微积分 A (1)

姚家燕

第 29 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

第 29 讲

综合练习 (续)

例 4. 设 $p, q \in \mathscr{C}[0, +\infty)$ 使得齐次常微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的一个解 φ 在 $[0, +\infty)$ 上大于 0, 且 $\int_0^x (\varphi(t))^{-2} e^{-\int_0^t p(u)\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}t$ 在 $[0, +\infty)$ 上为无界函数.

(I) 求上述齐次常微分方程的通解.

(II) 求证: 上述常微分方程满足 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y(x)}{\varphi(x)} = C$ ($C \in \mathbb{R}$ 为常数) 的解只有 $y(x) = C\varphi(x)$.

解: (I) 设 y 为常微分方程的任意的解. $\forall x \geqslant 0$, 令 $C(x)=\frac{y(x)}{\varphi(x)}$, 则 $y(x)=C(x)\varphi(x)$. 带入方程可得 $C''(x)\varphi(x)+(2\varphi'(x)+p(x)\varphi(x))C'(x)=0$, 由此我们立刻可知

$$
\begin{aligned}
C'(x) &= C'(0)e^{-\int_0^x (2\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}+p(u))\,\mathrm{d}u} \\
&= C'(0)e^{2\log\varphi(0)-2\log\varphi(x)-\int_0^x p(u)\,\mathrm{d}u} \\
&= C_1(\varphi(x))^{-2}e^{-\int_0^x p(u)\,\mathrm{d}u},
\end{aligned}
$$

其中 C_1 为任意的常数.

进而得 $C(x) = C_2 + C_1 \int_0^x (\varphi(t))^{-2} e^{-\int_0^t p(u)\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}t$,

故所求常微分方程的通解为

$$y(x) = \left(C_2 + C_1 \int_0^x (\varphi(t))^{-2} e^{-\int_0^t p(u)\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}t\right)\varphi(x).$$

(II) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{\varphi(x)} = C$, 则我们有

$$C = C_2 + \lim_{x\to+\infty} C_1 \int_0^x (\varphi(t))^{-2} e^{-\int_0^t p(u)\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}t.$$

$\forall x \geqslant 0$, 令 $F(x) = \int_0^x (\varphi(t))^{-2} e^{-\int_0^t p(u)\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}t$, 则由题设可知 $F \in \mathscr{C}[0, +\infty)$ 为单调递增并且无界, 于是由单调有界定理可得知 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. 又 $C = C_2 + \lim\limits_{x\to+\infty} C_1 F(x)$, 因此必定有 $C_1 = 0$, 从而 $C_2 = C$, 故 $y(x) = C\varphi(x)$. 而 $C\varphi(x)$ 的确也满足题设条件, 由此可知所证结论成立.

例 5. 假设 $\varphi, \psi \in \mathscr{C}[0, T]$, 而 f 在 $[0, T]$ 上可导. 若 φ, ψ 均为非负函数且 $\forall t \in [0, T]$, 均有

$$f'(t) \leqslant \varphi(t) f(t) + \psi(t),$$

求证: $\forall t \in [0, T]$, 我们均有

$$f(t) \leqslant e^{\int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}\left(f(0) + \int_0^t \psi(u)\,\mathrm{d}u\right).$$

证明: $\forall t \in [0,T]$, 令 $C(t) = f(t)e^{-\int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}$, 那么 C 可导且$\forall t \in [0,T]$, $f(t) = C(t)e^{\int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}$, 于是

$$\begin{aligned}
\varphi(t)f(t) + \psi(t) &\geqslant f'(t) = C'(t)e^{\int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s} \\
&\quad + \varphi(t)C(t)e^{\int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s} \\
&= C'(t)e^{\int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s} + \varphi(t)f(t),
\end{aligned}$$

故 $C'(t) \leqslant \psi(t)e^{-\int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}$. 又 φ, ψ 均为非负函数, 由此我们可立刻导出 $C'(t) \leqslant \psi(t)$.

由定义可知 $C(0)=f(0)$, 于是 $\forall t\in[0,T]$, 均有

$$C(t)=f(0)+\int_0^t C'(u)\,\mathrm{d}u\leqslant f(0)+\int_0^t \psi(u)\,\mathrm{d}u,$$

从而 $\forall t\in[0,T]$, 我们均有

$$f(t)=C(t)e^{\int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}\leqslant e^{\int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}\Big(f(0)+\int_0^t \psi(u)\,\mathrm{d}u\Big).$$

因此所证结论成立.

例 6. 假设 $p, q \in \mathscr{C}[a,b]$, 并且 $y=\varphi(x)$ 为方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 在 $[a,b]$ 上的非零的解, 求证: $\forall x_0 \in [a,b]$, $\varphi(x_0)$, $\varphi'(x_0)$ 不全为零.

证明: 用反证法, 假设存在某个 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=0$. 由于 $y_1 \equiv 0$ 为原方程的解并且 $y_1(x_0)=y_1'(x_0)=0$, 则由线性常微分方程初值问题的解的唯一性可知 $\varphi = y_1 \equiv 0$, 矛盾! 于是所证结论成立.

例 7. 已知曲线 $y=y(x)$ 满足 $yy''+(y')^2=1$, 并且上述曲线与曲线 $y=e^{-x}$ 相切于点 $(0,1)$, 求曲线 $y=y(x)$ 的表达式.

解: 因曲线 $y=e^{-x}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的斜率为 $y'(0)=-1$, 于是由题设条件可知所求曲线 $y=y(x)$ 为下述初值问题的解:

$$\begin{cases} yy''+(y')^2=1, \\ y(0)=1,\ y'(0)=-1. \end{cases}$$

方法 1. 令 $p=y'$ 并以 y 作为自变量, 则

$$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

于是 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=1$, 从而得 $\frac{\mathrm{d}(p^2-1)}{\mathrm{d}y}+\frac{2(p^2-1)}{y}=0$, 由此可得 $p^2-1=Ce^{-\int\frac{2}{y}\,\mathrm{d}y}=\frac{C}{y^2}$. 但 $y(0)=1$, $y'(0)=-1$, 因此 $C=0$, 从而 $y'=p\equiv-1$, 进而 $y=-x+C_1$. 又 $y(0)=1$, 于是 $C_1=1$, 故所求曲线方程为 $y=1-x$.

方法 2. 由初值条件与 Newton-Leibniz 公式得

$$\begin{aligned} yy' - y(0)y'(0) &= \int_0^x \left(y(t)y''(t) + (y'(t))^2\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \mathrm{d}t = x. \end{aligned}$$

于是 $yy' = x - 1$, 故 $\frac{1}{2}(y^2 - (y(0))^2) = \frac{1}{2}x^2 - x$,

进而 $y^2 = (x-1)^2$, 从而我们有 $y = \pm(x-1)$.

但 $y(0) = 1$, 则 $y = 1 - x$ 为所求曲线方程.

例 8. 假设 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$ 满足常微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 均为常数. 求 a, b, c 以及该方程的通解.

解: 将 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$ 带入方程可得

$$
\begin{aligned}
ce^x &= (e^{2x} + (1+x)e^x)'' + a(e^{2x} + (1+x)e^x)' \\
&\quad + b(e^{2x} + (1+x)e^x) \\
&= (4e^{2x} + (3+x)e^x) + a(2e^{2x} + (2+x)e^x) \\
&\quad + b(e^{2x} + (1+x)e^x),
\end{aligned}
$$

由此我们立刻可得

$$(4+2a+b)e^{2x}+(3+2a+b-c)e^{x}$$
$$+(1+a+b)xe^{x}=0.$$

又因 $W(e^{2x},e^{x},xe^{x})=e^{4x}\neq 0$, 于是 e^{2x}, e^{x}, xe^{x} 线性无关, 从而我们有

$$4+2a+b=0,\ 3+2a+b-c=0,$$
$$1+a+b=0,$$

由此可导出 $a=-3$, $b=2$, $c=-1$, 此时原方程被变为 $y''-3y'+2y=-e^x$. 相应的齐次方程的特征方程为 $0=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)$, 于是特征根为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. 又 $e^{2x}+(1+x)e^x$ 为非齐次方程的特解, 故所求方程的通解为

$$y=e^{2x}+(1+x)e^x+C_1e^x+C_2e^{2x},$$

其中 C_1, C_2 为任意的常数.

例 9. 求可导函数 f 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有

$$f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

解: 定义 $C_1 = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. 那么可导函数 f 满足一阶线性非齐次方程 $y' - y = C_1$, 从而我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\int \mathrm{d}x}\left(C + \int C_1 e^{-\int \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^x(C + \int C_1 e^{-x}\,\mathrm{d}x) \\ &= e^x(C - C_1 e^{-x}) = Ce^x - C_1. \end{aligned}$$

又 $C_1=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, 则我们有

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^1 (Ce^t - C_1)\,\mathrm{d}t = (Ce^t - C_1 t)\Big|_0^1 \\ &= C(e-1) - C_1, \end{aligned}$$

故 $C_1=\frac{C(e-1)}{2}$. 于是所求函数的表达式为

$$f(x) = Ce^x - \frac{C(e-1)}{2},$$

其中 C 为任意的常数.

例 10. 设 p, q 为实常数. 问 p, q 满足何条件时方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的解使 $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$?

解: 令 $\Delta = p^2 - 4q$. 下面来分情况讨论.

(1) 若 $\Delta > 0$, 则方程有两个实特征根

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{\Delta}),\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{\Delta}),$$

故上述方程的通解为 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. 此时 $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ 当且仅当 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, 而这又等价于说 $-p < \sqrt{\Delta} < p$, 也即 $p > 0, q > 0$.

(2) 若 $\Delta = 0$, 那么上述方程的特征根为 $\lambda = -\frac{p}{2}$,

于是方程的通解为

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{p}{2}x}.$$

故 $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$ 成立当且仅当 $-\frac{p}{2} < 0$, 而这

则等价于说 $p > 0$.

(3) 若 $\Delta < 0$, 则上述方程有两个共轭复特征根 $\lambda = \frac{1}{2}(-p \pm i\sqrt{-\Delta})$. 故方程的通解为

$$y(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\left(C_1 \cos \tfrac{1}{2}\sqrt{-\Delta}x + C_2 \sin \tfrac{1}{2}\sqrt{-\Delta}x\right),$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$ 成立当且仅当 $p > 0$.

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$ 成立当且仅当 $p, q > 0$.

例 11. 设 $k>0$ 为常数, f 连续. $\forall t\in\mathbb{R}$, 定义

$$x(t)=\frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,\mathrm{d}u.$$

求证: $x''(t)+k^2x(t)=f(t)$.

证明: 由题设可知

$$x(t)=\frac{1}{k}\int_0^t f(u)\big((\sin kt)(\cos ku)-(\cos kt)(\sin ku)\big)\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{k}(\sin kt)\int_0^t f(u)\cos ku\,\mathrm{d}u-\frac{1}{k}(\cos kt)\int_0^t f(u)\sin ku\,\mathrm{d}u.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
x'(t) &= (\cos kt)\int_0^t f(u)\cos ku\,\mathrm{d}u + \frac{1}{k}(\sin kt)f(t)\cos kt \\
&\quad +(\sin kt)\int_0^t f(u)\sin ku\,\mathrm{d}u - \frac{1}{k}(\cos kt)f(t)\sin kt \\
&= (\cos kt)\int_0^t f(u)\cos ku\,\mathrm{d}u + (\sin kt)\int_0^t f(u)\sin ku\,\mathrm{d}u, \\
x''(t) &= -k(\sin kt)\int_0^t f(u)\cos ku\,\mathrm{d}u + f(t)\cos^2 kt \\
&\quad +k(\cos kt)\int_0^t f(u)\sin ku\,\mathrm{d}u + f(t)\sin^2 kt \\
&= -k\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,\mathrm{d}u + f(t),
\end{aligned}$$

则 $x''(t)+k^2x(t)=f(t)$, 由此可知所证成立.

例 12. 设 p, q 为实常数. 问 p, q 满足何条件时方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的解在 $[a, +\infty)$ 上有界, 其中 $a \in \mathbb{R}$ 为常数.

解: 令 $\Delta = p^2 - 4q$. 下面来分情况讨论.

(1) 若 $\Delta > 0$, 则方程有两个实特征根

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{\Delta}),\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{\Delta}).$$

于是方程的通解为 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. 此时 y 在 $[a, +\infty)$ 上有界当且仅当 $\lambda_1 \leqslant 0$ 且 $\lambda_2 \leqslant 0$, 而这又等价于说 $-p \leqslant \sqrt{\Delta} \leqslant p$, 也即 $p, q \geqslant 0$.

(2) 如果 $\Delta = 0$, 则方程特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$, 由此得原方程的通解为 $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{p}{2}x}$, 此时 y 在 $[a, +\infty)$ 上恒有界当且仅当 $p > 0$.

(3) 如果 $\Delta < 0$, 则方程有两个共轭的复特征根 $\lambda = \frac{1}{2}(-p \pm i\sqrt{-\Delta})$. 故方程的通解为

$$y(x) = e^{-\frac{p}{2}x}(C_1 \cos \tfrac{1}{2}\sqrt{-\Delta}x + C_2 \sin \tfrac{1}{2}\sqrt{-\Delta}x).$$

此时 y 在 $[a, +\infty)$ 上有界当且仅当 $p \geqslant 0$.

总之, 通解 y 在 $[a, +\infty)$ 上有界当且仅当 $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, 且 p, q 不同时为零.

例 13. 设 $f \in \mathscr{C}(0,+\infty)$, $f(1)=\frac{5}{2}$ 且 $\forall x, t>0$,

$$\int_1^{xt} f(u)\,\mathrm{d}u = t\int_1^x f(u)\,\mathrm{d}u + x\int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u.$$

求函数 f 的表达式.

解: 方法 1. 固定 $t>0$. $\forall x>0$, 将题中的等式关于 x 求导可得到 $f(xt)t = tf(x) + \int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u$. 令 $x=1$, 则 $\forall t>0$, 我们均有

$$tf(t) = tf(1) + \int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u.$$

因 f 连续, 故上述等式右边可导, 从而 f 可导.

将上式两边对 t 求导可得

$$tf'(t) + f(t) = f(1) + f(t),$$

故 $f'(t) = \frac{1}{t} f(1) = \frac{5}{2t}$. 于是 $\forall x > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\log t\right)\Big|_1^x \\ &= \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\log x. \end{aligned}$$

方法 2. $\forall x>0$, 定义 $G(x)=\frac{1}{x}\int_1^x f(u)\,\mathrm{d}u$, 则 G 为连续函数且由题设可知, $\forall x,t>0$, 均有

$$G(xt)=G(x)+G(t),$$

则存在常数 C 使得 $\forall x>0$, $G(x)=C\log x$, 即

$$\int_1^x f(u)\,\mathrm{d}u=Cx\log x.$$

两边关于 x 求导立刻可得 $f(x)=C(1+\log x)$.

又 $f(1)=\frac{5}{2}$, 故 $C=\frac{5}{2}$, 则 $f(x)=\frac{5}{2}(1+\log x)$.

例 14. 求二阶线性常系数非齐次常微分方程使其特解为 $xe^x + e^{2x}$, $xe^x + e^{-x}$, $xe^x + e^{2x} + e^{-x}$.

解: 由题设可知齐次方程有特解

$$\begin{aligned} y_1 &= (xe^x + e^{2x} + e^{-x}) - (xe^x + e^{2x}) = e^{-x}, \\ y_2 &= (xe^x + e^{2x} + e^{-x}) - (xe^x + e^{-x}) = e^{2x}, \end{aligned}$$

于是齐次线性常微分方程的特征根为 $-1, 2$,

从而特征多项式为 $(\lambda+1)(\lambda-2)=\lambda^2-\lambda-2$, 由此知齐次方程为 $y''-y'-2y=0$. 假设所求非齐次方程为 $y''-y'-2y=f(x)$. 由题设可得

$$f(x)=(xe^x+e^{2x})''-(xe^x+e^{2x})'-2(xe^x+e^{2x})$$

$$=(2e^x+xe^x+4e^{2x})-(e^x+xe^x+2e^{2x})$$

$$-2(xe^x+e^{2x})=e^x-2xe^x,$$

则所求非齐次方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

例 15. 假设 I 为区间, 而 $a_0, \ldots, a_{n-1}, f \in \mathscr{C}(I)$.

求证: 下述 n 阶线性非齐次常微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

有且至多有 $n+1$ 个线性无关解.

证明: 设 y_0 为非齐次方程的特解, 而 $y_1, \ldots, y_n$ 为齐次方程的基本解组. 由于 $f \neq 0$, 则 $y_0 \neq 0$. 下面证明 $y_0, y_0 + y_1, \ldots, y_0 + y_n$ 线性无关.

反证法, 假设 $y_0, y_0+y_1, \ldots, y_0+y_n$ 线性相关, 则 $\exists c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ 不全为零使得

$$\begin{aligned} 0 &= c_0 y_0 + c_1(y_0+y_1) + \cdots + c_n(y_0+y_n) \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{n} c_i\Big) y_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j . \end{aligned}$$

若 $\sum\limits_{i=0}^{n} c_i \neq 0$, 由上式可知 y_0 也为齐次方程的解, 矛盾! 如果 $\sum\limits_{i=0}^{n} c_i = 0$, 则由基本解组的性质可知 $c_j = 0\,(1 \leqslant j \leqslant n)$, 进而 $c_0 = 0$, 故假设不成立.

故上述 n 阶线性非齐次常微分方程有 $n+1$ 个线性无关解. 下面设 y 为该方程的任意一个解, 则 $\exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ 使得我们有

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \\ &= y_0\Big(1 - \sum_{j=1}^{n} c_j\Big) + \sum_{j=1}^{n} c_j (y_0 + y_j), \end{aligned}$$

因此 $y, y_0, y_0 + y_1, \ldots, y_0 + y_n$ 线性相关, 从而非齐次方程有且至多有 $n+1$ 个线性无关解.

例 16. 求解 Euler 方程

$$x^3y''' + 3x^2y'' + xy' - 8y = 7x + 4 \ (x > 0).$$

解: 作变换 $t = \log x$, 则我们有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{1}{x^3}\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} - \frac{3}{x^3}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{x^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

带入原常微分方程可得

$$7e^t + 4 = 7x + 4 = x^3y''' + 3x^2y'' + xy' - 8y$$

$$= x^3\left(\frac{1}{x^3}\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} - \frac{3}{x^3}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{x^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$+3x^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + x\cdot\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 8y$$

$$= \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} - 8y.$$

则齐次方程的特征方程为

$$\lambda^3 - 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0,$$

故上述特征方程的特征根为

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1 + \sqrt{3}i,\ \lambda_3 = -1 - \sqrt{3}i.$$

于是齐次方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \cos\sqrt{3}t + C_3 e^{-t} \sin\sqrt{3}t \\ &= C_1 x^2 + \frac{1}{x}\left(C_2 \cos\sqrt{3}\log x + C_3 \sin\sqrt{3}\log x\right). \end{aligned}$$

由于 1 不是齐次方程的特征根, 则非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 8y = 7e^t$$

有特解形如 $y_1 = Ce^t$. 带入方程可得

$$Ce^t - 8Ce^t = 7e^t,$$

故 $C = -1$, 也即我们有特解 $y_1 = -e^t = -x$.

由于 0 不是齐次方程的特征根, 则非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 8y = 4$$

会有特解形如 $y_2 = C$. 带入方程可得 $-8C = 4$, 故 $C = -\frac{1}{2}$, 也即我们有特解 $y_2 = -\frac{1}{2}$.

于是所求 Euler 方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= -x - \frac{1}{2} + C_1 x^2 \\ &\quad + \frac{1}{x}\left(C_2 \cos\sqrt{3}\log x + C_3 \sin\sqrt{3}\log x\right). \end{aligned}$$

例 17. 证明: $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = 1 - \sin 1.$

证明: $\forall x \in [0,1]$, 定义 $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$, 那么 F 连续可导且 $\forall x \in (0,1]$, 均有 $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$. 故

$$\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \big(F(\sqrt{x}) - F(x) \big) \,\mathrm{d}x$$

$$= x\big(F(\sqrt{x}) - F(x)\big)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\Big(\frac{1}{2\sqrt{x}} F'(\sqrt{x}) - F'(x)\Big) \,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \sin x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \sqrt{x} \,\mathrm{d}x = 1 - \sin 1.$$

期末总复习

1. 第 5 章 Riemann 积分

- 定积分: 概念, 基本性质, 可积性判断准则, 典型的可积函数类, 一致连续性.
- 定积分的性质: 线性, 关于积分区间可加性, 有限韧性, (严格) 保序性、保号性, 绝对值不等式, 乘积的可积性, 积分第一中值定理, Cauchy、Hölder、Jensen 不等式.

- 定积分的理论计算: 变上、下限积分及求导, 原函数, Newton-Leibniz 公式.
- 不定积分: 定义, 不定积分与导数、微分的关系, 基本的不定积分公式.
- 计算不定积分的基本方法: 分段法, 线性性, 降低三角函数的幂等, 换元法, 分部积分法, 有理函数的不定积分 (有理函数标准分解), 三角有理函数的不定积分, 两类特殊的无理函数的不定积分.

- 计算定积分的基本方法: 分段法, 线性性, 降低三角函数的幂等, 换元法, 分部积分法, 有理函数的定积分 (有理函数的标准分解), 三角有理函数的定积分, 两特殊无理函数的定积分, 定积分的对称性 (奇偶性), 周期的连续函数的定积分.
- 定积分与数列极限: 某些复杂数列极限可以转换成 Riemann 和, 再利用定积分来计算.

- 直角坐标系下由曲线所围成的平面区域的面积, 极坐标系下平面区域的面积.
- 光滑曲线的弧长.
- 曲线的曲率与曲率半径.
- 由平面截面积求立体体积, 旋转体的体积, 平面曲线绕轴旋转所生成的曲面的侧面积 (涉及弧长微元), 平面光滑曲线的质心.

2. 第 6 章 广义积分

- 各种形式的广义积分的定义, 奇点.
- 广义积分的性质: 与定积分的完全类似.
- 广义积分的计算: 原函数, 定积分的计算.
- 敛散性: Cauchy 准则, 比较法则 (绝对收敛), Abel-Dirichlet 准则 (变号积分, 条件收敛).
- 重要的比较函数: $\frac{1}{x^p}$, $\frac{\log x}{x^p}$.
- 绝对收敛与条件收敛: 二者关系.
- Γ 函数与 Beta 函数: 递推, 余元, 二者关系.

3. 第 7 章 常微分方程

- 常微分方程的基本概念.
- 一阶方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ 的解法.
- 分离变量法: 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ 的求解.
- 可转化成一阶线性方程的一阶方程:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c)$, (2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(\frac{y}{x})$,

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, (4) Bernoulli 方程.

- 可降阶的高阶常微分方程:

  (1) $y^{(n)} = f(x)$,

  (2) $y^{(n)} = F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n-1)})\ (k \geqslant 1)$,

  (3) $F(y, y', y'') = 0$.

- n 阶线性常微分方程: 初值问题的解存在且唯一, 齐次方程解集为 n 维线性空间, 基本解组, Wronsky 行列式的定义、性质及由此导出的线性无关解的刻画, 线性无关的函数所满足的齐次方程, 非齐次方程通解的结构.

- 二、三阶线性常系数微分方程, Euler 方程.
- 二阶线性变系数微分方程的求解: 利用常数变易法由已知解构造新解.
- 一阶线性常微分方程组: 初值问题的解存在且唯一, 由 n 个方程, n 个未知函数组成的一阶线性齐次常微分方程组的解集为 n 维线性空间, 齐次方程组的基解矩阵及其性质, Wronsky 行列式的定义、性质及由此导出的对线性无关解的刻画, 非齐次方程组通解的结构以及借助基解矩阵的表达式.

- 高阶线性常微分方程可以转化成特殊的一阶线性常微分方程组.
- 一阶线性常系数齐次常微分方程组:
  特征方程, 特征根, 用待定系数法求解.
- 一阶线性常系数非齐次常微分方程组:
  利用基解矩阵, 或者将方程组转化成常系数常微分方程 (主要针对两未知元的方程组).

祝大家圣诞节快乐!