

1. 证明：所有 3×3 实对称矩阵的集合在矩阵的加法和数乘下构成实数域上的线性空间。写出这个线性空间的零元和一组基并计算维数。

2. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 是一组线性无关的向量，求矩阵

$$A = [\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_4, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_5, \alpha_5] \quad (1)$$

的秩，并且写下 $C(A)$ 的一组基。

3. 设 $V = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ 是 \mathbb{R}^4 中的一个子空间。求它的正交补中的一组基。

4. 证明： $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \geq \text{rank}(A + B)$

5. 证明：如果矩阵包含 m 行并且秩为 r ，则它的任何 s 行组成一个秩不小于 $r + s - m$ 的矩阵。