{\arctan x}{x}}=1$.

(20) **方法 1.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(ax)-\sin^2(bx)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin(ax)-\sin(bx))(\sin(ax)+\sin(bx))}{x\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin\frac{(a-b)x}{2}\cos\frac{(a+b)x}{2}\sin\frac{(a+b)x}{2}\cos\frac{(a-b)x}{2}}{x\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\cdot\frac{(a-b)x}{2}\cdot\frac{(a+b)x}{2}}{x^2}=a^2-b^2$.

方法 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(ax)-\sin^2(bx)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(ax)}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(bx)}{x^2}=a^2-b^2$.

14. 假设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为连续函数使得 $f(0)=0$, $f(1)=1$ 且 $\forall x\in[0,1]$, 均有 $f(f(x))=x$. 求证: (1) 函数 f 严格递增; (2) $\forall x\in[0,1]$, 均有 $f(x)=x$.

证明: (1) $\forall x,y\in[0,1]$, 若 $f(x)=f(y)$, 则 $x=f(f(x))=f(f(y))=y$, 因此 f 为单射. 又 $f\in\mathscr{C}[0,1]$, 则 f 严格单调. 但 $f(0)<f(1)$, 故 f 严格递增.

(2) $\forall x\in[0,1]$, 若 $f(x)\neq x$, 则或者 $f(x)>x$, 此时 $x=f(f(x))>f(x)$, 矛盾! 若 $f(x)<x$, 则 $x=f(f(x))<f(x)$, 矛盾! 因此 $f(x)=x$.

15. 求证: 不存在连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $f(f(x))=e^{-x}$.

证明: 用反证法, 假设存在这样的函数 f. 那么 $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 若 $f(x)=f(y)$, 则

$$e^{-x}=f(f(x))=f(f(y))=e^{-y},$$

从而 $x=y$, 故 f 为单射. 又 f 连续, 则 f 严格单调. 若 f 严格递增, 则 $f\circ f$ 严格递增, 矛盾! 若 f 严格递减, 则 $f\circ f$ 也严格递增, 矛盾! 因此得证!

16. 若 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $f(f(x))=x$, 求证: $\exists\xi\in\mathbb{R}$ 使 $f(\xi)=\xi$.

证明: $\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $F(x)=f(x)-x$. 则 $F\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$. 固定 $a\in\mathbb{R}$, 则

$$F(f(a))F(a)=\big(f(f(a))-f(a)\big)\big(f(a)-a\big)=\big(a-f(a)\big)\big(f(a)-a\big)\leqslant 0.$$

由连续函数介值定理知, 存在 ξ 介于 $a,f(a)$ 之间使得 $F(\xi)=0$, 故 $f(\xi)=\xi$.

17. 讨论下述函数的间断点:

$$(1)\quad f(x)=e^{1-\cos\frac{1}{x}},\qquad (2)\quad f(x)=\begin{cases}\frac{\log(1+\sin^2 x)}{2x^2}, & 若\ x>0,\\ 1, & 若\ x=0,\\ \frac{1-\cos x}{x^2}, & 若\ x<0,\end{cases}$$

$$(3)\quad f(x)=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{2}{x}}},\qquad (4)\quad f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}.$$

解: (1) 函数 f 的自然定义域为 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 又 f 为初等函数, 故连续. 则 f 的可能间断点只能是 0. 又极限 $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在, 由对数函数的连续性知极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在, 则 $x=0$ 为 f 唯一的间断点, 且为第二类间断点.

(2) 由于 f 在 $(0,+\infty)$ 和 $(-\infty,0)$ 上均为初等函数, 故连续, 从而 f 的可能间断点只可能为 0. 又由题设可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}f(x) &= \lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+\sin^2 x)}{2x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{2x^2}=\frac{1}{2},\\ \lim_{x\to0^-}f(x) &= \lim_{x\to0^-}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故 $x=0$ 为 f 的唯一间断点, 且为可去间断点.

(3) 函数 f 的自然定义域为 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 又 f 为初等函数, 故连续. 因此 f 可能的间断点只可能是 0. 又由题设可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{2e^{-\frac{2}{x}}+3} = 0,\\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{2}{x}}} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

故 $x=0$ 为 f 的唯一间断点, 且为跳跃间断点.

(4) 函数 f 的自然定义域为 $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ 且它为初等函数, 故连续. 因此 f 可能的间断点只可能是 $0,1$. 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1} = \infty,\\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1} = 0,\\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1} = -1,\end{aligned}$$

故 $0,1$ 为 f 的唯一间断点, 前者为第二类间断点, 后者为跳跃间断点.

18. 如果 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $f(x)\neq 0$, 并且 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有间断点, 问下述结论哪个成立?

(1) 函数 $f\circ\varphi$ 必有间断点,

(2) 函数 $\varphi\circ f$ 必有间断点,

(3) 函数 φ^2 必有间断点,

(4) 函数 $\frac{\varphi}{f}$ 必有间断点.

解: (4) 成立. 若取 $f\equiv 1$, 则可知 (1) 和 (2) 不成立.

$\forall x\in\mathbb{R}$, 若我们定义

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x\geqslant 0,\\ -1, & \text{若 } x<0,\end{cases}$$

则 φ 在点 $x=0$ 处间断, 但 $\varphi^2\equiv 1$, 故没有间断点.

现在用反证法证明 (4) 成立. 事实上, 若 $\frac{\varphi}{f}$ 连续, 则由连续函数的四则运算法则可知 $\varphi=\frac{\varphi}{f}\cdot f$ 连续, 矛盾!

19. $\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}\in\mathbb{R}$. 求常数 a,b 使得 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

解: $\forall x\in\mathbb{R}$, 当 $|x|<1$ 时, 由定义可得 $f(x)=ax^2+bx$. 而当 $|x|>1$, 则有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{-1}+ax^{2-2n}+bx^{1-2n}}{1+x^{-2n}}=\frac{1}{x}.$$

若 f 在点 $x=\pm 1$ 处连续性, 则

$$\frac{1+a+b}{2}=f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=1,\ \ \frac{-1+a-b}{2}=f(-1)=\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=-1,$$

由此立刻可得 $a=0$, $b=1$. 此时, $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$f(x)=\begin{cases} x, & 若\ |x|<1,\\ \frac{1}{x}, & 若\ |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

由于 f 在 $(-1,1)$ 以及 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 上均为初等函数, 因此连续. 又

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=1,\quad \lim_{x\to(-1)^+}f(x)=-1,$$

因此 f 在点 $x=\pm 1$ 处连续, 从而 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

20. 设 $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ 使得 $|a_0|+|a_1|+\cdots|a_{n-1}|<a_n$. 求证:

$$a_0+a_1\cos x+\cdots+a_n\cos(nx)$$

在 $(0,2\pi)$ 上至少有 $2n$ 个零点.

证明: $\forall\in[0,2\pi]$, 定义 $f(x)=a_0+a_1\cos x+\cdots+a_n\cos(nx)$. 则 $f\in\mathscr{C}[0,2\pi]$. $\forall k\in\mathbb{N}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$, 考虑区间 $[\frac{2(k-1)\pi}{n},\frac{2k\pi}{n}]$, 函数 f 在该区间上连续, 并且

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{2(k-1)\pi}{n}\Big) &= \sum_{j=0}^{n-1}a_j\cos\frac{2(k-1)j\pi}{n}+a_n>a_n-\sum_{j=0}^{n-1}|a_j|>0,\\ f\Big(\frac{(2k-1)\pi}{n}\Big) &= \sum_{j=0}^{n-1}a_j\cos\frac{(2k-1)j\pi}{n}-a_n<-a_n+\sum_{j=0}^{n-1}|a_j|<0,\\ f\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big) &= \sum_{j=0}^{n-1}a_j\cos\frac{2kj\pi}{n}+a_n>a_n-\sum_{j=0}^{n-1}|a_j|>0,\end{aligned}$$

由连续函数介值定理可知, 函数 f 在 $(\frac{2(k-1)\pi}{n},\frac{(2k-1)\pi}{n})$ 与 $(\frac{(2k-1)\pi}{n},\frac{2k\pi}{n})$ 上至少各有一个零点, 从而 f 在 $(0,2\pi)$ 上至少有 $2n$ 个零点.

21. 若 $f\in\mathscr{C}[0,2a]$ 使得 $f(0)=f(2a)\neq f(a)$, 求证: $\exists\xi\in(0,a)$ 使得

$$f(\xi)=f(\xi+a).$$

证明: $\forall x\in[0,a]$, 定义 $F(x)=f(x)-f(x+a)$. 则 $F\in\mathscr{C}[0,a]$, 且

$$\begin{aligned} F(0) &= f(0)-f(a)\neq 0,\\ F(a) &= f(a)-f(2a)\neq 0.\end{aligned}$$

又 $F(0)+F(a)=f(0)-f(2a)=0$, 从而我们有

$$F(0)F(a)<0.$$

由连续函数介值定理可知 $\exists\xi\in(0,a)$ 使得 $F(\xi)=0$, 也即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

22. 求证: 方程 $x = a\sin x + b$ 有不大于 $a+b$ 的正根, 其中 $a, b > 0$.

证明: $\forall x \in [0, a+b]$, 令 $f(x) = a\sin x + b - x$. 则 $f \in \mathscr{C}[0, a+b]$, 且

$$f(0) = b > 0,\ f(a+b) = a\sin(a+b) - a = a(\sin(a+b) - 1) \leqslant 0.$$

则由连续函数介值定理可知, $\exists \xi \in (0, a+b]$ 使得 $f(\xi) = 0$, 也即 $\xi = a\sin\xi + b$.