电磁学
Electromagnetism

姜开利
清华大学物理系
2017年春季学期

电磁学

教材： 胡友秋，程福臻，叶邦角

电磁学与电动力学（上册）

(科学出版社，北京，2008)

稳恒电流

（1）什么是电流，什么是稳恒电流？

（2）电流连续性方程与稳恒条件

（3）稳恒电流与电场

（4）稳恒电流场综合求解

（5）基尔霍夫方程组

电流　　稳恒电流

◆ 什么是电流？

自由电荷宏观定向运动形成电流

（1）导体脱离静电平衡状态

（2）导体不再是等势体

（3）导体内部有电场

◆ 什么是稳恒电流？

电流分布不随时间变化

此时对应电场分布为一稳恒电场

稳恒电流

（1）什么是电流，什么是稳恒电流？如何产生稳恒电流

（2）电流连续性方程与稳恒条件

（3）稳恒电流与电场

（4）稳恒电流场综合求解

（5）基尔霍夫方程组

电流连续性方程与稳恒条件

（1）电流强度、电流密度、电荷密度的关系

（2）电流连续性方程

（3）稳恒条件

（4）如何产生稳恒电流

电流强度、电流密度、电荷密度

◆ 电流强度

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

单位时间流过某一截面的电量

◆ 电流密度矢量

$$\vec{j} = j\hat{n}$$

$\hat{n}$为电流的方向

$$j = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t}$$

单位时间流过单位截面的电量

◆ 电流密度矢量与电流强度和电荷密度的关系

$$I = \iint \vec{j} \cdot \hat{n} dS$$

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

电流强度是电流密度矢量的通量

$\vec{v}$是电荷运动的速度矢量

电流连续性方程

也就是电荷守恒方程：

空间中某一点处电量的增加等于流进来的电荷量

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

普适成立，与导体物理性质无关！

藏在**Maxwell**方程组里

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

旋量的散度等于零 $\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \nabla \cdot \vec{E}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

稳恒条件

空间电荷分布不再改变

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

物理意义

（1）电流场线闭合

（2）同一电流管内各截面上$\vec{j}$的通量I相同

如何产生稳恒电流—电源和电动势

早期电源　　莱顿瓶　　实际是个电容器

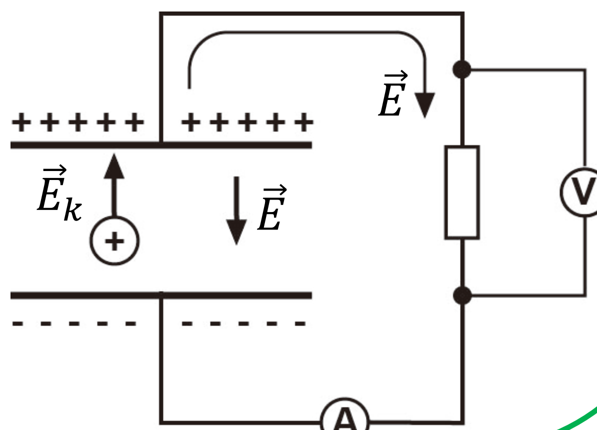
后期发展出新电源

化学电池	化学能
光电池	光能
热电池	热能
核电池	核能
燃料电池	化学能
……	……

通过静电能对外做功

电源的物理模型：

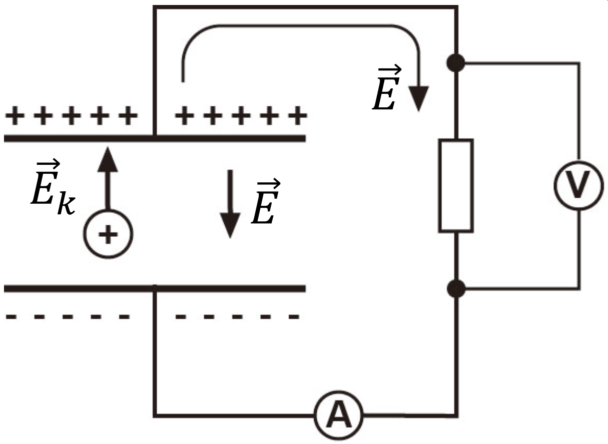
电容器 + 用非静电力搬运电荷的小妖



如何产生稳恒电流—电源和电动势

电源的物理模型：

电容器 ✚ 用非静电力搬运电荷的小妖



$\vec{E}$是静电场

定义非静电力场强： $$\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_k}{q}$$

电源电动势：

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

非静电力做功：

$$W_k = \int_{-}^{+} \vec{F}_k \cdot d\vec{l} = q\int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = q\mathcal{E}$$

稳恒电流

（1）什么是电流，什么是稳恒电流？如何产生稳恒电流

（2）电流连续性方程与稳恒条件

（3）稳恒电流与电场

（4）稳恒电流场综合求解

（5）基尔霍夫方程组

稳恒电流与电场

（1）欧姆定律

（2）电源内欧姆定律

（3）欧姆定律的失效

（4）焦耳定律

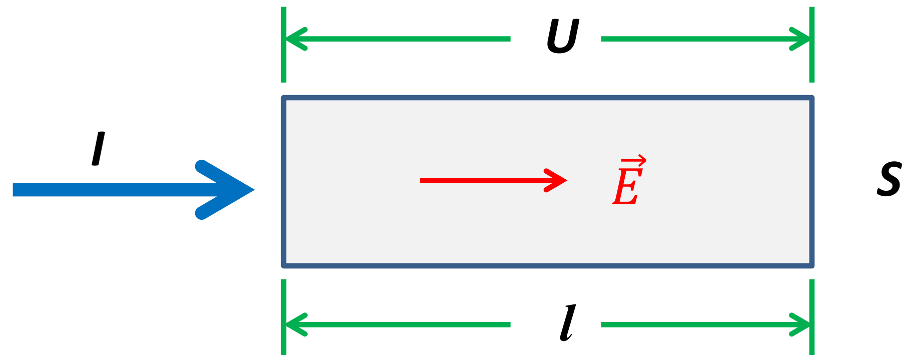
（5）稳恒电路中能量转换

（6）电阻的经典电子论

欧姆定律

中学：

$$R = \frac{U}{I}$$



$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$$\frac{U}{I} = \frac{El}{jS} \Rightarrow \frac{E}{j} = \rho$$

与尺寸无关，只
与材料性质有关！

欧姆定律的微分形式：

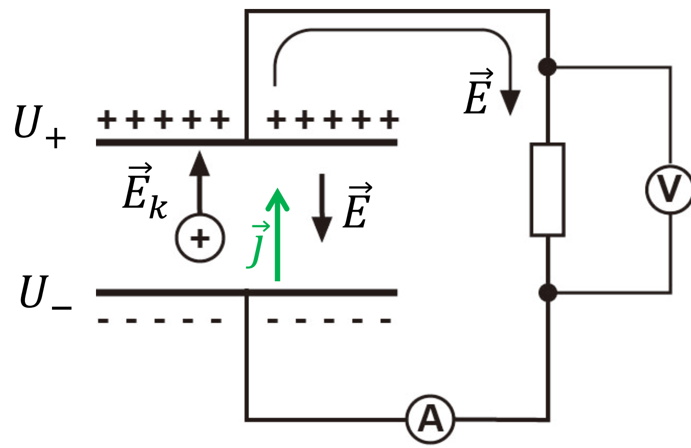
$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

材料的电导率

电源内的欧姆定律

$$\vec{j} = \sigma_e(\vec{E}_k + \vec{E})$$



$$\int_{-}^{+}(\vec{E}_k + \vec{E})\cdot d\vec{l} = \mathcal{E} + U_- - U_+$$

$$\int_{-}^{+}(\vec{E}_k + \vec{E})\cdot d\vec{l} = \int_{-}^{+}\frac{\vec{j}}{\sigma_e}\cdot d\vec{l} = \int_{-}^{+}\frac{j\Delta S_\perp}{\sigma_e \Delta S_\perp}dl = I\int_{-}^{+}\frac{dl}{\sigma_e \Delta S_\perp} = Ir$$

r 为电源的内阻

电源的端电压： 等于电源的电动势减去内阻上的电压降

$$U_+ - U_- = \mathcal{E} - Ir$$

欧姆定律的失效

（1）电场很强，电子被加到很高速度会电离原子，
导致击穿；

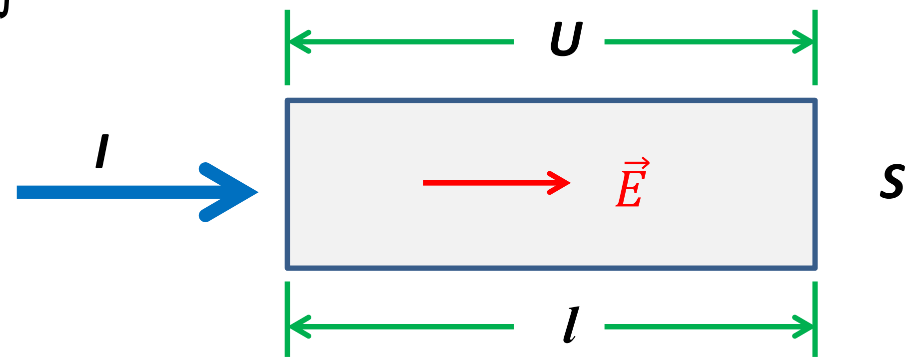
（2）导体尺寸小于电子在导体中的平均自由程，
电子经历弹性碰撞，弹道输运，Ballistic Transport；

（3）半导体材料，电流-电压曲线一般呈非线性，
例如二极管，三极管等。

焦耳定律

Δt 时间内电场对电荷做的功

$$\Delta A = U\Delta q = UI\Delta t$$



所以，电功率为

$$P = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}$$

对于纯电阻，电场做的功全部转化为热量（或光）

如电炉丝、灯丝等

微分形式：

$$p = \frac{j^2}{\sigma}$$

电功率密度

电阻的经典电子论

物理图像： 自由电子受电场加速获得速度，然后与晶格碰撞向各个方向散射，宏观平均速度变为零。

电子加速后下次碰撞前获得宏观速度为 $\vec{u}_1 = \vec{a}\cdot\bar{\tau} = -e\,\bar{\tau}\vec{E}/m$

其中τ为两次碰撞之间平均时间 $\bar{\tau} = \bar{\lambda}/\bar{v}$

$\bar{\lambda}$为平均自由程

$\bar{v}$为平均热运动速度

$$\vec{u}_1 = -e\,\bar{\lambda}\vec{E}/m\bar{v}$$

电子漂移速度等于碰撞前后平均宏观定向运动速度

$$\vec{u} = \tfrac{1}{2}(\vec{u}_0 + \vec{u}_1) = \tfrac{1}{2}\vec{u}_1 = -e\,\bar{\lambda}\vec{E}/2m\bar{v} = -\frac{e\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}\vec{E}$$

$$\vec{j} = -ne\vec{u} = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}\vec{E} \qquad \sigma = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}} \propto \frac{n\bar{\lambda}}{\bar{v}} \qquad \rho \propto \frac{\bar{v}}{n\bar{\lambda}}$$

$\bar{\lambda}$随温度变化很小 $\bar{v} \propto \sqrt{T}$ ⇒ $\rho \propto \sqrt{T}$

与实验定性符合，严格处理要用量子理论！

稳恒电流

（1）什么是电流，什么是稳恒电流？如何产生稳恒电流

（2）电流连续性方程与稳恒条件

（3）稳恒电流与电场

（4）稳恒电流场综合求解

（5）基尔霍夫方程组

稳恒电流场综合求解

（1）基本物理图像

有电流密度矢量$\vec{j}$ $\xrightarrow{\vec{j}=\sigma\vec{E}}$ 必有电场 $\vec{E}$ 来驱动

有电场 $\vec{E}$ $\xrightarrow{\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0}$ 必有自由或束缚电荷分布

找到电荷分布，就可以计算出电场，
进一步计算出电流分布

稳恒电流场综合求解

（2）基本方程

$$\nabla\times\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{E}=-\nabla\phi$$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla\cdot\vec{j}=0\\ \vec{j}=\sigma\vec{E}\end{array}\right\} \Rightarrow \nabla\cdot\sigma\vec{E}=0 \Rightarrow \sigma\nabla^{2}\phi=0$$

基本方程式闭合的

满足Laplace方程，
唯一性定理、镜像法统统适用！

稳恒电流场综合求解

（2）基本方程

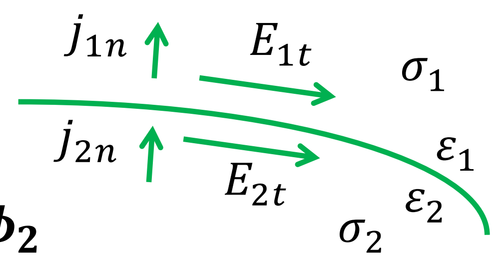
$$\nabla\times\vec{E}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{E}=-\nabla\phi$$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla\cdot\vec{j}=0\\ \vec{j}=\sigma\vec{E}\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \sigma\nabla^2\phi=0$$

（3）边界条件

$$\nabla\times\vec{E}=0 \quad\Rightarrow\quad E_{1t}=E_{2t} \quad\Rightarrow\quad \phi_1=\phi_2$$

$$\nabla\cdot\vec{j}=0 \quad\Rightarrow\quad j_{1n}=j_{2n} \quad\Rightarrow\quad \sigma_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n}$$



注意（1）一般情况下$D_{1n}\neq D_{2n}$

（2）ε是指导体除去自由载流子之后的晶格背景的介电常数。

稳恒电流场综合求解

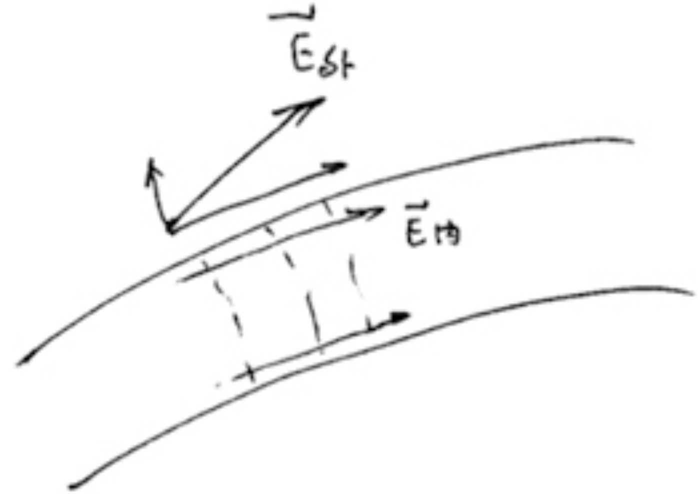
（4）导体内部和表面电场

$\vec{j}_{n外}=0$ ➡ $\vec{j}_{n内}=0$

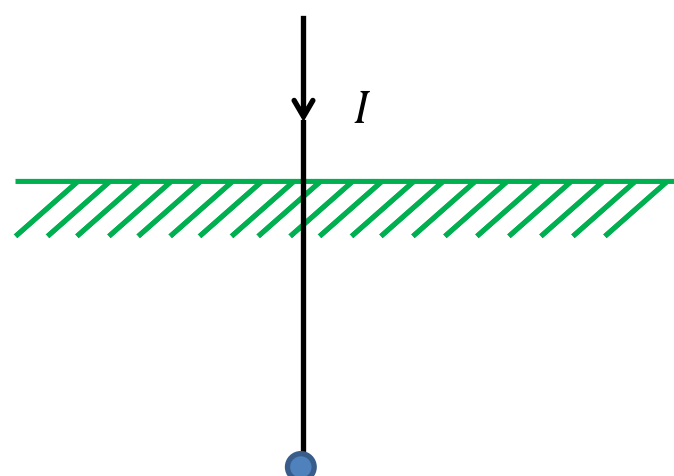
➡ $\vec{E}_{n内}=0$

$$E_{t外}=E_{t内}=j/\sigma_e$$

$$E_{n外}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\neq 0$$



（5）例题



稳恒电流

（1）什么是电流，什么是稳恒电流？如何产生稳恒电流

（2）电流连续性方程与稳恒条件

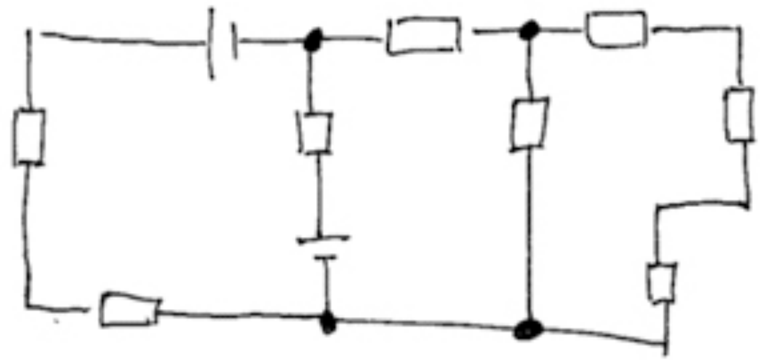
（3）稳恒电流与电场

（4）稳恒电流场综合求解

（5）基尔霍夫方程组

基尔霍夫方程组

基本概念：（图论）



节点： 三条或三条以上导线的汇合点。

支路： 相邻两个节点间，由电源和电阻串联而成且不含其它节点的通路。

3个节点，5个支路
3个独立回路

回路： 起点和终点重合在一个节点的环路。

独立回路： 每个回路至少有一条其它回路没有的支路，称这些回路各自独立。

基尔霍夫方程组

基尔霍夫第一定律：（电荷守恒，稳恒电流条件下）

对任一节点 $\sum I = 0$　　n个节点 ➡ $n-1$个独立节点电流方程

基尔霍夫第二定律：（静电环路定理 $\nabla \times \vec{E} = 0$）

电路中任意闭合回路的全部支路上的电压的代数和等于零

$$\sum U_i = \sum (\pm \mathcal{E}_i \pm I_i r_i \pm I_i R_i) = 0$$

符号规则：（根据自己喜好定义，但要统一）

					电位
电源：	$(-) \to (+)$	电位升$\mathcal{E}$	$(+) \to (-)$	电位降$\mathcal{E}$	升 $+$
电阻：	逆电流	电位升IR	沿电流	电位降IR	降 $-$

基尔霍夫方程组

基尔霍夫方程组的完备性：

设有p个支路， 则有p个电流I_i为未知数，

设有m个独立回路，

设有n个节点，

根据第一定律，可以列出$n-1$个方程，

根据第二定律，可以列出m个方程，

根据图论方法可知，$p=m+n-1$，

推广的欧拉定理

共有p个未知数，可以列出 $p=m+n-1$个方程，

则该方程组完备！

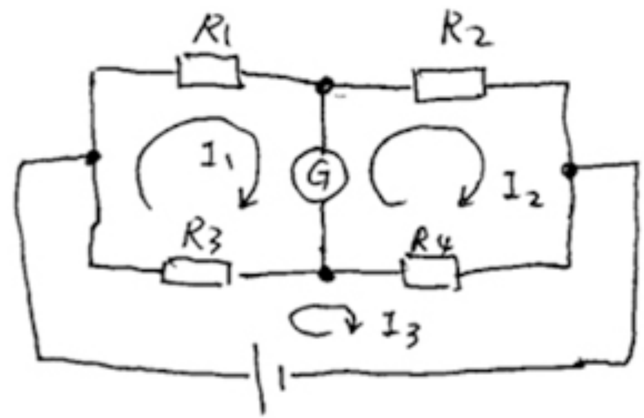
基尔霍夫方程组

例：惠斯登电桥

有四个节点，$n = 4$

有六个支路，$p = 6$

有三个独立回路，$m = 3$

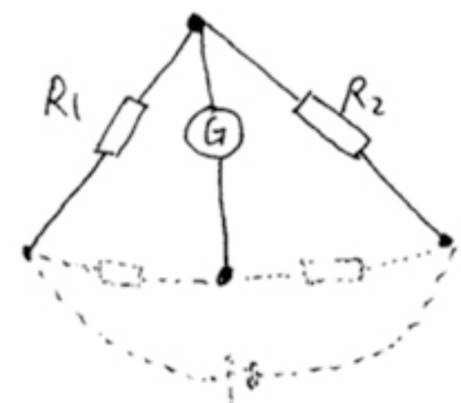


树： 没有回路的连通图

支撑树： 包含一个图全部顶点的树

树枝： 树中的一条边

连枝： 不在该树中的一条边



有n个节点的树有n-1条树枝，

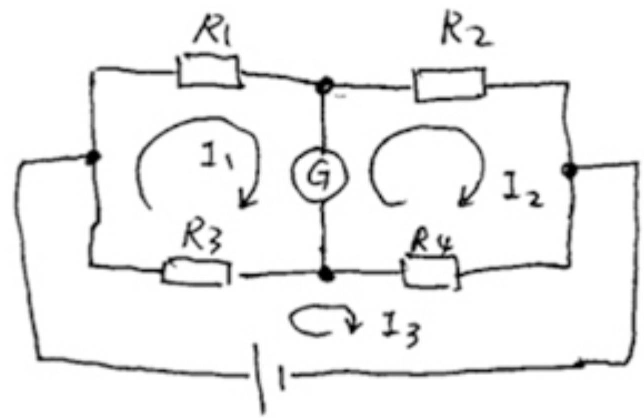
基本回路个数 = 连枝数 = $p - (n - 1)$

➡ 独立回路个数 $m = p - (n - 1)$

基尔霍夫方程组

例：惠斯登电桥

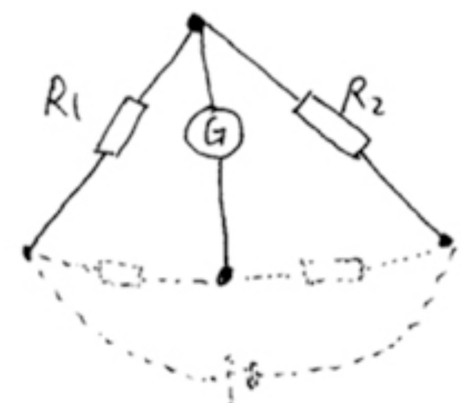
解： 采用回路电流法



$$\begin{cases} -I_1R_1-(I_1-I_3)R_3=0 \\ -I_2R_2-(I_2-I_3)R_4=0 \\ \mathcal{E}-(I_3-I_1)R_3-(I_3-I_2)R_4=0 \end{cases}$$

通过灵敏电流计的电流 $I=I_1-I_2$

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R_1R_3}\frac{\left(\frac{R_3}{R_4}-\frac{R_1}{R_2}\right)}{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{R_3}{R_4}>\frac{R_1}{R_2} & I>0 \\ \frac{R_3}{R_4}=\frac{R_1}{R_2} & I=0 \\ \frac{R_3}{R_4}<\frac{R_1}{R_2} & I<0 \end{cases}$$

稳恒电流Summary

（1）什么是电流，什么是稳恒电流？如何产生稳恒电流

（2）电流连续性方程与稳恒条件

（3）稳恒电流与电场

（4）稳恒电流场综合求解

（5）基尔霍夫方程组