电磁场数值计算

邢庆子

Tel: **62781684(o), 13661226717**

E-mail: **xqz@tsinghua.edu.cn**

清华大学工物系加速器实验室 刘卿楼**309**

上节内容

3.2 泛函的离散化与线性插值函数

3.2.1 场域的剖分（剖分形式、原则和要求）

3.2.2 线性插值函数

3.2.3 面积坐标及其性质

单选题　50分

设置

问题：有限元法中为什么要使用面积坐标？

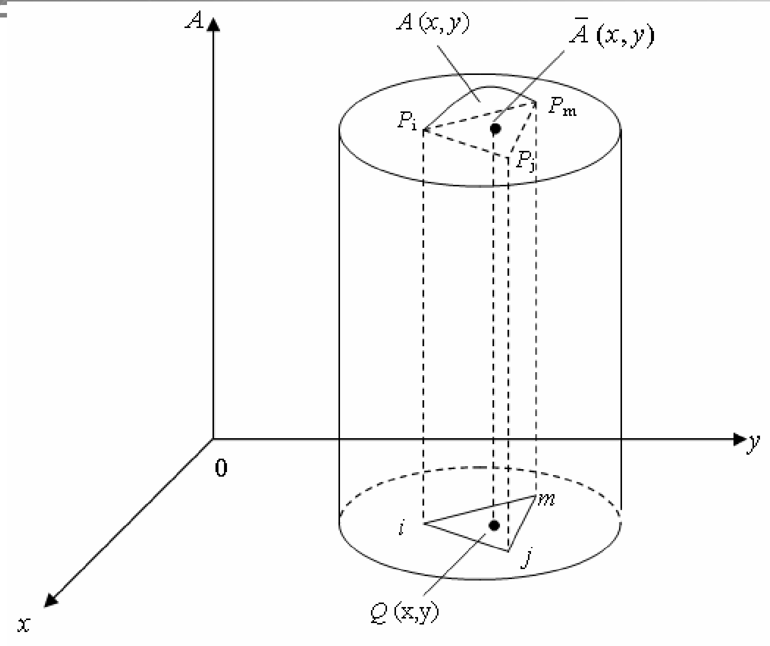
A 是为了确定空间一点的位置。

B 是为了求解三角形单元面积更加方便。

C 是为了求解导数更加方便。

D 是为了求解积分更加方便。

提交



***Q*(*x*, *y*)**：单元 e 内一点；

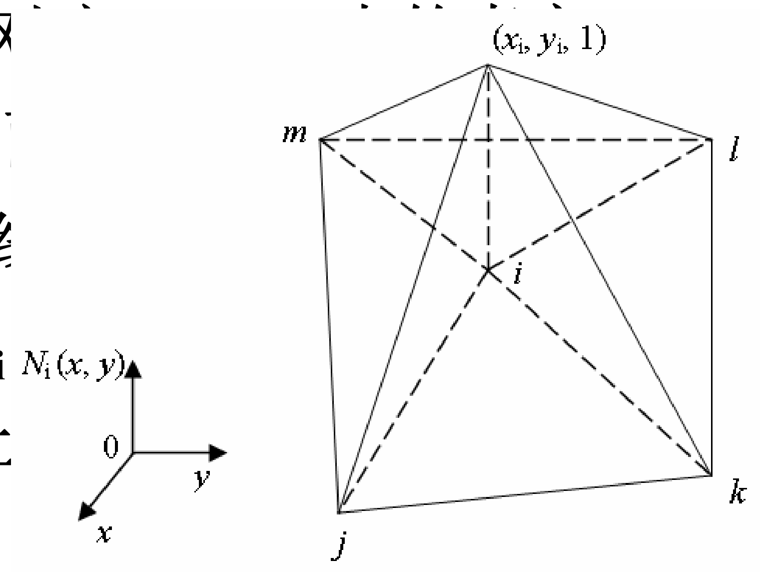
***A*(*x*, *y*)**：对

值，在曲

$\bar{A}(x,y)$：线

在通过 $\boldsymbol{P_i}$

$\boldsymbol{P_e(x,y)}$ 上



对于每一个三角形单元 e ，泛函为：

$$F^{(e)}(A)=\iint_e\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2-2\mu JA\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

平面 $\boldsymbol{P_e(x,y)}$ 满足的方程：$P_e(x,y)=A_iN_i+A_jN_j+A_mN_m=\bar{A}(x,y)$

在场域 ***D*** 内函数A写成折平面公式为：

$$\bar{A}(x,y)=A_1N_1(x,y)+A_2N_2(x,y)+A_3N_3(x,y)+\cdots+A_nN_n(x,y)$$

- 面积坐标及其性质

总体坐标与面积坐标有一一对应关系，实际是坐标变换关系。N_i，N_j，N_m 被称为局部坐标或面积坐标。

（1）N_i，N_j 和 N_m 之和恒等于1：

$$N_i + N_j + N_m = \frac{\Delta_i}{\Delta} + \frac{\Delta_j}{\Delta} + \frac{\Delta_m}{\Delta} = 1$$

（2）N_i，N_j 和 N_m 仅有两个量独立，x，y 坐标可转换成以 N_i，N_j 为变量的坐标系统（即面积坐标），经过推导可得：

$$\begin{cases} x = x_i N_i + x_j N_j + x_m N_m = x_i N_i + x_j N_j + x_m \left(1 - N_i - N_j\right) \\ y = y_i N_i + y_j N_j + y_m \left(1 - N_i - N_j\right) \end{cases} \qquad (3.52)$$

采用面积坐标的优点在于泛函求积分时，可以化为对有关面积的积分，即由

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(N_i,N_j\right)}\right|\mathrm{d}N_i\mathrm{d}N_j=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial N_i} & \dfrac{\partial x}{\partial N_j}\\ \dfrac{\partial y}{\partial N_i} & \dfrac{\partial y}{\partial N_j}\end{vmatrix}\mathrm{d}N_i\mathrm{d}N_j$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial N_i}\frac{\partial y}{\partial N_j}-\frac{\partial x}{\partial N_j}\frac{\partial y}{\partial N_i}\right)\mathrm{d}N_i\mathrm{d}N_j$$

对式（**3.52**）求导，可得

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left[\left(x_i-x_m\right)\left(y_j-y_m\right)-\left(x_j-x_m\right)\left(y_i-y_m\right)\right]\mathrm{d}N_i\mathrm{d}N_j$$

$$=2\Delta\mathrm{d}N_\mathrm{i}dN_\mathrm{j}$$

常用的积分：

$$
\begin{cases}
\iint_e \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\Delta\int_0^1\int_0^{1-N_i} \mathrm{d}N_i dN_j = \Delta \\
\iint_e N_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\Delta\int_0^1 N_i \mathrm{d}N_i \int_0^{1-N_i} \mathrm{d}N_j = \dfrac{\Delta}{3} \\
\iint_e N_i^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\Delta\int_0^1 N_i^2 dN_i \int_0^{1-N_i} \mathrm{d}N_j = \dfrac{\Delta}{6} \\
\iint_e N_i N_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\Delta\int_0^1 N_i \mathrm{d}N_i \int_0^{1-N_i} N_j \mathrm{d}N_j = \dfrac{\Delta}{12}, i \neq j
\end{cases}
$$

本节内容

第3章 有限元法基础

3.3 平行平面场中拉普拉斯方程与泊松方程的有限元方程组

3.3 平行平面场中拉普拉斯方程与泊松方程的有限元方程组

求泛函 $F(A)$ 的极值函数，导出有限元方程组的过程分三步：

1）把在区域建立起的泛函划分为 N_e 个三角形单元上的泛函之和，表示为 $F(A)=\sum_{1}^{N_e}F^{(e)}(A)$ ；

2）利用线性插值求出 $A(x,y)$ 的线性插值函数，将各单元上的泛函化为多元函数的问题，即 $\sum_{1}^{N_e}F^{(e)}(A)\approx\sum_{1}^{N_e}F^{(e)}(\overline{A})$ ；

3）进一步把泛函求极值的问题 $\delta F(\overline{A})=0$ 化为多元函数求极值的问题：$\mathrm{d}F(\overline{A})=0$ 。

以上三步可总结为：

1）单元分析： $F^{(e)}\left(\overline{A}\right)$

2）总体合成： $\sum_{1}^{N_e} F^{(e)}\left(A\right) \approx \sum_{1}^{N_e} F^{(e)}\left(\overline{A}\right)$

3）导出有限元方程组： $\delta F\left(\overline{A}\right)=0 \Longrightarrow \mathrm{d}F\left(\overline{A}\right)=0$

（并按强加边界修正有限元方程组）

下面以 $\boldsymbol{J}\neq 0$ 为例进行分析。

3.3.1 有限元方程组的形成

对于单元 ***e***，对应于泊松方程与相关边界条件的泛函如下式所示：

$$F^{(e)}(A)=\iint_e\left(\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2\right]-JA\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \textbf{(3.25b)}$$

下面我们来求三角形单元 ***e*** 的泛函的近似表达式。

单选题 50分

设置

$$F^{(e)}(A)=\iint_{e}\left(\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^{2}\right]-JA\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

以上泛函，是具有哪一类边界条件的泊松方程对应的泛函？

A 第一类边界条件

B 第二类齐次边界条件

C 第一类边界条件或第二类齐次边界条件

提交

1. 单元分析

将插值函数写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{A}^{(e)} = \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_m \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}(x,y) = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_m \end{bmatrix} \Longrightarrow \overline{A}(x,y) = \boldsymbol{N}\boldsymbol{A}^{(e)}$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(e)} = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \end{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(e)} = \frac{1}{2\Delta}\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}} \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_m \end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_m \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{2\Delta}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{(e)} = \frac{1}{2\Delta}\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

同理可得：

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial y} \end{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(e)}$$

$$= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(e)} = \frac{1}{2\Delta} \boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}} \begin{bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_m \end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_m \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{2\Delta} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{e})} = \frac{1}{2\Delta} \boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{e})\mathrm{T}} \boldsymbol{c}$$

则

$$\left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{2\Delta}\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\frac{1}{2\Delta}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{(\mathrm{e})}+\frac{1}{2\Delta}\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{c}\frac{1}{2\Delta}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{(\mathrm{e})}$$

$$=\boldsymbol{A}^{(\mathrm{e})\mathrm{T}}\frac{1}{4\Delta^2}\left[\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{A}^{(\mathrm{e})}$$

$$=\boldsymbol{A}^{(\mathrm{e})\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{(\mathrm{e})}\boldsymbol{A}^{(\mathrm{e})}$$

其中

$$\boldsymbol{S}^{(\mathrm{e})}=\frac{1}{4\Delta^2}\left[\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\right]$$

$$=\frac{1}{4\Delta^2}\begin{bmatrix} b_i^2+c_i^2 & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_m+c_ic_m \\ b_ib_j+c_ic_j & b_j^2+c_j^2 & b_jb_m+c_jc_m \\ b_ib_m+c_ic_m & b_jb_m+c_jc_m & b_m^2+c_m^2 \end{bmatrix}$$

对于泛函中 ***JA*** 项：

$$J\bar{A} = J\left[N_i A_i + N_j A_j + N_m A_m\right] = J\left[N_i \quad N_j \quad N_m\right]\boldsymbol{A}^{(e)}$$

$$= J\boldsymbol{A}^{(e)T}\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\begin{bmatrix} JN_i \\ JN_j \\ JN_m \end{bmatrix}$$

将上面各式代入式（**3.25b**）可得

$$F^{(e)}\left(\bar{A}\right) = \iint_e \left(\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{(e)}\boldsymbol{A}^{(e)} - \boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\begin{bmatrix} JN_i \\ JN_j \\ JN_m \end{bmatrix}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{（3.64）}$$

$$F^{(e)}\left(\overline{A}\right)=\iint_e\left(\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{(e)}\boldsymbol{A}^{(e)}-\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\begin{bmatrix}JN_i\\JN_j\\JN_m\end{bmatrix}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\mathbf{3.64})$$

令

$$\boldsymbol{k}^{(e)}=\frac{1}{\mu}\iint_e\boldsymbol{S}^{(e)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\boldsymbol{S}^{(e)}}{\mu}\iint\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\boldsymbol{S}^{(e)}}{\mu}\Delta$$

$$=\frac{1}{4\mu\Delta}\begin{bmatrix}b_i^2+c_i^2 & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_m+c_ic_m\\ b_ib_j+c_ic_j & b_j^2+c_j^2 & b_jb_m+c_jc_m\\ b_ib_m+c_ic_m & b_jb_m+c_jc_m & b_m^2+c_m^2\end{bmatrix}$$

或写成

$$k_{st}^{(e)}=\frac{1}{4\mu\Delta}\left(b_tb_s+c_tc_s\right)\qquad (t,s=i,j,m)$$

$$F^{(e)}\left(\overline{A}\right)=\iint_{e}\left(\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{A}^{(e)\mathbf{T}}\boldsymbol{S}^{(e)}\boldsymbol{A}^{(e)}-\boldsymbol{A}^{(e)\mathbf{T}}\begin{bmatrix}JN_i\\JN_j\\JN_m\end{bmatrix}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\mathbf{3.64})$$

再令 $$\boldsymbol{r}^{(e)}=\iint_{e}\begin{bmatrix}JN_i\\JN_j\\JN_m\end{bmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

三角形单元中

J=常数时：

$$r^{(e)}=\begin{bmatrix}\frac{\Delta}{3}J\\\frac{\Delta}{3}J\\\frac{\Delta}{3}J\end{bmatrix}$$

（参考书式 **(3.55)** ）

三角形单元中 $\boldsymbol{J} \neq$ 常数时：

$$J = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_i \\ J_j \\ J_m \end{bmatrix} \text{代入} \quad \boldsymbol{r}^{(e)} = \iint_e \begin{bmatrix} JN_i \\ JN_j \\ JN_m \end{bmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} r_i^{(e)} \\ r_j^{(e)} \\ r_m^{(e)} \end{bmatrix} :$$

$$r_i^{(e)} = \iint_e N_i J \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_e N_i \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_i \\ J_j \\ J_m \end{bmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \begin{bmatrix} \iint_e N_i^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y & \iint_e N_i N_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y & \iint_e N_i N_m \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_i \\ J_j \\ J_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{6} & \frac{\Delta}{12} & \frac{\Delta}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_i \\ J_j \\ J_m \end{bmatrix} = \frac{\Delta}{12}\left(2J_i + J_j + J_m\right)$$

$$\boldsymbol{r}^{(e)} = \iint_e \begin{bmatrix} JN_i \\ JN_j \\ JN_m \end{bmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} r_i^{(e)} \\ r_j^{(e)} \\ r_m^{(e)} \end{bmatrix}$$

同理，

$$r_j^{(e)} = \frac{\Delta}{12}\left(J_i + 2J_j + J_m\right)$$

$$r_m^{(e)} = \frac{\Delta}{12}\left(J_i + J_j + 2J_m\right)$$

可得

$$r^{(e)} = \begin{bmatrix} r_i^{(e)} \\ r_j^{(e)} \\ r_m^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2J_i + J_j + J_m \\ J_i + 2J_j + J_m \\ J_i + J_j + 2J_m \end{bmatrix}$$

$$F^{(e)}\left(\overline{A}\right)=\iint_e\left(\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{(e)}\boldsymbol{A}^{(e)}-\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\begin{bmatrix}JN_i\\JN_j\\JN_m\end{bmatrix}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\mathbf{3.64})$$

$$\boldsymbol{k}^{(e)}=\frac{1}{\mu}\iint_e \boldsymbol{S}^{(e)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \boldsymbol{r}^{(e)}=\iint_e\begin{bmatrix}JN_i\\JN_j\\JN_m\end{bmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{bmatrix}r_i^{(e)}\\r_j^{(e)}\\r_m^{(e)}\end{bmatrix}$$

至此，可写出一个三角形单元的泛函的近似表达式为：

$$\boxed{F^{(e)}\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^{(e)}\boldsymbol{A}^{(e)}-\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^{(e)}}$$

2. 总体合成

1）节点参数的表示

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \\ A_{N+1} \\ \vdots \\ A_{N_p} \end{bmatrix}$$

N_p：计算场区（包括边界）节点总数

N：　未知参数的节点数

N_p-N：强加边界节点数

A' 称为总体磁位（列）矢量。

在 D 域内共有 N_{e} 个三角形单元。对任意一个单元，三个节点参数都可以用总体磁位矢量表示，即

$$
\boldsymbol{A}^{(e)}=\begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_m \end{bmatrix}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & i & & j & & m & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}\boldsymbol{A}' \qquad \boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \\ A_{N+1} \\ \vdots \\ A_{N_p} \end{bmatrix}
$$

$$
=\boldsymbol{h}^{(e)}\boldsymbol{A}'
$$

2）单元刚度矩阵的表示

$$
\boldsymbol{K}^{(e)} = \boldsymbol{h}^{(e)\mathrm{T}} \boldsymbol{k}^{(e)} \boldsymbol{h}^{(e)} =
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & m \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
\cdots & K_{ii}^{(e)} & \cdots & K_{ij}^{(e)} & \cdots & K_{im}^{(e)} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & K_{ji}^{(e)} & \cdots & K_{jj}^{(e)} & \cdots & K_{jm}^{(e)} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & K_{mi}^{(e)} & \cdots & K_{mj}^{(e)} & \cdots & K_{mm}^{(e)}
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} i \\ \\ j \\ \\ m \end{array}
\end{array}
$$

此矩阵各元素通式为：

$$
K_{st}^{(e)} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\mu\Delta}\left(b_s b_t + c_s c_t\right) & s,t = i,j,m \\ 0 & \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \text{ 为其它值时} \end{cases}
$$

K **矩阵的特点：**

1）是对称矩阵；

2）*K* 是由*K* ^(e)^ 组成的，*K* ^(e)^ 中只有 9 个非零元素。

3）*r*$^{(e)}$ 的统一表示式

$$
\boldsymbol{R}^{(e)}=\boldsymbol{h}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^{(e)}=\begin{array}{l}\left[\begin{array}{c}\vdots\\ R_i^{(e)}\\ \vdots\\ R_j^{(e)}\\ \vdots\\ R_k^{(e)}\\ \vdots\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\\ i\\ \\ j\\ \\ m\\ \\ \end{array}
$$

此矩阵各元素通式为：

$$
R_s^{(e)}=\begin{cases}\iint_e N_s J dxdy & s=i,j,m\\ 0 & s\ \text{为其它值时}\end{cases}
$$

用总体编号来表示每个单元的泛函：

$$
\boxed{F^{(e)}\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{(e)}}
$$

小结：

单元分析：

$$\boxed{F^{(e)}\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^{(e)}\boldsymbol{A}^{(e)}-\boldsymbol{A}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^{(e)}}$$

A 写为 ***A'***
k 写为 ***K***
r 写为 ***R***

为了用总体编号来表示每个单元的泛函

总体编号：

$$\boxed{F^{(e)}\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{(e)}}$$

4）总体合成

$$F(\overline{A})=\sum_{e=1}^{N_e}F^{(e)}(\overline{A})=\sum_{e=1}^{N_e}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{(e)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\left(\sum_{e=1}^{N_e}\boldsymbol{K}^{(e)}\right)\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\left(\sum_{e=1}^{N_e}\boldsymbol{R}^{(e)}\right) \quad \textbf{（3.83）}$$

令 $\boldsymbol{K}=\sum_{e=1}^{N_e}\boldsymbol{K}^{(e)}$ —— 总体刚度矩阵

$$\boldsymbol{R}=\sum_{e=1}^{N_e}\boldsymbol{R}^{(e)}$$

则式（**3.83**）可写为：$\boxed{F(\overline{A})=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}}$

3. 导出有限元方程组

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}F\left(\overline{A}\right) &= \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}' + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}'\right) - \mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{R} \\
&= \mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}' - \mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{R} \\
&= \mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{R}\right) = 0
\end{aligned}
$$

（由于$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{K}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}$ ，且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}$ 为1×1的数，

则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}$ ）

可得： $\boxed{\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{R} = 0}$

即为所求的有限元方程组，由此可求出全部未知节点参数！

3.3.2 强加边界条件的引入

第一类边界条件：边界上节点参数给定。

● 节点编号时，将强加边界节点参数放在最后面，如下：

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \\ \vdots \\ A_{N_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$$

其中：待求未知节点参数矩阵为：

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix}$$

已知强加边界节点参数矩阵为：

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} A_{N+1} \\ \vdots \\ A_{N_p} \end{bmatrix}$$

代入 $$F\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}$$

可得：$$F\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12}\\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{1}\\ \boldsymbol{R}_{2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_N\\ \vdots\\ A_{N_p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}$ 、$\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$：已知参数

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}$ ： $N\times\mathbf{1}$ 阶列矩阵

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}$：（$N_p$-$N$）$\times\mathbf{1}$ 阶列矩阵

$\boldsymbol{K}_{11}$ ： $N\times N$ 阶矩阵

$\boldsymbol{K}_{22}$ ： （N_{p}-N）×（N_{p}-N） 阶矩阵

$\boldsymbol{R}_1$ ： $N\times\mathbf{1}$ 阶列矩阵

$\boldsymbol{R}_2$ ： （N_p-N）$\times\mathbf{1}$ 阶列矩阵

将 $F\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12}\\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{I}\\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{1}\\ \boldsymbol{R}_{2}\end{bmatrix}$ 展开得

$$F\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{22}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\right)-\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{1}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F\left(\overline{A}\right)&=\frac{1}{2}\left[2\mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{21}\mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\right)+\mathrm{d}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\right]-\mathrm{d}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{R}_{1}\\
&=\frac{1}{2}\left[2\mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}+2\mathrm{d}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\right]-\mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{R}_{1}\\
&=\mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}+\mathrm{d}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}-\mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{R}_{1}\\
&=\mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}-\boldsymbol{R}_{1}\right)\end{aligned}$$

由 $\mathrm{d}F\left(\overline{A}\right)=0$ 得 $\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}-\boldsymbol{R}_{1}=0$

即 $\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{R}_{1}-\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}$

$$\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{R}_{1} - \boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}$$

应用 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} d_{\mathrm{I}} \\ d_2 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{d}$ 可得 $\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{R}_{1} - \boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{d}$

（当强加边界为奇次边界时，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} = [0] = \boldsymbol{d}$ ，上式简化为：

$\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{R}_{1}$ ）

最后得到有限元方程组为：
$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{R}_{1} - \boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{d} \end{cases}}$$

- 上面公式适用条件：μ = 常数！$\boldsymbol{K}$ 与 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 无关。即只对非导磁材料，或忽略饱和效应的铁磁材料才适用！

● 讨论：

非齐次第二类边界条件下，对于相关的边界单元，其单元泛函如何表述？

二类边界泊松方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2}=-\mu J \\ \dfrac{\partial A}{\partial n}\Big|_L=u_2(l) \end{cases} \xRightarrow{\text{对应单元泛函}}$$

$$F^{(e)}(A)=\iint_D \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2-2\mu JA\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_L u_2 A\mathrm{d}l$$

本节无作业。