第 3 次习题课题目

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 向量值函数的微分

(1) **定义:** 向量值函数的微分, Jacobi 矩阵, Jacobi 行列式.

(2) **向量值函数微分的性质:** 微分的唯一性, 可微性蕴含连续性.

(3) **微分的链式法则 (矩阵表示):**

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\vec{f}\circ\vec{g})(X_0) &= \mathrm{d}\vec{f}(\vec{g}(X_0))\circ\mathrm{d}\vec{g}(X_0), \\
J_{\vec{f}\circ\vec{g}}(X_0) &= J_{\vec{f}}(\vec{g}(X_0))\cdot J_{\vec{g}}(X_0), \\
\frac{\partial f_i(g_1,\dots,g_m)}{\partial x_j} &= \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(*)\frac{\partial g_1}{\partial x_j}+\frac{\partial f_i}{\partial y_2}(*)\frac{\partial g_2}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial f_i}{\partial y_m}(*)\frac{\partial g_m}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

2. 隐函数定理、反函数定理及其应用

(1) **隐函数定理:**

(a) **两个变量的方程:** 设函数 $F(x,y)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得

$$F(x_0,y_0)=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0.$$

则方程 $F(x,y)=0$ 在局部上有 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类的解 $y=f(x)$, 并且

$$f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}.$$

(b) **多个变量的方程:** 设函数 $F(x_1,x_2,\dots,x_n,y)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得

$$F(X_0,y_0)=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}(X_0,y_0)\neq 0.$$

则方程 $F(x_1,x_2,\dots,x_n,y)=0$ 在局部上有 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类解 $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, 并且

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(X,f(X))}{\frac{\partial F}{\partial y}(X,f(X))}.$$

(c) **多个变量的方程组:** 设 $F_i(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得 $F_i(X_0,Y_0)=0$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, $\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}(X_0,Y_0)\neq 0$. 则方程组

$$F_i(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0\ (1\leqslant i\leqslant m)$$

在局部上有 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类解 $y_i=f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, 且

$$J_{\vec{f}}(X)=-\left(\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}(X,\vec{f}(X))\right)^{-1}\cdot\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(X,\vec{f}(X)).$$

(2) **反函数定理:** 设 $X=\vec{g}(Y)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得 $X_0=\vec{g}(Y_0)$ 且 $J_{\vec{g}}(Y_0)$ 可逆. 则局部上存在 $\mathscr{C}^{(1)}$ 反函数 $Y=\vec{f}(X)$, 并且 $J_{\vec{f}}(X)=\left(J_{\vec{g}}(\vec{f}(X))\right)^{-1}$, 也即

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\dots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}(X)=\left(\frac{\partial(g_1,g_2,\dots,g_n)}{\partial(y_1,y_2,\dots,y_n)}(\vec{f}(X))\right)^{-1}.$$

3. 空间曲面的切平面与法线

(1) **曲面** $S: z=f(x,y)$ **在点** (x_0,y_0,z_0) **的切平面方程:**

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

相应的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

(2) **曲面** $S: \begin{cases} x=f_1(u,v) \\ y=f_2(u,v) \\ z=f_3(u,v) \end{cases}$ **在参数** (u_0,v_0) **所对应点处的切平面方程为:**

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}=\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix},$$

该切平面也可以表示成:

$$\frac{D(f_2,f_3)}{D(u,v)}(u_0,v_0)(x-x_0)+\frac{D(f_3,f_1)}{D(u,v)}(u_0,v_0)(y-y_0)+\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}(u_0,v_0)(z-z_0)=0.$$

相应的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{D(f_2,f_3)}{D(u,v)}(u_0,v_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{D(f_3,f_1)}{D(u,v)}(u_0,v_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}(u_0,v_0)}.$$

(3) **曲面** $S: F(x,y,z)=0$ **在点** P_0 **处的切平面方程为:**

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0.$$

相应的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}.$$

4. 空间曲线及切线和法平面

(1) **空间曲线** Γ **的参数表示:** $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t\in[\alpha,\beta]. \\ z=z(t), \end{cases}$ 若上述函数在点 $t=t_0$ 处可微, 则称曲线 Γ 在相应点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微, 相应的切线方程为

$$\begin{cases} x-x_0=x'(t_0)(t-t_0), \\ y-y_0=y'(t_0)(t-t_0), \\ z-z_0=z'(t_0)(t-t_0). \end{cases}$$

该切线方程也可表述成

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

这里假设 $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))^T$ 不为零向量. 我们将过点 P_0 且与上述切线垂直的平面称为 Γ 在点 P_0 处的法平面, 其方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

(2) **空间曲线 Γ 的隐函数表示:** $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$ 设F_1,F_2在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$可微且 $\mathrm{grad}F_1(P_0)$, $\mathrm{grad}F_2(P_0)$ 不为零, 则曲线 Γ 在该点的切线为

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial F_1}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial F_1}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial F_2}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial F_2}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0. \end{cases}$$

该切线的方向为

$$\vec{T}=\mathrm{grad}F_1(P_0)\times\mathrm{grad}F_2(P_0)=\begin{pmatrix} \frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(P_0) \\ \frac{D(F_1,F_2)}{D(z,x)}(P_0) \\ \frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}(P_0) \end{pmatrix}.$$

只有当 $\vec{T}\neq\vec{0}$ 时, 上述方程组才能定义一条直线. 此时 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y,z)}(P_0)$ 的秩等于 2. 借助 $\vec{T}$, 我们也可以得到上述切线方程的另外一个表述:

$$\frac{x-x_0}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(P_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(z,x)}(P_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}(P_0)}.$$

第 2 部分 习题课题目

1. (微分形式的不变性) 设 $z=f(u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 均为连续可微函数. 将 z 看成是 x,y 的函数. 求证:

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\,\mathrm{d}v.$$

2. 设 $z=x^3f\big(xy,\frac{y}{x}\big)$, 其中 f 为可微函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (a,a) 处可微, 并且 $f(a,a)=a$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,a)=b.$$

令 $\varphi(x)=\big(f(x,f(x,f(x,x)))\big)^2$. 求 $\varphi'(a)$.

4. 考虑三元方程 $xy-z\log y+e^{xz}=1$, 由隐函数定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的某个邻域使得在此邻域内, 该方程 ( )

(A) 只能确定一个连续可导的隐函数 $z=z(x,y)$;

(B) 可确定两个连续可导的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$;

(C) 可确定两个连续可导的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$;

(D) 可确定两个连续可导的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.

5. 假设由方程组 $\begin{cases} F(y-x,y-z)=0, \\ G(xy,\frac{z}{y})=0, \end{cases}$ 可确定隐函数 $x=x(y)$, $z=z(y)$, 其中 F,G 均为连续可导. 求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$.

6. 若隐函数 $y=y(x)$ 由 $ax+by=f(x^2+y^2)$ 确定, 而 a,b 为常数. 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

7. 设 $f\in C^1(0,+\infty)$. 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (任意的 $a,b>0$) 只是 b/a 的函数, 则存在常数 $k\in\mathbb{R}$, 使得 $f(x)=\frac{k}{x}$.

8. 通过曲面 S: $e^{xyz}+x-y+z=3$ 上的点 $(1,0,1)$ 的切平面 ( ).
(A) 通过 y 轴; (B) 平行于 y 轴; (C) 垂直于 y 轴; (D) A, B, C 都不对.

9. 求曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6=0 \\ z-x^2-y^2=0 \end{cases}$$

在点 $M(1,1,2)$ 处的切线与法平面.

10. 求曲线 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ 上的点使曲线在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

11. 设 ℓ 为光滑曲面 $S: F(x,y,z)=0$ 上在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面上过点 P_0 的直线, 求证: 在 S 上存在过点 P_0 的曲线在点 P_0 处的切线为 ℓ.

12. 过直线

$$\begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

作曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 的切平面, 求该切平面的方程.