第 2 次作业题解答

1. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ 且 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{1+a_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解: 首先对 $n \geqslant 1$ 运用数学归纳法证明 $a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant 1$.

当 $n = 1$ 时, $a_2 = 1 + \frac{1}{2} > a_1 = 1$. 故此时所证结论成立.

现假设 $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant 1$. 则

$$a_{n+2} = 2 - \frac{1}{1+a_{n+1}} \geqslant 2 - \frac{1}{1+a_n} = a_{n+1} \geqslant 1.$$

故所证结论对所有 $n \geqslant 1$ 均成立, 从而数列 $\{a_n\}$ 递增. 但 $a_1 < 2$ 且 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{1+a_n} < 2$, 因此数列 $\{a_n\}$ 有上界, 从而由单调有界定理可知数列 $\{a_n\}$ 收敛. 设其极限为 a. 又 $\forall n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n}$, 则由四则运算法则知 $a = 1 + \frac{a}{1+a}$, 也即 $a^2 - a - 1 = 0$. 由保序性得 $a \geqslant 1$, 故 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. $\forall n \geqslant 1$, 令 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. 求证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛. 我们将该极限记作 γ, 称为 Euler 常数.

证明: 由于 $\forall k \geqslant 1$, 均有 $\frac{1}{k+1} < \ln(1 + \frac{1}{k}) < \frac{1}{k}$, 因此 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= -\ln n - \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) \\ &= \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} > 0, \\ a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) - \ln n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln k\big) - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0. \end{aligned}$$

故数列 $\{a_n\}$ 递减且以 0 为下界, 于是由单调有界定理可知该数列收敛.

3. 若 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $0 < a_n < 1$ 且 $(1-a_n)a_{n+1} > \frac{1}{4}$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 由几何平均小于算术平均可得

$$\frac{1}{2}(1 - a_n + a_{n+1}) \geqslant \sqrt{(1-a_n)a_{n+1}} > \frac{1}{2},$$

于是 $a_{n+1} > a_n$, 从而数列 $\{a_n\}$ 递增且以 1 为上界, 则由单调有界定理可知该数列收敛, 设其极限为 A. 由题设可知, $\forall n \geqslant 1$, $(1-a_n)a_{n+1} > \frac{1}{4}$, 从而由保序性可得 $(1-A)A \geqslant \frac{1}{4}$, 也即

$$(A - \frac{1}{2})^2 \leqslant 0,$$

故 $A = \frac{1}{2}$. 故所证结论成立.

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n})$.

解: 方法 1. $\forall n\geqslant 1$, 令 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$. 则数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并且它的极限就是 Euler 常数 γ. 由此立刻可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n})\\
=&\lim_{n\to\infty}\big((a_{3n}+\log(3n))-(a_n+\log n)\big)\\
=&\lim_{n\to\infty}(\log 3+a_{3n}-a_n)\\
=&\ln 3+\gamma-\gamma=\log 3.
\end{aligned}$$

方法 2. $\forall n\geqslant 1$, 令 $a_n=\sum\limits_{k=n+1}^{3n}\frac{1}{k}$. 由于 $\forall k\geqslant 1$, 我们有

$$\frac{1}{k+1}<\log(1+\frac{1}{k})<\frac{1}{k},$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=n+1}^{3n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=n+1}^{3n}\log(1+\frac{1}{k-1})\\
&= \sum_{k=n+1}^{3n}(\log k-\log(k-1))\\
&= \log(3n)-\log n=\log 3,\\
a_n &= \sum_{k=n+1}^{3n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=n+1}^{3n}\log(1+\frac{1}{k})\\
&= \sum_{k=n+1}^{3n}(\log(k+1)-\log k)\\
&= \log(3n+1)-\log(n+1)\\
&= \log 3-\log(1+\frac{2}{3n+1})\\
&> \log 3-\log(1+\frac{1}{n})>\log 3-\frac{1}{n},
\end{aligned}$$

于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n})=\log 3$.

5. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

解: 由 Stolz 定理可知

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=2.
\end{aligned}$$

6. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$.

解: 由 Stolz 定理与四则运算法则可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2-\frac{1}{n}} = \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

7. 若 $\{a_n\}$ 递增而 $\{b_n\}$ 递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 求证: 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均收敛且其极限相等.

证明: 方法 1. 因 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 则对于 $\varepsilon=1$, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N$, 均有 $|b_n-a_n|<1$. 由此得 $a_n<b_n+1\leqslant b_1+1$. 故数列 $\{a_n\}$ 递增且有上界, 从而由单调有界定理该数列收敛. 设其极限为 A. 又 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$b_n = a_n + (b_n - a_n).$$

于是由四则运算法则可知 $\{b_n\}$ 也收敛于 A.

方法 2. 若 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $b_n\geqslant a_n$, 则由区间套定理可知所要结论成立. 现假设 $\exists m\geqslant 1$ 使得 $b_m<a_m$. 则 $\forall n>m$, 均有 $b_n\leqslant b_m<a_m\leqslant a_n$. 从而

$$a_n - b_n \geqslant a_m - b_m > 0.$$

由题设与保序性可知 $0=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)\geqslant a_m-b_m>0$. 矛盾! 故所证成立.

8. 利用 Cauchy 收敛原理证明下列数列 $\{a_n\}$ 的极限存在:

(1) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\cos k!}{k(k+1)}$; (2) $a_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$.

证明: (1) $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$. 则 $\forall n>N$ 以及 $\forall p>0$, 我们有

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)\\ &= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列, 从而收敛.

(2) 由于 $\forall k\geqslant 1$, 均有 $1+\frac{1}{k}\leqslant e^{\frac{1}{k}}$. 于是 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-a_n| &= \frac{a_n}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}\prod_{k=1}^{n}e^{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{(n+1)^2}e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}\\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)^2}e^{1+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}} = \frac{1}{(n+1)^2}e^{1+\sum\limits_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})}\\ &= \frac{e^{2-\frac{1}{n}}}{(n+1)^2} < \frac{e^2}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\left[\frac{e^2}{\varepsilon}\right]+1$. 则 $\forall n>N$ 以及 $\forall p>0$, 我们有

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n| &\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1}|a_{k+1}-a_k|\leqslant\sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{e^2}{(k+1)^2}\\ &< \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{e^2}{k(k+1)}=\sum_{k=n}^{n+p-1}(\frac{e^2}{k}-\frac{e^2}{k+1})\\ &= \frac{e^2}{n}-\frac{e^2}{n+p}<\frac{e^2}{n}<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列, 从而收敛.

9. $\forall n\geqslant 1$, 设 $v_n=(1+\frac{\sin 1}{2})+\cdots+(\frac{1}{n}+\frac{\sin n}{2^n})$. 求证: 数列 $\{v_n\}$ 发散.

证明: 令 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$. $\forall N>0$, 取 $m=2(N+1)$, $n=N+1\geqslant 2$. 则

$$|v_m-v_n|=\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{k}+\frac{\sin k}{2^k}\right)\geqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2^k}\right)>\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\geqslant\varepsilon_0.$$

因此 $\{v_n\}$ 不是 Cauchy 数列, 从而发散.

10. 若数列 $\{a_n\}$ 单调且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

证明: 由于 $\{a_n\}$ 单调, 则由单调有界定理可知该数列趋于 $B\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, 于是由题设与 Stolz 定理可知 $A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=B$, 故所证结论成立.