第15-16周习题课题目解答

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 函数列与函数项级数的收敛性

(1) **函数列的收敛性:**

(a) **点态收敛:** 收敛点, 发散点, 收敛域, 极限函数.

(b) **一致收敛性:** 函数列 $\{v_n\}$ 在集合 J 上一致收敛到函数 v 当且仅当我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in J}|v_n(x)-v(x)|=0.$$

(c) **极限函数的分析性质:** 内闭一致收敛的连续函数列的极限函数连续.

(2) **函数项级数的收敛性:**

(a) **点态收敛:** 收敛点, 发散点, 收敛域, 和函数.

(b) **一致收敛性:** 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 在集合 J 上一致收敛当且仅当我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in J}\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\Big|=0,$$

此时函数列 $\{u_n\}$ 在集合 J 上一致趋于 0.

(c) **函数项级数"和函数"的分析性质:**

(i) **极限与级数求和可交换性:** 通项连续且内闭一致收敛的函数项级数的和函数为连续函数.

(ii) **积分与级数求和可交换性:** 通项连续且内闭一致收敛的函数项级数, 求积分与求和可交换次序.

(iii) **求导与级数求和可交换性:** 若通项为连续可导的函数项级数在一点处收敛, 而对通项求导所得的函数项级数内闭一致收敛, 则最初的那个函数项级数的和函数连续可导, 且对该函数级数求导与求和可交换次序.

(3) 函数列、函数项级数、含参广义积分理论三者统一.

(4) **判断函数项级数一致收敛性的方法:**

(a) 定义, Cauchy 准则.

(b) **Weierstrass 判别法:** 若存在非负常数项收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 使得 $\forall n\geqslant 1$ 以及 $\forall x\in J$, 均有 $|u_n(x)|\leqslant M_n$, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 在 J 上绝对收敛且一致收敛.

(c) **Dirichlet 判别准则:** 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的"部分和"一致有界, 而函数列 $\{v_n\}$ 单调且一致趋于 0, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 一致收敛.

(d) **Abel 判别准则:** 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一致收敛, 而函数列 $\{v_n\}$ 单调并且一致有界, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 一致收敛.

3. 幂级数

(1) **幂级数的收敛性:**

(a) **收敛半径的确定:** 根值判别法, 比率判别法.

(b) **Abel 定理:** 幂级数在其收敛域的内部绝对收敛且内闭一致收敛.

(c) **Abel 第二定理:** 幂级数在其收敛域的任意闭子区间上一致收敛.

(2) **幂级数的性质:**

(a) **四则运算性质:** 线性性, 乘法, 除法.

(b) **分析运算性质:** 幂级数在其收敛域上连续; 在其收敛域内部无穷可导; 对之积分或求导均可与求和交换次序, 所得依然为幂级数且收敛半径不变.

4. 幂级数展开–Taylor 级数

(1) **幂级数展开的条件:**

(a) **必要条件:** 函数在该点无穷可导.

(b) **唯一性:** 若展式存在, 则唯一.

(c) **充要条件:** 函数在该点的 Taylor 展式的余项趋于 0.

(d) **常用的充分条件:** 函数在该点某个邻域内的各阶导数一致有界.

(2) **幂级数展开:**

(a) **常用函数的 Taylor 级数展开.**

(b) **将函数展成幂级数的典型方法:** 直接法 (定义), 间接法 (从已知幂级数展式出发, 借助幂级数的四则运算与分析运算).

函数项级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

(1) 收敛域 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$是定义在$D$上的一个函数项级数，$x_0 \in D$, 若数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛，则称$x_0$是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一个**收敛点**. 所有收敛点构成的集合称为级数的**收敛域**.

(2) “和函数”的概念 函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域为$I$，则任给$x \in I$, 存在惟一的实数$S(x)$，使得$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$成立. 定义在$I$上的函数$S(x)$称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的**“和函数”**.

(3) 幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域

幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

- 若$R\geq 0$满足：(1) 当$|x|<R$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛；
(2) 当$|x|>R$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散，则称$R$为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的**收敛半径**，开区间$(-R,R)$称为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的**收敛区间**.
- **收敛域**：考虑$x=\pm R$的两个端点的收敛性;
- 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的系数$a_n$满足$a_n\neq 0$, 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$, 则其收敛半径为$R=\frac{1}{\rho}$.
- 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的系数$a_n$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$, 则其收敛半径为$R=\frac{1}{\rho}$.

(4) 幂级数的和函数

(5) 幂级数在其收敛区间内的基本性质

- **两级数和的收敛半径**：若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R_1$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径为$R_2$，一般情况下，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$的收敛半径为
$R\geq\min\{R_1,R_2\}$, 且
$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\quad x\in(-R,R).$$
- **和函数的连续性**：幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛域$I$上连续，即任给$x_0\in I$，有
$$\lim_{x\to x_0}S(x)=\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\lim_{x\to x_0}a_nx^n)=S(x_0).$$
- **和函数的可积性与逐项积分性质** 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛域$I$上可积，且可逐项积分，即任给$x\in I$，有
$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^x a_nt^ndt)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$
若记$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径为$R_1$, 可证明收敛半径相同，但收敛域可能改变.
- **和函数的可导性与逐项求导公式**：幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛区间$(-R,R)$内可导，且可逐项求导，即任给$x\in(-R,R)$, 有
$$S'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

(6) 初等幂级数展开式

- **直接展开法** 直接展开法指的是：利用泰勒级数的定义及泰勒级数收敛的充要条件，将函数在某个区间上直接展开成指定点的泰勒级数的方法.

  由直接展开法易知函数$e^x, \cos x, \sin x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$的麦克劳林级数展开式为：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, \ x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots, \ x \in (-1, 1],$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ...,$$

  其中，当$\alpha \le -1$时，$x \in (-1, 1)$; 当$-1 < \alpha < 0$时，$x \in (-1, 1]$; 当$\alpha > 0$时，$x \in [-1, 1]$.

  特别地，当$\alpha = -1$时，有$\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1)$.

- **间接展开法** 间接展开法指的是：通过一定运算将函数转化为其他函数，进而利用新函数的幂级数展开将原来函数展开为幂级数的方法. 所用的运算主要是加法运算，数乘运算，(逐项）积分运算和（逐项）求导运算. 利用的幂级数展开公式主要是一些简单函数的麦克劳林展开公式，上述几个简单函数就是常用的几个. 间接展开法是将函数展开成幂级数的主要方法.

(7) Fourier级数

- $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$ **是**$C[-\pi, \pi]$**中的一个正交向量组**：$\forall n, m \in \mathbb{N}^+$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \begin{cases} \pi, \ n = m, \\ 0, \ n \ne m, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = \begin{cases} \pi, \ n = m, \\ 0, \ n \ne m, \end{cases}$$

- 设$f \in R[-\pi,\pi]$, 则$f(x)$的形式**Fourier级数**为:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

  其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,\cdots$$

- 设$f(x)$以2π为周期，**奇函数**, 则$f(x)$的形式**正弦Fourier级数**为:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx,$$

  其中

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,\cdots$$

- 设$f(x)$以2π为周期，**偶函数**, 则$f(x)$的形式**余弦Fourier级数**为:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx,$$

  其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

- 设$f(x)$以$2l$为周期，f在$[-l,l]$上可积，则$f(x)$的形式**Fourier级数**为:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x],$$

  其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos \frac{n\pi}{l}x dx, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin \frac{n\pi}{l}x dx, \quad n = 1,2,\cdots$$

- 设以2π为周期的函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上逐段可微，则$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, f的形式Fourier级数在x_0点收敛于$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$. 特别地，若$f$在$x_0$点连续，则$f$的形式Fourier级数在$x_0$点收敛于$f(x_0)$.

  应用到具体函数，可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

第 2 部分 习题课题目解答

1. 假设 I 为非空集合并且 $\forall n \geqslant 1$, 函数 f_n 均在 I 上有界. 若函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛到函数 f, 则 f 在 I 上有界且函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 由题设可知 $\exists M_n > 0$ 使得 $\forall x \in I$, 我们均有 $|f_n(x)| \leqslant M_n$. 又函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛到函数 f, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n \geqslant N$ 以及 $\forall x \in I$, 均有 $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1$. 于是 $\forall x \in I$, 我们有

$$|f(x)| \leqslant |f_N(x) - f(x)| + |f_N(x)| \leqslant 1 + M_N.$$

也即函数 f 在 I 上有界. 定义 $M = 2 + \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant N} M_n$. 于是 $\forall x \in I$ 以及 $\forall n \geqslant 1$, 当 $1 \leqslant n \leqslant N$ 时, 我们有 $|f_n(x)| \leqslant M_n < M$, 而当 $n > N$ 时, 则有

$$|f_n(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leqslant 1 + 1 + M_N \leqslant M,$$

因此函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界.

2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上是否为一致收敛?

解: $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x \geqslant 0$, 我们有 $0 \leqslant e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-nx} \leqslant 1$, 故函数列 $\{e^{-nx}\}$ 单调并在 $[0, +\infty)$ 上一致有界. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 由 Abel 判别准则可知函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

3. 求证: 和函数 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^2 e^{-nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且有界.

证明: $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $u_n(x) = \sqrt{n} x^2 e^{-nx}$, 则

$$u_n'(x) = \sqrt{n}(2xe^{-nx} - nx^2 e^{-nx}) = \sqrt{n}(2 - nx)xe^{-nx}.$$

则 u_n' 在 $(0, \frac{2}{n})$ 上严格正而在 $(\frac{2}{n}, +\infty)$ 上严格负, 于是 u_n 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值点为 $x = \frac{2}{n}$, 也即 $\forall x \geqslant 0$, 均有 $0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{4}{e^2} n^{-\frac{3}{2}}$. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{e^2} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 从而由 Weierstrass 判别法可知原函数项级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛, 且 $\forall x \geqslant 0$, 我们有 $|S(x)| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{e^2} n^{-\frac{3}{2}}$. 又该函数项级数的通项在 $[0, +\infty)$ 上连续, 于是由极限与级数求和可交换性可知 $S \in \mathscr{C}[0, +\infty)$.

4. 求证: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} x^{n-1}(x-1)^2$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

证明: $\forall n \geqslant 2$ 以及 $\forall x \in [0, 1]$, 定义 $f_n(x) = x^{n-1}(x-1)^2$, 则

$$f_n'(x) = x^{n-2}(x-1)\big((n+1)x - (n-1)\big),$$

从而 f_n 在 $[0, \frac{n-1}{n+1}]$ 上递增, 而在 $[\frac{n-1}{n+1}, 1]$ 上递减, 则 f_n 在点 $x = \frac{n-1}{n+1}$ 处取最大值 $(\frac{n-1}{n+1})^{n-1}(\frac{2}{n+1})^2$. 又 $n \to \infty$ 时, $(\frac{n-1}{n+1})^{n-1}(\frac{2}{n+1})^2 \sim \frac{4}{e^2 n^2}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{e^2 n^2}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法可知所证结论成立.

5. 设 $f \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R})$. $\forall n \geqslant 1$ 及 $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $g_n(x) = n\big(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\big)$. 求证:

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $(b > a)$, 函数列 $\{g_n\}$ 在任意闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛到 f'.

(2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $(b > a)$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

证明: (1) 固定 $a, b \in \mathbb{R}$ $(b > a)$. 由于 f' 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 因此它在 $[a, b+1]$ 上一致连续, 从而 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in [a, b+1]$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 我们均有 $|f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$. 令 $N = [\frac{1}{\delta}] + 1$, 于是 $\forall n > N$ 以及 $\forall x \in [a, b]$, 我们由 Lagrange 中值定理可知 $\exists \xi_n(x) \in (x, x+\frac{1}{n})$ 使得我们有 $g_n(x) = f'(\xi_n(x))$. 但 $|\xi_n(x) - x| < \frac{1}{n} < \delta$, 则 $|g_n(x) - f'(x)| < \varepsilon$, 故所证结论成立.

(2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $(b > a)$, 由于函数列 $\{g_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 f', 于是由极限与积分次序可交换性得 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

6. 设 $a, b \in \mathbb{R}$ 使得 $a < b$. 若 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $u_n \in \mathscr{C}[a, b]$ 且函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 (a, b) 内一致收敛, 求证:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 均收敛;

(2) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

证明: 由题设以及 Cauchy 准则知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall m > n > N$ 以及 $\forall x \in (a, b)$, 均有 $\big|\sum\limits_{k=n}^{m} u_k(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$. 但由题设可知 $\forall k \geqslant 1$, 均有 $u_k \in \mathscr{C}[a, b]$, 于是由连续性立刻可得 $\big|\sum\limits_{k=n}^{m} u_k(a)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, 以及 $\big|\sum\limits_{k=n}^{m} u_k(b)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, 进而可知 $\forall m > n > N$ 以及 $\forall x \in [a, b]$, 均有 $\big|\sum\limits_{k=n}^{m} u_k(x)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, 由 Cauchy 准则可得: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 收敛, 而函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

7. 求证: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{nx^n}$ 在 $(1, +\infty)$ 上不为一致收敛.

证明: 用反证法, 假设原函数项级数在 $(1, +\infty)$ 上一致收敛, 则它在 $(1, 2)$ 上也为一致收敛. 由于其通项均为连续函数, 故由前题可知它在点 $x = 1$ 处也收敛, 即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n)}{n}$ 收敛. 又 $\forall n \geqslant 2$, 均有 $\frac{\log(1+n)}{n} \geqslant \frac{1}{n}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则由比较法则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n)}{n}$ 发散. 矛盾! 故所证结论成立.

8. 请问函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是否一致收敛?

解: $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x > 0$, 令 $u_n(x) = ne^{-nx}$. 则

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} |u_n(x)| = \lim_{n\to\infty} n = +\infty,$$

即函数列 $\{u_n\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不为一致趋于 0, 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不为一致收敛.

9. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ $(x>0)$, 求 $\int_{\log 2}^{\log 3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

解: $\forall x\in[\log 2,\log 3]$ 以及 $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $ne^{-nx}\leqslant \frac{n}{2^n}$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{2^n})^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $[\log 2,\log 3]$ 上一致收敛, 进而可得

$$\begin{aligned}\int_{\log 2}^{\log 3} f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\log 2}^{\log 3} ne^{-nx}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(-e^{-nx}\Big)\Big|_{\log 2}^{\log 3}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\Big)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

10. 请问函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}}$ 在 $[0,1]$ 上是否一致收敛?

解: $\forall n\geqslant 1$ 以及 $\forall x\in[0,1]$, 定义 $u_n(x)=\frac{(x+n)^n}{n^{n+1}}$, 则

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\frac{\frac{(x+n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{(x+n)^n}{n^{n+1}}}=\frac{(1+\frac{1}{x+n})^n}{(1+\frac{1}{n})^n}\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}<1,$$
$$0<u_n(x)\leqslant u_n(1)=(1+\tfrac{1}{n})^n\tfrac{1}{n}<\tfrac{e}{n}.$$

于是函数列 $\{u_n\}$ 单调递减且在 $[0,1]$ 上一致趋于 0, 从而由 Dirichlet 判别法可知原函数项级数在 $[0,1]$ 上一致收敛.

11. $\forall x>1$, 令 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$. 求证: $\zeta\in\mathscr{C}^{(\infty)}(1,+\infty)$.

证明: 固定整数 $k\geqslant 0$. $\forall x>1$, 定义 $\zeta_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\log n)^k}{n^x}$.

固定 $a>1$. $\forall x\geqslant a$ 以及 $\forall n\geqslant 1$, 我们均有 $\frac{1}{n^x}\leqslant\frac{1}{n^a}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^k}{n^a}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法可知函数项级数 ζ_k 在 $(a,+\infty)$ 上一致收敛.

下面对 $k\geqslant 0$ 用数学归纳法证明 ζ 在 $(a,+\infty)$ 上为 k 阶可导且 $\zeta^{(k)}=\zeta_k$.

当 $k=0$ 时, 由定义得 $\zeta_0=\zeta$, 又该函数项级数在 $(a,+\infty)$ 上一致收敛且其通项在 $(a,+\infty)$ 上连续, 于是 $\zeta\in\mathscr{C}(a,+\infty)$.

假设所证结论对 $k\geqslant 0$ 成立. $\forall n\geqslant 1$ 以及 $\forall x>a$, 我们有

$$\Big(\frac{(-1)^k(\log n)^k}{n^x}\Big)'=\frac{(-1)^{k+1}(\log n)^{k+1}}{n^x},$$

而函数项级数 ζ_{k+1} 在 $(a,+\infty)$ 上一致收敛, 由归纳假设以及求导与级数求和可交换性可知 $\zeta^{(k)}=\zeta_k$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导且 $\forall x>a$, 我们均有

$$\zeta^{(k+1)}(x)=\zeta_k'(x)=\zeta_{k+1}(x),$$

也即所证结论对 $k+1$ 也成立. 由数学归纳法可知 ζ 在 $(a,+\infty)$ 上无穷可导. 又 $\forall x\in(1,+\infty)$, 令 $a=\frac{1}{2}(1+x)$, 则 $1<a<x$, 故 $x\in(a,+\infty)$, 从而知 ζ 在点 x 处无穷可导, 进而由 x 的任意性可知 $\zeta\in\mathscr{C}^{(\infty)}(1,+\infty)$ 上无穷可导.

12. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 的收敛域 D, 并证明该函数项级数的和函数 S 在 D 上连续, 在 $\mathrm{Int}D$ 内*(即 "D的内部")* 连续可导.

解: 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{-nx}}{1+n^2}}=e^{-x}$, 于是由根值判别法知原级数在 $x>0$ 时收敛, 而在 $x<0$ 时发散. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ 收敛, 从而所求收敛域为 $[0,+\infty)$.

$\forall n\geqslant 1$ 以及 $\forall x\geqslant 0$, 我们有 $\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\leqslant\frac{1}{1+n^2}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ 收敛, 从而由 Weierstrass 判别法知原函数项级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 该函数项级数的通项在 $[0,+\infty)$ 上连续, 由极限与级数求和可交换性可知 $S\in\mathscr{C}[0,+\infty)$.

固定 $b>a>0$. $\forall n\geqslant 1$ 以及 $\forall x\in[a,b]$, 均有 $|-\frac{ne^{-nx}}{1+n^2}|\leqslant e^{-na}$. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-na}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法可知函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 即该函数项级数在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛, 于是由求导与级数求和可交换性可知和函数 $S\in\mathscr{C}^{(1)}(0,+\infty)$.

13. 考虑函数项级数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$. 求证: 当 $0<L<3$ 时, 函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$ 在 $(-L,L)$ 上一致收敛; 随后计算 $\lim\limits_{x\to 1}S(x)$.

解: (1) 固定 $0<L<3$. $\forall n\geqslant 1$ 以及 $\forall x\in(-L,L)$, $\left|\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)\right|\leqslant(\frac{L}{3})^n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{L}{3})^n$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法原函数项级数在 $(-L,L)$ 上一致收敛.

(2) 由 (1) 知通项连续的函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$ 在 $(-2,2)$ 上一致收敛, 于是由极限与级数求和可交换性可知和函数 S 在 $(-2,2)$ 上连续, 故

$$\lim_{x\to 1}S(x)=S(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos(n\pi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

14. 讨论下述函数项级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}$, (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{200}}x^n$,

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!e^{nx}$, (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$, (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

解: (1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2^n|\sin^n x|}{n^2})^{\frac{1}{n}}=2|\sin x|$, 则由根值判别法知当 $|\sin x|<\frac{1}{2}$ 时, 原函数项级数收敛. 而当 $|\sin x|=\frac{1}{2}$ 时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n|\sin^n x|}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

也收敛. 因此原函数项级数的收敛域为 $\{x\in\mathbb{R}\mid |x-k\pi|\leqslant\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}\}$.

(2) $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $\frac{|\sin(nx)|}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$. 又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 则由比较判别法可知原函数项级数收敛, 从而所求收敛域为 $\mathbb{R}$.

(3) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{200}}|x^n|=+\infty$, 此时原函数项级数发散. 当 $x=0$ 时原函数项级数的通项为 0, 此时级数收敛. 故所求收敛域为 $\{0\}$.

(4) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}n!e^{nx}=+\infty$, 故原函数项级数发散. 则所求收敛为空集.

(5) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}|^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3|1+(-\frac{2}{3})^n|^{\frac{1}{n}}}x^2=\frac{x^2}{3}$, 则由根值判别法可知原函数级数在 $|x|<\sqrt{3}$ 时收敛, 而在 $|x|>\sqrt{3}$ 时发散. 当 $|x|=\sqrt{3}$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(\frac{2}{3})^n+(-1)^n}=\infty,$$

故原函数项此时发散. 于是所求收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

(6) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n|^{\frac{1}{n}}=|\frac{x}{2x+1}|$, 于是由根值判别法可知原函数项级数在 $|\frac{x}{2x+1}|<1$ 时收敛, 而在 $|\frac{x}{2x+1}|>1$ 时发散.

当 $\frac{x}{2x+1}=1$ 时, 原函数项级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 故发散. 而当 $\frac{x}{2x+1}=-1$ 时, 原函数项级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 则由 Leibniz 判别法可知该级数收敛.

综上所述可知所求收敛域为 $-1\leqslant\frac{x}{2x+1}<1$, 也即 $x\geqslant-\frac{1}{3}$ 或 $x<-1$.

15. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛半径为 r, 则 [ ]

(A) $r=1$, (B) $r\leqslant 1$, (C) $r\geqslant 1$, (D) 不能确定.

解: 由题设知, 当 $|x|<1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 均收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 也收敛, 从而 $r\geqslant 1$. 故 (D) 不成立. 当 $a_n\equiv-1$ 时, 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛半径为 $+\infty$. 此时 (A), (B) 不成立. 故选 [C].

16. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 $[-8,8]$, 则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_nx^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径 R 为 [ ]

(A) $R\geqslant 8$, (B) $R\leqslant 8$, (C) $R=8$, (D) 不能确定.

解: 由题设以及根值判别法可知幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_nx^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径为

$$R=\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{n(n-1)}{|a_n|}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(n(n-1)\right)^{\frac{1}{n}}\right)\cdot\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)=8.$$

故选 [C].

注: 也可以利用对幂级数求导不改变收敛半径而得到所要结论.

17. 求下列级数之和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$, (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}$ $(a>1)$.

解: (1) **方法 1.** 由级数的定义可知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\Big)\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big)\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{(N+1)(N+2)}\Big)=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

方法 2. $\forall x\in(-1,1)$, 我们有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, 于是由幂级数的性质可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t=-\log(1-x),$$

进而我们可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=-\int_0^x\log(1-t)\,\mathrm{d}t=(1-x)\log(1-x)+x.$$

两边再积分可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)} &= \int_0^x\Big((1-t)\log(1-t)+t\Big)\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2}(1-x)^2\log(1-x)+\frac{1}{4}(1-x)^2+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

左边幂级数的收敛半径为 1 且在点 $x=1$ 处收敛, 则由 Abel 第二定理可知其和函数在该点连续, 于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\lim_{x\to1^-}\Big(-\frac{1}{2}(1-x)^2\log(1-x)+\frac{1}{4}(1-x)^2+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\Big)=\frac{1}{4}.$$

(2) $\forall x\in(-1,1)$, 我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\frac{x}{1-x^2}$. 两边求导可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}=\frac{(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

在上式中令 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 立刻可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3$.

(3) $\forall x\in(-1,1)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$. 两边求导可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$. 由此立刻可知, $\forall a>1$, 我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}=\frac{\frac{1}{a}}{(1-\frac{1}{a})^2}=\frac{a}{(a-1)^2}$.

18. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$ 而 $g(x)=\frac{xf(x)}{1+x}$, 求 g 的 Maclaurin 级数展开.

解: $\forall x\in(-1,1)$, 我们有 $f(x)=\frac{x}{1+x}$, 于是我们有

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^2}{(1+x)^2}=-x^2\Big(\frac{1}{1+x}\Big)' \\ &= -x^2\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\Big)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n+1}. \end{aligned}$$

19. 求 $f(x)=xe^x$ 在点 $x=1$ 处的幂级数展开, 并求收敛域.

解: $\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $t=x-1$. 则我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= (t+1)e^{t+1}=e(t+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}t^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}t^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{(n-1)!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}t^n=e+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)e}{n!}t^n \\ &= e+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)e}{n!}(x-1)^n, \end{aligned}$$

并且上述幂级数的收敛域为 $\mathbb{R}$.

20. $\forall n\geqslant 1$, 假设 $f_n\in\mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$, $f_n(1)=\frac{e}{n}$. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$.

解: $\forall n\geqslant 1$, 由于 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$, 因此

$$f_n(x)=e^{\int 1\,\mathrm{d}x}\Big(C+\int x^{n-1}e^xe^{-\int 1\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\Big)=e^x\Big(C+\frac{x^n}{n}\Big),$$

其中 C 为常数. 又 $f_n(1)=\frac{e}{n}$, 则 $C=0$, 从而 $f_n(x)=e^x\frac{x^n}{n}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$, 且其和函数为 $-\log(1-x)$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 的收敛域为 $[-1,1)$ 且其和函数等于 $-e^x\log(1-x)$.

21. 设 $R\in(0,+\infty)$ 而幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在开区间 $(-R,R)$ 上收敛. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 收敛, 求证: $\int_0^R S(x)\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$.

证明: $\forall r\in(0,R)$, 我们有 $\int_0^r S(x)\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$. 又 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 收敛, 则由 Abel 第二定理可得

$$\int_0^R S(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to R^-}\int_0^r S(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{r\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}.$$

22. 求 $f(x)=\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$ 在原点的幂级数展开.

解: 由题设立刻可得所求幂级数展开为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{12-5x}{(1-x)(6+x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{6}{6+x}\\ &= \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+\frac{x}{6}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n+(-1)^n}{6^n}x^n. \end{aligned}$$

23. 将 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 在点 $x_0=0$ 处展开成幂级数, 并求其收敛域.

解: $\forall t\in\mathbb{R}$, 我们有 $\sin t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$. 于是 $\forall x\in\mathbb{R}$, 可知

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}.$$

上述幂级数的收敛域为 $\mathbb{R}$.

24. 问函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ 在 $[-1,0]$ 是否为一致收敛?

解: **方法 1.** $\forall n\geqslant 1$ 以及 $\forall x\in[-1,0]$, 我们有

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}x^k\Big|=\Big|\frac{x(1-x^n)}{1-x}\Big|\leqslant 2.$$

又 $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ 单调趋于 0, 由 Dirichlet 判别准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ 在 $[-1,0]$ 上一致收敛.

方法 2. 由根值判别法可知幂级数的收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{n}}=1$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 由 Leibniz 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛, 故所求收敛域为 $[-1,1)$, 从而由 Abel 第二定理可知上述幂级数在 $[-1,0]$ 上为一致收敛.

25. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big((\frac{x}{2})^n+(4x)^n\big)$ 的收敛半径与收敛域.

解: 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big((\frac{x}{2})^n+(4x)^n\big)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+4^n)x^n$, 故收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}+4^n}{\frac{1}{2^{n+1}}+4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^{n+1}}=\frac{1}{4}.$$

又 $\{(\frac{1}{8})^n+1\}$, $\{(-\frac{1}{8})^n+(-1)^n\}$ 均不趋近于 0, 因此所求收敛域为 $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

26. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!}$.

解: $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$. 对之求导得 $-e^{-x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n!}x^{n-1}$, 故 $-xe^{-x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n!}x^n$. 对之再求导则可得 $(x-1)e^{-x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!}x^{n-1}$. 在上式中令 $x=1$ 立刻可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!}=0$.

27. 求 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的收敛域与和函数.

解: $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{4n+1}}{4n+1}\right)^{\frac{1}{n}}=|x|^4$, 于是由根值判别法可知原幂级数在 $|x|<1$ 时收敛, 在 $|x|>1$ 时发散, 又 $\frac{1}{4n+1}\sim\frac{1}{4n}$ $(n\to\infty)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ 发散, 故所求收敛域为 $(-1,1)$. 从而由幂级数的性质可知, $\forall x\in(-1,1)$, 均有

$$f(x)=\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}t^{4n}\Big)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}=\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x.$$

28. 考察下列函数项级数是否在指定区间上一致收敛, 并给出理由:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\log(1+\frac{x}{n\log^2 n})$, $x\in(-a,a)$, $a\in(0,+\infty)$;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\log(1+\frac{x}{n\log^2 n})$, $x\in[1,+\infty)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sin x}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$, $x\in(0,+\infty)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

解: (1) $\forall x\in[0,\frac{1}{2}]$, 我们有 $\log(1+x)\leqslant x$, 并且

$$|\log(1-x)|=\log\frac{1}{1-x}=\log\Big(1+\frac{x}{1-x}\Big)\leqslant\frac{x}{1-x}\leqslant 2x,$$

于是当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 我们有 $|\log(1+x)|\leqslant 2|x|$. 从而 $\forall x\in(-a,a)$ 以及 $\forall n\geqslant\max(2a,e)$, 均有 $|\log(1+\frac{x}{n\log^2 n})|\leqslant\frac{2|x|}{n\log^2 n}\leqslant\frac{2a}{n\log^2 n}$. 又 $\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\log^2 t}\overset{x=\log t}{=}\int_{\log 2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{n\log^2 n}$ 收敛, 于是我们由 Weierstrass 判别法立刻得原函数项级数在 $(-a,a)$ 上一致收敛.

(2) 函数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\log(1+\frac{x}{n\log^2 n})$ 在 $[1,+\infty)$ 上非一致收敛.

反证法, 假设上述函数项级数在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛, 则该函数项级数的通项在 $[1,+\infty)$ 上一致趋于 0. 但 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\sup_{x\geqslant 1}|\log(1+\frac{x}{n\log^2 n})|=+\infty,$$

矛盾! 故所证成立.

(3) $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有 $|\frac{nx}{1+n^5x^2}|\leqslant\frac{n}{2\sqrt{n^5}}=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法可知原函数项级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(4) $\forall n\geqslant 2$ 以及 $\forall x\in\mathbb{R}$, 定义 $u_n(x)=\frac{1}{n-\sin x}$, 则 u_n 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减且 $|u_n|\leqslant\frac{1}{n-1}$, 从而函数列 $\{u_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致趋于 0, 故由 Leibniz 判别准则可知原函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

(5) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不为一致收敛.

用反证法, 假设上述函数项级数在 $(0,+\infty)$ 上为一致收敛, 则该函数项级数的通项在 $(0,+\infty)$ 上一致趋于 0. 但 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\sup_{x>0}|2^n\sin\frac{1}{3^nx}|=2^n,$$

矛盾! 故所证结论成立.

(6) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不为一致收敛,

用反证法, 假设该函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 由于其通项在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则由极限与级数求和可交换性可知其和函数 S 也在 $\mathbb{R}$ 上连续. 但 $S(0)=0$, 而 $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 却有 $S(x)=\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1$, 因此和函数 S 在点 $x=0$ 处间断, 矛盾! 故所证结论成立.

29. 求下列幂级数的收敛半径、收敛开区间、收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^{2n}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})x^n\ (a,b>0)$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}x^{n^2}$, (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$.

解: (1) $\forall n\geqslant 1$ 以及 $\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $u_n(x)=\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^{2n}$, 则当 $x\neq 1$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}(x-1)^{2(n+1)}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^{2n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(x-1)^2}{2(n+1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{4}(x-1)^2,\end{aligned}$$

于是由比率判别法可知原级数在 $|x-1|<2$ 时收敛, 而在 $|x-1|>2$ 时发散, 故所求幂级数的收敛半径为 2, 收敛开区间为 $(-1,3)$. 又 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!}2^{2n}=\frac{(\prod_{k=1}^n k)^2 2^{2n}}{\prod_{k=1}^{2n}k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{(2k-1)(2k)}>1,$$

因此原幂级数在 $x=-1,3$ 处均发散, 故所求收敛域为 $(-1,3)$.

(2) 令 $c=\max(a,b)$. 则 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\frac{c}{\sqrt[n]{n^2}}\leqslant\Big(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\Big)^{\frac{1}{n}}\leqslant c\sqrt[n]{2},$$

于是由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})^{\frac{1}{n}}=c$, 因此所求幂级数的收敛半径为 $\frac{1}{c}$, 进而可知收敛开区间为 $(-\frac{1}{c},\frac{1}{c})$.

当 $a<b$ 时, $c=b$, 此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}(\frac{a}{b})^n+\frac{1}{n^2})$ 收敛, 故所求收敛域为 $[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}]$.

当 $a\geqslant b$ 时, $c=a$, 此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}(\frac{b}{a})^n)$ 发散, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}(-\frac{b}{a})^n)$ 收敛, 因此所求的收敛域为 $[-\frac{1}{a},\frac{1}{a})$.

(3) $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{-n}|x|^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{2}=\begin{cases}0, & 若\ |x|<1,\\ \frac{1}{2}, & 若\ |x|=1,\\ +\infty, & 若\ |x|>1.\end{cases}$

由根值判别法可知所求收敛半径为 1, 收敛开区间为 $(-1,1)$, 收敛域为 $[-1,1]$.

(4) 由题设知所求收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}}=\frac{1}{e}$, 从而收敛开区间为 $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$. 又 $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$, 故

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n^2}\Big(\frac{1}{e}\Big)^n=\Big(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\Big)^n>\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}>\frac{1}{e},$$

因此所求收敛域为 $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

30. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $r\in(0,+\infty)$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛半径.

解: 由题设知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(\frac{r}{2})^n$ 收敛, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(\frac{r}{2})^n=0$, 从而 $\exists M>0$ 使得 $\forall n\geqslant 0$, 均有 $|a_n(\frac{r}{2})^n|\leqslant M$. 则 $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\Big|\frac{a_n}{n!}x^n\Big|\leqslant\Big|a_n\Big(\frac{r}{2}\Big)^n\Big|\frac{|\frac{2x}{r}|^n}{n!}\leqslant M\frac{|\frac{2x}{r}|^n}{n!}.$$

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\frac{2x}{r}|^n}{n!}$ 收敛, 则由比较法则可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 收敛, 因此上述幂级数的收敛域为 $\mathbb{R}$, 从而所求收敛半径为 $+\infty$.

31. 求 $f(x)=\log\frac{1}{2+2x+x^2}$ 在点 $x=-1$ 处的幂级数展开.

解: 由题设立刻可得所求幂级数展开为

$$\begin{aligned}f(x)&=-\log\big(1+(x+1)^2\big)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big((x+1)^2\big)^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^{2n}.\end{aligned}$$

32. 求 $f(x)=\sin^3 x$ 在点 $x=0$ 处的幂级数展开.

解: 由题设立刻可得所求幂级数展开为

$$\begin{aligned}
f(x) &= (\sin^2 x)\sin x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\sin x\\
&= \frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}(\sin 3x-\sin x)\\
&= \frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x\\
&= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(3x)^{2n-1}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(3-3^{2n-1})x^{2n-1}.
\end{aligned}$$

33. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{3^n(n+1)}x^{2n+1}$ 的收敛域与和函数.

解: $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2+2n}{3^n(n+1)}|x|^{2n+1})^{\frac{1}{n}}=\frac{|x|^2}{3}$, 由根值判别法知上述级数在 $|x|<\sqrt{3}$ 时收敛而在 $|x|>\sqrt{3}$ 时发散, 故该幂级数的收敛半径为 $\sqrt{3}$. 又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{3^n(n+1)}(\sqrt{3})^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n+1}\sqrt{3}=+\infty,$$

故所求收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

$\forall x\in(-1,1)$, 我们有 $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, 对之分别求导和积分得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},\quad -\log(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

于是当 $x\neq 0$ 时, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2-1}{n+1}x^n=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{x}\log(1-x).$$

由此可知, $\forall x\in(-1,1)\setminus\{0\}$, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{3^n(n+1)}x^{2n+1} &= x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{n+1}\Big(\frac{x^2}{3}\Big)^n\\
&= \frac{9x}{(3-x^2)^2}+\frac{3}{x}\log\Big(1-\frac{x^2}{3}\Big).
\end{aligned}$$

而当 $x=0$ 时, 我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{3^n(n+1)}x^{2n+1}=0$.

34. 设 f 是以 2π 为周期的函数且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, $c\in\mathbb{R}$ 为常数. $\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $F_c(x)=f(x+c)$. 请用 f 的 Fourier 系数表示 F_c 的 Fourier 系数.

解: 由周期函数的性质以及 Fourier 系数的定义可知

$$\begin{aligned}
a_n(F_c) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+c)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{u=x+c}{=} \frac{1}{\pi}\int_{c-\pi}^{c+\pi} f(u)\cos n(u-c)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos(nu)\cos(nc)+\sin(nu)\sin(nc))\,\mathrm{d}u \\
&= a_n(f)\cos(nc)+b_n(f)\sin(nc),\ (n\geqslant 0) \\
b_n(F_c) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+c)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&\overset{u=x+c}{=} \frac{1}{\pi}\int_{c-\pi}^{c+\pi} f(u)\sin n(u-c)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\sin(nu)\cos(nc)-\cos(nu)\sin(nc))\,\mathrm{d}u \\
&= b_n(f)\cos(nc)-a_n(f)\sin(nc),\ (n\geqslant 1).
\end{aligned}$$

35. 设 f 是以 2π 为周期的连续函数, 而 a_n, b_n 为其 Fourier 系数.

(1) 若 $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $f(x+\pi)=f(x)$, 求证: $\forall n\geqslant 1$, 均有 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$;

(2) 若 $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $f(x+\pi)=-f(x)$, 求证: $\forall n\geqslant 1$, 均有 $a_{2n-2}=b_{2n}=0$.

证明: (1) $\forall n\geqslant 1$, 由 Fourier 系数的定义可知

$$\begin{aligned}
a_{2n-1} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)(x-\pi)\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{2n-1} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2n-1)x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} f(x)\sin(2n-1)x\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2n-1)x\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} f(x)\sin(2n-1)x\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\sin(2n-1)x\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} f(x)\sin(2n-1)x\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2n-1)(x-\pi)\,\mathrm{d}x\Big)=0.
\end{aligned}$$

(2) $\forall n \geqslant 1$, 由 Fourier 系数的定义可知

$$\begin{aligned}
a_{2n-2} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2n-2)x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} f(x)\cos(2n-2)x\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2n-2)x\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} f(x)\cos(2n-2)x\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\cos(2n-2)x\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} f(x)\cos(2n-2)x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} f(x)\cos(2n-2)(x-\pi)\,\mathrm{d}x\Big) = 0, \\
b_{2n} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} f(x)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} f(x)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} f(x)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} f(x)\sin 2n(x-\pi)\,\mathrm{d}x\Big) = 0.
\end{aligned}$$

36. 求 $f(x) = x\cos x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的形式 Fourier 级数.

解: 由题设知 周期$2l = \pi$. 由于 f 为奇函数, 则 $\forall n \geqslant 0$, 均有 $a_n = 0$, 而 $\forall n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin(2nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\Big(\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{\pi}x\Big(\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x + \frac{1}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2(-1)^n}{\pi}\Big(\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n-1)^2}\Big) \\
&= (-1)^{n+1}\frac{16n}{\pi(4n^2-1)^2},
\end{aligned}$$

于是我们有 $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{16n}{\pi(4n^2-1)^2}\sin(2nx)$.

37. 求 $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ 在 $[0, \pi]$ 上的形式余弦级数和形式正弦级数.

解: 求 f 的形式余弦级数, 即求 f 的偶延拓的形式 Fourier 级数, 此时

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi - x}{2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\pi - x)^2}{2\pi}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

而 $\forall n \geqslant 1$, 我们则有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi-x}{n\pi}\sin(nx)\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}, \end{aligned}$$

于是 f 在 $[0,\pi]$ 上的形式余弦级数为

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2\pi}\cos(2n+1)x.$$

求 f 的形式正弦级数, 即求 f 的奇延拓的形式 Fourier 级数, 此时 $\forall n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x-\pi}{n\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}, \end{aligned}$$

于是 f 在 $[0,\pi]$ 上的形式正弦级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$.

38. 求 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 的形式 Fourier 级数.

解: 由于 f 是以 2π 为周期的奇函数, 且 $\forall x\in[0,\pi]$, 均有

$$f(x)=\begin{cases} x, & 若\ x\in[0,\frac{\pi}{2}], \\ \pi-x, & 若\ x\in(\frac{\pi}{2},\pi]. \end{cases}$$

于是 $\forall n \geqslant 0$, 均有 $a_n=0$, 而 $\forall n \geqslant 1$, 则有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(nx)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\Big) \\ &= \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{1}{n}x\cos(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &\quad -\frac{1}{n}(\pi-x)\cos(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\Big) \\ &= \frac{4}{n^2\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}), \end{aligned}$$

于是我们有 $f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x$.

39. 求 $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=x^3$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的形式 Fourier 级数.

解: 由于 f 为奇函数, 于是 $\forall n \geqslant 0$, 均有 $a_n = 0$, 而 $\forall n \geqslant 1$, 则有

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}x\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^{n-1}}{n},$$

从而 $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx)$. 利用 Fourier 级数的性质可知, $\forall x \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{n}\int_0^x \sin(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}(1-\cos(nx)) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx), \quad \textit{(参考教材P310)} \\
h(x) &= \int_0^x 3t^2\,\mathrm{d}t = \pi^2 x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^n}{n^2}\int_0^x \cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \pi^2 x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^n}{n^3}\sin(nx).
\end{aligned}$$

因此 $g(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$. 再注意到 $f(x) = x \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx)$, 于是由 Fourier 系数的性质可得 $h(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(6-\pi^2 n^2)}{n^3}\sin(nx)$.