

## 第 11 次作业题

1. 求下列曲线的弧长:

(1) 曲线  $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) 的弧长.

(2) 阿基米德螺线  $\rho = a\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi, a > 0$ ) 的弧长.

2. 证明极坐标下的曲率公式  $\kappa = \frac{|\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

3. 求下列曲线的曲率半径:

(1)  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ),

(2)  $x = a \cos t, y = b \sin t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi, a, b > 0$ ),

(3) 心脏线  $\rho = a(1 + \cos \theta)$  ( $a > 0$ ).

4. 求下列旋转体的体积:

(1) 由  $y = x^2, y = x^3$  所围成的图形绕  $x$  轴旋转生成的旋转体;

(2) 由  $y = \sqrt{x}$  与  $x$  轴以及直线  $x = 4$  所围成的图形绕  $x = 4$  以及  $y$  轴旋转生成的两个旋转体的体积.

5. 求下列旋转体的表面积:

(1) 抛物线  $y = \sqrt{x}$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) 绕  $x$  轴旋转生成的旋转面;

(2) 星形线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  ( $a > 0$ ) 绕  $x$  轴旋转生成的旋转面.

6. 求密度均匀的抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 的质心.