微积分 A (1)

姚家燕

第 22 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

第 21 讲回顾: 求不定积分的基本方法 (续)

- 分部积分: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$.
- $\int P(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x$, 其中 $P(x)$ 为多项式.
- $\int P(x)(\ln x)^m\,\mathrm{d}x$, 其中 $P(x)$ 为多项式, $m \geqslant 1$ 为整数.
- $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$ $(ab \neq 0)$.

回顾：多项式的因式分解

设 $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \ (a_n \neq 0)$. 由代数基本定理可知 Q 有 n 个根 (包括重数), 其中复根成对出现. 于是

$$Q(x) = a_n \prod_{j=1}^{s} (x - \alpha_j)^{l_j} \cdot \prod_{k=1}^{t} (x^2 + p_k x + q_k)^{m_k},$$

这里 $\alpha_j \in \mathbb{R}$ 均不相同, $p_k^2 - 4q_k < 0$, 而且

$$\sum_{j=1}^{s} l_j + 2 \sum_{k=1}^{t} m_k = n.$$

回顾: 有理分式的分解

有理分式 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 总可以表示成:

$$
\begin{aligned}
R(x) &= \frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \sum_{j=1}^{s}\sum_{u=1}^{l_j} \frac{a_{j,u}}{(x-\alpha_j)^u} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{t}\sum_{v=1}^{m_k} \frac{b_{k,v}x + c_{k,v}}{(x^2 + p_k x + q_k)^v},
\end{aligned}
$$

其中 $T(x)$ 为多项式, $a_{j,u}, b_{k,v}, c_{k,v} \in \mathbb{R}$ 为常数.

求标准分解的方法: 待定系数, 带入特殊值.

有理分式的不定积分可以归结成6种最简单的有理分式的不定积分 $(a > 0,\ m \geqslant 2)$:

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\alpha} = \log|x - \alpha| + C$,
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}} + C$,
- $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\log(x^2 + a^2) + C$,
- $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$,
- $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)}\frac{1}{(x^2+a^2)^{m-1}} + C$,
- $I_{m+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{m+1}} = \frac{x}{2a^2m(x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2a^2m}I_m$.

回顾：三角有理函数的不定积分

设 $R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$，其中 P,Q 是以 u,v 为变量的多项式. 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan t$. 于是

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}(2\arctan t)=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

故 $\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

在一些特殊情形, 上述讨论可以简化:

- 被积函数为 $\sin x$ 的奇函数 (将 $\sin x$ 变换成 $-\sin x$ 后会出现一个负号):

$$\int R(\sin^2 x, \cos x) \sin x \,\mathrm{d}x \overset{t=\cos x}{=} -\int R(1-t^2, t)\,\mathrm{d}t.$$

- 被积函数为关于 $\cos x$ 的奇函数:

$$\int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x \,\mathrm{d}x \overset{t=\sin x}{=} \int R(t, 1-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

- 将 $\sin x, \cos x$ 变换成 $-\sin x, -\cos x$ 后不变:

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan x}{=} \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

第 22 讲

例 44. 计算 $\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x$.

解:
$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \int \sec x \, \mathrm{d}(\tan x)$$
$$= \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \, \mathrm{d}(\sec x)$$
$$= \sec x \cdot \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$$
$$= \sec x \cdot \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x) \, \mathrm{d}x$$
$$= \sec x \cdot \tan x + \log|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x \, \mathrm{d}x.$$

故 $\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2} \log|\sec x + \tan x| + C.$

某些无理函数的不定积分

考虑不定积分 $\int R(x, y(x))\,\mathrm{d}x$, 其中 $y = y(x)$ 为无理函数, $R(x, y)$ 是关于变量 x, y 的有理分式. 我们希望寻求变量替换 $x = x(t)$ 来使得原来的不定积分能转化成以 t 为变量、前面已解决的不定积分. 常见的情形有以下两种.

1. $y(x)=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $n\geqslant 1$ 为整数, $ad-bc\neq 0$.

解: 令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 则 $t^n=\frac{ax+b}{cx+d}$, 从而 $x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}$,

于是 $\mathrm{d}x=\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\mathrm{d}t$, 进而可得

$$\int R\Big(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}{=}\int R\Big(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\Big)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,\mathrm{d}t.$$

例 45. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

$$\overset{t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}{=} \int t \cdot \frac{1}{-\frac{1+t^3}{1-t^3}+1}\,\mathrm{d}\Big(-\frac{1+t^3}{1-t^3}\Big) = \int \frac{1-t^3}{-2t^2}\cdot\Big(-\frac{6t^2}{(1-t^3)^2}\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{3}{(1-t)(1+t+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \Big(\frac{1}{1-t} + \frac{t+2}{1+t+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\log|1-t| + \int \frac{(t+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}+(t+\frac{1}{2})^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\log|1-t| + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{3}{4}+(t+\frac{1}{2})^2)}{\frac{3}{4}+(t+\frac{1}{2})^2} + \sqrt{3}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))}{1+(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2}$$

$$= -\log|1-t| + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{3}{4}+(t+\frac{1}{2})^2)}{\frac{3}{4}+(t+\frac{1}{2})^2} + \sqrt{3}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))}{1+(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2}$$

$$= -\log|1-t| + \frac{1}{2}\log(\frac{3}{4}+(t+\frac{1}{2})^2) + \sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}) + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+t+t^2}{(1-t)^2} + \sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}) + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t^3}{(1-t)^3}\right| + \sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}) + C$$

$$= -\frac{3}{2}\log|\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1}|$$

$$+\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{1}{2}\right) + C.$$

2. $y(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $a\neq 0$.

解: 通常先将 ax^2+bx+c 配方, 然后再来应用三角函数将原来那个不定积分转化成三角有理函数的不定积分.

例 46. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x^2-2x+5}}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{(x-1)^2+4}}$

$$\underset{|t|<\frac{\pi}{2}}{\overset{x=1+2\tan t}{=\!=}} \int \frac{\mathrm{d}(1+2\tan t)}{2+\sqrt{4\tan^2 t+4}} = \int \frac{\frac{2}{\cos^2 t}\mathrm{d}t}{2+\frac{2}{\cos t}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(\cos t)\cdot(1+\cos t)}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{(\cos t)\cdot(1+\cos t)} = \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{1+\cos t}\right) \mathrm{d}t$$

$$= \log|\sec t + \tan t| - \tan\tfrac{t}{2} + C_1.$$

由于 $\tan t = \frac{x-1}{2}$, $\sec t = \sqrt{1+\tan^2 t} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-2x+5}$,

$\tan\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{\sin t} = \frac{\sec t - 1}{\tan t} = \frac{\sqrt{x^2-2x+5}-2}{x-1}$, 于是我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x^2-2x+5}} = \log|\sec t + \tan t| - \tan\frac{t}{2} + C_1$$

$$= \log(\sqrt{x^2-2x+5} + x - 1) - \frac{\sqrt{x^2-2x+5}-2}{x-1} + C.$$

作业题: 第 5.5 节第 164 页第 3 题第 (6), (8) 题, 第 4 题第 (1), (4) 题, 这里 (1) 中, $x \in (0, \pi)$.

分段函数的积分

例 1. 计算 $\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |x-1|\,\mathrm{d}x + \int_1^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(x - \tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 + \left(\tfrac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{4}{2} - 2\right) - \left(\tfrac{1}{2} - 1\right) = 1.$$

定积分的换元积分公式

定理 1. 若 $f\in\mathscr{C}[a,b]$, 而 $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 连续可导, 则 $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

证明: 设 F 为 f 的一个原函数. $\forall t\in[\alpha,\beta]$, 令 $G(t)=F(\varphi(t))$. 则 G 连续可导且 $\forall t\in[\alpha,\beta]$,

$$G'(t)=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

于是由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= G(\beta) - G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} G'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

注: 与不定积分不同, 在上述定理中, 我们无需假设 φ 为双射.

例 2. 计算 $\int_{-4}^{-3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}}$.

解: $\int_{-4}^{-3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}} \overset{u=-x}{=} \int_{4}^{3} \frac{\mathrm{d}(-u)}{\sqrt{(-u)^2-4}} = \int_{3}^{4} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-4}}$

$\overset{u=2\sec t}{=} \int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}(2\sec t)}{2\tan t} = \int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t}{\tan t}$

$= \int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\cos^2 t} \overset{z=\sin t}{=} \int_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2}$

$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+z}{1-z}\right|\Big|_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1-\frac{\sqrt{5}}{3}}{1+\frac{\sqrt{5}}{3}} = \log\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}} + \log 2.$

例 3. 计算 $\int_1^6 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3x-2}}$.

解: $$\int_1^6 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3x-2}} \overset{u=\sqrt{3x-2}}{=\!=} \int_1^4 \frac{\frac{u^2+2}{3}\,\mathrm{d}\frac{u^2+2}{3}}{u} = \int_1^4 \frac{u^2+2}{3u}\cdot\frac{2u}{3}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_1^4 \frac{2}{9}(u^2+2)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{9}\left(\frac{u^3}{3}+2u\right)\Big|_1^4 = \frac{2}{9}(21+6) = 6.$$

例 4. 计算 $I = \int_0^\pi \frac{x\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$.

解: $$I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{x=\pi-t}{=\!=} \int_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}(\pi-t)$$
$$= \int_0^\pi \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t - I.$$

于是 $I = -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{1+\cos^2 t} = -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos t)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$.

定积分的分部积分公式

定理 2. 若 $u, v \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 则

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = uv\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

证明: $\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

于是 $\int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b$. 由此立刻可得所要结论.

例 5. 计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x}}{=} \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}(t^2) = 2\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2te^t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = 2e - 2e^t\Big|_0^1 = 2.$$

例 6. 计算 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x|\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x|\,\mathrm{d}x = \int_1^e \log x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{e}}^{1} \log x\,\mathrm{d}x$$

$$= x(\log x - 1)\Big|_1^e - x(\log x - 1)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} = 2 - \frac{2}{e}.$$

例 7. 计算 $\int_0^1 x(\log x)^2\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_0^1 x(\log x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2(\log x)^2\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}(\log x)^2$$

$$= -\int_0^1 x\log x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2\log x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

例 8. 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}(\arcsin x)$$

$$= \frac{\pi}{12} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

例 9. 对任意整数 $n \geqslant 0$, 计算

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x.$$

解: 由定义可知 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = 1$.

当 $n \geqslant 2$ 时, 应用分部积分可得

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}(\sin^{n-1} x) \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \\
&\quad -(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = (n-1)(I_{n-2} - I_n).
\end{aligned}$$

故 $\forall n \geqslant 2$, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 进而 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$I_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}} \cdot I_1 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \cdot I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

$$I_{2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{I_{2k}}{I_{2k-2}} \cdot I_0 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \cdot I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

最后 $\forall n \geqslant 0$, 我们有

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n \Big(\frac{\pi}{2} - t\Big) \,\mathrm{d}\Big(\frac{\pi}{2} - t\Big) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t = I_n. \end{aligned}$$

定积分的对称性

定理 3. 设 $f \in \mathscr{R}[-a, a]$, 其中 $a > 0$.

- 若 f 为奇函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- 若 f 为偶函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明: $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=-t}{=} \int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}(-t) = \int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{a} \big(f(x) + f(-x)\big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此立刻可得所要的结论.

例 10. 计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解: 方法 1. 由题设可知

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,\mathrm{d}(\pi-x)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

方法 2. 由题设可知

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (-x)\,\mathrm{d}(\arctan\cos x)$$

$$= -x\arctan\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \arctan\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \int_0^{\pi} \arctan\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \arctan\cos(\pi - x)\,\mathrm{d}(\pi - x)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\cos x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(-\cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}.$$

例 11. 计算 $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{x=2\sin t}{=} 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\,\mathrm{d}(2\sin t)$$

$$= 8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\Big(t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

作业题: 第 5.6 节第 170 页第 1 题第 (1), (3) 题, 第171页第2题第(7), (8)题, 第3题第(1), (9)题.

周期连续函数的定积分

定理 4. 如果 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 是周期为 $T > 0$ 的周期函数, 则 $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x+T)\,\mathrm{d}(x+T)$$

$$= \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定积分与数列极限

定理 5. 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 而 $\{P_n\}$ 为 $[a,b]$ 的一列分割使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(P_n) = 0$. 记 $P_n = (x_i^{(n)})_{0\leqslant i\leqslant k_n}$. 则对任意点 $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ $(1 \leqslant i \leqslant k_n)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故 $\exists \delta > 0$ 使得对于区间 $[a,b]$ 的任意的带点分割 (P,ξ),

当 $\lambda(P) < \delta$ 时, 我们均有

$$\left|\sigma(f; P, \xi) - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$

$\forall n \geqslant 1$, 选取 $\xi_n = \{\xi_i^{(n)}\}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(P_n) = 0$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $\lambda(P_n) < \delta$, 故

$$\left|\sigma(f; P_n, \xi_n) - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$

也即 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$

推论. 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则我们有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\xi_i^{(n)} \in [a + \frac{b-a}{n}(i-1), a + \frac{b-a}{n} i]$.

注: 该结论常用来计算一些复杂的数列极限.

例 12. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$.

解: $\forall x \in [0,\pi]$, 令 $f(x) = \sin x$. 则 $f \in \mathscr{C}[0,\pi]$,

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^{\pi}\sin x\ \mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2.$$

又 $\forall n\geqslant 1$, 我们均有

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

于是由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}=\frac{2}{\pi}$.

例 13. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\gamma+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}k^{\gamma}$, 其中 $\gamma>0$.

解: $\forall x\in[0,1]$, 定义 $f(x)=x^{\gamma}$. 则 $f\in\mathscr{C}[0,1]$, 并且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\gamma+1}$, 进而可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\gamma}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\gamma+1}}\sum_{k=1}^{n}k^{\gamma}.\end{aligned}$$

例 14. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

解: $\forall x\in[0,1]$, 定义 $f(x)=\frac{1}{1+x}$. 则 $f\in\mathscr{C}[0,1]$, 并且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\log 2$, 于是我们有

$$\begin{aligned}\log 2 &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.\end{aligned}$$

作业题: 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

例 15. (Jensen 不等式) 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, $m, M \in \mathbb{R}$ 使 $\forall x \in [a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. 若 $\varphi \in \mathscr{C}[m,M]$ 为凸函数, 求证: $\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x$.

证明: 因 φ 连续而 f 可积, 则 $\varphi \circ f$ 可积, 进而

$$\varphi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = \varphi\Big(\frac{1}{b-a}\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\Big)$$

$$= \lim_{\lambda(P)\to 0}\varphi\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{b-a} f(\xi_i)\Big) \leqslant \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{b-a}\varphi\big(f(\xi_i)\big)$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

带积分余项的 Taylor 公式

定理 6. 设 $n \geqslant 0$ 为整数. 如果 $f \in \mathscr{C}^{(n+1)}[a,b]$, 而 $x_0 \in [a,b]$, 则 $\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u.$$

注: 通常称 $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u$ 为积分余项. 令 $u = x_0 + t(x-x_0)$, 则我们有

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+t(x-x_0))\,\mathrm{d}t.$$

证明: $\forall k \in \mathbb{N}\ (1 \leqslant k \leqslant n)$, 由分部积分可得

$$\frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^k f^{(k+1)}(u)\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{k!}(x-u)^k f^{(k)}(u)\Big|_{x_0}^{x}-\frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k)}(u)\,\mathrm{d}\big((x-u)^k\big)$$

$$=-\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^{k-1}f^{(k)}(u)\,\mathrm{d}u,$$

将上述 n 个等式相加可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\int_{x_0}^{x}f'(u)\,\mathrm{d}u-\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u,$$

由此立刻可得所要结论.

评注

- 由加强的积分第一中值定理得 Cauchy 余项:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),\ \ \theta \in (0,1).$$

- 由广义积分第一中值定理得 Lagrange 余项:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)) \int_0^1 (1-t)^n \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),\ \ \theta \in [0,1]. \end{aligned}$$

直角坐标系下平面区域的面积

典型问题: 假设 $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$ 使得 $\forall x \in [a, b]$, 均有 $f(x) \geqslant g(x)$. 则由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 所围平面区域的面积等于

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, \mathrm{d}x.$$

例 1. 计算由曲线 $y = 2 - x^2$ 与 $y = x$ 所围的区域的面积.

解: 设两曲线的交点为 (x_0, y_0), 则 $y_0 = 2 - x_0^2$, $y_0 = x_0$, 故 $x_0 = -2$ 或 1, 于是两曲线的交点为 $(-2, -2)$ 和 $(1, 1)$, 进而可知所求面积为

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\,\mathrm{d}x = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

例 2. 计算由曲线 $y=x^2$, 曲线 $y=\sqrt{x}$ 及直线 $x=2$ 所围成的区域的面积.

解: 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 的两个交点为 $(0,0)$, $(1,1)$, 曲线 $y=x^2$ 与直线 $x=2$ 的交点为 $(2,4)$, 曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=2$ 的交点为 $(2,\sqrt{2})$, 这些交点将所围的区域分割成两部分. 我们将夹在 $(0,0)$ 与 $(1,1)$ 之间的面积记为 S_1, 其余部分的面积记作 S_2.

于是我们有

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \\
S_2 &= \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^2 \\
&= 3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}
$$

故所求总面积为 $S = S_1 + S_2 = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}$.

例 3. 计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 所围区域的面积.

解: 由对称性知所求面积为第一象限内面积的 4 倍, 后者由曲线 $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ (0\leqslant x\leqslant a)$ 与直线 $y=0$ 围成, 故所求面积为

$$
\begin{aligned}
S &= 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x \overset{x=a\sin t}{=\!=} 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}(a\sin t)\\
&= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t\\
&= 2ab\Big(t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.
\end{aligned}
$$

直角坐标系下由参数表示的曲线所围成的平面区域的面积

设曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 其中 x, y 连续, $y \geqslant 0$, $x(t)$ 为严格递增, 则存在连续反函数 $t = t(x)$. 定义 $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$. 由 Γ, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围区域的面积等于

$$S = \int_a^b y(t(x))\,\mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=} \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

例 4. 求旋轮线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 x 轴所围成的区域的面积.

解: 因 $\forall t \in [0, 2\pi]$, 均有 $x'(t) = a(1-\cos t) \geqslant 0$ 并且 $x'(t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 的任意子区间上不恒为零, 从而 $x(t)$ 为严格递增, 则所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= a^2\Big(t - 2\sin t + \frac{t+\frac{1}{2}\sin 2t}{2}\Big)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

作业题: 第 5.7 节第 185 页第 2 题第 (1), (4), (7) 小题, 其中 (7) 中“确定 $k > 0$ 的值”.

极坐标系下平面区域的面积

设曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的极坐标方程为

$$\rho = \rho(\theta)\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

其中 $\rho(\theta)$ 为连续函数. 那么曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 所围成的区域的面积等于

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \big(\rho(\theta)\big)^2 \, \mathrm{d}\theta.$$

例 5. 求心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 所围的区域的面积.

解: $$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(\rho(\theta)\big)^2 \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \Big(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\Big)\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\Big(\theta+2\sin\theta+\frac{\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta}{2}\Big)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2}a^2\pi.$$

作业题: 第 5.7 节第 185 页第 2 题第 (6) 小题, 改为“所围图形的公共部分的面积”.

谢谢大家!