微积分 A (2)

姚家燕

第 4 讲

在听课过程中，

严禁使用与教学无关的电子产品！

第 3 讲回顾：多元向量值函数

- 概念：n 元向量值函数, n 元 (数量值) 函数.
- 向量值函数的运算：线性组合；向量值函数与数量值函数之间的乘、除；向量值函数的复合运算.
- 向量值函数的表示：在 $\mathbb{R}^m$ 中取值的 n 元向量值函数等同于 m 个 n 元数量值函数.

回顾：函数极限

- 函数极限 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} \vec{f}(X)$, $\lim\limits_{X \to X_0} \vec{f}(X)$.
- 向量值函数极限收敛当且仅当它的每一个坐标分量函数的函数极限收敛.
- 极限若存在, 则唯一.
- 数量值函数极限的保序性、保号性、夹逼原理、四则运算.
- 复合极限法则, 序列极限与函数极限之间的关系, Cauchy 准则.

回顾: 多变量函数极限的计算

基本方法: 转化为单变量的情形.

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1.$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$
- $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to a}} \left(1-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{-\frac{1}{2}}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.
- 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

第 4 讲

例 5. 试证明 $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2-x}$ 在 (x,y) 沿任何直线趋于 $(0,0)$ 时, 均会趋于 0, 但是当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时, 极限却不存在.

证明: 假设 $a,b\in\mathbb{R}$ 不全为零. 对于过 $(0,0)$ 的任意直线 $\begin{cases} x=at \\ y=bt \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f(at,bt) &= \lim_{t\to 0}\frac{(at)^2}{(at)^2+(bt)^2-at} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{a^2}{a^2+b^2-\frac{a}{t}}=0.\end{aligned}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, 定义 $g(t) = (t^2, t)$. 那么 $\lim_{t \to 0} g(t) = (0,0)$, 且 g 在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上不等于 $(0,0)$. 注意到

$$\lim_{t \to 0} f \circ g(t) = \lim_{t \to 0} \frac{(t^2)^2}{(t^2)^2 + t^2 - t^2} = 1 \neq 0,$$

于是由复合函数极限法则可知极限

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$$

不存在.

例 6. 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+e^y)}{1+\log(1+x)}$.

解: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+e^y)}{1+\log(1+x)} = \sin 1$.

作业题: 第 1.3 节第 22 页第 1 题第 (3), (4), (11), (12) 小题, 第 2 题第 (1), (2), (3), (5) 小题, 其中第 (5) 题当中应该将 xy 改为 $|xy|$.

二重极限与累次极限

二重极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

累次极限: $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

注: 对于累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, 先对 $x\neq x_0$ 计算 $\varphi(x):=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, 随后再求 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

问题: 二重极限与累次极限有什么关系?

回答: 没有任何关系!

情形 1: 二重极限不存在, 但累次极限存在.

例 7. 前面已证二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ 不存在, 但当 $y \neq 0$ 时, 我们有 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0$, 于是

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0.$$

由对称性可得 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0.$

情形 2: 二重极限存在, 但累次极限不存在.

例 8. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (其中 $xy \neq 0$), 定义

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}.$$

由于 $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{y} = 0$, 但极限 $\lim\limits_{x \to 0} y \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 故极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$ 不存在. 由对称性可知极限 $\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ 也不存在. 又 $|f(x, y)| \leqslant |x| + |y|$, 由夹逼原理可知 $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$.

定理 1. 假设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 且在 x_0 的某去心邻域 U 内 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$ 收敛, 则

$$A=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

证明: 由极限的定义可知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得 $\forall(x,y)\in\mathring{B}((x_0,y_0),\delta)$, 均有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$. 则 $\forall x\in U\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 对 y 取极限可得 $|\varphi(x)-A|\leqslant\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$.

注: 这里仅考虑了 $A\in\mathbb{R}$ 而省略了其它情形.

推论 1. 若二重极限与某一个累次极限均存在, 则二者必然相等: 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=B$ 存在, 则 $A=B$.

推论 2. 若累次极限存在但不相等, 则二重极限不存在: 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 均存在但不相等, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.

作业题: 第 1.3 节第 23 页第 3 题 第 (2) 小题.

注: 应将题中的 $0+$ 改为 0^+.

向量值函数的连续性

定义 2. 假设 $m, n \geqslant 1$ 为整数, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_0 \in \Omega$ 为 Ω 的极限点, $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数. 若

$$\lim_{\Omega \ni X \to X_0} \vec{f}(X) = \vec{f}(X_0),$$

则称 $\vec{f}$ 在点 X_0 处连续.

评注

- $\vec{f}$ 在点 X_0 连续当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall X \in \Omega$, 当 $\|X - X_0\|_n < \delta$ 时, 均有
$$\|\vec{f}(X) - \vec{f}(X_0)\|_m < \varepsilon.$$
若点 X_0 不为 Ω 的极限点, 上述性质恒成立, 此时我们也称 $\vec{f}$ 在点 X_0 处连续.
- 若 $\vec{f}$ 在 Ω 的每点连续, 则称 $\vec{f}$ 在 Ω 上连续.
- 定义 $\mathscr{C}(\Omega;\mathbb{R}^m) = \{\vec{f} \mid \vec{f}:\Omega \to \mathbb{R}^m \text{ 为连续}\}$. 当 $m = 1$ 时, 我们将之简记为 $\mathscr{C}(\Omega)$.

连续函数的性质

定理 2. 多元数量值连续函数经过加、减、乘、除 (分母不为零) 运算后仍为连续函数.

定理 3. 多元向量值连续函数经加、减、数乘与复合运算后仍为连续函数.

注: 我们可以类似地定义多个变元的初等函数, 由上述性质可知它们在 其定义区域内 连续.

定理 4. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 而 $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数. 则 $\vec{f}$ 连续当且仅当对 $\mathbb{R}^m$ 中任意开集 G, 原像集 $\vec{f}^{-1}(G) = \{X \in \Omega \mid \vec{f}(X) \in G\}$ 均为开集.

证明: 充分性. 假设对于 $\mathbb{R}^m$ 中的任意开集 G, 其原像集 $\vec{f}^{-1}(G)$ 为开集. 取 $X_0 \in \Omega$. $\forall \varepsilon > 0$, 令 $G = B(\vec{f}(X_0), \varepsilon)$. 由题设知 $\vec{f}^{-1}(G)$ 为包含点 X_0 的开集, 则 $\exists \delta > 0$ 使 $B(X_0, \delta) \subseteq \vec{f}^{-1}(G)$, 即 $\forall X \in B(X_0, \delta)$, 均有 $\|\vec{f}(X) - \vec{f}(X_0)\|_m < \varepsilon$. 因此 $\vec{f}$ 在点 X_0 处连续, 从而 $\vec{f}$ 为连续映射.

必要性. 假设 $\vec{f}$ 为连续映射, 而 G 为 $\mathbb{R}^m$ 中的任意非空开集. $\forall X_0 \in \vec{f}^{-1}(G)$, 均有 $\vec{f}(X_0) \in G$. 又 G 为开集, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $B(\vec{f}(X_0), \varepsilon) \subseteq G$. $\vec{f}$ 在 X_0 连续, 则 $\exists \delta_1 > 0$ 使 $\forall X \in \Omega \cap B(X_0, \delta_1)$, 我们有 $\|\vec{f}(X) - \vec{f}(X_0)\|_m < \varepsilon$. 又 $\Omega \cap B(X_0, \delta_1)$ 为开集, 故 $\exists \delta > 0$ 使 $B(X_0, \delta) \subseteq \Omega \cap B(X_0, \delta_1)$, 则 $\forall X \in B(X_0, \delta)$, 均有 $\|\vec{f}(X) - \vec{f}(X_0)\|_m < \varepsilon$, 也即有 $B(X_0, \delta) \subseteq \vec{f}^{-1}\big(B(\vec{f}(X_0), \varepsilon)\big) \subseteq \vec{f}^{-1}(G)$, 故 X_0 为 $\vec{f}^{-1}(G)$ 的内点, 进而 $\vec{f}^{-1}(G)$ 为开集.

注: 同理可证 $\vec{f}$ 连续当且仅当对于 $\mathbb{R}^m$ 中任意闭集 F, 原像集 $\vec{f}^{-1}(F)$ 为闭集.

定理 5. (**最值定理**) 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, 而 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, 则 f 在 Ω 上有最大值和最小值.

证明: 首先证明 f 在 Ω 上有界. 否则, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists X_k \in \Omega$ 使得 $|f(X_k)| > k$. 由 Ω 的有界性可知 $\{X_k\}$ 有一个子列 $\{X_{\ell_k}\}$ 收敛, 设其极限为 A. 又 Ω 为闭集, 则 $A \in \Omega$, 再由 f 的连续性以及夹逼原理可得 $f(A) = \lim\limits_{k \to \infty} f(X_{\ell_k}) = \infty$. 矛盾! 故假设不成立, 从而 f 有界.

下证 f 在 Ω 上有最值. 用反证法, 假设 f 没有最大值或最小值. 不失一般性, 可假设 f 没有最大值, 否则可以考虑 $-f$. 令 $M = \sup f(\Omega)$. 则 $\forall X \in \Omega$, $f(X) < M$. 定义 $F(X) = \frac{1}{M-f(X)}$, 则 $F \in \mathscr{C}(\Omega)$. 又由 M 的定义可知, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists X_k \in \Omega$ 使得 $f(X_k) > M - \frac{1}{k}$, 故 $F(X_k) > k$, 从而 F 在 Ω 上没有上界. 矛盾! 故所证成立.

$\mathbb{R}^n$ 中集合的弧连通

- 称集合 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 为弧连通, 如果 $\forall X, Y \in D$, 均存在 D 中的连续曲线将 X, Y 连接起来, 即存在向量值连续函数 $\gamma : [0,1] \to D$ 使得我们有 $\gamma(0) = X, \gamma(1) = Y$.
- 折线连通集也为弧连通集. 可以证明弧连通开集为折线连通.
- 由连续函数介值定理立刻可知, $\mathbb{R}$ 的子集 D 为弧连通集当且仅当它为区间.

定理 6. (连通性) 若 $\vec{f} \in \mathscr{C}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ 而 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为弧连通, 则 $\vec{f}(\Omega)$ 为弧连通集.

证明: 向量值连续函数的复合依然连续, 得证.

定理 7. (介值定理) 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为弧连通集, 而 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, 则 $\forall X_1, X_2 \in \Omega$ 以及介于 $f(X_1)$, $f(X_2)$ 之间的实数 μ, $\exists X_0 \in \Omega$ 使得 $f(X_0) = \mu$.

证明: 由 定理 6 可知 $f(\Omega)$ 为 $\mathbb{R}$ 的弧连通子集, 从而为区间. $\forall X_1, X_2 \in \Omega$, $f(X_1), f(X_2) \in f(\Omega)$, 则以这两点为端点的区间包含于 $f(\Omega)$. 得证.

例 9. 证明: 存在正实数 m, M 使得对于任意的 $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$m \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leqslant \|X\| \leqslant M \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

分析: 当 X 为零向量时, 上式成立. 若 X 不为零向量, 则该不等式等价于 $\frac{1}{M} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} \left|\frac{x_j}{\|X\|}\right| \leqslant \frac{1}{m}$.

令 $y_j = \frac{x_j}{\|X\|}$, 则 $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ 满足 $\|Y\| = 1$.

而所证不等式则等价于

$$\frac{1}{M} \leqslant f(Y) := \sum_{j=1}^{n} |y_j| \leqslant \frac{1}{m}.$$

也即要证明 f 在单位球面上有正的上、下界.

证明: 定义 $S = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \|Y\|_n = 1\}$, 则 S 为有界闭集. $\forall Y = (y_1, \ldots, y_n) \in S$, 令

$$f(Y) = \sum_{j=1}^{n} |y_j| > 0.$$

则 f 连续, 从而有最小值 $a > 0$, 最大值 b.

选取 $m = \frac{1}{b}$, $M = \frac{1}{a}$. $\forall X \in \mathbb{R}^n$ (X 不为零向量),

设 $Y = \frac{1}{\|X\|_n}(x_1, \ldots, x_n) \in S$, 则 $a \leqslant f(Y) \leqslant b$.

也即 $a \leqslant \frac{1}{\|X\|_n} \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leqslant b$, 从而我们有

$$\frac{1}{b} \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leqslant \|X\|_n \leqslant \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

也就是说我们有 $m \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leqslant \|X\|_n \leqslant M \sum_{j=1}^{n} |x_j|$.

而 X 为零向量时, 该式也成立, 故所证成立.

作业题: 第 1.3 节第 23 页第 6 题第 (1), (4) 题.

无穷小函数的阶

定义 3. 设 $n \geqslant 1$ 为整数, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, 而 $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 为 Ω 的极限点, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数.

(1) 若 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} f(X) = 0$, 称 f 在 $\Omega \ni X \to X_0$ 时为无穷小函数 (或无穷小量), 记作

$$f(X) = o(1)\ (\Omega \ni X \to X_0).$$

可见 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} f(X) = A$ 当且仅当

$$f(X) - A = o(1)\ (\Omega \ni X \to X_0).$$

(2) 设 $g:\Omega\to\mathbb{R}$ 为函数. 若存在 $\beta>0$, $\delta>0$ 使 $\forall X\in\Omega\cap\mathring{B}(X_0,\delta)$, $|f(X)|\leqslant\beta|g(X)|$, 则记

$$f(X)=O(g(X))\ (\Omega\ni X\to X_0).$$

若还有 $g(X)=O(f(X))$, 则称 f,g 为同阶.

(3) 设 $k\geqslant 0$. 若 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\frac{f(X)}{\|X-X_0\|^k}=0$, 则称 f 在 $\Omega\ni X\to X_0$ 时为 $\|X-X_0\|^k$ 的高阶的无穷小, 记作 $f(X)=o(\|X-X_0\|^k)\ (\Omega\ni X\to X_0)$.

(4) 若 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\frac{f(X)}{\|X-X_0\|^k}=c\neq 0$, 则我们称 f 在 $\Omega\ni X\to X_0$ 时为 $\|X-X_0\|$ 的 k 阶的无穷小, 此时 f 局部常号. 若 $k=0$, 则 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0} f(X)=c$, 因此我们通常不考虑 0 阶无穷小.

例 10. $\forall X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$f_1(X)=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j,\ f_2(X)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}x_ix_j.$$

求证: 当 $X\to(0,\dots,0)$ 时, 我们有

$$f_1(X)=O(\|X\|),\ f_2(X)=O(\|X\|^2).$$

证明: 由 Cauchy 不等式立刻可得

$$|f_1(X)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j||x_j| \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \|X\|.$$

令 $M = \sup\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$. 同样由 Cauchy 不等式知

$$\begin{aligned} |f_2(X)| &\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}||x_i||x_j| \leqslant M\Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|\Big)^2 \\ &\leqslant nM \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = nM\|X\|^2. \end{aligned}$$

因此所证结论成立.

作业题: 第 1.3 节第 24 页第 10 题第 (2), (3) 题.

§4. 多元函数的全微分及偏导数

回顾: 称 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为线性函数, 若 $\forall X,Y\in\mathbb{R}^n$ 以及 $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 我们均有

$$L(\lambda X+\mu Y)=\lambda L(X)+\mu L(Y).$$

设 $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基底, 令 $a_j=L(\vec{e}_j)$. $\forall X=(x_1,\ldots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 我们有 $X=\sum\limits_{j=1}^n x_j\vec{e}_j$,

由此可得 $L(X)=\sum\limits_{j=1}^n L(\vec{e}_j)x_j=\sum\limits_{j=1}^n a_jx_j$.

线性函数的向量表示

$\forall X = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 我们有

$$L(X) = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n)X,$$

于是线性函数 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可以与 n 阶行向量

$$(a_1, \ldots, a_n)$$

视为等同.

n 元函数的全微分

定义 1. 假设 $X_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 而 $f : B(X_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为函数. 若存在线性函数 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 使得当 $X \to X_0$ 时, 我们有

$$f(X) - f(X_0) = L(X - X_0) + o(\|X - X_0\|),$$

则称 f 在点 X_0 处可微, 并将线性函数 L 记作 $\mathrm{d}f(X_0)$, 称为 f 在点 X_0 处的全微分或微分.

评注

- 由于函数 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为线性函数当且仅当 $\exists a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ 使 $\forall Y=(y_1,\dots,y_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 均有 $L(Y)=\sum\limits_{j=1}^n a_jy_j$. 故 f 在点 X_0 处可微当且仅当 $\exists a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ 使得 $X\to X_0$ 时,

$$
\begin{aligned}
f(X)-f(X_0)&=L(X-X_0)+o(\|X-X_0\|)\\
&=\sum_{j=1}^n a_j(x_j-x_j^{(0)})+o(\|X-X_0\|).
\end{aligned}
$$

- f 在点 X_0 可微蕴含在该点连续, 反之不对.

定理 1. 若 f 在点 X_0 可微, 则其微分唯一.

证明: 假设 f 在点 X_0 处有两个微分, 也就是说存在 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 与 $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ 使得当 $X \to X_0$ 时, 我们有

$$f(X) - f(X_0) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x_j - x_j^{(0)}) + o(\|X - X_0\|),$$

$$f(X) - f(X_0) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x_j - x_j^{(0)}) + o(\|X - X_0\|),$$

于是当 $X \to X_0$ 时, 我们有

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j - b_j)(x_j - x_j^{(0)}) = o(\|X - X_0\|).$$

特别地, 对于每个固定的指标 $1 \leqslant j \leqslant n$, 通过选取 $x_i = x_i^{(0)}$ $(i \neq j)$ 可知, 当 $x_j \to x_j^{(0)}$ 时,

$$(a_j - b_j)(x_j - x_j^{(0)}) = o(|x_j - x_j^{(0)}|),$$

也即 $a_j - b_j = \lim\limits_{x_j \to x_j^{(0)}} \frac{o(|x_j - x_j^{(0)}|)}{x_j - x_j^{(0)}} = 0.$ 由此得证.

例 1. 若 $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 线性, 则 $\forall X, X_0 \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$L(X) - L(X_0) = L(X - X_0),$$

于是 L 在点 X_0 处的微分为 $\mathrm{d}L(X_0) = L$, 也即 $\forall Y \in \mathbb{R}^n$, 均有 $\mathrm{d}L(X_0)(Y) = L(Y)$.

例 2. 固定 $1 \leqslant j \leqslant n$. $\forall X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 令 $\pi_j(X) = x_j$. 则 π_j 为线性函数且 $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}\pi_j(X_0) = \pi_j$, 也即 $\forall Y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{d}\pi_j(X_0)(Y) = \pi_j(Y) = y_j.$$

由于 $\mathrm{d}\pi_j(X_0)$ 不依赖 X_0, 通常将上式简写成

$$\mathrm{d}\pi_j(Y) = \pi_j(Y) = y_j.$$

如同在单变量的情形, 常用 x_j 来表示 π_j, 而将 $\mathrm{d}\pi_j$ 简记作 $\mathrm{d}x_j$. 则我们有

$$\mathrm{d}x_j(X_0)(Y) = y_j.$$

同前面一样, 我们也常将之简写成

$$\mathrm{d}x_j(Y) = y_j.$$

线性函数的表示

命题 1. 设 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 线性使得 $\forall Y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 均有 $L(Y) = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j$, 则

$$L = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mathrm{d}x_j.$$

证明: 由于 $L(Y) = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mathrm{d}x_j(Y)$, 因此所证结论成立.

定理 2. 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集, $X_0 \in \Omega$, 而函数 $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ 在点 X_0 可微. 则下列性质成立:

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ 在点 X_0 处可微, 并且
$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(X_0) = \lambda\,\mathrm{d}f(X_0) + \mu\,\mathrm{d}g(X_0).$$
- fg 在点 X_0 处可微并且
$$\mathrm{d}(fg)(X_0) = f(X_0)\,\mathrm{d}g(X_0) + g(X_0)\,\mathrm{d}f(X_0).$$
- 若 $g(X_0) \neq 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 在点 X_0 处可微并且
$$\mathrm{d}\Big(\frac{f}{g}\Big)(X_0) = \frac{g(X_0)\mathrm{d}f(X_0) - f(X_0)\mathrm{d}g(X_0)}{(g(X_0))^2}.$$

偏导数 全微分的计算

定义 2. 设 $X_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$, 而函数 f 定义在点 X_0 的某邻域上. 固定 $1 \leqslant j \leqslant n$. 若

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{j-1}^{(0)}, x_j^{(0)} + h, x_{j+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(X_0)}{h}$$

存在, 则称函数 f 在点 X_0 处关于第 j 个变量有偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$, 通常也会将之记作 $\partial_j f(X_0)$ 或 $f'_{x_j}(X_0)$. 若对于 $1 \leqslant j \leqslant n$, 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$ 均存在, 则称函数 f 在点 X_0 处可导.

评注

- 设 $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基底, 那么

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(X_0 + h\vec{e}_j) - f(X_0)}{h}.$$

令 $F(h) = f(X_0 + h\vec{e}_j)$. 则 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) = F'(0)$, 也即将变量 $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ 固定, 而将 f 看成是 x_j 的单变量函数来求导.

- 几何意义: 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$ 实际上表示平面曲线 $y = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{j-1}^{(0)}, x, x_{j+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ 在点 $x = x_j^{(0)}$ 处的切线方向.
- 当 $n \geqslant 2$ 时, n 元函数 f 在点 X_0 可导并不意味它在该点连续, 更不意味在该点可微.

例 3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 定义

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } xy = 0, \\ 1, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, 但 f 在原点不连续.

例 4. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, 定义

$$f(x,y,z) = x^2 + e^{xyz} + \log(x^2+y^2+z^2).$$

求函数 f 的偏导数.

解: 由定义可知, 在点 (x,y,z) 处,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 2x + yze^{xyz} + \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= xze^{xyz} + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= xye^{xyz} + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}.
\end{aligned}$$

定理 3. 若 f 在点 X_0 处可微, 则它可导且

$$\mathrm{d}f(X_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\,\mathrm{d}x_j.$$

证明: 由题设可知存在 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ 使得

$\forall Y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 我们均有

$$\mathrm{d}f(X_0)(Y) = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\,\mathrm{d}x_j(Y),$$

也即我们有 $\mathrm{d}f(X_0) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j\,\mathrm{d}x_j$.

对任意的 $1 \leqslant j \leqslant n$, 由微分定义, 当 $h \to 0$ 时,

$$\begin{aligned} f(X_0 + h\vec{e}_j) - f(X_0) &= \mathrm{d}f(X_0)(h\vec{e}_j) + o(\|h\vec{e}_j\|) \\ &= a_j h + o(|h|). \end{aligned}$$

由此我们立刻可得

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(X_0 + h\vec{e}_j) - f(X_0)}{h} = a_j,$$

也即 f 在点 X_0 处关于第 j 个变量可导, 并且 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) = a_j$. 故所证结论成立.

例 5. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$. 讨论函数 f 在原点处的连续性, 可导性与可微性.

解: 因 $0\leqslant f(x,y)\leqslant\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, 则由夹逼原理可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0).$$

于是函数 f 在原点处连续. 由偏导数的定义知

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.\end{aligned}$$

因此函数 f 在原点处可导.

下证 f 在原点不可微. 用反证法, 设 f 在原点可微, 则当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} & f(x,y)-f(0,0) \\ = \ & \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2}) \\ = \ & o(\sqrt{x^2+y^2}), \end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 进而由复合函数极限法则可知 $0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x^2|}}{\sqrt{x^2+x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 矛盾! 由此得证.

计算两个变量的函数的微分的方法

问题: 如何判断函数 f 在点 (x_0, y_0) 是否可微?

- 判断 f 在该点的连续性. 若连续, 则继续.
- 判断 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ 的存在性.
- 若在该点可导, 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时, 估计

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

的阶. 若为 $o(\|(x-x_0, y-y_0)\|)$, 则可微.

定义 3. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空开集, 而 $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

- 若 f 在 Ω 的每点可导, 则称 f 在 Ω 上可导, 由此可以在 Ω 上定义 n 个函数 $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, 将它们称为 f 在 Ω 上的偏导函数.
- 若 $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ 在点 $X_0 \in \Omega$ 处连续, 则称 f 在点 X_0 处连续可导.
- 若 f 在 Ω 每点均连续可导, 则称 f 在 Ω 上连续可导. 这样函数的集合记作 $\mathscr{C}^{(1)}(\Omega)$.

注: 初等函数在 其定义区域的内部 连续可导.

定理 4. 若 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集, 而函数 $f:\Omega \to \mathbb{R}$ 在点 $X_0 \in \Omega$ 处连续可导, 则 f 在该点可微.

注: 该定理的逆命题不成立.

分析: 仅仅考虑 $n=2$ 的情形. 我们需要证明: 当 $(h_1,h_2)\to(0,0)$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
&f(x_1^{(0)}+h_1,x_2^{(0)}+h_2)-f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})\\
&=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_2\\
&\quad+o(\|(h_1,h_2)\|).
\end{aligned}$$

证明: 出于简便, 仅考虑 $n=2$ 的情形. 由于 f 在点 X_0 处连续可导, 于是 $\exists r>0$ 使得函数 f 在 $B(X_0,\sqrt{2}r)$ 上可导且其偏导函数在点 X_0 处连续. 记 $X_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$. $\forall h_1,h_2\in(-r,r)$, 令

$$
\begin{aligned}
F(h_1,h_2)&=f(x_1^{(0)}+h_1,x_2^{(0)}+h_2)-f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})\\
&=\Big(f(x_1^{(0)}+h_1,x_2^{(0)}+h_2)-f(x_1^{(0)},x_2^{(0)}+h_2)\Big)\\
&\quad+\Big(f(x_1^{(0)},x_2^{(0)}+h_2)-f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})\Big).
\end{aligned}
$$

由 Lagrange 中值定理知, $\exists \theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ 使得

$$\begin{aligned} F(h_1, h_2) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)} + \theta_1 h_1, x_2^{(0)} + h_2)h_1 \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} + \theta_2 h_2)h_2. \end{aligned}$$

而由夹逼原理可知

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \theta_1 h_1 = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \theta_2 h_2 = 0,$$

又 f 在点 X_0 连续可导, 由复合函数极限法则,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}+\theta_1 h_1, x_2^{(0)}+h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}),$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}+\theta_2 h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}).$$

于是当 $(h_1, h_2) \to (0, 0)$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} F(h_1, h_2) \;&=\; \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + o(1)\Big)h_1 \\ &\quad + \Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + o(1)\Big)h_2. \end{aligned}$$

另外注意到 $|h_1| \leqslant \sqrt{h_1^2+h_2^2}$, $|h_2| \leqslant \sqrt{h_1^2+h_2^2}$, 于是当 $(h_1,h_2)\to(0,0)$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
F(h_1,h_2) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_2 \\
&\quad +o(1)h_1+o(1)h_2 \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_2+o(1)\sqrt{h_1^2+h_2^2} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_2+o(\|(h_1,h_2)\|).
\end{aligned}
$$

这表明函数 f 在点 X_0 处可微.

推论. 初等函数在 其定义区域的内部 可微.

例 6. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, 定义

$$f(x,y,z) = x^2 + e^{xyz} + \log(x^2+y^2+z^2).$$

则 f 在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ 上可导并且其偏导函数连续, 进而可知 f 在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ 上可微且

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x,y,z) &= \left(2x + yze^{xyz} + \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}x \\ &\quad + \left(xze^{xyz} + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}y \\ &\quad + \left(xye^{xyz} + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

例 7. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

求证: 函数 f 在点 $(0,0)$ 处可微但不连续可导.

证明: 由定义立刻可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\frac{1}{|h|}}{h}=0.$$

由对称性可知 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,

$$|f(x,y)-f(0,0)|=(x^2+y^2)\left|\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=o(\|(x,y)\|).$$

故 f 在点 $(0,0)$ 处可微且其微分 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 由初等函数的性质可知

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

于是 $\forall k\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,kx)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{1+k^2}|x|}-\frac{\mathrm{sgn}x}{\sqrt{1+k^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}|x|},$$

则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,kx)$ 不存在, 故 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在点 $(0,0)$ 间断.

例 8. 若函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 关于它的第一个变量连续, 而关于第二个变量的偏导函数在 $\mathbb{R}^2$ 上有界, 求证: 函数 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

证明: 由题设可知, $\exists M>0$ 使得 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)|\leqslant M$. 取 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 y_0,y 使得

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|+|f(x,y)-f(x,y_0)|$$

$$=|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|+|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)||y-y_0|$$

$$\leqslant|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|+M|y-y_0|,$$

由题设及夹逼原理知 f 在 (x_0,y_0) 连续. 得证.

连续性，可导性，可微性，连续可导性之间的关系

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{连续} \arrow[dl, shift left, "/" marking] \arrow[dd, shift left, "/" marking] \\
\text{连续可导} \arrow[r, shift left] & \text{可微} \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[ur, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\
 & & \text{可导} \arrow[ul, shift left, "/" marking] \arrow[uu, shift left, "/" marking]
\end{tikzcd}$$

作业题: 第 1.4 节第 42 页第 1 题第 (5), (7) 题, 第2题((1) 中改 $\sqrt{x}$ 为 $\sqrt{|x|}$), 第4 题第 (4), (5) 题, 将 (4) 中左边改为 u. 第 43 页第 7 题 (不用交).

谢谢大家!