第 3 次作业题解答

1. 设函数 f 的定义域关于原点对称. 求证: 函数 f 可表示成一个奇函数与一个偶函数之和.

证明: 设函数 f 的定义域为 X. 则由题设可知 $\forall x \in X$, 均有 $-x \in X$.

$\forall x \in X$, 定义 $F(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, $G(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. 则

$$\begin{aligned} F(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = F(x), \\ G(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -G(x), \\ f(x) &= F(x) + G(x), \end{aligned}$$

也即 F 为偶函数, G 为奇函数, 且 $f = F + G$, 故所证结论成立.

2. 求证: $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}] = 1$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = \varepsilon$. 则 $\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时, 我们有

$$\left|x\left[\frac{1}{x}\right] - 1\right| = |x| \cdot \left|\left[\frac{1}{x}\right] - \frac{1}{x}\right| \leqslant |x| < \varepsilon.$$

故所证结论成立.

3. 用函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2+5} = 3$, (2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\big) = 0$.

证明: (1) $\forall \varepsilon > 0$, 选取 $\delta = \min(1, \varepsilon)$. 则 $\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, 我们均有 $|x| \leqslant 2 + |x-2| < 2 + \delta \leqslant 3$, 由此立刻可得

$$\begin{aligned} \big|\sqrt{x^2+5} - 3\big| &= \frac{|x^2-4|}{\sqrt{x^2+5}+3} \leqslant \frac{1}{5}|x+2||x-2| \\ &\leqslant \frac{1}{5}(|x|+2)|x-2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

故所证结论成立.

(2) $\forall \varepsilon > 0$, 令 $M = \frac{1}{\varepsilon^2}$. 则 $\forall x > M$, 我们有

$$\begin{aligned} \big|\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\big| &= \big|2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\big| \\ &\leqslant 2\big|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\big| \\ &\leqslant |\sqrt{x+1}-\sqrt{x}| \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

故所证结论成立.

4. 讨论函数 f 在点 $x=0$ 处的极限是否存在, 其中 $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{若 } x>0, \\ a\sin x+b\cos x, & \text{若 } x<0. \end{cases}$$

解: 由题设可知 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$. 下证: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b$.

$\forall\varepsilon>0$, 因 $\lim\limits_{x\to 0^-}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1$, 则 $\exists\delta_1>0$ 使得 $\forall x\in(-\delta_1,0)$, 均有 $|\sin x|<\frac{\varepsilon}{2|a|+1}$. 同样 $\exists\delta_2>0$ 使 $\forall x\in(-\delta_2,0)$, 均有 $|\cos x-1|<\frac{\varepsilon}{2|b|+1}$. 令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 则 $\forall x\in(-\delta,0)$, 我们有

$$|f(x)-b|\leqslant|a||\sin x|+|b||\cos x-1|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b$. 而函数 f 在点 $x=0$ 处的极限存在当且仅当 f 在该点的左、右极限存在且相等, 也即当且仅当 $b=0$.

5. 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

证明: 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=e$, 由此可得 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N$, 我们均有 $e-\varepsilon<(1+\frac{1}{n+1})^n<e+\varepsilon$, $e-\varepsilon<(1+\frac{1}{n})^{n+1}<e+\varepsilon$. 令 $\delta=N+1$. 则 $\forall x>\delta$, 我们有 $[x]>N$, 从而

$$\begin{aligned} e-\varepsilon &< \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\leqslant\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{x}\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \\ &\leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]+1}\leqslant\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}<e+\varepsilon, \end{aligned}$$

也即 $|(1+\frac{1}{x})^x-e|<\varepsilon$. 故所证结论成立.

6. 求证: 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.

证明: $\forall n\geqslant 1$, 令 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $y_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$. 则 $\cos\frac{1}{x_n}=1$, $\cos\frac{1}{y_n}=-1$. 于是我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 而且 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{x_n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{y_n}=-1$. 由此可知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.