微积分 A (1)

姚家燕

第 21 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

第 20 讲回顾: 积分中值定理

- (积分第一中值定理) 若$f\in\mathscr{C}[a,b]$, 则$\exists\xi\in[a,b]$使得我们有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.
- (广义积分第一中值定理) 如果 $f\in\mathscr{C}[a,b]$, $g\in\mathscr{R}[a,b]$ 且 g 不变号, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$
- (加强的积分第一中值定理) 若 $f\in\mathscr{R}[a,b]$ 在 (a,b) 内连续, 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

回顾: 原函数与变上、下限积分求导

- 设 J 为区间, 而 $F, f : J \to \mathbb{R}$ 为函数. 若 F 在 J 上连续, 在 J 的内部可导并且 $F' = f$, 则称 F 为 f 的一个原函数.
- 设 $f \in \mathscr{R}[a, b]$. $\forall x \in [a, b]$, 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F \in \mathscr{C}[a, b]$. 如果 f 在点 $x_0 \in [a, b]$ 连续, 则 F 在点 x_0 处可导且 $F'(x_0) = f(x_0)$.
- 若 f 在点 x_0 仅有单侧连续, 则 F 在该点有相应的单侧导数. 在跳跃间断点处亦如此.

- 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $F \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$ 且 $F' = f$, 也即 F 为 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.
- 有跳跃间断点的函数没有原函数.
- 设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $\varphi, \psi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ 可导. $\forall u \in [\alpha, \beta]$, 定义 $G(u) = \int_{\psi(u)}^{\varphi(u)} f(t)\mathrm{d}t$. 那么 G 为可导函数且 $\forall u \in [\alpha, \beta]$, 均有

$$G'(u) = f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u) - f\big(\psi(u)\big)\psi'(u).$$

- 典型例子: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\sin(3t)}{t}\mathrm{d}t = 3.$

回顾: 微积分基本定理 (Newton-Leibniz 公式)

- 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $G \in \mathscr{C}[a,b]$ 为 f 的一个原函数, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G\big|_a^b := G(b) - G(a)$.
- 设 $G : (a,b) \to \mathbb{R}$ 可导并且 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $G'(x) = f(x)$. 若 $G(a+0)$, $G(b-0)$ 均存在且有限, 则我们有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G\big|_a^b := G(b-0) - G(a+0).$$

回顾: 不定积分

- 将定义在区间上的函数 f 的原函数的一般表达式称为 f 的不定积分, 记作 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. 这是一个以 x 为自变量的函数.
- 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $\int f(x)\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + C$.

不定积分与导数、微分的关系

- 若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, 则 $F'(x) = f(x)$,

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = F'(x) = f(x),$$

$$\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x,\ \ \mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

- (线性性) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

基本的不定积分公式

- $\int \mathrm{d}x = x + C.$
- $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1),$

  $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \log|x| + C.$
- $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + C \ (a > 0,\ a \neq 1),$

  $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C.$
- $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C,$

  $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C.$

- $\int \operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$, $\int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$.
- $\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$.
- $\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$.

回顾: 求不定积分的基本方法

- 分段计算, 线性性, 降低三角函数的幂次.
- 第一换元积分法 (凑微分): 若 $F'(y) = f(y)$, 则

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int f(u(x))\mathrm{d}u(x) = F(u(x)) + C.$$

- 第二换元积分法: 如果 $f(x(t))x'(t) = F'(t)$, 则

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &\overset{x=x(t)}{=} \int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= F(t) + C \overset{t=t(x)}{=} F(t(x)) + C.\end{aligned}$$

- $\int \sec x \, \mathrm{d}x = \log|\sec x + \tan x| + C$.
- $\int \csc x \, \mathrm{d}x = \log|\csc x - \cot x| + C$.

  下面假设 $a > 0$.
- 若含 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 作变换 $x = a\sin t$ $(|t| \leqslant \frac{\pi}{2})$.
- 若含 $\sqrt{x^2 + a^2}$, 作变换 $x = a\tan t$ $(|t| < \frac{\pi}{2})$.
- 若含 $\sqrt{x^2 - a^2}$, 要分情况讨论: 当 $x > a$ 时, 定义 $x = a\sec t$ $(0 \leqslant t < \frac{\pi}{2})$; 而当 $x < -a$ 时, 定义 $x = -u$ 或 $x = -a\sec t$ $(0 \leqslant t < \frac{\pi}{2})$.

第 21 讲

3. 分部积分法:

设函数 u, v 均为一阶连续可导. 由于

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u,$$

则 $u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\,\mathrm{d}u$, 于是

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

例 26. 计算 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解: $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$

$$= x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$$

例 27. 计算 $\int \log x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int \log x \, \mathrm{d}x = x \log x - \int x \mathrm{d}(\log x)$

$$= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \log x - x + C.$$

例 28. 计算 $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x = x \arcsin x - \int x \, \mathrm{d}(\arcsin x)$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = x \arcsin x - \int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \arcsin x + \int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \int \mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

例 29. 计算 $\int xe^x \mathrm{d}x$.

解: $\int xe^x \mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(e^x) = xe^x - \int e^x \mathrm{d}x = xe^x - e^x + C$.

例 30. 计算 $\int 3x^2 \arctan x\,\mathrm{d}x$.

解: $\int 3x^2 \arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}(x^3)$

$= x^3 \arctan x - \int x^3\,\mathrm{d}(\arctan x)$

$= x^3 \arctan x - \int \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$= x^3 \arctan x - \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$= x^3 \arctan x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}$

$= x^3 \arctan x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$.

例 31. 计算 $\int x\log^2 x\,\mathrm{d}x$.

解: $\int x\log^2 x\,\mathrm{d}x = \int \log^2 x\,\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

$$= \frac{x^2}{2}\log^2 x - \int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}(\log^2 x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2\log x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \int x\log x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \int \log x\,\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \frac{1}{2}x^2\log x + \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \frac{1}{2}x^2\log x + \frac{x^2}{4} + C.$$

例 32. 计算 $\int x\sqrt{x^2+1}\log\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

解: $\int x\sqrt{x^2+1}\log\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

$$= \int\sqrt{x^2+1}\log\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}\left(\tfrac{x^2}{2}\right) \overset{y=\sqrt{x^2+1}}{=\!=} \int y\log\sqrt{y^2-2}\cdot y\,\mathrm{d}y$$

$$= \int \tfrac{1}{2}\log(y^2-2)\,\mathrm{d}\left(\tfrac{y^3}{3}\right) = \tfrac{1}{6}y^3\log(y^2-2) - \int \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{y^4}{y^2-2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \tfrac{1}{6}y^3\log(y^2-2) - \tfrac{1}{3}\int\left(y^2+2+\tfrac{4}{y^2-2}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \tfrac{1}{6}y^3\log(y^2-2) - \tfrac{1}{9}y^3 - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\int\left(\tfrac{1}{y-\sqrt{2}} - \tfrac{1}{y+\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \tfrac{1}{6}y^3\log(y^2-2) - \tfrac{1}{9}y^3 - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\log\left|\tfrac{y-\sqrt{2}}{y+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \tfrac{1}{6}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\log(x^2-1) - \tfrac{x^2+7}{9}\sqrt{1+x^2} - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\log\tfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}} + C.$$

例 33. 计算 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \ (a > 0)$.

解: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x\,\mathrm{d}(\sqrt{a^2 - x^2})$

$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$

$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2}\right)\mathrm{d}x$

$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$

$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$

由此我们立刻可得

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}) + C.$$

例 34. 计算 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \ (a>0)$.

解: $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \left(\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\mathrm{d}x$

$= x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,$

由此立刻可得

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

作业题: 计算 $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x \ (a>0)$.

例 35. 设 $m \in \mathbb{N}^*$. 求 $I_m = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^m}$ $(a > 0)$.

解:
$$\begin{aligned} I_m &= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} - \int x\,\mathrm{d}\frac{1}{(x^2+a^2)^m} \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{m+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^m} - 2ma^2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{m+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2mI_m - 2ma^2 I_{m+1}. \end{aligned}$$

于是 $I_{m+1} = \frac{x}{2a^2m(x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2a^2m} I_m$. 注意到

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,$$

由此可得 I_m 的一般表达式.

例 36. 计算 $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$ $(ab\neq 0)$.

解: 方法 1. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x &= \int e^{ax}\,\mathrm{d}\big(\frac{1}{b}\sin bx\big)\\ &= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x,\\ \int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x &= \int e^{ax}\,\mathrm{d}\big(-\frac{1}{b}\cos bx\big)\\ &= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C,\\ \int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C.\end{aligned}$$

方法 2. $\int e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\mathrm{d}x = \int e^{(a+ib)x}\mathrm{d}x$
$= \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + \widetilde{C} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a - ib)e^{ibx} + \widetilde{C}$.

由此可得

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

作业题: 第 5.4 节第 157 页第 7 题第 (3), (6), (10), (12) 小题.

有理函数的不定积分

设 $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ $(a_n \neq 0)$. 由代数基本定理可知 Q 有 n 个根 (包括重数), 其中复根成对出现. 于是

$$Q(x) = a_n \prod_{j=1}^{s} (x - \alpha_j)^{l_j} \cdot \prod_{k=1}^{t} (x^2 + p_k x + q_k)^{m_k},$$

这里 $\alpha_j \in \mathbb{R}$ 均不相同, $p_k^2 - 4q_k < 0$, 而且

$$\sum_{j=1}^{s} l_j + 2 \sum_{k=1}^{t} m_k = n.$$

任意的有理真分式 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ (P,Q 为多项式且 $\deg P<\deg Q$) 可分解为

$$R(x)=\sum_{j=1}^{s}\sum_{u=1}^{l_j}\frac{a_{j,u}}{(x-\alpha_j)^u}+\sum_{k=1}^{t}\sum_{v=1}^{m_k}\frac{b_{k,v}x+c_{k,v}}{(x^2+p_kx+q_k)^v},$$

其中 $a_{j,u},b_{k,v},c_{k,v}\in\mathbb{R}$ 为常数. 为证明分解式, 我们可将 $a_{j,u},b_{k,v},c_{k,v}$ 看成未知元 (共有 n 个), 两边乘以 $Q(x)$, 比较多项式的系数, 得到 n 个线性方程, 由此可以唯一确定未定元的值.

于是有理真分式 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 最终可以分解成如下 4 种最简单的分式之和 $(m \geqslant 2)$:

$$\frac{A}{x-\alpha}, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^m}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m} \quad (p^2-4q<0).$$

由于 $x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}$, 经过变量替换, 有理分式的不定积分可归结成下述 6 种最简单的分式的不定积分 $(a>0)$:

$$\frac{1}{x-\alpha}, \quad \frac{1}{(x-\alpha)^m}, \quad \frac{x}{x^2+a^2}, \quad \frac{1}{x^2+a^2}, \quad \frac{x}{(x^2+a^2)^m}, \quad \frac{1}{(x^2+a^2)^m}.$$

这些不定积分有显式表达式:

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\alpha} = \log|x-\alpha| + C,$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}} + C,$
- $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\log(x^2+a^2) + C,$
- $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,$
- $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)}\frac{1}{(x^2+a^2)^{m-1}} + C,$
- $I_{m+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{m+1}} = \frac{x}{2a^2m(x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2a^2m}I_m.$

例 37. 计算 $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

解: 由题设可知 $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ 的标准分解形如

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

将上式两边同乘以 $(x-2)(x^2+1)^2$ 后可得

$$\begin{aligned} &2x^2+2x+13 = (A+B)x^4 + (C-2B)x^3 \\ &+(2A+B-2C+D)x^2 + (C-2B+E-2D)x \\ &+(A-2C-2E). \end{aligned}$$

比较系数并解方程组可得

$$A=1,\ B=-1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4.$$

故 $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{-x-2}{x^2+1}+\frac{-3x-4}{(x^2+1)^2}$，由此可得

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$-2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - 3\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} - 4\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \log|x-2| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 2\arctan x + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1}$$

$$-4\Big(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x\Big) + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\arctan x + \frac{1}{2}\frac{3-4x}{x^2+1} + C.$$

例 38. 计算 $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,\mathrm{d}x$.

解: 由带余除法可得

$$\frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=1+\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}.$$

又 $x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3$, 由此我们知

$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$ 的标准分解形如:

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

两边同乘以 $x^4-3x^3+3x^2-x$ 可得

$$\begin{aligned} x^3+1 &= (A+B)x^3+(-3A-2B+C)x^2 \\ &\quad +(3A+B-C+D)x-A. \end{aligned}$$

由此可得 $A=-1$, $B=2$, $C=1$, $D=2$. 则

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &\quad +2\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3} \\ &= x - \log|x| + 2\log|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C. \end{aligned}$$

例 39. 计算 $\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

解: 由题设可知 $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}$ 的标准分解形如:

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

两边乘以 $(x+1)(x^2+1)^2$ 可得

$$\begin{aligned} 2x = {} & A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) \\ & +(Dx+E)(x+1). \end{aligned}$$

在上式中选取 $x=-1$, 由此立刻可得 $A=-\frac{1}{2}$.

比较系数可得 $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{2}$, $D=E=1$, 则

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{-1}{2(x+1)}+\frac{x-1}{2(x^2+1)}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2},$$

$$\begin{aligned}
&\int\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{-1}{2(x+1)}\,\mathrm{d}x+\int\frac{x}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\int\frac{-1}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x+\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{4}\log(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x\\
&\quad-\frac{1}{2(x^2+1)}+\Big(\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x\Big)+C\\
&=\frac{1}{4}\log\frac{x^2+1}{(x+1)^2}+\frac{x-1}{2(x^2+1)}+C.
\end{aligned}$$

例 40. 计算 $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2}\,dx$.

解: 由题设可知 $\frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2}$ 的标准分解形如

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

故 $x^2+1 = A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)$. 令 $x=-1$ 可得 $A=\frac{2}{9}$. 令 $x=2$ 则可得 $C=\frac{5}{3}$. 再取 $x=0$ 可得 $B=\frac{7}{9}$. 于是我们有

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{2}{9(x+1)} + \frac{7}{9(x-2)} + \frac{5}{3(x-2)^2}.$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{9(x+1)}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int \frac{7}{9(x-2)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{3(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{9}\log|x+1| + \frac{7}{9}\log|x-2| - \frac{5}{3(x-2)} + C.\end{aligned}$$

作业题: 第 5.5 节第 163 页第 1 题第 (1), (2), (5), (7) 题. 提示: 第 (7) 题可按今天讲的方法解答, 但作变量替换 $t = 1 - x^2$ 会更加简单!

三角有理函数的不定积分

假设 $R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, 其中 $P(u,v),Q(u,v)$ 均为关于变量 u,v 的多项式. 所谓的三角有理函数就是指 $R(\sin x,\cos x)$. 下面我们将由万能公式来将之转化成有理分式的不定积分.

令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则 $x=2\arctan t$. 于是

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}(2\arctan t)=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

从而我们有

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x\overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=}\int R\Big(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

例 41. 计算 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解: 方法 1.

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+t^2+2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = t+\log(1+t^2)+C$$

$$= \tan\frac{x}{2}+\log(1+\tan^2\frac{x}{2})+C = \tan\frac{x}{2}-2\log|\cos\frac{x}{2}|+C.$$

方法 2. $$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan\frac{x}{2}-\log(1+\cos x)+C = \tan\frac{x}{2}-2\log|\cos\frac{x}{2}|+C.$$

在一些特殊情形, 上述讨论可以简化:

- 被积函数为 $\sin x$ 的奇函数 (将 $\sin x$ 变换成 $-\sin x$ 后会出现一个负号):

$$\int R(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,\mathrm{d}x \overset{t=\cos x}{=\!=} -\int R(1-t^2, t)\,\mathrm{d}t.$$

- 被积函数为关于 $\cos x$ 的奇函数:

$$\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x \overset{t=\sin x}{=\!=} \int R(t, 1-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

- 将 $\sin x, \cos x$ 变换成 $-\sin x, -\cos x$ 后不变:

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan x}{=\!=} \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

例 42. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$ $(ab \neq 0)$.

解:
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$$
$$=\int \frac{1}{a^2\tan^2 x+b^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$
$$=\int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{a^2\tan^2 x+b^2}=\int \frac{\mathrm{d}(\frac{a}{b}\tan x)}{ab\left(1+(\frac{a\tan x}{b})^2\right)}$$
$$=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C.$$

例 43. 计算 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}\mathrm{d}x$.

解: $$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^7 x}\mathrm{d}(\sin x) \overset{t=\sin x}{=\!=} \int \frac{1-t^2}{t^7}\mathrm{d}t$$
$$= \int (t^{-7} - t^{-5})\mathrm{d}t = -\frac{1}{6t^6} + \frac{1}{4t^4} + C$$
$$= -\frac{1}{6\sin^6 x} + \frac{1}{4\sin^4 x} + C.$$

作业题: 第 5.5 节第 164 页第 2 题第 (2), (5), (6), (7) 小题. 注: 求三角有理函数的不定积分通常很困难, 首先应考虑利用三角函数的关系.

谢谢大家!