微积分 A (2)

姚家燕

第 1 讲

请在教室的同学关闭所有电子产品!

主讲老师联系方式与答疑时间

欢迎大家平时到办公室来咨询或讨论问题，
拒绝在考试后以各种名目来要分数！
不建议网上提问，因为无法保证时效和准确！

- 地点：理科楼数学系 A 216
- 电话：62794494
- 时间：每周三下午 16:00-17:00
- 3 月 3 日周三课堂上点名，请务必出席！

选择适合自己的课程!

若选择本课程, 请大家遵守下列纪律:

- 线下上课期间严禁使用任何电子产品
- 严禁以任何形式外传课堂内容
- 务必按时上交作业 (允许三次不交作业)
- 无故缺交平时作业 4 次及 4 次以上或无故缺席期中考试, 取消参加期末考试的资格!
- 严禁以任何方式在考试后来要成绩

上学期期末考试解答

1. 是否存在 $f, g \in \mathscr{C}[1, +\infty)$ 使得 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$，$\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散? 若存在, 请给出例子; 若不存在, 请给出证明.

解: $\forall x \geqslant 1$, 定义 $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $g(x) = 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. 则 $f, g \in \mathscr{C}[1, +\infty)$. $\forall A > 1$, 我们有

$$\left|\int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x\right| = \left|\cos 1 - \cos A\right| \leqslant 2,$$

而函数 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 为单调递减并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, 于是由 Dirichlet 判断准则可知 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.
$\forall x\geqslant 1$, 均有 $\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos(2x)}{2x}$. 同样由 Dirichlet 判断准则知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{2x}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 又 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x}$ 发散, 因此 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 进而可知

$$\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(f(x)+\frac{\sin^2 x}{x}\right)\mathrm{d}x$$

也发散.

2. 设 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 为有界函数.

(1) 证明: 常微分方程 $y' + y = f(x)$ 的每个解 $y = y(x)$ 均在 $[0, +\infty)$ 上有界.

(2) 问常微分方程 $y' + y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是否存在有界的解? 若存在, 有几个?

解: (1) 由题设可得知, $\exists M > 0$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们均有 $|f(x)| \leqslant M$. 又 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int_0^x (-1)\,\mathrm{d}t}\left(y(0) + \int_0^x f(t) e^{\int_0^t \mathrm{d}s} \mathrm{d}t\right) \\ &= e^{-x}\left(y(0) + \int_0^x f(t) e^t \mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

于是 $\forall x \geqslant 0$, 我们有

$$
\begin{aligned}
|y(x)| &\leqslant e^{-x}\left(|y(0)| + \int_0^x |f(t)|e^t \mathrm{d}t\right) \\
&\leqslant e^{-x}\left(|y(0)| + \int_0^x Me^t \mathrm{d}t\right) \\
&= e^{-x}\left(|y(0)| + M(e^x - 1)\right) \\
&= e^{-x}|y(0)| + M - Me^{-x} \\
&\leqslant |y(0)| + M.
\end{aligned}
$$

(2) $\forall t \leqslant 0$, 我们有 $|f(t)e^t| \leqslant Me^t$, 而 $\int_{-\infty}^0 e^t \,\mathrm{d}t$ 收敛, 则由比较法则可知广义积分 $\int_{-\infty}^0 f(t)e^t \,\mathrm{d}t$ 为绝对收敛, 因此收敛.

若题设常微分方程的解在 $(-\infty, 0)$ 上有界, 则

$$\begin{aligned} y(0) + \int_0^{-\infty} f(t)e^t \mathrm{d}t &= \lim_{x \to -\infty} \left(y(0) + \int_0^x f(t)e^t \mathrm{d}t \right) \\ &= \lim_{x \to -\infty} e^x y(x) = 0. \end{aligned}$$

也即 $y(0) = -\int_0^{-\infty} f(t)e^t \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 f(t)e^t \mathrm{d}t$.

反过来, 若 $y(0)=\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{t}\mathrm{d}t$, 则 $\forall x\leqslant 0$,

$$
\begin{aligned}
|y(x)| &= e^{-x}\left|y(0)+\int_{0}^{x} f(t)e^{t}\mathrm{d}t\right| \\
&= e^{-x}\left|\int_{-\infty}^{x} f(t)e^{t}\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant e^{-x}\int_{-\infty}^{x} |f(t)|e^{t}\mathrm{d}t \\
&\leqslant e^{-x}\int_{-\infty}^{x} Me^{t}\mathrm{d}t = M.
\end{aligned}
$$

综上所述可知, 题设常微分方程在 $(-\infty,0)$ 上有且仅有一个解有界.

3. 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\left(\arcsin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性. 若收敛, 求该广义积分的值; 若发散, 请说明理由.

证明: 由变量替换可得

$$\int_1^{+\infty}\left(\arcsin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \int_1^{0}\left(\arcsin t - t\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$= \int_0^1 \frac{\arcsin t - t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

又 $t\to 0^+$ 时, 我们有 $\frac{\arcsin t - t}{t^2}\sim\frac{t^3}{6t^2}=\frac{t}{6}$, 因此广义积分 $\int_0^1\frac{\arcsin t-t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ 收敛, 进而知广义积分 $\int_1^{+\infty}\left(\arcsin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 也收敛.

考虑不定积分

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\arcsin t - t}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int (\arcsin t - t)\,\mathrm{d}(\frac{1}{t}) \\
= \quad & \frac{t - \arcsin t}{t} + \int \frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1}{t}\mathrm{d}t \\
= \quad & \frac{t - \arcsin t}{t} - \log t + \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t^2}} \\
\xlongequal[0\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}]{t=\sin u} \quad & \frac{\sin u - u}{\sin u} - \log\sin u + \int \frac{\mathrm{d}(\sin u)}{(\sin u)(\cos u)} \\
= \quad & \frac{\sin u - u}{\sin u} - \log\sin u + \log|\csc u - \cot u| + C \\
= \quad & \frac{\sin u - u}{\sin u} + \log\left(\frac{1-\cos u}{\sin^2 u}\right) + C.
\end{aligned}
$$

由此可得

$$\int_1^{+\infty}\Big(\arcsin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\arcsin t-t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
&= \Big(\frac{\sin u-u}{\sin u}+\log\Big(\frac{1-\cos u}{\sin^2 u}\Big)\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \Big(1-\frac{\pi}{2}\Big)-\lim_{u\to 0^+}\Big(\frac{\sin u-u}{\sin u}+\log\Big(\frac{1-\cos u}{\sin^2 u}\Big)\Big) \\
&= \Big(1-\frac{\pi}{2}\Big)-\log\Big(\frac{1}{2}\Big) \\
&= 1+\log 2-\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

4. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解: 利用万能公式可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$$

$$\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} -\frac{\pi}{3} + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\mathrm{d}(2\arctan t)}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{\pi}{3} + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2-2t}$$

$$= -\frac{\pi}{3} - \frac{2}{t-1}\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{\pi}{3} + 1 + \sqrt{3}.$$

5. 设 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}x$, 求 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

解: 由分部积分可得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= f(x)x\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)x\,\mathrm{d}x\\
&= f(1)-\int_0^1 e^{-x^2}x\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}(x^2)\\
&= \frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^{-1}-1).
\end{aligned}$$

§1. n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$

设 $n \geqslant 1$ 为整数. 定义

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

对于 $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$\|X\|_n := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2},$$

称为 X 的范数, 在不产生混淆时, 记作 $\|X\|$.

$\forall X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义 $d(X,Y) := \|X - Y\|$, 称为 X, Y 之间的距离.

距离的基本性质:

正定性: $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, 均有 $d(X,Y) \geqslant 0$, 并且

$$d(X,Y) = 0 \text{ 当且仅当 } X = Y.$$

对称性: $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $d(X,Y) = d(Y,X)$.

三角不等式: $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$d(X,Y) \leqslant d(X,Z) + d(Z,Y).$$

我们称 $(\mathbb{R}^n, d)$ 为 n 维欧氏空间.

n 维 Euclid 空间中的开集与闭集 (基本的拓扑概念)

固定 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. 定义:

- $B(X_0, \delta) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| < \delta\}$, 称为点 X_0 的 δ-邻域, 也称为以 X_0 为中心以 δ 为半径的开球.
- $\mathring{B}(X_0, \delta) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|X - X_0\| < \delta\}$, 称为 X_0 的去心 δ-邻域.

基本概念: 固定 $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

- 内点: 如果 $\exists \delta > 0$ 使得 $B(X_0, \delta) \subseteq S$, 则称点 X_0 为 S 的一个内点.
- 外点: 如果 $\exists \delta > 0$ 使得 $B(X_0, \delta) \cap S = \emptyset$, 则称点 X_0 为 S 的一个外点.

注: 由于 $B(X_0, \delta) \cap S = \emptyset$ 恰好就是等价于说 $B(X_0, \delta) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S$, 因此 X_0 为 S 的外点当且仅当 X_0 为 $\mathbb{R}^n \setminus S$ 的内点.

- 边界点: 若 X_0 既不为 S 的内点, 也不为其外点, 则称 X_0 为 S 的一个边界点. 等价地, 点 X_0 为 S 的边界点当且仅当 $\forall\delta>0$, 均有: $B(X_0,\delta)\cap(\mathbb{R}^n\setminus S)\neq\emptyset$, $B(X_0,\delta)\cap S\neq\emptyset$.
- 极限点: 若 $\forall\delta>0$, 均有 $\mathring{B}(X_0,\delta)\cap S\neq\emptyset$, 则称 X_0 为 S 的一个极限点.
- 开集: 若 S 的每点均为内点, 则称为开集.
- 闭集: 若 $\mathbb{R}^n\setminus S$ 为开集, 则称 S 为闭集.

谢谢大家!