1 线性映射

1. （若当标准型证明I）我们之前讨论了线形映射$T: V \to V$的广义特征向量。这个题目将引导你证明V中存在一组基，T在这组基上的表示矩阵是分块对交的，而且每一块都是若当块的形式。假设$v_1, v_2, \cdots, v_r$是T的广义特征向量，且相应的幂指数是d_i。设$V_i = \mathrm{span}(\{v_i, (T-\lambda_i I)v_i, \cdots, (T-\lambda I)^{d_i} v_i\})$。我们之前证明了$V_i$是$T$的不变子空间，且$T$在$V_i$上的表示矩阵是若当块。

   (a) 证明：T在$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$上的表示矩阵是分块对角的，而且每一块都是若当块。（所以我们只要证明存在这样一组广义特征向量使得$V = V_1 \oplus V_2 \cdots \oplus V_r$就可以证明若当标准型的定理。实际证明的时候可以对维数做数学归纳，假设定理在V的任何真不变子空间成立，我们需要推出定理对V成立）

   (b) 假设λ是T的某个特征值。证明：如果$T - \lambda I$可以写成若当块的形式，则T也可以写成若当块的形式（所以以下我们用$T - \lambda I$代替T，或者说，考虑有一个特征值是0的线性映射T）

   (c) 考虑λ是T的某个特征值。对于正整数i，设$K_i = \mathrm{Ker}(T^i)$，$U_i = \mathrm{Im}(T^i)$。证明：$K_1 \subset K_2 \subset \cdots$和$U_1 \supset U_2 \supset \cdots$

   (d) 如果$K_i \neq K_{i+1}$，证明：$\mathrm{dim} K_i < \mathrm{dim} K_{i+1}$。进一步证明：存在某个正整数$m$，使得$K_m = K_{m+1} = K_{m+2} = \cdots$，记$K_m$为$K$。（提示：利用$V$是有限维的）

   (e) 对U_i证明类似的事情，也就是说存在一个正整数m'，使得$U_m = U_{m+1} = \cdots$。记U_m为U。

   (f) 证明K和U是T的不变子空间。

   (g) 证明：$U \cap K = \{0\}$（提示：用反证法，假设z是个非零向量，$z \in U$且$z \in K$，看一下z的性质。）

   (h) 证明：$V = K \oplus U$。因为K是个广义特征空间，所以$\mathrm{dim} U < \mathrm{dim} V$，也就是说$U$总是$V$的不变子空间。根据归纳假设，定理对$U$成立。但是$\mathrm{dim} U$可能是0，所以我们不能从归纳假设推出定理对$K$成立，我们接下来证明定理对$K$成立，以下我们把$T$限制在$K$上（也就是说，把$T$当作$K \to K$的线性映射，因为$K$是$T$的不变子空间）

   (i) 证明：T在K上是幂零的，也就是说，存在一个正整数l，使得T^l是$K \to K$的零映射。

2 张量

1. 考虑多线性映射$F: V \times V \to W$，V上有一组基$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$。证明：存在唯一的映射$F$使得$F(v_i, v_j) = w_{ij}$，$1 \leq i, j \leq n$。

2. 我们从张量可以很容易的构造出在换基下不变的量（物理上就是指不随参考系变化的量）。我们考虑线性空间V和它生成的张量空间

(a) 假设w^{ij}是二阶逆变张量w的分量，z_{ij}是二阶协边张量z的分量。证明：$\sum_{i,j=1}^{n} w^{ij} z_{ij}$在换基下不变。

(b) 假设w^{ij}是二阶逆变张量w的分量，$\{e_i\}$是V的一组基。证明$\sum_{i,j=1}^{n} w^{ij} e_i e_j$在换基下不变。

3. 定义实线性空间上的一个内积$g : V \times V \to \mathbb{R}$。选定$V$上的一组基$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$。定义$g_{ij} = g(e_i, e_j)$。

   (a) 对于$v, w \in V$，将$g(v, w)$用g_{ij}表示出来。

   (b) 在换基下$e'_i = \sum_{j=1}^{n} e_j P_{ji}$，定义$g'_{ij} = g(e'_i, e'_j)$，写出$g'_{ij}$和$g_{ij}$的关系。$g$是一个什么张量?

4. （狭义相对论）狭义相对论中的时空是四维闵可夫斯基空间。这个空间可以看成是一个四维实线性空间，并且存在如下的一个不定二次型

$$x^T S x = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

   这里(t, x, y, z)是选定一组基$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$后任意向量的坐标（物理上就是我们选定了一个参考系）

   (a) 写下对应的矩阵S

   (b) 考虑一组新的基$\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$且$e'_i = \sum_{j=1}^{4} e_j P^{ji}$。如果要求$x'^T S x' = xSx$，求对可逆矩阵$P$的限制（物理上相当于所有可选的参照系都要保持这个二次型不变）

   (c) 求矩阵P的行列式的可能值。并且对于每一个可能的值，写一个P的例子。

3 复线性空间、内积空间

1. 将以下矩阵对角化

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. 考虑矩阵四个子空间在复$m \times n$矩阵A的推广$N(A), C(A), N(A^H), C(A^H)$。考虑标准的内积。证明：$N(A)$和$C(A^H)$是$\mathbb{C}^m$的正交子空间，$N(A^H)$和$C(A)$是$\mathbb{C}^n$的正交子空间。

3. 对复矩阵和复线性空间，证明：复矩阵A对应不同特征值的特征向量是线性无关的。

4. 对复矩阵和复线性空间，证明：复矩阵A的几何重数小于等于代数重数。

5. 考虑所有不高于3次的实系数多项式构成的线性空间$P^3(\mathbb{R})$。

(a) $f(x)$和$g(x)$是$P^3(\mathbb{R})$的两个元素，定义内积$< f(x), g(x) >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$。用Gram-Schmidt正交化将$\{1, x, x^2, x^3\}$变成一组正交归一基。看看他们是不是之前提到的勒让德多项式。

(b) （附加题，大家选做，某同学必做）定义内积$< f(x), g(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2/2}dx$。用Gram-Schmidt将$\{1, x, x^2, x^3\}$变成一组正交归一基。这样得到的多项式叫厄米多项式。