第 7 次习题课　　Riemann 积分概念、性质

第一部分：回顾

1. Riemann 积分的存在性

（1）定义（定积分）:

设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数，I 是一个实数。若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当区间 $[a,b]$ 的分割 T：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 满足 $|T|=:\max_{1\le i\le n}\{x_i-x_{i-1}\}<\delta$ 时，对 $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，都有 $\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\mathrm{I}\right|<\varepsilon$，则称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积，记作 $f\in R[a,b]$；称 I 为函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分，记作 $\mathrm{I}=\int_a^b f(x)dx$.

（2）可积的必要条件：

若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上是可积，则 f 在 $[a,b]$ 有界。

（3）可积的充分必要条件：

设 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数，对 $\left[a,b\right]$ 的一个分割 T：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，分别记 M_i 与 m_i 为 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 的上确界与下确界 $(i=1,2,\cdots,n)$，记 $U(f,T)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$，$L(f,T)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$，分别称 $U(f,T)$ 与 $L(f,T)$ 为函数 f（在[a, b]）关于分割 T 的 Darboux 大和与 Darboux 小和；分别称 $\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\{U(f,T)\,|\,T\text{为}[a,b]\text{的分割}\}$，$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup\{L(f,T)\,|\,T\text{为}[a,b]\text{的分割}\}$ 为 f 在 $\left[a,b\right]$ 上的上积分与下积分。

设 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数，则下陈述等价：

- $f \in R[a,b]$;
- $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当区间$[a,b]$ 的分割T 满足$|T| < \delta$ 时，就有$U(f,T) - L(f,T) < \varepsilon$;
- $\forall \varepsilon > 0$，存在区间$[a,b]$ 的分割T，使得$U(f,T) - L(f,T) < \varepsilon$;
- $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$

（4）可积的充分条件：

- 若$f \in C[a,b]$，则$f \in R[a,b]$
- 若f是定义在$[a,b]$上的单调函数，则$f \in R[a,b]$.
- 若f是定义在$[a,b]$上的有界且至多存在有限个间断点函数，则$f \in R[a,b]$.

2. Riemann 积分的性质

（1）线性性:

若$f, g \in R[a,b]$，α, β为常数，则$\alpha f + \beta g \in R[a,b]$，且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

（2）区域可加性:

设$c \in (a,b)$，则$f \in R[a,b]$充分必要条件$f \in R[a,c]$，$f \in R[c,b]$,此时

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

（3）保序性:

若$f, g \in R[a,b]$，且$f(x) \le g(x)(\forall x \in [a,b])$，则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

特别

- 若$f \in R[a,b]$，且$f(x) \ge 0(\forall x \in [a,b])$，则$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$
- 若$f \in R[a,b]$，且$m \le f(x) \le M(\forall x \in [a,b])$，则$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$
- 若$f \in R[a,b]$，则$|f| \in R[a,b]$，且$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

（4）相乘、相除、平方和再开方的函数可积性:

若 $f,g \in R[a,b]$，则 $f \cdot g, \sqrt{f^2+g^2} \in R[a,b]$； 且当$|g(x)| \ge M > 0(\forall x \in [a,b])$时，

$\frac{1}{g} \in R[a,b]$

（5）积分中值公式：

若$f,g \in R[a,b]$，且$m \le f(x) \le M, g(x) \ge 0(\forall x \in [a,b])$，则$\exists \mu \in [m,M]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

特别当 $f \in C[a,b]$时，则 $f \in C[a,b]$， $\exists \xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

（6）Newton-Leibnitz 公式(微积分基本公式)：

设 $f \in R[a,b]$，且存在$[a,b]$上连续函数F 满足$F'(x) = f(x)(\forall x \in (a,b))$，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

3.变上限积分

（1）定义（变上限积分）：

设 $f \in R[a,b]$，则由积分的区域可加性知， $f \in R[a,x](\forall x \in (a,b])$，称函数

$F(x)=\int_a^x f(t)dt(\forall x\in[a,b])$为在区间$[a,b]$上的变上限积分。

（2）变上限积分性质:

设$f\in R[a,b]$，$F(x)=\int_a^x f(t)dt(\forall x\in[a,b])$，则

- $F\in C[a,b]$；
- 若函数f在$x_0\in[a,b]$处连续，则F在x_0处可导，且$F'(x_0)=f(x_0)$

特别若$f\in C[a,b]$，则F是f在区间$[a,b]$上的一个原函数。

第二部分：习题

一、定积分的概念

1．设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，求证函数$\mathrm{e}^{f(x)}$在区间$[a,b]$上可积。

二、利用 Riemann 积分计算某些数列极限

2. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$，这里$p>0$.

三、积分估值

3. 记$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx$，确定$I_1$与$I_2$的大小关系。

4. 计算$\int\limits_0^1\dfrac{\sin x}{x}dx$近似值，使误差小于$10^{-6}$.

四、积分不等式与零点问题

5. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且恒正即$f(x)>0,\ \forall x\in[a,b]$. 证明函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x[f(t)]^{-1}dt$$

在$[a,b]$上有且仅有一个零点。

6.（课本第五章总复习题第 17 题，p.188）已知函数$f(x)$在$[a,b]$上连续且单调上升。证明：

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

7. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续可微。证明

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|\leq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx.$$

8.（Hadamard 不等式）设函数$f(x)$于$[a,b]$可导且下凸。证明

$$f(\tfrac{a+b}{2})(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

五、积分与极限

9.（课本习题 5.2 第 7 题，p.141）证明

(i). $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0$.

(ii). $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = 1$.

10. 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续。证明$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$.

注：类似可证，若f连续，则$\lim\limits_{h\to 0}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx = \frac{\pi f(0)}{2}$.

六、变限积分

11. 设$f(x), g(x)\in C[0,+\infty)$，$f(x)>0$，$g(x)$单调增加，则$\varphi(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$，

求$\phi'(x)$并判断$\phi(x)$的单调性。

12. 求常数 a,b,c，使得极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\neq 0.$

13. 设 $F(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^8\right)dt$，求 $F^{(17)}(0)$.

14. 设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$，则当 $x\to 0$ 时，$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$ 是多少阶无穷小量？

15. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(t-1)e^{-t}dt$ 的极大值点。

16. 设曲线 $y=f(x)$ 由 $x(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{t-u}\sin\frac{u}{3}du$ 及 $y(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{t-u}\cos 2u du$ 确定，求该曲线当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时的法线方程.