第十一次习题课

1. Hw13-6

注意γ中速度的取值，详见作业答案。

---

2. Hw14-1

a) 设太阳光在地球上的平均辐射光功率为 $I = 1.4 \times 10^3 W/m^2$，辐射面积为$S$，辐射压力为$F$，由公式$\frac{E}{c} = P$，可得

$$\frac{IS\Delta t}{c} = \Delta P = F\Delta t \Rightarrow \frac{F}{S} = \frac{I}{c}$$

即辐射压 $Pr = \frac{I}{c} = 0.47 \times 10^{-5} Pa$。

辐射面积近似为一个地球半径的圆，则有

$$\begin{aligned} F_R &= Pr \cdot \pi r_e^2 \approx 6 \times 10^8 N \\ F_G &= G\frac{M_{sun}M_e}{R^2} \approx 3.6 \times 10^{22} N \end{aligned}$$

b) 设粒子半径为r，其比重为5，即密度$\rho = 5 \times 10^3 kg/m^2$，则有

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3,\ m = \rho V \\ F_G &= G\frac{M_{sun}m}{R^2} \approx 4 \times 10\pi r^3 \\ F_R &= Pr \cdot \pi r^2 = 4.7 \times 10^{-6} \pi r^2 \\ F_R &> F_G \Rightarrow r < 10^{-7} m \end{aligned}$$

---

3. Hw14-4

1) 最小能量意味着，产生的N个粒子之间无相对动量，它们结合在一起运动，故可以把这N个粒子看作一个整体。

初始：粒子A E_A, P_A; 粒子B E_B, P_B 。

结束：粒子C E_C, P_C。

由动量守恒和能量守恒，可以得出$P_A + P_B = P_C$, $E_A + E_B = E_C$。且$P_B = 0$。

因此，有

$$\begin{aligned} E_A^2 + E_B^2 + 2E_AE_B &= E_C^2 \\ P_A &= P_C \\ E_B &= mc^2 \end{aligned}$$

进而可以得出 $E_A = \frac{(N^2-2)m}{2}c^2$。

2)或者利用能量-动量4矢量来计算

$$\underset{\rightarrow}{P_A} + \underset{\rightarrow}{P_B} = \underset{\rightarrow}{P_C}$$

其中

$$\begin{aligned} |\underset{\rightarrow}{P_A}|^2 = |\underset{\rightarrow}{P_B}|^2 &= m^2c^2 \\ |\underset{\rightarrow}{P_C}|^2 &= N^2m^2c^2 \\ \underset{\rightarrow}{P_A} &= (E_A/c, P_A) \\ \underset{\rightarrow}{P_B} &= (mc, 0) \\ \underset{\rightarrow}{P_A} \cdot \underset{\rightarrow}{P_B} &= mE_A \end{aligned}$$

带入等式，可以得到 $E_A = \frac{(N^2-2)m}{2}c^2$。

---

4. Hw 14-8

a) 证明 $\frac{E^2}{c^2} - P^2 > 0$即可。动量4矢量与时空4矢量满足同样的LT，故可以作类比，由于时空的闵氏图中，类时区域中可以找到使得事件同地不同时（坐标为0）发生的参考系，而能量动量矢量满足"类时"，因此能量动量空间中，一定存在使得动量为0的参考系。

b) LT下，$P'_x = \gamma(P_x - \beta E/c)$。令$P'_x$所在参考系为0动量参考系，则 $P'_x = 0$，进而有$\beta = \frac{cP}{E}$。

c) 如果存在一个光子分裂为一个正负电子对，则可以选取一个参考系其动量为0。但是光子参考系中，由于光子动量为E/c，其总动量不可能为0 ($E/c - P = 0$)，故动量不守恒。矛盾，因此原命题不成立。

d) 论述错误。可以选择M本身作为参考系，则总动量为0，其总能量为 $E = Mc^2$。而分裂成的两个全同粒子总能量为 $\gamma_1 mc^2 + \gamma_2 mc^2 > 2mc^2 > E$，故能量不守恒，原论述错误。

---

5. Hw14-11

由能量守恒与动量守恒，有

$$\begin{gathered} E = E_1 + E_2 = Mc^2 \\ P_1 + P_2 = 0 \end{gathered}$$

结合 $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$，解方程即可得到结果。

---

6. Morin's 12.6

用4矢量方法（省略箭头），设$c = 1$。

$P_M + P_m = P'_M + P'_m$。$P_M = (E, P), P_m = (m, 0), P'_M = (E', P'), P_{m'}$

故有

$$P_{m'}^2 = m^2 = (P_M + P_m - P'_M)^2$$

由上式，可得

$$PP' = M^2 - EE' + m(E - E')$$

由 $E^2 = P^2 + M^2$，得 $P = \sqrt{E^2 - M^2}$，带入上式，平方。此方程对于两球不相撞的情形也成立，故E=E'是一个解。化简得

$$[M^2(E - E') + 2m(M^2 - EE') + m^2(E - E')](E - E') = 0$$

即

$$E' = \frac{2mM^2 + E(m^2 + M^2)}{2mE + m^2 + M^2}$$

---

7. Morin's 12.22

a) $E_1 = \gamma_1 mc^2 = \frac{5}{4}mc^2$

$E_2 = mc^2$

$P_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2c^4}/c = \frac{3}{4}mc$

$P_2 = 0$

b) 由速度LT公式，CM系中二者速度满足 $v_1' = -v_2'$。CM系运动速度为 v。即

$$\frac{\frac{3}{5}c - v}{1 - \beta_{v_1}\beta} = -v_2 = v$$

即得

$$(v - 3c)(3v - c) = 0 \Rightarrow v = \frac{c}{3}$$

c) 在CM系中，$P_1' = -P_2' = \gamma m_0 v = \frac{\sqrt{2}}{4}mc$。$E_1' = E_2' = \gamma m_0 c^2 = \frac{3\sqrt{2}}{4}mc^2$。

d) LT变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

带入验证即可

e) $E_1^2 - P_1^2c^2 = E_1'^2 - P_1'^2c^2$ 。

---

8. Morin's 12.28

由动量守恒和能量守恒，有

$$\overrightarrow{P_m} + 0 = \vec{P} + \overrightarrow{P_M},\ E_m + mc^2 = E + E_M$$

光子满足 $P = \frac{E}{c}$，此外由矢量关系，$\overrightarrow{P_M} \cdot \overrightarrow{P_m} = P_m^2$。带入上式，可以解得

$$M = \frac{4}{3}\sqrt{3(m^2 - mE/c^2)}$$

光子能量最大，为 $M > 0 \Rightarrow E < mc^2$。

---

9. Hw14-14

由于力与速度方向垂直，$\vec{a} = \frac{1}{\gamma_u m_0}(\vec{f} - \frac{\vec{f}\cdot\vec{u}}{c^2}\vec{u}) = \frac{\vec{f}}{\gamma_u m_0}$

故有 $\vec{f} = \gamma_u m_0 \vec{a} = \gamma_u m_0 \frac{v^2}{R} = q|v||B|$, 进而有 $R = \frac{|P|}{q|B|}$。

---

10. Hw14-15

由于只有x方向有力和速度，因此 $a_x = \frac{F_0}{\gamma_u m}(1-\beta_u^2) = \frac{F_0}{\gamma_u^3 m}$.

故有

$$\frac{du}{dt} = \frac{F_0}{\gamma_u^3 m} \to \int_{u_0}^{u} \frac{du}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{F_0}{m}t$$

积分可得相应结果，令 $A = F_0 t + P_0$，有

$$u(t) = \frac{A}{m}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A^2}{m^2c^2}}}$$

由 $\frac{dx(t)}{dt} = u(t)$，进一步积分可得路径

$$x(t) = \frac{c}{F_0}\sqrt{m^2c^2 + A^2}\,\Big|_{t=0}^{t=t}$$

---

11. Hw14-16

a) 从外部看，黑箱的总能量满足 $E = E_1 + E_2 = 2\gamma_v mc^2$。即 $M = 2\gamma_v m$。

b) 箱子在力的作用下变化了速度 δv, 对于图示位置的两个小球来说，其速度在实验室系下变为

$$v_1 = \frac{-v+\delta v}{1-\beta_v\beta_{\delta v}};\ v_2 = \frac{v+\delta v}{1+\beta_v\beta_{\delta v}}$$

则动量变化为

$$\begin{aligned} P(\delta t) &= P_1 + P_2 = \gamma_{v_1} m v_1 + \gamma_{v_2} m v_2 \\ &= \gamma_v\gamma_{\delta v} m(-v+\delta v) + \gamma_v\gamma_{\delta v} m(v+\delta v) = 2\gamma_v\gamma_{\delta v} m\delta v \approx 2\gamma_v m\delta v \end{aligned}$$

其中使用了 $\gamma_{v'} = \gamma_v\gamma_{\delta v}(1-\beta_v\beta_{\delta v})$，$\gamma_{\delta v} \approx 1$。

进而，我们有

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{2\gamma_v m\delta v}{\delta t} = 2\gamma_v m a = Ma$$