第 6 次作业题

1. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y = x \arcsin^2 x$, (2) $y = x\big(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\big)$.

2. 已知 f 三阶可导且 $y = f(x^2)$, 求 y'', y'''.

3. 求下列函数指定阶数的导数:

(1) $y = \frac{1}{2-x-x^2}$, 求 $y^{(20)}$, (2) $y = e^{ax} \sin bx$, 求 $y^{(n)}$.

4. 设 $\begin{cases} x = e^{2t} \cos^2 t \\ y = e^{2t} \sin^2 t \end{cases}$, 求 $y''(x)$, $y'''(x)$.

5. 设隐函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy - e = 0$ 确定, 求 $y''(x)$.

6. 设 $f(x) = \arctan x$. $\forall n \in \mathbb{N}$, 证明:

$$(1+x^2) f^{(n+2)}(x) + 2(n+1) x f^{(n+1)}(x) + n(n+1) f^{(n)}(x) = 0,$$

并求 $f^{(n)}(0)$.

7. 设 $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} = 0$, 求证: $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ 在 $(0,1)$ 内有零点.

8. 设 I 为区间, $M > 0$, 而函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 使得 $\forall x, y \in I$, 均有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M |x-y|^2.$$

求证: 函数 f 恒为常数.

9. 求证: $p y^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant p x^{p-1}(x-y)$, 其中 $0 < y < x$, $p > 1$.

10. 设 $f, g, h \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

11. 设 $0 < a < b$, 而 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{1}{b-a} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \xi f'(\xi) - f(\xi).$$

12. (思考题, 不用交) 设函数 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 可导且在 (a,b) 内二阶可导. 若 $f(a) = f(b) = 0$, $f'_+(a) f'_-(b) > 0$, 求证:

(1) $\exists \rho \in (a,b)$ 使得 $f''(\rho) = 0$,

(2) $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f''(\xi) + 2f'(\xi) + f(\xi) = 0$,

(3) $\exists \theta \in (a,b)$ 使得 $f''(\theta) - 2f'(\theta) + f(\theta) = 0$,

(4) $\exists \eta \in (a,b)$ 使得 $f''(\eta) = f'(\eta)$,

(5) $\exists \zeta \in (a,b)$ 使得 $f''(\zeta) = f(\zeta)$.