微积分 A (2)

姚家燕

第 14 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

关于考试的感悟

- 考试是容易的: 只有两小时!
- 学习是艰难的: 每周两次课, 温习, 作业, ...
- 且行且珍惜!

期中考试时间与地点

时间: 2021 年 4 月 17 日星期六 13:30–15:30

地点: 二教 401 (工物系, 车辆学院)-86,
二教 402 (其余)-73

请大家务必提前 30 分钟到场!

重要提示: 考试时需且只许带学生证和考试用具!

答疑: 4 月 16 日 14:00–17:00 (数学系 A 216)

期中考试内容

- 多元微分学 (第 1 章)
- 含参积分以及广义含参积分 (第 2 章)

§1. n 重积分的概念及其性质

1. 积分的定义

- n 维区间或坐标平行体: 定义

$$I = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_j \leqslant x_j \leqslant b_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

并且将之称为 $\mathbb{R}^n$ 中的区间或者坐标平行体,
其 n 维体积被定义为

$$\mu_n(I) := |I| := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

- 分割: 将每一个区间 $[a_j, b_j]$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ 分成更小的子区间, 由此而得到的小坐标平行体所组成的集合, 称为 I 的一个分割, 记作 P.
- 步长: 设 P 为 I 的一个分割, 定义

$$\lambda(P) = \max_{J \in P} d(J),$$

其中 $d(J)$ 表示坐标平行体 J 的直径, 即 J 中任意两点的最大距离.

- **带点分割:** 假设 $P = \{I_j \mid 1 \leqslant j \leqslant k\}$ 为 I 的分割. 对任意的整数 $1 \leqslant j \leqslant k$, 选取 $\xi_j \in I_j$, 记 $\xi = (\xi_j)_{1\leqslant j\leqslant k}$. 称 (P, ξ) 为 I 的带点分割.
- **Riemann 和:** 设 $f : I \to \mathbb{R}$ 为函数. 定义

$$\sigma(f; P, \xi) = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)|I_j|,$$

称为 f 关于带点分割 (P, ξ) 的 Riemann 和.

- Riemann 可积: 称 $f: I \to \mathbb{R}$ 为 Riemann 可积, 若 $\exists A \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得对 I 的任意带点分割 (P, ξ), 当 $\lambda(P) < \delta$ 时, 均有

$$|\sigma(f; P, \xi) - A| < \varepsilon.$$

此时我们记 $A = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f; P, \xi)$, 并称之为 f 在 I 上的积分, 记作 $\int_I f(X)\,\mathrm{d}X$ 或

$$\underset{I}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

- 同单变量情形一样, 可引入 Darboux 上和、Darboux 下和、振幅, 进而借助它们来刻画 Riemann 可积函数.
- 有界集上的函数的 Riemann 积分:
  如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界集, 可找到坐标平行体 I 包含 Ω. 设 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数. $\forall X \in I$, 定义

$$\widetilde{f}(X) = \begin{cases} f(X), & \text{若 } X \in \Omega, \\ 0, & \text{若 } X \in I \setminus \Omega. \end{cases}$$

如果 $\widetilde{f}$ 在 I 上为 Riemann 可积, 则称 f 在 Ω 上 Riemann 为可积, 此时定义

$$\int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X = \int_I \widetilde{f}(X)\,\mathrm{d}X.$$

可以证明上述定义与坐标平行体 I 的选取无关.

我们将 Ω 上的所有的 Riemann 可积函数的全体记作 $\mathscr{R}(\Omega)$, 该集合可能 "非常小" .

- 当 $n=2$ 时, 通常将 $\int\limits_{\Omega} f(X)\,\mathrm{d}X$ 记作

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \quad 或 \quad \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

该式表示介于曲面 $z=0$ 与 $z=f(x,y)$ 之间且支撑在 Ω 上的立体的体积.

- 当 $n=3$ 时, 通常将 $\int_{\Omega} f(X)\,\mathrm{d}X$ 记作

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V \quad 或 \quad \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

- 示性函数: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $\forall X \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$1_\Omega(X) = \begin{cases} 1, & \text{若 } X \in \Omega, \\ 0, & \text{若 } X \notin \Omega, \end{cases}$$

并称 1_Ω 为集合 Ω 的示性函数.

- Jordan 可测集: 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界集且使得其示性函数 1_Ω 为 Riemann 可积. 此时还称 $\int_\Omega 1_\Omega(X)\,\mathrm{d}X$ 为 Ω 的体积或测度, 记作 $|\Omega|$.

- 不是所有的有界集都有体积.
- 坐标平行体, 球体为 Jordan 可测集.
- “由连续函数定义的集合”为 Jordan 可测.

2. 重要的 Riemann 可积函数类

定理 1. 设有界闭集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测集, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 连续, 则 f 在 Ω 上 Riemann 可积.

注: 上述定理意味着 $\mathscr{C}(\Omega) \subset \mathscr{R}(\Omega)$.

3. Riemann 积分的基本性质

假设有界集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测集.

- **有界性:** 若 $f \in \mathscr{R}(\Omega)$, 则 f 为有界函数.
- **线性性:** $\forall f_1, f_2 \in \mathscr{R}(\Omega)$ 以及 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 我们均有 $af_1 + bf_2 \in \mathscr{R}(\Omega)$, 并且

$$\int_\Omega \big(af_1(X) + bf_2(X)\big)\,\mathrm{d}X = a\int_\Omega f_1(X)\,\mathrm{d}X + b\int_\Omega f_2(X)\,\mathrm{d}X.$$

- 区域可加性: 设 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ 为 Jordan 可测集, 而 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, 且 Ω_1, Ω_2 没有公共的内点, 则函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 在 Ω 上为 Riemann 可积当且仅当 f 在 Ω_1, Ω_2 上 Riemann 可积. 此时

$$\int_{\Omega} f(X)\,\mathrm{d}X = \int_{\Omega_1} f(X)\,\mathrm{d}X + \int_{\Omega_2} f(X)\,\mathrm{d}X.$$

- 保号性: 如果 $f \in \mathscr{R}(\Omega)$ 使得 $\forall X \in \Omega$, 我们均有 $f(X) \geqslant 0$, 则 $\int_{\Omega} f(X)\,\mathrm{d}X \geqslant 0$.

- **严格保号性**: 若 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ 非负且不恒为零, 则我们有 $\int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X > 0$.
- **保序性**: 若 $f, g \in \mathscr{R}(\Omega)$ 使得 $\forall X \in \Omega$, 我们均有 $f(X) \leqslant g(X)$, 则
$$\int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X \leqslant \int_\Omega g(X)\,\mathrm{d}X.$$
- **绝对值不等式**: 若 $f \in \mathscr{R}(\Omega)$, 则 $|f| \in \mathscr{R}(\Omega)$ 且
$$\left|\int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X\right| \leqslant \int_\Omega |f(X)|\,\mathrm{d}X.$$

- 界: 若 $f \in \mathscr{R}(\Omega)$, M, m 为其上、下界, 则

$$m|\Omega| \leqslant \int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X \leqslant M|\Omega|.$$

- 积分中值定理: 若 Ω 还为有界的闭连通集, 而 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, 则 $\exists X_0 \in \Omega$ 使得

$$\int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X = f(X_0)|\Omega|.$$

由此立刻可知, $\forall Y \in \operatorname{Int}\Omega$, 我们有

$$f(Y) = \lim_{r\to0^+} \frac{1}{|\bar{B}(Y,r)|} \int_{\bar{B}(Y,r)} f(X)\,\mathrm{d}X.$$

例 1. (密度) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为 Jordan 可测集, 而 m 为分布在集合 Ω 上的质量. $\forall X_0\in\Omega$, 我们将上述质量在点 X_0 处的密度定义为

$$\rho(X_0)=\lim_{d(D)\to 0}\frac{m(D)}{|D|},$$

其中 $D\subset\Omega$ 为包含点 X_0 的任意 Jordan 可测集, 而 $m(D)$ 为 D 上分布的质量的大小, 此时

$$m(D)=\int_D\rho(X)\,\mathrm{d}X.$$

定理 2. (变量替换) 设 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ 为非空开集, 而 $\varphi = (g_1, \ldots, g_n) : \Omega_1 \to \Omega_2$ 为连续可导的双射并且它的逆映射 $\varphi^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ 也为连续可导. 若 $D_1 \subset \Omega_1$ 为 Jordan 可测集, 那么 $D_2 = \varphi(D_1)$ 也为 Jordan 可测集, 且 $\forall f \in \mathscr{C}(D_2)$, 均有

$$\int_{D_2} f(Y)\,\mathrm{d}Y = \int\cdots\int_{\varphi(D_1)} f(y_1, \ldots, y_n)\,\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n$$

$$= \int\cdots\int_{D_1} f(g_1(X), \ldots, g_n(X)) \left| \frac{D(g_1, \ldots, g_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \right| \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

注: 在 Ω_1, Ω_2 上增减零测度集, 结论依然成立.

§2. 二重积分的计算—累次积分法

定理 1. 假设 $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ 为连续函数使得 $\forall x \in [a, b]$, 均有 $f_1(x) \leqslant f_2(x)$. 则

$$D_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\big\}$$

为 Jordan 可测且 $|D_1| = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\, \mathrm{d}x$.
若 $f : D_1 \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 则

$$\iint\limits_{D_1} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y\Big)\, \mathrm{d}x.$$

定理 2. 假设 $g_1, g_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ 为连续函数使得 $\forall y \in [c,d]$, 均有 $g_1(y) \leqslant g_2(y)$. 则

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y),\ c \leqslant y \leqslant d\right\}$$

为 Jordan 可测且 $|D_2| = \int_c^d \big(g_2(y) - g_1(y)\big)\,\mathrm{d}y$.

若 $f : D_2 \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 则

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

例 1. 计算 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 表示由抛物线 $x=y^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 围成的闭区域.

解: 方法 1. 由题设可知

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2\leqslant x\leqslant y+2,\ -1\leqslant y\leqslant 2\}.$$

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{2}\left(\int_{y^2}^{y+2}xy\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^2y}{2}\bigg|_{y^2}^{y+2}\right)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{2}\frac{y}{2}\Big((y+2)^2-y^4\Big)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\Big(2y^2+\frac{4}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{6}y^6\Big)\bigg|_{-1}^{2}=\frac{45}{8}.$$

方法 2. 由题设, 我们定义

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ -\sqrt{x}\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\},\\
D_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqslant x\leqslant 4,\ x-2\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\},
\end{aligned}
$$

则 $D = D_1\cup D_2$. 于是我们有

$$
\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\Big(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x + \int_1^4\Big(\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x
$$

$$
= \int_1^4 \left(\frac{1}{2}xy^2\Big|_{x-2}^{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^4\left(x^2 - x(x-2)^2\right)\mathrm{d}x
$$

$$
= \frac{1}{2}\Big(-2x^2+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\Big)\Big|_1^4 = \frac{45}{8}.
$$

例 2. 计算 $I=\int_0^1\left(\int_x^1 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

解: 令 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ x\leqslant y\leqslant 1\right\}$,

则 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant y,\ 0\leqslant y\leqslant 1\right\}$. 故

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^y e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 ye^{-y^2}\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(1-e^{-1}). \end{aligned}$$

例 3. 计算椭圆形的圆柱面 $4x^2+y^2=1$ 与平面 $z=1-y$ 以及 $z=0$ 所围成的立体的体积.

解: 令 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2+y^2\leqslant 1\}$, 则所求立体的体积为

$$V=\iint\limits_D (1-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}}(1-y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-4x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{1}{2}\sin t} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{2}\sin t\Big)$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{2}\sin 2t+t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

例 4. 将 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成累次积分, 其中

$$D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1,\ y-x\leqslant 1,\ y\geqslant 0\}.$$

解: 方法 1. 由题设可知积分 D 可以表述成

$$D=\{(x,y)\mid y-1\leqslant x\leqslant 1-y,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

由此我们立刻可得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

方法 2. 区域 D 可分解成 $D_1 \cup D_2$, 其中

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1+x,\ -1 \leqslant x \leqslant 0\}, \\ D_2 &= \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1-x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}. \end{aligned}$$

由此立刻可得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\int_0^{1+x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

例 5. 计算 $\iint\limits_D |y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中

$$D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2\}.$$

解: 由题设立刻可得

$$\iint\limits_D |y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ x^2\leqslant y\leqslant 2}}(y-x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant x^2}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{2}(y-x^2)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{x^2}(x^2-y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(2-2x^2+\frac{1}{2}x^4\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^4\,\mathrm{d}x=\frac{46}{15}.$$

例 6. 求证: $\forall a>0$, 我们有

$$\int_0^a\left(\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^a(a-x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 由题设可知

$$\int_0^a\left(\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant x\\ 0\leqslant x\leqslant a}} f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{y\leqslant x\leqslant a\\ 0\leqslant y\leqslant a}} f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\left(\int_y^a f(y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^a(a-y)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

故所证结论成立.

例 7. 求由曲面 $z=2-x^2-y^2$ 与 $z=x^2+y^2$ 所围成的立体的体积.

解: 令 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\right\}$, 则所求立体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_D \left((2-x^2-y^2)-(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\iint\limits_D (1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$= 2\iint\limits_D (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 8\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= 8\int_0^1 \left((1 - x^2)y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{16}{3}\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{u=x^2}}\ \frac{16}{3}\int_0^1 (1 - u)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\sqrt{u} = \frac{8}{3}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1 - u)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{8}{3}B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{8}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{8}{3}\frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\right)}{2!} = \pi.$$

例 8. 改变 $\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ 的积分次序.

解: 由题设立刻可得

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\left(\int_{\sin x}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\sin x}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\substack{\pi\leqslant x\leqslant2\pi\\\sin x\leqslant y\leqslant0}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\0\leqslant y\leqslant\sin x}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint\limits_{\substack{\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\sin(\pi-x)}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\substack{\pi\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi\\\sin(\pi-x)\leqslant y\leqslant0}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\substack{\frac{3}{2}\pi\leqslant x\leqslant2\pi\\\sin(x-2\pi)\leqslant y\leqslant0}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{1}\left(\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y-\int_{-1}^{0}\left(\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

例 9. 计算由两个平面 $z=x+1$, $z=0$ 与圆柱 $x^2+y^2=4$ 所围成的两个空间区域的体积.

解: 由题设可知所围成的两个空间区域分别为

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant -1,\ 0 \leqslant z \leqslant x+1\right\},\\
\Omega_2 &= \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant 4,\ x \leqslant -1,\ x+1 \leqslant z \leqslant 0\right\}.
\end{aligned}
$$

于是它们的体积分别为

$$
\begin{aligned}
|\Omega_1| &= \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 4\\ x\geqslant -1}} (x+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x+1)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_{-1}^{2} 2(x+1)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 3\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi,
\end{aligned}
$$

$$|\Omega_2| = -\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 4\\ x\leqslant -1}} (x+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{-2}^{-1}\Big(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x+1)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-2}^{-1} 2(x+1)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi.$$

作业题: 第 3.2 节第 127 页第 3 题第 (1) 题, 第 128 页第 5 题, 第 3.3 节第 144 页第 4 题第 (2) 小题, 第 5 题第 (2) 题, 第 6 题第 (3), (5) 题, 第 145 页第 9 题 (题中的立体由两部分组成, 题目要求分别求两部分的体积).

对称性在积分当中的应用

(1) 假设积分区域 D 关于 x 轴对称. (a) 如果有 $f(x,-y)=-f(x,y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

证明: 由变量替换可得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\substack{x=u\\ y=-v}}{=\!=} \iint\limits_D f(u,-v)\left|\frac{D(u,-v)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=-\iint\limits_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=-\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

故所证结论成立.

(b) 如果有 $f(x,-y)=f(x,y)$, 则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D' 为 D 位于 x 轴上侧 (或下侧) 的部分.

证明: 由积分区域的可加性及变量替换可得

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D'} f(u,-v)\left|\frac{D(u,-v)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \iint\limits_{D'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D'} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\iint\limits_{D'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故所证结论成立.

(2) 假设积分区域 D 关于 y 轴对称.

(a) 若 $f(-x,y)=-f(x,y)$, 则我们有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(b) 若 $f(-x,y)=f(x,y)$, 则我们有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D' 为 D 位于 y 轴左侧 (或右侧) 的部分.

(3) 假设积分区域 D 关于原点对称. 如果我们还有 $f(-x,-y)=-f(x,y)$, 则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

证明: 由变量替换可得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\substack{x=-u\\ y=-v}}{=} \iint_D f(-u,-v)\left|\frac{D(-u,-v)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= -\iint_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = -\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故所证结论成立.

例 10. 计算积分 $\iint\limits_D x\sin(y^{99})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为曲线 $y^2=x$ 与直线 $x=1$ 所围成的有界区域.

解: 由题设可知

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ -\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\right\},$$

于是 D 关于 x 轴对称, 并且被积函数 $x\sin(y^{99})$ 关于 y 为奇函数, 从而我们有

$$\iint\limits_D x\sin(y^{99})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

谢谢大家!