第 2 次习题课 函数极限与连续函数

连续函数与函数极限的定义

1. 证明 $f(x)=|x|$ 是连续函数。

证明： $|x|-|a|\le|x-a|$，对称性 $|a|-|x|\le|x-a|$，所以 $\big||x|-|a|\big|\le|x-a|$。

对任何 $\varepsilon>0$，当 $|x-a|<\varepsilon$ 时，$\big||x|-|a|\big|\le|x-a|<\varepsilon$。因此 $f(x)=|x|$ 在 a 连续。■

2. 设 $f_1,\dots,f_n$ 都在 I 上定义且在 a 连续。证明 $f(x)=\max\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$ 在 a 连续。

证明： 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得对任意 $x\in I$，当 $|x-a|<\delta$ 时，对每个 $k=1,2,\dots,n$，

$$f_k(a)-\varepsilon<f_k(x)<f_k(a)+\varepsilon。$$

因此 $f_k(x)<f_k(a)+\varepsilon\le\max\{f_1(a),f_2(a),\dots,f_n(a)\}+\varepsilon=f(a)+\varepsilon$，

$$f_k(a)<\max\{f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x)\}+\varepsilon=f(x)+\varepsilon。$$

于是

$$f(x)=\max\{f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x)\}<f(a)+\varepsilon，$$

$$f(a)=\max\{f_1(a),f_2(a),\dots,f_n(a)\}<f(x)+\varepsilon。$$

因此 $f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$，从而 f 在 a 连续。■

讨论： 记 $g(x)=\max\{f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x)\}$，则

$$f(x)=\max\{g(x),f_{n+1}(x)\}=\frac{g(x)+f_{n+1}(x)}{2}+\left|\frac{g(x)-f_{n+1}(x)}{2}\right|,$$

连续性可以利用数学归纳法，四则运算、绝对值、复合函数的连续性得到。

3. 设 n 是正整数。证明 $f(x)=x^n$ 是连续函数。

证明： 记 $h=x-a$，对任何 $\varepsilon>0$，当 $|h|<\dfrac{\varepsilon}{(|a|+1)^n+\varepsilon}$（这个值是由下面的放缩方式确定的）时，

$$\begin{aligned}\left|(a+h)^n-a^n\right|&=\left|C_n^1a^{n-1}h+C_n^2a^{n-2}h^2+\cdots+C_n^nh^n\right|\\&\le C_n^1|a|^{n-1}|h|+C_n^2|a|^{n-2}|h|^2+\cdots+C_n^n|h|^n\\&\le C_n^1|a|^{n-1}|h|+C_n^2|a|^{n-2}|h|+\cdots+C_n^n|h| \qquad (\text{因为}|h|<1)\\&\le|h|(|a|+1)^n<\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $f(x)=x^n$ 在 a 连续。■

讨论：(1) 也可以由 x 的连续性以及四则运算的连续性得到 x^n 的连续性。

(2) 如果用定义证明了 x^2 的连续性，那么四则运算中乘积的连续性可以用以下方式得到

$$f(x)g(x)=\frac{\left[f(x)+g(x)\right]^2-\left[f(x)-g(x)\right]^2}{4}\text{。}$$

(3) 对正整数 $n\ge 2$，和正整数 m，

$$\left|\left(m+\frac{1}{m}\right)^n-m^n\right|=\left|C_n^1m^{n-2}+C_n^2m^{n-4}+\cdots+C_n^n\frac{1}{m^n}\right|>nm^{n-2}\ge n$$

所以 $f(x)=x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是一致连续的(即不同点处的连续程度不同)。

(4) 如果把不等式 $a^n-\varepsilon<x^n<a^n+\varepsilon$ 变形为 $\sqrt[n]{a^n-\varepsilon}-a<x-a<\sqrt[n]{a^n+\varepsilon}-a$，并取正数 $\delta=\min\left\{\sqrt[n]{a^n+\varepsilon}-a,a-\sqrt[n]{a^n-\varepsilon}\right\}$。这是不是一个可行的证明？开方运算是乘方运算的逆运算，任何正数可以开方取决于乘方是满射，而这等价于乘方的连续性。所以这个证明有循环论证之嫌。

4. 设 n 是正整数。证明 $f(x)=\sqrt[n]{x}$ 是连续函数。

分析：从函数图像上观察，曲线 $y=\sqrt[n]{x}$ 在 $x=0$ 处最陡，取 $\delta=\varepsilon^n$ 即可。

证明：对任何 $\varepsilon>0$，对任意 $a\ge 0$，以及满足 $|x-a|<\varepsilon^n$ 的任意非负实数 x，

(1) 若 a,x 都小于 ε^n，则 $\left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|\le\max\left\{\sqrt[n]{x},\sqrt[n]{a}\right\}<\varepsilon$ 。

(2) 若 a,x 中至少有一个不大于 ε^n，不妨设 $a\ge\varepsilon^n$，则

$$\left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|=\frac{|x-a|}{\left|x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}a^{\frac{1}{n}}+\cdots+x^{\frac{1}{n}}a^{\frac{n-2}{n}}+a^{\frac{n-1}{n}}\right|}\le\frac{|x-a|}{a^{\frac{n-1}{n}}}<\frac{\varepsilon^n}{\left(\varepsilon^n\right)^{\frac{n-1}{n}}}=\varepsilon\text{ 。}$$

总之，$\left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|<\varepsilon$ 。所以 $f(x)=\sqrt[n]{x}$ 是连续函数，并且在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。■

复合函数与四则运算

5. 对有理分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 。

解：情形 1： a 是实数。

此时换元 $h=x-a$ ，于是 $x\to a$ 时 $h\to 0$ 且 $h\ne 0$ 。

$$P(a+h)=a_0+a_1h+a_2h^2+\cdots+a_mh^m=a_ph^p+\text{高阶项}\text{，}\quad a_p\text{ 是次数最低的非零项系数}$$

$$Q(a+h)=b_0+b_1h+b_2h^2+\cdots+b_nh^n=b_qh^q+\text{高阶项}\text{，}\quad b_q\text{ 是次数最低的非零项系数}$$

当 $h\to 0$ 时，多项式各项中次数最低的非零项是主项。于是

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{P(a+h)}{Q(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{a_p h^p+h^{p+1}P_1(h)}{b_q h^q+h^{p+1}Q_1(h)}=\frac{a_p}{b_q}\cdot\lim_{h\to 0}h^{p-q}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1+hP_1(h)}{1+hQ_1(h)}=\begin{cases}0, & p>q\\ \dfrac{a_p}{b_q}, & p=q\\ \infty, & p<q\end{cases}$$

情形 2：a 为∞（或$\pm\infty$）。

此时换元$h=\dfrac{1}{x}$，于是$x\to\infty$时$h\to 0$且$h\neq 0$。$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{P\left(\frac{1}{h}\right)}{Q\left(\frac{1}{h}\right)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{P_1(h)}{Q_1(h)}$，其中

$P_1(h),Q_1(h)$ 是多项式。这样就归结为情形 1 了。当$x\to\infty$时，多项式最高次数项是主项。

评论：因式分解是处理多项式时的一个重要手段，它可以把多项式分解成次数更低的因子的乘积。研究有理分式时利用因式分解可以把分子分母的公因子尽量消去。在处理极限问题时，因式分解并不是最好的选择，发现和提取主项才是问题的关键，突出主项并以适当形式表示次要的项是值得学习的。

6. 对正有理数$r=\dfrac{m}{n}$以及$a>0$，求极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^r-a^r}{x-a}$。

解：令$y=x^{\frac{1}{n}},b=a^{\frac{1}{n}}$。则当$x\to a$时，$y\to b$，所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^r-a^r}{x-a}&=\lim_{y\to b}\frac{y^m-b^m}{y^n-b^n}\qquad\text{(换元，转换为多项式)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(b+h)^m-b^m}{(b+h)^n-b^n}\qquad\text{(换元)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{mb^{m-1}h+h^2P(h)}{nb^{n-1}h+h^2Q(h)}=\lim_{h\to 0}\frac{mb^{m-1}+hP(h)}{nb^{n-1}+hQ(h)}=\frac{mb^{m-1}}{nb^{n-1}}\\&=rb^{m-n}=ra^{r-1}\end{aligned}$$

换元（复合函数极限）、因式分解、极限四则运算、连续函数■

7. 对正实数β以及$a>0$，求极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\beta-a^\beta}{x-a}$。

解：先考虑$a=1$，即$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\beta-1}{x-1}$。

对任意$\varepsilon>0$，任取正有理数r,s使得$\beta-\dfrac{\varepsilon}{2}<r<\beta<s<\beta+\dfrac{\varepsilon}{2}$。

因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^r-1}{x-1}=r$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^s-1}{x-1}=s$，所以存在$\delta>0$使得对任意$1<x<1+\delta$，

$$\frac{x^r-1}{x-1}>r-\frac{\varepsilon}{2},\quad \frac{x^s-1}{x-1}<s+\frac{\varepsilon}{2}。$$

所以$\beta-\varepsilon<r-\dfrac{\varepsilon}{2}<\dfrac{x^r-1}{x-1}<\dfrac{x^\beta-1}{x-1}<\dfrac{x^s-1}{x-1}<s+\dfrac{\varepsilon}{2}<\beta+\varepsilon$。

因此$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^\beta-1}{x-1}=\beta$。类似可得$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^\beta-1}{x-1}=\beta$。因此$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\beta-1}{x-1}=\beta$。

对 $a>0$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\beta-a^\beta}{x-a}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{a^\beta(y^\beta-1)}{a(y-1)}=\beta a^{\beta-1}$。

对任意实数 β 以及 $a>0$，求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\beta-a^\beta}{x-a}=\beta a^{\beta-1}$。这个结果请读者自己完成。■

注：利用已知极限，反过来得到取极限之前的不等式，这个方法值得学习。

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{7x-1}-3}{\sqrt{x}-2}$。

解：$x\to 0$ 时分子分母都趋于零。应用四则运算和换元，

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{7x-1}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{7x-1}-3}{(7x-1)-3^3}\lim_{x\to 4}\frac{x-2^2}{\sqrt{x}-2}\lim_{x\to 4}\frac{(7x-1)-3^3}{x-2^2}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u}{(u+3)^3-3^3}\cdot\lim_{v\to 0}\frac{(v+2)^2-2^2}{v}\cdot 7\quad (u=\sqrt[3]{7x-1}-3, v=\sqrt{x}-2)$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u}{27u+u^2P(u)}\cdot\lim_{v\to 0}\frac{4v+v^2Q(v)}{v}\cdot 7=\frac{1}{27}\cdot 4\cdot 7=\frac{28}{27}$$

9. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$。

解：利用四则运算、换元以及重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})+\cos x\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos 2x}\cdot\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{1-\cos 3x}\cdot\frac{1-\cos 3x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{y\to 0}\frac{y}{1-(1-y)^2}\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\left(\frac{z}{2}\right)^2}+\lim_{u\to 1}\frac{u}{1-(1-u)^3}\lim_{v\to 0}\frac{1-\cos v}{\left(\frac{v}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}=3$$

■

10. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin x+\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$。

解：取对数，四则运算，换元。

$$\ln\left(2\sin x+\cos x\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}\cdot\frac{\ln\left(2\sin x+\cos x\right)}{\left(2\sin x+\cos x\right)-1}$$

$$=\left[2\cdot\frac{\sin x}{x}-\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x\right]\frac{\ln\left(1+u\right)}{u}\qquad (u=2\sin x+\cos x-1)$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x-1)=0$，

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(2\sin x+\cos x\right)^{\frac{1}{x}}=\left[2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x\right]\lim_{u\to 0}\frac{\ln\left(1+u\right)}{u}=(2-1\cdot 0)\cdot 1=2,$$

从而 $\lim_{x\to 0}\left(2\sin x+\cos x\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^2$。■

夹挤定理，函数极限与数列极限

11. 求 $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)^x$， $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)^x$。

解：(1)

$$\frac{1}{2}\le 1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\le\frac{3}{2}$$

所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)^x\le\left(\frac{3}{2}\right)^x$。而 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\right)^x=1$，所以 $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)^x=1$。

(2) 当 $x>\frac{2}{\pi}$ 时， $0<\frac{1}{x}<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\sin\frac{1}{x}<\frac{1}{x}$。

$$\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}}\cdot x\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}}\cdot x\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln\left(1+y\right)}{y}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y}=1,$$

所以 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$。

类似可证 $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)^x=\sqrt{\mathrm{e}}$。所以 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)^x=\sqrt{\mathrm{e}}$。■

注意：$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}}}\right]^{x\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}}=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的写法是不妥当的。

处理 $u(x)^{v(x)}$ 形式的函数，无论是计算极限还是导数，最好的办法是用换底公式变成 $\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$，从而把幂降级为乘法讨论。

12. 求 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}$。（$\alpha>0$）

解：先证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$，然后由函数极限得到数列极限。

对 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$，可以考虑 $x=\mathrm{e}^{2n}$，于是

$$0<\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2n}\right)}{\mathrm{e}^{2n}}=\frac{2n}{\mathrm{e}^{2n}}<\frac{2n}{2^{2n}}<\frac{2n}{\left(2^{n}\right)^{2}}<\frac{2n}{n^{2}}=\frac{2}{n},$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{2n}\right)}{\mathrm{e}^{2n}}=0$。

因为 $\mathrm{e}^{2n}>2n(\mathrm{e}-1)$ 知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{2n}=+\infty$，从而对任意 $x>\mathrm{e}^{2}$，存在自然数 n 使得 $\mathrm{e}^{2n}\le x<\mathrm{e}^{2n+2}$。

于是

$$0<\frac{\ln x}{x}<\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2n+2}\right)}{\mathrm{e}^{2n}}=\frac{2n+2}{\mathrm{e}^{2n+2}}\mathrm{e}^{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$。

对一般的 $\alpha>0$，令 $y=x^{\alpha}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=+\infty$。因此用换元公式和四则运算性质得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{1}{\alpha}\ln y}{y}=0。$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}=0$。

评论：(1) 上述解法只用到对数函数的单调性。这个利用函数极限与数列极限关系的讨论，以及连续变量与整数变量之间转换的手法值得学习。

(2) 数列极限由于受到自变量 n 是正整数的限制，所以不能方便地进行换元，因此转而考虑相应的连续变量情形。

(3) 当 $\alpha=1$ 时，利用已知极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 以及对数函数的连续性可以得到，

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\sqrt[n]{n}=\ln 1=0$。

但我们不能从 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ 得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$。一方面这涉嫌循环论证，另一方面后者涉及的开方运算，它出现在对数函数之前。

对任意正整数 m，令 $x_n=\sqrt[mn]{n}-1$，则 $n=(1+x_n)^{mn}=\left[(1+x_n)^{n}\right]^{m}>\left(nx_n\right)^{m}=n^{m}x_n^{m}$，从而

$0<x_n<\dfrac{1}{n^{\frac{m-1}{m}}}=\dfrac{1}{n^{1-\frac{1}{m}}}\le 1$，于是 $0<\sqrt[n]{n}-1=\left(1+x_n\right)^{m}-1<(2^{m}-1)x_n<\dfrac{2^{m}-1}{n^{1-\frac{1}{m}}}$。因此

$0<\dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\frac{1}{n^{\alpha}}}<\dfrac{2^{m}-1}{n^{1-\frac{1}{m}-\alpha}}$，所以 $\sqrt[n]{n}-1$ 是比 $\dfrac{1}{n^{\alpha}}\,(0<\alpha<1)$ 更高阶的无穷小。

(4) 记 $a_n=\sqrt[n]{n}$ 。则 $a_{n+1}<a_n \Leftrightarrow (n+1)^n<n^{n+1} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n \Leftrightarrow n\ge 3$。最后这个等价是因为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{1}{n}<3\text{。}$$

所以当 $n\ge 3$ 时，$a_{n+1}<a_n$ 。又 $\sqrt[n]{n}\ge 1$，所以 $a_n=\sqrt[n]{n}$ 收敛。

单侧极限、单侧连续、间断点类型、单调有界收敛

13. 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$。（$[t]$ 是不超过 t 的最大整数，即 $[t]\le t<[t]+1$）

解：当 $0<x<1$ 时，取 $n=\left[\frac{1}{x}\right]$，则 $1<n\le\frac{1}{x}<n+1$，$\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}$，于是

$$1-2x<1-\frac{2}{n}<1-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}\cdot n<x\left[\frac{1}{x}\right]<\frac{1}{n}\cdot(n+1)=1+\frac{1}{n}<1+\frac{2}{n+1}<1+2x$$

因此 $\left|x\left[\frac{1}{x}\right]-1\right|<2x$ 。于是 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$ 。类似可得 $\lim\limits_{x\to 0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$ 。因此 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$ 。■

14. 讨论函数在给定点的间断类型。

(1) $\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$，$x=0$ 。

(2) $\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$，$x=1$

解：(1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)&=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+1\\&=1+\lim_{y\to 0^+}\frac{2y^4+y^3}{y^4+1}\qquad y=e^{-\frac{1}{x}}\\&=1\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-1$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{2+y}{1+y^4}-1 \qquad y=e^{\frac{1}{x}}$$

$$=2-1=1$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1$。因此$x=0$是$\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}$的可去间断点。

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{1+2^y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{2^{-y}}{2^{-y}+1}=0$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}=\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{1}{1+2^y}=1$，所以$x=1$是$\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$的跳跃间断点。■

15. 设$f:(a,b)\to\mathbf{R}$是有界的连续函数，令$g(x)=\sup\limits_{a<t\le x}f(t)$。证明$g:(a,b)\to\mathbf{R}$是连续函数。

证明：单调性：对任意$x,y\in(a,b)$满足$x<y$，$g(x)\le g(y)$。所以对任意$x_0\in(a,b)$，极限$A=\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)$和$B=\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)$都存在，并且$A\le g(x_0)\le B$。因此要证明$g$在$x_0$连续，只需证明$A=g(x_0)$且$B=g(x_0)$。

左连续：对任意$x\in(a,x_0)$，$f(x)\le g(x)\le A$。由f的连续性$f(x_0)\le A$。因此$g(x_0)\le A$。因此$g(x_0)=A$。

右连续：对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得对任意$x\in[x_0,x_0+\delta)$都有$x\in(a,b)$且$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

对任意$y\le x$，

要么$y<x_0$，此时$f(y)\le g(x_0)<g(x_0)+\varepsilon$；

要么$x_0\le y\le x<x_0+\delta$，此时$f(y)<f(x_0)+\varepsilon\le g(x_0)+\varepsilon$。

总之，对任意$y\le x$，$f(y)<g(x_0)+\varepsilon$。因此$g(x)\le g(x_0)+\varepsilon$。

从而$B\le g(x_0)+\varepsilon$。于是$B\le g(x_0)$。因此$B=g(x_0)$。■

以下两题可以视情况选讲

16. 设$a>1$。对正有理数$r=\dfrac{m}{n}$，定义$a^r=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$。对负有理数$r$，定义$a^r=\dfrac{1}{a^{-r}}$。定义$a^0=1$。

(1) 证明函数 $f(r)=a^r$ 是$\mathbf{Q}\to(0,+\infty)$是严格增函数；

(2) 证明对任意$x\in\mathbf{R}$，极限$\lim\limits_{r(\in\mathbf{Q})\to x}a^r$存在，记$a^x=\lim\limits_{r(\in\mathbf{Q})\to x}a^r$。

(3) 证明$g(x)=a^x$是$\mathbf{R}\to(0,+\infty)$是严格增的连续函数。

(4) 对$0<b<1$，定义$b^x=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{b}\right)^x}$。证明对任意正数$u,v$和任意实数$x,y$，$u^x\cdot u^y=u^{x+y}$，

$u^x\cdot v^x=(uv)^x$，$\left(u^x\right)^y=u^{xy}$。

证明：(1) 设有理数$r<s$。则存在正整数N和整数p,q使得$r=\dfrac{p}{N},s=\dfrac{q}{N}$，$p<q$。于是

$a^r=\left(a^{\frac{1}{N}}\right)^p$，$a^s=\left(a^{\frac{1}{N}}\right)^q$。因为$\left(a^{\frac{1}{N}}\right)^N=a>1=1^N$，所以$a^{\frac{1}{N}}>1$。于是

$$\frac{a^s}{a^r}=\frac{\left(a^{\frac{1}{N}}\right)^q}{\left(a^{\frac{1}{N}}\right)^p}=\left(a^{\frac{1}{N}}\right)^{q-p}>1^{q-p}=1\text{。}$$

从而$a^r<a^s$。因此函数$f(r)=a^r$是$\mathbf{Q}\to(0,+\infty)$是严格增函数。

(2) 取有理数$r_0<x<s_0$。则任取有理数r,s满足$r_0<r<x<s<s_0$，当$r\to x^-$时，a^r单调增大有下界a^{s_0}，当$s\to x^+$时，a^s单调减小有下界a^{r_0}。

从而极限$A=\lim\limits_{r(\in\mathbf{Q})\to x^-}a^r$和$B=\lim\limits_{s(\in\mathbf{Q})\to x^+}a^s$都存在，且$a^r\le A\le B\le a^s$。

对任意$\varepsilon>0$，因为正整数集在实数集中无上界，所以存在正整数$n>\dfrac{a}{\varepsilon}$。于是$(1+\varepsilon)^n>n\varepsilon>a$。

取有理数$r\in\left(x-\dfrac{1}{n},x\right)$，则$r<x<r+\dfrac{1}{n}$，从而$a^r\le A\le B\le a^{r+\frac{1}{n}}$，因此

$$1\le\frac{B}{A}\le\frac{a^{r+\frac{1}{n}}}{a^r}=a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon\text{。}$$

因此$\dfrac{B}{A}=1$，$A=B$。于是极限$\lim\limits_{r(\in\mathbf{Q})\to x}a^r$存在。

(3) 对任意 $x<y$，取有理数 r_0, s_0 满足 $x<r_0<s_0<y$，再任取有理数 r, s 使得 $x<r<r_0<s_0<s<y$，则 $a^r<a^{r_0}<a^{s_0}<a^s$，从而 $a^x=\lim\limits_{r\to x}a^r\le a^{r_0}<a^{s_0}\le\lim\limits_{s\to y}a^s=a^y$。因此 a^x 是严格增函数。

从而 $A=\lim\limits_{x\to b^-}a^x, B=\lim\limits_{x\to b^+}a^x$ 存在。用(2)的办法可以证明 $A=B$，所以 a^x 在 b 连续。

(5) 先证明 $u^x\cdot u^y=u^{x+y}$，$u^x\cdot v^x=(uv)^x$，$\left(u^x\right)^y=u^{xy}$ 对有理数 x, y 成立，再用极限和连续性说明它们对实数 x, y 也成立。

17. (1) 设 f 在 $x=0$ 处连续，m 是正整数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x^m}=\lambda$。证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x^m}$ 存在并求它的值。

(2) 利用(1)的结论求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^4}$ 的值。

提示：考虑 $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}(m=1)$，$\dfrac{\sin x}{x}(m=2)$ 和 $\dfrac{\cos x-1}{x^2}(m=2)$。

解：(1)对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得对任意 $0<|x|<\delta$，$\lambda-\varepsilon<\dfrac{f(2x)-f(x)}{x^m}<\lambda+\varepsilon$。

从而对任意 $0<x<\delta$，

$$(\lambda-\varepsilon)\left(\frac{x}{2}\right)^m<f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)<(\lambda+\varepsilon)\left(\frac{x}{2}\right)^m,$$

$$(\lambda-\varepsilon)\left(\frac{x}{4}\right)^m<f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{4}\right)<(\lambda+\varepsilon)\left(\frac{x}{4}\right)^m,$$

$$(\lambda-\varepsilon)\left(\frac{x}{2^k}\right)^m<f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)<(\lambda+\varepsilon)\left(\frac{x}{2^k}\right)^m,$$

相加得到

$$(\lambda-\varepsilon)\left(\frac{x^m}{2^m}+\frac{x^m}{2^{2m}}+\cdots+\frac{x^m}{2^{km}}\right)<f(x)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)<(\lambda+\varepsilon)\left(\frac{x^m}{2^m}+\frac{x^m}{2^{2m}}+\cdots+\frac{x^m}{2^{km}}\right)。$$

令 $k\to+\infty$ 得到

$$(\lambda-\varepsilon)\frac{\frac{x^m}{2^m}}{1-\frac{1}{2^m}}\le f(x)-f(0)=f(x)\le(\lambda+\varepsilon)\frac{\frac{x^m}{2^m}}{1-\frac{1}{2^m}}。$$

因此 $\lambda-\varepsilon\le(2^m-1)\dfrac{f(x)-f(0)}{x^m}\le\lambda+\varepsilon$。于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x^m}=\dfrac{\lambda}{2^m-1}$。■

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0\end{cases}$ 连续。则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^{2x}-1}{2x}-\dfrac{e^x-1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\right)^2=\frac{1}{2}\text{。}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$。

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0\end{cases}$ 连续。则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 2x}{2x}-\dfrac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(\cos x-1)}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}-1}{x^2}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{2^2-1}=-\dfrac{1}{6}$。

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x^2} & x\neq 0;\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ 连续。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos 2x-1}{4x^2}-\dfrac{\cos x-1}{x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-4\cos x+2}{4x^4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}\right)^2=\frac{1}{8}\text{,}$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\left(1-\dfrac{1}{2}x^2\right)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\cos x-1}{x^2}+\dfrac{1}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{2^2-1}=\dfrac{1}{24}$。