1 行列式

1. 求下列矩阵的行列式

$$\begin{bmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} \tag{1}$$

2. 求下列矩阵的行列式

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 9 \end{bmatrix} \tag{2}$$

3. 证明：约化行阶梯矩阵的行列式只能是1或者0。

4. $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是$\mathbb{R}^n$中的$n$个向量。求行列式$\det(a_1, a_2, \cdots, a_n)$和行列式$\det(a_2, a_3, \cdots, a_n, a_1)$，行列式$\det(a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1)$之间的关系。

5. 计算下面矩阵的行列式，其中如果$i \le n-j$则$a_{ij} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

6. 一个3阶方阵的元素都是+1或者0，求它的行列式可取到的最大值。

7. 分块矩阵的行列式

   (a) 分块矩阵$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$，其中$A$是一个$m$阶方阵，$D$是一个$n$阶方阵。证明：$\det M = \det A \det D$。

   (b) 分块矩阵$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$，其中$A$是一个$m$阶方阵，$D$是一个$n$阶方阵，$B$是一个$m \times n$矩阵。证明：$\det M = \det A \det D$（提示：考虑对$M$做初等行变换）。

   (c) 分块矩阵$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，其中$A$是一个$m$阶可逆方阵，$D$是一个$n$阶可逆方阵，$B$是一个$m \times n$矩阵，$C$是一个$n \times m$矩阵。证明：$\det M = \det D \det(A - BD^{-1}C) = \det A \det(D - CA^{-1}B)$（提示：考虑之前作业中的分块行化简）。

8. 求下列矩阵的伴随矩阵，并用Cramer法则求逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

9. 用Cramer法则解下面方程

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 \qquad + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= -2 \end{aligned} \tag{5}$$

10. 对于n阶方阵A的伴随矩阵A^*，
    (a) 证明：$AA^* = A^*A = \det(A)I_n$
    (b) 证明：$\det A^* = (\det A)^{n-1}$
    (c) 如果A可逆，求$(A^*)^*$
    (d) 如果A不可逆，求$\mathrm{rank}(A^*)$
11. 矩阵A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

求$\det(\lambda I - A)$