微积分 A2 第六周习题课　　高阶（偏）导数，泰勒公式，极值

一．高阶（偏）导数

显函数，隐函数，反函数，参数函数

例1. 设 $z=f(x,\varphi(x^2))$，其中函数 f 与 φ 的二阶偏导数连续，求 $\dfrac{d^2z}{dx^2}$

例2. 　设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，并且满足方程

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

若令 $\begin{cases} u=x+\alpha y \\ v=x+\beta y \end{cases}$，试确定 α,β 为何值时能变原方程为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

例3. 设 $u(x,y)\in C^2$，又 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u(x,2x)=x$，$u'_x(x,2x)=x^2$，求 $u''_{xx}(x,2x)$，

$u''_{xy}(x,2x)$　$u''_{yy}(x,2x)$

例4. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $ax+by=f\left(x^2+y^2\right), a,b$ 是常数，求二阶导函数。

二．Taylor 公式

例5. 　函数 x^y 在 $x=1,y=0$ 点的二阶 Taylor 多项式为 ____________________。

例6. 　函数 $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{y+1}$ 在点 $(0,0)$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式为

____。

例7. 　二元函数 $\sin(xy)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式为____________________。

例8. 　$x+y+z+xyz^3=0$ 在点 $(0,0,0)$ 邻域内确定隐函数 $z=z(x,y)$. 求 $z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式.

三．极值

例9. 　求函数 $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$ 的所有局部极值.

例10. 　求函数 $z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ 的极值.

例11. 　（隐函数的极值）设 $z=z(x,y)$ 由 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定，求该函数的极值.

例12. 　函数 $z(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 内部偏导数存在，$z(x,y)$ 在 D 的边界上

的值为零，在 D 内部满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(z)$，其中 f 是严格单调函数，且 $f(0)=0$，

证明 $z(x,y)\equiv 0$，$((x,y)\in D)$.

例13. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，证明 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点。

例14. 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上有二阶连续偏导数，在 $x^2+y^2<1$ 内满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$，且在 $x^2+y^2=1$ 上，$u(x,y)\ge 0$，证明：当 $x^2+y^2\le 1$ 时，$u(x,y)\ge 0$。（提示：可用反证法证明）