微积分 A (2)

姚家燕

第 24 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

第 23 讲回顾: 常数项级数及其性质

- 常数项级数的定义: 记号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的两层意思.
- 数列、级数、广义积分理论的统一性.
- 级数的性质: 线性性; 改变级数的有限项不会影响它的敛散性, 但会改变级数的和的大小; 收敛级数可分组计算 (逆命题不成立); 同号分组计算收敛的级数收敛; 分组计算收敛的常号级数收敛; 级数收敛的必要条件.

回顾：判断级数敛散性的准则

- Cauchy 准则，单调有界定理，非负的单调函数所定义的级数与正无穷上限广义积分同敛散，比较判别法，等价的正项数列所对应的级数同敛散，比率判别法，根值判别法.
- 典型例子：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ 收敛当且仅当 $|q| < 1$.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛当且仅当 $p > 1$.

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^p}$ 收敛当且仅当 $p > 1$.

第 24 讲

§3. 任意项级数的收敛性

定理 1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

定义 1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则我们称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

注: 若由比率或根值判别法可得知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 此时该级数的通项不趋于 0, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

定理 2. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 (其和记作 S), 而 φ 为自然数集到其自身的双射, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{\varphi(n)} = S.$$

证明: $\forall N \geqslant 1$, $\sum\limits_{n=1}^{N} |u_{\varphi(n)}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| < +\infty$, 从而由单调有界定理可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{\varphi(n)}$ 绝对收敛. 又 $\forall \varepsilon > 0$, 由题设可知 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n \geqslant N$, 均有

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| < \varepsilon.$$

令 $K = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N} \varphi^{-1}(j)$. 则 $\forall 1 \leqslant j \leqslant N$, 我们均有 $1 \leqslant \varphi^{-1}(j) \leqslant K$. 于是 $\forall n > K$, 我们有

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=1}^{n} u_{\varphi(k)} - S\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^{n} u_{\varphi(k)} - \sum_{j=1}^{\infty} u_j\Big| \\ &\leqslant \sum_{j>N}^{\infty} |u_j| < \varepsilon.\end{aligned}$$

从而由级数和的定义可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{\varphi(k)} = S.$$

故所证结论成立.

定理 3. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big)$ (称为 Cauchy 乘积) 绝对收敛并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big).$$

证明: $\forall N \geqslant 1$, 我们均有

$$\sum_{n=1}^{N}\Big|\Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big)\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{N}\Big(\sum_{i+j=n} |a_i||b_j|\Big)$$

$$\leqslant \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|\Big)\cdot\Big(\sum_{n=1}^{N} |b_n|\Big) \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\Big)\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\Big),$$

由单调有界定理可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big)$ 绝对收敛.

另外, $\forall N \geqslant 1$, 我们有

$$
\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=1}^{2N} \Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j \Big) - \Big(\sum_{n=1}^{2N} a_n \Big) \cdot \Big(\sum_{n=1}^{2N} b_n \Big) \right| \\
= & \left| \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant 2N \\ i+j>2N}} a_i b_j \right| \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant 2N \\ i+j>2N}} |a_i||b_j| \\
\leqslant & \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant 2N \\ i>N}} |a_i||b_j| + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant 2N \\ j>N}} |a_i||b_j| \\
\leqslant & \Big(\sum_{i=N+1}^{2N} |a_i| \Big) \Big(\sum_{j=1}^{2N} |b_j| \Big) + \Big(\sum_{i=1}^{2N} |a_i| \Big) \Big(\sum_{j=N+1}^{2N} |b_j| \Big) \\
\leqslant & \Big(\sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| \Big) \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \Big) + \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \Big) \Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} |b_j| \Big).
\end{aligned}
$$

而由题设条件, 我们又有

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}|a_i| = \sum_{i=1}^{\infty}|a_i| < +\infty, \quad \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}|b_j| = \sum_{j=1}^{\infty}|b_j| < +\infty,$$

由此我们立刻可得

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=N+1}^{\infty}|a_i| = 0, \quad \lim_{N\to\infty}\sum_{j=N+1}^{\infty}|b_j| = 0,$$

从而由夹逼原理可知

$$\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{2N}\Big(\sum_{i+j=n}a_ib_j\Big) - \Big(\sum_{n=1}^{2N}a_n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=1}^{2N}b_n\Big)\right| = 0.$$

于是最终我们有

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{2N}\left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) - \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{2N} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{2N} b_n\right) = 0.$$

由此立刻可导出所要的结论.

注: 更一般地, 采用类似的方法, 我们可以证明将 $a_i b_j$ $(i, j \geqslant 1)$ 以任意方式排序所得到的级数也绝对收敛且其和依然为

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

定理 4. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛. $\forall A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 存在自然数集到其自身的双射 φ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{\varphi(n)} = A.$$

证明思想: 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则我们有

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = +\infty.$$

$\forall n \geqslant 1$, 定义

$$a_n = \max(u_n, 0), \ b_n = \max(-u_n, 0).$$

由上述定义立刻知 $\{a_n\}$, $\{-b_n\}$ 分别为 $\{u_n\}$ 的正项和负项, 并且 $u_n = a_n - b_n$. 于是我们有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty.$$

于是 $\forall A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 从 a_1 出发, 通过适当地逐个添加 $a_2, a_3, \dots$ 或减去 $b_1, b_2, \dots$, 我们可以得到与 A 越来越接近的部分和, 进而可以得到趋于 A 的级数.

定理 5. (Dirichlet 判别准则) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列有界, 并且数列 $\{v_n\}$ 单调且趋于 0, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 定义 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. 那么由题设立刻可知 $\exists M > 0$ 使得 $\forall n \geqslant 1$, 我们均有 $|S_n| < M$. $\forall \varepsilon > 0$, 同样由题设可知数列 $\{v_n\}$ 趋于 0, 于是 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n \geqslant N$, 我们均会有 $|v_n| < \frac{\varepsilon}{4M}$.

进而可知 $\forall m > n > N$, 我们有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} u_k v_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{m}(S_k - S_{k-1})v_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} S_k v_k - \sum_{k=n}^{m} S_{k-1} v_k\right|$$

$$= \left|\sum_{k=n}^{m} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} S_k v_{k+1}\right| = \left|S_m v_m + \sum_{k=n}^{m-1} S_k(v_k - v_{k+1}) - S_{n-1} v_n\right|$$

$$\leqslant |S_m||v_m| + |S_{n-1}||v_n| + \sum_{k=n}^{m-1} |S_k||v_k - v_{k+1}|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + M\sum_{k=n}^{m-1} |v_k - v_{k+1}| = \frac{\varepsilon}{2} + M\left|\sum_{k=n}^{m-1}(v_k - v_{k+1})\right|$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + M|v_n - v_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + M(|v_n| + |v_m|) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon,$$

从而由 Cauchy 准则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛.

定理 6. (Abel 判别准则) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而数列 $\{v_n\}$ 单调有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛.

证明: 由于数列 $\{v_n\}$ 单调有界, 因此收敛. 设其极限为 v, 从而可知数列 $\{v_n - v\}$ 单调趋于 0. 又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 因此它的部分和数列有界, 由 Dirichlet 判别准则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(v_n - v)$ 收敛, 进而由级数的线性性可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛.

注: Abel 判别准则早于 Dirichlet 判别准则.

定理 7. (Leibniz 判别准则) 如果非负数列 $\{v_n\}$ 单调趋于 0, 则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}v_n$ 收敛.

证明: 由 Dirichlet 判别准则立刻可得所要结论.

例 1. 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n\log n}$ 均为条件收敛.

作业题: 第 5.3 节第 258 页第 4 题第 (4), (10), (13) 题 (最后一题中少了 "$+\cdots$"), 第 6 题.

例 2. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 试判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{n^2 + \alpha n + \beta}{n}\pi$ 的敛散性.

解: $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$u_n := \sin \tfrac{n^2+\alpha n+\beta}{n}\pi = (-1)^n \sin\left(\alpha\pi + \tfrac{\beta}{n}\pi\right).$$

如果 $\alpha \notin \mathbb{Z}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\alpha\pi + \dfrac{\beta}{n}\pi\right) = \sin\alpha\pi \neq 0$, 此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 如果 $\alpha \in \mathbb{Z}$, 则 $u_n = (-1)^{n+\alpha} \sin \frac{\beta}{n}\pi$, 且数列 $\{\sin \frac{\beta}{n}\pi\}$ 从第 $2[|\beta|]+2$ 项开始单调趋于 0, 于是由 Leibniz 判别准则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例 3. 设 $x \in \mathbb{R}$. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$ 的敛散性.

解: 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = |x|$, 则当 $|x| < 1$ 时原级数绝对收敛, 而当 $|x| > 1$ 时原级数发散.

若 $x = 1$, 由 Leibniz 判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛.

当 $x = -1$ 时, 原级数的通项变为

$$(-1)^n\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n},$$

由此可知此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$ 发散.

例 4. 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \log\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ 的敛散性.

解: 当 $n \to \infty$ 时, 我们有

$$\log\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}(1+o(1)).$$

由 Leibniz 判别法可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛. 又

$$\frac{1}{2n}(1+o(1)) \sim \frac{1}{2n} \quad (n \to \infty),$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 由级数的线性性知原级数发散.

例 5. 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性.

解: 当 $n \to \infty$ 时, 我们有

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1+o(1))\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}(1+o(1)),$$

于是由 Leibniz 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛. 又由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则由级数的线性性知原级数发散.

例 6. 判断 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[p]{n+(-1)^n}}$ $(p>0)$ 的敛散性.

解: 方法 1. 当 $n\to\infty$ 时, 我们有

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt[p]{n+(-1)^n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt[p]{n}}\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big)^{-\frac{1}{p}}$$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt[p]{n}}\Big(1-\frac{1}{p}\frac{(-1)^n}{n}(1+o(1))\Big)=\frac{(-1)^n}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{p}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}}}(1+o(1)).$$

由 Leibniz 判别法可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[p]{n}}$ 收敛. 又

$$\frac{1}{p}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}}}(1+o(1))\sim\frac{1}{p}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}}}\quad(n\to\infty),$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{p}}}$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[p]{n+(-1)^n}}$ $(p>0)$ 收敛.

方法 2. $\forall m \geqslant 1$, $S_{2m+2} = S_{2m} - \frac{1}{\sqrt[p]{2m}} + \frac{1}{\sqrt[p]{2m+3}} < S_{2m}$,

$$S_{2m} = \sum_{n=2}^{2m} \frac{(-1)^n}{\sqrt[p]{n+(-1)^n}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt[p]{2k+1}} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt[p]{2k}}$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt[p]{2(k+1)}} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt[p]{2k}} = \frac{1}{\sqrt[p]{2m+2}} - \frac{1}{\sqrt[p]{2}} > -\frac{1}{\sqrt[p]{2}}.$$

故数列 $\{S_{2m}\}$ 单调下降有下界, 因此收敛. 又

$$S_{2m+1} - S_{2m} = -\frac{1}{\sqrt[p]{2m}} \to 0 \ (m \to \infty),$$

则部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 从而原级数收敛.

例 7. 求证: 若非负级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1+u_n}$$

收敛.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 我们均有 $0 \leqslant \frac{u_n}{1+u_n} \leqslant u_n$, 于是由比较法则可知所证成立.

例 8. 求证: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = a > 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

证明: 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散, 由比较法则知所证成立.

例 9. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\log\frac{n+1}{n}}\right)$ 的敛散性.

解: 当 $n\to\infty$ 时, 我们有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\log\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\sqrt{n\log\frac{n+1}{n}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1-n\log(1+\frac{1}{n})}{1+\sqrt{n\log(1+\frac{1}{n})}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}(1+o(1))\right)}{1+\sqrt{n\log(1+\frac{1}{n})}}$$

$$=\frac{1+o(1)}{2n^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{1+\sqrt{n\log(1+\frac{1}{n})}}\sim\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 则由比较法则知原级数收敛.

例 10. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$. 问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n^2+1}{n}\pi}{(n^2+1)^\alpha}$ 何时绝对收敛, 何时条件收敛?

解: 当 $n \to \infty$ 时, 我们有

$$u_n := \frac{\sin \frac{n^2+1}{n}\pi}{(n^2+1)^\alpha} = (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{(n^2+1)^\alpha},$$

故 $|u_n| \sim \frac{\pi}{n^{1+2\alpha}}$ $(n \to \infty)$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^{1+2\alpha}}$ 收敛当且仅当 $\alpha > 0$, 故原级数绝对收敛当且仅当 $\alpha > 0$.

现在假设 $-\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 0$. 数列 $\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{(n^2+1)^\alpha}\right\}$ 从某一项开始单调下降趋于 0, 于是由 Leibniz 判别准则可知原级数收敛, 故此时原级数为条件收敛.

若 $\alpha \leqslant -\frac{1}{2}$, 则当 $n \to \infty$ 时, 我们有

$$|u_n| \sim \frac{\pi}{n^{1+2\alpha}} \not\to 0,$$

于是由级数收敛的必要条件知此时原级数发散.

综上所述, 原级数绝对收敛当且仅当 $\alpha > 0$, 原级数条件收敛当且仅当 $-\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 0$.

例 11. 问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 为绝对收敛还是条件收敛?

解: $\forall N \geqslant 1$, 我们有

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos n\right| = \left|\frac{\sin(N+\frac{1}{2})-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}},$$

而 $\{\frac{1}{n}\}$ 递降趋于 0, 于是由 Dirichlet 判别准则知原级数收敛. 又 $\frac{|\cos n|}{n} \geqslant \frac{\cos^2 n}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{\cos 2n}{2n}$, 并且同样也由 Dirichlet 判别准则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n} = +\infty$ 发散, 故原级数为条件收敛.

§4. 无穷乘积

定义 1. 称数列 $\{p_n\}$ 的无穷乘积 $p_1p_2\cdots p_n\cdots$ 为以 p_n 为通项的无穷积, 记作 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 或 $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$. $\forall k \geqslant 1$, 定义 $P_k = \prod\limits_{n=1}^{k} p_n$, 称为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 的部分积. 如果数列 $\{P_n\}$ 收敛到 $P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛到 P, 并记作 $P = \prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$. 否则则称之发散. 注: 对无穷乘积, 总假设 $p_n \neq 0$.

定理 1. 若 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 定义 $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$, 则由题设可知

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

于是我们立刻有

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

定理 2. 无穷积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛当且仅当存在 $N_0 \geqslant 1$ 使得 $\forall n \geqslant N_0$, 均有 $a_n > -1$ 并且级数 $\sum_{n=N_0}^{\infty} \log(1+a_n)$ 收敛.

证明: 必要性. 如果无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty}(1+a_n) = 1$, 故 $\exists N_0 \geqslant 1$ 使得 $\forall n \geqslant N_0$, 均有 $1 + a_n > 0$, 也即 $a_n > -1$. $\forall N \geqslant 1$, 定义 $P_N = \prod_{n=N_0}^{N}(1+a_n)$. 由题设得 $\lim_{N\to\infty} P_N = P > 0$.

由此我们立刻可得

$$\log P = \lim_{N\to\infty} \log P_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N_0}^{N} \log(1+a_n),$$

也即 $\sum\limits_{n=N_0}^{\infty} \log(1+a_n) = \log P$ 收敛.

充分性. 假设 $\sum\limits_{n=N_0}^{\infty} \log(1+a_n) = S$, 则我们有

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=N_0}^{N} (1+a_n) = \lim_{N\to\infty} e^{\sum\limits_{n=N_0}^{N} \log(1+a_n)} = e^S,$$

即 $\prod\limits_{n=N_0}^{\infty} (1+a_n)$ 收敛, 进而知 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ 收敛.

例 1. 讨论无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ 的敛散性.

解: 因 $\log\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}(1+o(1))\ (n\to\infty)$,

且由 Leibniz 判别法可知 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛, 又

$$\frac{1}{2n}(1+o(1))\sim\frac{1}{2n}\quad(n\to\infty),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散, 故 $\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ 发散, 从而

无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ 发散.

例 2. 讨论无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ 的敛散性.

解: 因 $\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{2n^2}(1+o(1))\ (n\to\infty)$,
又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$ 收敛且由 Leibniz 判别法可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\log\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ 收敛, 进而知无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ 收敛.

作业题: 第 5.4 节第 260 页第 2 题第 (1), (4) 题.

第 5 章小结

1. 常数项级数及其性质:

- 常数项级数的定义: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的两层意思.
- 数列、级数、广义积分理论的统一性.
- 级数的性质: 线性性, 有限韧性, 收敛的级数可分组计算 (反之不成立), 同号分组计算后收敛的级数本身也收敛, 分组计算后收敛的常号项级数收敛, 级数收敛的必要条件.

2. 判断级数敛散性的基本准则:

- Cauchy 准则, 单调有界定理, 非负的单调函数所定义的级数与正无穷上限广义积分同敛散, 比较判别法, 等价的正项数列所对应的级数同敛散, 比率判别法, 根值判别法.
- 典型例子:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ 收敛当且仅当 $|q| < 1$.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 收敛当且仅当 $p > 1$.

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log n}{n^p}$ 收敛当且仅当 $p > 1$.

3. 绝对收敛与条件收敛:

- 绝对收敛的级数收敛.
- 收敛但非绝对收敛的级数称为条件收敛.
- 绝对收敛的级数可任意排序但却不改变其和; 条件收敛的级数重排可得预先给定的任何值.
- 两个绝对收敛级数的 Cauchy 乘积也为绝对收敛, 且可以任意方式求和而不改变其和.
- Dirichlet、Abel、Leibniz 判别准则.

4. 无穷乘积: 定义及其判敛准则.

综合练习

例 1. 固定 $d \geqslant 2$ 为整数. 则数列 $\{a_n\}$ 收敛到实数 a 当且仅当对任意的整数 $0 \leqslant k < d$, 子列 $\{a_{dn+k}\}$ 均收敛到 a.

证明: 必要性. 由于数列 $\{a_n\}$ 可收敛到实数 a, 则它的任何子列均收敛到 a. 特别地, 对任意的整数 $0 \leqslant k < d$, 子列 $\{a_{dn+k}\}$ 均收敛到 a.

充分性. 若对任意整数 $0 \leqslant k < d$, 子列 $\{a_{dn+k}\}$ 均收敛到 a, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_k > 0$ 使得 $\forall n > N_k$, 我们均有 $|a_{dn+k} - a| < \varepsilon$. 令

$$N = 1 + \max_{0 \leqslant k < d} N_k.$$

则 $\forall n > dN$, 由 Euclid 除法知存在整数 $0 \leqslant k < d$ 以及 $m > 0$ 使得 $n = dm + k$, 于是 $m \geqslant N > N_k$, 故 $|a_n - a| = |a_{dm+k} - a| < \varepsilon$. 由此得证.

例 2. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{3}$ 是否为绝对收敛或条件收敛.

解: 方法 1. $\forall n \geqslant 1$, 令 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \cos \frac{k\pi}{3}$. 则

$$S_{6n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3k-2}} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k}}{2\sqrt{3k-1}} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k}}{\sqrt{3k}}.$$

由 Leibniz 判别准则可知级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3k-2}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{2\sqrt{3k-1}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{\sqrt{3k}}$$

均收敛, 故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{6n}$ 存在.

又 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\cos\frac{k\pi}{3}=0$, 从而我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_{6n+1} &= \lim_{n\to\infty}S_{6n+2}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+3}\\ &= \lim_{n\to\infty}S_{6n+4}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+5}=\lim_{n\to\infty}S_{6n},\end{aligned}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在, 故 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\cos\frac{k\pi}{3}$ 收敛. $\forall k\geqslant 1$, $\left|\frac{1}{\sqrt{k}}\cos\frac{k\pi}{3}\right|\geqslant\frac{1}{2\sqrt{k}}$, 而 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{k}}$ 发散, 由比较法则可知 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\left|\cos\frac{k\pi}{3}\right|$ 发散, 故原级数条件收敛.

方法 2. 因数列 $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ 单调下降趋于 0 且 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{3}\right| \leqslant 5$, 于是由 Dirichlet 判别准则可知原级数收敛. 又 $\forall k \geqslant 1$, $\left|\frac{1}{\sqrt{k}}\cos\frac{k\pi}{3}\right| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}$, 而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ 发散, 由比较法则知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}\left|\cos\frac{k\pi}{3}\right|$ 发散, 故原级数条件收敛.

例 3. 假设 $p \in \mathbb{R}$ 而 $x \geqslant 0$. 问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+x)^p}$ 何时条件收敛?

解: $\forall n \geqslant 1$, 令 $u_n = \frac{(-1)^n}{(n+x)^p}$. 下面分情况讨论:

情形 1: $p \leqslant 0$. 此时数列 $\{u_n\}$ 不收敛于 0, 因此原级数发散.

情形 2: $p > 0$. 由 Leibniz 判别法立刻知原级数收敛. 又当 $n \to \infty$ 时, $|u_n| \sim \frac{1}{n^p}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 收敛当且仅当 $p > 1$.

因此原级数条件收敛当且仅当 $0 < p \leqslant 1$.

例 4. 假设正项数列 $\{a_n\}$ 单调下降. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$ 发散当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证明: 因为数列 $\{a_n\}$ 单调下降且以 0 为下界, 由单调有界定理知该数列收敛, 设其极限为 a. 由极限保号性得 $a \geqslant 0$. $\forall n \geqslant 1$, 令 $b_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$.

必要性: 用反证法, 假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散但 $a > 0$. 则 $\forall n \geqslant 1$, 由单调性知 $a_n \geqslant a$, 故 $b_n \leqslant \frac{a_n - a_{n+1}}{a}$.

由于 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $b_n \geqslant 0$, 并且级数

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - a_{n+1}}{a} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{a_1 - a_{N+1}}{a} = \frac{a_1 - a}{a},\end{aligned}$$

于是由比较法则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 矛盾!

充分性: 假设 $a = 0$. 则 $\forall n \geqslant 1$, 由 $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{a_m}{a_n} = 0$ 可知 $\exists m_n > n$ 使得 $0 < \frac{a_{m_n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$, 于是

$$\sum_{k=n+1}^{m_{n+1}} b_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{m_{n+1}} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_{m_{n+1}+1}}{a_{n+1}} \geqslant \frac{1}{2},$$

从而由 Cauchy 准则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

例 5. $\forall n \geqslant 1$, 设平面曲线 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 和 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 的交点横坐标的绝对值为 a_n.

(1) 求上述曲线线所围的平面图形的面积 S_n.

(2) 计算级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$.

解: (1) 由题设可知 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, 进而可得

$$\begin{aligned} S_n &= 2\int_0^{a_n}\left(nx^2+\frac{1}{n}-(n+1)x^2-\frac{1}{n+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\Big(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{n(n+1)}x\Big)\Big|_0^{a_n}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\big(n(n+1)\big)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{4}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)=\frac{4}{3}$.

例 6. 设函数 $y=y(x)$ 满足常微分方程

$$\begin{cases} y' = x + y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(y(\frac{1}{n}) - 1 - \frac{1}{n})$ 的敛散性.

解: 由题设知 y 为无穷可导且 $y'' = 1 + y'$. 则

$$\begin{aligned} y'(0) &= y(0) = 1, \\ y''(0) &= 1 + y'(0) = 2. \end{aligned}$$

当 $x \to 0$ 时, 由带 Peano 余项的 Taylor 展式知

$$
\begin{aligned}
y(x) &= y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 + o(x^2) \\
&= 1 + x + x^2 + o(x^2),
\end{aligned}
$$

于是由复合极限法则可知, 当 $n \to \infty$ 时,

$$
y\Big(\frac{1}{n}\Big) - 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\big(1 + o(1)\big) \sim \frac{1}{n^2},
$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big(y(\frac{1}{n}) - 1 - \frac{1}{n}\big)$ 绝对收敛.

例 7. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \rho \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. 求证:

(1) 若 $\rho < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}} = +\infty$;

(2) 若 $\rho > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ 收敛;

(3) 若 $\rho = 1$, 无法确定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ 的敛散性.

证明: (1) 若 $\rho < 1$, 令 $\alpha = \frac{1}{2}(1+\rho)$, 则 $\alpha > \rho$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{a_n}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} e^{(\alpha - a_n)\log n} = +\infty.$$

又 $\alpha < 1$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = +\infty$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}} = +\infty$.

(2) 若 $\rho > 1$, 令 $\alpha = \frac{1}{2}(1+\rho) < \rho$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{a_n}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} e^{(\alpha - a_n)\log n} = 0.$$

又 $\alpha > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ 收敛.

(3) 若 $\forall n \geqslant 1$, 令 $a_n = 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ 发散.

再设 $a_1 = 0$, 而 $\forall n \geqslant 2$, 令 $a_n = 1 + \frac{2\log\log n}{\log n}$. 又

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\frac{2\log\log x}{\log x}}} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^2} \xlongequal{t=\log x} \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{\log 2}$$

收敛, 从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ 收敛.

例 8. 判断级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n^p(\log n)^q(\log\log n)^r}$ 的敛散性, 其中 $p, q, r \in \mathbb{R}$.

解: 令 $\alpha = \frac{1}{2}(1+p)$. 下面针对 p 分情况讨论.

当 $p > 1$ 时, 我们有 $1 < \alpha < p$, 从而可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^p(\log n)^q(\log\log n)^r}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p-\alpha}(\log n)^q(\log\log n)^r} = 0.$$

又级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ 收敛, 由比较法则知原级数收敛.

当 $p<1$ 时，我们有 $1>\alpha>p$，从而可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p(\log n)^q(\log\log n)^r}}{\frac{1}{n^\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-p}}{(\log n)^q(\log\log n)^r}=+\infty.$$

又 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 发散，由比较法则可知原级数发散.

当 $p=1$ 时，令 $\beta=\frac{1}{2}(1+q)$ 并对 q 进行讨论.

当 $q>1$ 时，我们有 $1<\beta<q$，从而可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(\log n)^q(\log\log n)^r}}{\frac{1}{n(\log n)^\beta}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\log n)^{q-\beta}(\log\log n)^r}=0.$$

又 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^\beta}$ 收敛，由比较法则知原级数收敛.

当 $q<1$ 时, 我们有 $1>\beta>q$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(\log n)^q(\log\log n)^r}}{\frac{1}{n(\log n)^\beta}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\log)^{\beta-q}}{(\log\log n)^r}=+\infty.$$

而 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^\beta}$ 发散, 由比较法则知原级数发散.

若 $p=q=1$, 则 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^r}$ 与广义积分

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)(\log\log x)^r}\xlongequal{u=\log x}\int_{\log 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u(\log u)^r}\xlongequal{v=\log u}\int_{\log\log 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{v^r}$$

同敛散, 于是原级数收敛当且仅当 $r>1$.

综上可知原级数收敛当且仅当 $p>1$, 或 $p=1$ 但 $q>1$, 或 $p=q=1$ 但 $r>1$.

谢谢大家!