

第 7 次作业题

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (x+y) \, dx dy$, 其中 D 是由 $x^2 + y^2 = x + y$ 围成的平面区域.

(2) $\iint_D (y-x)^2 \, dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x+a, x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $a > 0$.

2. 求双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 所围成图形 (圆外部分) 的面积, 其中 $a > 0$.

3. 计算 $\iint_D x^2 y^2 \, dx dy$, 其中 D 是由 $xy = 2$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 3x$ 在第一象限所围成的平面区域.

4. 计算 $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 \, dx dy dz$, 其中 Ω 是由马鞍面 $z = xy$ 与平面 $y = x$, $x = 1$, $z = 0$ 所围成的空间区域.

5. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$;

(2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx dy dz$, 其中

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 \leq x^2 \leq R^2 - y^2 - z^2, x \geq 0\};$$

(3) $\iiint_{\Omega} x^2 \, dx dy dz$, 其中 Ω 由曲面 $z = y^2$, $z = 4y^2$ 以及平面 $z = x$, $z = 2x$, $z = 0$, $z = 3$ 围成.

6. 求柱面 $x^2 + z^2 = a^2$ 在柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 内部分的面积, 其中 $a > 0$.

7. 求曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 与平面 $x + y = z$ 所围成的均匀物体的质心.