第 9 次作业题

1. 比较下列积分的大小:

(1) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$, (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

解: (1) $\forall x \in [0,1]$, 定义 $f(x)=x$, $g(x)=x^2$. 则 f,g 均为连续并且 $f \geqslant g$. 又 $f(\frac{1}{2}) > g(\frac{1}{2})$, 于是由定积分的严格保序性可知 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x > \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

(2) $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, 定义 $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$. 则 f,g 均连续并且 $f \geqslant g$. 注意到 $f(\frac{\pi}{2}) > g(\frac{\pi}{2})$, 则由定积分的严格保序性可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x.$$

2. 求证: $\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

证明: $\forall x \in [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$, 令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则 f 可导, 且 $\forall x \in [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$, 均有

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) \leqslant 0.$$

于是 f 单调递减, 故 $\forall x \in [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$, 均有

$$\frac{2}{\pi} = f(\frac{\pi}{2}) \leqslant f(x) \leqslant f(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

又 f 不为常值函数, 从而由定积分的严格保序性可知

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 求证: 若 $f,g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $\min(f,g), \max(f,g) \in \mathscr{R}[a,b]$.

证明: 由于 $f,g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $f+g, f-g \in \mathscr{R}[a,b]$, 故 $|f-g| \in \mathscr{R}[a,b]$, 于是

$$\begin{aligned}\min(f,g) &= \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g| \in \mathscr{R}[a,b],\\ \max(f,g) &= \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g| \in \mathscr{R}[a,b].\end{aligned}$$

4. 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 且 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $f(x) > 0$, 求证:

$$\Big(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\Big) \geqslant (b-a)^2.$$

证明: 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 且 f 严格正, 则 $\frac{1}{f} \in \mathscr{C}[a,b]$. 由 Cauchy 不等式可知

$$\Big(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\Big) \geqslant \Big(\int_a^b \sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x\Big)^2 = (b-a)^2.$$

5. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}}}=1.$

证明: $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}}} &\leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2}e^{\frac{1}{n^2+n}}}=e^{-\frac{1}{n^2+n}}\leqslant 1,\\ \int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}}} &\geqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+n}e^{\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}e^{\frac{1}{n^2}}}.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}e^{\frac{1}{n^2}}}=1$, 于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}}}=1.$

6. 求下列函数的导函数:

(1) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, (2) $F(x)=\int_0^{\arctan x}\tan t\,\mathrm{d}t$.

解: (1) 由题设我们可知

$$F'(x)=e^{-(x^2)^2}\cdot(x^2)'-e^{-(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})'=2xe^{-x^4}-\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}.$$

(2) 由题设可知 $F'(x)=\tan(\arctan x)\cdot(\arctan x)'=\frac{x}{1+x^2}$.

7. 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^y e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t=0$ 确定, 求 $y'(x)$.

解: 将方程两边对 x 求导可得 $e^{-y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos x^2=0$, 于是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-e^{y^2}\cos x^2$.

8. 设曲线 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^t\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u$, $y=\int_1^t\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$ 来确定, 求该曲线在 $t=\frac{\pi}{4}$ 时的斜率.

解: 由题设可知 $x'(t)=\frac{\cos t}{t}$, $y'(t)=\frac{\sin t}{t}$, 故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\sin t}{\cos t}=\tan t$. 从而所求曲线在 $t=\frac{\pi}{4}$ 时的斜率为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=1$.

9. 若 $f\in\mathscr{C}[0,+\infty)$ 使得 $\forall x\geqslant 0$, 均有 $\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\,\mathrm{d}t=x+\sin x$, 求 $f(x)$.

解: 将方程两边对 x 求导可得 $\frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}=1+\cos x$, 则 $f(x)=2x(1+\cos x^2)$.

10. $\forall x\in\mathbb{R}$, 定义 $F(x)=\int_0^x te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 的极值点与拐点的横坐标.

解: 由题设可知 F 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 并且 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $F'(x)=xe^{-x^2}$. 于是 F' 在 $(0,+\infty)$ 上取正号, 而在 $(-\infty,0)$ 上取负号, 故 F 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增, 而在 $(-\infty,0]$ 上严格递减, 从而 $x=0$ 为函数 F 的唯一极值点且为最小值点, 相应的最小值为 0. 又 $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$F''(x)=e^{-x^2}+xe^{-x^2}\cdot(-x^2)'=(1-2x^2)e^{-x^2},$$

则 F'' 在 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 上取正号, 在 $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 和 $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 上取负号, 由此可知 F 在$[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 上严格凸, 在 $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 和 $[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 上严格凹, 故 F 只有两个拐点, 它们的横坐标分别为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \arctan t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2}}$, (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_{\sin x}^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^3}$.

解: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \arctan t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \arctan t^2\,\mathrm{d}t}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \arctan t^2\,\mathrm{d}t}{x}$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x^2=\frac{\pi}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_{\sin x}^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-\sin^2 x}\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\cos^2 x}{3x^2}$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+2\sin x\cos x}{6x}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

12. 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & 若\ x\in[-1,0) \\ x, & 若\ x\in[0,1]\end{cases}$. $\forall x\in[-1,1]$, 令 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 讨论函数 F 的连续性与可导性.

解: 有界函数 f 在 $[-1,1]\setminus\{0\}$ 上连续, 则 $f\in\mathscr{R}[-1,1]$, 故 F 在 $[-1,1]$ 上连续且在 $[-1,1]\setminus\{0\}$ 上可导. 又点 $x=0$ 为 f 的跳跃间断点, 则

$$F'_-(0)=f(0-0)=1,\ F'_+(0)=f(0+0)=0,$$

故函数 F 在点 $x=0$ 处不可导.

13. 若 $f\in\mathscr{C}^{(2)}[a,b]$, 求证: $\exists\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f\big(\frac{a+b}{2}\big)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

证明: $\forall t\in[a,b]$, 定义 $F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $F'=f$. 由于 $f\in\mathscr{C}^{(2)}[a,b]$, 故 $F\in\mathscr{C}^{(3)}[a,b]$. 于是由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知, 存在 $\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$ 以及 $\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$ 使得我们有

$$\begin{aligned}
F(a) &= F\big(\frac{a+b}{2}\big)+F'\big(\frac{a+b}{2}\big)\big(a-\frac{a+b}{2}\big)\\
&\quad+\frac{1}{2!}F''\big(\frac{a+b}{2}\big)\big(a-\frac{a+b}{2}\big)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)\big(a-\frac{a+b}{2}\big)^3,\\
F(b) &= F\big(\frac{a+b}{2}\big)+F'\big(\frac{a+b}{2}\big)\big(b-\frac{a+b}{2}\big)\\
&\quad+\frac{1}{2!}F''\big(\frac{a+b}{2}\big)\big(b-\frac{a+b}{2}\big)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_2)\big(b-\frac{a+b}{2}\big)^3.
\end{aligned}$$

再注意到 $F(a)=0$, $F'=f$, $F''=f'$, $F'''=f''$, 于是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)=f\big(\frac{a+b}{2}\big)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}\cdot\frac{1}{2}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2)).$$

因 f'' 连续, 则由连续函数介值定理可知, 存在 ξ 介于 ξ_1,ξ_2 之间使得

$$f''(\xi)=\frac{1}{2}\big(f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\big),$$

由此立刻可知所证结论成立.

14. 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 在 (a,b) 内连续, 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明: $\forall t \in [a,b]$, 令 $F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$. 由于 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 在 (a,b) 内连续, 则 $F \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导且 $\forall t \in (a,b)$, 均有 $F'(t) = f(t)$. 于是由 Lagrange 中值定理可知, $\exists \xi \in (a,b)$ 使得我们有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a).$$

15. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = 1.$

证明: 方法 1. $\forall n \geqslant 1$, 令 $I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$, 则 $I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$. 又 $\forall x \in [0,1]$, $x^n \geqslant x^{n+1}$, 故 $I_n \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{n+1}} = I_{n+1}$. 于是数列 $\{I_n\}$ 单调递增有上界, 因此收敛, 设其极限为 I. $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall \varepsilon \in (0,1)$, 我们有

$$1 \geqslant I_n \geqslant \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} \geqslant \frac{1-\varepsilon}{1+(1-\varepsilon)^n}.$$

由数列极限保序性知 $1 \geqslant I \geqslant 1-\varepsilon$. 又 $\varepsilon \in (0,1)$ 可任意小, 因此 $I = 1$.

方法 2. $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned} &\Big|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} - 1\Big| = \Big|\int_0^1 \Big(\frac{1}{1+x^n} - 1\Big)\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_0^1 \frac{-x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x\Big| \\ = \;& \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

于是由夹逼原理可知所证结论成立.

16. 问下列函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否有原函数? 若有, 求出原函数, 若没有, 请说明理由.

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & 若\ x \leqslant 0 \\ \cos x, & 若\ x > 0 \end{cases}$, (2) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & 若\ x \leqslant 0 \\ \cos x + \frac{\pi}{4}, & 若\ x > 0 \end{cases}$.

解: (1) 由于 f 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上均为初等函数, 因此连续. 又

$$f(0-0) = 1 = f(0+0) = f(0),$$

故 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, 因此 f 在 $\mathbb{R}$ 上有原函数, 并且当 $x \leqslant 0$ 时,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + x + C_1,$$

而当 $x > 0$ 时, $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C_2$. 又原函数在点 $x = 0$ 连续, 故 $C_1 = C_2$, 从而所求原函数为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x + C, & 若\ x \leqslant 0, \\ \sin x + C, & 若\ x > 0. \end{cases}$$

(2) 题设函数没有原函数.

方法 1. 由于点 $x=0$ 为 f 的跳跃间断点, 于是 f 没有原函数.

方法 2. 用反证法, 假设题设函数有原函数 F. 因 $F'=f$ 在 $(-\infty,0]$ 上连续, 则由 Newton-Leibniz 公式可知 $\forall x\leqslant 0$, 均有

$$F(x)=F(0)+\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=F(0)+\int_0^x (t^2+1)\,\mathrm{d}t=F(0)+\frac{1}{3}x^3+x.$$

同样由于 $F=f'$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 则 $\forall x>0$, 均有

$$F(x)=F(\pi)+\int_\pi^x \big(\cos t+\frac{\pi}{4}\big)\,\mathrm{d}t=F(\pi)+\sin x+\frac{\pi}{4}(x-\pi).$$

由于原函数 F 在点 $x=0$ 处可导且 $F'(0)=f(0)=1$, 于是

$$1=F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x+\frac{\pi}{4}x}{x}=1+\frac{\pi}{4},$$

矛盾! 故 F 在点 $x=0$ 处不可导, 从而 f 在 $\mathbb{R}$ 上没有原函数.

17. 求下列不定积分:

(1)	$\int (x-x^{-2})\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,	(2)	$\int (1-2\cot^2 x)\,\mathrm{d}x$,
(3)	$\int \big(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}+\sin x\big)\mathrm{d}x$,	(4)	$\int \lvert(x-1)(3x-2)\rvert\,\mathrm{d}x$,
(5)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\arctan x}$,	(6)	$\int \frac{1}{x^2}\mathrm{sh}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$,
(7)	$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,	(8)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$,
(9)	$\int \sec x\,\mathrm{d}x$,	(10)	$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x\ (a>0)$,
(11)	$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\mathrm{d}x$,	(12)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}}$,
(13)	$\int \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}\mathrm{d}x$.		

解: (1) $\int (x-x^{-2})\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int (x^{\frac{7}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})\mathrm{d}x=\frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C.$

(2) $\int (1-2\cot^2 x)\,\mathrm{d}x=\int (3-2\csc^2 x)\,\mathrm{d}x=3x+2\cot x+C.$

(3) $\int \big(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}+\sin x\big)\mathrm{d}x=4\arcsin x-\cos x+C.$

(4) 当 $x\leqslant\frac{2}{3}$ 时, 我们有

$$\int \lvert(x-1)(3x-2)\rvert\,\mathrm{d}x=\int (3x^2-5x+2)\,\mathrm{d}x=x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+C_1.$$

当 $\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1$ 时, 我们有

$$\int \lvert(x-1)(3x-2)\rvert\,\mathrm{d}x=-\int (3x^2-5x+2)\,\mathrm{d}x=-x^3+\frac{5}{2}x^2-2x+C_2.$$

当 $x\geqslant 1$ 时, 我们有

$$\int \lvert(x-1)(3x-2)\rvert\,\mathrm{d}x=\int (3x^2-5x+2)\,\mathrm{d}x=x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+C_3.$$

由于原函数为连续函数，因此 $\frac{14}{27}+C_1=-\frac{14}{27}+C_2$，$-\frac{1}{2}+C_2=\frac{1}{2}+C_3$，由此可得 $C_1=-\frac{28}{27}+C_2$，$C_3=-1+C_2$，故

$$\int|(x-1)(3x-2)|\,\mathrm{d}x=\begin{cases} x^3-\frac{5}{2}x^2+2x-\frac{28}{27}+C, & \text{若 } x\leqslant\frac{2}{3},\\ -x^3+\frac{5}{2}x^2-2x+C, & \text{若 } \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1,\\ x^3-\frac{5}{2}x^2+2x-1+C, & \text{若 } x\geqslant 1.\end{cases}$$

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\arctan x}=\int\frac{\mathrm{d}(\arctan x)}{\arctan x}=\log|\arctan x|+C.$

(6) $\int\frac{1}{x^2}\mathrm{sh}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=-\int\mathrm{sh}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\big(\frac{1}{x}\big)=-\mathrm{ch}\,\frac{1}{x}+C.$

(7) $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\sin\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})=-\cos\sqrt{1+x^2}+C.$

(8) $\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{1+e^{-2x}}=-\int\frac{\mathrm{d}(e^{-x})}{1+(e^{-x})^2}=-\arctan(e^{-x})+C.$

(9) **方法 1.** $\int\sec x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$

$$\begin{aligned}
&=\int\frac{2\mathrm{d}\frac{x}{2}}{(1-\tan^2\frac{x}{2})\cos^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\\
&=\int\Big(\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}-\frac{1}{\tan\frac{x}{2}-1}\Big)\mathrm{d}(\tan\tfrac{x}{2})\\
&=\log\Big|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\Big|+C=\log\Big|\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}\Big|+C\\
&=\log\Big|\frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}\Big|+C=\log\Big|\frac{1+\sin x}{-\cos x}\Big|+C\\
&=\log|\sec x+\tan x|+C.
\end{aligned}$$

方法 2. $\int\sec x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x}$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\Big)\mathrm{d}(\sin x)\\
&=\frac{1}{2}\log\Big|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big|+C=\frac{1}{2}\log\Big|\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\Big|+C\\
&=\log\Big|\frac{1+\sin x}{\cos x}\Big|+C=\log|\sec x+\tan x|+C.
\end{aligned}$$

(10) $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x\overset{x=a\tan t}{\underset{|t|<\frac{\pi}{2}}{=}}\int\frac{a^2\tan^2 t}{\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}}\,\mathrm{d}(a\tan t)$

$$\begin{aligned}
&=\int\frac{a^2\tan^2 t}{\frac{a}{\cos t}}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{a^2\sin^2 t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t=a^2\int\Big(\frac{1}{\cos^3 t}-\frac{1}{\cos t}\Big)\mathrm{d}t\\
&=a^2\int\Big(\frac{1}{\cos^4 t}-\frac{1}{\cos^2 t}\Big)\mathrm{d}(\sin t)\overset{u=\sin t}{=}a^2\int\Big(\frac{1}{(1-u^2)^2}-\frac{1}{1-u^2}\Big)\mathrm{d}u\\
&=a^2\int\bigg(\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\Big)^2-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\Big)\bigg)\mathrm{d}u\\
&=\frac{a^2}{4}\int\bigg(\frac{1}{(u-1)^2}-\frac{2}{(u+1)(u-1)}+\frac{1}{(u+1)^2}-2\Big(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\Big)\bigg)\mathrm{d}u\\
&=\frac{a^2}{4}\int\bigg(\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\bigg)\mathrm{d}u\\
&=\frac{a^2}{4}\bigg(\frac{1}{1-u}-\frac{1}{u+1}+\log\frac{|u-1|}{|u+1|}\bigg)+C_1\\
&=\frac{a^2}{4}\bigg(\frac{2u}{1-u^2}+\log\frac{|u-1|}{|u+1|}\bigg)+C_1\\
&=\frac{a^2}{4}\bigg(\frac{2\sin t}{\cos^2 t}+\log\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\bigg)+C_1\\
&=\frac{a^2}{4}\bigg(\frac{\frac{2x}{a}}{\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}}+\log\frac{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}\bigg)+C_1\\
&=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{4}\log\frac{\sqrt{x^2+a^2}-x}{\sqrt{x^2+a^2}+x}+C_1\\
&=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{4}\log\frac{a^2}{(\sqrt{x^2+a^2}+x)^2}+C_1\\
&=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\log|\sqrt{x^2+a^2}+x|+C.
\end{aligned}$$

(11) 当 $x>2$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x \overset{x=2\sec t}{\underset{0\leqslant t<\frac{\pi}{2}}{=}} \int \frac{\sqrt{(2\sec t)^2-4}}{2\sec t}\,\mathrm{d}(2\sec t)\\
&=\int \frac{2\frac{\sin t}{\cos t}}{\frac{1}{\cos t}}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&=2\int\Big(\frac{1}{\cos^2 t}-1\Big)\,\mathrm{d}t = 2(\tan t - t)+C_1\\
&=\sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+C_1.
\end{aligned}
$$

当 $x<-2$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x \overset{u=-x}{=} \int \frac{\sqrt{u^2-4}}{-u}\,\mathrm{d}(-u) = \sqrt{u^2-4}-2\arccos\frac{2}{u}+C_2\\
&=\sqrt{x^2-4}-2\big(\pi-\arccos\frac{2}{x}\big)+C_2=\sqrt{x^2-4}+2\arccos\frac{2}{x}+C_3.
\end{aligned}
$$

综上所述可知

$$
\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+C, & \text{若 } x>2,\\ \sqrt{x^2-4}+2\arccos\frac{2}{x}+C, & \text{若 } x<-2.\end{cases}
$$

(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}} \overset{x=a\sin t}{\underset{0<|t|<\frac{\pi}{2}}{=}} \int \frac{\mathrm{d}(a\sin t)}{a\sin t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}} = \frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{a}\log|\csc t-\cot t|+C=\frac{1}{a}\log\Big|\frac{1-\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}{\frac{x}{a}}\Big|+C\\
&=\frac{1}{a}\log\Big|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\Big|+C.
\end{aligned}
$$

(13) **方法 1.** $\int \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}\mathrm{d}x = \int \frac{2x-1}{\sqrt{(2x+1)^2+4}}\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
&\overset{t=2x+1}{=} \int \frac{t-2}{2\sqrt{t^2+4}}\mathrm{d}t = \int\frac{t}{2\sqrt{t^2+4}}\mathrm{d}t-\int\frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\mathrm{d}t\\
&=\int\frac{1}{4\sqrt{t^2+4}}\mathrm{d}(t^2+4)-\int\frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+4}-\log|t+\sqrt{t^2+4}|+C\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5}-\log|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}|+C.
\end{aligned}
$$

方法 2. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\frac{(4x^2+4x+5)'}{\sqrt{4x^2+4x+5}}\mathrm{d}x - \int\frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5}-\int\frac{\mathrm{d}(2x+1)}{\sqrt{4+(2x+1)^2}}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5}-\int\frac{\mathrm{d}(2x+1)}{\sqrt{4+(2x+1)^2}}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5}-\log|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}|+C.
\end{aligned}
$$