电磁场数值计算

邢庆子

Tel: **62781684(o), 13661226717**

E-mail: **xqz@tsinghua.edu.cn**

清华大学工物系加速器实验室 刘卿楼**309**

上节内容

2.6 准泊松方程的差分离散格式

2.7 非线性代数方程组的解法

2.8 场强与电磁积分量的计算

2.9 时变电磁场的差分格式

积分法离散化

- 节点（$\boldsymbol{i,j}$）：对应网眼 $\boldsymbol{G_{i,j}}$ ，网眼边界为 $\boldsymbol{L_{i,j}}$;
- 对应每个网眼，均满足公式：$\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\frac{\partial A}{\partial y}\right)=-J$

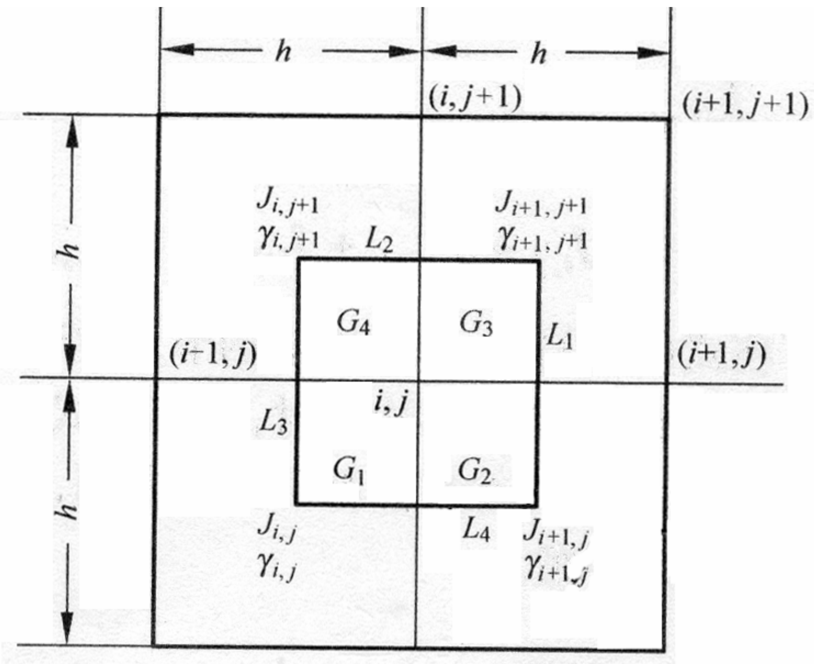


图 2.17 积分法离散格式

在区域 $\boldsymbol{G_{i,j}}$，对上面准泊松方程等式两边进行二重积分：

$$\iint_{Gi,j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\frac{\partial A}{\partial y}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{Gi,j}J\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\boxed{\oint_{L_{i,j}}\gamma\frac{\partial A}{\partial n}\mathrm{d}l=-\iint_{G_{i,j}}J\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

讨论：

在轴对称稳定场中用矢量位 **A** 求解时，非线性差分方程如何用积分法导出？

$$\begin{cases} H_r = -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} = -\dfrac{\gamma}{r}\dfrac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial z} \\ H_z = \dfrac{1}{\mu r}\dfrac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} = \dfrac{\gamma}{r}\dfrac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} \end{cases}$$

$$\oint_L \boldsymbol{H}\mathrm{d}l = \iint_G J\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint_L \frac{\gamma}{r}\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial n}\mathrm{d}l = -\iint_G J\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

➢ 非线性代数方程组的解法

- 非线性方程组的产生： $\mu = \dfrac{B}{H(B)}$

- 非线性方程组的求解：“逐次线性化”

1）首先视磁阻系数 γ 为一常数，使方程转化为线性代数方程组，求出此方程组的解；

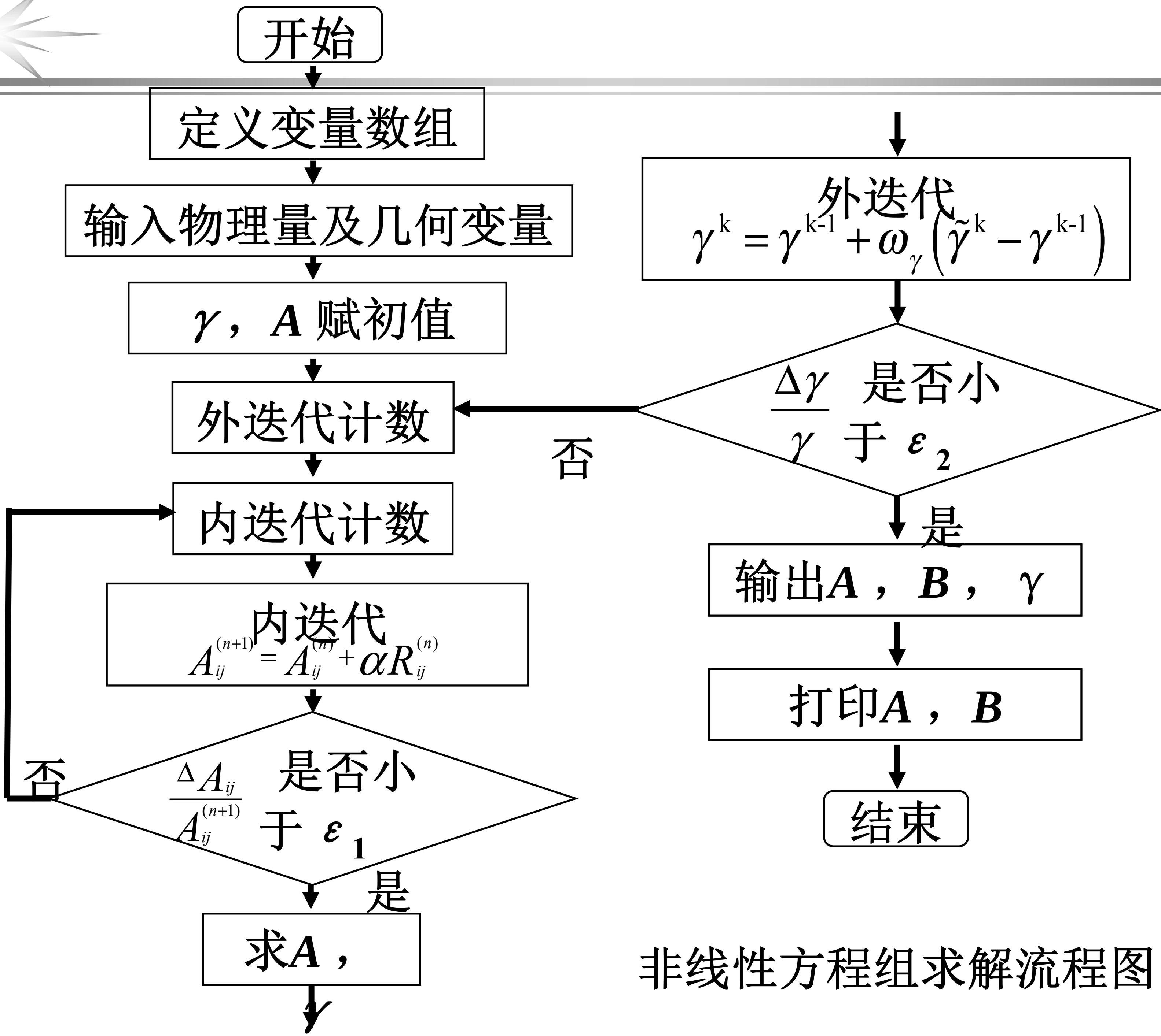
2）求出***B***，根据 ***B***(***H***)曲线，求出场域内各点相应的 γ ；

3）按 γ 调整方程的系数，重复求解方程组，逐次逼近，最后求出满足要求的解。

- 迭代公式： $C\left(\gamma\left(A^{(\mathrm{k})}\right)\right)A^{(\mathrm{k+1})} = F$

F：方程中的已知量，包括电流密度和一类边界项

C：是 γ 的函数， γ 是 ***B*** 的函数，也就是 ***A*** 的函数



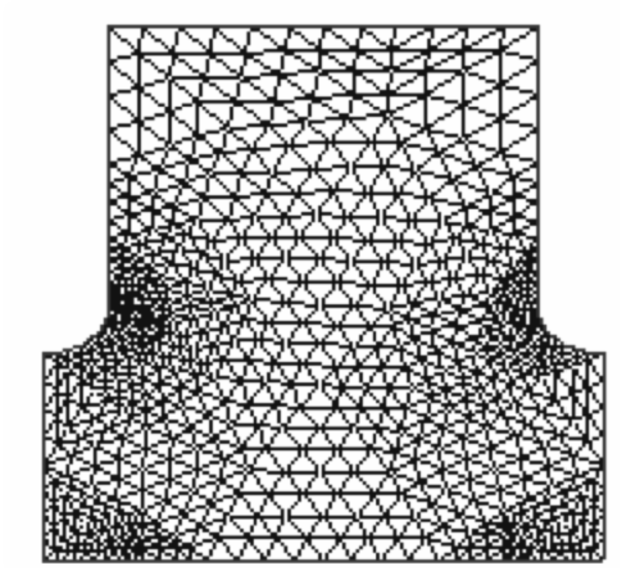
非线性方程组求解流程图

本节内容

第3章 有限元法基础

3.0 概述

3.1 变分法基本概念



参考书目

- 倪光正，钱秀英：《电磁场数值计算》，高等教育出版社，**1996**
- 曾余庚：《电磁场有限单元法》，科学出版社，**1982**
- 金建铭，王建国（译）：《电磁场有限元方法》，西安电子科技大学出版社，**1998**
- 姚充国，《电子直线加速器》，科学出版社，**1986**
- 韦石，下一代电子直线对撞机加速结构中电磁场的理论计算，清华大学博士论文，**2002**
- 王兰法，**Variational-method-based higher order mode extendible to realistic tapered disk-loaded structures, NIM A 481 (2002) 95~119**
- **Masao Nakamura, A Computational Method for Disk-Loaded Waveguides with Rounded Disk-Hole Edges, Japanese Journal of Applied Physics，Vol. 7，No. 3 257（1968）.**

3.0 概述

- 有限元法简介

➢ 原理上是有限差分法和变分法中里兹法的结合；

➢ 基本步骤：以变分原理为基础，把所要求解的微分方程型数学模型——边值问题，首先转化为相应的变分问题，即泛函求极值问题；然后利用剖分插值，离散化变分问题为普通多元函数的极值问题，即最终归结为一组多元的代数方程组，解之即得待求边值问题的数值解。

➢ 应用范围：任何微分方程所描述的各类物理场，适用于时变场、非线性场以及分层介质中的电磁场问题的求解。

- 发展历史

1943年，**Courant** 最早提出有限单元的思想 ；

~1950年，有限元法在航空结构分析中最先得到应用；

1960年，**Clough**首先使用有限元法（**Finite Element Method**）的名称；

1965年，**Winslow**首先将有限元法应用于电气工程问题；

1969年，**Silvester**将有限元法推广应用于时谐电磁场问题。

- 特点：

1）适用于具有复杂边界或边界条件、含有复杂媒质的定解问题；

2）不受场域边界形状限制；

3）对第二类、第三类及不同媒质交界面的边界条件不必作单独处理。

- 有限元法与有限差分法的比较

	有限差分法	有限元法
网格划分	需要	需要，网格划分更灵活，因而有较强的适应性，并能更好地保证精度；
方程离散	直接由场的方程离散为代数方程组，而且代数方程组中系数简单	利用变分原理把满足一定边值条件的电磁场问题等价为泛函求极值问题，导出有限元方程组
近似方法	数学上的近似	结构上的近似

3.0 概述

- 有限元法计算电磁场的基本步骤

1）简化求解物理模型，导出求解的微分方程。

2）根据微分方程及边界条件，求出对应定解问题的泛函及其等价的变分问题。

3）对求解区域进行剖分，确定相应的插值函数。

4）对多元函数的泛函求极值，导出有限元方程组。

5）用追赶法或其它有效的方法求解有限元方程组，得到节点上的位函数。

● 有限元法的两个基本问题

有限元法的第一个基本问题是：

根据具体物理问题建造一个泛函，使其欧拉方程为物理问题满足的偏微分方程。

有限元法的第二个基本问题是：

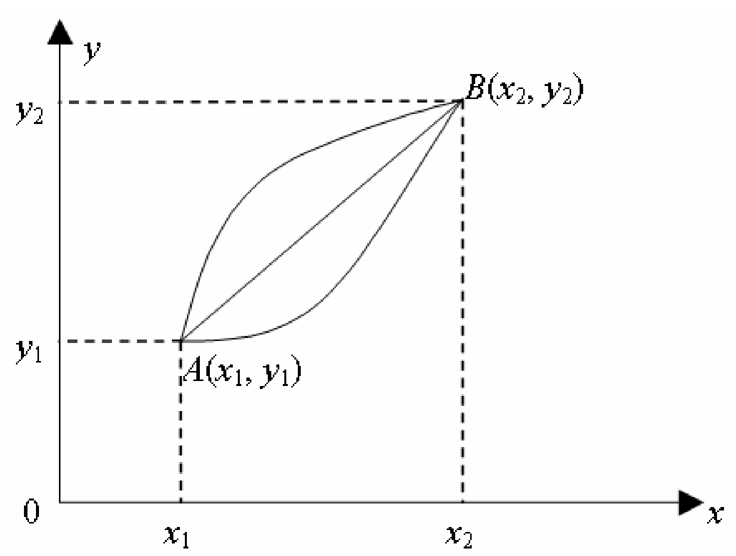
把在一个区域 **D** 上根据电磁场边值问题建立起来的连续的泛函，用剖分为有限个单元上的泛函之和来代替。

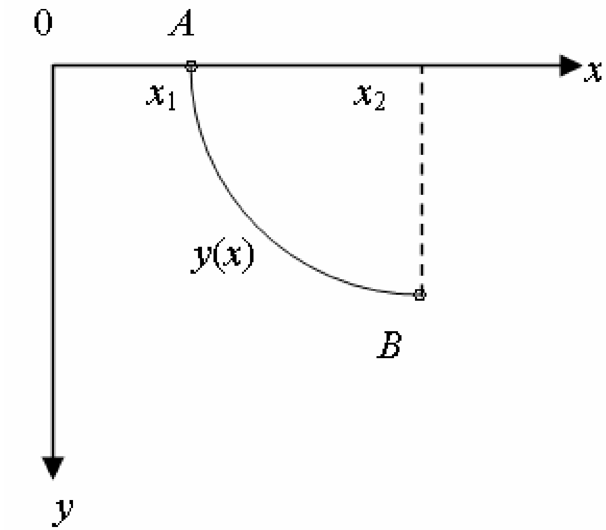
3.1 变分法基本概念

3.1.1 基本概念

1. 泛函：“函数的函数”，通常以积分的形式出现。

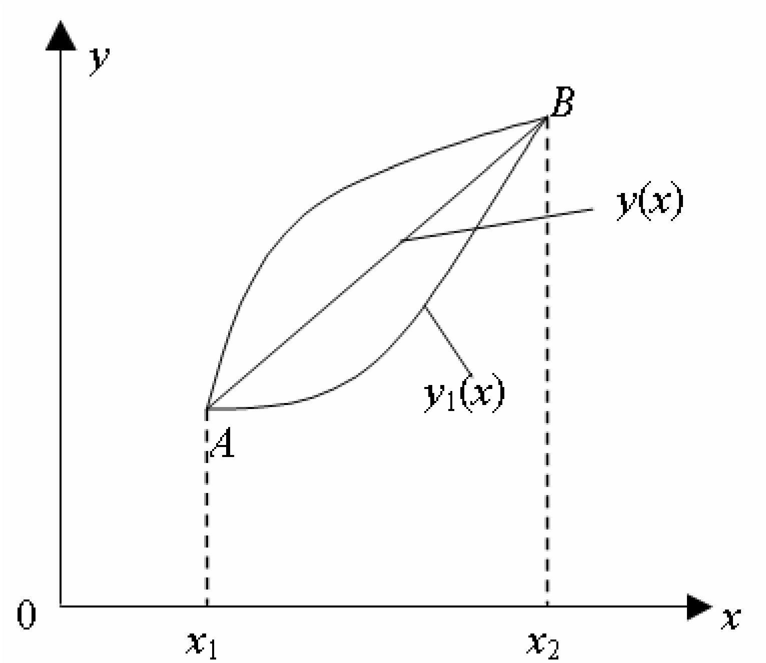
$$F[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y(x),y_x(x))dx$$





例3.1 弧长 $L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y_x^2}\,\mathrm{d}x$ 例3.2 质点下滑时间 $T=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y_x^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$

2. 泛函自变量的增量和变分：



认为 ***y*(*x*)** 为真实值，函数 ***y*(*x*)** 的增量

$$\delta y(x) = y_1(x) - y(x)$$

称为 ***y*(*x*)** 的变分。

3. 泛函的增量和变分：

泛函自变量的增量为 $\delta y(x)$，对应泛函的增量可表示为：

$$\begin{aligned}\Delta F &= F\left[y(x)+\delta y(x)\right]-F\left[y(x)\right]\\ &= F\left[y(x)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[F(y)\right]\delta y+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[F(y)\right]\delta y^2+\cdots-F\left[y(x)\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial y}F\left[y(x)\right]\delta y+\alpha\\ &= \delta F\left[y(x)\right]+\alpha\end{aligned}$$

α 为高阶小量。

$\delta F\left[y(x)\right]$ 是泛函增量的线性主部，称为泛函 $F[y(x)]$ 的变分。

$F=F(x,y,y_x)$时，则有 $\delta F=\dfrac{\partial F}{\partial y}\delta y+\dfrac{\partial F}{\partial y_x}\delta y_x$ 。

对二维函数 $F\left(x,y,u,u_x,u_y\right)$：$\delta F\left(x,y,u,u_x,u_y\right)=\dfrac{\partial F}{\partial u}\delta u+\dfrac{\partial F}{\partial u_x}\delta u_x+\dfrac{\partial F}{\partial u_y}\delta u_y$

4. 极值函数：

使泛函 $F[y(x)]$ 达到极值的 $\boldsymbol{y_0(x)}$ 称为$F[y(x)]$ 的极值函数。

可以证明，泛函达到极值的条件为泛函的变分等于**0**，即

$$\delta F\left[y\left(x\right)\right]=\int_{x_1}^{x_2}\delta f\left(x,y\left(x\right),y_x\left(x\right)\right)\mathrm{d}x=0$$

5. 变分的运算法则：

（**1**）导数的变分等于变分的导数： $\delta y_x=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta y$

（**2**）复合函数的变分：$\delta f\left(x,y,y_x\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\delta y+\dfrac{\partial f}{\partial y_x}\delta y_x$

$$\delta f\left(x,y,u,u_x,u_y\right)=\frac{\partial f}{\partial u}\delta u+\frac{\partial f}{\partial u_x}\delta u_x+\frac{\partial f}{\partial u_y}\delta u_y$$

（3）求泛函的极值函数：　　泛函 $F[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y_x)\mathrm{d}x$

$$\delta F(y)=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y_x}\delta y_x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\delta y\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)\delta y\mathrm{d}x=0$$

$$\xrightarrow{\delta y|_{x=x_1}=\delta y|_{x=x_2}=0}\quad \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x=0$$

可得泛函的极值问题的欧拉方程为：

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y_x}=0}$$

求解泛函极值问题与求解欧拉方程是等价的！

$$F[u(x,y)]=\iint_D f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=F_{\min}\quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y}=0}$$

3.1.2 有限元法中变分原理的应用

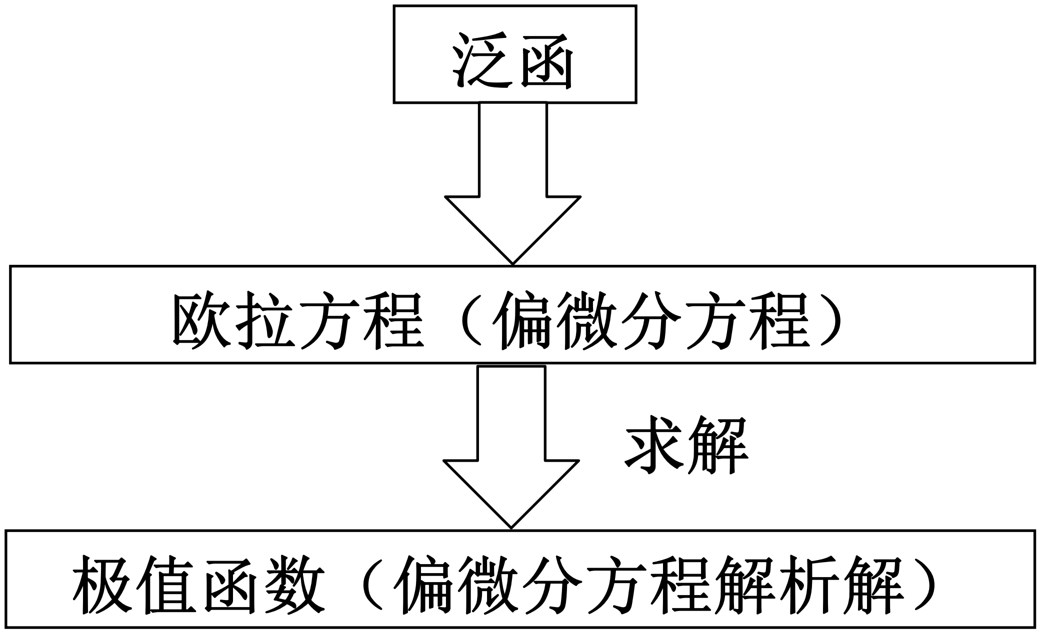
- 变分问题的经典解法

1）直接解法

如瑞利－里兹法、伽辽金法等。

将泛函的极值问题近似地转化为一般多元函数的极值问题，用有穷维子空间中的函数去逼近无穷维空间中的极值函数，从而近似地求得泛函的极值。

2）间接解法



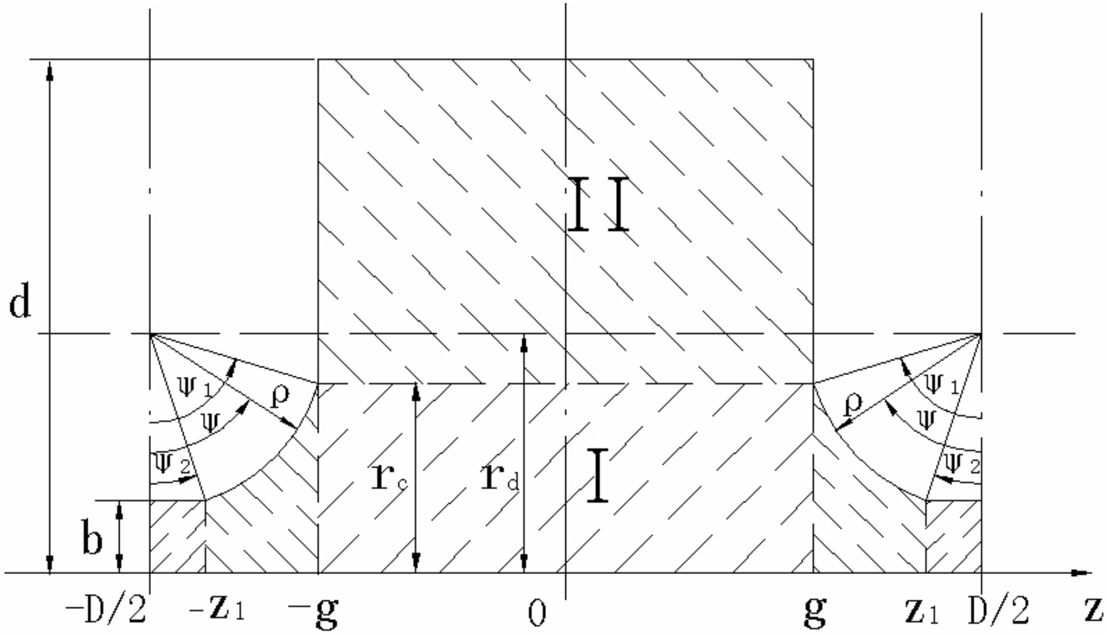
3.1 变分法基本概念

3）变分法求解盘荷波导电磁场的一个例子

Maxwell 方程组在时谐条件（e^{jwt} ）下，可写为：

$$\begin{cases}\nabla\times(Z_0\vec{H})=jk\vec{E}\\ \nabla\times\vec{E}=-jk(Z_0\vec{H})\end{cases}$$

求解满足边界条件的场 ***E*** 、***H*** 和传播常数***k***的问题，则等价于以下变分问题：



求解满足条件 **1**）矢量场 $Z_0\vec{H}$ 在整个区域内连续；

2） $jk\vec{E}$ 在整个区域内连续；

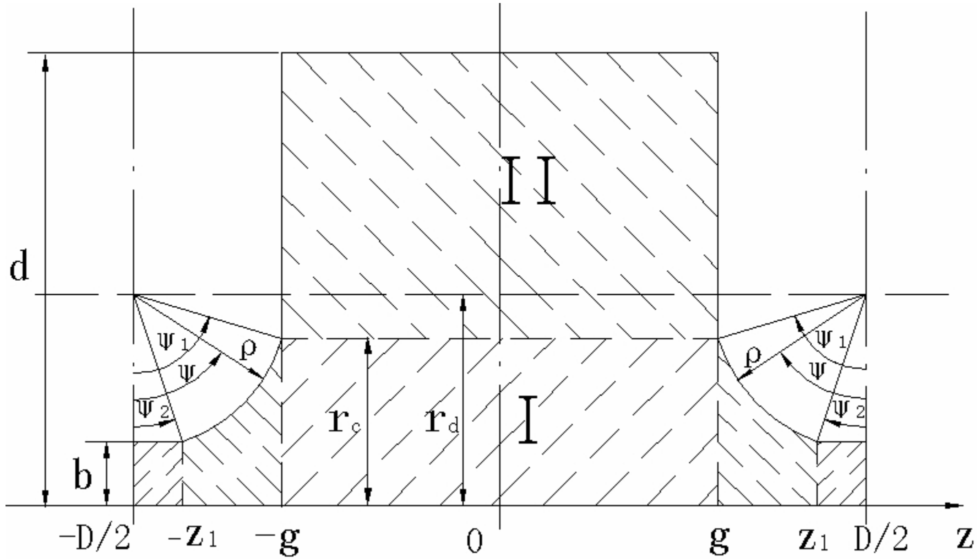
3） $Z_0\vec{H}$ 在整个区域边界上法向分量处处为零；

4）$\nabla\bullet(Z_0\vec{H})=0$

并使泛函 $J(Z_0\vec{H})=k^2\dfrac{\int\varepsilon_0\left|\vec{E}\right|^2dV}{\int\mu_0\left|\vec{H}\right|^2dV}=\dfrac{\int\left|Curl(Z_0\vec{H})\right|^2dV}{\int\left|Z_0\vec{H}\right|^2dV}$ 达到极值的 $Z_0\vec{H}$。

3.1 变分法基本概念

$$
\begin{cases}
H_z^{\,I} = -\dfrac{1}{Z_0}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n JJ_n(r)e^{-j\beta_n z}\sin m\theta \\
H_r^{\,I} = \dfrac{j}{Z_0}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[C_{2n}(r)A_n + C_{1n}(r)B_n]e^{-j\beta_n z}\sin m\theta \\
H_\theta^{\,I} = \dfrac{j}{Z_0}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[C_{4n}(r)A_n + C_{3n}(r)B_n]e^{-j\beta_n z}\cos m\theta
\end{cases}
$$



$$
\begin{cases}
H_z^{\,II} = \dfrac{j}{Z_0}\displaystyle\sum_{s=1}^{+\infty} D_s SS_s(r)\sin\alpha_s(z+g)\sin m\theta \\
H_r^{\,II} = \dfrac{j}{Z_0}\displaystyle\sum_{s=0}^{+\infty}[E_{2s}(r)C_s + E_{1s}(r)D_s]\cos\alpha_s(z+g)\sin m\theta \\
H_\theta^{\,II} = \dfrac{j}{Z_0}\displaystyle\sum_{s=0}^{+\infty}[E_{4s}(r)C_s + E_{3s}(r)D_s]\cos\alpha_s(z+g)\cos m\theta
\end{cases}
$$

$$
\delta\left(\sum_{i=1}^{6} L_i\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n,l=-\infty}^{+\infty}\{\ [X_{11}(l,n)A_n + X_{12}(l,n)B_n]\delta A_l + [X_{21}(l,n)A_n + X_{22}(l,n)B_n]\delta B_l\} \ = 0
$$

$$
\Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} X_{11}(l,n) & X_{12}(l,n) \\ X_{21}(l,n) & X_{22}(l,n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = 0
$$

- 有限元法求解步骤

电磁场问题 ⇒ 建立电磁场方程（看作欧拉方程） ⇒ 建立与此定解问题相对应的泛函

⇒ 在定域内进行剖分插值 ⇒ 泛函的变分问题转化为多元函数求极值的问题 ⇒ 得到电磁场定解问题的数值解

举例：汤姆生的场能最小原理。

$$F[\Phi(x,y)]=\frac{1}{2}\int\varepsilon\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=F_{\min}\Longleftrightarrow\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$$

3.1.3 泊松方程的等价变分问题

1. 边值问题的等价泛函

有限元法的关键问题之一是：根据具体物理问题建造一个泛函，使其欧拉方程为物理问题满足的偏微分方程。

(1) 一类边界泊松方程(二维、线性区)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2}=-\mu J \\ A\big|_L=u(l) \end{cases} \xrightarrow{\text{对应泛函}} \begin{cases} F(A)=\int_D\left[\left(\dfrac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial A}{\partial y}\right)^2-2\mu JA\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ A\big|_L=u(l) \end{cases}$$

(2) 二类边界泊松方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2}=-\mu J \\ \dfrac{\partial A}{\partial n}\Big|_L=u_2(l) \end{cases} \xrightarrow{\text{对应泛函}} F(A)=\iint_D\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2-2\mu JA\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_L u_2A\mathrm{d}l$$

2. 自然边界条件和强加边界条件

(1) 二类边界

$$\delta F(A)=\iint_D\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \delta A}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \delta A}{\partial y}\right)-\mu J\delta A\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\oint_L u_2\delta A\mathrm{d}l$$

$$=\iint_D\left[\nabla A\bullet\nabla(\delta A)-\mu J\delta A\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\oint_L u_2\delta A\mathrm{d}l=0$$

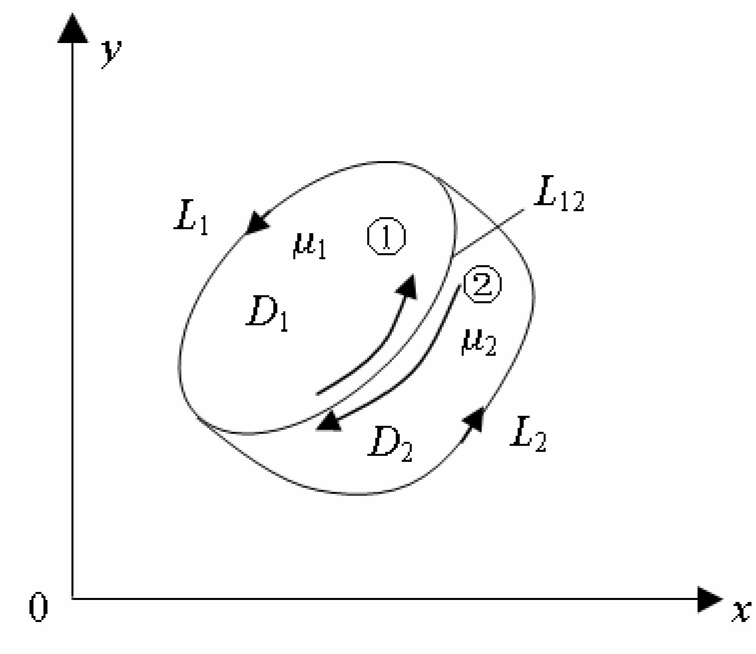
由格林公式：$\iint_D \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D v(\nabla\cdot\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_L v\nabla u\cdot n\mathrm{d}l$

可得： $\delta F(A)=-\iint_D(\nabla^2 A+\mu J)\delta A\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_L\left(\frac{\partial A}{\partial n}-u_2\right)\delta A\mathrm{d}l$

即： $\iint_D(\nabla^2 A+\mu J)\delta A\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad \oint_L\left(\frac{\partial A}{\partial n}-u_2\right)\delta A\mathrm{d}l=0$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\nabla^2 A=-\mu J\qquad \left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_L=u_2(l)}$$

(2) 不同媒质交界面的边界



泛函为：

$$F(A)=\iint_D\left\{\frac{1}{2\mu}(\nabla A)^2-JA\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}\left\{\frac{1}{2\mu_1}(\nabla A)^2-JA\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{D_2}\left\{\frac{1}{2\mu_2}(\nabla A)^2-JA\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

求变分，利用格林公式可得

$$\begin{cases} A_1\big|_{L_{12}}=A_2\big|_{L_{21}} \\ \left.\dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial A}{\partial n}\right|_{L_{12}}=\left.\dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial A}{\partial n}\right|_{L_{21}} \end{cases}$$

$$\delta F(A)=-\iint_{D_1}\left(\frac{\nabla^2 A}{\mu_1}+J\right)\delta A\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\left(\frac{\nabla^2 A}{\mu_2}+J\right)\delta A\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\oint_{L_1+L_{12}}H_t\delta A\mathrm{d}l+\oint_{L_2+L_{21}}H_t\delta A\mathrm{d}l$$

有 $\int_{L_{12}^{(1)}}H_{t1}\,\delta A\mathrm{d}l+\int_{L_{21}^{(2)}}H_{t2}\,\delta A\mathrm{d}l=0$

结论：

- 在有限元法中两种媒质交界面条件是自然满足的！

- 自然边界条件：第二类或第三类及不同媒质交界面上的边界条件，在变分问题中被包含在泛函达到极值的要求之中，不必单独列出专门处理，且为自动满足。相应的变分问题称为无条件变分问题。

- 强加边界条件：第一类边界条件，在变分问题中必须作为定解条件列出，变分问题的极值函数解必须在满足这一边界条件的函数类中去寻求。相应的变分问题称为条件变分问题。

- 具有平行平面场特征的静态电、磁场的统一数学模型：（β为常数）

$$\begin{cases} F\left[u(x,y)\right]=\iint_D \left\{ \frac{\beta}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-fu\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{L2}(-q)u\mathrm{d}l=\min \\ u\big|_{L1}=u_0 \end{cases}$$

待求函数	***u***	***f***	***β***	***u₀***	***q***
矢量磁位***A***	A_{z}	J_{z}	γ (或 1/ μ)	A_{zL}	H_{t}
标量磁位 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{m}}$	Φ_{m}	0	μ	Φ_{mL}	$-B_{\mathrm{n}}$
标量电位 $\boldsymbol{\Phi}$	Φ	ρ	ε	Φ_0	$-D_{\mathrm{n}}$

本节无作业。

考试时间：第八周周五（**11**月**10**日）上午第一大节 **8:00~9:35**

考试地点：六教**6A203**

考试要求：开卷考试，但不能使用电子设备（计算器除外）。

答疑时间： **11**月**9**日（周四）下午**3:00~5:00**

答疑地点：刘卿楼 **309**

- 变分原理

将物理学（或其它学科）问题，用变分法化为求泛函极值问题，后者称为该物理问题的变分原理。

- 最小作用量原理、分析力学中的哈密顿原理；
- 静电学中的汤姆逊场能最小原理；
- 光学中的费尔马原理；
- ……

返回