微积分 A (2)

姚家燕

第 27 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

第 27 讲

综合练习 (续)

例 10. 若幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在点 $x=-1$ 处条件收敛, 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

证明: 若幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在点 $x=-1$ 处条件收敛, 则该幂级数的收敛半径等于 $R=2$, 从而其收敛开区间为 $(-1,3)$, 于是上述幂级数在点 $x=2$ 处绝对收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

例 11. 考虑函数项级数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$.

(1) 求上述函数项级数的收敛域 D;

(2) 求证: 上述函数项级数在 D 上非一致收敛;

(3) 求证: $f\in\mathscr{C}(D)$.

解: (1) $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x+\frac{1}{n}|^n}=|x|$, 于是由根值判别法可知原级数在 $|x|<1$ 时收敛, 而在 $|x|>1$ 时发散. 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1+\frac{1}{n})^n$ 发散 (奇数项和偶数项的极限不相等), 于是所求收敛域为 $(-1,1)$.

(2) 用反证法, 假设上述函数项级数在 $(-1,1)$ 上一致收敛, 则它的通项在 $(-1,1)$ 上一致趋于 0, 但 $\forall n \geqslant 1$, $\sup\limits_{x\in(-1,1)} |x+\dfrac{1}{n}|^n \geqslant 1$. 矛盾! 得证.

(3) 固定 $a\in(0,1)$. $\forall x\in[-a,a]$ 以及 $\forall n\geqslant 1$,

$$|(x+\tfrac{1}{n})^n| \leqslant (a+\tfrac{1}{n})^n.$$

由 (1) 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a+\frac{1}{n})^n$ 收敛, 则由 Weierstrass 判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛, 从而在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛, 故 $f\in\mathscr{C}(-1,1)$.

例 12. 设 $R \in (0, +\infty)$ 而幂级数 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在开区间 $(-R, R)$ 上收敛. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 收敛, 求证: $\displaystyle\int_0^R S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$.

证明: $\forall r \in (0, R)$, 均有 $\displaystyle\int_0^r S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$. 又 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 收敛, 则由 Abel 第二定理可得

$$\begin{aligned}\int_0^R S(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{r \to R^-} \int_0^r S(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}.\end{aligned}$$

例 13. 求 $f(x)=\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$ 在原点的幂级数展开.

解: 由题设立刻可得所求幂级数展开为

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{12-5x}{(1-x)(6+x)} \\
&= \frac{1}{1-x}+\frac{6}{6+x} \\
&= \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+\frac{x}{6}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n+(-1)^n}{6^n}x^n.
\end{aligned}
$$

例 14. 将 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 在点 $x_0=0$ 处展开成幂级数, 并求其收敛域.

解: $\forall t\in\mathbb{R}$, 我们有 $\sin t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, 于是由幂级数的性质可知, $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}. \end{aligned}$$

上述幂级数的收敛域为 $\mathbb{R}$.

例 15. 问函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ 在 $[-1,0]$ 上是否为一致收敛?

解: 方法 1. $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x \in [-1,0]$, 我们有

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x^k \right| = \left| \frac{x(1-x^n)}{1-x} \right| \leqslant 2.$$

又常数项数列 $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ 单调趋于 0, 则由 Dirichlet 判别准则可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ 在 $[-1,0]$ 上一致收敛.

方法 2. 由根值判别法知幂级数的收敛半径为

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1.$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 而由 Leibniz 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛, 于是题设幂级数的收敛域为$[-1,1)$, 从而由 Abel 第二定理可知上述幂级数在 $[-1,0]$ 上为一致收敛.

例 16. 寻求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}((\frac{x}{2})^n+(4x)^n)$ 的收敛半径与收敛域.

解: 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((\frac{x}{2})^n+(4x)^n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+4^n)x^n$, 故收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2^n}+4^n}{\frac{1}{2^{n+1}}+4^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n}{4^{n+1}}=\dfrac{1}{4}$.

又 $\{(\frac{1}{8})^n+1\}$, $\{(-\frac{1}{8})^n+(-1)^n\}$ 均不趋近于 0, 因此所求收敛域为 $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

例 17. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n!}$.

解: $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $e^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$. 对之求导得

$-e^{-x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n!} x^{n-1}$, 故 $-xe^{-x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n!} x^n$.

对之再求导则可得 $(x-1)e^{-x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n!} x^{n-1}$.

在上式中令 $x = 1$ 立刻可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n!} = 0$.

例 18. 求 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的收敛域与和函数.

解: $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{4n+1}}{4n+1}\right)^{\frac{1}{n}}=|x|^4$, 于是由根值判别法可知原级数在 $|x|<1$ 时为收敛, 而在 $|x|>1$ 时为发散, 又 $\frac{1}{4n+1}\sim\frac{1}{4n}\ (n\to\infty)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ 发散, 故原幂级数的收敛域为 $(-1,1)$. 从而由幂级数的性质可知, $\forall x\in(-1,1)$, 均有

$$f(x)=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{4n}\right)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}=\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x.$$

例 19. 问下列函数项级数是否在指定区间上一致收敛, 并给出理由:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \log(1+\frac{x}{n\log^2 n}),\ \ x\in(-a,a),\ \ a>0;$

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \log(1+\frac{x}{n\log^2 n}),\ x\in[1,+\infty);$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2},\ x\in(-\infty,+\infty);$

(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sin x},\ x\in(-\infty,+\infty);$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\sin\frac{1}{3^n x},\ x\in(0,+\infty);$

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n},\ x\in(-\infty,+\infty).$

解: (1) $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, 我们有 $\log(1+x) \leqslant x$, 并且

$$|\log(1-x)| = \log\left(1 + \frac{x}{1-x}\right) \leqslant \frac{x}{1-x} \leqslant 2x,$$

于是当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ 时, 我们有 $|\log(1+x)| \leqslant 2|x|$.
从而 $\forall x \in (-a, a)$ 以及 $\forall n \geqslant 2a+3$, 均有

$$|\log(1 + \frac{x}{n\log^2 n})| \leqslant \frac{2|x|}{n\log^2 n} \leqslant \frac{2a}{n\log^2 n}.$$

又 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\log^2 t} \overset{x=\log t}{=} \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{n\log^2 n}$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法可知原函数项级数在 $(-a, a)$ 上一致收敛.

(2) 用反证法证明函数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \log(1+\frac{x}{n\log^2 n})$ 在 $[1,+\infty)$ 上非一致收敛.

假设上述函数项级数在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛, 那么该函数项级数的通项在 $[1,+\infty)$ 上一致趋于 0. 但 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\sup_{x\geqslant 1}\left|\log(1+\frac{x}{n\log^2 n})\right| = +\infty.$$

矛盾! 故所证成立.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| \leqslant \frac{n}{2\sqrt{n^5}} = \frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法知原函数项级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(4) $\forall n \geqslant 2$ 以及 $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $u_n(x) = \frac{1}{n - \sin x}$, 则 u_n 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减并且 $|u_n| \leqslant \frac{1}{n-1}$, 从而函数列 $\{u_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致趋于 0, 由 Dirichlet 判别准则可知原函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

(5) 下面用反证法证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不为一致收敛.

假设上述函数项级数在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛,

则通项在 $(0, +\infty)$ 上一致趋于 0. 但 $\forall n \geqslant 1$,

$$\sup_{x>0} \left|2^n \sin \frac{1}{3^n x}\right| = 2^n.$$

矛盾! 故所证结论成立.

(6) 用反证法证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不为一致收敛. 假设上述函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 由于其通项在 $\mathbb{R}$ 上连续, 由极限与级数求和可交换性可知其和函数 S 也在 $\mathbb{R}$ 上连续. 但 $S(0)=0$, 而 $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 却有

$$S(x)=\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1,$$

因此 S 在点 $x=0$ 处间断, 矛盾! 故所证成立.

例 20. 求下列幂级数收敛半径、收敛开区间以及收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^{2n}$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2})x^n \ (a, b > 0)$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x^{n^2}$,

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$.

解: (1) $\forall n \geqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $u_n(x) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^{2n}$, 则当 $x \neq 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}(x-1)^{2(n+1)}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^{2n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(x-1)^2}{2(n+1)\cdot(2n+1)} = \frac{1}{4}(x-1)^2,\end{aligned}$$

由比率判别法知原级数在 $|x-1| < 2$ 时收敛, 而在 $|x-1| > 2$ 时发散, 故所求幂级数的收敛半径为 2, 收敛开区间为 $(-1, 3)$.

又 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 2^{2n} &= \frac{(\prod\limits_{k=1}^{n} k)^2 2^{2n}}{\prod\limits_{k=1}^{2n} k} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{(2k-1)(2k)} > 1, \end{aligned}$$

因此原幂级数在 $x=-1,3$ 处均发散, 故所求收敛域为 $(-1,3)$.

(2) 令 $c=\max(a,b)$. 则 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\frac{c}{\sqrt[n]{n^2}}\leqslant \left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant c\sqrt[n]{2},$$

于是由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=c$, 因此所求收敛半径为 $\frac{1}{c}$, 收敛开区间为 $(-\frac{1}{c},\frac{1}{c})$.

当 $a<b$ 时, $c=b$, 此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛, 故所求收敛域为 $[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}]$.

当 $a\geqslant b$ 时, $c=a$, 此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$ 收敛, 故收敛域为 $[-\frac{1}{a},\frac{1}{a})$.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n}|x|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{2} = \begin{cases} 0, & 若\ |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & 若\ |x| = 1, \\ +\infty, & 若\ |x| > 1. \end{cases}$$

则由根值判别法可知所求收敛半径为 1, 收敛开区间为 $(-1, 1)$, 收敛域为 $[-1, 1]$.

(4) 由题设知所求收敛半径为

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}} = \frac{1}{e},$$

从而收敛开区间为 $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$. 又 $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, 故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^n = \left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right)^n > \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} > \frac{1}{e},$$

因此所求收敛域为 $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

例 21. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r \in (0,+\infty)$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ 的收敛半径.

解: 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (\frac{r}{2})^n$ 收敛, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n (\frac{r}{2})^n = 0$, 故 $\exists M > 0$ 使得 $\forall n \geqslant 0$, 均有 $|a_n (\frac{r}{2})^n| \leqslant M$. 则 $\forall x \in \mathbb{R}$, 于是 $|\frac{a_n}{n!} x^n| \leqslant |a_n (\frac{r}{2})^n| \frac{|\frac{2x}{r}|^n}{n!} \leqslant M \frac{|\frac{2x}{r}|^n}{n!}$. 由比率判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\frac{2x}{r}|^n}{n!}$ 收敛, 从而由比较法则可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ 收敛, 则上述幂级数的收敛域为 $\mathbb{R}$, 从而所求收敛半径为 $+\infty$.

例 22. 求 $f(x) = \log \frac{1}{2+2x+x^2}$ 在点 $x = -1$ 处的幂级数展开.

解: 由题设立刻可得所求幂级数展开为

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\log\left(1 + (x+1)^2\right) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left((x+1)^2\right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x+1)^{2n}.
\end{aligned}
$$

例 23. 求 $f(x)=\sin^3 x$ 在点 $x=0$ 处的幂级数展开.

解: 由题设立刻可得所求幂级数展开为

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^2 x)\sin x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\sin x \\ &= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \\ &= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(3x)^{2n-1} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(3-3^{2n-1})x^{2n-1}. \end{aligned}$$

例 24. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{3^n(n+1)}x^{2n+1}$ 的收敛域及其和函数.

解: $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{3^n(n+1)}|x|^{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{|x|^2}{3}$, 由根值判别法知上述级数在 $|x|<\sqrt{3}$ 时收敛, 而在 $|x|>\sqrt{3}$ 时发散, 故收敛半径为 $\sqrt{3}$. 又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{3^n(n+1)}(\sqrt{3})^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n+1}\sqrt{3}=+\infty,$$

故所求收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

$\forall x \in (-1,1)$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, 对之求导和积分得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \\
-\log(1-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},
\end{aligned}$$

于是当 $x \neq 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n+1} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2-1}{n+1} x^n \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{x}\log(1-x).
\end{aligned}$$

由此可知, $\forall x \in (-1,1) \setminus \{0\}$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{3^n(n+1)} x^{2n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n+1} \left(\frac{x^2}{3}\right)^n$$

$$= \frac{9x}{(3-x^2)^2} + \frac{3}{x} \log\left(1 - \frac{x^2}{3}\right).$$

而当 $x=0$ 时, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{3^n(n+1)} x^{2n+1} = 0.$$

谢谢大家!