第 8 次作业题题

1. 计算下列曲线积分:

(1) $\displaystyle\int_L (x+y)\,\mathrm{d}\ell$, 其中 L 是以 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形的边;

(2) $\displaystyle\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\ell$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=2x$.

解: (1) 由题设可知

$$\int_L (x+y)\,\mathrm{d}\ell = \int_{\overline{OA}} (x+y)\,\mathrm{d}\ell + \int_{\overline{AB}} (x+y)\,\mathrm{d}\ell + \int_{\overline{BO}} (x+y)\,\mathrm{d}\ell,$$

其中 $\overline{OA}: y=0\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, $\overline{AB}: y=1-x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, $\overline{BO}: x=0\ (0\leqslant y\leqslant 1)$. 我们由此立刻可得

$$\begin{aligned}\int_L (x+y)\,\mathrm{d}\ell &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \sqrt{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 y\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \sqrt{2}x\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 1+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(2) **方法 1.** 圆周 L 的在极坐标系下的方程为 $\rho = 2\cos\varphi\ (-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$, 由此我们立刻可得

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\ell = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho(\varphi)\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 8.$$

方法 2. 圆周 L 在第一象限的方程为 $y=\sqrt{2x-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 2)$, 从而由对称性立刻可得

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\ell = 2\int_0^2 \sqrt{2x}\sqrt{1+(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}})^2}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}} = 8.$$

2. 求曲线 $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$ 从原点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(3,3,2)$ 的弧长.

解: 由题设可知 $t\in[0,1]$, 从而所求弧长为

$$L = \int_0^1 \sqrt{3^2+(6t)^2+(6t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 3(1+2t^2)\,\mathrm{d}t = (3t+2t^3)\Big|_0^1 = 5.$$

3. 求柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于曲面 $z=a+\frac{x^2}{a}$ 与 $z=0$ 之间的面积.

解: 设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$, 其参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi, \\ y=a\sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi\in[0,2\pi].$$

于是所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_L \Big(a+\frac{x^2}{a}\Big)\,\mathrm{d}\ell=\int_0^{2\pi}(a+a\cos^2\varphi)a\,\mathrm{d}\varphi \\ &= a^2\Big(\varphi+\frac{1}{2}\Big(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big)\Big)\Big|_0^{2\pi}=3a^2\pi. \end{aligned}$$

4. 计算下列第一类曲面积分:

(1) $\iint\limits_S(x+y+z)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$;

(2) $\iint\limits_S\big(2x+\dfrac{4}{3}y+z\big)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 S 是平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分.

解: (1) 上半球面 S 的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\sin\theta\cos\varphi, \\ y=a\sin\theta\sin\varphi, \quad \Big(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\Big), \\ z=a\cos\theta \end{cases}$$

由此可得 $\sqrt{EG-F}=a^2\sin\theta$. 再利用对称性立刻可得

$$\begin{aligned} \iint\limits_S(x+y+z)\,\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_S z\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}}(a\cos\theta)a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= a^3\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi a^3\Big(\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi a^3. \end{aligned}$$

(2) 首先 $\iint\limits_S\big(2x+\dfrac{4}{3}y+z\big)\,\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_S\big(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}\big)\,\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_S\mathrm{d}\sigma=4|S|.$

方法 1. 由于 S 是一个三角形平面区域, 其法向量为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$, 该法向量与 z 轴的夹角 α 满足 $\cos\alpha=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{4})^2}}=\frac{3}{\sqrt{61}}$, 且该角也是三角形 S 与 xy 平面的夹角. 又因 S 在 xy 平面上的投影为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\leqslant 1$ $(x,y\geqslant 0)$, 并且该投影的面积等于 3, 于是我们有 $|S|=\frac{3}{\cos\alpha}=\sqrt{61}$, 进而可得

$$\iint\limits_S\Big(2x+\frac{4}{3}y+z\Big)\,\mathrm{d}\sigma=4\sqrt{61}.$$

方法 2. 设三角形 S 在 xy 平面上的投影为 D, 则 S 的方程为

$$z = 4 - 2x - \frac{4y}{3},\ (x, y) \in D.$$

其中 $D = \{(x, y) \mid x, y \geqslant 0, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leqslant 1\}$ 且 $|D| = 3$. 又 S 的面积微元为

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + \big(\frac{\partial z}{\partial x}\big)^2 + \big(\frac{\partial z}{\partial y}\big)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由此我们立刻可得

$$\iint\limits_S \big(2x + \frac{4}{3}y + z\big)\,\mathrm{d}\sigma = 4|S| = 4\iint\limits_D \frac{\sqrt{61}}{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\sqrt{61}.$$

5. 计算 $\displaystyle\int\limits_{L^+} \frac{x^2\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, 其中 L^+ 为星形线在第一象限的部分

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad \Big(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\Big),$$

其正向为从 $(0, a)$ 到 $(a, 0)$.

解: 由题设立刻可得

$$\begin{aligned}
\int\limits_{L^+} \frac{x^2\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(a\cos^3 t)^2\,\mathrm{d}(a\sin^3 t) - (a\sin^3 t)^2\,\mathrm{d}(a\cos^3 t)}{(a\cos^3 t)^{\frac{5}{3}} + (a\sin^3 t)^{\frac{5}{3}}} \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a^3((\cos^7 t)\sin^2 t + (\sin^7 t)\cos^2 t)}{a^{\frac{5}{3}}(\cos^5 t + \sin^5 t)}\,\mathrm{d}t \\
&= -3a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)\cos^2 t\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{4}a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{3}{8}a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{8}a^{\frac{4}{3}}\Big(t - \frac{1}{4}\sin 4t\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{3}{16}\pi a^{\frac{4}{3}}.
\end{aligned}$$

6. 计算下列第二类曲线积分:

(1) $\displaystyle\oint\limits_{L^+} \frac{(x+y)\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 逆时针为正向;

(2) $\displaystyle\oint\limits_{L^+} \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{|x| + |y|}$, 其中 L^+ 是以 $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ 为顶点的正方形, 其正方向为逆时针方向.

解: (1) **方法 1.** 圆周 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = a\sin\varphi, \end{cases} \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi),$$

该参数方程所给出的方向恰好为逆时针方向, 由此立刻可得

$$\begin{aligned}
&\oint\limits_{L^+}\frac{(x+y)\,\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\
=\;&\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}(a\cos\varphi+a\sin\varphi)\,\mathrm{d}(a\cos\varphi)+(a\sin\varphi-a\cos\varphi)\,\mathrm{d}(a\sin\varphi)\\
=\;&\int_0^{2\pi}\big(-(\cos\varphi+\sin\varphi)\sin\varphi+(\sin\varphi-\cos\varphi)\cos\varphi\big)\,\mathrm{d}\varphi\\
=\;&-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=-2\pi.
\end{aligned}$$

方法 2. $\forall(x,y)\in L$, 圆周在该点的单位切向量为 $\vec{\tau}^0(x,y)=(-\frac{y}{a},\frac{x}{a})$, 则

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{L^+}\frac{(x+y)\,\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} &= \frac{1}{a^2}\oint\limits_{L^+}(x+y)\,\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{a^2}\oint\limits_{L}(x+y,y-x)\cdot\frac{1}{a}(-y,x)\mathrm{d}\ell\\
&= -\frac{1}{a^3}\oint\limits_{L}(x^2+y^2)\mathrm{d}\ell\\
&= -\frac{1}{a}|L|\\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

(2) 令 $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, $C=(-1,0)$, $D=(0,-1)$, 则我们有

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{L^+}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|} &= \oint_{L(A)}^{(B)}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}+\oint_{L(B)}^{(C)}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}\\
&\quad+\oint_{L(C)}^{(D)}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}+\oint_{L(D)}^{(A)}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|},
\end{aligned}$$

其中我们有

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{BA}:\quad y=1-x\ (0\leqslant x\leqslant 1), &&\overrightarrow{CB}:\quad y=1+x\ (-1\leqslant x\leqslant 0),\\
&\overrightarrow{CD}:\quad y=-1-x\ (-1\leqslant x\leqslant 0), &&\overrightarrow{DA}:\quad y=-1+x\ (0\leqslant x\leqslant 1),
\end{aligned}$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{L^+}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|} &= -\int_0^1\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}(1-x)}{|x|+|1-x|}-\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}(1+x)}{|x|+|1+x|}\\
&\quad+\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}(-1-x)}{|x|+|-1-x|}+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}(-1+x)}{|x|+|-1+x|}\\
&= -\int_{-1}^0\frac{2\mathrm{d}x}{-x+(1+x)}+\int_0^1\frac{2\mathrm{d}x}{x+(1-x)}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

7. 平面力场 $\vec{F}$, 大小等于点 (x,y) 到坐标原点的距离, 方向指向坐标原点.

(1) 求单位质量的质点在 $\vec{F}$ 的作用下沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限的部分从点 $(a,0)$ 移动到点 $(0,b)$ 所做的功;

(2) 求单位质量的质点在 $\vec{F}$ 的作用下沿上述椭圆逆时针绕一圈时所做的功.

解: 由题设可知, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}$, 我们有 $\vec{F}(x,y)=-(x,y)$.

(1) 由第二类曲线积分的定义可知单位质量的质点在 $\vec{F}$ 的作用下沿椭圆 $L:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限的部分从点 $A(a,0)$ 移动到点 $B(0,b)$ 所做的功为

$$\begin{aligned}
W_1 &= \int_{L(A)}^{(B)}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}=-\int_{L(A)}^{(B)}\big(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y\big)\\
&\overset{\substack{x=a\cos t\\ y=b\sin t}}{=} -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(a\cos t\,\mathrm{d}(a\cos t)+b\sin t\,\mathrm{d}(b\sin t)\big)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-b^2)\sin t\cos t\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}(a^2-b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{4}(a^2-b^2)\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{1}{2}(a^2-b^2).
\end{aligned}$$

(2) 由第二类曲线积分的定义知单位质量的质点在 $\vec{F}$ 的作用下沿椭圆 L 逆时针绕一圈时所做的功所做的功为

$$\begin{aligned}
W_2 &= \oint_L\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}=-\oint_L\big(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y\big)\\
&\overset{\substack{x=a\cos t\\ y=b\sin t}}{=} -\int_0^{2\pi}\big(a\cos t\,\mathrm{d}(a\cos t)+b\sin t\,\mathrm{d}(b\sin t)\big)\\
&= \int_0^{2\pi}(a^2-b^2)(\sin t)\cos t\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}(a^2-b^2)\int_0^{2\pi}\sin 2t\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{4}(a^2-b^2)\cos 2t\Big|_0^{2\pi}=0.
\end{aligned}$$