电磁场数值计算

邢庆子

Tel: 62781684(o), 13661226717

E-mail: xqz@tsinghua.edu.cn

清华大学工物系加速器实验室 刘卿楼**309**

上节内容

3.3 平行平面场中拉普拉斯方程与泊松方程的有限元方程组

3.3.1 有限元方程组的形成

3.3.2 强加边界条件的引入

3.3 平行平面场中拉普拉斯方程与泊松方程的有限元方程组

求泛函 **F(A)** 的极值函数，导出有限元方程组的过程分三步：

1）把在区域建立起的泛函划分为 N_e 个三角形单元上的泛函之和，表示为 $F(A)=\sum_{1}^{N_e} F^{(e)}(A)$ ；

2）利用线性插值求出 $A(x,y)$ 的线性插值函数，将各单元上的泛函化为多元函数的问题，即 $\sum_{1}^{N_e} F^{(e)}(A) \approx \sum_{1}^{N_e} F^{(e)}(\overline{A})$ ；

3）进一步把泛函求极值的问题 $\delta F(\overline{A})=0$ 化为多元函数求极值的问题：$\mathrm{d}F(\overline{A})=0$ 。

单元分析：

$$F^{(e)}\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^{(e)}\boldsymbol{A}^{(e)}-\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^{(e)}$$

A 写为 ***A'***
k 写为 ***K***
r 写为 ***R***

为了用总体编号来表示每个单元的泛函

总体编号：

$$F^{(e)}\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{(e)} \qquad \textbf{(3.82)}$$

总体合成：

$$F\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}$$

有限元方程组的形成： $\boxed{\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{R} = 0}$

引入强加边界条件：

$$F\left(\overline{A}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{1} \\ \boldsymbol{R}_{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \\ \vdots \\ A_{N_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{R}_{1} - \boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{d} \end{cases}}$$

课内自学内容：（新版书 P92~101）

3.7 有限元法计算实例

3.8.1 有限元素的自动剖分
——直线内插法

3.7 有限元法计算实例

重点了解解题步骤。

勘误表：

	误	正
P94 三角形编号为8的一行	$K_{6,5}$	$K_{6,15}$
P95 三角形编号为14的一行	c_0	c_9
P95 三角形编号为16的一行	$K_{5,4}$	$K_{5,12}$
P95 三角形编号为17的一行	$K_{12,14}$	$K_{12,12}$

● 解题步骤

1. 数据输入，包括：

（**1**）节点编号；

（**2**）单元编号；

（**3**）节点坐标；

（**4**）三角形单元的顶点按逆时针顺序编号；

（**5**）强加边界节点编号及该点位函数。

2. 单元分析

计算 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，Δ，求出单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{st}^{(e)}$，并进行总体合成。

3. 列出系数矩阵，按边界条件修正线性方程组。

4. 用有效的方法解线性方程组。

5. 解题框图。

开始

定义数组

输入原始数据，包括：

1)几何参数，场域描述；

2)网格参数，单元节点编号、坐标

3)物理参数，如J、 γ等。

0 => K, R

按 e=1 到 N_e 循环

对于$e(i,j,m)$计算b，c， Δ

计算并形成 K，R，

对于 s，t=i, j, m

$$K_{st}+\frac{1}{4\mu\Delta}\left(b_s b_t+c_s c_t\right)\Rightarrow K_{st}$$

$$R_s+R_s^{(e)}\Rightarrow R_s$$

按边界条件修正 K, R

解方程组

$$K_{11}A_{\mathrm{I}}=R_{\mathrm{I}}-K_{12}d$$

按 e=1 到 N_e 循环

由A求B

结束

有限元法计算框图

3.8 有限单元的自动剖分

（1）自动剖分的必要性；

（2）剖分要注意的问题；

（3）平面域内，自动剖分单元的方法。

3.8.1 直线内插法

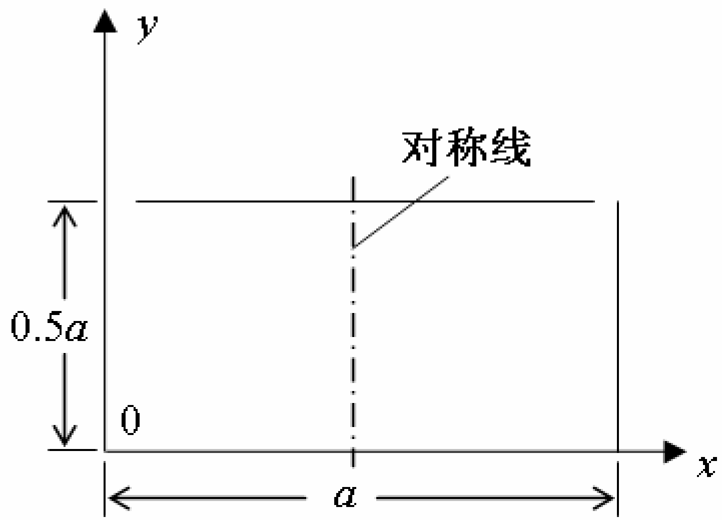
直线内插法：什么情况下适用？

直线内插法的具体步骤？

对于 **a** 类三角形 ◤与 **b** 类三角形◢，单元与节点编号公式？

手算练习：长直接地金属槽中的电场。

设长直接地金属槽横截面如图所示，其侧壁与底面电位均为零，顶盖电位为**10V**，求 Φ。



（一）利用槽对称性计算一半，槽内电位分布 $\Phi(x, y)$ 满足拉普拉斯方程： $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$ 。

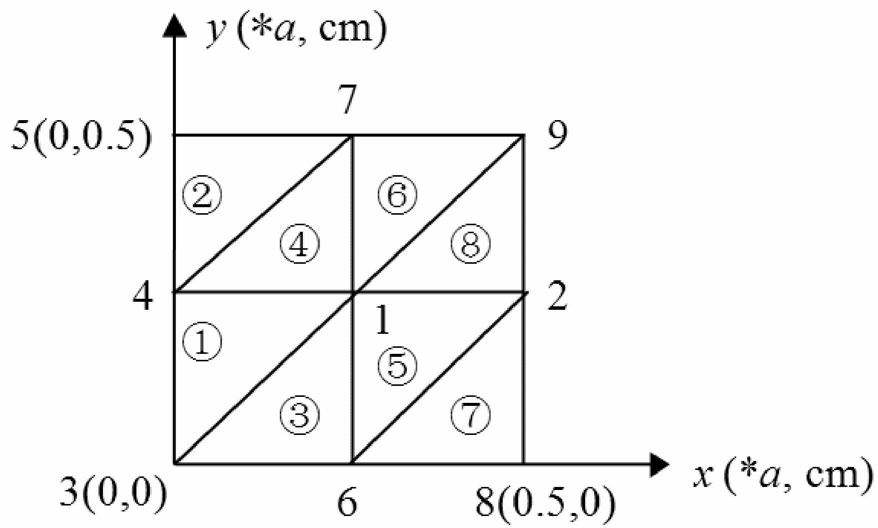
$$\Phi\Big|_{\left(\substack{x=0\\0\le y\le 0.5a}\right)}=\Phi\Big|_{\left(\substack{0\le x\le 0.5a\\y=0}\right)}=0 \quad \Phi\Big|_{\left(\substack{0<x\le 0.5a\\y=0.5a}\right)}=10 \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Bigg|_{\left(\substack{x=0.5a\\0<y<0.5a}\right)}=0$$

（二）等价变分问题：

$$F(\boldsymbol{\Phi})=\iint_{D/2}\frac{\varepsilon}{2}\left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\min$$

$$\boldsymbol{\Phi}\Big|_{\begin{pmatrix}x=0\\0\le y\le 0.5a\end{pmatrix}}=\boldsymbol{\Phi}\Big|_{\begin{pmatrix}0<x\le 0.5a\\y=0\end{pmatrix}}=0$$

$$\boldsymbol{\Phi}\Big|_{\begin{pmatrix}0<x\le 0.5a\\y=0.5a\end{pmatrix}}=10$$



（三）剖分，如图所示：

给出下列信息：

节点总数 N_p=9，强加边界条件节点数 N_p-N=7，三角形单元 N_e=8。

1） 节点坐标： 1(0.25,0.25), 2(0.5,0.25), 3(0,0)

4(0,0.25), 5(0,0.5), 6(0.25,0)

7 (0.25,0.5), 8(0.5,0), 9(0.5,0.5)

2） 三角元 **e** 三顶点编号 **e (i,j,m)**：

①（3, 1, 4），②（4, 7, 5），③（3, 6, 1），④（4, 1, 7）

⑤（6, 2, 1），⑥（1, 9, 7），⑦（6, 8, 2），⑧（1, 2, 9）

3） 强加边界条件对应节点编号与其上电位值：

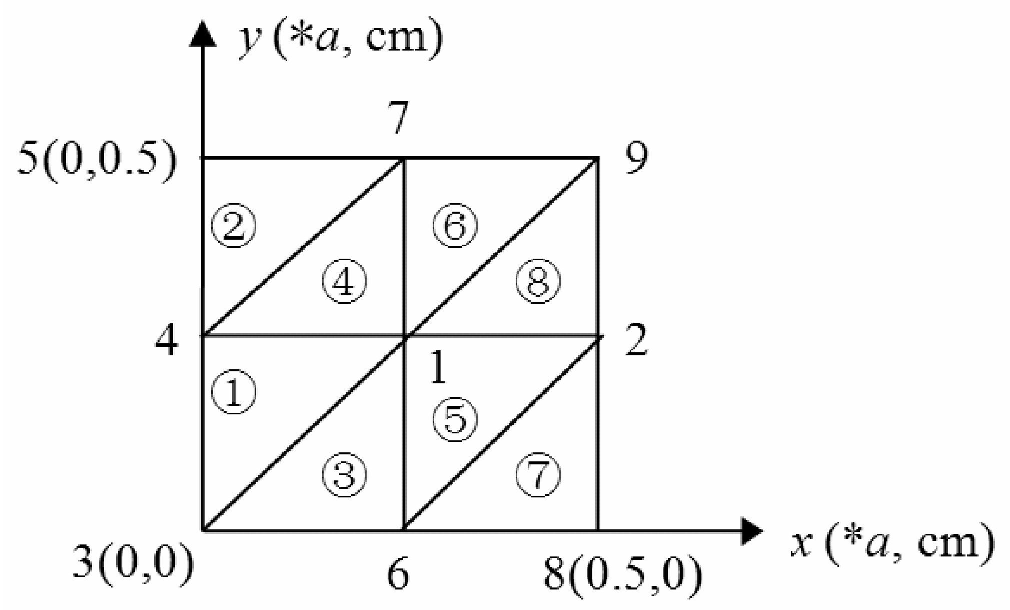
（3, 0），（4, 0），（5, 0），（6, 0），（7, 10），（8, 0），（9, 10）

（四）构成有限元方程组：

（五）构成求解方程组，求出

1、2节点处待求数值解：

Φ_1=?， Φ_2=?



- **上机题（最晚第16周周五（1月5日）交）**

习题 3.6：

在自学基础上编程解 3.6 题。(3.6(9)网格自动剖分法不用做)

习题 3.7：用有限元方法计算第 2 章习题 2.3 。

提示：**2.3(1)、(2) 、(3)**题取节点间隔为**1**。（**(1)、(2)**题可取计算区域**10×6**，共**11×7＝77**个节点）

节点统一编号：P

节点坐标矩阵：$\mathbf{Z}\,(P,1) - x_p$； $\mathbf{Z}\,(P,2) - y_p$

三角形三顶点全局编号：$\mathbf{E} = (\,i_0, j_0, m_0;\ \ i_1, j_1, m_1; \ldots\ldots)$