1 线性映射

1. 假设线性空间V中有一组基$\{e_1, e_2, e_3\}$，向量$v = e_1+2e_2+3e_3 = (e_1, e_2, e_3)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$。

   判断以下向量组$\{f_1, f_2, f_3\}$是否也是V中的一组基，如果是，写出v在$\{f_1, f_2, f_3\}$这组基上的坐标向量。

   (a) $f_1 = -e_1, f_2 = -e_2, f_3 = -e_3$

   (b) $f_1 = e_1 + e_2 + e_3, f_2 = e_1 - e_2 + e_3, f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$

   (c) $f_1 = 2e_1 - e_2, f_2 = -e_1 + 2e_2 - e_3, f_3 = -e_2 + 2e_3$

2. 假设线性空间V中有一组基$\{e_1, e_2, e_3\}$，$F : V \to V$是一个线性映射，而且在基$\{e_1, e_2, e_3\}$下的表示矩阵为

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   在以下向量组$\{f_1, f_2, f_3\}$是V中的一组基的时候，写出F在$\{f_1, f_2, f_3\}$这组基上的表示矩阵（提示：因为F的定义域和陪域都是V，所以我们规定计算F的表示矩阵的时候定义域和陪域的基同时取$\{e_1, e_2, e_3\}$或者$\{f_1, f_2, f_3\}$。

   (a) $f_1 = -e_1, f_2 = -e_2, f_3 = -e_3$

   (b) $f_1 = e_1 + e_2 + e_3, f_2 = e_1 - e_2 + e_3, f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$

   (c) $f_1 = 2e_1 - e_2, f_2 = -e_1 + 2e_2 - e_3, f_3 = -e_2 + 2e_3$

3. 证明：所有线性空间V到W的线性映射全体$\{F : V \to W\}$构成一个线性空间（提示：先证明加法和数乘的封闭性，然后证明满足八条公理）

4. （接上题）写下$\{F : V \to W\}$中的一组基并证明（提示：想一想一个元素为1，其它元素都是0的矩阵对应什么样的线性映射）

5. 线性空间V，W上分别有基$\{u_1, \cdots, u_n\}$和$\{v_1, \cdots, v_m\}$。$F : V \to W$是一个线性映射。证明：F在基$\{u_1, \cdots, u_n\}$和$\{v_1, \cdots, v_m\}$下的表示矩阵是唯一的（提示：推广一下$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$的证明。

6. 考虑线性变换$F : V \to W$和$G : W \to Z$，证明：$\dim \mathrm{Im}(G \circ F) \leq \dim \mathrm{Im}(G)$

7. 考虑线性变换$F : V \to W$和$G : W \to Z$。设$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$，$\{z_1, z_2, \cdots, z_l\}$分别为$V$，$W$，$Z$上的基。$T_1$和$T_2$分别为$F$和$G$在相应的基下的表示矩阵。证明：$G \circ F$在相应的基下的表示矩阵是矩阵相乘$T_2T_1$。

8. (勒让德多项式）前四个勒让德多项式的定义为$p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), p_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$。

(a) 证明：$\{p_0,p_1,p_2,p_3\}$是不高于3次的实系数多项式集合$P^3(\mathbb{R})$中的一组基（提示：证明任意不高于三次的多项式$c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$都可以写成$\{p_0,p_1,p_2,p_3\}$的线性组合，而且$\{p_0,p_1,p_2,p_3\}$线性独立）

(b) 我们课上提到$P^3(\mathbb{R})$上有一组基$\{e_0=1,e_1=x,e_2=x^2,e_3=x^3\}$。找到$\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$到$\{p_0,p_1,p_2,p_3\}$的变换矩阵$M$（提示：$M$满足$(p_0,p_1,p_2,p_3)=(e_0,e_1,e_2,e_3)M$）

(c) 证明：$L=(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}$是$P^3(\mathbb{R})\to P^3(\mathbb{R})$的一个线性映射，并找出它的像和核（提示：讲$L$作用在一般多项式$c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$上看看结果）

(d) 找到L在$\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$下的表示矩阵，并计算这个矩阵的特征值和特征向量。把特征向量跟第2小问比较一下，你有什么发现?

(e) 找到L在$\{p_0,p_1,p_2,p_3\}$下的表示矩阵。你有什么发现?

(f) 定义$P^3(\mathbb{R})$中两个元素$f(x)$和$g(x)$的内积为$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$。证明：$\{p_0,p_1,p_2,p_3\}$是 $P^3(\mathbb{R})$中的一组正交基。

9. （线性映射的特征向量）$T:V\to V$是一个线性映射，T的特征向量是V中的一个非零元素v且满足$T(v)=\lambda v$。给定V上的一组基$B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，设A是T在这组基B上的表示矩阵。

   (a) 证明：λ也是A的特征值，而且v在B上的坐标向量是A的特征向量

   (b) $B'=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$是$V$上的另一组基，$A'$是$T$在$B'$上的表示矩阵。证明：$A'$和$A$有相同的特征值。

10. （广义特征向量）$T:V\to V$是一个线性映射，T的广义特征向量v是V中的一个非零元素，是的$(T-\lambda I)^k v=0$对某个正整数k成立。这里I是$V\to V$的一个恒等映射。我们将使得$(T-\lambda I)^d v=0$成立的最小正整数d称为v的幂指数。定义$u_i=(T-\lambda I)^i v$（$i=0,1,\cdots,d-1$）。

    (a) 证明：广义特征方程$(T-\lambda I)^k v=0$有解当且仅当λ是T的特征值。

    (b) 证明：当$0\le j\le d-1$时，u_j是T的特征值为λ，幂指数为$d-j$的广义特征向量

    (c) 证明：$B=\{u_0,u_1,\cdots,u_{d-1}\}$是一组线性无关的向量

    (d) 证明：对于$1\le j<d-1$，$Tu_j=\lambda u_j+u_{j+1}$。对于$j=d-1$，$Tu_j=\lambda u_j$。对于$j>d-1$，$Tu_{j+1}=0$。

    (e) 定义$X=\mathrm{span}(B)$，也就是B长成的线性空间。证明$T(X)\subset X$，也就是说T在X的作用是稳定的，或者说X是T的不变子空间。

    (f) 因为X是T的不变子空间，我们可以把T看成是$X\to X$的线性映射。证明B是X的一组基，并找到T在B下的表示矩阵。

    (g) 上题找到的表示矩阵和我们课上定义的若当块有点区别，你能找到X的一组基，是的T的表示矩阵是课上的若当块的形式吗？（提示：利用B这组基）

11. （附加题）考虑下面一系列的线性映射$\{0\}\xrightarrow{f_1}\mathbb{R}^n\xrightarrow{f_2}\mathbb{R}^k\xrightarrow{f_3}\mathbb{R}^m\xrightarrow{f_4}\{0\}$。每一个线性映射都满足$\mathrm{Im}(f_i)=\mathrm{Ker}(f_{i+1})$，$i=1,2,3$

(a) 写出$\mathrm{Im}(f_1)$的所有元素。

(b) 证明：$\mathrm{Ker}(f_2)$的维数为0。$\mathrm{Im}(f_2)$的维数的多少?

(c) 证明：$f_3 \circ f_2$是$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$的0映射（也就是说定义域中所有元素的像都是0）。$\mathrm{Im}(f_3)$的维数是多少?

(d) 证明：$\dim \mathrm{Im}(f_3) = m$（提示：先看看$\mathrm{Ker}(f_4)$是哪个线性空间）。

(e) 证明：$k = m + n$。

.

2 张量

1. 考虑空间$V^* \otimes V^*$和上面的一组基$\{v^{*\,i} \otimes v^{*\,j}, 1 \le i, j \le n\}$。假设$V$中的基$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$和$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$之间的变换是$(u_1, u_2, \cdots, u_n) = (v_1, v_2, \cdots, v_n)A$（换句话说：$u_i = \sum_j v_j A^j{}_i$，其中$A^j{}_i$是$A$的第$i$行第$j$列的分量）

   (a) 导出$\{u^{*\,i}, 1 \le i \le n\}$和$\{v^{*\,i}, 1 \le i \le n\}$之间的变换。

   (b) $V^* \otimes V^*$中的一个张量$w = \sum_{i,j} w_{ij} v^{*\,i} \otimes v^{*\,j} = \sum_{i,j} w'_{ij} u^{*\,i} \otimes u^{*\,j}$。利用上题中的结论找到$w'_{ij}$和$w_{ij}$之间的关系。

   (c) 考虑空间$V \otimes V^*$中的一个张量w。w在基$\{v_i \otimes v^{*\,j}, 1 \le i, j \le n\}$下的分量是$w^i_j$，在基$\{u_i \otimes u^{*\,j}, 1 \le i, j \le n\}$下的分量是$w'^i_j$。到处$w'^i_j$和$w^i_j$之间的变换关系。

   （说明：如果你愿意，可以用课件附录中介绍的上下指标。但是只要说明清楚不用也可以）