1. 考虑模p域F_p中的3×3矩阵$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$的行列式。在$p$等于多少的时候矩阵不可逆?

2. 在模7域（F_7）中解下列增广矩阵对应的线性方程组

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right] \tag{1}$$

3. 求下面矩阵的奇异值分解

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

4. A是$m\times n$矩阵，P是$m\times m$正交矩阵，Q是$n\times n$正交矩阵。证明：PAQ和A有同样的奇异值。

5. 下面矩阵是否可以正交对角化？如果可以，找到正交矩阵Q将它对角化

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

6. 给定二次型$f = x^\dagger Hx = 2|x_1|^2 + 2|x_2|^2 + \lambda|x_3|^2 + ix_1^\dagger x_2 - ix_2^\dagger x_1 + 3ix_1^\dagger x_3 - 3ix_1 x_3^\dagger$。写出厄米矩阵$H$并找出$\lambda$等于多少的时候，$H$是正定的。

7. 计算下面复矩阵的幂

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} & -1 \end{bmatrix}^n \tag{4}$$

8. $T:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$是一个线性映射。$V_\lambda$是$T$的特征值为$\lambda$的特征子空间，$\{v_1, \cdots, v_l\}$是$V_\lambda$的一组基。将这组基扩充成$\mathbb{C}^n$中的一组基。求$T$在这组基上的表示矩阵$M$。并且证明$l$小于等于特征值$\lambda$在$M$的代数重数。

9. 考虑所有$n\times n$矩阵构成的复线性空间$V = M_n(\mathbb{C})$，A, B是两个$n\times n$的复矩阵。映射$f: V\to V$是$f(M) = AMB$，其中$M\in V$。
   (a) 证明：f是一个线性映射
   (b) 选取V中的一组基，写下f在这组基中的表示矩阵
   (c) 求f的表示矩阵的迹和行列式

10. 分别写下$(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$张量的分量在换基下的变换公式。

11. $f: V\to V$是一个线性空间。定义映射$L_f: V^*\times V\to \mathbb{C}$为$L_f(g,u) = g(f(u))$。证明:

(a) L_f是一个双线性函数，也就是说$L_f \in V^* \otimes V$

(b) L可以看成从所有$V \to V$的线性映射的集合到$V^* \otimes V$的映射，L是线性的吗？是单射吗？是满射吗？

12. 考虑复线性空间V上的一个内积$< u, v >$。

(a) $\forall u \in V$，定义$f_u(v) =< u, v >$。证明：所有$\{f_u | u \in V\}$构成一个复线性空间，实际上这个线性空间就是V^*

(b) 考虑所有保持内积$< u, v >$不变的线性映射$L : V \to V$。证明：所有这些线性映射的集合构成一个群，群的乘法就是映射的复合

(c) 假设W是V的子空间，而且W在所有保持内积$< u, v >$不变的线性映射$L : V \to V$的作用下都是稳定的（$LW \subset W, \forall L$）。证明：$W^\perp$在所有L的作用下也是稳定的（$LW^\perp \subset W^\perp, \forall L$）

13. $\phi : G \to G'$是群同态。证明：

(a) $\phi(x) = \phi(y)$当且仅当$xy^{-1} \in \ker\phi$

(b) $\ker\phi$和$\mathrm{im}\phi$分别是G和G'的子群