I.

根据玻尔兹曼分布，经典情况下，能量连续变化，对每一个自由度，有：

$$P = \frac{1}{Z}e^{-\beta E}, \beta = 1/kT$$
$$Z = \int_0^\infty e^{-\beta E} dE = kT$$
$$\overline{E} = \frac{1}{Z}\int_0^\infty E e^{-\beta E} dE = kT$$

1mol晶体中有3N个自由度。因此，内能$U = 3NkT$,$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = 3Nk$
爱因斯坦模型中，每一个原子为三维量子谐振子，$\epsilon = n\hbar\omega$,n=0,1,2,..., ω为振动频率。每个振子在平衡位置附近振动，因此是可分辨的，根据玻尔兹曼分布：

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\hbar\omega} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$
$$\begin{aligned} U &= 3N\frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega e^{-\beta n\hbar\omega} \\ &= 3N\frac{1}{Z}(-\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\beta}) \\ &= -3N\frac{\partial}{\partial\beta}lnZ \\ &= 3N\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \end{aligned}$$
$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = 3Nk(\frac{\hbar\omega}{kT})^2\frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)^2}$$

令$\theta_E = \hbar/k$(爱因斯坦特征温度)，有

$$C_V = 3Nk(\frac{\theta_E}{T})^2\frac{e^{\frac{\theta_E}{T}}}{(e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1)^2}$$

低温极限下，$T \ll \theta_E$，$e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1 \simeq e^{\theta_E/T}$，有

$$C_V = 3Nk(\frac{\theta_E}{T})^2 e^{\frac{-\theta_E}{T}} \to 0$$

高温极限下，$T \gg \theta_E$，$e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1 \simeq \theta_E/T$，有

$$C_V = 3Nk$$

与经典热容结果一致

II.

体积V的空间中，普朗克公式：

$$U(\omega, T)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}d\omega$$

当$\omega \to \infty, e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \gg 1$，得到维恩公式

$$U(\omega,T)d\omega = \frac{V}{\pi^2c^3}\hbar\omega^3 e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}d\omega$$

当$\omega \to 0, e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \simeq 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$，得到瑞丽金斯公式

$$U(\omega,T)d\omega = \frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2 kTd\omega$$

将$\omega = 2\pi c/\lambda$代入普朗克公式，有

$$U(\lambda,T)d\lambda = V\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

当$T = 2.7K$时，对普朗克公式求极值点，最可能的波长满足

$$5 - 5e^{-x} = x, x = \frac{hc}{\lambda kT}$$

数值解得到$x \simeq 4.9651$，所以最有可能波长为

$$\lambda_m = \frac{hc}{4.9651kT} \simeq 1.07 \times 10^{-3}m$$

III.

根据第二题中推导的最可能波长，得到最可能的波长满足：

$$\lambda_m T = \frac{hc}{4.9651k} \simeq 2.898 \times 10^{-3}m \cdot K$$

IV.

考虑狭义相对论效应，碰撞前动量为$\mathbf{p_0}$的光子和一静止电子碰撞，电子静止质量为μ_0，碰撞后电子质量为μ，速度为$\mathbf{v}$，光子发生散射，动量变为$\mathbf{p}$，方向转动θ角度，弹性碰撞下，根据动量守恒和能量守恒，有：

$$\mathbf{p_0} = \mathbf{p} + \mu\mathbf{v}$$

$$p_0c + \mu_0c^2 = pc + \mu c^2$$

$$\mu = \gamma\mu_0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{\mathbf{v}}{c})^2}}$$

$$p_0 = \frac{h}{\lambda_0}p = \frac{h}{\lambda}$$

根据余弦定理和动量守恒，有：

$$\begin{aligned} p_0^2 + p^2 - 2p_0pcos\theta = (\mu v)^2 = (\gamma\mu_0 v)^2 &= (\gamma\mu_0c)^2 - (\mu_0c)^2 \\ &= (p_0 + \mu_0c - p)^2 - (\mu_0c)^2 \\ &= p_0^2 + p^2 - 2p_0p + 2\mu_0c(p_0 - p) \end{aligned}$$

整理上式可得：

$$\frac{1-cos\theta}{\mu_0 c} = \frac{p_0 - p}{p_0 p} = \lambda - \lambda_0$$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{\mu_0 c}(1-cos\theta)$$

其中，$\frac{h}{\mu_0 c} \simeq 2.43\times 10^{-3}nm$，而可见光波长为400-800nm，因此康普顿散射难以被观察

V.

光子波长为λ，根据动量守恒和能量守恒，当光子沿相对方向碰撞转化为一对静止的正负电子对时，波长最长，因此：

$$p = \frac{h}{\lambda_m}$$

$$2pc = 2\mu_0 c^2$$

所以最大波长$\lambda_m = \frac{h}{\mu_0 c} \simeq 2.43\times 10^{-3}nm$

VI.

电子质量为m，单位电荷为e，根据波尔量子化条件，电子运动的轨道角动量只能是$\hbar$的整数倍：

$$mv_n r_n = n\hbar, n = 0,1,2...$$

经典库伦势下，稳定的电子轨道满足：

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}$$

因此，轨道半径和速度为

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{me^2 Z}$$

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}$$

所以，氢原子能级为：

$$\begin{aligned} E_n &= E_{kn} + (-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}) \\ &= -\frac{2m\pi^2 Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^2 n^2} \\ &= -13.6\frac{Z^2}{n^2}eV \end{aligned}$$

考虑电子跃迁过程，有：

$$h\nu = E_n - E_{n'}$$

$$\nu = \frac{2m\pi^2 Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^3}(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}) = R_H(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}), n' < n = 1,2,3...$$

由此可得里德堡（Rydberg）常数：

$$R_H = 1.097\times 10^7 m^{-1}$$