第八周习题课　　微分中值定理，单调性，极值，洛必达法则

- 费马定理：$f(x)$ 在 x_0 点取到极值，$f(x)$ 在 x_0 点可微，则 $f'(x_0)=0$ 。
- 罗尔定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可微，$f(a)=f(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$
- 拉格朗日定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可微，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- 柯西中值定理：$f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可微，且 $g'(x)\neq 0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，

使 $$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}。$$

- （达布定理）导数零点定理：设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，并且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$。

则必 $\exists x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$（在 x_0 处有水平切线）。

- 洛必达法则——求不定式的极限

如果

（1） $\lim f(x)=\lim g(x)=0$（或 ∞）

（2） 在极限点附近，$f'(x),\ g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；

（3） $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在或为无穷大，且等于 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

一．微分中值定理用于证明题

1. 在 $[0,1]$ 上，$0<f(x)<1$，$f(x)$ 可微，且 $f'(x)\neq 1$，证明在 $(0,1)$ 存在唯一的 ξ 使 $f(\xi)=\xi$。

证明：（1）存在性：作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$，

$$F(0)=f(0)>0$$
$$F(1)=f(1)-1<0$$

由连续函数的介值定理得，在 $(0,1)$ 存在 ξ 使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$。

（2）唯一性：若存在两点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=\xi_1$，$f(\xi_2)=\xi_2$，由 Lagrange 中值定理，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$（假设 $\xi_1<\xi_2$），使

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi_1)-f(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}=1,$$

与条件$f'(x)\neq 1$矛盾。

2. 设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数，且存在相等的最大值，

$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$。

证明：令$F(x)=f(x)-g(x)$， 则

$$F(a)=0，F(b)=0,$$

设$f(x),g(x)$在(a,b)内的最大值为M 分别在$\alpha\in(a,b),\beta\in(a,b)$取得。

当$\alpha=\beta$时，取$\eta=\alpha=\beta\in(a,b)$，则有$f(\eta)=g(\eta)$。

当$\alpha\neq\beta$时，则

$$F(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=M-g(\alpha)\geq 0$$

$$F(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=g(\beta)-M\leq 0$$

由介值定理，存在$\eta\in(a,b)$使$F(\eta)=0$，即

$$f(\eta)=g(\eta)$$

由 Rolle 定理，

$$\exists\xi_1\in(a,\eta)，F'(\xi_1)=0，\exists\xi_2\in(\eta,b)，F'(\xi_1)=0$$

再由 Rolle 定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，$h''(\xi)=0$，即

$$f''(\xi)=g''(\xi)$$

3. 函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)二阶可导，且$g''(x)\neq 0$，
$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$。 求证
（1） $g(x)\neq 0$，$\forall \mathrm{x}\in(a,b)$；
（2）$\exists c\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(c)}{g(c)}=\dfrac{f''(c)}{g''(c)}$。

证明：（1）用反证法，若在(a,b)内存在$c\in(a,b)$使得$g(c)=0$，

则由 Rolle 定理，$\exists c_1 \in (a,c)$，$\exists c_2 \in (c,b)$，使得 $g'(c_1)=g'(c_2)=0$。

再由 Rolle 定理可知，$\exists c_0 \in (c_1,c_2)$，使得 $g''(c_0)=0$。此与题设矛盾。

（2）记 $F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，则函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，

且 $F(a)=F(b)=0$，由 Rolle 定理，$\exists c \in (a,b)$，使得 $F'(c)=0$，

也即 $F'(c)=f(c)g''(c)-f''(c)g(c)=0$，由此导出结论（2）。证毕。

4. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$。证明：

（I）存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（II）存在两个不同的点 $\eta,\zeta \in (0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1.$

【分析】 第一部分显然用闭区间上连续函数的介值定理；第二部分为双介值问题，可考虑用拉格朗日中值定理，但应注意利用第一部分已得结论.

证明：(I) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-1, F(1)=1$，于是由介值定理知，存在存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

（II） 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点 $\eta \in (0,\xi), \zeta \in (\xi,1)$，使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}$，$f'(\zeta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$

于是 $$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1.$$

5. $f(x)$ $[0,+\infty)$ 内可导，且在 $0 \le f(x) \le \ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$, $\forall x \in [0,+\infty)$。证明：

$$\exists \xi \in (0,+\infty), \quad f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}。$$

证明：因为 $0 \le f(x) \le \ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$, $\forall x \in [0,+\infty)$，而

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}=0, \quad \left.\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=0}=0，$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0, \quad f(0)=0$。

记$F(x)=f(x)-\ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0,\quad F(0)=0$，由广义 Rolle 定理，$\exists\xi\in(0,+\infty),\quad F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=\dfrac{2}{2\xi+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$。

二．零点问题

6.　对任意正整数n，证明方程$e^x-x^n=0$至多有三个不同的零点。

证明：显然方程$e^x-x^n=0$和方程$e^{-x}x^n-1=0$有相同的零点。考虑函数$f(x):=e^{-x}x^n-1$。易见$f'(x)=e^{-x}x^{n-1}(\mathrm{n}-\mathrm{x})$有且仅有两个不同的零点（实根）。由 Rolle 定理可知，$f(x)$至多有三个不同的零点。从而方程$e^x-x^n=0$至多有三个不同的实零点。结论得证。

注：在利用中值定理估计函数零点的个数时，如何构造辅助函数是非常重要的事情。对于本题而言，首先想到的辅助函数自然是$\mathrm{g}(x):=e^x-x^n$。但是估计导数$\mathrm{g}'(x)=e^x-nx^{n-1}$的零点个数，并不比估计函数$\mathrm{g}(x)$本身的零点个数来得更容易。 因此当我们对某个辅助函数作估计遇到困难时，应该考虑选取其他辅助函数。选取不同的辅助函数，估计的难度一般说来是不同的。本题提供了一个很好的例子。

三．单调性与不等式问题

7.　$y=x^{\frac{1}{x}}$（$x>0$）在____________________上增；在____________________上减。

解：$f(x)=\ln y=\dfrac{\ln x}{x},\quad f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

$$x\in(0,e),f'(x)>0;\quad x\in(e,+\infty),f'(x)<0\text{。}$$

8.　设$f:[0,1]\to[0,1]$为连续函数，$f(0)=0,f(1)=1,f(f(x))=x$。证明：

（I）$f(x)$是单调函数；

（II）$f(x)=x$。

证明：（1）反证法：

假设$f(x)$不是单调函数，则存在$x_1,x_2\in[0,1],x_1<x_2,f(x_2)<f(x_1)\le 1=f(1)$。

因为 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为连续函数，存在 $x_3\in[x_2,1]$ 使得 $f(x_3)=f(x_1)$，而 $x_1=f(f(x_1))=f(f(x_3))=x_3$，矛盾。

（2）$\forall x\in[0,1], x, f(x)\in[0,1]$。

如果 $x\ge f(x)$，由 f 的单调性，$f(x)\ge f(f(x))=x$，$f(x)=x$；

如果 $x\le f(x)$，由 f 的单调性，$f(x)\le f(f(x))=x$，$f(x)=x$。

故 $f(x)=x$。

9. 设 $x>0$，证明不等式 $\dfrac{x}{x^2+2x+2}<\arctan(x+1)-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{x}{2}$。

证明：令 $f(x)=(x^2+2x+2)\arctan(x+1)-\dfrac{\pi}{4}(x^2+2x+2)-x$，则 $f(0)=0$

$$\begin{aligned} f'(x)&=(2x+2)\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}(2x+2)\\ &=(2x+2)[\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}]>0 \end{aligned}$$

于是当 $x>0$ 时 $f(x)>0$，即原左侧不等式成立。

令 $\varphi(x)=\arctan(x+1)-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$，$\varphi(0)=0$，

$$\varphi'(x)=\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{2}<0,\quad \Rightarrow \varphi(x)<0$$

即原右侧不等式成立。

10. 证明：当 $x\in(0,1)$ 时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$

证明：
$$f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$$

$$f'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$$

$$f''(x)=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}$$

显然 $\ln(1+x)-x<0,\quad x\in(0,1)$，因此 $f''(x)<0,\quad x\in(0,1)$，$f'(x)$ 为单调降函数。

因为$f'(0)=0$，$f'(x)<0,\quad x\in(0,1)$，$f(x)$为单调降函数。

因为$f(0)=0$，所以$f(x)<0, x\in(0,1)$，即当$x\in(0,1)$时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$。

四．洛必达法则

11．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right].=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6.}$$

12．求极限$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$。

解：（方法 1）$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\text{。}$$

（方法 2）$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln(1+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}\text{。}$$