微积分 A (2)

姚家燕

第 7 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

第 6 讲回顾: 向量值函数的微分

- 线性映射与矩阵的关系.
- $\vec{f}(X)=\vec{o}(|g(X)|)=|g(X)|\vec{o}(1)\ (X\to X_0)$.
- 定义: 微分, Jacobi 矩阵, Jacobi 行列式.
- 微分的唯一性. 可微性蕴含连续性.
- 向量值函数的微分与其各分量函数的微分之间的关系.

回顾: 复合向量值函数的微分与求导

- 矩阵的范数, 微分的链式法则 (矩阵表示):

$$\mathrm{d}(\vec{f} \circ \vec{g})(X_0) = \mathrm{d}\vec{f}(\vec{g}(X_0)) \circ \mathrm{d}\vec{g}(X_0),$$

$$J_{\vec{f}\circ\vec{g}}(X_0) = J_{\vec{f}}(\vec{g}(X_0)) \cdot J_{\vec{g}}(X_0),$$

$$\frac{\partial f_i(g_1,\ldots,g_m)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(*)\frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}(*)\frac{\partial g_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m}(*)\frac{\partial g_m}{\partial x_j}.$$

回顾: 隐函数定理

- 隐函数定理 (两个变量的方程):

设函数 $F(x,y)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得 $F(x_0,y_0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. 则方程 $F(x,y)=0$ 在局部上有 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类的解 $y=f(x)$, 并且

$$f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}.$$

- 隐函数定理 (多个变量的方程):

假设函数 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得 $F(X_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(X_0, y_0) \neq 0$. 则方程

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$$

局部上有 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类解 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 且

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(X, f(X))}{\frac{\partial F}{\partial y}(X, f(X))}.$$

- 隐函数定理 (多个变量的方程组):

  假设 $F_i(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得 $F_i(X_0,Y_0)=0$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, $\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}(X_0,Y_0)\neq 0$. 则方程组

  $$F_i(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0\ (1\leqslant i\leqslant m)$$

  在局部上有 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类解

  $$y_i=f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ (1\leqslant i\leqslant m),$$

$$J_{\vec{f}}(X)=-\left(\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(X,\vec{f}(X))\right)^{-1}\cdot\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(X,\vec{f}(X)).$$

第 7 讲

反函数定理

问题: 向量值函数 $\vec{g}:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是否能有反函数 $\vec{g}^{-1}$? 这等价于问方程 $X=\vec{g}(Y)$ 是否有解 $Y=\vec{g}^{-1}(X)$, 也即方程

$$F(X,Y):=\vec{g}(Y)-X=\vec{0}$$

是否有隐函数解 $Y=\vec{g}^{-1}(X)$?

定理 4. 设 $k \geqslant 1$ 为整数, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为非空开集, $Y_0 \in \Omega$, $\vec{g}: \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为 $\mathscr{C}^{(k)}$ 类使得 $J_{\vec{g}}(Y_0)$ 可逆. 令 $X_0 = \vec{g}(Y_0)$. 则 $\exists \delta, \eta > 0$ 使得 $B(Y_0, \eta) \subset \Omega$, 且存在 $\vec{f}: B(X_0, \delta) \to B(Y_0, \eta)$ 为 $\mathscr{C}^{(k)}$ 类使得 $\forall X \in B(X_0, \delta), \forall Y \in B(Y_0, \eta)$, 等式 $X = \vec{g}(Y)$ 成立当且仅当 $Y = \vec{f}(X)$. 另外, $\forall X \in B(X_0, \delta)$,

$$J_{\vec{f}}(X) = \left(J_{\vec{g}}(\vec{f}(X))\right)^{-1}.$$

注: 该定理意味着 $\vec{g}$ 在点 Y_0 处 “局部可逆” .

证明: 选取 $r>0$ 使得 $B((X_0,Y_0);r)\subset\mathbb{R}^n\times\Omega$. $\forall(X,Y)\in B((X_0,Y_0);r)$, 定义

$$\vec{F}(X,Y)=\vec{g}(Y)-X.$$

则 $\vec{F}$ 为 $\mathscr{C}^{(k)}$ 类. 记 $\vec{F}=(F_1,\ldots,F_n)^T$, 那么

$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}(X_0,Y_0)=J_{\vec{g}}(Y_0)$$

为可逆矩阵. 由隐函数定理知, $\exists\delta,\eta>0$ 使得

$$B(X_0,\delta)\times B(Y_0,\eta)\subset B((X_0,Y_0);r),$$

且 $\forall X \in B(X_0,\delta)$, $\exists! Y \in B(Y_0,\eta)$ 使得我们有 $\vec{F}(X,Y)=0$. 令 $\vec{f}(X)=Y$, 那么 $\vec{g}(\vec{f}(X))=X$, 并且 $\vec{f}: B(X_0,\delta)\to B(Y_0,\eta)$ 为 $\mathscr{C}^{(k)}$ 类向量值函数使得 $\forall X \in B(X_0,\delta)$, 我们均有

$$\begin{aligned} J_{\vec{f}}(X) &= -\left(\frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}(X,\vec{f}(X))\right)^{-1} \\ &\quad \cdot \frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(X,\vec{f}(X)) \\ &= \left(J_{\vec{g}}(\vec{f}(X))\right)^{-1}. \end{aligned}$$

评注

- 上述定理意味着, $\forall X \in B(X_0, \delta)$, 我们均有 $Y = \vec{f}(X) \in B(Y_0, \eta)$, 且满足 $\vec{g}(\vec{f}(X)) = X$. 反过来, $\forall Y \in B(Y_0, \eta)$, 我们并不知道是否也有 $X = \vec{g}(Y) \in B(X_0, \delta)$, 故 $\vec{f}$ 并不一定是 $\vec{g}$ 真正的反函数.

- 若定义 $U = B(X_0, \delta)$, $V = \vec{f}(B(X_0, \delta))$, 那么
$\vec{f} : U \to V$, $\vec{g} : V \to U$ 互为逆映射:
$\forall X \in U$, 均有 $\vec{f}(X) \in V$ 并且 $\vec{g}(\vec{f}(X)) = X$.
又 $\forall Y \in V$, $\exists X \in B(X_0, \delta)$ 使得 $Y = \vec{f}(X)$,
从而 $Y \in B(Y_0, \eta)$, 且 $\vec{g}(Y) = \vec{g}(\vec{f}(X)) = X$,
于是我们有 $\vec{f}(\vec{g}(Y)) = \vec{f}(X) = Y$.

例 4. (极坐标变换) 令 $D=(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)$.

$\forall(\rho,\varphi)\in D$, 定义

$$\vec{f}(\rho,\varphi)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

则 $\vec{f}$ 为 $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 类向量值函数且

$$J_{\vec{f}}(\rho,\varphi)=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix},$$

从而 Jacobi 行列式 $\det J_{\vec{f}}(\rho, \varphi) = \rho > 0$. 于是 $\vec{f}$ 为局部可逆, 其逆映射 $\vec{f}^{-1}$ 也为 $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 类且

$$\begin{aligned} J_{\vec{f}^{-1}}(x, y) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

作业题: 第 1.6 节第 66 页第 9 题第 (1) 小题.

例 5. 已知函数 $z = z(x, y)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = uv \end{cases}$$

确定, 其中 $u > 0$. 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解: 由于 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u > 0$, 因此

存在反函数, 可将 u, v 看成是 x, y 的函数并且

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{u}\begin{pmatrix} u\cos v & u\sin v \\ -\sin v & \cos v \end{pmatrix}.$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= v\cos v + u \cdot \Big(-\frac{1}{u}\sin v\Big) \\
&= v\cos v - \sin v, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= v\sin v + u \cdot \Big(\frac{1}{u}\cos v\Big) \\
&= v\sin v + \cos v.
\end{aligned}
$$

例 6. 设隐函数 $u = u(x, y)$ 由方程组

$$\begin{cases} u = f(x, y, z, t) \\ g(y, z, t) = 0 \\ h(z, t) = 0 \end{cases}$$

确定, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

解: 由题设可知, 利用方程组 $\begin{cases} g(y, z, t) = 0 \\ h(z, t) = 0 \end{cases}$
可将 z, t 确定为 y 的函数, 由此可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z, t).$$

由隐函数定理可知

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} \\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= -\left(\left|\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right|\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial t} & -\frac{\partial g}{\partial t} \\ -\frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix},$$

于是 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial t} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}}{\left|\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right|}$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}}{\left|\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right|}$, 进而可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\left|\frac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}\right|}{\left|\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right|} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}.$$

§7. 曲面与曲线的表示法　切平面与法线

回顾: 三维空间中的直线与平面

取 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. 设 $\vec{e} = (a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$ 为非零向量. 过 P_0 沿方向 $\vec{e}$ 的直线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

该直线也可以表示成

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

过 P_0 并且与 Γ 垂直的平面 S 称为 Γ 过 P_0 的法平面, 它的方程为 $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$,

也就是说 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

我们称 $\vec{e}$ 为平面 S 的法向量, Γ 为 S 的法线.

设过点 P_0 的平面 S 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + b_1 v, \\ y = y_0 + a_2 u + b_2 v, \\ z = z_0 + a_3 u + b_3 v, \end{cases} \text{其中} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{线性无关,}$$

也即 $\begin{pmatrix} x - x_0 & a_1 & b_1 \\ y - y_0 & a_2 & b_2 \\ z - z_0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ u \\ v \end{pmatrix} = \vec{0}$, 进而可得

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0.$$

于是该平面的法向量为

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

从而平面 S 过点 P_0 的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

曲面及其切平面和法线

(1) 曲面的显函数表示法: 曲面 S: $z=f(x,y)$, 其中 $(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$. 假设 f 在点 (x_0,y_0) 处可微. 令 $z_0=f(x_0,y_0)$. 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时,

$$\begin{aligned} f(x,y)-z_0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad +o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}). \end{aligned}$$

则曲面 S 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程为

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

于是该切平面的法向量为

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

相应的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

(2) 曲面的参数表示法:

考虑曲面 S: $\begin{cases} x = f_1(u,v), \\ y = f_2(u,v), \\ z = f_3(u,v), \end{cases}$ $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

设 $(u_0, v_0) \in D$, f_1, f_2, f_3 在点 (u_0, v_0) 可微. 令

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(u_0, v_0) \\ f_2(u_0, v_0) \\ f_3(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

当 $(u,v)\to(u_0,v_0)$ 时，我们有

$$\begin{pmatrix} f_1(u,v)-x_0 \\ f_2(u,v)-y_0 \\ f_3(u,v)-z_0 \end{pmatrix} = \frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix}$$

$$+\vec{o}(\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}).$$

当矩阵 $\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)$ 的秩等于 2 时，曲面 S 在点 (x_0,y_0,z_0) 处有切平面

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = \frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix}.$$

该切平面也可以表示成

$$\frac{D(f_2,f_3)}{D(u,v)}(u_0,v_0)(x-x_0)+\frac{D(f_3,f_1)}{D(u,v)}(u_0,v_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}(u_0,v_0)(z-z_0)=0.$$

从而曲面 S 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{D(f_2,f_3)}{D(u,v)}(u_0,v_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{D(f_3,f_1)}{D(u,v)}(u_0,v_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}(u_0,v_0)}.$$

(3) 曲面的隐函数表示法: 考虑 $S: F(x,y,z)=0$.

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in S$, 而 F 在点 P_0 处可微. 则

当 $S\ni P(x,y,z)\to P_0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}0 &= F(x,y,z)-F(x_0,y_0,z_0)\\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y-y_0)\\ &\quad +\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z-z_0)+o(\|P-P_0\|).\end{aligned}$$

从而当 $J_F(P_0) \neq \vec{0}$ 时, 曲面在点 P_0 有切平面

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0.$$

于是曲面 S 在点 P_0 处的法向量为

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(P_0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(P_0) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \end{pmatrix} = \mathrm{grad} F(P_0),$$

相应的法线方程为 $\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}$.

换一种视点来处理上述情形. 设 F 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类且 $\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \neq 0$. 由隐函数定理知, 局部上我们有 $z = f(x, y)$. 于是在点 P_0 处的切平面方程为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}(x - x_0) - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0.$$

谢谢大家!