1 矩阵乘法

1. 计算矩阵乘积
$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. 计算
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \tag{2}$$
其中n是任意正整数。

3. 设
$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{3}$$
证明$M(\theta_1)M(\theta_2) = M(\theta_1+\theta_2)$。

4. 设
$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$
证明
$$H_1H_2H_1 = H_2H_1H_2. \tag{5}$$

5. 设
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$
计算$A^3 - 6A^2 + 10A - 4I_{3\times 3}$.

6. 1）写出一个2×2的非单位矩阵A满足$A^2 = I_{2\times 2}$。2）写出一个2×2非零矩阵A满足$A^2 = 0$（这里0代表一个2×2的零矩阵。

7. 计算下面分块矩阵的乘积
$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\sin\alpha & \cos\alpha & -1 & 0 \\ \hline \cos\beta & \sin\beta & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \tag{7}$$

8. 设
$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

证明以下关系

$$
\begin{aligned}
h_1h_2h_1 =& h_2h_1h_2, \\
h_2h_3h_2 =& h_3h_2h_3, \\
h_1h_3 =& h_3h_1.
\end{aligned} \tag{9}
$$

（提示：选择合适的矩阵分块并利用题4的结果）

9. n阶方阵A和B满足$AB = BA$，则称A和B可换。证明：n阶的方阵A同所有n阶方阵可换，当且仅当A正比于单位矩阵，即

$$A = cI_{n\times n}. \tag{10}$$

其中c是一个数。

10. 如果存在一个正整数n使得方阵A的n次幂$A^n = 0$，则A叫做幂零矩阵。如果A是幂零的，证明$I + A$是可逆的（提示：尝试构造这个逆矩阵）。