第 15 周习题课题目

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 常微分方程的概念

(1) **常微分方程及其阶:** 含自变量 x、未知函数 y 及其直到 n 阶的导数的等式

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

被称为常微分方程. 方程中导数的最高阶被称为方程的阶, 例如方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0$ 的阶为 1, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = 0$ 的阶为 2. 若 F 关于 $y, y', \ldots, y^{(n)}$ 为线性函数, 则称之为线性常微分方程.

(2) **常微分方程组及其阶:** 含自变量 x、多个未知函数及其导数的方程组被称为常微分方程组. 出现在上述方程组中的未知函数的导数的最高阶称为方程组的阶.

(3) **n 阶常微分方程的解:** 设 $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ 为 n 阶常微分方程.

(a) **通解与特解:** 若函数 $y = y(x)$ 在区间 I 上满足上述常微分方程, 则称之为方程在 I 上的一个解, 而称 I 为解的存在区间. 当不加注明时, I 是使方程的解有意义的最大区间. 若该解含 n 个独立常数, 也即 $y = f(x, C_1, \ldots, C_n)$, 则称为方程的通解. 若不含常数, 则称为特解. 例如 $y = Ce^{-x}$ 是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0$ 的通解, 而 $y = 0$ 为特解.

(b) **独立常数:** 所谓常数独立, 粗略地说, 就是不能将之合并成一个常数. 比如说 $y = C_1e^{-x+C_2}$ 是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0$ 的解, 但 C_1, C_2 不独立, 其通解为 $y = Ce^{-x}$.

(c) **奇解:** 一般而言, 当通解中的常数取遍所有的允许值时, 可得到该方程的所有解. 但也有例外. 例如 $y = \frac{1}{4}(x+C)^2$ 为常微分方程 $y' = \sqrt{y}$ 的通解, 而 $y \equiv 0$ 为上述方程的一个特解, 但这个特解并没有被包含在上述通解中, 该解被称为"奇解".

(d) **求解常微分方程:** 求方程的通解以及那些不能用通解表示的"奇解" (若存在).

(e) **定解条件 (初始条件):** 用来确定通解当中的常数的附加条件. n 阶的常微分方程一般需要有 n 个条件. 这类条件一般被称为定解条件, 有些也被称为初始条件.

(f) **初值问题 (Cauchy 问题):**

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ \qquad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

2. 常微分方程的求解

(1) **一阶常微分方程:** 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ 的通解为

$$y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\Big(C + \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\Big).$$

(2) **分离变量法:** 常微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ 的解满足

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

若 $g(y_0) = 0$, 则 $y \equiv y_0$ 也为原常微分方程的解.

(3) **可转化成一阶线性方程的一阶方程:**

(a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax+by+c)$ $(b \neq 0)$**:** 作变换 $u = ax+by+c$, 再利用分离变量法.

(b) **齐次型常微分** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(\frac{y}{x})$**:** 作变换 $u = \frac{y}{x}$, 再用分离变量法.

(c) **混合型** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$**:** 可转化为上述两种情形.

(4) **Bernoulli 方程:** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, 其中 α 为常数且不等于 0 或 1.

作变换 $z = y^{1-\alpha}$ 可得到一阶线性常微分方程 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$.

若 $\alpha > 0$, 则 $y \equiv 0$ 也为方程的解.

(5) **可降阶高阶常微分方程:**

(a) $y^{(n)} = f(x)$**:** 求 n 次原函数.

(b) **方程中不显含未知元** y**:** $y^{(n)} = F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n-1)})$ $(k \geqslant 1)$. 令 $p(x) = y^{(k)}$, 由 $p^{(n-k)} = F(x, p, \ldots, p^{(n-k-1)})$ 解出 $p = p(x)$, 再对 $y^{(k)} = p(x)$ 求 k 次原函数.

(c) **方程中不显含自变量** x**:** $F(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}) = 0$. 将 y 看成自变量, 令 $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 于是原方程变为 $F(y, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}) = 0$, 解出 $p = p(y)$, 再对 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)$ 应用分离变量法.

(6) n **阶线性非齐次常微分方程:** $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$.

(a) **解的存在性:** 初值问题的解存在且唯一.

(b) **齐次方程解的结构:** 齐次方程的解集为 n 维线性空间. 设 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 为齐次方程的线性无关解 (称为基本解组). 则齐次方程的通解为

$$y(x) = C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x),$$

其中 $C_1, \ldots, C_n$ 为任意的常数.

(c) **非齐次方程解的结构:** 设 z_0 为非齐次方程的特解. 则非齐次方程的通解为

$$y(x) = z_0(x) + C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x),$$

其中 $C_1, \ldots, C_n$ 为任意的常数.

(d) **Wronsky 行列式的性质:** 设 I 为区间, 而 $y_1, y_2 \ldots, y_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$. 定义

$$W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

并称为 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的 Wronsky 行列式.

1) **解的线性无关性:** 设 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 为齐次方程的解. 则它们为线性无关当且仅当 Wronsky 行列式 $W(x) \neq 0$.

2) **Wronsky 行列式的计算:** 设 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 为齐次方程的解. 则 其Wronsky 行列式满足: $W'(x) = -a_{n-1}(x)W(x)$. 于是

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t}.$$

(e) **线性无关函数必为常微分方程的基本解组:** 线性无关的 $\mathscr{C}^{(n)}$ 类函数 $y_1, \ldots, y_n$ 为 n 阶线性常微分方程

$$\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & \cdots & y_n' & y' \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

的基本解组.

(7) **二阶线性常系数齐次方程:** $y''+py'+qy=0$, 其中 p, q 为实常数. 称 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 为特征方程, 其解为特征根. 令 $\Delta = p^2-4q$.

(a) 若 $\Delta > 0$, 则有两个不同的实特征根 λ_1, λ_2, 方程通解为 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

(b) 若 $\Delta = 0$, 方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{p}{2}x}$.

(c) 若 $\Delta < 0$, 设特征根为 $\lambda = \alpha \pm i\beta$, 则方程通解为 $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

(8) n **阶线性常系数齐次常微分方程:** $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, 其中 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ 为常数. 其特征多项式被定义为

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

设其不同的根为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, 相应的重数为 $n_1, \ldots, n_k$, 则齐次方程的复值通解为

$$y(x) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{n_j-1} C_{j,l} x^l e^{\lambda_j x},$$

其中 $C_{j,l}$ 为任意的复值常数. 为得到实值通解, 只需针对复值特征根 λ_j, 在上式中将 $e^{\lambda_j x}$ 及其共轭替换成 $e^{\lambda_j x}$ 的实部和虚部, 并让 $C_{j,l}$ 为任意的实常数.

(9) **二阶线性常系数非齐次方程的求解:**

(a) **一般方法:** 从齐次方程的线性无关解 y_1, y_2 出发, 由公式

$$z_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

可得到非齐次方程的一个特解, 进而得到非齐次方程的通解 $y = z_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2$. 但通常很难计算 z_0. 仅在某些特殊的情形, 我们才能得到通解的显式表达式.

(b) **特殊的二阶线性常系数方程的求解:** $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\mu x}$, 其中 p, q 为实常数, 而 P_n 为 n 次多项式, μ 为复常数. 可用待定系数法求非齐次方程的特解.

1) 若 μ 不为齐次方程的特征根, 则有特解形如 $z_0(x) = Q_n(x)e^{\mu x}$, 其中 Q_n 为次数不大于 n 的待定多项式.

2) 若 μ 为齐次方程的一重特征根, 则有特解形如 $z_0(x) = Q_n(x)xe^{\mu x}$, 其中 Q_n 为次数不大于 n 的待定多项式.

3) 若 μ 为齐次方程的二重特征根, 则有特解形如 $z_0(x) = Q_n(x)x^2e^{\mu x}$, 其中 Q_n 为次数不大于 n 的待定多项式.

注: 通过将 z_0 带入非齐次方程来确定 Q_n.

(d) 一般地, 由待定系数法及线性性, 可处理如下形式的非齐次项 $f(x)$ 及其常系数线性组合 (其中 P_n 为 n 次多项式, a, b 为实常数):

$$\begin{aligned} &P_n(x),\ P_n(x)e^{ax}, \\ &P_n(x)\sin bx = \operatorname{Im}(P_n(x)e^{ibx}), \\ &P_n(x)\cos bx = \operatorname{Re}(P_n(x)e^{ibx}), \\ &P_n(x)e^{ax}\sin bx = \operatorname{Im}(P_n(x)e^{(a+ib)x}), \\ &P_n(x)e^{ax}\cos bx = \operatorname{Re}(P_n(x)e^{(a+ib)x}). \end{aligned}$$

(10) **Euler 方程:** $x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$, 其中 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ 为实值常数.

(a) **方程的特点:** 变系数线性方程, 系数为幂函数且幂次与相应项的求导阶数一致.

(b) **一般解法:** 作变量替换 $t = \log|x|$ 将方程化成以 t 为自变量的常系数方程.

2. 一阶线性常微分方程组的就解

(1) **一阶线性常微分方程组:** 一阶线性常微分方程组形如

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} & = & a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ & \vdots & \\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} & = & a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{array}\right.$$

其中 $a_{jl}(x), f_j(x) \in \mathscr{C}(I)$ $(1 \leqslant j, l \leqslant n)$, 而 I 为区间.

(2) **一阶线性常微分方程组的向量表示:** 令 $\mathbf{A}(x) = (a_{jl}(x))_{1\leqslant j,l\leqslant n}$, 记

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},\ \mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

则初值问题可以表述成:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y} + \mathbf{F}(x), \\ \mathbf{Y}(x_0) = \vec{\xi}, \end{array}\right.$$

其解为 $\mathbf{Y}(x) = P_{x_0}^x(\mathbf{A})\vec{\xi} + \int_{x_0}^x P_t^x(\mathbf{A})\mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t$, 这里 $P_{x_0}^x(\mathbf{A})$ 表示 Volterra 积分.

(3) **一阶线性常微分方程组的解:**

(a) **解的存在性:** 初值问题的解存在且唯一.

(b) **齐次方程组解的结构:** n 个方程, n 个未知函数的一阶线性齐次常微分方程组的解集为 n 维线性空间. 设 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ 为该齐次方程组的 n 个线性无关的解. 令 $\mathbf{\Phi} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \cdots, \mathbf{Y}_n)$, 并称之为齐次方程组的基解矩阵, 则齐次方程组通解为

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2 + \cdots + C_n\mathbf{Y}_n = \mathbf{\Phi}\mathbf{C},$$

其中 $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \cdots, C_n)^T$ 为常数列向量. 基解矩阵满足 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\mathbf{\Phi}$.

(c) **非齐次方程组解的结构:** 非齐次常微分方程组的通解为该方程组的一个特解与相应的齐次方程组的通解之和.

(4) **Wronsky 行列式的性质:** 设 $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ 为齐次方程组的 n 个解. 令

$$W(x)=W(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\cdots,\mathbf{Y}_n)(x)=\det(\mathbf{Y}_1(x),\mathbf{Y}_2(x),\cdots,\mathbf{Y}_n(x)),$$

并称为 $\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\ldots,\mathbf{Y}_n$ 的 Wronsky 行列式.

(a) **解的线性无关性:** n 个解 $\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\ldots,\mathbf{Y}_n$ 线性相关当且仅当 $W(x)\equiv 0$.

(b) **Wronsky 行列式的计算:** $W'(x)=(a_{11}(x)+\cdots+a_{nn}(x))W(x)$, 于是

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}(a_{11}(t)+\cdots+a_{nn}(t))\,\mathrm{d}t}.$$

从而 $W(x)$ 或者恒为零, 或者恒不为零.

(4) **线性常微分方程与一阶线性常微分方程组的关系:** 二者可以相互转换.

(5) **一阶线性常系数常微分方程组的求解** $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{AY}+\mathbf{F}(x)$, 其中 $\mathbf{A}$ 为常系数矩阵.

(a) **一般解法:**

1) **初值问题的解:** 满足初值条件 $\mathbf{Y}(x_0)=\vec{\xi}$ 的解为

$$\mathbf{Y}(x)=e^{(x-x_0)\mathbf{A}}\vec{\xi}+\int_{x_0}^{x}e^{(x-t)\mathbf{A}}\mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t.\quad e^{\mathbf{A}_{n\times n}}=I_{n\times n}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}.$$

2) **通解:** 设 $\mathbf{\Phi}$ 为齐次方程组的基解矩阵, 则非齐次方程组的通解为

$$\mathbf{Y}(x)=\mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C}+\mathbf{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}(\mathbf{\Phi}(t))^{-1}\mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) **两个未知函数的情形:**

1) 若 $\mathbf{A}$ 有两个不相等的实特征值 λ_1,λ_2, 那么相应特征向量 $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ 为实向量且线性无关, 则所求通解为$\mathbf{Y}=C_1e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1+C_2e^{\lambda_2 x}\mathbf{r}_2$, 其中 C_1,C_2 为任意常数.

2) 若 $\mathbf{A}$ 有两个相等的 (实) 特征值 λ, 则所求通解形如 $e^{\lambda x}\mathbf{P}(x)$, 其中 $\mathbf{P}(x)$ 为待定列向量, 它的每个元素均为次数 $\leqslant 1$ 的多项式, 也即 $\mathbf{P}(x)=\mathbf{C}_0+\mathbf{C}_1x$, 其中 $\mathbf{C}_0,\mathbf{C}_1$ 为二阶列向量. 将之带入方程组来确定系数 $\mathbf{C}_0,\mathbf{C}_1$, 进而得到 $\mathbf{P}(x)$.

3) 若 $\mathbf{A}$ 有两个不相等的共轭复特征值 λ_1,λ_2, 相应特征向量 $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ 也为共轭复向量且线性无关. 此时通解为 $\mathbf{Y}=C_1\mathrm{Re}(e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1)+C_2\mathrm{Im}(e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1)$, 其中 C_1,C_2 为任意的实常数.

(c) **n 个未知函数的情形:** 设 $\mathbf{A}$ 的不同特征根为 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, 其重数为 $n_1,\ldots,n_k$. 对于 $1\leqslant j\leqslant k$, 存在 n_j 个形如 $e^{\lambda_j x}\mathbf{P}_j(x)$ 的线性无关的解, 其中 $\mathbf{P}_j(x)$ 为 n 阶列向量, 其元素是次数不超过 n_j-1 的多项式, 即

$$\mathbf{P}_j(x)=\sum_{l=0}^{n_j-1}\mathbf{C}_{jl}x^l,$$

其中 $\mathbf{C}_{jl}$ 为 n 阶常值列向量. 将它们带入方程组确定 $\mathbf{C}_{jl}$, 由此可得基本解组.

第 2 部分 习题课题目

1. 假设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $y=y(x)$ 满足 $\begin{cases} y'=x^3+xy^2 \\ y(0)=0 \end{cases}$. 讨论该函数的单调性, 极值点以及凸凹性.

2. 假设定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $y=y(x)$ 满足 $\begin{cases} xy''+3x(y')^2=1-e^x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$. 求证: $\forall x\geqslant 0$, 均有 $y(x)\leqslant -\frac{1}{2}x^2$.

3. 设 $y=C_1e^{-x^2}+C_2$ 为某个常微分方程的通解, 其中 C_1,C_2 为任意常数, 求该常微分方程.

4. 求解下列常微分方程的:

(1)	$y'=\sqrt{\lvert y\rvert}$,	(2)	$xy'=y(\log y-\log x)$,
(3)	$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$ $(x>0)$,	(4)	$y'=1+x+y^2+xy^2$,
(5)	$y'+\frac{2xy}{x^2+4}=0$, $y(0)=1$,	(6)	$(x+2xy-y^2)y'-y^2=0$,
(7)	$\tan y\,\mathrm{d}x-\cot x\,\mathrm{d}y=0$,	(8)	$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

提示: 在 (6) 中可将 y 看成自变量, x 看成因变量.

5. 求曲线 $y=y(x)$ 使得其上每一点 (x,y) 的切线平分过该点的水平线与原点到该点连线所交之角.

6. 求曲线 $y=y(x)$ 使得对任意 $a\in\mathbb{R}$, 该曲线均与曲线 $y=ax^3$ 正交.

7. 求线性微分方程使其通解为 $y=C_1e^x+C_2xe^x$, 其中 C_1,C_2 为任意常数.

8. 已知某一个齐次线性常微分方程的基本解组为 $1,x$, 求其特解 $y=y(x)$ 使得 $y(1)=1$, $y'(1)=2$.

9. 若某二阶线性非齐次常微分方程的两个解为 $3+x^2$, $e^{-x}+3+x^2$, 且相应齐次方程的一个解为 x, 求该非齐次方程的通解.

10. 已知 x,x^2,x^3 为二阶非齐次线性常微分方程的三个解, 求其通解.

11. 求三阶线性常系数齐次常微分方程使其特解为 e^{-x}, $2\cos x$, $3\sin x$.

12. 若 $f\in\mathscr{C}[0,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 求证: 常微分方程 $y'+y=f(x)$ 的任意解 $y=y(x)$ 均满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

13. 若 $f\in\mathscr{C}(0,+\infty)$ 使得 $\forall x>0$, 均有 $f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=1$, 求 f 的表达式.

14. 求位于上半平面的凸曲线 Γ_1 和凹曲线 Γ_2 使得曲线在任意一点处的曲率半径等于夹在该点与横轴之间的法线之长.

15. 假设平面曲线 Γ 过点 $(1,0)$ 且其上任意点 $P(x,y)$ $(x \neq 0)$ 处的切线的斜率减去直线 $\overline{OP}$ 的斜率等于 ax, 其中 $a > 0$ 为常数.

(1) 求曲线 Γ 的方程.

(2) 若曲线 Γ 与直线 $y = ax$ 所围成的平面区域的面积等于 $\frac{8}{3}$, 求 a.

16. 求解下列常微分方程:

(1) $y'' = \frac{1+(y')^2}{2y}$,

(2) $y'' \cos y + (y')^2 \sin y = y'$, 其中 $y(-1) = \frac{\pi}{6}$, $y'(-1) = \frac{1}{2}$,

(3) $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$,

(4) $(y')^2 - xy' + y = 0$,

(5) $x^2 + (y')^2 = 1$,

(6) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$,

(7) $y^{(7)} - 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0$,

(8) $y''' + y'' - 2y = 0$,

(9) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$,

(10) $y'' + 3y' + 2y = 3\sin x$,

(11) $y'' - 4y' + 4y = e^x + e^{2x} + 1$,

(12) $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 0$,

(13) $y'' - 3y' + 2y = \sin(e^{-x})$,

(14) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x$.

17. 求解下列常微分方程组:

(1) $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$,

(2) $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$.