微积分 A (1)

姚家燕

第 3 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

重要通知

因国庆节放假, 10 月 2 日周五的课停上,

9 月 27 日周日补 10 月 2 日周五的课

助教老师联系方式

- 刘思汉13051863277

  email: liu-sh18@mails.tsinghua.edu.cn
- 徐竟成18811367484

  email: xu-jc16@mails.tsinghua.edu.cn
- 谌昭15974251368

  email: cz17@mails.tsinghua.edu.cn
- 刘金钏15210398609

  email: liu-jc17@mails.tsinghua.edu.cn

第 1 讲回顾: 实数系

- $\exists$ = there exists = 存在
- $\forall$ = for all = 对任意
- $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (其子集简称为数集), $\mathbb{C}$.
- 上界, 下界.
- 有界集与无界集: (非空数集 A 有界) $\Leftrightarrow$ ($\exists M \geqslant 0$ 使得 $\forall x \in A$, 均有 $|x| \leqslant M$).

定义 2. (最值与确界) 设 A 为非空数集.

- 如果 $M \in A$ 使得 $\forall x \in A$, 我们均有 $x \leqslant M$, 则称 M 为 A 的最大值.
- 如果 $m \in A$ 使得 $\forall x \in A$, 我们均有 $x \geqslant m$, 则称 m 为 A 的最小值.
- 如果 A 有上界, 称 A 的最小上界 ξ (若存在) 为 A 的上确界, 记作 $\sup A$.
- 如果 A 有下界, 称 A 的最大下界 η (若存在) 为 A 的下确界, 记作 $\inf A$.

评注

- 如果 A 有最大值 M, 则 $\sup A = M$, 但反之不对. 例 $[-1,1)$ 的上确界为 1, 但没最大值.
- 如果 A 有最小值 m, 则 $\inf A = m$, 反之不对. 例如 $(-1,1]$ 的下确界为 -1, 但没最小值.
- 典型例子: 1) $[0,3]$ 的上、下确界为 3 和 0;
  2) $(0,+\infty)$ 无上界, 其下确界为 0;
  3) $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ 的上、下确界为 1 和 0;
  4) $(0,1)$ 内无理数集的上、下确界为 1 和 0.

关于实数集的基本假设

定理 1. (确界定理)

- 有上界的非空数集必有上确界;
- 有下界的非空数集必有下确界.

回顾: 上、下确界的刻画

- 上确界的刻画: $(\xi = \sup A) \Leftrightarrow (\xi$ 为 A 的上界且 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ 使得 $x > \xi - \varepsilon)$.

  否定形式: $(\xi \neq \sup A) \Leftrightarrow (\xi$ 不是A 的上界或 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $\forall x \in A, x \leqslant \xi - \varepsilon)$.

- 下确界的刻画: $(\eta = \inf A) \Leftrightarrow (\eta$ 为 A 的下界且 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ 使得 $x < \eta + \varepsilon)$.

  否定形式: $(\eta \neq \inf A) \Leftrightarrow (\eta$ 不是A 的下界或 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $\forall x \in A, x \geqslant \eta + \varepsilon)$.

回顾: 确界的性质

- 上、下确界的关系:

$$\sup A = -\inf(-A).$$

- 典型例题: 设 A, B 为非空有界数集, 则
  (1) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$,
  (2) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

作业题: 第 3 页第 6 题, 第 4 页第 8 (3), 9 (1) 题.

第 3 讲

例 2. 设 A, B 为非空有界数集. 求证:

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

证明: 不失一般性, 设 $\eta = \inf A \leqslant \inf B$. 那么 η 既为 A 的下界, 也为 B 的下界, 故为 $A \cup B$ 的下界. 下面只需证明 η 为 $A \cup B$ 的最大下界.

方法 1. 若 c 为 $A \cup B$ 的任意下界, 则它分别为 A, B 的下界. 由下确界的定义知 $c \leqslant \inf A$, $c \leqslant \inf B$, 故 $c \leqslant \eta$, 进而可得 $\eta = \inf(A \cup B)$.

方法 2. $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\eta = \inf A$, 则 $\exists x \in A$ 使得 $x < \eta + \varepsilon$, 进而 $x \in A \cup B$, 因此 η 为 $A \cup B$ 的下确界, 也即 $\eta = \inf(A \cup B)$.

例 2. 设 A, B 为非空有界数集. 求证:

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

证明: $\sup(A \cup B) = -\inf\big((-A) \cup (-B)\big)$

$= -\min\{\inf(-A), \inf(-B)\}$

$= -\min\{-\sup A, -\sup B\} = \max\{\sup A, \sup B\}.$

§2. 数列极限的基本概念

所谓数列是指将一些实数排成一列:

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

记作 $\{a_n\}$, 并称 a_n 为该数列的第 n 项或通项.

定义 1. 称数列 $\{a_n\}$ 有极限 $A \in \mathbb{R}$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|a_n - A| < \varepsilon$. 也称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 记作 $a_n \to A\ (n \to \infty)$ 或

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$ (读: 当 n 趋于无穷时, a_n 趋于 A).

数列有极限也称为收敛, 否则称为发散.

评注

- (否定形式) 数列 $\{a_n\}$ 不收敛到 A 当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall N > 0, \exists n_N > N$ 满足
$$|a_{n_N} - A| \geqslant \varepsilon_0.$$
- 总可以选取 n_N 使得数列 $\{n_N\}$ 依 N 严格递增, 由此得到子列 $\{a_{n_N}\}$ 不收敛于 A.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$.

- 从某一项开始取常数的数列收敛到该常数.

也即若 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, $a_n \equiv A$, 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

- 数列 $\{a_n\}$ 收敛到 A 并不意味着从某一项开始会恒有 $a_n = A$. 后面我们将证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

但显然 $\forall n \geqslant 1$, 我们均有 $\frac{1}{n} \neq 0$.

若干例子

例 1. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

分析: $\forall \varepsilon > 0$, 我们需要找到某一个 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 我们有 $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$. 为此只需 $n > \frac{1}{\varepsilon}$, 于是我们只需取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 则 $\forall n > N$, 均有 $n > [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 从而 $n > \frac{1}{\varepsilon}$, 进而得 $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$, 也即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

例 2. 设 $0<|q|<1$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

分析: $\forall\varepsilon>0$, 我们需要找到某一个 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时, 均有 $|q^n|<\varepsilon$. 为此需 $n>\log_{|q|}\varepsilon$, 于是我们只需取 $N=|[\log_{|q|}\varepsilon]|+1$.

证明: $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=|[\log_{|q|}\varepsilon]|+1$, 则 $\forall n>N$, 均有 $n>[\log_{|q|}\varepsilon]+1$, 从而 $n>\log_{|q|}\varepsilon$, 进而得 $|q^n|<\varepsilon$, 也即我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

例 3. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0.$

分析: $\forall \varepsilon > 0$, 我们需要找到某一个 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 我们有 $|\frac{1}{n+\sqrt{n}}| < \varepsilon$. 而 $\frac{1}{n+\sqrt{n}} < \frac{1}{n}$, 则只需 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$, 故可取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 则 $\forall n > N$, 均有 $n > [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 从而 $n > \frac{1}{\varepsilon}$, 故 $|\frac{1}{n+\sqrt{n}}| < |\frac{1}{n}| < \varepsilon$, 即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0.$$

例 4. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1+n}-\sqrt[3]{n})=0$.

分析: $\forall\varepsilon>0$, 需求 $N>0$ 使得 $\forall n>N$, 均有

$$|\sqrt[3]{1+n}-\sqrt[3]{n}|<\varepsilon.$$

可注意到, 我们有

$$\begin{aligned}
&|\sqrt[3]{1+n}-\sqrt[3]{n}|\\
=\ &\frac{(1+n)-n}{(\sqrt[3]{1+n})^2+\sqrt[3]{1+n}\cdot\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2}\\
\leqslant\ &n^{-\frac{2}{3}},
\end{aligned}$$

故只需求 $N>0$ 使得 $\forall n>N$, 均有 $n^{-\frac{2}{3}}<\varepsilon$,
也即要求 $n>\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$, 由此只需取 $N=[\varepsilon^{-\frac{3}{2}}]+1$.

证明: $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=[\varepsilon^{-\frac{3}{2}}]+1$. 那么 $\forall n>N$,
我们有 $n>\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$, 由此立刻可得

$$\begin{aligned}
&|\sqrt[3]{1+n}-\sqrt[3]{n}|\\
=\ &\frac{(1+n)-n}{(\sqrt[3]{1+n})^2+\sqrt[3]{1+n}\cdot\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2}\\
\leqslant\ &n^{-\frac{2}{3}}<\varepsilon,
\end{aligned}$$

故所证结论成立.

例 5. 求证: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 而 $\{b_n\}$ 有界, 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

证明: 由题设可知, $\exists M > 0$ 使得 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $|b_n| \leqslant M$. $\forall \varepsilon > 0$, 同样由题设知 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, 从而我们有

$$|a_n b_n| \leqslant M|a_n| < \varepsilon,$$

故所证结论成立.

例 6. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明: 方法 1. $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = [\frac{2}{\varepsilon^2}] + 2$, 则 $\forall n > N$, 我们有 $n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$, 由此可知

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varepsilon^j \geqslant \frac{1}{2} n(n-1)\varepsilon^2 > n,$$

于是 $\sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$, 从而 $|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$.

由此可知所证结论成立.

方法 2. $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = [\frac{4}{\varepsilon^2}] + 1$, 则 $\forall n > N$,

$$
\begin{aligned}
1 \leqslant \sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdots 1}_{n-2}} \\
&\leqslant \frac{1}{n}(2\sqrt{n} + n - 2) \\
&\leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{n}},
\end{aligned}
$$

由此可得 $|\sqrt[n]{n} - 1| \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. 故所证成立.

例 7. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+2}{n^2-3}=2$.

证明: 方法 1. $\forall n\geqslant 1$, 令 $a_n=\frac{2n^2+n+2}{n^2-3}$, 那么

$$\left|a_n-2\right|=\left|\frac{(2n^2+n+2)-2(n^2-3)}{n^2-3}\right|=\left|\frac{n+8}{n^2-3}\right|.$$

于是 $\forall n\geqslant 8$, 我们有

$$|a_n-2|=\frac{n+8}{n^2-3}\leqslant\frac{2n}{\frac{1}{2}n^2}=\frac{4}{n}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\max\{8,[\frac{4}{\varepsilon}]\}$, 则 $\forall n>N$, 我们有 $|a_n-2|\leqslant\frac{4}{n}<\varepsilon$. 故所证结论成立.

方法 2: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = \max\{8, [\frac{4}{\varepsilon}]\}$, 则 $\forall n > N$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n^2+n+2}{n^2-3}-2\right| &= \left|\frac{(2n^2+n+2)-2(n^2-3)}{n^2-3}\right| \\ &= \left|\frac{n+8}{n^2-3}\right| = \frac{n+8}{n^2-3} \\ &\leqslant \frac{2n}{\frac{1}{2}n^2} = \frac{4}{n} < \varepsilon.\end{aligned}$$

故所证结论成立.

作业题: 第 1.2 节第 7 页第 3 题第 (1), (2) 题.

思考题 (不用交): 第 7 页第 1, 2 题

谢谢大家!