I.

一维有限深势阱中，有：

$$\begin{cases} \eta = \xi tan\xi(even), \eta = -\xi cot\xi(odd), \\ \xi^2 + \eta^2 = \frac{2\mu U_0 a^2}{\hbar^2}. \end{cases} \tag{1}$$

其中，

$$\xi = ka, \eta = \alpha a(\xi, \eta > 0)$$

$$k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}, \alpha = \frac{\sqrt{2\mu(U_0 - E)}}{\hbar}$$

（具体推导过程请参考网络学堂ppt“一维问题的解-课件1”中23-26页）

根据（1）中的函数图像，能级数目等于两个函数曲线在第一象限的交点的个数n，满足：

$$\frac{(n-1)\pi}{2} \leq \sqrt{\frac{2\mu U_0 a^2}{\hbar^2}} < \frac{n\pi}{2}$$

因此，能级个数为

$$\left[\sqrt{8\mu U_0 a^2/\hbar^2\pi^2}\right]$$

[x]代表$>x$同时最接近x的正整数

II.

概率流密度:

$$\begin{aligned} J = & \frac{i\hbar}{2m}(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi) \\ = & \frac{i\hbar}{2m}(\psi\frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{d}x} - \psi^*\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}) \\ = & \frac{i\hbar}{2m}[(Ae^{ikx} + Be^{-ikx})(A^*(-ik)e^{-ikx} + B^*(ik)e^{ikx}) \\ & -(A^*e^{-ikx} + B^*e^{ikx})(A(ik)e^{ikx} + B(-ik)e^{-ikx})] \\ = & \frac{\hbar k}{m}(|A|^2 - |B|^2) \end{aligned}$$

III.

一维无限深方势阱基态波函数：

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}cos\frac{\pi x}{a}$$

$$\begin{aligned} \psi(p) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-a/2}^{a/2}\sqrt{\frac{2}{a}}cos\frac{\pi x}{a}e^{-i\frac{px}{\hbar}}dx \\ = & \frac{1}{\sqrt{a\pi\hbar}}\int_{-a/2}^{a/2}cos\frac{\pi x}{a}cos\frac{px}{\hbar}dx \\ = & \frac{1}{2\sqrt{a\pi\hbar}}\int_{-a/2}^{a/2}\left[cos(\frac{\pi}{a} + \frac{p}{\hbar})x + cos(\frac{\pi}{a} - \frac{p}{\hbar})x\right]dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{a\pi\hbar}}\left(\frac{2cos(pa/2\hbar)}{\pi/a+p/\hbar}+\frac{2cos(pa/2\hbar)}{\pi/a-p/\hbar}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{a\pi\hbar}}\frac{2(\pi/a)cos(pa/2\hbar)}{(\pi/a)^2-(p/\hbar)^2}
\end{aligned}
$$

测量粒子的动量的概率分布为$|\psi(p)|^2$

IV.

根据一维定态薛定谔方程，有：

$$\psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, x < 0,$$

$$\psi(x) = Ce^{ik_2x}, x > 0$$

其中

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(V_0+E)}}{\hbar}, k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

利用波函数及其导数在x=0处的连续性，有：

$$A + B = C$$

$$k_1(A-B) = k_2C$$

得到：

$$(k_1-k_2)A = (k_1+k_2)B$$

所以，反射系数：

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}$$

透射系数：

$$T = 1 - R = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

V.

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - q\varepsilon x = \frac{1}{2}m\omega^2\left[(x-x_0)^2 - x_0^2\right]$$

其中，

$$x_0 = \frac{q\varepsilon}{m\omega^2}$$

令$x' = x - x_0$，则哈密顿变为

$$\hat{H}(x') = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x'^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x'^2 - \frac{1}{2}m\omega^2{x_0}^2$$

上式为一维谐振子哈密顿加上$-\frac{1}{2}m\omega^2{x_0}^2$ 所以，能量本征值为

$$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega - \frac{1}{2}m\omega^2{x_0}^2$$

本征波函数为

$$\phi_n(x) = \psi_n(x') = \psi_n(x - x_0)$$

其中，

$$\psi_n(x) = A_n e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2/2} H_n(\alpha x), \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, A_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n n!}}$$

VI.

定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x), x > 0$$

此即Hermite多项式所满足的微分方程，其解为：

$$\psi_n(x) = A_n e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2/2} H_n(\alpha x)$$

相应能量本征值为

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

其中，

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, A_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n n!}}$$

同时，

$$\psi(x) = 0, x < 0$$

根据x=0处的边界条件，则

$$\psi_n(0) = 0$$

Hermite多项式的性质，n只能取奇数（$n = 2m + 1, m = 0, 1, 2, ...$），因此能量本征值为

$$E_n = (2m + \frac{3}{2})\hbar\omega, m = 0, 1, 2, ...$$