

## 第 7 次作业题

1. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arcsin x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1},$$
$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2}, \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right).$$

2. 设  $f$  可导且  $f(0) = f'(0) = 1$ , 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 1}{\ln f(x)}$ .

3. 求函数  $y = \frac{x}{1-x}$  在点  $x_0 = 2$  处的  $n$  次 Taylor 多项式.

4. 若函数  $f \in \mathcal{C}^{(3)}[0, 1]$  使得  $f(0) = f'(\frac{1}{2}) = 0$ ,  $f(1) = \frac{1}{2}$ , 求证:  $\exists \xi \in (0, 1)$  满足  $f'''(\xi) = 12$ .

5. 研究下列函数的单调性, 有极值的求极值.

$$(1) f(x) = x^n e^{-x} \quad (x \geq 0, n \geq 1 \text{ 为整数}),$$
$$(2) f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x \quad (x \in [0, 2\pi]).$$

6.  $\forall x > 0$ , 求证:  $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$ .

7. 设  $f$  在  $x_0$  处  $n$  阶可导使得  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , 但  $f^{(k)}(x_0) = 0$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ).

- (1) 若  $n$  为偶数, 则点  $x_0$  为  $f$  的极小值点,  
(2) 若  $n$  为奇数, 则点  $x_0$  不是  $f$  的极值点.

8. 求函数  $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$  在区间  $[-10, 10]$  上的最值.

9. 确定函数  $f(x) = xe^{-x}$  的凸凹区间与拐点.

10. 讨论由参数方程给出的函数  $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$  的凸性.

11.  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  以及  $p \geq 1$ , 求证:  $\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^p \leq \frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n}$ .

12. 作出函数  $f(x) = x^2 e^{-x}$  的图形.