微积分 A (1)

姚家燕

第 11 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

第 2 章总复习

- 函数的基本概念: 定义, 定义域, 值域.
- 函数的基本性质: 单射, 满射, 双射, 有界性, 单调性, 奇偶性, 周期性.
- 严格单调函数为单射, 由此得到的反函数与原来函数有同样单调性. 但有反函数的函数不一定为严格单调.
- 函数的基本运算: 四则运算, 复合.
- 基本初等函数与初等函数.

函数极限

- 函数极限: 邻域, 函数极限定义, 24 种典型的函数极限, 函数极限与数列极限之间的关系, 左、右极限与极限的关系.
- 具有极限的函数的性质: 函数极限的唯一性, 极限有限的函数的局部有界性, 函数极限的局部保序性、局部保号性.

- 计算函数极限的理论方法: 定义, 四则运算, 夹逼原理, 复合函数极限法则, Cauchy 准则, 单调有界定理.
- 计算函数极限的具体方法: 定义, 直接带入, 消去公共因子, 分子分母有理化, 变量替换, 适当放大或缩小, 应用两个重要极限, 数列极限转化成函数极限, 等价无穷小量代换.

连续函数及其性质

- 连续: 定义, 连续性与函数极限、数列极限之间的关系, 左、右连续与连续的关系.
- 局部性质: 局部有界性, 局部保序、保号性, 四则运算法则, 复合法则.
- 整体性质: 介值、反函数、最值定理.
- 初等函数在其定义域内连续.
- 间断点的分类以及相关的典型问题.

综合练习

例 1. 若 $f \in \mathscr{C}[a,b)$ 使得极限 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在且有限. 求证: 函数 f 在 $[a,b)$ 上有界.

证明: 定义 $\alpha = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, 那么 $\exists c \in (a,b)$ 使得 $\forall x \in (c,b)$, $|f(x)-\alpha| < 1$, 于是 $|f(x)| < |\alpha|+1$. 又 f 在 $[a,c]$ 上连续, 则它在 $[a,c]$ 上有界, 也即 $\exists M > 0$ 使得 $\forall x \in [a,c]$, 均有 $|f(x)| < M$. 于是 $\forall x \in [a,b)$, 均有 $|f(x)| < M + |\alpha| + 1$. 得证.

例 2. 若函数 $f\colon[a,b]\to[c,d]$ 连续, 则 $\exists h\in[a,b]$ 使得 $f(h)=c+\frac{(h-a)(d-c)}{b-a}$.

证明: $\forall x\in[a,b]$, 定义 $F(x)=f(x)-c-\frac{(x-a)(d-c)}{b-a}$. 则 $F\in\mathscr{C}[a,b]$, 且我们有 $F(a)=f(a)-c\geqslant 0$, $F(b)=f(b)-d\leqslant 0$. 于是由连续函数介值定理可知, $\exists h\in[a,b]$ 使得 $F(h)=0$, 也即我们有

$$f(h)=c+\frac{(h-a)(d-c)}{b-a}.$$

例 3. 若 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 使得 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 均有

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

求证: $\exists c \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $f(x) = cx$.

证明: 由题设可知 $f(0) = f(0) + f(0)$, 则我们有 $f(0) = 0$, 进而可知 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有

$$0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x),$$

故 $f(-x) = -f(x)$. 令 $c = f(1)$. 下面我们只需证明 $\forall x > 0$, 均有 $f(x) = cx$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ 以及 $\forall x > 0$, 我们由题设立刻可知

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = f\left(\frac{x}{n}\right) + f\left((n-1) \cdot \frac{x}{n}\right) = \cdots = nf\left(\frac{x}{n}\right),$$

由此得 $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{f(x)}{n}$. $\forall r \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ 使得 $r = \frac{m}{n}$, 从而得 $f(r) = \frac{f(m)}{n} = \frac{f(m \cdot 1)}{n} = \frac{mf(1)}{n} = cr$.

$\forall x > 0$, 由于 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 则存在正有理数数列 $\{x_n\}$ 收敛到 x. 又 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, 从而我们有 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} cx_n = cx$. 得证.

例 4. 如果函数 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 使得 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 均有 $f(x+y) = f(x)f(y)$. 求证: 或者有 $f \equiv 0$, 或者 $\exists a > 0$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $f(x) = a^x$.

证明: 如果 $f \not\equiv 0$, 那么 $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x_0) \neq 0$. 于是 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $f(x)f(x_0 - x) = f(x_0) \neq 0$. 从而 $f(x) \neq 0$, 进而可得知 $f(x) = \left(\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)^2 > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $F(x) = \log f(x)$. 那么 $F \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$,

并且 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 我们均有

$$\begin{aligned} F(x+y) &= \log f(x+y) \\ &= \log\big(f(x)f(y)\big) = \log f(x) + \log f(y) \\ &= F(x) + F(y). \end{aligned}$$

选取 $c = F(1)$. 那么 $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有 $F(x) = cx$, 也即 $f(x) = a^x$, 其中 $a = e^c = f(1)$. 得证.

作业题:

1. 如果 $f \in \mathscr{C}(0,+\infty)$ 使得 $\forall x, y > 0$, 均有 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 求证: 或者 $f \equiv 0$, 或者 $\exists a > 0\ (a \neq 1)$ 使得 $\forall x > 0$, $f(x) = \log_a x$.

2. 如果 $f \in \mathscr{C}(0,+\infty)$ 使得 $\forall x, y > 0$, 均有 $f(xy) = f(x)f(y)$, 求证: 或者 $f \equiv 0$, 或者 $\exists a \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x > 0$, 均有 $f(x) = x^a$.

例 5. 若 $f, g \in \mathscr{C}(X)$, 求证:

$$\max(f, g), \min(f, g) \in \mathscr{C}(X).$$

证明: $\forall x \in X$, 我们有

$$\begin{aligned} \max(f,g)(x) &= \frac{1}{2}\big(|f(x)-g(x)| + (f(x)+g(x))\big), \\ \min(f,g)(x) &= \frac{1}{2}\big((f(x)+g(x)) - |f(x)-g(x)|\big), \end{aligned}$$

于是由连续函数的复合法则以及四则运算法则可知 $\max(f, g), \min(f, g) \in \mathscr{C}(X)$.

例 6. 求常数 a, b 使得 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2-x^2)}{x^2+ax+b} = -\frac{1}{2}$.

解: 假设 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2-x^2)}{x^2+ax+b} = -\frac{1}{2}$, 则我们有

$$\begin{aligned} 1+a+b &= \lim_{x\to 1}(x^2+ax+b) \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{\ln(2-x^2)}\cdot\ln(2-x^2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

由此立刻可得 $b=-1-a$.

进而我们立刻可得

$$-2=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-1-a}{\ln(2-x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{\ln\left(1+(1-x^2)\right)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{1-x^2}=-\lim_{x\to1}\frac{x+1+a}{1+x}=-\frac{1}{2}(2+a),$$

从而 $a=2$, 进而 $b=-1-a=-3$. 基于前面的推导可知, 将所得到的 a,b 带入题设当中的确会得到一个等式, 因此所求 a,b 分别为 $2,-3$.

例 7. 计算 $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

解: $$\lim_{x\to 0}\log(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{\sin^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\log\big(1+(\cos x-1)\big)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

由此可得 $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

例 8. 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$, 其中 $m,n\in\mathbb{N}^*$.

解:
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$$
$$\overset{x=y+1}{=}\lim_{y\to 0}\frac{m\big(1-(y+1)^n\big)-n\big(1-(y+1)^m\big)}{\big(1-(y+1)^m\big)\big(1-(1+y)^n\big)}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{-m\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}y^k+n\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}y^j}{mny^2}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{-m\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}y^k+n\sum_{j=2}^{m}\binom{m}{j}y^j}{mny^2}$$
$$=\frac{-m\binom{n}{2}+n\binom{m}{2}}{mn}=\frac{1}{2}(m-n).$$

例 9. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

解: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left((\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})-(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})-(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\sqrt{x}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\sqrt{x}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\cdot\frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

作业题: 第 2 章总复习题第 64 页第 7 题 (其中将 ∞ 改为 $+\infty$), 第 65 页第 9, 10 题, 第 11 题第 (2) 小题 (将 “存在” 改为 “收敛”).

例 10. 若 $f\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 递增且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$, 求证: $\forall a>0$, 均有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$.

证明: 对 a 的取值分情况讨论.

(1) 若 $a=1$, 则立刻可知所证结论成立.

(2) 若 $a>1$, 令 $k=[\log_2 a]\geqslant 0$, 则我们有

$$k\leqslant\log_2 a<k+1,$$

从而 $2^k\leqslant a<2^{k+1}$. 又由题设立刻可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^k x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^{k+1}x)}{f(x)}=1,$$

于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$ 使得 $\forall x>M$, 我们均有

$\left|\frac{f(2^k x)}{f(x)}-1\right|<\varepsilon$, $\left|\frac{f(2^{k+1}x)}{f(x)}-1\right|<\varepsilon$, 也即我们有

$1-\varepsilon<\frac{f(2^k x)}{f(x)}<1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon<\frac{f(2^{k+1}x)}{f(x)}<1+\varepsilon.$

若 $f(x)>0$, 则由函数 f 单调递增性可知

$$1-\varepsilon<\frac{f(2^k x)}{f(x)}\leqslant\frac{f(ax)}{f(x)}\leqslant\frac{f(2^{k+1}x)}{f(x)}<1+\varepsilon.$$

若 $f(x)<0$, 同样由函数 f 单调递增性可得

$$1-\varepsilon<\frac{f(2^{k+1}x)}{f(x)}\leqslant\frac{f(ax)}{f(x)}\leqslant\frac{f(2^kx)}{f(x)}<1+\varepsilon.$$

则 $\forall x>M$, $\left|\frac{f(ax)}{f(x)}-1\right|<\varepsilon$. 故所证结论成立.

(3) 若 $0<a<1$, 则由复合函数极限法则可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}\overset{y=ax}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{f\left(\frac{y}{a}\right)}=1.$$

综上所述可知所证结论成立.

例 11. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界. $\forall x\in(a,b]$, 定义

$$m(x)=\inf_{a\leqslant t<x} f(t),\quad M(x)=\sup_{a\leqslant t<x} f(t).$$

求证: 函数 m 与 M 在 $(a,b]$ 上处处左连续.

证明: 任取 $x_0\in(a,b]$. $\forall\varepsilon>0$, 由确界定义立刻可知 $\exists x_1,x_2\in[a,x_0)$ 使得

$$m(x_0)\leqslant f(x_1)<m(x_0)+\varepsilon,$$
$$M(x_0)-\varepsilon<f(x_2)\leqslant M(x_0).$$

令 $\delta_1 = x_0 - x_1$, $\delta_2 = x_0 - x_2$. 则 $\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$, 我们均有 $x_0 > x > x_1$, 进而可知

$$m(x_0) \leqslant m(x) = \inf_{a \leqslant t < x} f(t) \leqslant f(x_1) < m(x_0) + \varepsilon,$$

也即我们有 $|m(x) - m(x_0)| < \varepsilon$.

同样地, $\forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0)$, 我们有 $x_0 > x > x_2$,

$$M(x_0) \geqslant M(x) = \sup_{a \leqslant t < x} f(t) \geqslant f(x_2) > M(x_0) - \varepsilon,$$

于是我们就有 $|M(x) - M(x_0)| < \varepsilon$.

综上所述可知 M, m 在点 x_0 处左连续, 得证.

例 12. 设 $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 在有限区间上有界.

(1) 如果极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))$ 存在 (有限或正、负无穷), 求证:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)).$$

(2) 若 $\exists c>0$ 使得 $\forall x>a$, 均有 $f(x)\geqslant c$, 并且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$ 存在 (有限或正无穷), 求证:
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

证明: (1) 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=\alpha\in\mathbb{R}$. $\forall x>a$, 定义 $F(x)=f(x)-\alpha x$. 则我们有

$$\lim_{x\to+\infty}(F(x+1)-F(x))=0.$$

从而 $\forall\varepsilon>0$, 均存在整数 $N_1>a$ 使得 $\forall x\geqslant N_1$, 我们有 $|F(x+1)-F(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 记 $\{x\}$ 为 x 的小数部分, 则 $\forall x>N_1+1$, 我们有

$$\begin{aligned}&|F(x)-F(N_1+\{x\})|\\ \leqslant&\sum_{k=N_1}^{[x]-1}|F(\{x\}+k+1)-F(\{x\}+k)|\leqslant\frac{1}{2}([x]-N_1)\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 f 在 $[N_1, N_1+1]$ 上有界, 因此 $\exists C>0$ 使得 $\forall y \in [N_1, N_1+1]$, $|F(y)|<C$. 令 $K=\max(N_1, \frac{2C}{\varepsilon})$. 则 $\forall x > K+1$, 我们均有

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{F(x)}{x}\right| &\leqslant \frac{|F(x)-F(N_1+\{x\})|}{|x|}+\frac{|F(N_1+\{x\})|}{|x|} \\
&\leqslant \frac{([x]-N_1)\varepsilon}{2|x|}+\frac{C}{|x|} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

于是我们有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}+\alpha=\alpha$.

现在假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=+\infty$. 至于极限为 $-\infty$ 的情形, 则可以通过考虑 $-f$ 而将问题转化成 $+\infty$ 的情形. 由定义, $\forall M>0$, 存在整数 $N_2>a$ 使 $\forall x\geqslant N_2$, $f(x+1)-f(x)>4M$. 由此可知, $\forall x>N_2+1$, 我们均有

$$f(x)-f(N_2+\{x\})=\sum_{k=N_2}^{[x]-1}\big(f(\{x\}+k+1)-f(\{x\}+k)\big)$$

$$\geqslant 4([x]-N_2)M\geqslant 4(x-1-N_2)M.$$

因 f 在 $[N_2, N_2+1]$ 上有界, 于是 $\exists D > 0$ 使得 $\forall y \in [N_2, N_2+1]$, 均有 $|f(y)| < D$. 令

$$L = \max\left(2(N_2+1), \tfrac{D}{M}\right).$$

则 $\forall x > L+1$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{f(x) - f(N_2+\{x\})}{x} + \frac{f(N_2+\{x\})}{x}\\ &\geqslant \frac{4(x-1-N_2)M}{x} - \frac{D}{x} > 2M - M = M,\end{aligned}$$

也即我们有 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

(2) $\forall x > a$, 令 $g(x) = \log f(x)$. 则 $g(x) \geqslant \log c$. 又函数 f 在每一个有限区间 $[b, d]$ 上均有上界, 故函数 g 在 $[b, d]$ 上有界. 又 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ 存在 (有限或正无穷), 从而极限

$$\lim_{x \to +\infty} (g(x+1) - g(x)) = \lim_{x \to +\infty} \log \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

存在 (有限或正、负无穷), 进而由 (1) 可得

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (g(x+1) - g(x)).$$

再由指数函数的连续性立刻可得所要的结论.

例 13. 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x-1}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x^{x^x-1} = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^x - 1)\log x$

$$\overset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim_{y\to+\infty} (1 - y^{-\frac{1}{y}}) \log y$$

$$= \lim_{y\to+\infty} (1 - e^{-\frac{\log y}{y}}) \log y$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{\log y}{y} \times \log y = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{\log y}{\sqrt{y}}\right)^2 = 0,$$

于是我们有 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x-1} = 1$.

14. 设 a,b 均为正数, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+2b^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty} n\log\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+2b^{\frac{1}{n}}}{3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+2b^{\frac{1}{n}}}{3}-1\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\cdot n(a^{\frac{1}{n}}-1)+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{3}\cdot n(b^{\frac{1}{n}}-1)$

$= \dfrac{1}{3}(\log a+2\log b) = \log\sqrt[3]{ab^2}$,

由此立刻可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+2b^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n = \sqrt[3]{ab^2}$.

15. 求字典排序法下最小的实数对 (α, β) 使得 $\forall x \geqslant 0$, 均有 $\sqrt{1+x} \leqslant \alpha + \beta x$.

解: 设 (α, β) 满足题设不等式, 那么当 $x = 0$ 时, 我们可得 $\alpha \geqslant 1$. 而 $(1, \beta)$ 满足题设不等式当且仅当 $\forall x > 0$, 均有 $\beta \geqslant \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, 而这又等价于 $\beta \geqslant \sup\limits_{x>0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \sup\limits_{x>0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$. 由此立刻可知所求实数对为 $(1, \frac{1}{2})$.

16. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

解: $$\lim_{x\to\infty}\log\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}\overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=}\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^2}\log(\cos y)$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{1}{2}y^2}{y^2}=-\frac{1}{2},$$

由此可得 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

例 17. 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, $\exists y \in [a,b]$ 满足 $|f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x)|$, 求证: $\exists \eta \in [a,b]$ 使 $f(\eta) = 0$.

证明: 方法 1. $\forall x \in [a,b]$, 我们令 $F(x) = |f(x)|$. 则 F 为连续函数. 由最值定理可知函数 F 在某点 $\eta \in [a,b]$ 取到最小值. 此时又由题设可知 $\exists y \in [a,b]$ 使得 $|f(\eta)| \leqslant |f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|f(\eta)|$, 由此我们立刻可得 $f(\eta) = 0$.

方法 2. 固定 $x_0 \in [a,b]$. 由题设可知 $\exists x_1 \in [a,b]$ 使得 $|f(x_1)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_0)|$, 进而 $\exists x_2 \in [a,b]$ 使得 $|f(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_1)|$. 如此下去可知在 $[a,b]$ 中存在数列 $\{x_n\}$ 使 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $|f(x_{n+1})| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_n)|$, 进而得 $|f(x_n)| \leqslant \frac{1}{2^n}|f(x_0)|$. 从而由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. 由于 $\{x_n\}$ 有界, 则它有收敛的子列 $\{x_{k_n}\}$, 设其极限为 η, 那么 $\eta \in [a,b]$. 又 f 连续, 因此 $f(\eta) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = 0$.

例 18. 设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 至多只有第一类间断点, 并且 $\forall x,y\in(a,b)$, 我们均有 $f(\frac{x+y}{2})\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$, 求证: $f\in\mathscr{C}(a,b)$.

证明: 用反证法, 假设 $f\notin\mathscr{C}(a,b)$. 由题设可知, $\exists x_0\in(a,b)$ 为 f 的第一类间断点. 又 $\forall y\in(a,b)$, 均有 $f(\frac{x_0+y}{2})\leqslant\frac{f(x_0)+f(y)}{2}$, 于是由复合函数极限法则以及函数极限的保序性可得

$$\begin{aligned} f(x_0+0) &= \lim_{y\to x_0^+} f\Big(\frac{x_0+y}{2}\Big)\leqslant\lim_{y\to x_0^+}\frac{f(x_0)+f(y)}{2} \\ &= \frac{f(x_0)+f(x_0+0)}{2}, \end{aligned}$$

故 $f(x_0+0) \leqslant f(x_0)$. 同理知 $f(x_0-0) \leqslant f(x_0)$.

因 $x_0 \in (a,b)$, 则 $\exists \delta > 0$ 使 $x_0-\delta, x_0+\delta \in (a,b)$.

于是 $\forall h \in (0,\delta)$, 我们均有

$$f(x_0)=f\Big(\frac{(x_0-h)+(x_0+h)}{2}\Big)\leqslant\frac{f(x_0-h)+f(x_0+h)}{2}.$$

由此立刻可得 $f(x_0) \leqslant \frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$.

于是 $f(x_0+0)=f(x_0)=f(x_0-0)$, 从而 f 在点 x_0 处连续, 矛盾! 故所证成立.

例 19. 设 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 使得 $f(0) = f(1)$. 求证:

(1) $\exists \xi \in [0, \frac{1}{2}]$ 使得 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$.

(2) $\forall n \geqslant 2$, $\exists \xi \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ 使 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{n})$.

证明: (1) $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, 定义

$$F(x) = f(x) - f(x + \tfrac{1}{2}).$$

则 $F \in \mathscr{C}[0, \frac{1}{2}]$ 且 $F(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(1) = -F(0)$. 于是由连续函数介值定理可知, $\exists \xi \in [0, \frac{1}{2}]$ 使得 $F(\xi) = 0$, 也即我们有 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$.

(2) $\forall x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, 令 $F(x) = f(x) - f(x+\frac{1}{n})$. 则 $F \in \mathscr{C}[0, 1-\frac{1}{n}]$ 且我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} F\Big(\frac{k}{n}\Big) &= \sum_{k=0}^{n-1}\Big(f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f\Big(\frac{k+1}{n}\Big)\Big)\\ &= f(0) - f(1) = 0.\end{aligned}$$

故存在 $0 \leqslant k < l \leqslant n-1$ 使得 $F(\frac{k}{n})F(\frac{l}{n}) \leqslant 0$. 于是由连续函数介值定理知, $\exists \xi \in [\frac{k}{n}, \frac{l}{n}]$ 使得 $F(\xi) = 0$, 也即我们有 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{n})$.

例 20. 假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\in\mathbb{R}$, 请用“$\varepsilon-\delta$”语言证明: $\lim\limits_{x\to x_0} e^{f(x)}=e^A$.

证明: $\forall\varepsilon>0$, 因 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x\in\mathring{B}(x_0,\delta)$, 均有 $|f(x)-A|<\log(1+\varepsilon e^{-A})$.

(1) 若 $f(x)\geqslant A$, 则我们有

$$|e^{f(x)}-e^A|=e^A(e^{f(x)-A}-1)<\varepsilon.$$

(2) 若 $f(x)<A$, 此时我们也有

$$|e^{f(x)}-e^A|=e^{f(x)}(e^{A-f(x)}-1)<e^A\cdot\varepsilon e^{-A}=\varepsilon.$$

故所证结论成立.

谢谢大家!