

微积分 A (2)

姚家燕

第 8 讲

在听课过程中，
严禁使用与教学无关的电子产品！

第 7 讲回顾: 反函数定理

假设 $X = \vec{g}(Y)$ 为 $\mathcal{C}^{(1)}$ 类使得 $X_0 = \vec{g}(Y_0)$
且 $J_{\vec{g}}(Y_0)$ 可逆. 则局部上存在 $\mathcal{C}^{(1)}$ 反函数
 $Y = \vec{f}(X)$, 并且 $J_{\vec{f}}(X) = (J_{\vec{g}}(\vec{f}(X)))^{-1}$, 即

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(X) = \left(\frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}(\vec{f}(X)) \right)^{-1}.$$

回顾：曲面的切平面与法线

- 平面与直线的各种表示方程.
- 平面与法线, 直线与法平面的关系.
- $S : z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

相应的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

- $S : \begin{cases} x = f_1(u, v) \\ y = f_2(u, v) \\ z = f_3(u, v) \end{cases}$ 在参数 (u_0, v_0) 所对应的点处的切平面的参数方程为:

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix},$$

该切平面也可以表示成:

$$\begin{aligned} \frac{D(f_2, f_3)}{D(u, v)}(u_0, v_0)(x - x_0) + \frac{D(f_3, f_1)}{D(u, v)}(u_0, v_0)(y - y_0) \\ + \frac{D(f_1, f_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0)(z - z_0) = 0, \end{aligned}$$

法线方程为
$$\frac{x - x_0}{\frac{D(f_2, f_3)}{D(u, v)}(u_0, v_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{D(f_3, f_1)}{D(u, v)}(u_0, v_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{D(f_1, f_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0)}.$$

- $S : F(x, y, z) = 0$ 在点 P_0 处的法向量为

梯度 $\text{grad}F(P_0)$, 相应的切平面方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0,$$

上述切平面的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}.$$

第 8 讲

例 1. 设曲面 S 的参数方程为

$$\begin{cases} x = u + e^{u+v}, \\ y = u + v, \\ z = e^{u-v}. \end{cases}$$

求 S 在 $u_0 = 1, v_0 = -1$ 处的切平面与法线.

解: 由题设可知

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 + e^{u+v} & e^{u+v} \\ 1 & 1 \\ e^{u-v} & -e^{u-v} \end{pmatrix}.$$

于是我们有

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(1, -1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ e^2 & -e^2 \end{pmatrix}.$$

由此立刻知矩阵 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(1, -1)}$ 的秩等于 2, 从而所求切平面的参数方程为

$$\begin{pmatrix} x - 2 \\ y \\ z - e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ e^2 & -e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - 1 \\ v + 1 \end{pmatrix}.$$

该切平面也可以表示成

$$-2e^2(x-2) + 3e^2y + (z-e^2) = 0.$$

进而可知所求法线方程为

$$\frac{x-2}{-2e^2} = \frac{y}{3e^2} = \frac{z-e^2}{1}.$$

作业题: 第 1.7 节第 78 页第 1 题第 (1), (3), (6) 小题, 其中第 (3) 中假设 $a > 0$, 第 2, 3 题.

例 2. 若两曲面在交线上每点的法线互相垂直, 则称二者正交. 求证: 曲面 $S_1: F_1(x, y, z) = 0$ 和曲面 $S_2: F_2(x, y, z) = 0$ 正交的充分必要条件是对于交线上的每点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 均有

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0.$$

证明: 在上述两曲面的交点 P_0 , 它们的法向量分别为 $\text{grad}F_1(P_0)$, $\text{grad}F_2(P_0)$, 二者正交当且仅当 $\text{grad}F_1(P_0) \cdot \text{grad}F_2(P_0) = 0$. 由此得证.

例 3. 求证: 球面 $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与锥面 $S_2 : x^2 + y^2 = a^2 z^2$ 正交.

证明: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, 定义

$$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2,$$

$$F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - a^2 z^2.$$

于是 $\forall P(x, y, z) \in S_1 \cap S_2$, 我们有

$$\begin{aligned} & \text{grad} F_1(P) \cdot \text{grad} F_2(P) \\ &= (2x) \cdot (2x) + (2y) \cdot (2y) + (2z) \cdot (-2a^2 z) \\ &= 4(x^2 + y^2 - a^2 z^2) = 4F_2(P) = 0. \end{aligned}$$

故所证结论成立.

空间曲线及其切线和法平面

(1) 空间曲线的参数表示法:

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

若上述函数在点 $t = t_0$ 处可微, 则称曲线 Γ 在相应点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微, 相应切线方程为

$$\begin{cases} x - x_0 = x'(t_0)(t - t_0), \\ y - y_0 = y'(t_0)(t - t_0), \\ z - z_0 = z'(t_0)(t - t_0). \end{cases}$$

该切线也可表述成

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

这里需要假设 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 不为零向量. 我们将经过点 P_0 并且与上述切线垂直的平面称为 Γ 在点 P_0 处的法平面, 其方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

(2) 空间曲线的隐函数表示法:

$$\Gamma: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

设 F_1, F_2 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 可微且 $\text{grad}F_1(P_0)$, $\text{grad}F_2(P_0)$ 不为零, 则曲线 Γ 在该点的切线为

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

该切线的方向为

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \text{grad}F_1(P_0) \times \text{grad}F_2(P_0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(P_0) \\ \frac{\partial F_1}{\partial y}(P_0) \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(P_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial x}(P_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(P_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(P_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}(P_0) \\ \frac{D(F_1, F_2)}{D(z, x)}(P_0) \\ \frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}(P_0) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

只有当 $\vec{T} \neq \vec{0}$ 时, 上述方程组才的确给出一条直线. 此时 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y, z)}(P_0)$ 的秩等于 2. 借助 \vec{T} , 我们也可得到切线的另外一个表述:

$$\frac{x - x_0}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(z, x)}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}(P_0)}.$$

例 4. 求曲线

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ F_2(x, y, z) = xy - z = 0 \end{cases}$$

在点 $P_0(1, 2, 2)$ 处的切线方程与法平面方程.

解: 由题设可知

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y, z)}(P_0) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ y & x & -1 \end{pmatrix} \Big|_{P_0} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

于是所求切线的方程为

$$\begin{cases} 2(x - 1) + 4(y - 2) + 4(z - 2) = 0, \\ 2(x - 1) + (y - 2) - (z - 2) = 0. \end{cases}$$

进而可知所求切线的方向为

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

于是所求切线的方程为 $\frac{x-1}{-8} = \frac{y-2}{10} = \frac{z-2}{-6}$, 相应法平面方程为

$$-8(x-1) + 10(y-2) - 6(z-2) = 0.$$

作业题: 第 1.7 节第 79 页第 5 题, 第 6 题.

§8. Taylor 公式

回顾: 我们称函数 $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为双线性型, 如果 $\forall X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n$, 函数 $Y \rightarrow F(X_0, Y)$ 和函数 $X \rightarrow F(X, Y_0)$ 均为 \mathbb{R}^n 上的线性函数.

记 $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$. 则

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= F\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, Y\right) = \sum_{i=1}^n x_i F(\mathbf{e}_i, Y) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i F\left(\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \end{aligned}$$

令 $a_{ij} = F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, 则

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (AY)_i \\ &= X^T AY. \end{aligned}$$

定理 1. 设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $f \in \mathcal{C}^{(2)}(B(X_0, r))$.
则 $\forall X \in B(X_0, r)$, $\exists \theta \in (0, 1)$ 使得

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)(x_j - x_j^{(0)}) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_\theta)(x_i - x_i^{(0)})(x_j - x_j^{(0)}) \\ &= f(X_0) + J_f(X_0) \Delta X + \frac{1}{2!} (\Delta X)^T H_f(X_\theta) \Delta X, \end{aligned}$$

其中 $H_f(X_\theta) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_\theta) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ 为 f 在点 X_θ 的海赛矩阵, $\Delta X = X - X_0$, $X_\theta = X_0 + \theta(X - X_0)$.

证明: 固定 $X \in B_0(X_0, r)$. $\forall t \in [0, 1]$, 定义

$$F(t) = f(X_0 + t(X - X_0)).$$

由于 f 为二阶连续可导, 则由复合法则可知 F 亦如此, 进而由单变量函数带 Lagrange 余项的 Taylor 展式可知, $\exists \theta \in (0, 1)$ 使得

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(\theta).$$

$\forall t \in [0, 1]$, 令 $X_t = X_0 + t(X - X_0)$.

由题设可知 $F(0) = f(X_0)$, $F(1) = f(X)$, 并且

$$F'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_t)(x_j - x_j^{(0)}) = J_f(X_t)(X - X_0).$$

$$\begin{aligned} F''(t) &= \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^{(0)}) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_t) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^{(0)}) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(X_t) \cdot (x_i - x_i^{(0)}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t) \cdot (x_i - x_i^{(0)})(x_j - x_j^{(0)}). \end{aligned}$$

令 $\Delta X = X - X_0$. 则我们有

$$\begin{aligned} F(1) &= F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!} F''(\theta) \\ &= f(X_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)(x_j - x_j^{(0)}) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_\theta) \cdot (x_i - x_i^{(0)})(x_j - x_j^{(0)}) \\ &= f(X_0) + J_f(X_0) \Delta X + \frac{1}{2!} (\Delta X)^T H_f(X_\theta) \Delta X. \end{aligned}$$

故所证结论成立.

评注

- 该式为带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展式.
- 由于 f 为 $\mathcal{C}^{(2)}$ 类, 则 H_f 连续. 由夹逼原理与复合极限法则知, 当 $X \rightarrow X_0$ 时, 我们有

$$H_f(X_0 + \theta(X - X_0)) = H_f(X_0) + \vec{o}(1).$$

进而可得带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式:

$$\begin{aligned} f(X) = & f(X_0) + J_f(X_0) \Delta X \\ & + \frac{1}{2!} (\Delta X)^T H_f(X_0) \Delta X + o(\|\Delta X\|^2). \end{aligned}$$

- $H_f(X) = J_{\text{grad}f}(X)$.
- 更一般地, 若 f 为 $\mathcal{C}^{(m+1)}$ 类, 则有

$$f(X) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k f(X_0) \\ + \frac{1}{(m+1)!} \left(\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{m+1} f(X_\theta),$$

其中 $\theta \in (0, 1)$, 并且 $X_\theta = X_0 + \theta(X - X_0)$.

人们通常将 $\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k f(X_0)$

称为 f 在点 X_0 处的 m 阶 Taylor 多项式.

例 1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 令 $f(x, y) = \sin(x + y)$. 求 f 在 origin 处一阶的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式以及二阶的带 Peano 余项的 Taylor 公式.

解: 由于 f 为初等函数, 故二阶连续可导且

$$\begin{aligned} J_f(x, y) &= (\cos(x + y), \cos(x + y)), \\ H_f(x, y) &= \begin{pmatrix} -\sin(x + y) & -\sin(x + y) \\ -\sin(x + y) & -\sin(x + y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

于是 $J_f(0, 0) = (1, 1)$, $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

则所求一阶带 Lagrange 余项的 Taylor 公式为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y + \frac{1}{2}(x, y)H_f(\theta x, \theta y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= x + y - \frac{1}{2}(x + y)^2 \sin(\theta(x + y)), \quad \theta \in (0, 1). \end{aligned}$$

而所求二阶带 Peano 余项的 Taylor 公式为

$$f(x, y) = x + y + o(x^2 + y^2), \quad (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

作业题: 第 1.8 节第 81 页第 1 第 (2) 小题, 题目改为求“一阶带 Lagrange 余项和二阶带 Peano 余项的 Taylor 公式”.

§9. 极值与条件极值

定义 1. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_0 \in \Omega$, 而 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

- 如果 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0, r) \subseteq \Omega$, 均有 $f(X) \geq f(X_0)$, 那么称点 X_0 为 f 的 (局部) 极小值点, 而称 $f(X_0)$ 为 (局部) 极小值.
- 如果 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0, r) \subseteq \Omega$, 均有 $f(X) \leq f(X_0)$, 那么称点 X_0 为 f 的 (局部) 极大值点, 而称 $f(X_0)$ 为 (局部) 极大值.
- 极小值点和极大值点合称极值点.

- 若 $\forall X \in \Omega$, 均有 $f(X) \geq f(X_0)$, 则称点 X_0 为 f 的最小值点, 而称 $f(X_0)$ 为最小值.
- 若 $\forall X \in \Omega$, 均有 $f(X) \leq f(X_0)$, 则称点 X_0 为 f 的最大值点, 而称 $f(X_0)$ 为最大值.
- 最小值点和最大值点合称最值点.

注: 极值点不一定是最值点, 而最值点也不一定是极值点. 若最值点为内点, 则它为极值点.

定理 1. 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, X_0 为 Ω 的内点, 而函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 在该点可导. 若 X_0 为 f 的极值点, 则 $J_f(X_0) = \vec{0}$, 即 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) = 0$ ($1 \leq j \leq n$).

证明: 由于 X_0 为 Ω 的内点, 于是 $\exists r > 0$ 使得 $B(X_0, r) \subset \Omega$. 对任意整数 $1 \leq j \leq n$, 设 \vec{e}_j 为沿第 j 个坐标轴正向的单位向量. $\forall t \in (-r, r)$, 定义 $F(t) = f(X_0 + t\vec{e}_j)$. 则由题设可知函数 F 在点 $t = 0$ 处可导, 并且 F 还在该点处取极值, 从而由 Fermat 定理可知 $0 = F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$.

评注

- 若 $J_f(X_0) = \vec{0}$, 则称点 X_0 为函数 f 的驻点. 由上述定理可知, 若 f 在点 X_0 处可导且取极值, 则该点为 f 的驻点, 但反过来不成立.
- 利用类似的方法可以证明, 多变量函数也有与单变量函数一样的微分中值定理. 下面来介绍高维的 Rolle 定理.

定理 2. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为有界开区域, 而 $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ 在 Ω 内可微并且在 $\partial\Omega$ 上取常值, 则 f 在 Ω 内必有驻点, 也即 $\exists \xi \in \Omega$ 使得 $J_f(\xi) = \vec{0}$.

证明: 如果 f 在 $\bar{\Omega}$ 上为常值函数, 则 f 在 Ω 内也会为常值函数, 从而 $\forall \xi \in \Omega$, 均有 $J_f(\xi) = \vec{0}$. 现在假设 f 不为常值函数. 由于 $\bar{\Omega}$ 为有界闭集且 $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, 则 f 在 $\bar{\Omega}$ 上有最大值和最小值, 但 f 在 $\partial\Omega$ 上取常值, 故必有最值点 (记作 ξ) 属于 Ω , 该点也为 f 的极值点, 则 $J_f(\xi) = \vec{0}$.

回顾: 设 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ 为实对称矩阵, 特征根为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, 则存在正交矩阵 B 使得

$$A = B^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} B.$$

$\forall X \in \mathbb{R}^n$, 记 $BX = (y_1, \dots, y_n)^T$. 则

$$\begin{aligned} X^T A X &= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 \geq \lambda_1 \|Y\|^2 = \lambda_1 Y^T Y \\ &= \lambda_1 X^T B^T B X = \lambda_1 X^T X = \lambda_1 \|X\|^2. \end{aligned}$$

同理可以证明 $X^T A X \leq \lambda_n \|X\|^2$.

- 称矩阵 A 为正定, 如果 $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, 我们均有 $X^T A X > 0$, 这等价于说 $\lambda_1 > 0$, 进而也等价于说 A 的所有主子式均 > 0 .
- 称矩阵 A 为负定, 如果 $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, 我们均有 $X^T A X < 0$, 这等价于说 $\lambda_n < 0$, 进而等价于说 A 的所有偶数主子式严格大于零, 而奇数阶主子式严格小于零.

- 称矩阵 A 半正定, 如果 $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, 均有 $X^T A X \geq 0$ 且等号可在某 $X_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ 处达到, 而这又等价于说 $\lambda_1 = 0$.
- 称矩阵 A 半负定, 如果 $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, 均有 $X^T A X \leq 0$ 且等号可在某 $X_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ 处达到, 而这又等价于说 $\lambda_n = 0$.
- 称矩阵 A 不定, 若它不属于上述的四种情形, 即 $\exists Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^n$ 使 $Y_1^T A Y_1 < 0$, $Y_2^T A Y_2 > 0$, 而这又等价于说 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_n > 0$.

判断实对称矩阵定性的基本方法

计算其特征值, 根据其特征值的符号来判断:

- (1) 正定当且仅当所有特征值均 > 0 ;
- (2) 负定当且仅当所有特征值均 < 0 ;
- (3) 半正定当且仅当所有特征值均 ≥ 0 且至少有一个为零;
- (4) 半负定当且仅当所有特征值均 ≤ 0 且至少有一个为零;
- (5) 不定当且仅当既有正特征值也有负特征值.

定理 3. 设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 而 $f: B(X_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ 为二阶连续可微且 $J_f(X_0) = \vec{0}$.

(1) 若 $H_f(X_0)$ 正定, 则 X_0 为 f 的极小值点.

(2) 若 $H_f(X_0)$ 负定, 则 X_0 为 f 的极大值点.

证明: (1) 由 Taylor 公式可知, 当 $\Delta X \rightarrow \vec{0}$ 时,

$$\begin{aligned} f(X_0 + \Delta X) &= f(X_0) + J_f(X_0) \Delta X \\ &\quad + \frac{1}{2!} (\Delta X)^T H_f(X_0) \Delta X + o(\|\Delta X\|^2). \end{aligned}$$

设 λ 为 $H_f(X_0)$ 的最小特征值. 则由 $H_f(X_0)$ 的正定性可知 $\lambda > 0$. 于是我们有

$$\begin{aligned} & f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) \\ &= \frac{1}{2!}(\Delta X)^T H_f(X_0) \Delta X + o(\|\Delta X\|^2) \\ &\geq \frac{\lambda}{2} \|\Delta X\|^2 + o(\|\Delta X\|^2) \\ &= \left(\frac{\lambda}{2} + o(1)\right) \|\Delta X\|^2. \end{aligned}$$

因 $\lim_{\Delta X \rightarrow \vec{0}} o(1) = 0$, 则 $\exists \delta \in (0, r)$ 使 $\forall X \in B(X_0, \delta)$,

$$\begin{aligned} f(X) - f(X_0) &\geq \left(\frac{\lambda}{2} + o(1)\right) \|X - X_0\|^2 \\ &\geq \frac{\lambda}{4} \|X - X_0\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

故 X_0 为函数 f 的 (严格) 极小值点.

(2) 如果 $H_f(X_0)$ 为负定, 那么 $H_{-f}(X_0)$ 为正定, 故 X_0 为 $-f$ 的极小值点, 即为 f 的极大值点.

评注

- 如果海赛矩阵 $H_f(X_0)$ 为半正定或者半负定, 我们一般无法判断点 X_0 是否为 f 的极值点. 为此考虑单变量函数 $f(x) = x^3$, 我们有

$$f'(0) = f''(0) = 0,$$

但 0 不是 f 的极值点. 而 $g(x) = x^4$ 也满足 $g'(0) = g''(0) = 0$ 且 0 为 g 的极小值点.

- 如果 $H_f(X_0)$ 为不定, 则 $\exists Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$Y_1^T H_f(X_0) Y_1 < 0, \quad Y_2^T H_f(X_0) Y_2 > 0.$$

于是当 $t \rightarrow 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} & f(X_0 + tY_1) - f(X_0) \\ &= \frac{1}{2} Y_1^T H_f(X_0) Y_1 t^2 + o(t^2) \\ &= \left(\frac{1}{2} Y_1^T H_f(X_0) Y_1 + o(1) \right) t^2 < 0. \end{aligned}$$

当 $t \rightarrow 0$ 时, 我们同样也有

$$\begin{aligned} & f(X_0 + tY_2) - f(X_0) \\ &= \frac{1}{2}Y_2^T H_f(X_0)Y_2 t^2 + o(t^2) \\ &= \left(\frac{1}{2}Y_2^T H_f(X_0)Y_2 + o(1)\right)t^2 \\ &> 0, \end{aligned}$$

由此可知 X_0 不是 f 的极值点.

判断二阶连续可导函数极值点的方法

- 求一阶偏导数, 确定驻点.
- 求二阶偏导数以便得到海赛矩阵.
- 判断海赛矩阵在驻点处的性态:

正定则为极小值点; 负定则为极大值点; 不定则不为极值点; 半正定或半负定则需要采用另外的方法来处理.

例 1. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, 定义

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy + 2z.$$

求 f 的极值点.

解: 由于 f 为初等函数, 故 f 为 $\mathcal{C}^{(2)}$ 类且

$$J_f(x, y, z) = (3x^2 + 6y, 2y + 6x, 2z + 2).$$

于是函数 f 的驻点满足:

$$3x^2 + 6y = 0, \quad 2y + 6x = 0, \quad 2z + 2 = 0,$$

由此求得驻点为

$$P_1 = (6, -18, -1), P_2 = (0, 0, -1).$$

又函数 f 的海赛矩阵为

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

于是我们有

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 36 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

因为 $H_f(P_1)$ 的主子式均 > 0 , 故 $H_f(P_1)$ 正定, 从而 P_1 为函数 f 的极小值点. 由于 $H_f(P_2)$ 的特征多项式为

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & -6 & 0 \\ -6 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 36),$$

于是 $H_f(P_2)$ 的特征根为 $2, 1 + \sqrt{37}, 1 - \sqrt{37}$, 故 $H_f(P_2)$ 为不定, 从而 P_2 不是 f 的极值点.

作业题: 第 1.9 节第 93 页第 1 题第 (2), (4) 题

例 2. 设隐函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$$

确定, 求其极值点.

解: 由隐函数定理可知, $z(x, y)$ 的驻点满足

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{4x + 8z}{2z + 8x - 1},$$
$$0 = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{4y}{2z + 8x - 1}.$$

于是 $y = 0$, $x = -2z$. 带入隐函数方程可得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{16}{7} \\ y_1 = 0 \\ z_1 = -\frac{8}{7} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 0 \\ z_2 = 1 \end{cases}.$$

在驻点处, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{4x + 8z}{2z + 8x - 1} \right) \\ &= -\frac{4(2z + 8x - 1) - 8(4x + 8z)}{(2z + 8x - 1)^2} = \frac{4}{14z + 1}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{4x + 8z}{2z + 8x - 1} \right) = 0.$$

同样我们也有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{4y}{2z + 8x - 1} \right) = -\frac{4}{2z + 8x - 1} = \frac{4}{14z + 1}.$$

由此立刻可得

$$H_z\left(\frac{16}{7}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{15} \end{pmatrix}, \quad H_z(-2, 0) = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} \end{pmatrix}.$$

则 $(\frac{16}{7}, 0)$ 为极大值点, 而 $(-2, 0)$ 为极小值点.

作业题: 求由方程 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{2}{3}z = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的极值.

例 3. 假设 $D = [-a, a] \times [-b, b]$, 其中 $a, b > 0$. 若 $f \in \mathcal{C}^{(2)}(D)$ 使得 $\forall (x, y) \in \text{Int}D$, 我们均有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \neq 0,$$

求证: 函数 f 在 D 上有最值且其最值点属于 ∂D .

证明: 由于 D 为有界闭集, 而且 f 为连续函数, 于是由最值定理可知 f 在 D 上有最值. 反证法, 假设函数 f 在 D 上的最值点 P_0 位于 D 的内部,

则该点也为函数 f 的极值点. 但由题设可知

$$\begin{aligned}\det H_f(P_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \right)^2 < 0,\end{aligned}$$

于是海赛矩阵 $H_f(P_0)$ 为不定矩阵, 从而点 P_0 不是 f 的极值点, 矛盾! 因此所证结论成立.

回顾: 假设 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ 为实对称矩阵, 它的特征根为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

- 称矩阵 A 正定或半正定, 若 $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, 均有 $X^T A X \geq 0$, 而这又等价于说 $\lambda_1 \geq 0$.
- 称矩阵 A 负定或半负定, 若 $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, 均有 $X^T A X \leq 0$, 而这又等价于说 $\lambda_n \leq 0$.

例 4. 设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 而 $f : B(X_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ 为二阶连续可微函数.

(1) 若 X_0 为 f 的极小值点, 则 $H_f(X_0)$ 为正定或半正定.

(2) 若 X_0 为 f 的极大值点, 则 $H_f(X_0)$ 为负定或半负定.

证明: **(1)** 由于 X_0 为函数 f 的极小值点, 于是我们就有 $J_f(X_0) = \vec{0}$. 固定向量 $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. 由带 Peano 余项的 Taylor 公式可知, 当 $t \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} f(X_0 + tX) &= f(X_0) + J_f(X_0)tX \\ &\quad + \frac{1}{2!}X^T H_f(X_0)X \cdot t^2 + o(\|tX\|^2). \end{aligned}$$

注意到 $f(X_0 + tX) \geq f(X_0)$, 于是我们有

$$0 \leq \frac{1}{2!} X^T H_f(X_0) X \cdot t^2 + t^2 o(1).$$

进而可得知 $0 \leq X^T H_f(X_0) X$. 这表明 $H_f(X_0)$ 为正定或半正定.

(2) 如果 X_0 为 f 的极大值点, 那么它为 $-f$ 的极小值点, 从而 $H_{-f}(X_0)$ 为正定或者为半正定, 故 $H_f(X_0)$ 为负定或半负定.

例 5. 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 而且函数 $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ 在 D 上为连续且在 D 的内部为二阶连续可导. 若 $\forall (x, y) \in \text{Int}D$, 均有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = u(x, y),$$

并且 $\forall (x, y) \in \partial D$, 成立 $u(x, y) \geq 0$. 求证:

$$\forall (x, y) \in D, \text{ 均有 } u(x, y) \geq 0.$$

证明: 用反证法, 假设函数 u 在 D 上不为非负, 由题设可得 u 在 $\text{Int}D$ 上不为非负. 又 u 连续而且 D 为有界闭集, 于是 u 在 D 上有最小值. 将相应的最小值点记作 P_0 . 由于 u 在 ∂D 上为非负但在 $\text{Int}D$ 上却不为非负, 于是 $P_0 \in \text{Int}D$ 并且 $u(P_0) < 0$, 从而 P_0 为 u 的极小值点, 由此立刻可得知海赛矩阵 $H_u(P_0)$ 为正定或半正定.

进而我们就有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_0) = (1, 0)H_u(P_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_0) = (0, 1)H_u(P_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0.$$

但由题设又可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_0) = u(P_0) < 0,$$

矛盾! 故所证结论成立.

例 6. 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 而且函数 $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ 在 D 上为连续且在 D 的内部为二阶连续可导. 若 $\forall (x, y) \in \text{Int}D$, 均有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = u(x, y),$$

并且 $\forall (x, y) \in \partial D$, 成立 $u(x, y) > 0$. 求证:

$$\forall (x, y) \in D, \text{ 均有 } u(x, y) > 0.$$

证明: 由于 u 为连续函数而且 ∂D 为有界闭集, 则 u 在 ∂D 上有最小值, 设为 m , 于是 $m > 0$. $\forall (x, y) \in D$, 现定义 $v(x, y) = u(x, y) - \frac{m(e^x + e^y)}{2e}$, 则 v 在 D 上连续, 在 D 的内部二阶连续可导且使得 $\forall (x, y) \in \text{Int} D$, 我们均有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = v(x, y).$$

另外, $\forall (x, y) \in \partial D$, 我们还有

$$v(x, y) \geq m - \frac{m(e^x + e^y)}{2e} \geq 0.$$

下面来证明 v 在 D 上非负. 用反证法, 假设 v 在 D 上不为非负, 那么 v 在 $\text{Int}D$ 上不为非负. 又 v 为连续而 D 为有界闭集, 于是 v 在 D 上有最小值. 将相应的最小值点记作 P_0 . 由于 v 在 ∂D 上为非负, 但是在 $\text{Int}D$ 上却不为非负, 于是 $P_0 \in \text{Int}D$ 且 $v(P_0) < 0$, 从而 P_0 为 v 的极小值点, 故海赛矩阵 $H_v(P_0)$ 正定或半正定.

于是我们就有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(P_0) = (1, 0)H_v(P_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(P_0) = (0, 1)H_v(P_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0.$$

但我们有 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(P_0) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(P_0) = v(P_0) < 0$, 矛盾!

由此可知 $\forall (x, y) \in D$, 我们均有

$$u(x, y) = v(x, y) + \frac{m(e^x + e^y)}{2e} \geq \frac{m(e^x + e^y)}{2e} > 0,$$

因此所证结论成立.

谢谢大家!