《数理方程与特殊函数》复习纲要

第一章 偏微分方程定解问题

1. 理解偏微分方程的定解问题、初始条件、边值条件以及适定性等基本概念
2. 掌握线性偏微分方程的三种叠加原理
3. 了解典型二阶偏微分方程（如三大典型方程）及相应的定解条件
4. 掌握直接积分法（即化为常微分问题来解）
5. 掌握一阶线性偏微分方程的特征线与通解法
6. 掌握 1 维波动方程解的 d’Alembert 公式，掌握解的基本性质，理解左、右行波的意义
7. 掌握二阶偏微分方程的分类，会求特征曲线
8. 会用延拓法分析半无界弦的振动问题
9. 了解用 d’Alembert 公式推导 2、3 维波动方程的解公式（球平均值法、降维法），了解 Huygens 原理

第二章 分离变量法（直角坐标或极坐标等）

1. 掌握有界区间（有界区域）上的分离变量法
2. 掌握 Laplace 算子在常见坐标下的表达
3. 会用齐次化原理即冲量原理和特征函数法处理非齐次方程
4. 会处理非齐次边界条件
5. 会对高维情形（直角坐标或极坐标等）使用分离变量法（如 Laplace 算子特征值问题）
6. 理解并会应用 Sturm-Liouville 理论框架

第四章 积分变换法

1. 掌握 Fourier 变换基本性质，会用 Fourier 变换求解偏微方程（掌握延拓技巧）
2. 会用 Fourier 正弦、余弦变换求解半无界区间上的定解问题
3. 掌握 Laplace 变换基本性质，会用 Laplace 变换求解偏微方程（留数计算不涉及）
4. 会用叠加原理将定解问题分解为不同的问题并确定相应的解法
5. 记忆一些常见 Fourier 变换与 Laplace 变换的公式（包括逆变换）
6. 了解（半）无界区域上分离变量法（积分变换）

第五章 基本解方法

1. 掌握 Dirac δ 函数简单性质，广义函数的定义及各种运算（卷积、广义导数，弱收敛等）
2. 掌握 Green 公式
3. 掌握 Green 函数定义及其性质，会求特殊区域上的 Green 函数（三种方法，主要掌握镜像法与 Fourier 方法），并会求相应区域上 Poisson 方程的解
4. 掌握基本解的定义并以及基本解的求法，会用其给出对应方程的广义解

简单总结：

四大解法，三大典型方程，两大特殊函数（不作考试要求）

基本技巧：直接积分（降阶法或化常微法），叠加原理分解，变量代换，降维法，延拓法， ...

注意：答题中，若使用分离变量法，须写出完整过程；卷积要用显式积分形式。