微积分 A (2)

姚家燕

第 13 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

第 13 讲

第 2 章小结

1. 一致连续函数:

- 定义, 否定表述, 与连续函数的关系.
- 判别方法: 定义, 有界闭集上的连续函数.
- 否定性判别: 函数 f 在 Ω 上非一致连续当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及 Ω 中点列 $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty} \|X_k - Y_k\| = 0$, 但 $\forall k \geqslant 1$, 却有
$$|f(X_k) - f(Y_k)| \geqslant \varepsilon_0.$$
- 极限与极限次序可交换性.

2. 含参变量常义积分及其性质

- 极限与积分次序可交换性 (被积函数连续).
- 积分与积分次序可交换性 (被积函数连续).
- 求导与积分次序可交换性 (被积函数连续, 偏导函数连续).
- 变上、下限含参积分的导数 (被积函数连续, 偏导函数连续, 上、下限可导).

3. 广义含参变量积分及其性质

- 一致收敛的定义及准则: 定义, Cauchy 准则, Weierstrass 判别法, Abel-Dirichlet 判别法.
- 极限与积分可交换性: 被积函数连续, 广义含参变量积分一致收敛.
- 积分与积分可交换性: 被积函数连续, 广义含参变量积分一致收敛.
- 求导与积分可交换性: 被积函数连续, 广义含参变量积分收敛, 而关于参数的偏导函数连续且其广义含参变量积分一致收敛.

综合练习

例 1. 计算 $\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+xy)^{\frac{1}{y}}}$.

解: 方法 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0^+}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+xy)^{\frac{1}{y}}} &= \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(1+xy)}{(1+xy)^{\frac{1}{y}}} \\
&= \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{y}}(1+xy)^{1-\frac{1}{y}}\Big|_0^1 \\
&= \lim_{y\to 0^+}\frac{(1+y)^{1-\frac{1}{y}}-1}{y-1} \\
&= \lim_{y\to 0^+}\left(1-(1+y)e^{-\frac{\log(1+y)}{y}}\right) = 1-e^{-1}.
\end{aligned}$$

方法 2. $\forall (x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, 定义

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+xy)^{\frac{1}{y}}}, & \text{若 } y>0,\\ e^{-x}, & \text{若 } y=0,\end{cases}$$

则 F 连续. 由极限与积分次序可交换性可知

$$\begin{aligned}\lim_{y\to0^+}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+xy)^{\frac{1}{y}}} &= \lim_{y\to0^+}\int_0^1 F(x,y)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 F(x,0)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -e^{-x}\Big|_0^1=1-e^{-1}.\end{aligned}$$

例 2. 设$u\in\mathscr{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2)$ 使 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. $\forall y\in\mathbb{R}$, 令

$$f(y)=\int_0^{2\pi}\Big(\big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\big)^2-\big(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\big)^2\Big)\mathrm{d}x.$$

若 $\frac{\partial u}{\partial x}(x+2\pi,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x+2\pi,y)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$, 求证: 函数 f 为常值函数.

证明: 由于 $u\in\mathscr{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2)$, 则由求导与积分次序可交换性可知 f 连续可导且 $\forall y\in\mathbb{R}$, 我们有

$$f'(y)=2\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y)-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\Big)\mathrm{d}x.$$

注意到 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 于是我们有

$$
\begin{aligned}
f'(y) &= 2\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y)+\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\Big)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\Big)\mathrm{d}x \\
&= 2\frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,y)\frac{\partial u}{\partial y}(2\pi,y)-2\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)\frac{\partial u}{\partial y}(0,y).
\end{aligned}
$$

则由题设条件得 $f'(y)=0$, 故 f 为常值函数.

例 3. 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$, 其中 $b > a > 0$.

解: 由广义积分的定义, 我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

由 Dirichlet 判别准则知广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x}\,\mathrm{d}x$, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 于是由变量替换可得:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_1^{+\infty}\frac{\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^{+\infty}\frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y-\int_b^{+\infty}\frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y=\int_a^{b}\frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y.$$

又由积分与积分次序可交换性知

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\Big(\int_a^b\sin(xy)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b\Big(\int_0^1\sin(xy)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b\Big(\frac{-\cos(xy)}{y}\Big|_0^1\Big)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b\frac{1-\cos y}{y}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{1-\cos y}{y}\,\mathrm{d}y + \int_a^b \frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \log\frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

例 4. 假设 $0 < a < b$, 并且已知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解: 方法 1. 由题设可知

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \Big(\int_{a^2}^{b^2} e^{-yx^2}\,\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x.$$

又 $\forall y \in [a^2, b^2]$, 均有 $e^{-yx^2} \leqslant e^{-a^2x^2}$, 且有

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=ax} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}\Big(\frac{u}{a}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

收敛, 于是我们由 Weierstrass 比较法则可导出

广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-yx^2}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [a^2, b^2]$ 一致收敛,
从而由积分与积分次序可交换性可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \Big(\int_{a^2}^{b^2} e^{-yx^2}\,\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x \\
&= \int_{a^2}^{b^2} \Big(\int_0^{+\infty} e^{-yx^2}\,\mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y \\
&= \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}} \mathrm{d}y \\
&= \sqrt{\pi}\sqrt{y}\Big|_{a^2}^{b^2} \\
&= \sqrt{\pi}(b-a).
\end{aligned}
$$

方法 2. 由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}(-2a^2xe^{-a^2x^2}+2xb^2e^{-b^2x^2})=0.$$

于是由分部积分可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}(e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2})\,\mathrm{d}(-\frac{1}{x})$$

$$=-\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{-2a^2xe^{-a^2x^2}+2xb^2e^{-b^2x^2}}{x}\mathrm{d}x$$

$$=-2a\int_0^{+\infty}e^{-(ax)^2}\,\mathrm{d}(ax)+2b\int_0^{+\infty}e^{-(bx)^2}\,\mathrm{d}(bx)$$

$$=-2a\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}+2b\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}(b-a).$$

例 5. 设 $0 < a < b$, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos x \, \mathrm{d}x$.

解: 由题设立刻可知

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos x \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b e^{-ux} \cos x \, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x.$$

又 $\forall x \geqslant 0$ 以及 $\forall u \in [a, b]$, 均有 $|e^{-ux} \cos x| \leqslant e^{-ax}$, 而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \, \mathrm{d}x$ 收敛, 则由 Weierstrass 比较法则可知广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ux} \cos x \, \mathrm{d}x$ 关于 $u \in [a, b]$ 一致收敛, 进而由积分与积分次序可交换性得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos x \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \Big(\int_a^b e^{-ux} \cos x \,\mathrm{d}u \Big) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \Big(\int_0^{+\infty} e^{-ux} \cos x \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}u \\
&= \int_a^b \Big(\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\big(e^{-ux+ix}\big) \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}u \\
&= \int_a^b \Big(\mathrm{Re}\Big(\frac{e^{(i-u)x}}{i-u}\Big)\Big|_0^{+\infty} \Big) \,\mathrm{d}u \\
&= \int_a^b \Big(\frac{e^{-ux}(\sin x - u\cos x)}{1+u^2}\Big|_0^{+\infty} \Big) \,\mathrm{d}u \\
&= \int_a^b \frac{u \,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2} \log(1+u^2)\Big|_a^b = \frac{1}{2} \log \frac{1+b^2}{1+a^2}.
\end{aligned}
$$

例 6. 证明: 广义含参积分 $I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2y)}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in(0,+\infty)$ 非一致收敛, 但却为关于 y 的连续函数.

证明: $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\left|\int_n^{2n}\frac{\sin\frac{x^2}{8n^2}\pi}{x}\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{2n}\cdot n=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{8}>0,$$
$$\lim_{n\to+\infty}n=\lim_{n\to+\infty}2n=+\infty,$$

故含参积分 $I(y)$ 关于 $y\in(0,+\infty)$ 非一致收敛.
令 $b>a>0$. 因 $\frac{\sin(x^2y)}{x}$ 可延拓成 $[0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续函数, 则由极限与积分次序可交换性可知

函数 $I_1(y)=\int_0^1 \frac{\sin(x^2y)}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上连续. 另外, $\forall y\in[a,b]$ 以及 $\forall A>1$, 我们有

$$\left|\int_1^A x\sin(x^2y)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2y}|\cos y-\cos(A^2y)|\leqslant\frac{1}{a},$$

而 $\frac{1}{x^2}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致成立, 故 $I_2(y)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x^2y)}{x}\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致收敛, 由极限与积分次序可交换性知 $I_2(y)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $I=I_1+I_2$ 在 $[a,b]$ 上连续, 进而知 I 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

例 7. $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, 令 $f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{1-\cos x}$. 问函数 f 是否为一致连续?

解: 当 $x \to 0^+$ 时, 我们有

$$f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{1-\cos x} \sim \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} \sim 2,$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$. 若令 $f(0) = 2$, 则延拓后的函数 f 为有界闭集 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的连续函数, 从而为一致连续, 故 f 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上一致连续.

例 8. $\forall x \in (0,1]$, 定义 $f(x) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right)\sin\frac{1}{x}$. 问 f 是否为一致连续?

解: $\forall k \geqslant 1$, 定义 $x_k = \frac{1}{2k\pi}$, $y_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$. 则

$$f(x_k) = 0, \qquad f(y_k) = \frac{y_k + 2}{y_k + 1} > 1,$$

故 $|f(x_k) - f(y_k)| > 1$. 与此同时, 我们也有

$$\lim_{k \to +\infty} |x_k - y_k| = 0,$$

因此 f 在 $(0,1]$ 上不为一致连续.

例 9. 设 $n \geqslant 0$ 为整数. $\forall t > 0$, 计算

$$I_n(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2n} \, \mathrm{d}x.$$

解: 由变量替换可得

$$\begin{aligned}
I_n(t) &= \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2n} \, \mathrm{d}x \xlongequal{u=tx^2} \int_0^{+\infty} e^{-u} \Big(\frac{u}{t}\Big)^n \mathrm{d}\Big(\sqrt{\frac{u}{t}}\Big) \\
&= \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}-n} \int_0^{+\infty} u^{n-\frac{1}{2}} e^{-u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}-n} \Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}-n} \cdot \Big(n - 1 + \frac{1}{2}\Big) \cdots \frac{1}{2} \cdot \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) \\
&= \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} t^{\frac{1}{2}+n}} \cdot \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

例 10. 设 $n \geqslant 0$ 为整数. $\forall t > 0$, 定义

$$I_n(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2n}\, \mathrm{d}x.$$

(1) $\forall t_0 > 0$, 求证: 广义积分 $I_n(t)$ 关于 $t \in [t_0, +\infty)$ 一致收敛.

(2) 求证: I_n 在 $(0, +\infty)$ 上可导且 $\forall t > 0$, 均有

$$I_n'(t) = -I_{n+1}(t).$$

(3) 计算 $I_n(t)$.

解: (1) $\forall x \geqslant 0$ 以及 $\forall t \geqslant t_0$, 我们有

$$e^{-tx^2}x^{2n} \leqslant e^{-t_0x^2}x^{2n}.$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-t_0x^2}x^{2n}(1+x^2)=0$, 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 收敛, 于是由比较法则可知广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-t_0x^2}x^{2n}\,\mathrm{d}x$$

收敛, 进而由 Weierstrass 判别法可知广义含参积分 $I_n(t)$ 关于 $t \in [t_0, +\infty)$ 一致收敛.

(2) $\forall d > c > 0$, 由 (1) 可知 I_{n+1} 关于 $t \in [c, d]$ 一致收敛, 由此我们立刻可以导出

$$-I_{n+1}(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2(n+1)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}(e^{-tx^2} x^{2n})\,\mathrm{d}x$$

关于 $t \in [c, d]$ 一致收敛, 则由求导与积分次序可交换性可知 I_n 在 $[c, d]$ 上可导且 $\forall t \in [c, d]$, $I_n'(t) = -I_{n+1}(t)$. 再由 c, d 的任意性可得知 I_n 在 $(0, +\infty)$ 上可导且 $I_n' = -I_{n+1}$.

(3) 由 (2) 可知 $\forall t>0$, $I_n(t)=(-1)^n I_0^{(n)}(t)$. 又

$$I_0(t)=\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=tx^2} \int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}\Big(\sqrt{\frac{u}{t}}\Big)$$
$$=\ \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi},$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned} I_n(t) &= (-1)^n\frac{1}{2}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cdots\Big(-\frac{1}{2}-n+1\Big)t^{-\frac{1}{2}-n}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}t^{\frac{1}{2}+n}}\cdot\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

例 11. 求证: 函数 Γ 在 $(0,+\infty)$ 上无穷可导.

证明: 首先证明, 对于整数 $n \geqslant 0$ 及 $b > a > 0$, 广义含参变量积分 $I_n(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}(\log x)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $s \in [a,b]$ 一致收敛. 分情况讨论.

(1) 当 $x \in (0,1]$ 时, 我们有

$$|x^{s-1}(\log x)^n e^{-x}| \leqslant |x^{a-1}(\log x)^n e^{-x}|,$$

又 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^{a-1}(\log x)^n e^{-x}}{x^{\frac{a}{2}-1}} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{2}}(\log x)^n = 0$, 并且 $\int_0^1 x^{\frac{a}{2}-1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a}x^{\frac{a}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{a}$ 收敛, 则由比较法则知

广义积分 $\int_0^1 |x^{a-1}(\log x)^n e^{-x}|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 进而可知 $\int_0^1 x^{s-1}(\log x)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $s \in [a,b]$ 一致收敛.

(2) 当 $x > 1$ 时, 我们有

$$0 < x^{s-1}(\log x)^n e^{-x} \leqslant x^{b-1}(\log x)^n e^{-x},$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{b-1}(\log x)^n e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{b-1}(\log x)^n e^{-\frac{x}{2}} = 0$, 并且 $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = -2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_1^{+\infty} = 2e^{-\frac{1}{2}}$ 收敛, 于是由比较法则, 我们立刻可知 $\int_1^{+\infty} x^{b-1}(\log x)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ 收敛,

由此可导出 $\int_1^{+\infty} x^{s-1}(\log x)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $s\in[a,b]$ 一致收敛, 从而 $I_n(s)$ 关于 $s\in[a,b]$ 一致收敛.

下面对任意的整数 $n\geqslant 1$ 用数学归纳法证明 Γ 在 $[a,b]$ 上为 n 阶可导且 $\forall s\in[a,b]$, 均有

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}(\log x)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x=I_n(s).$$

对于 $n=1$, 由于 $\forall s\in[a,b]$, $\Gamma(s)$ 收敛而且 $I_1(s)$ 关于 $s\in[a,b]$ 一致收敛, 则由求导与积分次序可交换性知 $\Gamma\in\mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 且 $\Gamma'(s)=I_1(s)$.

假设所证结论对整数 $n \geqslant 1$ 成立, 则 $\forall s \in [a, b]$, $\Gamma^{(n)}(s) = I_n(s)$ 收敛. 又因 $I_{n+1}(s)$ 关于 $s \in [a, b]$ 一致收敛, 从而由求导与积分次序可交换性可知 $\Gamma^{(n)} \in \mathscr{C}^{(1)}[a, b]$, 并且我们有 $(\Gamma^{(n)})'(s) = I_{n+1}(s)$. 由数学归纳法知所证结论对所有 $n \geqslant 1$ 均成立, 由此知 Γ 在 $[a, b]$ 上为无穷可导. $\forall s \in (0, +\infty)$, 我们有 $s \in [\frac{s}{2}, 2s]$, 而 Γ 在 $[\frac{s}{2}, 2s]$ 上为无穷可导, 从而在点 s 处无穷可导, 故 $\Gamma \in \mathscr{C}^{(\infty)}(0, +\infty)$.

例 12. $\forall y \geqslant 0$, 计算 $F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,\mathrm{d}x$.

解: 因 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\forall x, y \geqslant 0$, $|e^{-xy}| \leqslant 1$ 且 e^{-xy} 关于 x 递减, 则由 Abel 判别准则可知广义含参积分 $F(y)$ 关于 $y \in [0,+\infty)$ 一致收敛, 而 $\frac{\sin x}{x}e^{-xy}$ 可被延拓成 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上的连续函数, 于是由极限与积分次序的可交换性可知 F 为 $[0,+\infty)$ 上的连续函数.

任取 $a>0$. $\forall x \geqslant 0$ 以及 $\forall y \geqslant a$, 我们有

$$\left| -(\sin x)e^{-xy} \right| \leqslant e^{-xy} \leqslant e^{-ax}.$$

而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别准则可得知广义含参积分 $-\int_0^{+\infty} (\sin x)e^{-xy}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [a,+\infty)$ 一致收敛, 从而由求导与积分次序的可交换性可以得知 F 在 $[a,+\infty)$ 上可导

并且 $\forall y \geqslant a$, 我们均有

$$\begin{aligned} F'(y) &= -\int_0^{+\infty} (\sin x) e^{-xy}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \operatorname{Im}\left(e^{-x(y+i)}\right)\mathrm{d}x = -\operatorname{Im}\left(\frac{e^{-x(y+i)}}{y+i}\right)\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{e^{-xy}}{1+y^2}\left(y\sin x + \cos x\right)\Big|_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{1+y^2}. \end{aligned}$$

因 $a > 0$ 任意, 则 $\forall y > 0$, 均有 $F'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$,
故 $F(y) = -\arctan y + C$, 其中 $C \in \mathbb{R}$ 为常数.

注意到 $\forall y > 0$, 我们有

$$|F(y)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} e^{-xy}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}.$$

从而由夹逼原理可知

$$C - \frac{\pi}{2} = \lim_{y\to+\infty} F(y) = 0,$$

于是 $C = \frac{\pi}{2}$, 进而 $\forall y > 0$, $F(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y$.

又 F 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 从而 $\forall y \geqslant 0$, 我们有 $F(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y$. 特别地, 我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

例 13. 求含参广义积分 $I(a)=\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, 其中 $|a|<1$.

解: 由题可知 $I(0)=0$, 而当 $0<|a|<1$ 时,

$$I(a)=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

当 $x\to 0^+$ 时, $\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\sim -a^2$; 而当 $x\to 1^-$ 时,

$$\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\sim \frac{\ln(1-a^2)}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

因此广义积分 $I(a)$ 收敛.

方法 1. 固定 $c \in (0,1)$. 若 $|a| < c$, 则 $\forall x \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right)\right| &= \left|-\frac{2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\right| \\ &\leqslant \frac{2c}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

而广义积分 $\int_0^1 \frac{2c}{(1-c^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 收敛, 于是由比较法则可知含参广义积分 $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$ 关于 $a \in (-c,c)$ 一致收敛, 从而由求导与积分次序可交换性可知 I 在 $(-c,c)$ 上连续可导且

$$
\begin{aligned}
I'(a) \quad &= \quad \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\Big(\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\Big)\mathrm{d}x \\
&= \quad -\int_0^1 \frac{2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\
&\underline{\underline{x=\sin t}} \quad -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{1-a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t \\
&= \quad -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{1+(1-a^2)\tan^2 t}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \\
&\underline{\underline{u=\tan t}} \quad -\int_0^{+\infty} \frac{2a}{1+(1-a^2)u^2}\mathrm{d}u \\
&= \quad -\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\arctan(\sqrt{1-a^2}u)\Big|_0^{+\infty} \\
&= \quad -\frac{a\pi}{\sqrt{1-a^2}}.
\end{aligned}
$$

进而立刻可得

$$\begin{aligned} I(a) &= I(0) + \int_0^a I'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^a \frac{t\pi}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\ &= \pi\sqrt{1-t^2}\Big|_0^a \\ &= \pi(\sqrt{1-a^2}-1). \end{aligned}$$

由 c 的任意性知该结论对任意 $a \in (-1, 1)$ 成立.

方法 2. $\forall a \in (-1,1)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\cos t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\ln(1-a^2\cos^2 t)}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-a^2\cos^2 t)\mathrm{d}(\tan t) \\
&= (\tan t)\ln(1-a^2\cos^2 t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan t\,\mathrm{d}\big(\ln(1-a^2\cos^2 t)\big) \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^2\sin t\cos t}{1-a^2\cos^2 t}\tan t\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^2\sin^2 t}{1-a^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\pi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^2-2}{1-a^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\pi + 2\sqrt{1-a^2}\arctan\left(\frac{\tan t}{\sqrt{1-a^2}}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi(\sqrt{1-a^2}-1).
\end{aligned}
$$

例 14. $\forall y \geqslant 0$, 定义 $I(y)=\int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(1) 求 $I'(y)$ 的表达式.

(2) 计算 $I(1)$.

解: (1) $\forall x\in[0,1]$ 及 $\forall y\geqslant 0$, 令 $f(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}$. 则 f 连续可导. 由求导与积分次序可交换性得

$$
\begin{aligned}
I'(y) &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+y^2}\int_0^1 \left(\frac{x+y}{1+x^2}-\frac{y}{1+xy}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}y-\ln(1+y)\right).
\end{aligned}
$$

(2) 由 (1) 可得

$$\begin{aligned} I(1) &= I(1) - I(0) = \int_0^1 I'(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\Big(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}y - \ln(1+y)\Big)\,\mathrm{d}y \\ &= \Big(\frac{\ln 2}{2}\arctan y + \frac{\pi}{8}\ln(1+y^2)\Big)\Big|_0^1 - I(1) \\ &= \frac{\pi}{4}\ln 2 - I(1). \end{aligned}$$

于是 $I(1) = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

期中综合练习

例 1. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为二阶连续可微使其海赛矩阵处处正定. 求证: 函数 f 至多有一个驻点.

证明: 方法 1. 反证法, 设 f 有不同驻点 P_1, P_2. $\forall t\in\mathbb{R}$, 定义 $g(t)=f(tP_1+(1-t)P_2)$. 由复合函数求导法则知 g 为二阶连续可导且 $\forall t\in\mathbb{R}$, $g'(t)=J_f(tP_1+(1-t)P_2)\cdot(P_1-P_2)^T$. 于是

$$
\begin{aligned}
g'(0) &= J_f(P_1)\cdot(P_1-P_2)^T=0,\\
g'(1) &= J_f(P_2)\cdot(P_1-P_2)^T=0.
\end{aligned}
$$

于是由 Rolle 定理可知, $\exists t_0 \in (0,1)$ 使得

$$\begin{aligned} 0 &= g''(t_0) \\ &= (P_1 - P_2) H_f\big(t_0 P_1 + (1-t_0)P_2\big)(P_1 - P_2)^T. \end{aligned}$$

但矩阵 $H_f\big(t_0 P_1 + (1-t_0)P_2\big)$ 正定且 $P_1 \neq P_2$,

故 $g''(t_0) > 0$. 矛盾! 因此所证结论成立.

方法 2. 反证法, 设 f 有不同驻点 P_1, P_2. 由于 f 为二阶连续可微, 并且它的海赛矩阵处处正定, 则由带 Lagrange 余项的 Taylor 展式可知, 存在 $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^2$ 使得我们有

$$\begin{aligned}
f(P_2) - f(P_1) &= J_f(P_1)(P_2 - P_1) + \frac{1}{2}(P_2 - P_1)H_f(\xi_1)(P_2 - P_1)^T \\
&= \frac{1}{2}(P_2 - P_1)H_f(\xi_1)(P_2 - P_1)^T > 0 \\
f(P_1) - f(P_2) &= J_f(P_2)(P_1 - P_2) + \frac{1}{2}(P_1 - P_2)H_f(\xi_2)(P_1 - P_2)^T \\
&= \frac{1}{2}(P_1 - P_2)H_f(\xi_2)(P_1 - P_2)^T > 0.
\end{aligned}$$

矛盾! 故所证结论成立.

例 2. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义 $f(x,y)=x^2e^{-x^2-y^2}$.
求证: f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最大值, 并求其最大值点.

解: 方法 1. 由于 f 为初等函数, 故连续可导. 又

$$\begin{aligned}\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) &= \lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}e^{-y^2}\\ &= 0<\frac{1}{e}=f(1,0).\end{aligned}$$

由函数极限保序性知, $\exists R>0$ 使得 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$,
当 $\sqrt{x^2+y^2}>R$ 时, 均有 $f(x,y)<\frac{1}{e}$. 从而由

最值定理可知函数 f 在闭圆盘 $\bar{B}((0,0),R)$ 上有最大值点 (x_0,y_0), 也即我们有

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \sup_{x^2+y^2\leqslant R^2} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

于是 (x_0,y_0) 为 f 的驻点, 从而

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x(1-x^2)e^{-x^2-y^2}, \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -2yx^2e^{-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

则 $x_0=\pm1$, $y_0=0$. 故所求最大值点为 $(\pm1,0)$.

方法 2. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 我们有

$$f(x,y)\leqslant f(x,0)=x^2e^{-x^2}.$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $g(x)=xe^{-x}$. 则 g 为初等函数, 故可导, 并且 $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有 $g'(x)=(1-x)e^{-x}$. 于是 g 在 $(-\infty,1]$ 上严格递增, 在 $[1,+\infty)$ 上严格递减, 从而 g 在 $x=1$ 取到最大值, 进而可知 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最大值, 最大值点为 $(\pm1,0)$.

例 3. 假设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上连续可微. $\forall y \in [0,1]$, 令 $F(y) = \int_0^1 f(x)|y-x|\,\mathrm{d}x$. 请说明 F 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微, 在 $(0,1)$ 上三阶可微, 并求 F''.

解: $\forall y \in [0,1]$, 我们有

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^y f(x)(y-x)\,\mathrm{d}x + \int_y^1 f(x)(x-y)\,\mathrm{d}x \\ &= y\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^y xf(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_y^1 xf(x)\,\mathrm{d}x - y\int_y^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由于 f 在 $[0,1]$ 上连续, 故 F 在 $[0,1]$ 连续可导并且 $\forall y \in [0,1]$, 均有

$$F'(y) = \int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_y^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

同样因 f 在 $[0,1]$ 上连续, 故 F' 在 $[0,1]$ 连续可导并且 $\forall y \in [0,1]$, 我们均有 $F''(y) = 2f(y)$. 故 F 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微. 又 f 在 $(0,1)$ 上可微, 故 F 在 $(0,1)$ 上三阶可微.

例 4. 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在闭单位圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的最大值和最小值.

解: 方法 1. 由于 f 为初等函数, 故连续可导. 由最值定理可知 f 在闭单位圆盘上有最值.

(1) 若 f 在单位圆盘的内部取到最值, 相应的最值点为 f 的局部极值点, 在该点处, 我们有

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y,\ 0=\frac{\partial f}{\partial y}=-x+2y,$$

由此可知该点为 $(0,0)$, 且 $f(0,0)=0$.

(2) 若 f 在单位圆盘边界上取到最值, 相应的最值点为 f 的条件极值点. 单位圆盘的边界的方程为: $x^2+y^2=1$. $\forall(x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3$, 令

$$L(x,y,\lambda)=x^2-xy+y^2+\lambda(x^2+y^2-1).$$

拉氏函数 L 的驻点满足:

$$\begin{cases} 0=\frac{\partial L}{\partial x}=2x-y+2\lambda x, \\ 0=\frac{\partial L}{\partial y}=-x+2y+2\lambda y, \\ 0=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1. \end{cases}$$

由此可得所求驻点为

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

相应地, 我们有 $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3}{2}$. 于是函数 f 在原点处取到最小值 0, 而在点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处和点 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 处取到最大值 $\frac{3}{2}$.

方法 2. 若 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 满足 $x^2+y^2\leqslant 1$, 则

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &\geqslant x^2+y^2-|xy|\geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)\geqslant 0,\\
f(x,y) &\leqslant x^2+y^2+|xy|\leqslant \frac{3}{2}(x^2+y^2)\leqslant \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

因此 f 在闭单位圆盘上的最小值为 0, 相应的最小值点为 $(0,0)$; 最大值为 $\frac{3}{2}$, 相应的最大值点为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 和 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

例 5. 设 $\alpha > 0$ 而 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 使得 $\forall x \in [0,1]$, 均有 $f(x) > 0$. $\forall y \geqslant 0$, 定义

$$g(y) = \int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x.$$

根据 α 的值, 判断 g 的连续性并证明结论.

证明: $\forall (x,y) \in [0,1] \times (0,+\infty)$, 令 $F(x,y) = \frac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}$. 则函数 F 连续, 从而由极限与积分可交换性知函数 g 在 $(0+\infty)$ 上连续.

方法 1. 由于 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 使得 $\forall x \in [0,1]$, 均有 $f(x) > 0$, 由最值定理可知存在 $m, M > 0$ 使得 $\forall x \in [0,1]$, 均有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 从而 $\forall y > 0$,

$$\frac{my^\alpha}{x^2+y^2} \leqslant F(x,y) \leqslant \frac{My^\alpha}{x^2+y^2}.$$

另外, 还可注意到, $\forall y > 0$, 我们有

$$\int_0^1 \frac{y^\alpha}{x^2+y^2}\mathrm{d}x = y^{\alpha-1}\int_0^1 \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\mathrm{d}(\frac{x}{y})$$

$$= \ y^{\alpha-1}\arctan(\frac{x}{y})\Big|_0^1 = y^{\alpha-1}\arctan(\frac{1}{y}).$$

下面分情况讨论:

情形 1: $0 < \alpha \leqslant 1$. 此时 $\forall y > 0$, 我们有

$$g(y) \geqslant m y^{\alpha-1} \arctan(\frac{1}{y}),$$

因此当 $y \to 0^+$, $g(y)$ 不趋近于 $0 = g(0)$.

情形 2: $\alpha > 1$. 此时 $\forall y > 0$, 我们有

$$m y^{\alpha-1} \arctan(\frac{1}{y}) \leqslant g(y) \leqslant M y^{\alpha-1} \arctan(\frac{1}{y}),$$

于是由夹逼原理可知 $\lim_{y\to 0^+} g(y) = 0 = g(0)$.

综上所述可知函数 g 在 $(0, +\infty)$ 上连续,

而它在 $[0, +\infty)$ 上连续当且仅当 $\alpha > 1$.

方法 2. $\forall y>0$, 我们定义 $I(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$, 则 $g(y)=y^{\alpha-1}I(y)$. 由于 f 在原点连续, 从而

$$\lim_{y\to 0^+} I(y)=\frac{\pi}{2}f(0)>0.$$ (上学期第 24 讲例 1)

于是 $\lim\limits_{y\to 0^+} g(y)=g(0)=0$ 当且仅当 $\alpha>1$.

综上所述可知函数 g 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 而它在 $[0,+\infty)$ 上连续当且仅当 $\alpha>1$.

例 6. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 令 $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$.

(1) 求 f 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上得所有极点.

(2) 求 f 在曲线 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 上的最值.

解: (1) 由于 f 为初等函数, 因此无穷可导且

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x,$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

于是 f 的驻点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.

(a) 在原点, $\det H_f(0,0) = -9 < 0$, 则 $H_f(0,0)$ 为不定, 故 $(0,0)$ 不是 f 的极值点.

(b) $\det H_f(1,1)$ 为正定矩阵, 则 $(1,1)$ 为 f 的极小值点, 相应的极小值为 $f(1,1) = -1$.

(2) 定义 $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 = 1\}$. 则 C 为闭集且点 $(1,1) \in C$. 由算术-几何平均不等式, $\forall (x,y) \in C$, 我们有

$$1 = x^2 + y^2 - xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

因此 C 为非空的有界闭集. 由最值定理可知, 函数 f 在 C 有最值. $\forall(x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3$, 定义

$$L(x,y,z)=x^3-3xy+y^3+\lambda(x^2-xy+y^2-1).$$

若 (x,y) 为 f 在 C 上的最值点, 则由 Lagrange 乘数法, $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 (x,y,λ) 为 L 的驻点, 即

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 3x^2-3y+\lambda(2x-y)=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 3y^2-3x+\lambda(2y-x)=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = x^2-xy+y^2-1=0. \tag{3}$$

将前两个等式相减可得

$$3(x^2 - y^2) + 3(x - y) + 3\lambda(x - y) = 0,$$

于是 $x = y$ 或 $x + y + 1 + \lambda = 0$.

(a) 将 $x = y$ 带入 (3) 可得 $x = y = \pm 1$.

(b) 将 $\lambda = -(x + y + 1)$ 带入 (1) 可得

$$3x^2 - 3y - (x + y + 1)(2x - y) = 0.$$

将之与 (3) 联立得 $x+y=\frac{1}{2}(x^2-xy+y^2)=\frac{1}{2}$, 故 $x^2+2xy+y^2=\frac{1}{4}$. 再与 (3) 联立得 $xy=-\frac{1}{4}$, 由韦达定理可知 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$, $y=\frac{1\mp\sqrt{5}}{4}$. 注意到

$$f(1,1)=-1,\ f(-1,-1)=-5,\ f(\frac{1\pm\sqrt{5}}{4},\frac{1\mp\sqrt{5}}{4})=\frac{5}{4}.$$

因此 f 在 C 上得最小值为 -5, 最大值为 $\frac{5}{4}$.

注: 若注意到 $\forall(x,y)\in C$, 我们均有

$$f(x,y)=(x+y)(x^2-xy+y^2)-3xy=x+y-3xy,$$

问题就被转化为求右边函数在 C 上的最值.

例 7. 设 V 为所有实 2 阶矩阵 $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ 组成的线性空间. $\forall X\in V$, 定义 $\mathbf{f}(X)=X^2$. 求 $\mathbf{f}$ 在 $X_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 处的微分.

解: 方法 1. 由定义可知

$$\mathrm{d}f(X)=\mathrm{d}\begin{pmatrix} x_{11}^2+x_{12}x_{21} & (x_{11}+x_{22})x_{12} \\ (x_{11}+x_{22})x_{21} & x_{12}x_{21}+x_{22}^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2x_{11}\mathrm{d}x_{11}+x_{12}\mathrm{d}x_{21}+x_{21}\mathrm{d}x_{12} & (x_{11}+x_{22})\mathrm{d}x_{12}+x_{12}\mathrm{d}(x_{11}+x_{22}) \\ (x_{11}+x_{22})\mathrm{d}x_{21}+x_{21}\mathrm{d}(x_{11}+x_{22}) & x_{12}\mathrm{d}x_{21}+x_{21}\mathrm{d}x_{12}+2x_{22}\mathrm{d}x_{22} \end{pmatrix}$$

由此可得 $\mathrm{d}f(X)=\begin{pmatrix} 2\mathrm{d}x_{11} & \mathrm{d}x_{12} \\ \mathrm{d}x_{21} & 0 \end{pmatrix}$.

方法 2. $\forall H \in V$, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(X_0+H)-\mathbf{f}(X_0) &= (X_0+H)^2 - X_0^2 \\ &= X_0H + HX_0 + H^2, \end{aligned}$$

于是由微分的定义可知

$$\mathrm{d}\mathbf{f}(X_0) = X_0 \cdot \mathrm{d}X + \mathrm{d}X \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 2\mathrm{d}x_{11} & \mathrm{d}x_{12} \\ \mathrm{d}x_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

谢谢大家!