微积分 A (1)

姚家燕

第 28 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

第 27 讲回顾: 一阶常微分方程的解法

- 一阶方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ 的通解为

$$y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right).$$

- 分离变量法: 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ 的解满足

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

若 $g(y_0) = 0$, 则 $y \equiv y_0$ 也为原方程的解.

可转化成一阶线性方程的一阶方程

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax+by+c)\ (b \neq 0)$: 首先作变换
$$u = ax + by + c,$$
再利用分离变量法.
- 齐次型 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(\frac{y}{x})$: 首先作变换 $u = \frac{y}{x}$, 然后再用分离变量法.
- 混合型: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$. 可转化为上述两种情形.

回顾: Bernoulli 方程

Bernoulli 方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, 其中 α 为常数且不等于 0 或 1.

作变换 $z = y^{1-\alpha}$ 可得到一阶线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

若 $\alpha > 0$, 则 $y \equiv 0$ 也为方程的解.

回顾: 可降阶高阶常微分方程

- $y^{(n)} = f(x)$: 求 n 次原函数.
- $y^{(n)} = F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n-1)})$ $(k \geqslant 1)$: 令 $p(x) = y^{(k)}$, 由 $p^{(n-k)} = F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k-1)})$ 解出 $p = p(x)$, 再对 $y^{(k)} = p(x)$ 求 k 次原函数.
- $F\left(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$: 将 y 看成自变量, 令 $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 原方程变为 $F(y, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}) = 0$, 解出 $p = p(y)$, 再对 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)$ 应用分离变量法.

第 28 讲

§4. 高阶线性常微分方程解的结构

n 阶线性常微分方程的标准形式为

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

其中 $a_0, \ldots, a_{n-1}, f$ 均为区间 I 上的连续函数, 函数 f 被称为该方程的非齐次项. 当 $f \equiv 0$ 时, 相应的方程称为齐次方程.

基本结论

- 存在与唯一: $\forall x_0 \in I$ 以及 $\forall \xi_0, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$, 在区间 I 上均存在唯一的解 $y = y(x)$ 使得

$$y^{(k)}(x_0) = \xi_k \ (0 \leqslant k \leqslant n-1).$$

- 齐次方程的解集: 齐次方程的所有解组成的集合是一个 n 维的线性空间.
- 非齐次方程的解集: 非齐次方程的通解就是非齐次方程的特解与齐次方程通解之和.

定义 1. 称函数 $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ 在 I 上线性相关, 如果存在不全为零的实数 $c_1, \ldots, c_n$ 使得 $\forall x \in I$, 均有 $c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f(x) = 0$.
若不存在不全为零的实数 $c_1, \ldots, c_n$ 使 $\forall x \in I$, 均有 $c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f(x) = 0$, 则称 $f_1, \ldots, f_n$ 在 I 上线性无关.

例 1. $1, x, \ldots, x^n$ 在任意区间上线性无关.

定义 2. 设 $f_1, f_2 \ldots, f_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$. 定义

$$\begin{aligned} W(x) &:= W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) \\ &:= \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

并称为 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 的 Wronsky 行列式.

定理 1. 如果 $f_1, f_2 \ldots, f_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$ 在 I 上线性相关, 则 $\forall x \in I$, $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = 0$.

证明: 如果 $f_1, f_2 \ldots, f_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$ 在 I 上线性相关, 那么存在不全为零的实数 $c_1, \ldots, c_n$ 使得 $\forall x \in I$, $c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$, 对之求导得

$$c_1 f_1^{(k)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(k)}(x) = 0 \ (0 \leqslant k < n),$$

于是 $(c_1, \ldots, c_n)$ 为 n 阶线性方程组的非零解, 从而相应系数行列式 $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = 0$.

推论. 若 $\exists x_0 \in I$ 使得 $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x_0) \neq 0$, 则 $f_1, \ldots, f_n$ 在 I 上线性无关.

定理 2. 假设 $y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$ 为 n 阶齐次线性常微分方程在 I 上的解. 那么它们在 I 上线性相关当且仅当 $W(y_1, \ldots, y_n) \equiv 0$.

证明: 仅需证明充分性. 假设 $W(y_1, \ldots, y_n) \equiv 0$. 固定 $x_0 \in I$, 则有 $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) = 0$, 由此可知 $\exists c_1, c_2, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ 不全为零使得

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \cdots c_n y_n(x_0) = 0, \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

$\forall x \in I$, 我们定义 $y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$. 则 y 也为题设方程的解且满足

$$y^{(k)}(x_0) = 0 \ (0 \leqslant k \leqslant n-1).$$

由方程的解的唯一性可知 $y \equiv 0$, 故 $y_1, \ldots, y_n$ 在 I 上线性相关.

注: 证明充分性仅需要 $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) = 0$.

定义 3. n 阶齐次线性常微分方程的 n 个线性无关解被称为该方程的基本解组.

例 2. 设 y_1, y_2, y_3 为二阶非齐次线性常微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个特解. 问它们何时可以给出非齐次常微分方程的通解? 若能给出, 请给出通解的表达式.

解: 令 $z_1 = y_1 - y_3$, $z_2 = y_2 - y_3$, 那么 z_1, z_2 为相应齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的特解, 从而 y_1, y_2, y_3 能够给出非齐次微分方程的通解当且仅当 z_1, z_2 是上述齐次方程的线性无关解.

而这则等价于说

$$
\begin{aligned}
0 \neq W(z_1, z_2) &= z_1 z_2' - z_1' z_2 \\
&= (y_1 - y_3)(y_2' - y_3') - (y_1' - y_3')(y_2 - y_3) \\
&= (y_1 y_2' - y_1' y_2) + (y_2 y_3' - y_2' y_3) + (y_3 y_1' - y_3' y_1) \\
&= W(y_1, y_2) + W(y_2, y_3) + W(y_3, y_1).
\end{aligned}
$$

此时非齐次方程的通解为

$$y = y_3 + C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 3. 若 $1, x, e^x$ 为三阶齐次线性常微分方程的三个解. 求证它们为基本解组, 并求相应的三阶齐次线性常微分方程.

证明: 由题设可知

$$W(1, x, e^x) = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x \neq 0,$$

故 $1, x, e^x$ 线性无关, 也即它们构成基本解组.

它们所满足的三阶常微分方程为

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x & y \\ 0 & 1 & e^x & y' \\ 0 & 0 & e^x & y'' \\ 0 & 0 & e^x & y''' \end{vmatrix} = e^x y''' - e^x y'',$$

由此立刻可得 $y''' - y'' = 0$.

注: 也可以令 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$, 然后再从 y, y', y'', y''' 的表达式中消去 C_1, C_2, C_3, 由此可得到 y 所满足的常微分方程.

更一般地, 若 $y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{C}^{(n)}(I)$ 在 I 上线性无关, 则它们必为下述 n 阶方程的基本解组:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) & y' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

作业题: 第 7.4 节第 230 页第 2 小题, 第 231 页第 7.(1) 小题, 第 8 题. 补充题: 若 x, x^2, x^3 为三阶齐次线性常微分方程的解. 求证它们为基本解组, 并求相应的三阶齐次线性常微分方程.

§5. 常系数高阶线性常微分方程

n 阶线性常微分方程的标准形式为

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

其中 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ 为常数, 而 $f \in \mathscr{C}(I)$. 函数 f 被称为该方程的非齐次项. 当 $f \equiv 0$ 时, 相应的方程被称为齐次方程.

出于简便, 下面仅考虑二阶线性常系数常微分方程, 对于高阶方程, 其方法和结论均类似.

二阶线性常系数齐次方程的求解

问题: 求解 $y'' + py' + qy = 0$, 其中 p, q 为常数.

尝试性思考: 考虑形如 $y = e^{\lambda x}$ 这样的解, 其中 λ 为常数. 带入原方程得 $(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0$. 如果 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 则 $y = e^{\lambda x}$ 为原方程的解.

定义 1. 称代数方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 为相应的齐次常微分方程的特征方程, 称其解为特征根, 而称 $\Delta = p^2 - 4q$ 为其判别式.

$\Delta > 0$ 的情形

如果 $\Delta > 0$, 则特征方程有两个互异实根 λ_1, λ_2, 从而 $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ 为方程的解. 又

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) y_1 y_2 \neq 0,$$

故 y_1, y_2 线性无关, 从而原齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

$\Delta = 0$ 的情形

如果 $\Delta = 0$, 则特征方程只有一个实根 $\lambda = -\frac{p}{2}$, 故 $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$ 为原方程的解. 令 $y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}$, 则

$$\begin{aligned} y_2' &= e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}, \\ y_2'' &= -\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x} + (\frac{p}{2})^2 xe^{-\frac{p}{2}x}, \end{aligned}$$

从而 $y_2'' + py_2' = -\frac{1}{4}p^2xe^{-\frac{p}{2}x} = -qy_2$, 即 y_2 也为原齐次常微分方程的解.

大家可注意到

$$
\begin{aligned}
& W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \\
= \ & e^{-\frac{p}{2}x}\left(e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}\right) - \left(-\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x}\right) \cdot xe^{-\frac{p}{2}x} \\
= \ & e^{-px} \neq 0,
\end{aligned}
$$

则 y_1, y_2 线性无关, 从而原齐次方程的通解为

$$
y = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{p}{2}x},
$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

命题 1. 设 $p(x), q(x)$ 为实值函数, $f(x)$ 为复值函数, 而复值函数 $y = y(x)$ 满足非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

令 $u(x) = \operatorname{Re} y(x),\ \ v(x) = \operatorname{Im} y(x)$, 则

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = \operatorname{Re} f(x),$$
$$v'' + p(x)v' + q(x)v = \operatorname{Im} f(x).$$

证明: 分别考虑最初的那个方程的实部和虚部, 由此立刻可得所要结论.

$\Delta < 0$ 的情形

如果 $\Delta < 0$, 则特征方程有两个共轭的复特征根 $\lambda = \alpha \pm i\beta$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 且 $\beta \neq 0$. 则 $e^{(\alpha+i\beta)x}$ 为原齐次方程的复解, 从而可知

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

为原齐次常微分方程的实解.

大家同样可注意到

$$
\begin{aligned}
& W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \\
= \ & e^{\alpha x}\cos\beta x(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x) \\
& -(\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x)e^{\alpha x}\sin\beta x \\
= \ & \beta e^{2\alpha x} \neq 0,
\end{aligned}
$$

故 y_1, y_2 线性无关, 从而原齐次方程的通解为

$$
y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),
$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

评注

人们通常也考虑齐次常微分方程的复值通解:

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x},$$

这里 C_1, C_2 为任意的复常数. 上述函数取实值当且仅当 $C_1 = \overline{C_2}$, 此时我们重新得到了齐次方程的实值通解.

例 1. 求解初值问题

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

解: 特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, 它的特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. 因而通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$. 带入初始条件可得 $C_1 = 1$, $C_2 - C_1 = -2$. 于是原常微分方程的解为 $y = (1 - x)e^{-x}$.

作业题: 第 7.5 节第 238 页第 2 题第 (2), (3) 题.

n 阶线性常系数齐次方程的求解

考虑 n 阶线性常系数齐次常微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

其中 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ 为常数. 该常微分方程的特征多项式被定义为

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

假设该特征多项式不同的特征根为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, 重数为 $n_1, \ldots, n_k$, 则齐次方程的复值通解为

$$y(x) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{n_j-1} C_{j,l} x^l e^{\lambda_j x},$$

其中 $C_{j,l}$ 为任意的复值常数. 为得到实值通解, 只需要针对复数值特征根 λ_j, 在上式中将 $e^{\lambda_j x}$ 及其共轭替换成 $e^{\lambda_j x}$ 的实部和虚部, 并让 $C_{j,l}$ 为任意的实常数.

例 2. 求解方程 $y''' - y'' - y' + y = 0$.

解: 该方程的特征方程为

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

注意到我们有

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

于是特征根为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. 从而所求齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x$.

二阶线性常系数非齐次方程的求解

从齐次方程的线性无关解 y_1, y_2 出发，由公式

$$z_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

可得非齐次方程的一个特解，进而得到非齐次方程的通解 $y = z_0 + C_1y_1 + C_2y_2$. 但通常很难计算 z_0. 仅在某些特殊的情形，我们才能得到通解的显式表达式.

特殊的二阶线性常系数方程的求解

考虑特殊的二阶线性常系数非齐次方程

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

其中 p, q 为实常数, 而 $f(x) = P_n(x)e^{\mu x}$, 这里 P_n 为 n 次多项式, $\mu \in \mathbb{C}$ 为常数. 我们将首先寻求复值解, 然后再借助前面的命题来得到相应的常微分方程的实值解.

利用待定系数法求非齐次方程的特解

- 如果 μ 不是齐次方程的特征根, 则会有特解 $z_0(x) = Q_n(x)e^{\mu x}$, Q_n 为待定 n 次多项式.
- 如果 μ 为齐次方程的一重特征根, 则有特解 $z_0(x) = Q_n(x)xe^{\mu x}$, Q_n 为待定 n 次多项式.
- 如果 μ 为齐次方程的二重特征根, 则有特解 $z_0(x) = Q_n(x)x^2e^{\mu x}$, Q_n 为待定 n 次多项式.

注: 通过将 z_0 带入非齐次方程来确定 Q_n.

例 3. 求解 $y''+y=\frac{1}{2}\cos x$.

解: 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$, 由此得 $\lambda=\pm i$. 则齐次方程的基本解组为 $\cos x$, $\sin x$. 非齐次项为 $f(x)=\frac{1}{2}\cos x$. 由此来考虑非齐次方程 $y''+y=\frac{1}{2}e^{ix}$. 由于 i 为齐次方程的一重特征根, 故非齐次方程有特解 $z_0=Axe^{ix}$, 从而

$$
\begin{aligned}
z_0' &= A(1+ix)e^{ix}, \\
z_0'' &= iAe^{ix}+Ai(1+ix)e^{ix}=A(2i-x)e^{ix},
\end{aligned}
$$

于是 $A(2i-x)e^{ix}+Axe^{ix}=\frac{1}{2}e^{ix}$, 从而 $A=-\frac{i}{4}$, 进而 $z_0=-\frac{i}{4}xe^{ix}$ 为非齐次方程

$$y''+y=\frac{1}{2}e^{ix}$$

的特解, 由此可知 $y_0=\frac{1}{4}x\sin x$ 为非齐次方程

$$y''+y=\frac{1}{2}\cos x$$

的特解, 故所求非齐次方程的通解为

$$y=\frac{1}{4}x\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

命题 2. 假设 z_1, z_2 分别满足下列非齐次方程

$$z_1'' + pz_1' + qz_1 = f_1(x),$$

$$z_2'' + pz_2' + qz_2 = f_2(x),$$

则 $z_0 = z_1 + z_2$ 为非齐次方程

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$$

的特解.

证明: 利用常微分方程的线性性.

推广

由待定系数法及命题 1, 2, 可处理如下形式的非齐次项 $f(x)$ 及它们之间的常系数线性组合 (其中 P_n 为 n 次多项式, a, b 为实常数):

$$P_n(x), \quad P_n(x)e^{ax},$$

$$P_n(x)\sin bx = \operatorname{Im}\left(P_n(x)e^{ibx}\right),$$

$$P_n(x)\cos bx = \operatorname{Re}\left(P_n(x)e^{ibx}\right),$$

$$P_n(x)e^{ax}\sin bx = \operatorname{Im}\left(P_n(x)e^{(a+ib)x}\right),$$

$$P_n(x)e^{ax}\cos bx = \operatorname{Re}\left(P_n(x)e^{(a+ib)x}\right).$$

例 3. 求解 $y'' + y = \cos x \cos 2x$.

解: 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$, 由此得

$\lambda = \pm i$. 故齐次方程的基本解组为 $\cos x$, $\sin x$.

由于非齐次项为 $\cos x \cos 2x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 3x$,

这促使我们考虑非齐次方程

$$y'' + y = \frac{1}{2}e^{ix}, \quad y'' + y = \frac{1}{2}e^{3ix}.$$

前者有特解 $z_1 = -\frac{i}{4}xe^{ix}$. 由于 $3i$ 不是其齐次方程的特征根, 故后者有特解 $z_2 = Ae^{3ix}$, 于是

$$A(3i)^2e^{3ix} + Ae^{3ix} = \frac{1}{2}e^{3ix},$$

故 $A = -\frac{1}{16}$, 从而 $z_2 = -\frac{1}{16}e^{3ix}$. 则所求通解为

$$y = \frac{1}{4}x\sin x - \frac{1}{16}\cos 3x + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

作业题: 第 7.5 节第 238 页第 3 题第 (6), (10) 题.

Euler 方程

一般的 Euler 方程为:

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

其中 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ 为常数.

方程的特点: 变系数的线性方程, 但其系数均为幂函数, 且幂次与相应项的求导阶数一致.

一般解法: 作变量替换 $t = \log|x|$ 来将方程化成以 t 为自变量, 以 y 为待定函数的常系数方程.

例 7. 求解非齐次方程 $x^2y'' + xy' + y = 2x$.

解: 令 $t = \log|x|$, 则 $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$, 从而我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \\
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}.
\end{aligned}$$

当 $x > 0$ 时, 原方程变为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 2e^t$.

由此知特征方程为 $\lambda^2+1=0$, 特征根为 $\lambda=\pm i$, 从而该方程有形如 $z=Ae^t$ 的特解, 带入方程可得 $A=1$, 于是原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^t + C_1\cos t + C_2\sin t \\ &= x + C_1\cos\log|x| + C_2\sin\log|x|. \end{aligned}$$

当 $x<0$ 时, 原方程变为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=-2e^t$, 于是通解为 $y=x+C_1\cos\log|x|+C_2\sin\log|x|$.

作业题: 第 7.5 节第 238 页第 4 题第 (1), (3) 题.

§6. 一阶线性常微分方程组

一阶线性常微分方程组可以写成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ &\vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases}$$

其中 $a_{jl}(x), f_j(x) \in \mathscr{C}(I)$ $(1 \leqslant j, l \leqslant n)$.

可以证明该方程组满足初值条件

$$y_j(x_0) = \xi_j \ (1 \leqslant j \leqslant n)$$

的解存在且唯一.

如果我们定义 $\mathbf{A}(x) = (a_{jl}(x))_{1\leqslant j,l\leqslant n}$, 并且记

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

则初值问题可以重新表述成:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y} + \mathbf{F}(x), \\ \mathbf{Y}(x_0) = \vec{\xi}, \end{cases}$$

则其解为 $\mathbf{Y}(x) = P_{x_0}^{x}(\mathbf{A})\vec{\xi} + \int_{x_0}^{x} P_t^x(\mathbf{A})\mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t$, 这里 $P_{x_0}^{x}(\mathbf{A})$ 表示所谓的 Volterra 积分.

一阶线性常微分方程组解的结构

- n 个方程, n 个未知函数所组成的一阶线性齐次常微分方程组的解集为 n 维线性空间.
- 设 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ 为该齐次方程组的 n 个线性无关的解. 定义 $\mathbf{\Phi} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \cdots, \mathbf{Y}_n)$, 称为齐次方程组的基解矩阵, 则其通解为

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2 + \cdots + C_n\mathbf{Y}_n = \mathbf{\Phi}\mathbf{C},$$

其中 $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \cdots, C_n)^T$ 为常数列向量.

- 设 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ 为方程组的 n 个解. 令

$$\begin{aligned} W(x) &:= W(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \cdots, \mathbf{Y}_n)(x) \\ &:= \det(\mathbf{Y}_1(x), \mathbf{Y}_2(x), \cdots, \mathbf{Y}_n(x)), \end{aligned}$$

  并称为 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ 的 Wronsky 行列式.

- $W'(x) = \big(a_{11}(x) + \cdots + a_{nn}(x)\big) W(x)$, 于是

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} (a_{11}(t) + \cdots + a_{nn}(t))\, \mathrm{d}t}.$$

- $W(x)$ 或者恒为零, 或者恒不为零.

若记 $\mathbf{Y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{nj})^T$, 则我们有

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix},$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理 1. 基解矩阵满足 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\boldsymbol{\Phi}$.

证明: 我们由定义立刻可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}'(x) &= \begin{pmatrix} y_{11}' & y_{12}' & \cdots & y_{1n}' \\ y_{21}' & y_{22}' & \cdots & y_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}' & y_{n2}' & \cdots & y_{nn}' \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}_1}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}_2}{\mathrm{d}x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}_n}{\mathrm{d}x}\right) \\ &= (\mathbf{A}(x)\mathbf{Y}_1, \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}_n) \\ &= \mathbf{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x).\end{aligned}$$

定理 2. 齐次方程组的 n 个解 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ 线性相关当且仅当 $W(x) \equiv 0$.

证明: 必要性. 如果 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ 线性相关, 则 $\exists C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ 不全为零使得 $\forall x \in I$, $C_1\mathbf{Y}_1(x) + C_2\mathbf{Y}_2(x) \cdots + C_n\mathbf{Y}_n(x) = \mathbf{0}$, 也即

$$\begin{cases} y_{11}(x)C_1 + y_{12}(x)C_2 + \cdots + y_{1n}(x)C_n & = & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}(x)C_1 + y_{n2}(x)C_2 + \cdots + y_{nn}(x)C_n & = & 0, \end{cases}$$

故 $W(x) = 0$. 由此可知所证成立.

充分性. 假设 $W(x)\equiv 0$. 固定 $x_0\in I$. 则根据 $W(x_0)=0$ 知 $\exists C_1,\ldots,C_n\in\mathbb{R}$ 不全为零使得

$$\begin{cases} y_{11}(x_0)C_1+\cdots+y_{1n}(x_0)C_n & = & 0,\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ y_{n1}(x_0)C_1+\cdots+y_{nn}(x_0)C_n & = & 0, \end{cases}$$

$\forall x\in I$, 令 $\mathbf{Y}(x)=C_1\mathbf{Y}_1(x)+\cdots+C_n\mathbf{Y}_n(x)$. 则 $\mathbf{Y}$ 为齐次方程组的解且 $\mathbf{Y}(x_0)=\mathbf{0}$. 由解的唯一性可知 $\mathbf{Y}\equiv\mathbf{0}$, 故 $\mathbf{Y}_1,\ldots,\mathbf{Y}_n$ 线性相关.

注: 在证明充分性时, 仅用到 $W(x_0)=0$. 由此也可知 $W(x)$ 或者恒为零, 或者恒不为零.

定理 3. 一阶线性非齐次常微分方程组的通解为该方程组的一个特解与相应的齐次方程组的通解之和.

证明: 设方程组为 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y} + \mathbf{F}(x)$, $\mathbf{Y_0}$ 为其特解而 $\mathbf{Y}$ 为其通解. 令 $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y_0}$. 由于

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y} + \mathbf{F}(x), \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{Y_0}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y_0} + \mathbf{F}(x),$$

则 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Z}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Z}$, 也即 $\mathbf{Z}$ 为相应的齐次方程组的通解. 又 $\mathbf{Y} = \mathbf{Y_0} + \mathbf{Z}$, 故所证结论成立.

重回 n 阶线性常微分方程的求解

考虑一般的 n 阶线性常微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

该方程等价于一阶线性常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = y_2, \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_{n-2}}{\mathrm{d}x} = y_{n-1}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}x} = -a_0(x)y - a_1(x)y_1 - \cdots - a_{n-1}(x)y_{n-1} + f(x). \end{cases}$$

于是我们有 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y} + \mathbf{F}(x)$, 其中

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}.$$

这就解释了为何 n 阶线性常微分方程与一阶的线性常微分方程组的结论完全类似.

若 $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ 为 n 阶线性方程的解, 而它们对应于相应方程组的解为 $\mathbf{Y}_{(1)}, \ldots, \mathbf{Y}_{(n)}$, 则

$$\mathbf{Y}_{(j)} = \begin{pmatrix} y_{(j)} \\ y'_{(j)} \\ \vdots \\ y_{(j)}^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

故 $W(\mathbf{Y}_{(1)}, \ldots, \mathbf{Y}_{(n)}) = W(y_{(1)}, \ldots, y_{(n)})$. 于是两种不同的 Wronsky 的定义在这里得到统一.

一阶线性常系数常微分方程组的求解

一阶线性常系数常微分方程组形如:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{AY} + \mathbf{F}(x),$$

其中 $\mathbf{A}$ 是与 x 无关的常系数矩阵. 则方程组满足初值条件 $\mathbf{Y}(x_0) = \vec{\xi}$ 的解为

$$\mathbf{Y}(x) = e^{(x-x_0)\mathbf{A}}\vec{\xi} + \int_{x_0}^{x} e^{(x-t)\mathbf{A}}\mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t.$$

定理 4. 设 $\mathbf{\Phi}$ 为 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{F}(x)$ 的相应齐次方程组的基解矩阵, 则非齐次方程组的通解为

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x} (\mathbf{\Phi}(t))^{-1}\mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明: 只需验证 $\mathbf{Z}(x) = \mathbf{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}(\mathbf{\Phi}(t))^{-1}\mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t$ 的确为非齐次方程组的一个特解.

定理 4 的原理: 常数变易法

设 $\mathbf{Y}$ 为非齐次方程组的解. 令

$$\mathbf{C}(x) = (\mathbf{\Phi}(x))^{-1}\mathbf{Y}(x).$$

则 $\mathbf{Y}(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C}(x)$. 带入方程组可得

$$\begin{aligned}\mathbf{A\Phi}(x)\mathbf{C}(x) + \mathbf{F}(x) = \mathbf{Y}'(x) &= \mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C}'(x) \\ &= \mathbf{A\Phi}(x)\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C}'(x),\end{aligned}$$

故 $\mathbf{C}'(x) = (\mathbf{\Phi}(x))^{-1}\mathbf{F}(x)$, 从而我们有

$$\mathbf{C}(x) = \mathbf{C} + \int_{x_0}^{x} (\mathbf{\Phi}(t))^{-1}\mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t.$$

一阶线性常系数齐次方程组的求解

尝试性思考: 我们考虑形如 $\mathbf{Y} = e^{\lambda x}\mathbf{r}$ 这样的解, 其中 λ 为常数. 带入方程组可得

$$\mathbf{A}e^{\lambda x}\mathbf{r} = \mathbf{AY} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x} = \lambda e^{\lambda x}\mathbf{r}.$$

记 $\mathbf{E}$ 为单位矩阵, 那么 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{r} = \mathbf{0}$. 于是 λ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值, $\mathbf{r}$ 为相应的特征向量. 方程组的特征方程被定义为 $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$.

$n=2$: 两个不相等的实特征根

- 若 $\mathbf{A}$ 有两个不相等的实特征值 λ_1, λ_2, 那么相应特征向量 $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ 为实向量且线性无关, 因此 $e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1$, $e^{\lambda_2 x}\mathbf{r}_2$ 为方程组的线性无关解, 从而所求的通解为 $\mathbf{Y} = C_1 e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}\mathbf{r}_2$, 其中 C_1, C_2 为任意的常数.

例 1. 求下列方程组的通解:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

解: 方程组的的特征方程为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ &= (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0, \end{aligned}$$

故特征根为 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$.

对于特征值 $\lambda_1 = 5$, 特征向量满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

由此可求得一个特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 进而可得到原常微分方程组的一个特解:

$$e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

对于特征值 $\lambda_1 = -1$, 特征向量满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

由此可得相应的特征向量$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 则方程组的另一个特解为 $e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

例 1′. 求下列方程组的通解:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

解: 由题设可得知 $y_1' = y_1 + 2y_2$, $y_2' = 4y_1 + 3y_2$.

由第一式可知 $y_2 = \frac{1}{2}y_1' - \frac{1}{2}y_1$, 带入第二式可得

$$\frac{1}{2}y_1'' - \frac{1}{2}y_1' = 4y_1 + \frac{3}{2}(y_1' - y_1).$$

于是我们有 $y_1'' - 4y_1' - 5y_1 = 0$. 其特征方程为

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0,$$

故相应的特征根为 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$, 从而可得 $y_1 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x}$, 进而我们有

$$y_2 = \frac{1}{2}(y_1' - y_1) = 2C_1 e^{5x} - C_2 e^{-x}.$$

综上所述可知所求常微分方程组的通解为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x} \\ 2C_1 e^{5x} - C_2 e^{-x} \end{pmatrix} \\ &= C_1 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 2. 求下列方程组的通解:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 18e^{5x} \end{pmatrix}.$$

解: 齐次方程组的基本解组为

$$e^{5x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

于是相应的基解矩阵为

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} e^{5x} & e^{-x} \\ 2e^{5x} & -e^{-x} \end{pmatrix}.$$

从而我们有

$$\left(\mathbf{\Phi}(x)\right)^{-1} = -\frac{1}{3e^{4x}}\begin{pmatrix} -e^{-x} & -e^{-x} \\ -2e^{5x} & e^{5x} \end{pmatrix}.$$

进而可知非齐次方程组有特解

$$\mathbf{Z}_0(x) = \mathbf{\Phi}(x)\int_0^x \left(\mathbf{\Phi}(t)\right)^{-1}\mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \begin{pmatrix} e^{5x} & e^{-x} \\ 2e^{5x} & -e^{-x} \end{pmatrix}\int_0^x \frac{-1}{3e^{4t}}\begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -2e^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 18e^{5t} \end{pmatrix}\mathrm{d}t$$

$$= \begin{pmatrix} e^{5x} & e^{-x} \\ 2e^{5x} & -e^{-x} \end{pmatrix}\int_0^x \begin{pmatrix} 6 \\ -6e^{6t} \end{pmatrix}\mathrm{d}t$$

$$= \begin{pmatrix} e^{5x} & e^{-x} \\ 2e^{5x} & -e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6x \\ 1-e^{6x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6x-1)e^{5x}+e^{-x} \\ (12x+1)e^{5x}-e^{-x} \end{pmatrix}.$$

从而非齐次方程的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6x-1)e^{5x} + e^{-x} \\ (12x+1)e^{5x} - e^{-x} \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 2e^{5x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

$n = 2$: 两个相等的实特征根

- 若 $\mathbf{A}$ 有两个相等 (实) 特征值 λ, 相应特征向量 $\mathbf{r}$ 为实向量, 于是 $e^{\lambda x}\mathbf{r}$ 为方程组的解. 与之线性无关的解可以取为 $e^{\lambda x}\mathbf{P}(x)$, 其中 $\mathbf{P}(x)$ 是一个待定列向量, 它的每个元素为次数 $\leqslant 1$ 的多项式, 也即 $\mathbf{P}(x) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 x$, 其中 $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1$ 为二阶列向量. 通过将之带入方程组来确定系数 $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1$, 进而得到 $\mathbf{P}(x)$.

注: $e^{\lambda x}\mathbf{r}$ 也是特殊的 $e^{\lambda x}\mathbf{P}(x)$: $\mathbf{C}_0 = \mathbf{r}$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$.

例 3. 求下列方程组的通解:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

解: 方程组的的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^2-4\lambda+4=0,$$

故特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=2$.

考虑方程组如下形式的解:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{2x} \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 \\ a_2 x + b_2 \end{pmatrix}.$$

带入方程组可得

$$\begin{aligned} & e^{2x} \begin{pmatrix} 2a_1 x + a_1 + 2b_1 \\ 2a_2 x + a_2 + 2b_2 \end{pmatrix} \\ = & e^{2x} \begin{pmatrix} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2) \\ (a_1 + 3a_2)x + (b_1 + 3b_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

比较系数可得 $a_2 = -a_1 = b_1 + b_2$.

于是方程组的通解为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= e^{2x}\begin{pmatrix} -(b_1+b_2)x+b_1 \\ (b_1+b_2)x+b_2 \end{pmatrix} \\ &= e^{2x}\begin{pmatrix} b_1(1-x)-b_2x \\ b_1x+b_2(1+x) \end{pmatrix} \\ &= b_1e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}+b_2e^{2x}\begin{pmatrix} -x \\ 1+x \end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中 b_1, b_2 为任意的常数.

$n=2$: 两个共轭的复特征根

- 若 $\mathbf{A}$ 有两个不相等的共轭复特征值 λ_1, λ_2, 相应的特征向量 $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ 也为共轭的复向量且线性无关. 于是 $e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1$, $e^{\lambda_2 x}\mathbf{r}_2$ 为原方程组的两个线性无关解. 此时通解为

$$\mathbf{Y} = Ce^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1 + \overline{C}e^{\lambda_2 x}\mathbf{r}_2,$$

其中 C 为任意的复常数.

记 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, 其中 α, β 为实数, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为实向量, 则通解也可以重新表示成:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= C_1 \operatorname{Re}(e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1) + C_2 \operatorname{Im}(e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1) \\
&= C_1 e^{\alpha x}\big((\cos\beta x)\mathbf{a} - (\sin\beta x)\mathbf{b}\big) \\
&\quad + C_2 e^{\alpha x}\big((\sin\beta x)\mathbf{a} + (\cos\beta x)\mathbf{b}\big),
\end{aligned}
$$

其中 C_1, C_2 为任意的实常数.

例 4. 求下列方程组的通解:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

解: 方程组的的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 5 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9 = 0,$$

故特征根为 $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$.

对于特征值 $\lambda_1 = 3i$, 相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix},$$

进而可得方程组的一个复值解

$$e^{3ix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos 3x \\ \cos 3x + 3\sin 3x \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 5\sin 3x \\ \sin 3x - 3\cos 3x \end{pmatrix}.$$

由此可知方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5\cos 3x \\ \cos 3x + 3\sin 3x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5\sin 3x \\ \sin 3x - 3\cos 3x \end{pmatrix},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

一般情形: $n \geqslant 1$

假设 $\mathbf{A}$ 的不同特征根为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, 其重数分别为 $n_1, \ldots, n_k$. 对于 $1 \leqslant j \leqslant k$, 存在 n_j 个形如 $e^{\lambda_j x}\mathbf{P}_j(x)$ 的线性无关的解, 其中 $\mathbf{P}_j(x)$ 为 n 阶列向量, 其元素为次数 $\leqslant n_j - 1$ 的多项式, 即

$$\mathbf{P}_j(x) = \sum_{l=0}^{n_j-1} \mathbf{C}_{jl} x^l,$$

其中 $\mathbf{C}_{jl}$ 为 n 阶的常值列向量. 可将它们带入方程组来确定 $\mathbf{C}_{jl}$, 由此可得基本解组.

例 5. 求下列方程组的通解:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

解: 方程组的的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -4 \\ -1 & 0 & \lambda+4 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda+4) - 4 = \lambda(\lambda+3)^2,$$

故特征根为 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -3.$

对于特征值 $\lambda_1 = 0$, 相应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

进而得到方程组的一个解 $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

由于 -3 为二重特征值, 则方程组有解形如:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = e^{-3x} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 x \\ a_2 + b_2 x \\ a_3 + b_3 x \end{pmatrix}.$$

带入方程组可得

$$
\begin{aligned}
& e^{-3x}\begin{pmatrix} b_1 - 3a_1 - 3b_1 x \\ b_2 - 3a_2 - 3b_2 x \\ b_3 - 3a_3 - 3b_3 x \end{pmatrix} \\
= \quad & e^{-3x}\begin{pmatrix} (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)x \\ (4a_3 - a_2) + (4b_3 - b_2)x \\ (a_1 - 4a_3) + (b_1 - 4b_3)x \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\begin{cases} 2b_1 + b_2 = 0, \\ 2b_2 + 4b_3 = 0, \\ b_1 - b_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 - 2a_1 - a_2 = 0, \\ b_2 - 2a_2 - 4a_3 = 0, \\ b_3 - a_1 + a_3 = 0, \end{cases}
$$

由此立刻可得 $b_2 = -2b_1$, $b_3 = b_1$, $a_2 = b_1 - 2a_1$, $a_3 = a_1 - b_3 = a_1 - b_1$. 从而相应的解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = e^{-3x} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 x \\ a_2 + b_2 x \\ a_3 + b_3 x \end{pmatrix} = e^{-3x} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 x \\ b_1 - 2a_1 - 2b_1 x \\ a_1 - b_1 + b_1 x \end{pmatrix}$$

$$= \ a_1 e^{-3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b_1 e^{-3x} \begin{pmatrix} x \\ 1 - 2x \\ -1 + x \end{pmatrix},$$

其中 a_1, b_1 为任意的常数.

综上所述可知所求方程组的通解为:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-3x} \begin{pmatrix} x \\ 1-2x \\ -1+x \end{pmatrix}.$$

作业题: 第 7.6 节第 250 页第 1 题第 (2), (3) 题, 第 2 题第 (1), (2), (3) 小题.

第 7 章总复习

- 常微分方程的基本概念.
- 一阶方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ 的解法.
- 分离变量法: 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ 的求解.
- 可转化成一阶线性方程的一阶方程:

  (1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c)$, (2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(\frac{y}{x})$,

  (3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, (4) Bernoulli 方程.

- 可降阶的高阶常微分方程:

(1) $y^{(n)} = f(x)$,

(2) $y^{(n)} = F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n-1)})$ $(k \geqslant 1)$,

(3) $F(y, y', y'') = 0$.

- n 阶线性常微分方程: 初值问题的解存在且唯一, 齐次方程解集为 n 维线性空间, 基本解组, Wronsky 行列式的定义、性质及由此导出的线性无关解的刻画, 线性无关的函数所满足的齐次方程, 非齐次方程通解的结构.

二阶线性常系数齐次方程求解

二阶线性常系数齐次方程: $y'' + py' + qy = 0$, p, q 为实常数. 称 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 为特征方程, 称其解为特征根. 令 $\Delta = p^2 - 4q$.

- 若 $\Delta > 0$, 则有两个不同的实特征根 λ_1, λ_2, 方程通解为 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.
- 若 $\Delta = 0$, 方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{p}{2}x}$.
- 若 $\Delta < 0$, 则有两共轭复特征根 $\lambda = \alpha \pm i\beta$, 方程通解为 $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

n 阶线性常系数齐次方程求解

考虑 n 阶线性常系数齐次常微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

其中 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ 为常数. 该常微分方程的特征多项式被定义为

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

假设该特征多项式不同的特征根为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, 重数为 $n_1, \ldots, n_k$, 则齐次方程的复值通解为

$$y(x) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{n_j-1} C_{j,l} x^l e^{\lambda_j x},$$

其中 $C_{j,l}$ 为任意的复值常数. 为得到实值通解, 只需要针对复数值特征根 λ_j, 在上式中将 $e^{\lambda_j x}$ 及其共轭替换成 $e^{\lambda_j x}$ 的实部和虚部, 并让 $C_{j,l}$ 为任意的实常数.

求解 $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\mu x}$, p, q 为实常数, P_n 为 n 次多项式, $\mu \in \mathbb{C}$ 为常数

- 如果 μ 不是齐次方程的特征根, 则会有特解 $z_0(x) = Q_n(x)e^{\mu x}$, Q_n 为待定 n 次多项式.
- 如果 μ 为齐次方程的一重特征根, 则有特解 $z_0(x) = Q_n(x)xe^{\mu x}$, Q_n 为待定 n 次多项式.
- 如果 μ 为齐次方程的二重特征根, 则有特解 $z_0(x) = Q_n(x)x^2e^{\mu x}$, Q_n 为待定 n 次多项式.

注: 通过将 z_0 带入非齐次方程来确定 Q_n.

回顾: 推广

利用特解的线性叠加性, 我们也可以处理如下形式的非齐次项 $f(x)$ 以及它们之间的常系数线性组合 (P_n 为 n 次多项式, a, b 为实常数):

$$
\begin{aligned}
&P_n(x),\ \ P_n(x)e^{ax},\\
&P_n(x)\sin bx = \operatorname{Im} P_n(x)e^{ibx},\\
&P_n(x)\cos bx = \operatorname{Re} P_n(x)e^{ibx},\\
&P_n(x)e^{ax}\sin bx = \operatorname{Im} P_n(x)e^{(a+ib)x},\\
&P_n(x)e^{ax}\cos bx = \operatorname{Re} P_n(x)e^{(a+ib)x}.
\end{aligned}
$$

二阶线性常系数非齐次方程的求解

从齐次方程的线性无关解 y_1, y_2 出发, 由公式

$$z_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

可得非齐次方程的一个特解, 进而得到非齐次方程的通解 $y = z_0 + C_1y_1 + C_2y_2$. 但通常很难计算 z_0. 仅在某些特殊的情形, 我们才能得到通解的显式表达式.

Euler 方程

一般的 Euler 方程为:

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

其中 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ 为常数.

方程的特点: 变系数的线性方程, 但其系数均为幂函数, 且幂次与相应项的求导阶数一致.

一般解法: 作变量替换 $t = \log|x|$ 来将方程化成以 t 为自变量, 以 y 为待定函数的常系数方程.

- 一阶线性常微分方程组: 初值问题的解存在且唯一, 由 n 个方程, n 个未知函数组成的一阶线性齐次常微分方程组的解集为 n 维线性空间, 齐次方程组的基解矩阵及其性质, Wronsky 行列式的定义、性质及由此导出的对线性无关解的刻画, 非齐次方程组通解的结构以及借助基解矩阵的表达式.

- 高阶线性常微分方程可以转化成特殊的一阶线性常微分方程组.
- 一阶线性常系数齐次常微分方程组:
  特征方程, 特征根, 用待定系数法求解.
- 一阶线性常系数非齐次常微分方程组:
  利用基解矩阵, 或者将方程组转化成常系数常微分方程 (主要针对两未知元的方程组).

综合练习

例 1. 求解 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

解: 由题设可知 $y_1' = y_2 + 1$, $y_2' = 2y_1 + y_2$, 则

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = -1.$$

该方程的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0,$$

故其特征根为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

由于非齐次项等于 -1, 并且 0 不为齐次方程的特征根, 因此非齐次方程具有特解形如 $z_0 = A$, 带入非齐次方程可得 $A = \frac{1}{2}$, 于是我们有

$$y_1 = \frac{1}{2} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x},$$

进而则可得 $y_2 = y_1' - 1 = -1 + 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}$, 从而所求非齐次方程组的通解为

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

例 2. 假设 y_1, y_2 为一阶线性非齐次方程的两个不同解. 求方程的表达式以及方程的通解.

解: 由一阶线性非齐次方程解的结构立刻可知 $y_0 = y_2 - y_1$ 为相应的齐次方程的一个不恒为零的解. 于是所求方程的通解为

$$y = Cy_0 + y_1 = C(y_2 - y_1) + y_1,$$

其中 C 为任意的常数.

设所求方程为 $y' + P(x)y = Q(x)$. 由题设可知 $y_0' + P(x)y_0 = 0$, 故 $P(x) = -\frac{y_0'}{y_0} = \frac{y_1'-y_2'}{y_2-y_1}$. 进而

$$\begin{aligned} Q(x) &= y_1' + P(x)y_1 = y_1' + \frac{(y_1'-y_2')y_1}{y_2-y_1} \\ &= \frac{y_1'(y_2-y_1) + (y_1'-y_2')y_1}{y_2-y_1} \\ &= \frac{y_1'y_2 - y_2'y_1}{y_2-y_1}. \end{aligned}$$

故所求方程为 $y' + \frac{y_1'-y_2'}{y_2-y_1}y = \frac{y_1'y_2-y_2'y_1}{y_2-y_1}$.

例 3. 设 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的连续函数, 考虑方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a(x)y+b(x)$.

(I) 举出 $a(x),b(x)$ 的一个例子使得该方程的解为下列三种情况之一:

(a) 没有以 2π 为周期的解;

(b) 只有一个以 2π 为周期的解;

(c) 任意解都以 2π 为周期.

(II) 证明该方程以 2π 为周期的解的个数只能为上述三种情况之一.

解: (I) 选取 $a(x)=b(x)\equiv 0$, 那么 a,b 为 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数, 而常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a(x)y+b(x)=0$$

的通解为 $y\equiv C$, 其中 $C\in\mathbb{R}$ 为任意常数. 于是该方程的任意解均以 2π 为周期.

非平凡的例子: 选取 $a(x)=b(x)=\cos x$, 那么 $a(x),b(x)$ 均为 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数,

而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a(x)y + b(x) = y\cos x + \cos x$ 的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{\int a(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int b(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{\sin x}\left(C + \int e^{-\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{\sin x}\left(C + \int e^{-\sin x}\mathrm{d}(\sin x)\right) \\ &= e^{\sin x}(C - e^{-\sin x}) = Ce^{\sin x} - 1, \end{aligned}$$

其中 $C \in \mathbb{R}$ 为任意的常数. 故该方程的任意解均以 2π 为周期.

(II) 假设 (a), (b) 不成立, 那么原方程会有两个以 2π 为周期的不同解, 记作 y_1, y_2, 则 $y_2 - y_1$ 为齐次方程不恒为零的解, 故原方程的通解为

$$y = C(y_2 - y_1) + y_1,$$

其中 $C \in \mathbb{R}$ 为常数. 于是上述方程的任意解均以 2π 为周期, 也即 (c) 成立, 故所证结论成立.

谢谢大家!