第八次习题课

1　课堂内容复习

1. 不定积分的概念

(1) 定义: 将定义在区间上的函数f的原函数的一般表达式称为f的不定积分, 记作$\int f(x)dx$. 这是一个以x为自变量的函数.

(2) 不定积分与定积分的关系: 若$f \in C[a,b]$, 则$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$, 这里$C \in \mathbb{R}$为任意的常数.

(3) 不定积分与导数、微分的关系: 若$\int f(x)dx = F(x) + C$, 则

$$F'(x) = f(x), \quad \Big(\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big)' = F'(x) = f(x), \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}\Big(\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C,$$

其中$C \in \mathbb{R}$为任意的常数.

2. 不定积分的计算

(1) 基本的不定积分公式: 这里$C \in \mathbb{R}$为任意的常数,

(a) $\int 1dx = x + C$;

(b) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$, $\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$;

(c) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $\int e^x dx = e^x + C$;

(d) $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$;

(e) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$;

(f) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$;

(g) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

(h) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$;

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$;

(j) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$;

(k) $\int \sec x dx = \log|\sec x + \tan x| + C$;

(l) $\int \csc x dx = \log|\csc x - \cot x| + C$.

(2) 计算不定积分的基本方法:

(a) 线性性: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

(b) 分段计算.

(c) 降低三角函数的幂次.

(d) 变量替换:

1) 第一换元积分法 (凑微分): 若$F'(y) = f(y)$, 则

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(u(x)) du(x) = F(u(x)) + C.$$

2) 第二换元积分法: 若$f(x(t))x'(t) = F'(t)$, 则

$$\int f(x) dx \overset{x=x(t)}{=} \int f(x(t)) x'(t) dt = F(t) + C \overset{t=t(x)}{=} F(t(x)) + C.$$

3) 三角变换: 下面假设 $a > 0$.

(α) 若不定积分中出现$\sqrt{a^2 - x^2}$, 作变换$x = a\sin t$ ($|t| \leqslant \frac{\pi}{2}$).

(β) 若不定积分中出现$\sqrt{x^2 + a^2}$, 作变换$x = a\tan t$ ($|t| < \frac{\pi}{2}$).

(γ) 若不定积分中出现$\sqrt{x^2 - a^2}$, 分情况讨论:

当$x > a$时, 作变换$x = a\sec t$ ($0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$);

当$x < -a$时, 作变换$x = -a\sec t$ ($0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$).

(e) 分部积分及其应用: $\int u dv = uv - \int v du$.

1) $\int P(x)(\ln x)^m dx$,

2) $\int P(x) e^{ax} dx$,

3) $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int e^{ax} \sin bx dx$,

其中$P(x)$为多项式, $m \geqslant 1$为整数, 而$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(f)有理函数的不定积分:

1) 多项式的因式分解: 设$Q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$为实系数$n$次多项式, 其中$a_n \neq 0$. 由代数基本定理可得如下素因子分解:

$$Q(x) = a_n \prod_{j=1}^{s} (x - \alpha_j)^{l_j} \cdot \prod_{k=1}^{t} (x^2 + p_k x + q_k)^{m_k},$$

这里$\alpha_j \in \mathbb{R}$互异, (p_k, q_k)互异, $p_k^2 - 4q_k < 0$, 且$\sum\limits_{j=1}^{s} l_j + 2\sum\limits_{k=1}^{t} m_k = n$.

2) 有理分式的标准分解: 有理分式$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$总可以表示成:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \sum_{j=1}^{s} \sum_{u=1}^{l_j} \frac{a_{j,u}}{(x - \alpha_j)^u} + \sum_{k=1}^{t} \sum_{v=1}^{m_k} \frac{b_{k,v} x + c_{k,v}}{(x^2 + p_k x + q_k)^v},$$

其中$T(x)$为多项式, $a_{j,u}, b_{k,v}, c_{k,v} \in \mathbb{R}$为常数.

3) 求标准分解的方法: 待定系数, 带入特殊值.

4) 有理分式的不定积分的分类: 这里$a > 0$, 而$m \geqslant 2$为整数,

(α) $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \log|x-\alpha| + C$,

(β) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}} + C$,

(γ) $\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\log(x^2+a^2) + C$,

(δ) $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$,

(ϵ) $\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)}\frac{1}{(x^2+a^2)^{m-1}} + C$,

(ε) $I_{m+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m+1}} = \frac{x}{2a^2m(x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2a^2m}I_m$.

(g) 三角有理函数的不定积分:

设$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, 其中$P, Q$是以$u, v$为变量的多项式.

1) 一般方法: 利用万能公式可得

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

2) 被积函数为$\sin x$的奇函数(将$\sin x$变换成$-\sin x$后会出现一个负号):

$$\int R(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx \overset{t=\cos x}{=} -\int R(1-t^2, t)dt.$$

3) 被积函数为关于$\cos x$的奇函数

$$\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx \overset{t=\sin x}{=} \int R(t, 1-t^2)dt.$$

4) 将$\sin x, \cos x$变换成$-\sin x, -\cos x$后不变:

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx \overset{t=\tan x}{=} \int R\Big(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\Big)\frac{dt}{1+t^2}.$$

(h) 两类无理函数的不定积分: 考虑不定积分$\int R(x, y(x))dx$, 其中$R(x,y)$是关于变量x, y的有理函数, 而$y = y(x)$为下述无理函数.

1) 若$y(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 且$n \geqslant 1$为整数, $ad - bc \neq 0$, 则

$$\int R\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)dx \overset{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}{=} \int R\Big(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\Big)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt.$$

2) 若$y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$, 且$a \neq 0$: 将ax^2+bx+c配方, 再作三角变换.

3. 定积分的计算

(1) 利用计算不定积分的方法: 分段, 线性性, 降低三角函数的幂, 换元法, 分部积分法, 有理函数的定积分(有理函数标准分解), 三角有理函数(转化为有理函数)的定积分, 两特殊无理函数的定积分.

(2) 定积分的换元公式: 若$f\in C[a,b]$, 而$\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$连续可导, 则

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

注: 若$f\in R[a,b]$而$\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$连续可导且严格单调, 上述公式依然成立.

(3) 分部积分公式: 若$u,v\in C^{(1)}[a,b]$, 则$\int_a^b u(x)dv(x)=uv|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$.

(4) 对称性: 设$a>0$, 而$f\in R[-a,a]$.

(a) 若f为奇函数, 则$\int_{-a}^a f(x)dx=0$.

(b) 若f为偶函数, 则$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

(5) 周期性: 若$f\in R(\mathbb{R})$以$T>0$为周期, 则$\forall a\in\mathbb{R}$, 均有$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

(6) 带积分余项的Taylor公式: 设$n\geqslant 1$为整数. 若$f\in C^{(n+1)}[a,b]$, 而$x_0\in[a,b]$, 则$\forall x\in[a,b]$, 我们有

$$f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x(x-u)^n f^{(n+1)}(u)du.$$

通常称$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x(x-u)^n f^{(n+1)}(u)du$为积分余项. 令$u=x_0+t(x-x_0)$, 则

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+t(x-x_0))dt.$$

(a) Cauchy余项: $\exists\theta\in(0,1)$使$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$.

(b) Lagrange 余项: $\exists\theta\in[0,1]$使得$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$.

2 原函数概念

题2.1 若$\int f(x)dx=\frac{\sin x}{1+x\sin x}+C$, 求$\int f(x)f'(x)dx$.

证明2.2 由题设可知 $f(x)=\left(\frac{\sin x}{1+x\sin x}\right)'=\frac{\cos x-\sin^2 x}{(1+x\sin x)^2}$, 于是

$$\begin{aligned}\int f(x)f'(x)dx &= \frac{1}{2}\int d\big(f(x)\big)^2=\frac{1}{2}\big(f(x)\big)^2+C\\ &= \frac{(\cos x-\sin^2 x)^2}{2(1+x\sin x)^4}+C.\end{aligned}$$

3 不定积分的计算

题3.1 计算下列积分: $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, 其中$|x|>1$.

证明3.2 我们采取凑微分法.

当$x>1$时, 我们有

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \\ &= -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \\ &= -\arctan\frac{1}{x}+C.\end{aligned}$$

当$x<-1$时, 我们有

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= -\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \\ &= \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \\ &= \arcsin\frac{1}{x}+C.\end{aligned}$$

题3.3 计算下列积分: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, 其中$x>0$.

证明3.4 我们采取换元法.

令$x=t^6$, 其中$t>0$. 注意到$t=\sqrt[6]{x}, \sqrt{x}=t^3, \sqrt[3]{x}=t^2, dx=6t^5dt$, 我们有

$$\begin{aligned}I=&\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{1+t} \\ =&6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}dt=6\int(t^2-t+1)dt-6\int\frac{dt}{1+t} \\ =&2t^3-3t^2+6t-\log|1+t|+C \\ =&2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\log|1+\sqrt[6]{x}|+C.\end{aligned}$$

题3.5 计算下列积分: $\int x^n e^{-x}dx$, 其中$n\in\mathbb{Z}_+$.

证明3.6 我们采取分部积分法.

记$I_n=\int x^ne^{-x}dx$, 则由分部积分有

$$\begin{aligned}I_n &= \int x^b e^{-x}dx=\int x^n d(e^{-x}) \\ &= -x^ne^{-x}+n\int x^{n-1}e^{-x}dx \\ &= -x^ne^{-x}+nI_{n-1}.\end{aligned}$$

当然我们可积按上述递推公式直接计算出结论. 当然也可以按下计算算出结果,

$$
\begin{aligned}
I_n =& -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1} d(-e^{-x} \\
=& -x^n e^{-x} - nx^{n-1}e^{-x} + n(n-1)\int x^{n-2}e^{-x}dx \\
=& -x^n e^{-x} - nx^{n-1}e^{-x} - n(n-1)x^{n-2}e^{-x} + n(n-1)(n-2)\int x^{n-3}e^{-x}dx \\
=& \cdots \\
=& -e^{-x}(x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} + \\
& \cdots + n(n-1)\cdots 3x^2) + n!\int xe^{-x}dx \\
=& -e^{-x}\cdot(x^n + nx^{n-1} + \cdots + n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} + \cdots + n!x + n!) + C
\end{aligned}
$$

题3.7 计算下列有理式的积分:

1. $\int \frac{dx}{1+x^4}$;

2. $\int \frac{x^2dx}{1+x^4}$.

证明3.8 我们先来用标准的有理积分法来算(1). 待定系数A, B, a, b如下,

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{1+x^2+\sqrt{2}x} + \frac{Ax+B}{1+x^2-\sqrt{2}x},$$

化简得

$$(Ax+B)(1+x^2+\sqrt{2}x) + (ax+b)(1+x^2-\sqrt{2}x) = 1,$$

然后比较各项系数得

- x^3之系数: $A+a=0$;

- x^2之系数: $\sqrt{2}A+B+b-\sqrt{2}a=0$;

- x之系数: $A+\sqrt{2}B+a-\sqrt{2}b=0$;

- 常数项之系数: $B+b=0$.

我们解得

$$b = B = \frac{1}{2}, a = -A = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

此即得到

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right). \tag{3.1}$$

然后我们计算不定积分如下:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{1+x^4} \\
=&\int \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) dx \\
=&\int \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{x})^2+\frac{1}{x}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} \right) dx \\
=&\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{d(x^2+\sqrt{2}x+1)}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{d(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^2-\sqrt{2}x+1} \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}x+1)}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}x-1)}{(\sqrt{2}x-1)^2+1} \\
=&\frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x-1) + C.
\end{aligned}
$$

下面我们采用配对法来同时计算(1), (2)中的积分. 此时计算量大大的减少了. 我们记

$$I = \int \frac{dx}{1+x^4} \quad J = \int \frac{x^2 dx}{1+x^4}.$$

此处的关键是下列等式

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} \quad \left(x-\frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

具体操作如下,

$$
\begin{aligned}
J - I = &\int \frac{(x^2-1)dx}{1+x^4} = \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right) dx}{x^2+\frac{1}{x^2}} \\
=&\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} \\
=&\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{(x+\frac{1}{x})-\sqrt{2}} - \frac{1}{(x+\frac{1}{x})+\sqrt{2}} \right) d\left(x+\frac{1}{x}\right) \\
=&\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right| + C.
\end{aligned}
$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
J + I = &\int \frac{(x^2+1)dx}{1+x^4} = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x^2+x^{-2}} \\
=&\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} \\
=&\frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{d\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \\
=&\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + C.
\end{aligned}
$$

从而联立解得

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C$$

以及

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C$$

题3.9 计算下列三角式的不定积分:

1. $\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx$, 其中$0<r<1$, $|x|<\pi$.

2. $\int \frac{dx}{1+\epsilon\cos x}$, 其中$\epsilon>0$.

证明3.10 此题是三角式积分的标准做法, 即使用万能公式. 但是第二问需要讨论参数ϵ. (1)令$t=\tan\frac{x}{2}, -\pi<x<\pi$, 此时$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. 从而

$$\begin{aligned}\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx =& \int \frac{2(1-r^2)dt}{(1+r)^2t^2+(1-r)^2} \\ =& 2\frac{1-r^2}{(1-r)^2}\int \frac{dt}{\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)^2+1} \\ =& 2\int \frac{d\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)}{\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)^2+1} \\ =& 2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)+C \\ =& 2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\right)+C.\end{aligned}$$

(2)令$t=\tan\frac{x}{2}$, $-\pi<x<\pi$. 则$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. 我们有

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\epsilon\cos x} =& \int \frac{1}{1+\epsilon\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} \\ =& \int \frac{2dt}{(1+t^2)+\epsilon(1-t^2)} \\ =& \int \frac{2dt}{(1-\epsilon)t^2+(1+\epsilon)}.\end{aligned}$$

下面我们根据ϵ的取值, 分情况讨论:

a)当$\epsilon=1$时, 我们有原积分等于$t+C=\tan\frac{x}{2}+C$.

b)当$0<\epsilon<1$时, 原积分继续计算如下

$$\begin{aligned}\int \frac{2dt}{(1-\epsilon)t^2+(1+\epsilon)} =& \frac{2}{1+\epsilon}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}t\right)^2+1} \\ =& \frac{2}{1+\epsilon}\cdot\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}t\right)}{\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}t\right)^2+1} \\ =& \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\cdot\tan\frac{x}{2}\right)+C.\end{aligned}$$

c)当$\epsilon > 1$时, 原积分继续计算如下

$$\begin{aligned}\int \frac{2dt}{(1-\epsilon)t^2+(1+\epsilon)} =& \int \frac{2dt}{(1+\epsilon)-(\epsilon-1)t^2} \\ =& \frac{2}{1+\epsilon}\sqrt{\frac{\epsilon+1}{\epsilon-1}}\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}}t\right)}{1-\left(\sqrt{\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}}t\right)^2} \\ =& \frac{2}{\sqrt{\epsilon^2-1}}\int \frac{du}{1-u^2} \qquad u=\sqrt{\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}}t.\end{aligned}$$

注意到$\frac{2}{1-u^2}=\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1-u}$, 从而上式等于

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon^2-1}}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{\epsilon^2-1}}\log\left|\frac{\sqrt{\epsilon-1}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\epsilon+1}}{\sqrt{\epsilon-1}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\epsilon+1}}\right|+C$$

题3.11 计算下列无理式的不定积分:

1. $\int \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}dx, (x>0)$;
2. $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(x-2)^2}$;
3. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+5}}$;

证明3.12 (1)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}dx =& \int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2}d(x^2) \\ (令t=x^2) =& \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{2t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{(1+t^2)}{t\sqrt{1+t^2}}dt \\ =& \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} \\ =& \frac{1}{4}\int \frac{d(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{t^2}\right)}} \\ =& \frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)+C \\ =& \frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right)+C.\end{aligned}$$

(2)令$t=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$, 则$t^3=\frac{2-x}{2+x}$, $x=\frac{2(1-t^3)}{1+t^3}$, $dx=\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$. 此时我们有

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2} =& -\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^3} \\ =& \frac{3}{8}\frac{1}{t^2}+C \\ =& \frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{(2+x)^2}{(2-x)^2}}+C.\end{aligned}$$

(3)令$x+2=\tan t$, 其中$|t|<\frac{\pi}{2}$. 则$\sqrt{(2+x)^2+1}=\frac{1}{\cos t}$, $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$. 此时我们有

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+5}} &= \int \frac{dt}{\sin t-\cos t}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sin(t-\frac{\pi}{4})}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{1}{\sin(t-\frac{\pi}{4})}-\frac{\cos(t-\frac{\pi}{4})}{\sin(t-\frac{\pi}{4})}\right|+C\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan t-1}-\frac{1+\tan t}{\tan t-1}\right|+C\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\sqrt{\frac{2x^2+8x+10}{(x+1)^2}}-\frac{x+3}{x+1}\right|+C.\end{aligned}$$

题3.13 设函数$f(x)$二次连续可导且$f'(x)\neq 0$, 求解下列不定积分

$$\int\left(\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f(x)^2\cdot f''(x)}{(f'(x))^3}\right)dx.$$

证明3.14 本题就是分部积分法.

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{f}{f'}-\frac{f^2f''}{(f')^3}\right)dx &= \int\frac{f}{f'}dx-\int\frac{f^2d(f')}{(f')^3}\\ &=\int\frac{f}{f'}dx+\frac{1}{2}\int f^2d\left(\frac{1}{(f')^2}\right)\\ &=\int\frac{f}{f'}dx+\frac{1}{2}\frac{f^2}{(f')^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2ff'}{(f')^2}dx\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{(f(x))^2}{(f'(x))^2}.\end{aligned}$$

4 定积分的计算

题4.1 计算下列定积分:

$$I=\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$$

其中$a>0$.

证明4.2 此题考查定积分的换元法.

设$x=a\sin\theta$, 其中$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, 此时注意到$dx=a\cos\theta d\theta$, 我们得到

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta.$$

再令$\psi=\frac{\pi}{2}-\theta$, 我们得到

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\psi}{\cos\psi+\sin\psi}d\psi.$$

从而由$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1d\theta=\frac{\pi}{2}$得到$I=\frac{\pi}{4}$.

题4.3 设$n \in \mathbb{Z}_+$, 试计算下列定积分:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}.$$

证明4.4 令$t = \sqrt[n]{1+x^n}$, 其中$0 \le x \le 1$, 则$x = \sqrt[n]{t^n - 1}$, $dx = (t^n - 1)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{n-1} dt$, 注意到$x = 0$时, $t = 1$, $x = 1$时, $t = \sqrt[n]{2}$, 我们得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}} &= \int_1^{\sqrt[n]{2}} \frac{(t^n - 1)^{\frac{1}{n}-1}}{t^2} dt \\
&= \int_1^{\sqrt[n]{2}} \frac{(1 - t^{-n})^{\frac{1}{n}-1}}{t^{n+1}} dt \\
&= \frac{1}{n} \int_1^{\sqrt[n]{2}} (1 - t^{-n})^{\frac{1}{n}-1} d(1 - t^{-n}) \\
&= (1 - t^{-n})^{\frac{1}{n}} \Big|_1^{\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}.
\end{aligned}$$

题4.5 设$f(x)$是周期为T的连续函数. 求证:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx.$$

证明4.6 对于任意的$x > 0$, 我们知道存在唯一的$n \in \mathbb{Z}_+$, 使得$x = nT + h$, 其中$0 \le h < T$, 且$x \to +\infty$当且仅当$n \to +\infty$. 此时由定积分的换元法知道

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt &= \frac{\int_0^{nT+h} f(t)dt}{nT + h} \\
&= \frac{\int_0^{nT} f(t)dt + \int_{nT}^{nT+h} f(t)dt}{nT + h} \\
&= \frac{n\int_0^{T} f(t)dt + \int_0^{h} f(t)dt}{nT + h} \to \quad \int_0^T f(t)dt = \int_0^T f(x)dx \quad n \to +\infty.
\end{aligned}$$

得证.

题4.7 设$k, n \in \mathbb{Z}_+$, 求证:

1. $\int_0^\pi \cos nx \cos kx dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$;

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \cos^n x dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

证明4.8 第一问是标准的, 此处从略. 但是对于第二问, 我们需要将第一问的积分通过换元法变到$[0, \frac{\pi}{2}]$上, 此处直接计算可得

$$\int_0^\pi \cos nx \cos kx dx = (1 + (-1)^{k+n}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \cos kx dx \tag{4.1}$$

对于第二问, 核心思路就是将$\cos^n x$写成$\cos ix, i \in \mathbb{Z}$的线性组合, 然后结合第一问, 我们只需要算出$\cos nx$的系数即可, 但是我们需要注意到式子4.1. 算出线性组合系数的核心思路来自于下面的公式

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n \qquad i = \sqrt{-1}.$$

我们运用二项式公式展开并且取出实部得到

$$\cos nx = \cos^n x + C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x + \cdots .$$

我们通过$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$带入后可以收集到

$$\cos nx = 2^{n-1} \cos^n x + \text{'}\cos x\text{的小于}n\text{的低次项'},$$

其中此处我们运用了$\sum_{i=0,i \text{ 是偶数}}^n C_n^i = 2^{n-1}$. 我们将$k$跑遍1到$n$时上面的$\cos kx$的表达式收集起来, 然后反解出$\cos^n x$便可以得到$\cos^n x$的满足我们需要的线性组合了, 此时我们可以得到

$$\cos^n x = 2^{-(n-1)} \cos nx + b_{n-2} \cos(n-2)x + \cdots \tag{4.2}$$

其中, 我们只需要$\cos kx$的满足$k \equiv n \mod 2$的线性组合. 然后我们注意到式子(4.1), 便得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \cos^n x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos nx \cos^n x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{2^{n-1}} \cos nx \cos nx dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

题4.9 设$x > 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, 求证

$$\int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta)^{n+1}}.$$

证明4.10 非常规换元. 我们对左边的积分进行换元.

令$\cos\varphi$, 其中$\varphi \in [0, \pi]$, 满足

$$(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)(x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta) = 1. \tag{4.3}$$

上述换元是可行的, 原因如下, 我们从(4.3)中解得

$$\cos\varphi = \frac{-\sqrt{x^2-1} + x\cos\theta}{x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta}.$$

通过求导可以证明上式中右端的关于$\cos\theta$的函数是递增的, 且取值范围正好是$[-1, 1]$, 从而我们令$\cos\varphi$为右端的函数即可. 此时, 当$\theta = 0$ 时, $\varphi = 0$; 当$\theta = \pi$时, $\varphi = \pi$.

再由$\varphi = \arccos\left(\frac{-\sqrt{x^2-1}+x\cos\theta}{x-\sqrt{x^2-1}\cos\theta}\right)$, 我们得到

$$d\varphi = \frac{d\theta}{(x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta)}.$$

由此我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi &= \int_0^{\pi} \frac{1}{(x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n} \cdot \frac{d\theta}{(x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta)} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta)^{n+1}}.\end{aligned}$$

题4.11 设

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

请计算定积分

$$I(m,n) = \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx.$$

证明4.12 此题考查定积分的分部积分法以及$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$的计算.

我们记$u_i(x) = \frac{d^i}{dx^i}((x^2-1)^m)$, $v_j(x) = \frac{d^j}{dx^j}((x^2-1)^n)$, 则我们计算$I(m,n)$如下:

当$m \neq n$时, 不妨设$m > n$, 则

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 P_m P_n dx =& \frac{1}{2^n n! 2^m m!} \int_{-1}^1 v_n(x) d(u_{m-1}(x)) \\
=& \frac{-1}{2^m m! 2^n n!} \int_{-1}^1 u_{m-1} v_{n+1} dx \\
=& \cdots \\
=& \frac{(-1)^n}{2^m m! 2^n n!} \int_{-1}^1 u_{m-n}(x) v_{2n}(x) dx \\
=& \frac{(-1)^{n+1}}{2^m m! 2^n n!} \int_{-1}^1 u_{m-(n+1)}(x) v_{2n+1}(x) dx.
\end{aligned}$$

注意到$(x^2-1)^n$是一个$2n$次多项式, 从而$v_{2n+1} = \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}((1+x^2)^n) = 0$, 从而得到$I(m,n) = 0$, 如果$m \neq n$.

当$m = n$时, 此时有$u_i = v_i$, 我们计算如下

$$\begin{aligned}
I(n,n) =& \frac{1}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^1 u_n(x) u_n(x) dx \\
=& \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \cdot u_{2n}(x) dx \\
=& \frac{(2n)!(-1)^n}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx \\
=& 2\frac{(2n)!(-1)^n}{(2^n n!)^2} \int_0^1 (x^2-1)^n dx \\
(\text{令} x = \sin\theta,\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) =& 2\frac{(2n)!(-1)^n}{(2^n n!)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \cos^{2n+1}\theta d\theta \\
=& 2\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta d\theta \\
=& \frac{2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

其中最后一个等号我们用到了结论

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

综上, 我们得到$I(m,n) = \frac{2}{2n+1}$如果$m = n$, $I(m,n) = 0$如果$m \neq n$.

5 综合题

题5.1 设函数$f(x) \in C^{(1)}[1, +\infty)$, $f(1) = 1$, 且当$x \geq 1$时, 有$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$. 证明: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$存在, 且$\lim_{x\to+\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}$.

证明5.2 由Newton-Leibniz公式以及$f' \in C[1, +\infty)$, 我们有$\forall x \geq 1$,

$$f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t) dt = \int_1^x \frac{dt}{t^2 + f(t)^2}.$$

即$f(x)=1+\int_1^x\frac{dt}{t^2+f(t)^2}$. 注意到$f'(x)=\frac{1}{x^2+f(x)^2}>0,\forall x\geq 1$, 由函数的单调性知$f(x)\geq f(1)=1,\forall x\geq 1$. 同时我们也得到$f(x)$在$x\geq 1$是严格单调递增, 且

$$1\leq f(x)\leq 1+\int_1^x\frac{dt}{t^2+f(t)^2}\leq 1+\int_1^x\frac{dt}{1+t^2}=1+\arctan x-\frac{\pi}{2}<1+\frac{\pi}{4}.$$

即$\sup_{x\geq 1}f(x)$存在, 且$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sup_{x\geq 1}f(x)$存在, 第一个结论证毕. 第二个结论来自于取下不等式的极限即得

$$f(x)<1+\frac{\pi}{4}.$$

题5.3 设$n\in\mathbb{N}$, 而函数$f\in C[a,b]$使得$\int_a^b x^k f(x)dx=0\ (0\leqslant k\leqslant n)$, 求证: 函数$f$在$(a,b)$内至少有$n+1$个不同的零点.

证明5.4 (解法一)

对$n\geqslant 0$应用数学归纳法来证明所要结论.

当$n=0$时, 因$f\in C[a,b]$且$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则由积分第一中值定理可知, $\exists\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)(b-a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 故所要结论成立.

下面假设所证结论对任意$n\geqslant 0$成立. $\forall x\in[a,b]$, 定义$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则$F\in C^{(1)}[a,b]$. 若$\int_a^b x^k f(x)dx=0\ (0\leqslant k\leqslant n+1)$, 则$F(a)=F(b)=0$, 并且$\forall k\in\mathbb{N}\ (0\leqslant k\leqslant n)$, 我们均有

$$\int_a^b x^k F(x)dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}F(x)\Big|_a^b-\frac{1}{k+1}\int_a^b x^{k+1}f(x)dx=0.$$

由归纳假设条件可知F在(a,b)内至少有$n+1$个不同零点, 将它们按递增顺序记作$x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}$. 令$x_0=a$, $x_{n+2}=b$. 则$\forall k\in\mathbb{N}\ (0\leqslant k\leqslant n+1)$, 由于$F$在$[x_k,x_{k+1}]$上连续可导且$F(x_k)=F(x_{k+1})=0$, 则$\exists\xi_k\in(x_k,x_{k+1})$使得$f(\xi_k)=F'(\xi_k)=0$, 因此$f$在$(a,b)$内至少有$n+2$个不同的零点.

于是由数学归纳法可知所证结论对所有$n\geqslant 0$均成立.

(解法二) 采取反证法. 如果$f(x)$在(a,b)上的零点个数至多是n, 设

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_\ell<b\quad \ell\leq n,$$

是具有在该零点的左, 右邻域内$f(x)$符号相反性质的零点.

如果$\ell=0$, 表示$f(x)$在(a,b)上不变号, 则由$\int_a^b f(x)dx=0$及$f\in C[a,b]$知, $f(x)\equiv 0$. 显然矛盾于$f(x)$只有至多n个零点.

下面假设$\ell>0$, 且不妨设$f(x)>0,\forall x\in(a,x_1)$. 下面我们构造多项式

$$p(x):=(x_1-x)(x_2-x)\cdots(x_\ell-x),$$

则直接计算得到

$$f(x)p(x)\geq 0\quad\forall x\in(a,b).$$

且函数$f(x)p(x)$不恒等于0. 但是按照题设以及定积分的线性性, 我们有

$$\int_a^b f(x)p(x)dx=0.$$

从而注意到$fp\in C[a,b]$不恒等于0且非负, 故必有$f(x)p(x)\equiv 0$, 进一步$f(x)\equiv 0$. 此与f至多有n个零点矛盾.

注记5.5 此处解法一中，我们使用的积分第一中值定理的形式如下：若$f \in R[a,b]$在(a,b)上连续，则$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

题5.6 设$P_n(x)$为$n \geq 1$次多项式，$[a,b]$是任意一个闭区间. 证明:

$$\int_a^b |P_n'(x)|dx \leq 2n \max\{|P_n(x)| : a \leq x \leq b\}.$$

证明5.7 设

$$a < x_1 < \cdots < x_\ell < b, \quad \ell \leq n-1,$$

是具有在该零点的左，右邻域内$P_n'(x)$符号相反性质的零点. 我们不妨设$P_n'(x) > 0, \forall x \in (a, x_1)$. 此时我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b |P_n'(x)|dx =& \int_a^{x_1} P_n'(t)dt - \int_{x_1}^{x_2} P_n'(t)dt + \int_{x_2}^{x_3} P_n'(t)dt + \cdots + (-1)^{s(x_\ell)-1} \int_{x_|ell}^b P_n'(t)dt \\ =&(P_n(x_1) - P_n(a)) + (P_n(x_1) - P_n(x_2)) + \cdots + (-1)^{s(x_\ell)}(P_n(x_\ell) - P_n(b)) \\ =& - P_n(a) + (-1)^{s(x_\ell)-1} P_n(b) + \sum_{i=1}^{\ell} 2(-1)^{s(x_i)} P_n(x_i).\end{aligned}$$

其中，$s(x_k) = 1$或者0，如果$P_n'(x)$在(x_{k-1}, x_k)为负或者正.

从而，我们得到

$$\begin{aligned}\int_a^b |P_n'(x)|dx =& \left| -P_n(a) + (-1)^{s(x_\ell)-1} P_n(b) + \sum_{i=1}^{\ell} 2(-1)^{s(x_i)} P_n(x_i) \right| \\ \leq& 2(\ell+1) \max_{a \leq x \leq b} |P_n(x)| \\ \leq& 2n \max_{a \leq x \leq b} |P_n(x)|.\end{aligned}$$