微积分 A (1)

姚家燕

第 13 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

第 12 讲回顾：导数的概念

- 导数: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- 左导数: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- 右导数: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- 导数 $f'(x_0)$ 存在当且仅当 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.
- 若函数 f 在点 x_0 处可导, 则它在该点连续; 但反过来不成立.

- 几何应用 (曲线的切线与法线): 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

相应的法线方程为

$$x - x_0 = -f'(x_0)(y - f(x_0)).$$

- 典型导数: $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(a^x)' = a^x \log a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$, $(e^x)' = e^x$, $(\log x)' = \frac{1}{x}$, $(x^k)' = kx^{k-1}$.

回顾: 微分

- 假设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 为函数, $x_0\in(a,b)$. 称 f 在点 x_0 处可微, 若 $\exists A\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+o(h)\ (h\to 0).$$

此时还称线性函数 $h\mapsto Ah$ 为 f 在点 x_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}f(x_0)$ 或 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$.

若函数 f 在 (a,b) 的每一点处可微, 则称之在 (a,b) 上可微.

- 函数 f 在点 x_0 处可微当且仅当 f 在该点处可导. 此时 $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$.
- 几何意义: 微分 $\mathrm{d}f(x_0)$ 可表示曲线 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的切线, 而导数 $f'(x_0)$ 则是表示该切线的斜率.

回顾：求导法则

1. 导数的四则运算法则: 假设 $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ 在点 $x_0 \in (a, b)$ 处可导, 则

- $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, 其中 $g(x_0) \neq 0$.
- $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, 其中 $g(x_0) \neq 0$.

2. 复合求导: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

3. 反函数求导: 若 f 为双射, 在点 x_0 处可导且 $f'(x_0) \neq 0$, 而 f^{-1} 在点 $y_0 = f(x_0)$ 处连续, 那么 f^{-1} 在点 y_0 处可导, 且 $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

注: 由 $y = f(x)$ 得 $1 = f'(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, 故 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f'(x)}$.

4. 对数求导: $(\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

应用对象: 多个函数乘积或商, $g(x)^{h(x)}$ 型函数.

5. 隐函数求导: 确定变量后, 按复合函数求导.

6. 参变量的求导: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$.

回顾：高阶导数

- $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, 或 $\dfrac{\mathrm{d}^{n+1}y}{\mathrm{d}x^{n+1}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\Big)$.
- $\mathscr{C}^{(n)}$ 类: n 阶导数连续; $\mathscr{C}^{(1)}$ 类: 连续可导;

  连续函数也称为 $\mathscr{C}^{(0)}$ 类函数.
- $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 类: 具有任意阶导数 (无穷可导).
- 初等函数在其定义域的内部无穷可导.

回顾: 基本的高阶求导公式

设 $n \geqslant 1$ 为整数, $\alpha \in \mathbb{R}$, 则

- $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$,
- $(e^{\alpha x})^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$, 其中 α 可以为复数,
- $\big(\log(1+x)\big)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$,
- $\sin^{(n)}(x) = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$, $\cos^{(n)}(x) = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$.

注: 由函数方程 (隐函数、反函数) 或者参变量表示的函数, 也可以计算它们的高阶导数.

第 13 讲

定理 2. (高阶导数的四则运算法则)

设函数 $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ 为 n 阶可导, 则

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
- (Leibniz 公式) $\quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$,

  其中 $\binom{n}{k} = \mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

证明: 第一个公式源于求导的线性性.

对 $n \geqslant 1$ 用数学归纳法来证明 Leibniz 公式.

当 $n = 1$ 时, 由导数的四则运算法则立刻可得

$$\begin{aligned}(fg)' &= f'g + fg' \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},\end{aligned}$$

因此此时所证结论成立.

假设所证结论对 $n \geqslant 1$ 成立. 则我们有

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}g^{(n+1-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)},$$

故所证结论对 $n+1$ 成立, 进而由数学归纳法可知所证结论对所有 $n \geqslant 1$ 均成立.

例 6. 设 $y=x^2\sin(2x)$. 计算 $y^{(n)}$ $(n\geqslant 2)$.

解:
$$
\begin{aligned}
y^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}(\sin(2x))^{(n-k)}\\
&= x^2\cdot 2^n\cdot\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\\
&\quad +\binom{n}{1}\cdot 2x\cdot 2^{n-1}\cdot\sin\left(2x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\\
&\quad +\binom{n}{2}\cdot 2\cdot 2^{n-2}\cdot\sin\left(2x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)\\
&= 2^{n-2}\Bigg((4x^2-n^2+n)\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\\
&\quad -4nx\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\Bigg).
\end{aligned}
$$

例 7. 设 $f(x)=(x+1)^2\log(1-x)$. 求 $f^{(n)}(-1)\ (n\geqslant 1)$.

解: 由题立刻可知

$$f'(x)=2(x+1)\log(1-x)+\frac{(x+1)^2}{x-1},$$

于是我们有

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\log(1-x)+\frac{2(x+1)}{x-1} \\ &\quad +\frac{2(x+1)(x-1)-(x+1)^2}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

从而 $f'(-1)=0,\ f''(-1)=2\log 2$.

当 $n \geqslant 3$ 时, 由 Leibniz 公式可得

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= (x+1)^2(\log(1-x))^{(n)} \\
&\quad +2n(x+1)(\log(1-x))^{(n-1)} \\
&\quad +n(n-1)(\log(1-x))^{(n-2)},
\end{aligned}
$$

由此立刻可得

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(-1) &= n(n-1)(\log(1-x))^{(n-2)}\Big|_{x=-1} \\
&= n(n-1)\cdot \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(x-1)^{n-2}}\Big|_{x=-1} \\
&= -\frac{n!}{(n-2)2^{n-2}}.
\end{aligned}
$$

例 8. 求 $f(x)=\log(2-3x)$ 的第 10 阶导数.

解: 由题设知 $f'(x)=\frac{1}{2-3x}\cdot(2-3x)'=\frac{-3}{2-3x}$, 故

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-3)\cdot\frac{-1}{(2-3x)^2}\cdot(2-3x)' \\ &= (-3)\cdot\frac{3}{(2-3x)^2}=\frac{-3^2}{(2-3x)^2}. \end{aligned}$$

又 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $\left(\frac{1}{(2-3x)^n}\right)'=\frac{3n}{(2-3x)^{n+1}}$, 则由数学归纳法立刻可得

$$f^{(10)}(x)=\frac{-3^{10}\cdot 9!}{(2-3x)^{10}}.$$

作业题: 第 3.3 节第 87 页第 1 题第 (3), (5) 题, 第 2 题第 (1) 小题, 第 3 题第 (6), (7) 小题,

提示: $e^{ax}\sin bx = \mathrm{Im}(e^{(a+ib)x})$,

第 88 页第 4 题第 (2) 小题, 第 5 题第 (1) 题, 第 6 题.

第 3 章总复习

- 定义: 导数, 左、右导数, 微分.
- 导数存在当且仅当左、右导数存在且相等.
- 可导蕴含着连续, 但反过来不成立.
- 导数的应用: 曲线的切线与法线.
- 基本初等函数的导数表.
- 可微=可导且 $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

- (高阶) 求导法则: 四则运算, 复合函数求导, 反函数求导, 隐函数求导, 由参数方程定义函数的求导, 对数求导及其应用.
- 初等函数在其定义域的内部可导, 其导函数也为初等函数.
- 高阶导数的定义, $\mathscr{C}^{(n)}$ 类 (n 阶导数连续), $\mathscr{C}^{(1)}$ 类 (连续可导); 连续函数为 $\mathscr{C}^{(0)}$ 类.
- $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 类: 具有任意阶导数 (无穷可导).
- 初等函数在其定义域的内部无穷可导.

基本的高阶求导公式

设 $n \geqslant 1$ 为整数, $\alpha \in \mathbb{R}$, 则我们有

- $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$,
- $(e^{\alpha x})^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$, 其中 α 可以为复数,
- $\big(\log(1+x)\big)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$,
- $\sin^{(n)}(x) = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$, $\cos^{(n)}(x) = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$.

注: 由函数方程 (隐函数、反函数) 或者参变量表示的函数, 也可以计算它们的高阶导数.

综合练习

例 1. 求函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 的导数.

解: $y'=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(a^2-x^2)'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

例 2. 求函数 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$ 的导数.

解: $$y'=a^a x^{a^a-1}+(e^{x^a\log a})'+(e^{a^x\log a})'$$
$$=a^a x^{a^a-1}+e^{x^a\log a}(x^a\log a)'+e^{a^x\log a}(a^x\log a)'$$
$$=a^a x^{a^a-1}+(\log a)a^{x^a}(ax^{a-1})+a^{a^x}\cdot a^x(\log a)^2$$
$$=a^a x^{a^a-1}+(\log a)a^{x^a+1}x^{a-1}+(\log a)^2a^{a^x+x}.$$

例 3. 设 $y=f(\sin^2 x)f(\cos x^2)$, 其中 f 为可导函数, 求 y'.

解: $y'=(f(\sin^2 x))'f(\cos x^2)+f(\sin^2 x)(f(\cos x^2))'$

$$
\begin{aligned}
&= f'(\sin^2 x)(\sin^2 x)'f(\cos x^2) \\
&\quad + f(\sin^2 x)f'(\cos x^2)(\cos x^2)' \\
&= f'(\sin^2 x)\big(2\sin x\cdot(\sin x)'\big)f(\cos x^2) \\
&\quad + f(\sin^2 x)f'(\cos x^2)\big(-\sin x^2\cdot(x^2)'\big) \\
&= f'(\sin^2 x)\big(2\sin x\cos x\big)f(\cos x^2) \\
&\quad + f(\sin^2 x)f'(\cos x^2)\big(-\sin x^2\cdot(2x)\big) \\
&= f'(\sin^2 x)f(\cos x^2)\sin 2x-2x\sin x^2 f(\sin^2 x)f'(\cos x^2).
\end{aligned}
$$

例 4. 求 $xy = 1 + xe^y$ 确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 将方程对 x 求导, 则 $y + xy' = e^y + xe^y \cdot y'$,

由此立刻可得 $y' = \frac{e^y - y}{x(1-e^y)}$.

例 5. 已知 $x = \cos t$, $y = at\sin t$. 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 由于 $x' = -\sin t$, $y' = a\sin t + at\cos t$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'}{x'} = \frac{a\sin t + at\cos t}{-\sin t} = -a - at\cot t.$$

例 6. 若由函数方程 $x^2+xy+y^2=1$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 为二阶可导, 求 y''.

解: 将方程对 x 求导得 $2x+y+xy'+2yy'=0$, 则 $y'=-\frac{2x+y}{x+2y}$. 于是我们有

$$y''=-\frac{(2+y')(x+2y)-(2x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2}=\frac{3(xy'-y)}{(x+2y)^2}$$

$$=\frac{3\left(-x\cdot\frac{2x+y}{x+2y}-y\right)}{(x+2y)^2}=-\frac{3\big(x(2x+y)+y(x+2y)\big)}{(x+2y)^3}$$

$$=-\frac{6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3}=-\frac{6}{(x+2y)^3}.$$

例 7. 设 $y = x^{x^{x^x}}$, 求 y'.

解: $y' = \left(e^{x^{x^x}\log x}\right)' = x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x}\log x\right)'$

$$= x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x-1} + \left(x^{x^x}\right)'\log x\right)$$

$$= x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x-1} + \left(e^{x^x\log x}\right)'\log x\right)$$

$$= x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x-1} + \left(x^{x^x}\left(x^x\log x\right)'\right)\log x\right)$$

$$= x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x-1} + x^{x^x}\left(x^{x-1} + \left(x^x\right)'\log x\right)\log x\right)$$

$$= x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x-1} + x^{x^x}\left(x^{x-1} + \left(e^{x\log x}\right)'\log x\right)\log x\right)$$

$$= x^{x^{x^x}}\left(x^{x^x-1} + x^{x^x}\left(x^{x-1} + x^x(1+\log x)\log x\right)\log x\right)$$

$$= x^{x^{x^x}+x^x}\left(x^{-1} + x^x\left(x^{-1} + \log x + \log^2 x\right)\log x\right)$$

$$= x^{x^{x^x}+x^x}\left(x^{-1} + x^{x-1}\log x + x^x\log^2 x + x^x\log^3 x\right).$$

例 8. 求 a, b 使 $f(x) = \begin{cases} \sin ax, & 若\ x \leqslant 0 \\ \log(1+x) + b, & 若\ x > 0 \end{cases}$, 在 $\mathbb{R}$ 上可导.

解: 由于 f 在 $(0, +\infty)$ 和 $(-\infty, 0)$ 上均为初等函数, 则 f 在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上可导. 又 $f(0-0) = 0$, $f(0+0) = b$, 故 f 在点 $x = 0$ 处连续当且仅当 $b = 0$. 现假设 $b = 0$, 则 $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin ax}{x} = a$, $f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, 故 f 在点 $x = 0$ 可导当且仅当 $a = 1$, $b = 0$, 此时 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导.

例 9. 设 $k \in \mathbb{Z}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, 令

$$f(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

请问 k 取何值时, 函数 f 在点 $x = 0$: (1) 连续; (2) 可导; (3) 连续可导.

解: (1) 如果 $k \geqslant 1$, 那么 $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |x^k|$. 由夹逼原理可知 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. 此时 f 在原点处连续. 现假设 $k \leqslant 0$. $\forall n \geqslant 1$, 令 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. 那么有 $f(x_n) = 0$, $f(y_n) = y_n^k \geqslant 1$.

则 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 均收敛到 0, 但 $\{f(x_n)\}$, $\{f(y_n)\}$ 却不收敛到同一个极限. 这表明 f 在原点间断. 综上所述可知 f 在原点连续当且仅当 $k \geqslant 1$.

(2) 若 f 在原点可导, 则它在该点连续. 故只需讨论 $k \geqslant 1$ 的情形. 若 $k \geqslant 2$, 由夹逼原理可知

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{k-1} \sin\frac{1}{x} = 0,$$

故 f 在点 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$.

若 $k=1$, 则由极限 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在可知 $f'(0)$ 不存在. 于是 f 在原点可导当且仅当 $k \geqslant 2$.

(3) 由前面的讨论可假设 $k \geqslant 2$. 当 $x \neq 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= kx^{k-1}\sin\frac{1}{x} + x^k\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= kx^{k-1}\sin\frac{1}{x} - x^{k-2}\cos\frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

若 $k \geqslant 3$, 由夹逼原理可知 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$.
若 $k = 2$ 时, $\forall n \geqslant 1$, $f'(x_n) = -1$, $f'(y_n) = ky_n$.
则 $\{f'(x_n)\}$, $\{f'(y_n)\}$ 不收敛到同一极限, 故 f' 在原点间断. 则 f' 在原点连续当且仅当 $k \geqslant 3$.

例 10. 设 $f(x)=|x-\sin x|$, 求 $f'(0)$.

解: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x-\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\frac{1}{6}x^3|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{6}\operatorname{sgn} x=0$.

例 11. 判断函数 $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 在点 $x=1$ 处的间断点的类型.

解: 由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=1$, 因此点 $x=1$ 为 f 的第一类间断点 (跳跃间断点).

例 12. 设 $f(x)=xe^x$. 求 $f^{(n)}$ $(n\geqslant 1)$.

解: $f^{(n)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}(e^x)^{(n-k)}=xe^x+ne^x$.

例 13. 假设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为二阶可导且 $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)\neq 1$. 若隐函数 $y=y(x)$ 可由 $y=f(x+y)$ 来确定, 求 y', y''.

解: 将方程对 x 求导, 则 $y'=f'(x+y)(1+y')$. 于是 $y'=\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}$. 同时我们也有

$$y''=f''(x+y)(1+y')^2+f'(x+y)y'',$$

由此可得 $y''=\frac{f''(x+y)(1+y')^2}{1-f'(x+y)}=\frac{f''(x+y)}{(1-f'(x+y))^3}$.

例 14. 假设参数方程 $x = 2t + \sin t$, $y = \cos t$ 可确定可导函数 $y = f(x)$. 求 $f'(0)$.

解: 由题设可知 $f'(0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = \frac{-\sin t}{2+\cos t}\Big|_{t=0} = 0$.

例 15. 设 $y = x^x$, 求微分 $\mathrm{d}y$ 以及 $\mathrm{d}y(1)$.

解: 因 $y' = (e^{x\log x})' = x^x(x\log x)' = x^x(\log x + 1)$,

故 $\mathrm{d}y = x^x(\log x + 1)\,\mathrm{d}x$, 进而可知 $\mathrm{d}y(1) = \mathrm{d}x$.

例 16. 假设函数 $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ 在点 $x=0$ 处可导. 如果 $\forall x\in(-1,1)$, 均有 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$. 求证: $|f'(0)|\leqslant 1$.

证明: 由题设立刻可知 $|f(0)|\leqslant|\sin 0|=0$, 于是我们有 $f(0)=0$, 进而可得

$$\begin{aligned} |f'(0)| &= \left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| \\ &\leqslant \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1. \end{aligned}$$

17. 假设 f 可导且函数 $y=f(\sin x)$ 存在可导的反函数, 求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

解: 由于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(\sin x)\cos x$, 故 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{f'(\sin x)\cos x}$.

18. 函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x &= t-\sin t \\ y &= t-\cos t \end{cases}$ 给出, 求其微分 $\mathrm{d}y$.

解: 由参数方程求导法则可知 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+\sin t}{1-\cos t}$, 则

$$\mathrm{d}y=\frac{1+\sin t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}x.$$

§1. 微分中值定理

定义 1. 假设 X 为数集, $x_0 \in X$, 而 $f: X \to \mathbb{R}$. 若 $\exists \delta > 0$ 使得 $B(x_0, \delta) \subseteq X$ 且 $\forall x \in B(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) \geqslant f(x_0)$, 则称点 x_0 为 f 的极小值点, 而称 $f(x_0)$ 为 f 的极小值. 相应地, 我们也可以定义极大值点和极大值.

极小值点和极大值点统称为极值点. 极小值和极大值统称极值.

评注

- 极值点包含在 f 的定义域 X 当中的某一个开区间内, 这样的点称为 X 的内点.
- 函数 f 是否在点 x_0 取极值, 仅与 f 在该点邻域上的性态有关, 属于 “局部性质” .
- 如果函数 f 的定义域为区间, 则其最大值点为极大值点当且仅当该点为区间内点. 对于最小值点也有同样结论.
- 极值点不一定是最值点.

定理 1. (Fermat) 设 x_0 为 f 的极值点. 若 f 在点 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

证明: 不失一般性, 假设点 x_0 为 f 的极小值点 (否则考虑 $-f$). 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in B(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) \geqslant f(x_0)$. 由函数极限的保号性可知

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0, \\ f'(x_0) &= f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0, \end{aligned}$$

由此立刻可得 $f'(x_0) = 0$.

评注

- 导数为零的点称为驻点. 在该点处, 曲线的切线为水平.
- “可导” 的条件不可去掉. 函数 $f(x) = |x|$ 在点 $x = 0$ 取极小值, 但 f 在该点处不可导, 此时上述定理的结论不成立.
- Fermat 定理表明: 极值点为驻点. 该定理的逆命题不成立. 例如, 对于函数 $f(x) = x^3$, 点 $x = 0$ 为其驻点, 但不是极值点.

谢谢大家!