1 矩阵对角化

1. 对下面的矩阵，找到常微分方程组$\frac{dx}{dt} = Ax$的通解

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

2 奇异值分解

1. 假设S是一个对称矩阵。根据S特征值的正负，求出S的奇异值分解。

2. 考虑下面一组数据构成的矩阵

$$A_0 = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 \\ 15 & 22 & 28 & 38 & 54 & 53 \\ 25 & 42 & 58 & 78 & 104 & 113 \end{bmatrix} \tag{2}$$

   (a) 求出每一行的平均值，并且用A_0的每个元素减去它所在行的平均值得到一个居中化的数据矩阵A。

   (b) 求出A对应的协方差矩阵$S = \frac{AA^T}{n-1}$（在这个例子里$n =$?）

   (c) 求出S的特征值$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$（保留两位小数）和对应的特征向量$u_1$，$u_2$，$u_3$。

   (d) 验证第三个特征值是否为0？A的每一列同u_3的内积是否也是0？由此证明所有的数据都在$x_1 + x_2 - x_3 = 0$定义的平面上。

   (e) 在二维平面直角坐标系中标出出A的前两行对应数据点，以及u_1，u_2只取前两个分量对应的向量。数据点在这两个方向的分布如何？你能得出什么结论？

3. 对于$m \times n$的矩阵A我们定义了A的广义逆$A^+ = V\Sigma^+U^T$。

   (a) 证明：$(A^+A)^2 = A^+A$，$(AA^+)^2 = AA^+$。

   (b) 证明：$C(A^+) = C(A^T)$，$C((A^+)^T) = C(A)$。（提示：回忆U和V和四个子空间基的关系。

   (c) 证明：$x^+ = A^+b$是方程$A^TAx = A^Tb$的解。

   (d) 对于方程$A^TAx = A^Tb$的任何一个解$\hat{x}$，证明：$A^TA(\hat{x} - x^+) = 0$且$A(\hat{x} - x^+) = 0$。

   (e) 证明：$x^+ \in C(A)$

   (f) 证明：$\hat{x} - x^+$垂直于x^+。

   (g) 证明：$|\hat{x}|^2 = |\hat{x} - x^+|^2 + |x^+|^2$。然后证明：$x^+$是方程$A^TAx = A^Tb$长度最小的解。

3 线性映射

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足$f(x+y)=f(x)+f(y)$和$f(cx)=cf(x)$。证明：$f(x)=ax$。

2. 考虑一个$m\times n$的矩阵A对应的线性映射$L_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$L_A(x)=Ax$。我们讨论映射的性质和之前矩阵结果的关系。

   (a) 证明：L_A是满射当且仅当$n\geq m$且A的秩等于m

   (b) 证明：L_A是单射当且仅当$N(A)=\{0\}$

   (c) 证明：L_A是双射当且仅当$n=m=\mathrm{rank}(A)$

3. $L:U\to V$是一个线性映射。证明：$\mathrm{Ker}(L)$和$\mathrm{Im}(L)$都是线性空间。

4. 判断下列定义域为$\mathbb{R}^3$的映射是否是线性映射。如果是，写出它在标准基下对应的矩阵，$\mathrm{Ker}(L)$和$\mathrm{Im}(L)$各自的一组基。

   (a) $L(x)=x_1+2x_2+3x_3$

   (b) $L(x)=x_1+2x_2+3$

   (c) $L(x)=(x_1,x_2)^T$

   (d) $L(x)=(x_1,x_1+x_2,x_3^2)^T$

   (e) $L(x)=(x_1+x_3,3x_1-x2,3x_2+x_3)^T$

   (f) $L(x)=(1,1,1)^T\times x$，其中$\times$是两个3维向量的叉乘。

5. 考虑所有2×2实矩阵的集合$M_2(\mathbb{R})$，并且给定一组基$e_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $e_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $e_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $e_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$。判断下面映射是不是线性映射。如果是写出下面映射的定义域，陪域、给定基下的表示矩阵、核、像

   (a) $L(A)=\mathrm{Tr}(A)$

   (b) $L(A)=\det(A)$

   (c) $L(A)=XAX^{-1}$，其中$X=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$。

   (d) $L(A)=BA$，其中B是一个给定的2×2矩阵