第 2 次作业题

1. 求证: 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$ 在原点处不连续, 但沿任何方向的方向导数均存在.

2. 求 $z=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_ix_j$ 在 $P_0=(1,1,\ldots,1)$ 处沿方向 $\vec{\ell}=(-1,-1,\ldots,-1)^T$ 的方向导数.

3. 设 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-xz+yz$, $P=(1,1,1)$, 求 u 在点 P 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \ell}(P)$ 的最值, 并指出取得最值时的方向, 再指出沿哪一个方向的方向导数为零.

4. 证明下列函数所满足的相应等式:

(1) $u=2\cos^2(x-\frac{y}{2})$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$,

(2) $n>0$, $u=(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})^{2-n}$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$.

5. 求由变换 $\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\cos\theta\cos\varphi\\ z=r\sin\varphi\end{cases}$ $(r>0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 所确定的向量值函数 $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(r,\theta,\varphi)\\ f_2(r,\theta,\varphi)\\ f_3(r,\theta,\varphi)\end{pmatrix}$ 的 Jacobi 矩阵和微分.

6. 设 $z=\arctan\frac{u}{v}$, $u=x^2+y^2$, $v=xy$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

7. 已知 $u=f(x,y)$, 其中 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, f 可微, 证明:

$$\big(\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)\big)^2+\big(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta)\big)^2=\big(\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\big)^2+\big(\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\big)^2.$$

8. 设 f 满足 Laplace 方程 $\partial_{11}f+\partial_{22}f=0$, 证明: $u(x,y)=f(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})$ 也满足 Laplace 方程.

9. 设向量值函数 $\mathbf{Y}=\mathbf{f}(\mathbf{U})$, $\mathbf{U}=\mathbf{g}(\mathbf{X})$ 可微, 求复合函数 $\mathbf{Y}=\mathbf{f}\circ\mathbf{g}(\mathbf{X})$ 的 Jacobi 矩阵和全微分, 其中

$$\begin{cases}y_1=u_1+u_2\\ y_2=u_1u_2\\ y_3=\frac{u_2}{u_1}\end{cases},\quad \begin{cases}u_1=\frac{x}{x^2+y^2}\\ u_2=\frac{y}{x^2+y^2}\end{cases}.$$

10. 问方程 $e^{-(x+y+z)}=x+y+z$ 在哪些点附近可确定一个隐函数 $z=z(x,y)$, 并求相应的 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

11. 问方程组 $\begin{cases} x+y+z+z^2=0 \\ x+y^2+z+z^3=0 \end{cases}$ 在点 $P(-1,1,0)$ 的附近能否确定一个向量值函数 $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\mathbf{f}(x)$? 如果能, 求 $y'(-1), z'(-1)$.