

第 5 周额外习题课题目

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 映射与函数

(1) 映射的定义:

(a) 映射 $f: X \rightarrow Y$ 为对应规则使得 $\forall x \in X$, 均有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应, 记 y 为 $f(x)$. 称 X 为映射 f 的定义域, Y 为 f 的取值范围, 并将 X 记为 $D(f)$. 称 $R(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$ 为映射 f 的值域, 也叫 f 的像集, 记作 $f(X)$ 或 $\text{Im}f$. 定义域与值域均为数集的映射被称为函数.

(b) 对于由表达式 $y = f(x)$ 所定义的函数, 使得表达式有意义的所有 x 组成的集合被称为函数 f 的自然定义域, 而由所有取值组成的集合则被称为 f 的值域.

(c) 数列恰好就是定义在正整数集 \mathbb{N}^* 上的函数.

(d) 函数的四则运算: 线性组合, 乘法, 除法.

(e) 映射的复合.

(2) 映射的性质:

(a) 单射: 不同元有不同像; 像同则原像同.

(b) 满射: 取值范围与值域重合.

(c) 双射: 既是单射也是满射, 也称可逆映射. 双射有逆映射, 反之亦然.

(d) 函数的基本性质: 有界性 (像集的有界性), 周期性, 奇偶性, 单调性等. 严格单调函数为单射, 其反函数与之有相同的单调性. 有反函数的函数不一定严格单调.

(3) 基本初等函数: 常值函数, 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数.

(4) 初等函数: 由上述基本初等函数经过有限多次四则运算和复合运算后所得到的函数, 被称为初等函数. 常用的初等函数包括: 多项式, 有理函数, 正切, 余切, 双曲正弦, 双曲余弦, 双曲正切, 双曲余切.

2. 函数极限的定义

(1) 邻域 $B_X(a, \varepsilon)$ 与去心邻域 $\dot{B}_X(a, \varepsilon)$.

(2) 极限点: 点 $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty, \pm\infty\}$ 被称为 X 的极限点, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 均有 $\dot{B}_X(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$. 点 a 为 X 的极限点当且仅当在 $X \setminus \{a\}$ 中存在收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$.

(3) 函数极限: 设 X 为非空数集, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$ 为 X 的极限点, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为函数. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \dot{B}_X(x_0, \delta), f(x) \in B(a, \varepsilon)$, 则称当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 趋近到 a (或以 a 为极限), 并将 a 记为 $\lim_{x \ni x \rightarrow x_0} f(x)$. 当 $\lim_{x \ni x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ 时, 才说“当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 收敛于 a ”.

(4) 函数极限的否定表述: 当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 不趋近于点 a 当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0, \exists x \in \dot{B}_X(x_0, \delta)$ 使 $f(x) \notin B(a, \varepsilon_0)$.

(5) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$, 其中 $x_0 \in \mathbb{R}$.

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$.

3. 函数极限的性质

- (1) **函数极限与数列极限的关系:** $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 当且仅当对于 $X \setminus \{x_0\}$ 中的以 x_0 为极限的任意数列 $\{a_n\}$, 均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = a$. 该结论常用来证明函数极限不存在.
- (2) **唯一性:** 函数极限若存在且有限, 必唯一.
- (3) **局部有界性:** 若函数 f 在点 x_0 处收敛, 则 f 在该点的某个去心邻域内有界.
- (4) **局部保序性:** 设 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{X \ni x \rightarrow x_0} g(x) = b$.
- (a) 若 $a > b$, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \dot{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) > g(x)$.
- (b) 若 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \dot{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) \geq g(x)$, 则 $a \geq b$.
- (5) **局部保号性:** 设 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x) = a$.
- (a) 若 $a > 0$, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \dot{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) > 0$.
- (b) 若 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \dot{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) \geq 0$, 则 $a \geq 0$.
- (4) **四则运算法则:** 设 X 为非空数集, 而函数 $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{X \ni x \rightarrow x_0} g(x) = b.$$

则下列结论成立 (若等式右边有意义):

- (a) $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda a + \mu b, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- (b) $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} (fg)(x) = ab$.
- (c) $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{a}{b}$.
- (5) **夹逼原理:** 设 X 为非空的数集, x_0 为 X 的极限点, 而 $f, g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为函数使得:
- (a) $\exists \delta_0 > 0$ 使得 $\forall x \in \dot{B}_X(x_0, \delta_0)$, 均有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,
- (b) $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{X \ni x \rightarrow x_0} h(x) = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
- 则我们有 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x) = a$.
- (5) **复合函数极限法则:** 设 X, Y 为数集, 点 x_0 为 X 的极限点而 $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty, \pm\infty\}$, 并且函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}, g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ 满足下列性质:
- (a) $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$, 均有 $f(x) \in Y \setminus \{y_0\}$, (b) $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \lim_{Y \ni y \rightarrow y_0} g(y) = a$.
- 则我们有 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} g(f(x)) = a$.
- 注: 复合函数极限法则实质上是在做变量替换.
- (6) **单调有界定理:** 单调函数的单侧极限存在.
- (7) **Cauchy 准则:** 假设 X 为数集, 点 x_0 为 X 的极限点, 而 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为函数. 则极限 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x)$ 收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, x' \in \dot{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
- (8) **典型函数的增长速度比较:** 对数函数比常数增长得更快, 幂函数比对数函数增长得更快, 指数函数比幂函数增长得更快.

(9) 典型的函数极限:

- (a) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ 不存在.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$ ($a > 0$), $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-3x}{2+3x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-3}$.
- (e) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = a > 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$.
 $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ ($a > 0$), $\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$ ($x_0 > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$).
- (f) $\lim_{x \rightarrow x_0} \log x = \log x_0$ ($x_0 > 0$).
- (g) $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$.
- (h) $\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$ ($x_0 \in [-1, 1]$).

4. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量的定义与性质:

- (a) 定义: 趋于零的函数被称为无穷小量, 简称无穷小. 若 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, 则记

$$\alpha(x) = o(1) \quad (X \ni x \rightarrow x_0).$$

- (b) α 为无穷小量当且仅当 $|\alpha|$ 亦如此.
- (c) 非零的常数与无穷小量之和在局部的范围内与该常数同号.
- (d) 有限多个无穷小量之和为无穷小量.
- (e) 无穷小量乘以常数后还是无穷小量.
- (f) 有界函数与无穷小量之积为无穷小量.

(2) 无穷小量的比较: 设 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{X \ni x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$. 另外我们还假设 $\beta(x) \neq 0$.

- (a) 若 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $X \ni x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量, 记作

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \quad (X \ni x \rightarrow x_0).$$

此时 $o(\beta(x)) = \beta(x)o(1)$ ($X \ni x \rightarrow x_0$).

- (b) 若 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, 称 $X \ni x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小量.
- (c) 若 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称 $X \ni x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小量, 记作

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \quad (X \ni x \rightarrow x_0).$$

注: 等价无穷小量的价值在于简化极限计算.

- (c) 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 而 $k \in \mathbb{N}^*$. 若 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^k} = c \neq 0$, 则称 $X \ni x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 为 k 阶无穷小量.

(3) 典型的等价无穷小量

当 $x \rightarrow 0$ 时, 我们有

- (a) $\sin x \sim x, \arcsin x \sim x, \tan x \sim x,$
- (b) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3,$
- (c) $\log(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \log a \ (a > 0, a \neq 1),$
- (d) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$

(4) 无穷大量的定义与性质:

- (a) **定义:** 极限等于无穷的函数被称为无穷大量, 简称无穷大.
- (b) 无穷大量的倒数为无穷小量, 不等于零的无穷小量的倒数为无穷大量.
- (c) 同无穷小量一样, 我们对无穷大量也可以进行类似的讨论.

5. 函数的连续性

(1) 连续性:

- (a) **定义:** 设 $X \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in X$. 称函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 在点 x_0 连续, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in B_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- (b) 若 x_0 不为 X 的极限点, 则 f 在该点连续. 以后将总假设 x_0 为 X 的极限点.
- (c) 若 x_0 为 X 的极限点, 则 f 在点 x_0 处连续当且仅当 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- (d) 若函数 f 在 X 的每点连续, 则称之为 X 上的连续函数. 记 $\mathcal{C}(X)$ 为 X 上的所有连续函数的集合.
- (e) 函数 $f \in \mathcal{C}(a, b)$ 当且仅当 $\forall x_0 \in (a, b)$, 均有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- (f) 函数 $f \in \mathcal{C}[a, b]$ 当且仅当 $f \in \mathcal{C}(a, b)$, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
- (g) 若 f 在点 x_0 处连续, 则 $|f|$ 也在该点连续.

(2) 单侧连续: 设 X 为区间, $x_0 \in X$, 而 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为函数.

- (a) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 称 f 在点 x_0 左连续.
- (b) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 称 f 在点 x_0 右连续.
- (c) 左、右连续称为单侧连续.
- (d) 若 x_0 为 X 的内点, 则函数 f 在点 x_0 连续当且仅当 f 在点 x_0 处左、右连续.

(3) 连续的局部性质:

- (a) 设 X 为数集, $x_0 \in X$. 则函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续当且仅当对于 X 中收敛到点 x_0 的任意数列 $\{a_n\}$, 均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$.
- (b) 若 X 中有收敛到点 x_0 的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$, 则 f 在点 x_0 处不连续. 该结论常用来证明函数不连续.
- (c) **局部有界:** 若 f 在点 x_0 处连续, 则它在点 x_0 某个邻域内有界.
- (d) **局部保序性:** 设 X 为数集, $x_0 \in X$, 而函数 $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续.
 - (i) 若 $f(x_0) > g(x_0)$, 则 $\exists \delta > 0$ 使 $\forall x \in B_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) > g(x)$.
 - (ii) 若 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \dot{B}_X(x_0, \delta), f(x) \geq g(x)$, 则 $f(x_0) \geq g(x_0)$.
- (e) **局部保号性:** 设 X 为数集, $x_0 \in X$, 而函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续.

- (i) 若 $f(x_0) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in B_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) > 0$.
- (ii) 若 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) \geq 0$, 则 $f(x_0) \geq 0$.
- (f) **四则运算法则:** 设 X 为数集, $x_0 \in X$, 而函数 $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续. 则
- (i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ 在点 x_0 处连续,
- (ii) fg 在点 x_0 处连续,
- (iii) $\frac{f}{g}$ 在点 x_0 处连续 (若 $g(x_0) \neq 0$).
- (f) **复合法则:** 设 X, Y 为数集, $x_0 \in X, y_0 \in Y$, 而函数 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ 分别在点 $x_0, y_0 = f(x_0)$ 处连续, 则 $g \circ f$ 在点 x_0 处连续.
- (g) **初等函数的连续性:** 初等函数在其定义域内连续.
- (h) **间断点:** 设 X 为数集, x_0 为其极限点, 而 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为函数.
- (i) **定义:** 若 f 在点 $x_0 \in X$ 不连续, 则称 f 在该点间断. 此时, 或者极限 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在或无限, 或者 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在且有限但异于 $f(x_0)$.
- (ii) **可去间断点:** 若极限 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在且有限, 但不等于 $f(x_0)$ 或者 f 在点 x_0 无定义, 则称点 x_0 为 f 的可去间断点.
- (iii) **跳跃间断点:** 设 X 为区间, 而 x_0 为其内点. 若 f 在点 x_0 处的左、右极限 $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ 存在且有限, 但却不相等, 则称点 x_0 为 f 的跳跃间断点.
- (iv) **第一类间断点:** 可去间断点以及跳跃间断点. 其特点是函数在该点处的左、右极限 (若有意义) 存在且有限.
- (v) **第二类间断点:** 不属于第一类间断点的其它间断点. 其特点是函数在该点处至少有一个单侧极限不存在或无限.
- (vi) 区间上的单调函数只能有第一类间断点.
- (4) **连续函数的整体性质:**
- (a) **连续函数介值定理:** 若 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, 而 $\mu \in \mathbb{R}$ 介于 $f(a), f(b)$ 之间, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \mu$.
- (b) **广义连续函数介值定理:** 设 $f \in \mathcal{C}(a, b)$ 使得 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c_1, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = c_2$, 其中 c_1, c_2 不等. 若 $\mu \in \mathbb{R}$ 严格介于 c_1, c_2 之间, 求证: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $\mu = f(\xi)$.
- (c) **零点存在定理:** 若 $f \in \mathcal{C}[a, b]$ 使得 $f(a)f(b) \leq 0$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = 0$.
- (d) **零点存在定理的应用:**
- (i) 若 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 为连续函数, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \xi$.
- (ii) 任何实系数奇次多项式方程有实根.
- (e) **连续性、单射、单调性以及像集的结构:**
- (i) 若 X 为区间, 而 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 则像集 $\text{Im} f$ 为区间.
- (ii) 若 X 为区间而 $f \in \mathcal{C}(X)$ 为单射, 则 f 必为严格单调函数.
- (iii) 设 X 为区间而 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 单调, 则 $f \in \mathcal{C}(X)$ 当且仅当 $\text{Im} f$ 为区间.
- (f) **反函数定理:** 若 X 为区间而 $f \in \mathcal{C}(X)$ 为单射, 则反函数 $f^{-1}: \text{Im} f \rightarrow X$ 连续.
- (g) **最值定理:** 若 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, 则 f 有最值.
- (h) **介值定理+最值定理:** 若 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, 则 $\text{Im} f$ 为闭区间.

第 2 部分 习题课题目

1. 利用极限定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x^2 + 2} - \sin \sqrt{x^2 + 1}) = 0, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{1}{1-x} = \frac{\pi}{2}.$$

2. 讨论下列极限的存在性:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{2x^2 + 1}).$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 以及 $\forall x \in [1, +\infty)$, 定义

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 1 \leq x \leq n, \\ x^n, & \text{若 } n < x \leq n+1, \\ \frac{1}{x}, & \text{若 } x > n+1. \end{cases}$$

(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

(2) $\forall x \geq 1$, 计算 $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(x)f_2(x) \cdots f_n(x)$.

(3) 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

4. 假设函数 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\forall x > 0$, 均有 $f(x^2) = f(x)$, 并且

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1).$$

求证: $\forall x \in (0, +\infty)$, 均有 $f(x) = f(1)$.

5. (Dirichlet 函数) $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{若 } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

求证: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} D(x)$ 不存在.

6. (Riemann 函数) $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{若 } x = \frac{p}{q} \text{ (} p, q \text{ 为互素整数且 } q > 0\text{)}, \\ 0, & \text{若 } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

求证: $\forall a \in \mathbb{R}$, 均有 $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = 0$.

7. 设函数 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\forall x, y \in (0, +\infty)$, 均有 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 并且当 $x > 1$ 时, 还有 $f(x) < 0$. 求证: 函数 f 严格递减.

8. 求函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $2f(x) + f(1-x) = x^2$.

9. 计算下列极限:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}), & (2) \quad & \lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x)^2 e^{\frac{1}{x-1}}, \\
 (3) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{\sqrt{1+x^2} - 1}, & (4) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right), \\
 (5) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^n \cos(kx)}{x^2}, & (6) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right), \\
 (7) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} \quad (m, n \in \mathbb{N}^*), & (8) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^k \right)^n, \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

10. 已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 5$, 求 a, b .

11. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x-1} \right)^{x-1} = e^{-2}$, 求常数 a .

12. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 求 a, b .

13. 计算下列极限:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{n} \right)^{n+1}, & (2) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1}), \\
 (3) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - \cos x}{x^2}, & (4) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right), \\
 (5) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(3^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x+1}} \right), & (6) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1-\sin x)}{\sin 2x}}, \\
 (7) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2-x}{3x^2+5} \right)^{\frac{x^2}{x-1}}, & (8) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+a_1x+\cdots+a_nx^n}-1}{x}, \\
 (9) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}, & (10) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{x^2}, \\
 (11) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}, & (12) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}, \\
 (13) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \tan x)^{\frac{1}{\sin 2x}}, & (14) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos \frac{x}{2})}{x^3 \log(1+x)}, \\
 (15) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{x \sin^3 x}, & (16) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^x, \\
 (17) \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1), & (18) \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}, \\
 (19) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \arctan x}{x + \arctan x}, & (20) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(ax) - \sin^2(bx)}{x \sin x} \quad (ab \neq 0).
 \end{aligned}$$

14. 假设 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 为连续函数使得 $f(0) = 0, f(1) = 1$ 且 $\forall x \in [0, 1]$, 均有 $f(f(x)) = x$. 求证: (1) 函数 f 严格递增; (2) $\forall x \in [0, 1]$, 均有 $f(x) = x$.

15. 求证: 不存在连续函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $f(f(x)) = e^{-x}$.

16. 若 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $f(f(x)) = x$, 求证: $\exists \xi \in \mathbb{R}$ 使得 $f(\xi) = \xi$.

17. 讨论下述函数的间断点:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & f(x) = e^{1-\cos \frac{1}{x}}, & (2) \quad & f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+\sin^2 x)}{2x^2}, & \text{若 } x > 0, \\ 1, & \text{若 } x = 0, \\ \frac{1-\cos x}{x^2}, & \text{若 } x < 0, \end{cases} \\
 (3) \quad & f(x) = \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}, & (4) \quad & f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}.
 \end{aligned}$$

18. 如果 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $f(x) \neq 0$, 并且 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 有间断点, 问下述结论哪个成立?

- (1) 函数 $f \circ \varphi$ 必有间断点,
- (2) 函数 $\varphi \circ f$ 必有间断点,
- (3) 函数 φ^2 必有间断点,
- (4) 函数 $\frac{\varphi}{f}$ 必有间断点.

19. $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} \in \mathbb{R}$. 求常数 a, b 使得 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

20. 设 $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ 使得 $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| < a_n$. 求证:

$$a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx$$

在 $(0, 2\pi)$ 上至少有 $2n$ 个零点.

21. 若 $f \in \mathcal{C}[0, 2a]$ 使得 $f(0) = f(2a) \neq f(a)$, 求证: $\exists \xi \in (0, a)$ 使得

$$f(\xi) = f(\xi + a).$$

22. 求证: 方程 $x = a \sin x + b$ 有不大于 $a + b$ 的正根, 其中 $0 < a < 1, b > 0$.