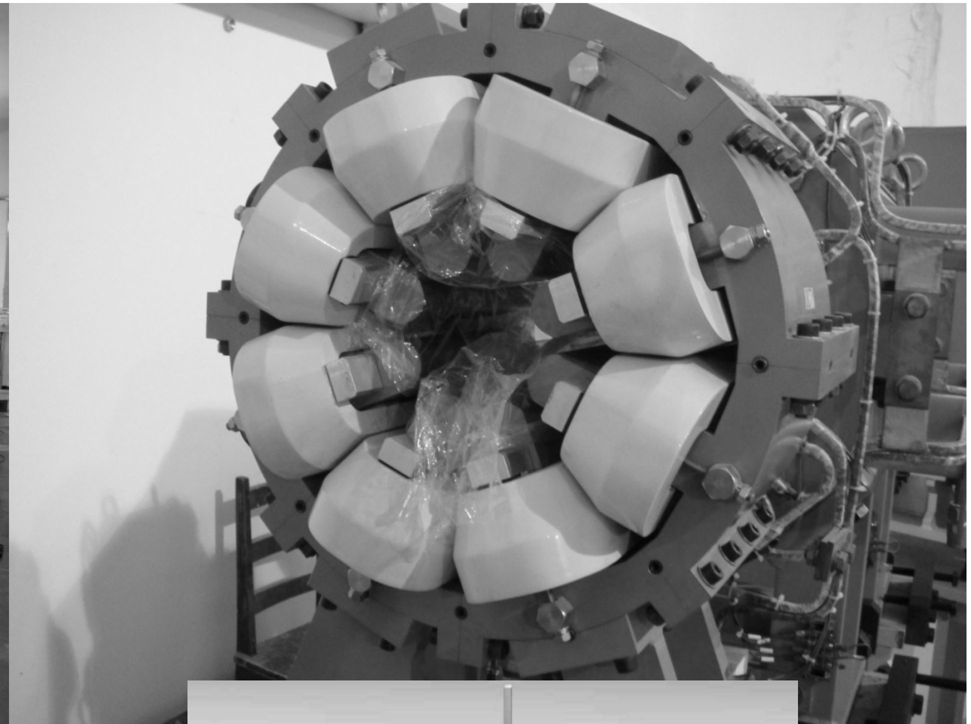
电磁场数值计算

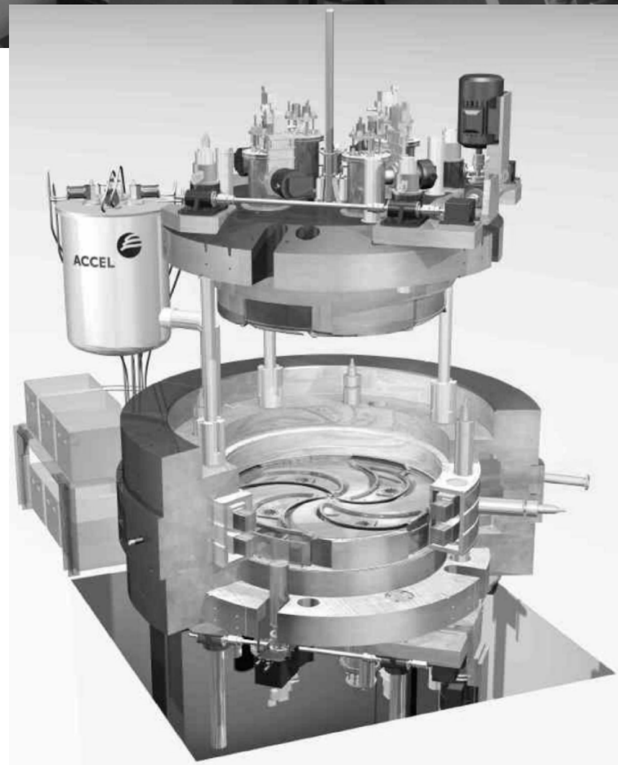
邢庆子

Tel: **62781684(o), 13661226717**

E-mail: **xqz@tsinghua.edu.cn**

清华大学工物系加速器实验室 刘卿楼**309**





- AC250
  - Isochronous cyclotron, 250 MeV
  - Superconducting, 160 A, 10^6 Ampere-turns
  - B field: 2.4 T ~ 4T
  - 3.1 m 90 t
  - Varian ProBeam

魏开煜，《带电束流传输理论》

夏慧琴，《束流传输原理》

1.5.4 讨论

- 边界条件的类型与选取的边界面、采用的位函数均有关

➢ 对于静电场：（标量电位）

1）***E*** 垂直于边界面（如导体表面）：**(*E*$_t$=0)**　第一类

2）取 ***E*** 线为边界线：**(*E*$_n$=0)**　第二类

➢ 对于静磁场：（矢量磁位）

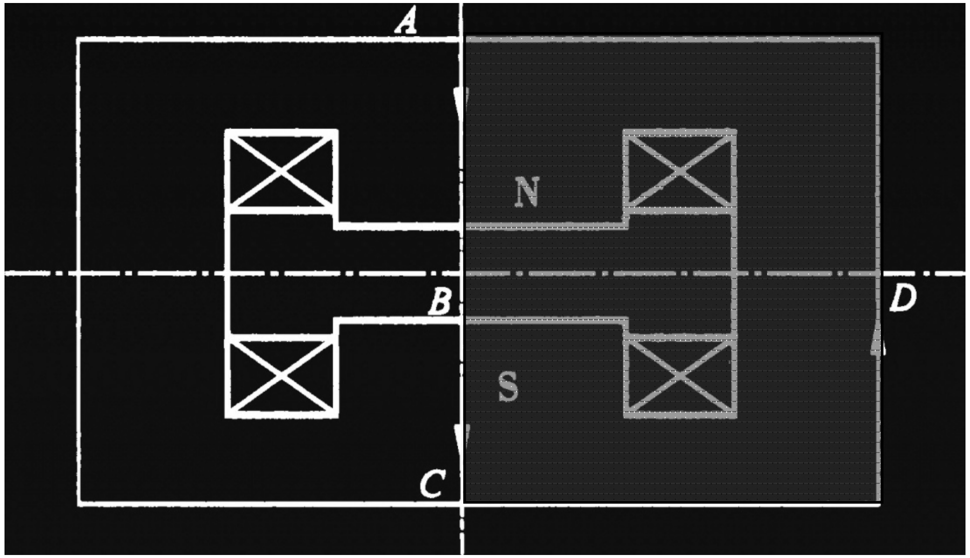
1）取 $\mu\rightarrow\infty$ 的铁磁物质表面为边界：**(*H*$_n$=0)**第一类

2）***B*** 线垂直于边界面：**(*H*$_t$=0)**　第二类

1.5 边界条件与边值关系

例1. H 型二极磁铁，（磁导率 $\mu\rightarrow\infty$）。坐标系选择：二维

- 计算区域：**ABCDA**



H型二极磁铁截面图

对**ABCDA**边界：

➢ 矢量磁位 $\boldsymbol{A}$

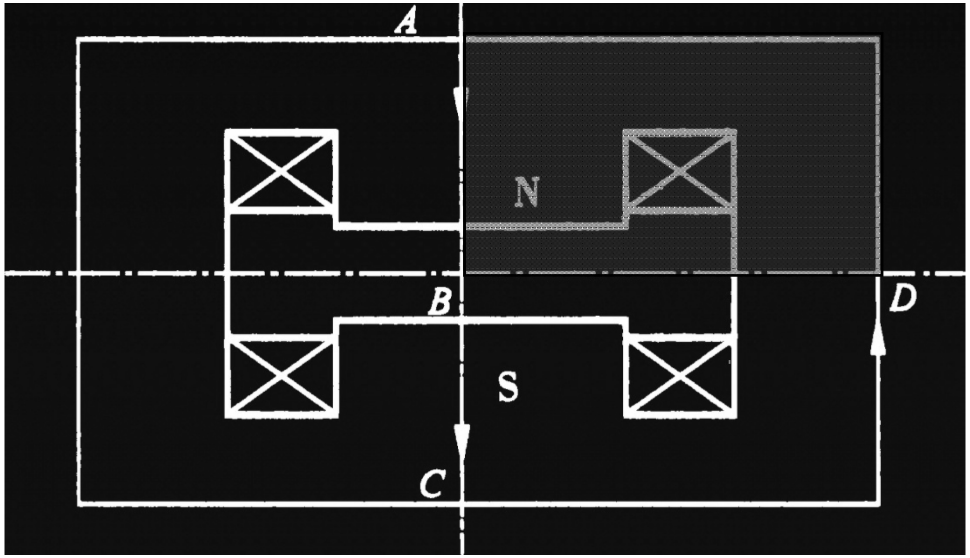
$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial t}=0 \quad ：第一类$$

➢ 标量磁位 $\boldsymbol{\Phi}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}=0 \quad ：第二类$$

例1. H 型二极磁铁，（磁导率 $\mu\rightarrow\infty$）。坐标系选择：二维

- 计算区域：**ABDA**



H型二极磁铁截面图

对**BD**边界：

➢ 矢量磁位 A

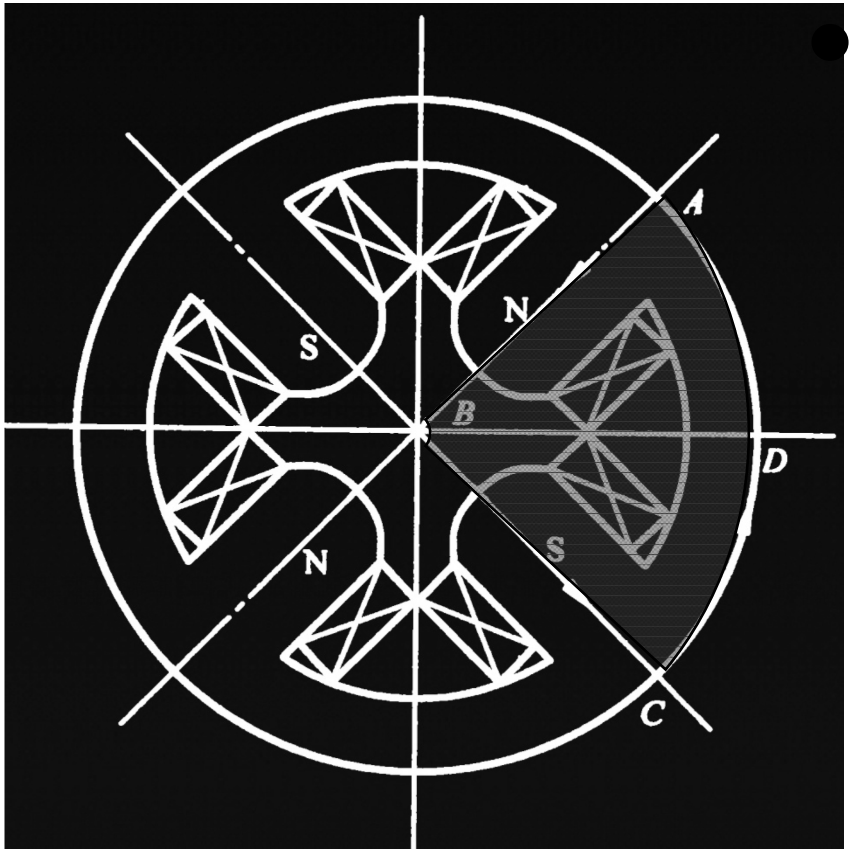
$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}=0$$ ：第二类

➢ 标量磁位 Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0$$ ：第一类

1.5 边界条件与边值关系

例2. 正四极磁铁，（磁导率 $\mu \to \infty$）。坐标系选择：二维



正四极磁铁结构图

- 计算区域：**ABCDA**

对**ABCDA**边界：

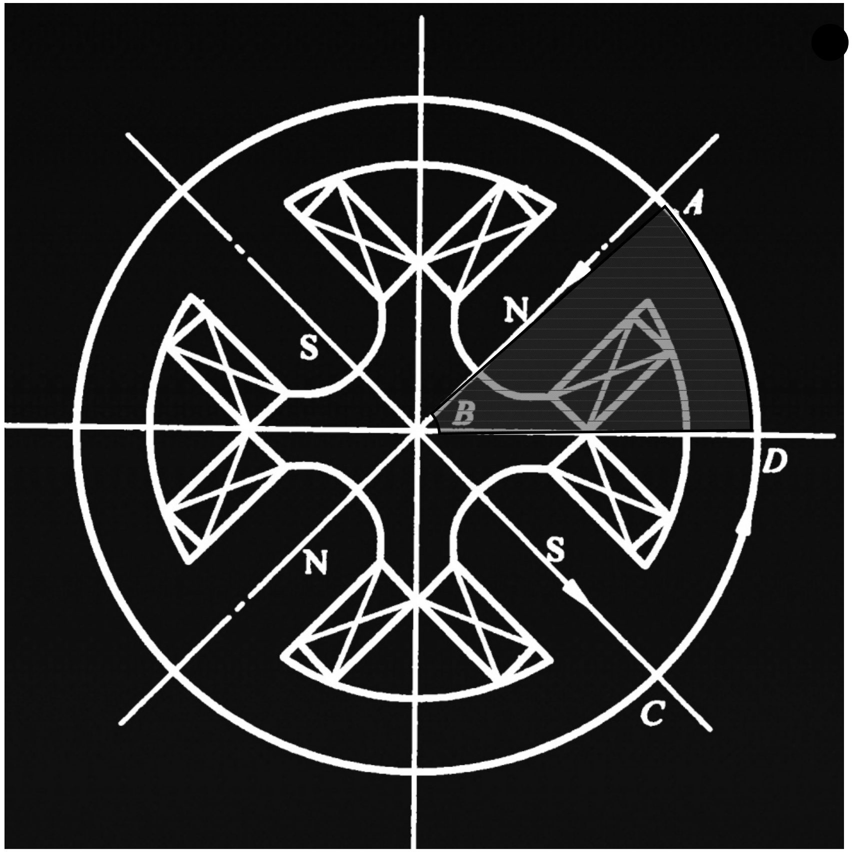
➢ 矢量磁位 A

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial t}=0 \quad \text{：第一类}$$

➢ 标量磁位 Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}=0 \quad \text{：第二类}$$

例**2.** 正四极磁铁，（磁导率 $\mu\rightarrow\infty$）。坐标系选择：二维



正四极磁铁结构图

- 计算区域：**ABDA**

对**BD**边界：

➢ 矢量磁位 A

$$\frac{\partial A}{\partial n}=0 \quad ：第二类$$

➢ 标量磁位 $\boldsymbol{\Phi}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}=0 \quad ：第一类$$

- 总结：

1）首先根据计算问题的**结构对称性，选择一部分区域进行计算；**

2）根据物理问题选择合适的**计算函数；**

3）在边界条件的限定下，具体分析边界条件是属于哪一类。（并不是固定不变的，与选择的**边界和所选位函数有关！**）

● 例一：计算边界选取**ABCDA**。

在此边界上，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{n}}=0$ 即 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{n}}=0$

此区域即有铁区、空气区和线包区，选择矢量磁位**A**作为求解函数为最合适，于是有

$$B_n=-\frac{\partial A_z}{\partial t} \qquad \therefore \ \boldsymbol{A}_{\mathrm{z}}=\text{常数}$$

这属于第一类边界条件。

当除开电流区外计算时，也可选择标量磁位函数 $\boldsymbol{\Phi}$为求解函数，则：$\boldsymbol{H}_{\mathrm{n}}=0$ $\qquad \therefore \boldsymbol{H}_n=-\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}=0$

这属于第二类边界条件。

- 例一：计算边界选取**ABDA**。

由于结构对称性，选择 **1/4** 区域为计算区域，只讨论**BD**边界情况（其它边界与前面分析一样），**BD**与磁力线垂直，在**BD**上 $\boldsymbol{B_t=0\rightarrow H_t=0}$。当仍选 $\boldsymbol{A}$ 做为计算函数时，在 **BD** 边界上有 $B_t=\dfrac{\partial A_z}{\partial n}=0$ ，这属于第二类边界条件。

如果选 $\boldsymbol{\phi}$ 为计算函数, 在**BD**上有 $H_t=-\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}=0$ ，则

$\varphi\big|_s=$ 常数，这属于第一类边界条件。

- 例二

取**ABCD**为边界，磁力线最外部的与边界重合，在此边界上 $\boldsymbol{B}_{\mathbf{n}}=0 \rightarrow \boldsymbol{H}_{\mathbf{n}}=0$。常取矢量磁位**A**为计算函数。由于 $\boldsymbol{B}_{\mathbf{n}}=0$ ，$\therefore B_n=-\dfrac{\partial A_z}{\partial t}$ ，$\boldsymbol{A}_{\mathbf{z}}$=常数。在此，属于第一类边界条件。

为计算简单，考虑对称取**1/8**为计算区,，**BD**为边界，在**BD**上，磁力线与其垂直， $\boldsymbol{B}_{\mathbf{t}}=0 \rightarrow \boldsymbol{H}_{\mathbf{t}}=0$，$B_t=\dfrac{\partial A_z}{\partial n}=0$ ，属于第二类边界条件。

如果用 ϕ 计算，边界条件如何确定，属于哪一类？

一、导出差分方程主要有哪几种方法？

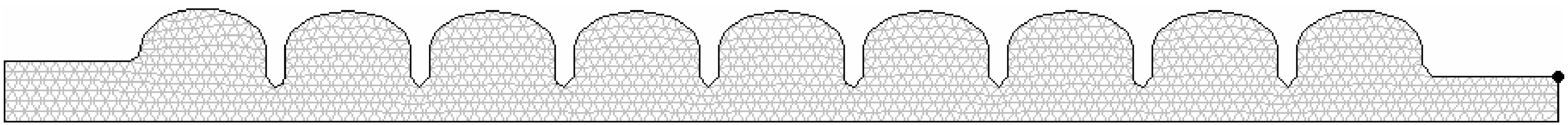
（**1**） 泰勒级数展开方法

（**2**） 积分方程法

（**3**） 变分法

二、应用有限差分法进行数值计算的具体步骤？

（**1**）计算场域的离散化，把连续的场离散为节点参数；



（**2**）对域内及边界条件进行离散化处理，用差商代替偏导数，导出相应的差分格式；

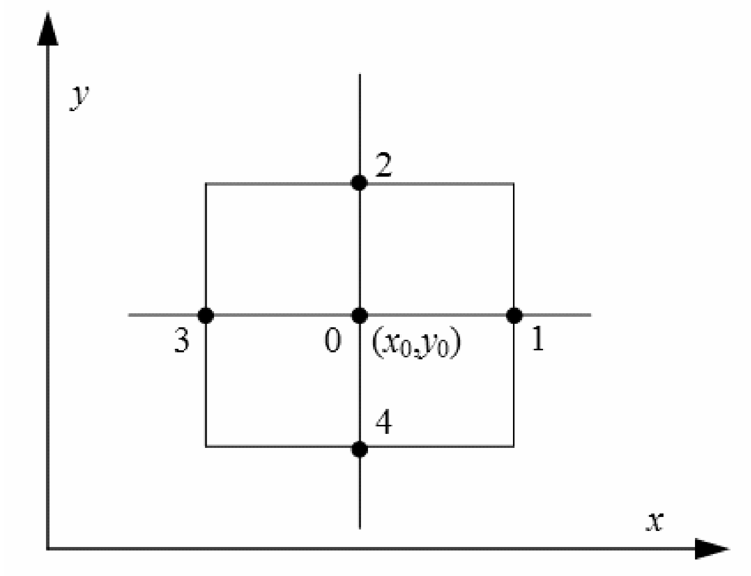
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h},\quad \frac{\Delta^2 f\left(x\right)}{\left(\Delta x\right)^2}=\frac{\Delta f\,(x+h)-\Delta f\,(x)}{h^2}\quad \ldots\ldots$$

（**3**）求解差分方程组。

三、在等距网格条件下，直角坐标系中泊松方程的五点差分格式？

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=-\mu J$$

$$\begin{cases} A_1 = A_0 + \left(\dfrac{\partial A}{\partial x}\right)_0 h + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_0 h^2 + \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\partial^3 A}{\partial x^3}\right)_0 h^3 + \cdots \\ A_3 = A_0 - \left(\dfrac{\partial A}{\partial x}\right)_0 h + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_0 h^2 - \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\partial^3 A}{\partial x^3}\right)_0 h^3 + \cdots \\ A_2 = A_0 + \left(\dfrac{\partial A}{\partial y}\right)_0 h + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_0 h^2 + \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\partial^3 A}{\partial y^3}\right)_0 h^3 + \cdots \\ A_4 = A_0 - \left(\dfrac{\partial A}{\partial y}\right)_0 h + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_0 h^2 + \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\partial^3 A}{\partial y^3}\right)_0 h^3 + \cdots \end{cases}$$



五点差分格式

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0 = -\mu h^2 J$$

四、轴坐标系中， μ=常数时，标量磁位满足的微分方程及其差分格式？

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0$$

$$\left(1+\frac{h}{2r_0}\right)\Phi_1+\Phi_2+\left(1-\frac{h}{2r_0}\right)\Phi_3+\Phi_4-4\Phi_0=0$$

在 ***r*=0** 时，标量磁位满足的微分方程及差分格式？

$\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ 变成**0/0**，为不定值。

利用罗彼达法则，求导，方程变为 $2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0$

由于场对称性， $\Phi_1=\Phi_3$ ，差分方程变为：

$$4\Phi_1+\Phi_2+\Phi_4-6\Phi_0=0$$

五、轴坐标系中， μ=常数时，矢量磁位满足的泊松方程及其差分格式？

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)\right)+\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2}=-\mu J_\theta$$

进行等价变形处理，使计算简化。设 $\Phi = rA_\theta$ ：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=-\mu J_\theta$$

将上式展开，可得 $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=-\mu J_\theta r$$

导出差分方程：

$$\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4-4\Phi_0-\frac{h}{2r_0}(\Phi_1-\Phi_3)=-h^2\mu r_0 J_0$$

- <u>直角坐标系</u>，标量磁位拉普拉斯方程表示为：

$$\Phi_{i,j}=\frac{1}{4}\left(\Phi_{i+1,j}+\Phi_{i,j+1}+\Phi_{i-1,j}+\Phi_{i,j-1}\right)$$

矢量磁位拉普拉斯方程表示为：

$$A_{i,j}=\frac{1}{4}\left(A_{i+1,j}+A_{i,j+1}+A_{i-1,j}+A_{i,j-1}\right)$$

矢量磁位泊松方程表示为：

$$A_{i,j}=\frac{1}{4}\left(A_{i+1,j}+A_{i,j+1}+A_{i-1,j}+A_{i,j-1}+h^2\mu J_{i,j}\right)$$

- <u>圆柱坐标系</u>，轴对称场，标量磁位拉普拉斯方程表示为：

$$\Phi_{i,j}=\frac{1}{4}\left(\left(1+\frac{h}{2r_{i,j}}\right)\Phi_{i+1,j}+\Phi_{i,j+1}+\left(1-\frac{h}{2r_{i,j}}\right)\Phi_{i-1,j}+\Phi_{i,j-1}\right)$$

矢量磁位拉普拉斯方程表示为：

$$\Phi_{i,j}=\frac{1}{4}\left(\Phi_{i+1,j}+\Phi_{i,j+1}+\Phi_{i-1,j}+\Phi_{i,j-1}-\frac{h}{2r_{i,j}}\left(\Phi_{i+1,j}-\Phi_{i-1,j}\right)\right)$$

矢量磁位泊松方程表示为：

$\Phi = rA_\theta$!!!

$$\Phi_{i,j}=\frac{1}{4}\left(\Phi_{i+1,j}+\Phi_{i,j+1}+\Phi_{i-1,j}+\Phi_{i,j-1}-\frac{h}{2r_{i,j}}\left(\Phi_{i+1,j}-\Phi_{i-1,j}\right)+h^2\mu r_{i,j}J_{i,j}\right)$$

2.4 边界条件与边值关系的离散化

2.4.1 第一类边界条件的差分离散

2.4.2 第二类边界条件的差分离散

2.4.3 不同媒质交界面上的差分离散

2.4.4 对称线的差分离散格式

2.5 差分方程求解实例

2.9 时变电磁场的差分格式

2.4.1 第一类边界条件的差分离散

1）边界与节点重合时的处理——直接代入法

$$A_{\mathrm{i}} = A_0 \qquad \mathrm{i} = 1, 2, ..., n$$

2）边界与节点不重合时的处理

(1) 直接转移法： $\Phi_{\mathrm{P}} = \Phi_{\mathrm{R}}$

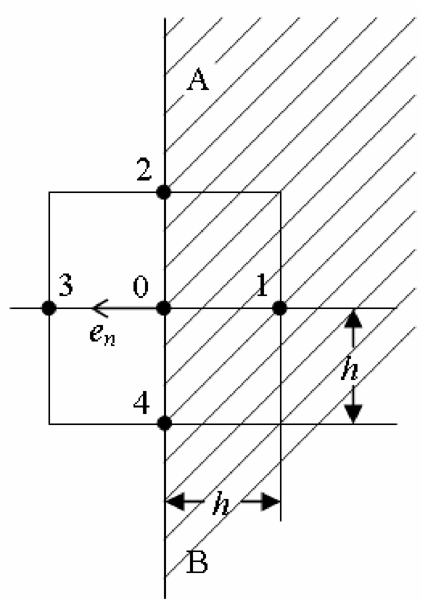
(2) 线性插值法： $\Phi_0 = \dfrac{S_1}{S_1 + S_2}\Phi_2 + \dfrac{S_2}{S_1 + S_2}\Phi_1$

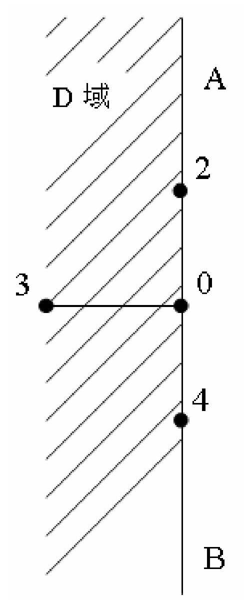
(3) 不等距网格法：

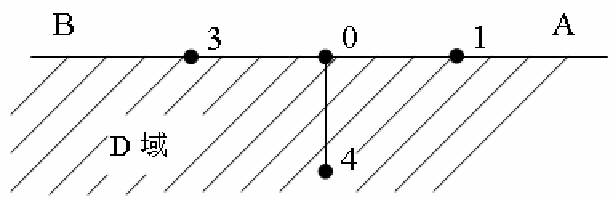
$$\frac{1}{1+\alpha}A_1 + \frac{1}{\beta(1+\beta)}A_2 + \frac{1}{\alpha\left(\alpha+1\right)}A_3 + \frac{1}{1+\beta}A_4 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)A_0 = -\frac{1}{2}h^2\mu J_0$$

2.4.2 第二类边界条件的差分离散

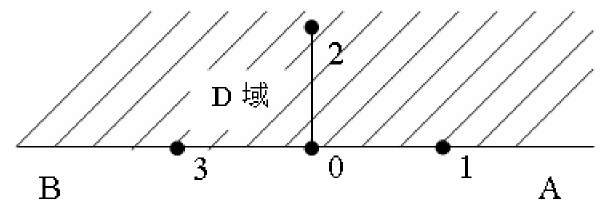
本节只讨论节点在边界上，并且边界节点处外法线与网格线重合的二类齐次边界。







$$A_0=\frac{1}{4}(A_1+A_3+2A_4+h^2\mu J_0)$$



$$A_0=\frac{1}{4}(2A_1+A_2+A_4+h^2\mu J_0)$$

$$A_0=\frac{1}{4}(A_1+2A_2+A_3+h^2\mu J_0)$$

$$A_0=\frac{1}{4}(A_2+2A_3+A_4+h^2\mu J_0)$$

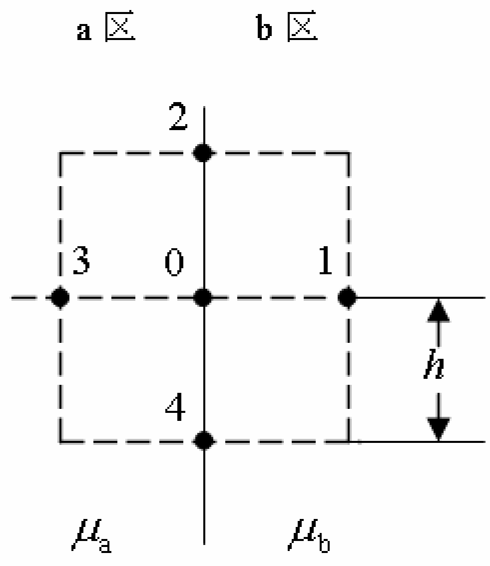
2.4.3 不同媒质交界面上的差分离散

一、交界面与网格相重合的情况

a 区：$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_a J$

$$\Rightarrow A_{a1} + A_{a2} + A_{a3} + A_{a4} - 4A_{a0} = -h^2 \mu_a J_0 \quad (2.48)$$

b 区：$\nabla^2 \boldsymbol{A} = 0 \Rightarrow A_{b1} + A_{b2} + A_{b3} + A_{b4} - 4A_{b0} = 0 \quad (2.49)$



（向外延拓）

利用交界面边界条件：

$$A_{am} = A_{bm} = A_m \qquad (m = 0, 2, 4) \qquad (2.50)$$

分界面处 $J_s = 0 \Rightarrow H_{at} = H_{bt}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_a}(A_{a1} - A_{a3}) = \frac{1}{\mu_b}(A_{b1} - A_{b3}) \quad (2.52)$$

A_{a1} 和 A_{b3} 实际是不存在的。利用式(2.48)、(2.49)、(2.52)消去这两个量，可得

$$2A_{b1}+(1+k)A_2+2kA_{a3}+(1+k)A_4+kh^2\mu_a J_0-4(1+k)A_0=0\ ,\quad k=\frac{\mu_b}{\mu_a} \qquad \textbf{(2.56)}$$

讨论两种情况：

(1) 载流区和空气(真空)区的交界面

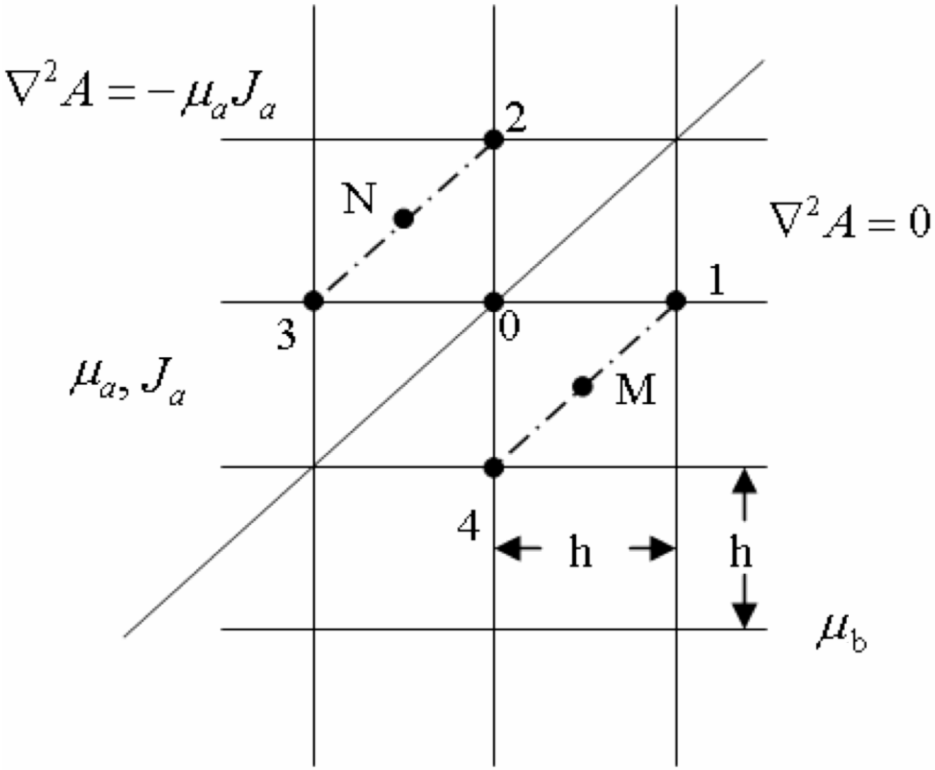
$$\mu_a=\mu_b=\mu_0 \Rightarrow k=1 \Rightarrow \underline{A_0=\frac{1}{4}\left(A_{b1}+A_2+A_{a3}+A_4+\frac{\mu_0 h^2 J_0}{2}\right)}$$

(2) 铁区与空气区的交界面：

$$\mu_b\approx\infty,\ \mu_a=\mu_0 \Rightarrow \frac{k}{1+k}\to 1 \Rightarrow \underline{A_0=\frac{1}{4}(A_2+2A_{a3}+A_4)}$$

二、交界面对于网格呈对角线形态的情况

$$
\begin{cases}
A_{a1}+A_{a2}+A_{a3}+A_{a4}-4A_0=-h^2\mu_a J_a \\
A_{b1}+A_{b2}+A_{b3}+A_{b4}-4A_0=0 \\
\dfrac{1}{\mu_a}\dfrac{(A_{aM}-A_{aN})}{\sqrt{2}h}=\dfrac{1}{\mu_b}\dfrac{(A_{bM}-A_{bN})}{\sqrt{2}h} \\
\begin{cases} A_{aM}=(A_{a1}+A_{a4})/2 \\ A_{bN}=(A_{b2}+A_{b3})/2 \end{cases} \\
\begin{cases} \mathrm{A}_{aN}=(A_{a2}+A_{a3})/2 \\ A_{bM}=(A_{b1}+A_{b4})/2 \end{cases}
\end{cases}
$$



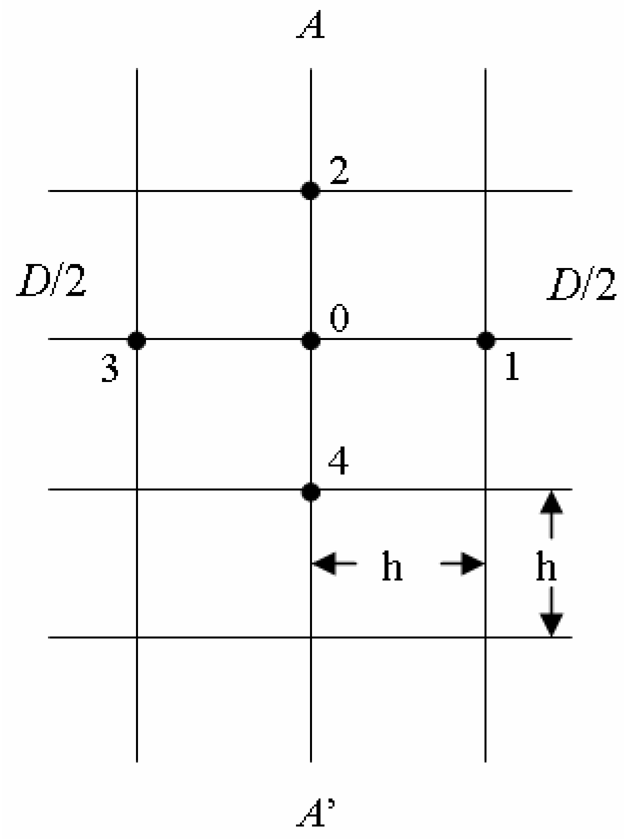
分界面与网格线呈对角线图示

$$
A_0=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{1+k}(A_{b1}+A_{b4})+\frac{2k}{1+k}\left(A_{a2}+A_{a3}\right)+\frac{k}{1+k}h^2\mu_a J_a\right) \quad \textbf{(2.65)}
$$

2.4.4 对称线的差分离散格式

根据场的对称性有 $u_1 = u_3$，相应的差分格式为：

$$u_0 = \frac{1}{4}(2u_1 + u_2 + u_4 - h^2 F)$$



对称线条件的差分离散

➢ 超松驰迭代因子

二维场拉普拉斯方程等距剖分差分格式公式为：

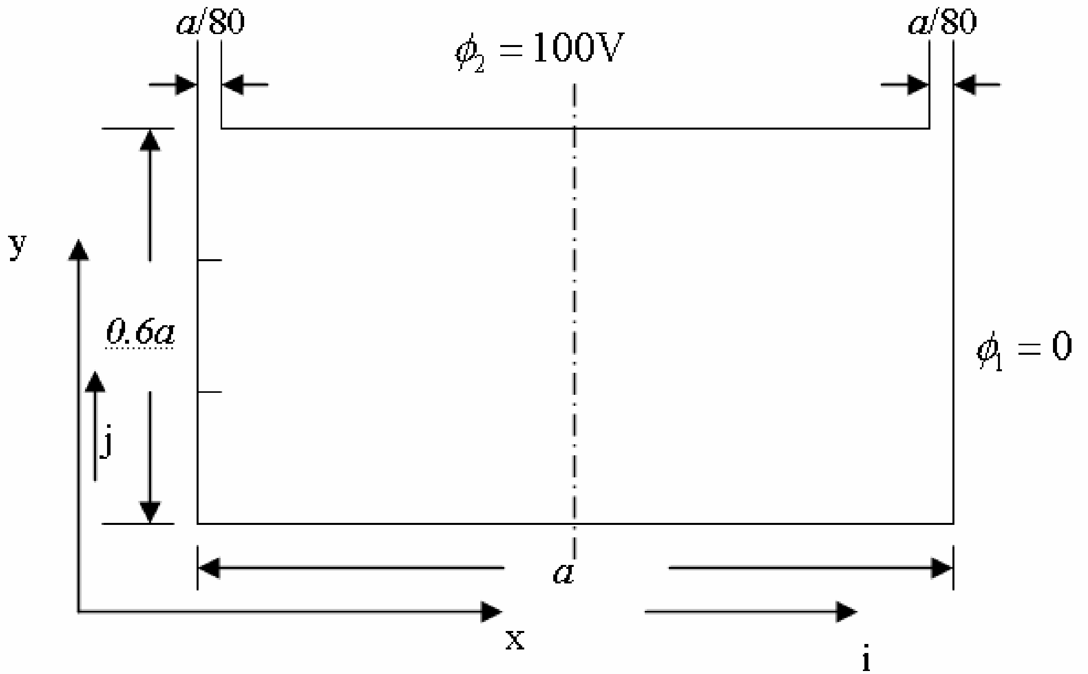
$$\Phi_{i,j}^{(n+1)}=\Phi_{i,j}^{(n)}+\frac{\alpha}{4}\left(\Phi_{i+1,j}^{(n)}+\Phi_{i,j+1}^{(n)}+\Phi_{i-1,j}^{(n+1)}+\Phi_{i,j-1}^{(n+1)}-4\Phi_{i,j}^{(n)}\right)$$

α 的范围及作用？

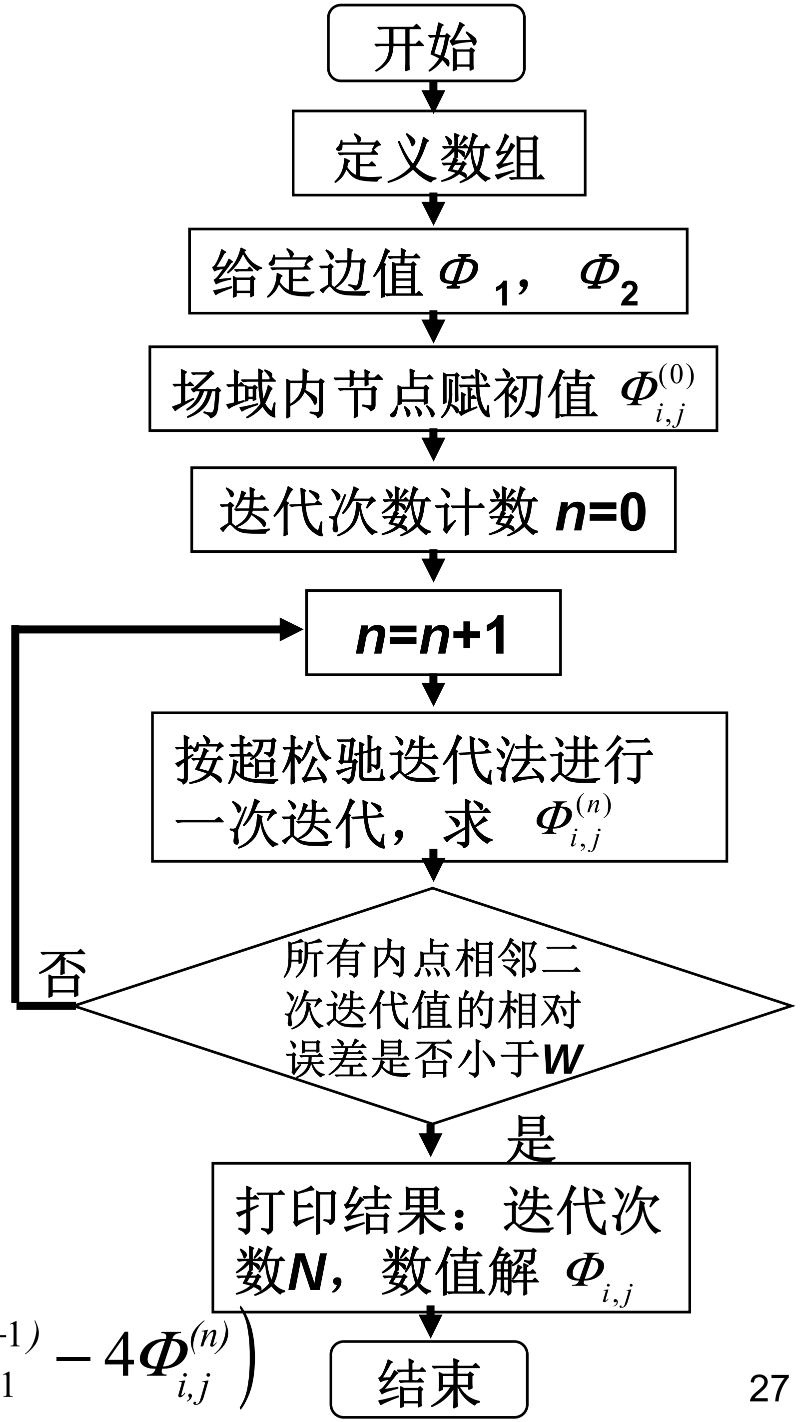
$$1\leq\alpha<2$$

加速收敛因子，影响迭代的速度。

2.5 差分方程求解实例



长接地金属槽二维问题求解



$$\Phi_{i,j}^{(n+1)} = \Phi_{i,j}^{(n)} + \frac{\alpha}{4}\left(\Phi_{i+1,j}^{(n)} + \Phi_{i,j+1}^{(n)} + \Phi_{i-1,j}^{(n+1)} + \Phi_{i,j-1}^{(n+1)} - 4\Phi_{i,j}^{(n)}\right)$$

2.9 时变电磁场的差分格式

作业：

补**4**：推导边界节点与网格不重合时不等距网格的公式（书中公式（**2.38**））。

补**5**：分界面对于网格呈对角线分布。对于静电场，给出分界面处关于 **0** 点的五点差分格式。（仅讨论 $\rho_a \neq 0$，$\rho_b = 0$ 的情况，分界面的面电荷密度 $\sigma_s = 0$ ）

交界面处位函数与场量的切向/法向分量之间关系：（二维）

$$\begin{cases}\vec{n}=n_x\vec{e}_x+n_y\vec{e}_y\\ \vec{t}=t_x\vec{e}_x+t_y\vec{e}_y=n_y\vec{e}_x-n_x\vec{e}_y\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{A}=\dfrac{\partial A_z}{\partial y}\vec{e}_x-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\vec{e}_y\\ \nabla A_z=\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\vec{e}_x+\dfrac{\partial A_z}{\partial y}\vec{e}_y\end{cases}$$

矢量磁位：

$$\begin{cases}H_t=\vec{t}\bullet\vec{H}=\vec{t}\bullet\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}=\dfrac{1}{\mu}\vec{n}\bullet\nabla A_z=\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial A_z}{\partial n}\\ H_n=\vec{n}\bullet\vec{H}=\vec{n}\bullet\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}=-\dfrac{1}{\mu}\vec{t}\bullet\nabla A_z=-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial A_z}{\partial t}\end{cases}$$

标量磁位：

$$\begin{cases}H_t=\vec{t}\bullet\vec{H}=-\vec{t}\bullet\nabla\boldsymbol{\Phi}_m=-\dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}_m}{\partial t}\\ H_n=\vec{n}\bullet\vec{H}=-\vec{n}\bullet\nabla\boldsymbol{\Phi}_m=-\dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}_m}{\partial n}\end{cases}$$