微积分 A (1)

姚家燕

第 25 讲

在听课过程中，

严禁使用任何电子产品!

第 25 讲

§1. 广义 Riemann 积分的概念

定义 1. 设 $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in (a, +\infty]$, $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ 使得 $\forall A \in (a, \omega)$, 函数 f 在 $[a, A]$ 上均为可积. 定义 f 在 $[a, \omega)$ 上的广义积分为

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to \omega^-} \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若上述极限收敛, 称广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 否则称之发散. 广义积分也称为反常积分.

评注

- 通常 $\omega = +\infty$, 或者 $\omega \in \mathbb{R}$ 但函数 f 在 ω 的邻域内无界, 此时称 ω 为 f 的奇点, 相应的广义积分被称为无穷限积分或瑕积分.
- $\forall c \in [a, \omega)$, 我们有

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

故 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性仅与函数 f 在 ω 的邻域内的性质有关.

- 如果 $\omega \in \mathbb{R}$ 且 $f \in \mathscr{R}[a,\omega]$, 则 f 在 $[a,\omega]$ 的任意闭子区间上均可积, 并且

$$\int_a^{\omega} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\omega^-} \int_a^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

此时正常的定积分与广义积分一致.

- 如果 $b \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 使得 $\omega < b$, 而且 $f : (\omega, b] \to \mathbb{R}$ 在 $(\omega, b]$ 的任意的闭子区间上可积, 则我们可以类似地定义广义积分

$$\int_{\omega}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to\omega^+} \int_B^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 假设 $\omega_1, \omega_2\ (\omega_1 < \omega_2)$ 为 f 的奇点, 而函数 f 在 (ω_1, ω_2) 的任意的闭子区间上可积. 固定 $a \in (\omega_1, \omega_2)$, 并定义
$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\omega_1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
可证明该定义不依赖点 a 的选择.
- 如果 $a, b \in \mathbb{R}\ (a < b)$, 而 $\omega \in (a, b)$ 使得 f 在 $[a, b] \setminus \{\omega\}$ 的任意闭子区间上可积, 定义:
$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\omega} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\omega}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 更一般地, 如果 f 有多个奇点, 此时可将整个区间分割成若干个小区间使得 f 在每一个小区间上只有一个奇点且该点为小区间的端点, 随后在每个小区间上定义广义积分, 随后再将如此定义的广义积分之和定义为 f 在原来那个区间上的广义积分. 有鉴于此, 再通过坐标变换, 我们总可以将问题归结为研究形如 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 这样的广义积分.

广义积分的性质

由广义积分的定义可知, 广义积分自然继承了正常的定积分的性质, 比如说线性性, 保序性, Newton-Leibniz 公式, 分部积分, 换元法等等.

- Newton-Leibniz 公式:

  若 $f \in \mathscr{C}[a, \omega)$ 在 $[a, \omega)$ 上有原函数 F, 则

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = F\Big|_a^\omega = F(\omega - 0) - F(a).$$

- 分部积分公式: 若假设下述极限均存在, 则

$$
\begin{aligned}
\int_a^{\omega} u(x)\,\mathrm{d}v(x) &= \lim_{A\to\omega^-}\int_a^{A} u(x)\,\mathrm{d}v(x)\\
&= \lim_{A\to\omega^-}\left(uv\Big|_a^A - \int_a^A v(x)\,\mathrm{d}u(x)\right)\\
&= uv\Big|_a^{\omega} - \int_a^{\omega} v(x)\,\mathrm{d}u(x).
\end{aligned}
$$

例 1. 设 $p \in \mathbb{R}$. 若 $p \neq 1$, 则我们有

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{x^{p-1}}\Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{若 } p > 1, \\ +\infty, & \text{若 } p < 1. \end{cases}$$

$$\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{x^{p-1}}\Big|_0^{1} = \begin{cases} +\infty, & \text{若 } p > 1, \\ \frac{1}{1-p}, & \text{若 } p < 1. \end{cases}$$

若 $p = 1$, 则我们有

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x\Big|_1^{+\infty} = +\infty,$$

$$\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x\Big|_0^{1} = +\infty.$$

例 2. 计算 $\int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{1-x}}{=\!=} \int_1^0 \frac{1}{(3-t^2)t}\,\mathrm{d}(1-t^2)$$

$$= \int_0^1 \frac{2t}{(3-t^2)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{3}-t}+\frac{1}{\sqrt{3}+t}\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{|\sqrt{3}+t|}{|\sqrt{3}-t|}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

例 3. 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解: $$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{+\infty} \log x\,\mathrm{d}\Big(-\frac{1}{x}\Big) \\ &= -\frac{\log x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} \mathrm{d}\Big(-\frac{1}{x}\Big) = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1.\end{aligned}$$

作业题: 第 6.1 节第 193 页第 2 题第 (2), (4), (5) 小题, 第 3 题第 (2), (3), (5) 小题.

例 4. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int \frac{\log x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \int \log x\,\mathrm{d}\Big(-\frac{1}{2(1+x)^2}\Big)$$

$$= -\frac{\log x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)^2}$$

$$= -\frac{\log x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\Big)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\log x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\Big(\log\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\Big) + C,$$

其中 C 为任意常数.

由此我们立刻可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(-\frac{\log x}{(1+x)^2} + \log\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\Big)\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\Big(-\frac{\log x}{(1+x)^2} + \log\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\Big)$$

$$- \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\Big(-\frac{\log x}{(1+x)^2} + \log\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\Big)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\Big(\frac{\log x}{(1+x)^2} - \log x + \log(1+x) - \frac{1}{1+x})\Big)$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{(2+x)x\log x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

§2. 广义积分收敛性的判定

定理 1. (Cauchy 准则) 假设 $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in (a, +\infty]$, $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ 使得 $\forall A \in (a, \omega)$, f 在 $[a, A]$ 上可积. 那么 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 为收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c \in (a, \omega)$ 使得 $\forall A_1, A_2 \in (c, \omega)$, 均有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

证明: $\forall A \in [a, \omega)$, 定义 $F(A) = \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$. 则 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\lim\limits_{A \to \omega^-} F(A)$ 存在并且有限, 再由函数极限Cauchy准则可得所要结论.

定义 1. 设 $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 使得 $\omega > a$, 而 $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ 为函数. 若存在 $C > 0$ 以及 $c \in [a, \omega)$ 使得 $\forall x \in [c, \omega)$, 我们均有

$$|f(x)| \leqslant C|g(x)|,$$

则我们将之记作

$$f(x) = O(g(x)) \ (x \to \omega^-).$$

定理 2. (比较法则)

设 $f, g : [a, \omega) \to [0, +\infty)$ 在 $[a, \omega)$ 的任意闭子区间上可积且 $f(x) = O(g(x))$ $(x \to \omega^-)$.

(1) 如果广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

(2) 如果广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散.

证明: (1) 由题设知, 存在 $C>0$ 以及 $c\in[a,\omega)$ 使得 $\forall x\in[c,\omega)$, 我们均有 $0\leqslant f(x)\leqslant Cg(x)$. $\forall A\in[c,\omega)$, 我们定义

$$F(A)=\int_c^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

则 F 单调递增且 $\forall A\in[c,\omega)$, 我们有

$$F(A)\leqslant C\int_c^A g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant C\int_c^\omega g(x)\,\mathrm{d}x<+\infty.$$

由单调有界定理知极限 $\lim\limits_{A\to\omega^-} F(A)$ 存在, 于是 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{A\to\omega^-} F(A)$ 收敛.

(2) 用反证法, 假设广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 矛盾! 由此得证.

推论 1. 若函数 $f:[a,\omega)\to[0,+\infty)$ 在 $[a,\omega)$ 的任意闭子区间上可积, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散当且仅当 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$.

推论 2. 假设 $f, g : [a, \omega) \to [0, +\infty)$ 在 $[a, \omega)$ 的任意闭子区间上可积且 $\lim\limits_{x \to \omega^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \in [0, +\infty]$.

(1) 如果 $\alpha \in (0, +\infty)$, 则广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 和广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

(2) 如果 $\alpha = 0$ 并且广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) 如果 $\alpha = +\infty$ 且广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

推论 3. 设 $f:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ 在 $[1,+\infty)$ 的任意闭子区间上可积并且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}}=\lim_{x\to+\infty}x^pf(x)=\alpha\in[0,+\infty].$$

(1) 如果 $p>1$ 并且 $0\leqslant\alpha<+\infty$, 则广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 如果 $p\leqslant1$ 并且 $0<\alpha\leqslant+\infty$, 则广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

证明: (1) 由题设可知 $f(x)=O(\frac{1}{x^p})\ (x\to+\infty)$, 而当 $p>1$ 时, 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛, 于是由比较法则可知广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由题设可知 $\frac{1}{x^p}=O(f(x))\ (x\to+\infty)$, 并且当 $p\leqslant 1$ 时, 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 为发散, 于是由比较法则可知广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

推论 4. 设 $f:(0,b]\to[0,+\infty)$ 在 $(0,b]$ 的任意闭子区间上可积并且

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}}=\lim_{x\to0^+}x^pf(x)=\alpha.$$

(1) 如果 $p<1$ 并且 $0\leqslant\alpha<+\infty$, 则广义积分 $\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 如果 $p\geqslant1$ 并且 $0<\alpha\leqslant+\infty$, 则广义积分 $\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

证明: (1) 由题设可知 $f(x) = O\left(\frac{1}{x^p}\right)\ (x \to 0^+)$, 而当 $p < 1$ 时, 广义积分 $\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 为收敛, 于是由比较法则可知广义积分 $\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由题设可导出 $\frac{1}{x^p} = O(f(x))\ (x \to 0^+)$, 并且当 $p \geqslant 1$ 时, 广义积分 $\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 发散, 从而由比较法则可知广义积分 $\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

例 1. 判断 $\int_1^{+\infty} \frac{4x}{\sqrt{x+1}} \arctan \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 当 $x \to +\infty$ 时, 我们有

$$\frac{4x}{\sqrt{x+1}} \arctan \frac{1}{x} \sim \frac{4x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} \sim \frac{4}{\sqrt{x}},$$

又广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 发散, 因此广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{4x}{\sqrt{x+1}} \arctan \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

也为发散.

谢谢大家!