微积分 A (2)

姚家燕

第 15 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

期中考试时间与地点

时间: 2021 年 4 月 17 日星期六 13:30–15:30

地点: 二教 401 (工物系, 车辆学院)-86,

二教 402 (其余)-73

请大家务必提前 30 分钟到场!

重要提示: 考试时需且只许带学生证和考试用具!

答疑: 4 月 16 日 18:00–21:00 (数学系 A 216)

期中考试内容

- 多元微分学 (第 1 章)
- 含参积分以及广义含参积分 (第 2 章)

重要提示: 本周原本周五周六周日上习题课的同学可以改上周三周四的习题课. 本周五讲解如何涂答题卡, 请大家务必出席.

第 14 讲回顾：重积分的概念及其性质

- $\mathbb{R}^n$ 中的坐标平行体上的积分: $\mathbb{R}^n$ 中的区间或者坐标平行体及其体积, 分割, 步长, 带点分割, Riemann 和, 重积分, Riemann 可积.
- 有界集上的函数的 Riemann 积分: 零延拓成坐标平行体上的函数, 再研究其积分.
- 有界集 Ω 上所有 Riemann 可积函数的全体记作 $\mathscr{R}(\Omega)$, 该集合可能 "非常小" .

- 当 $n=2$ 时, 通常将 $\int\limits_{\Omega} f(X)\,\mathrm{d}X$ 记作

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \text{ 或 } \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

该式表示介于曲面 $z=0$ 与 $z=f(x,y)$ 之间且支撑在 Ω 上的立体的体积.

- 介于曲面 $z=f_1(x,y)$ 与 $z=f_2(x,y)$ 之间且支撑在 Ω 上的立体的体积为

$$\iint\limits_{\Omega} |f_2(x,y)-f_1(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- 示性函数: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $\forall X \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$1_\Omega(X) = \begin{cases} 1, & 若\ X \in \Omega, \\ 0, & 若\ X \notin \Omega, \end{cases}$$

并称 1_Ω 为集合 Ω 的示性函数.

- Jordan 可测集: 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界集且使得其示性函数 1_Ω 为 Riemann 可积. 此时还称 $\int_\Omega 1_\Omega(X)\,\mathrm{d}X$ 为 Ω 的体积或测度, 记作 $|\Omega|$.

- “由连续函数定义的集合”为 Jordan 可测，例如: 坐标平行体, 球体等.
- 如果有界闭集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测集, 则我们有 $\mathscr{C}(\Omega) \subset \mathscr{R}(\Omega)$.
- Jordan 可测集上重积分的性质: 有界性, 线性, 区域可加性, (严格) 保号性, (严格) 保序性, 绝对值不等式, 积分的上、下界, 积分中值定理及其应用.

定理 2. (变量替换) 设 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ 为非空开集, 而 $\varphi = (g_1, \ldots, g_n) : \Omega_1 \to \Omega_2$ 为连续可导的双射并且它的逆映射 $\varphi^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ 也为连续可导. 若 $D_1 \subset \Omega_1$ 为 Jordan 可测集, 那么 $D_2 = \varphi(D_1)$ 也为 Jordan 可测集, 且 $\forall f \in \mathscr{C}(D_2)$, 均有

$$\int_{D_2} f(Y)\,\mathrm{d}Y = \int\cdots\int_{\varphi(D_1)} f(y_1, \ldots, y_n)\,\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n$$

$$= \int\cdots\int_{D_1} f(g_1(X), \ldots, g_n(X)) \left| \frac{D(g_1, \ldots, g_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \right| \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

注: 在 Ω_1, Ω_2 上增减零测度集, 结论依然成立.

回顾: 二重积分的计算—累次积分法

定理 1. 假设 $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ 为连续函数使得 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $f_1(x) \leqslant f_2(x)$. 则

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}$$

为 Jordan 可测且 $|D_1| = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,\mathrm{d}x$. 若 $f : D_1 \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 则

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

定理 2. 假设 $g_1, g_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ 为连续函数使得 $\forall y \in [c, d]$, 均有 $g_1(y) \leqslant g_2(y)$. 则

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y),\ c \leqslant y \leqslant d\right\}$$

为 Jordan 可测且 $|D_2| = \int_c^d \big(g_2(y) - g_1(y)\big)\,\mathrm{d}y$.

若 $f : D_2 \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 则

$$\iint_{D_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

回顾: 对称性在积分中的应用

(1) 假设积分区域 D 关于 x 轴对称. (a) 如果有 $f(x,-y)=-f(x,y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

(b) 如果有 $f(x,-y)=f(x,y)$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D' 为 D 位于 x 轴上侧 (或下侧) 的部分.

(2) 假设积分区域 D 关于 y 轴对称.

(a) 若 $f(-x,y)=-f(x,y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

(b) 若 $f(-x,y)=f(x,y)$, 则我们有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D' 为 D 位于 y 轴左侧 (或右侧) 的部分.

(3) 假设积分区域 D 关于原点对称. 如果还有

$f(-x,-y)=-f(x,y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

第 15 讲

例 11. 设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 为连续函数, 计算

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解: 由积分变元对称性知 $I=\iint\limits_{y^2+x^2\leqslant R^2}\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

由此我们立刻可得

$$I=\frac{1}{2}\Big(\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{y^2+x^2\leqslant R^2}\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(a+b)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(a+b)\pi R^2.$$

例 12. 假设 D 是由直线 $x=-1$, $y=1$ 和曲线 $y=x^3$ 所围成的平面区域, 而 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$. 计算

$$I=\iint\limits_D x\big(1+yf(x^2+y^2)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解: 方法 1. 由题设可得

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{x^3}^{1}x\big(1+yf(x^2+y^2)\big)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{1}x\big(1+yf(x^2+y^2)\big)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\int_{x^3}^{1}x\big(1+yf(x^2+y^2)\big)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{1}x\big(1+yf(x^2+y^2)\big)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}\int_{-x^3}^{1}x\big(1+yf(x^2+y^2)\big)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{-x^3}x\big(1+yf(x^2+y^2)\big)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{-x^3}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=-\frac{2}{5}.$$

方法 2. 由题设条件, 我们定义

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 0,\ x^3 \leqslant y \leqslant -x^3\}, \\ D_2 &= \{(x,y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ |x|^3 \leqslant y \leqslant 1\}, \end{aligned}$$

于是 D_1 关于 x 轴对称, 而 D_2 关于 y 轴对称,

且 $D = D_1 \cup D_2$, 从而我们有

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \iint_{D_2} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \iint_{D_1} xyf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &\quad + \iint_{D_2} xyf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\int_{x^3}^{-x^3} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

例 13. 计算

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(x\sin(x^2+y^2)+ye^{x^2+y^2}+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解: 由对称性可知

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} x\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} ye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi. \end{aligned}$$

例 14. 比较 $\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint_D (x-y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{r^2-x^2}\right\}\ (r>0)$.

解: 由对称性可知

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad +2\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D (x-y)^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D (x^2+y^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad -2\iint\limits_D xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D (x^2+y^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

由此我们立刻可以导出

$$
\iint\limits_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D (x-y)^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
$$

§3. 二重积分的变量代换

1. 极坐标变换: $\forall\rho\in[0,+\infty)$, $\forall\varphi\in[0,2\pi]$, 令

$$\begin{cases} x = g_1(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi, \\ y = g_2(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

则 $g=(g_1,g_2)$ 为连续可导并且

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \geqslant 0.$$

限制映射 $g:(0,+\infty)\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 为双射, 其逆映射 g^{-1} 满足

$$(\rho,\varphi)=g^{-1}(x,y).$$

如果 $D_1\subset[0,+\infty)\times[0,2\pi]$ 为 Jordan 可测集, 而 $f:D_2=g(D_1)\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 则

$$\iint\limits_{g(D_1)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

2. 二重积分在极坐标系下的累次积分法:

命题 1. 假设

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(\rho,\varphi) \mid \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ \rho_1(\varphi) \leqslant \rho \leqslant \rho_2(\varphi)\}, \\ D_2 &= \{(x,y) \mid x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, (\rho,\varphi) \in D_1\}, \end{aligned}$$

其中 $\rho_2 \geqslant \rho_1 \geqslant 0$ 连续. 若 $f \in \mathscr{C}(D_2)$, 则

$$\begin{aligned} &\iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_\alpha^\beta \left(\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

命题 2. 假设

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(\rho,\varphi) \mid \rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2,\ \alpha(\rho) \leqslant \varphi \leqslant \beta(\rho)\}, \\ D_2 &= \{(x,y) \mid x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, (\rho,\varphi) \in D_1)\}, \end{aligned}$$

其中 $\beta \geqslant \alpha$ 连续. 若 $f \in \mathscr{C}(D_2)$, 则

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\int_{\alpha(\rho)}^{\beta(\rho)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\rho. \end{aligned}$$

例 1. 将 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成极坐标下的累次积分，其中

$$D=\{(x,y)\mid (x-2)^2+y^2\leqslant 4,\\ (x-a)^2+y^2\geqslant a^2,\ 0<a<2\}.$$

解: 考虑极坐标变换 $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, 那么我们有 $(x,y)\in D$ 当且仅当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ 以及 $2a\cos\varphi\leqslant\rho\leqslant 4\cos\varphi$, 由此可得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_{2a\cos\varphi}^{4\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho\Big)\,\mathrm{d}\varphi.$$

例 2. 求 $I = \iint\limits_D \log(1+\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中

$$D = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4,\ x,y \geqslant 0\}.$$

解: 在极坐标系下, 积分区域 D 变为

$$D_1 = \left\{(\rho,\varphi) \mid 1 \leqslant \rho \leqslant 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \rho\log(1+\rho)\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\int_1^2 \rho\log(1+\rho)\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{\pi}{4}\left((\rho^2-1)\log(1+\rho) - \frac{1}{2}\rho^2+\rho\right)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{4}\left(3\log 3 - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

例 3. 计算 $I=\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中

$$D=\left\{(x,y)\mid x^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2\leqslant \tfrac{1}{4}\right\}.$$

解: 在极坐标系下, 积分区域 D 变成

$$D_1=\left\{(\rho,\varphi)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\right\}.$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\sin\varphi}\sqrt{1-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi=-\int_0^{\pi}\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}(1-|\cos\varphi|^3)\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}. \end{aligned}$$

例 4. 计算 $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y\}.$$

解: 在极坐标下, 积分区域 D 变为

$$D_1=\Big\{(\rho,\varphi)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\sin\varphi+\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4}\Big\},$$

由此我们立刻可得

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\Big(\int_0^{\sin\varphi+\cos\varphi}\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\rho}\rho\,\mathrm{d}\rho\Big)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+\sin 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=\pi.$$

例 5. 求由闭曲线 $(x^2+y^2)^3 = x^4+y^4$ 所围成的区域的面积.

解: 将所围成的区域记为 D, 它在极坐标下变为

$$D_1 = \left\{(\rho,\varphi) \mid 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\}.$$

由此立刻可得区域 D 的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} \rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}} \rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

例 6. 证明: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

证明: $\forall R > 0$, 令 $D = [0, R] \times [0, R]$,

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ x, y \geqslant 0\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2R^2,\ x, y \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

则 $D_1 \subseteq D \subseteq D_2$, 于是我们有

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x)^2$.

借助极坐标系, 我们有

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right)\Big|_0^R\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}),$$

$$\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2}R} e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}R}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2}).$$

由夹逼原理知 $(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x)^2 = \dfrac{\pi}{4}$. 由此得证.

例 7. 计算由抛物线 $y^2 = px$, $y^2 = qx$ 与双曲线 $xy = a$, $xy = b$ 合起来所围成的平面区域 D 的面积, 其中 $q > p > 0$, $b > a > 0$.

解: 作变换 $u = \frac{y^2}{x}$, $v = xy$, 则 D 变为

$$D_1 = \left\{(u, v) \mid p \leqslant u \leqslant q,\ a \leqslant v \leqslant b\right\},$$

而 $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{3y^2}{x}$, 于是我们有

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = -\frac{x}{3y^2} = -\frac{1}{3u}.$$

由此可知所求面积为

$$
\begin{aligned}
S &= \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint\limits_{D_1} \frac{1}{3u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_a^b \left(\int_p^q \frac{1}{3u}\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{3}(b-a)\log\frac{q}{p}.
\end{aligned}
$$

例 8. 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 的体积.

解: 由对称性可知所求体积为

$$V=8\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ x,y\geqslant 0\right\}$. 考虑变换 $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$, 其中 $\rho\geqslant 0$, 且 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. 该变换将 D 变成

$$D_1=\left\{(\rho,\varphi)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

与此同时, 我们还有

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

由此立刻可得所求体积为

$$\begin{aligned} V &= 8\iint\limits_{D} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 8\iint\limits_{D_1} c\sqrt{1-\rho^2}(ab\rho)\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \\ &= 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\Big)\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\pi abc. \end{aligned}$$

作业题: 第 3.3 节第 145 页第 12 题第 (3), (4) 题, 第 146 页第 13 题第 (1) 题, 第 14 题第 (1) 题.

§4. 三重积分的计算

1. 三重积分在直角坐标系下的累次积分法:

命题 1. 设$D\subset\mathbb{R}^2$为Jordan可测集, $f_1, f_2\in\mathscr{C}(D)$使得 $\forall(x,y)\in D$, 均有 $f_1(x,y)\leqslant f_2(x,y)$. 令

$$\Omega=\big\{(x,y,z)\mid f_1(x,y)\leqslant z\leqslant f_2(x,y),\ (x,y)\in D\big\}.$$

则 Ω 为 Jordan 可测集且 $\forall f\in\mathscr{C}(\Omega)$, 均有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

评注

- Jordan 可测集 Ω 的体积为

$$V(\Omega) = \iint\limits_D \big(f_2(x,y) - f_1(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- 若 $D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$, 则

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_D \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

例 1. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x+y+z\leqslant 1,\ x,y,z\geqslant 0\}.$$

解: 由题设可知 $(x,y,z)\in\Omega$ 当且仅当

$$0\leqslant z\leqslant 1-x-y,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x,\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}(x+y)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-x-y)(x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1\left(\frac{1}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

例 2. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$, 其中

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x+y+z\leqslant 1,\ x,y,z\geqslant 0\}.$$

解: 由题设可知 $(x,y,z)\in\Omega$ 当且仅当

$$0\leqslant z\leqslant 1-x-y,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x,\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1\Big(\int_0^{1-x}\Big(\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}\Big)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}\Big(\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\Big)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\Big(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}-\frac{1-x}{4}\Big)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\log 2-\frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

例 3. 计算 $I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{xy}{\sqrt{z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为锥面 $(\frac{z}{c})^2 = (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2$ 与平面 $z = c$ 所围成的区域在第一卦限的部分.

解: 由题设可知 $(x, y, z) \in \Omega$ 当且仅当

$$x, y, z \geqslant 0,\ \ (\frac{z}{c})^2 \geqslant (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2,\ \ z \leqslant c,$$

而这又等价于说

$$0 \leqslant x \leqslant a\sqrt{(\frac{z}{c})^2 - (\frac{y}{b})^2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{b}{c}z,\ 0 \leqslant z \leqslant c,$$

由此立刻可得

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant \frac{b}{c}z\\ 0\leqslant z\leqslant c}} \left(\int_0^{a\sqrt{(\frac{z}{c})^2-(\frac{y}{b})^2}} \frac{xy}{\sqrt{z}}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^c \left(\int_0^{\frac{b}{c}z} \frac{y}{\sqrt{z}}\cdot\frac{a^2}{2}\left(\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{8}\cdot\frac{a^2b^2}{c^4}\int_0^c z^{\frac{7}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}.
\end{aligned}
$$

谢谢大家!