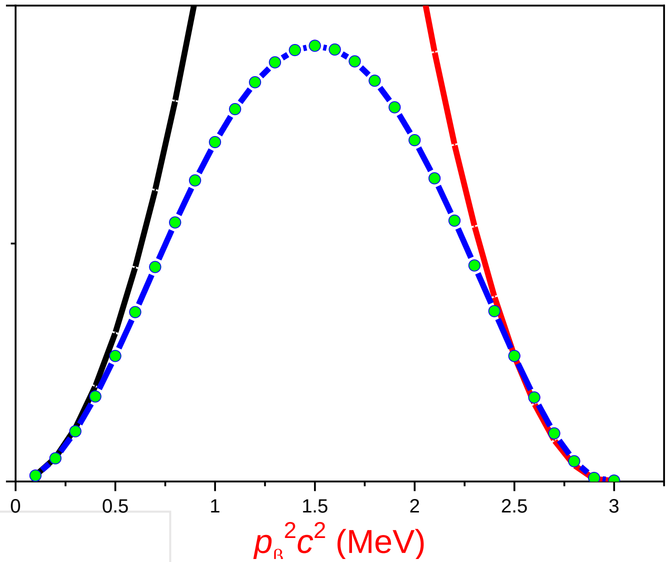
➢上节回顾：

- β衰变的三种方式
- β-、β+和EC过程的衰变能
- 如何判断它们发生了？

$$M_X(Z,A) > M_Y(Z+1,A)$$

$$M_X(Z,A) - M_Y(Z-1,A) > 2m_e$$

$$M_X(Z,A) - M_Y(Z-1,A) > \varepsilon_i/c^2$$



标题	课前作业9——2022年10月11日
发布时间	2022-10-11/周二 17:07
考试开始时间	2022-10-11/周二 17:07
考试截止时间	2022-10-13/周四 00:00
考试时长(分钟)	不限时
选项顺序	顺序
题目顺序	顺序
试卷查看权限	始终可见
成绩公布时间	2022-10-13/周四 09:00
答案公布时间	2022-10-13/周四 09:00

➢本节提要：

- β能谱的动量谱为什么是由两个“抛物线”折中而成的？
- 允许跃迁（l=0）、禁戒跃迁（l>0）
- β衰变中的选择定则——“它们”选择了“它们”带走的轨道角动量
- 利用居里描绘（库里厄图），你可以知道跃迁级次——“它们”应该带走的轨道角动量！

β^+衰变

轨道电子俘获

$$M_X(Z,A)-M_Y(Z-1,A)>2m_e$$

$$2m_e c^2 >> \varepsilon_i$$

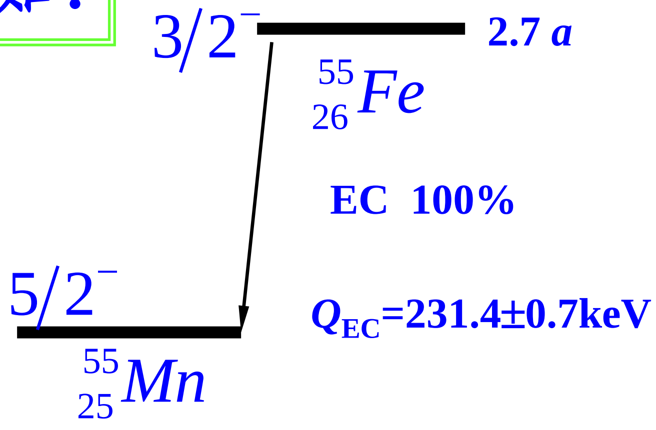
$$M_X(Z,A)-M_Y(Z-1,A)>\varepsilon_i/c^2$$

质量差大：β^+衰变、EC

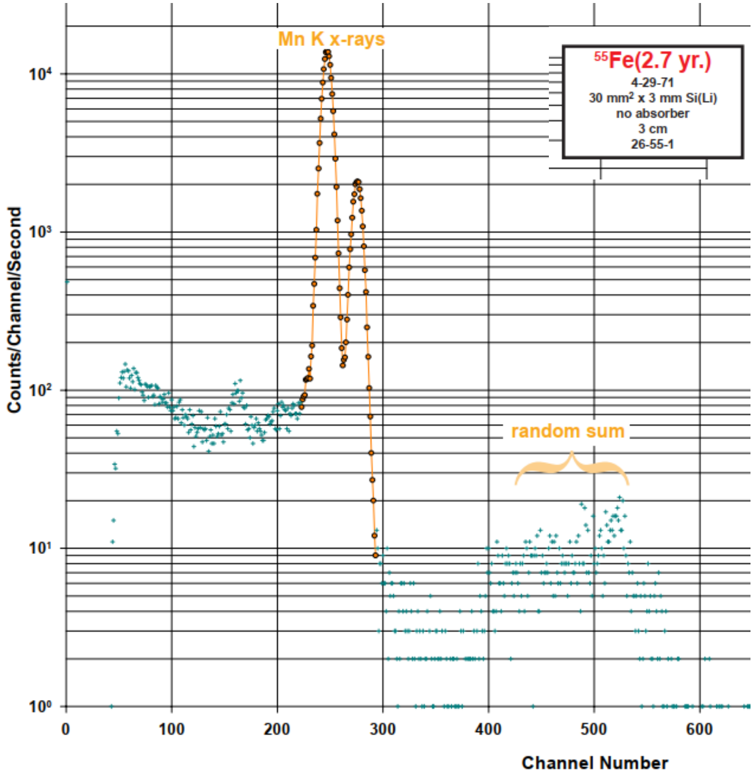
质量差小：EC

EC的中微子能量是单立的。

例如：

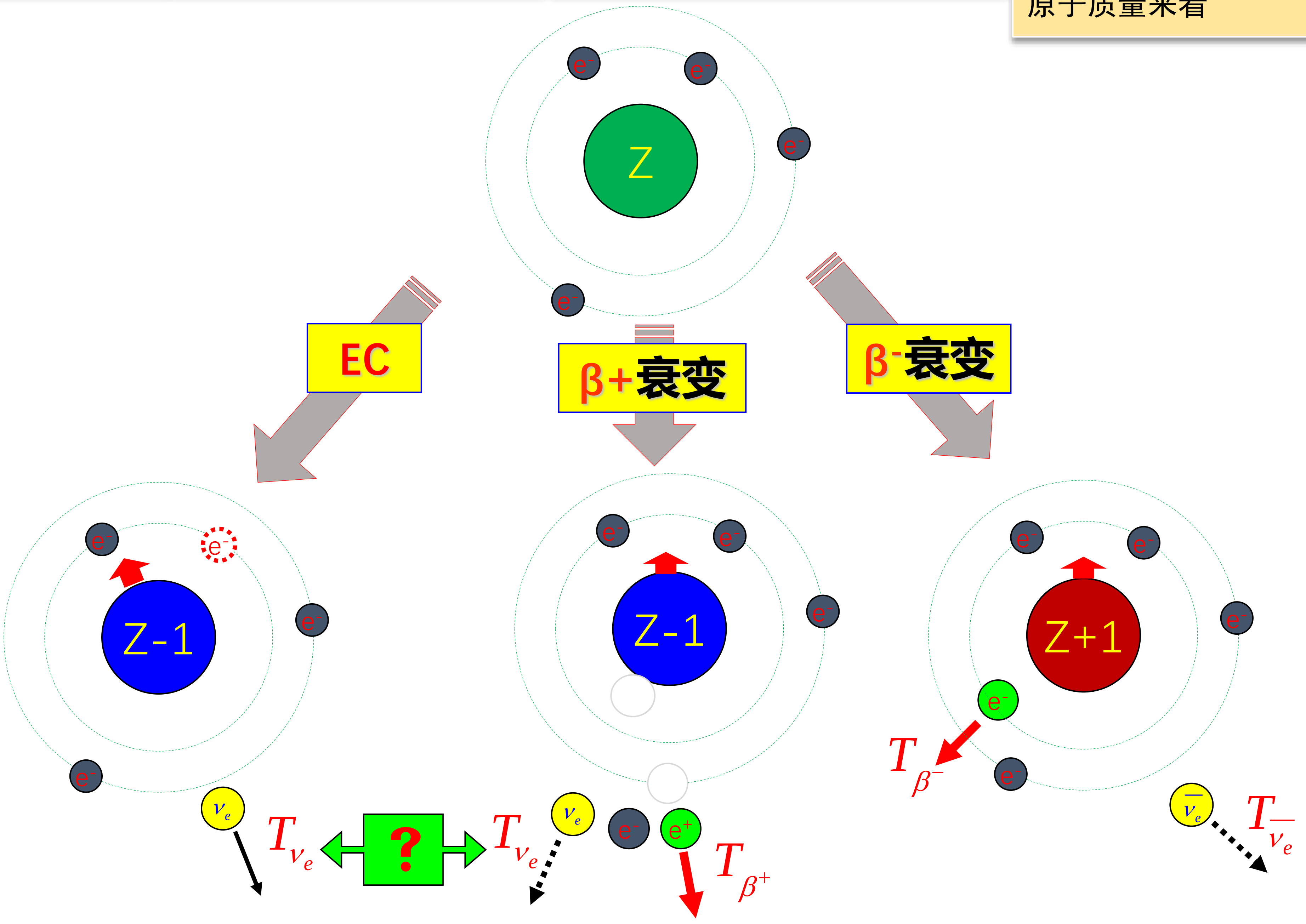


实验观察到^{55}Mn发出的5.898keV的特征X射线K_α线。

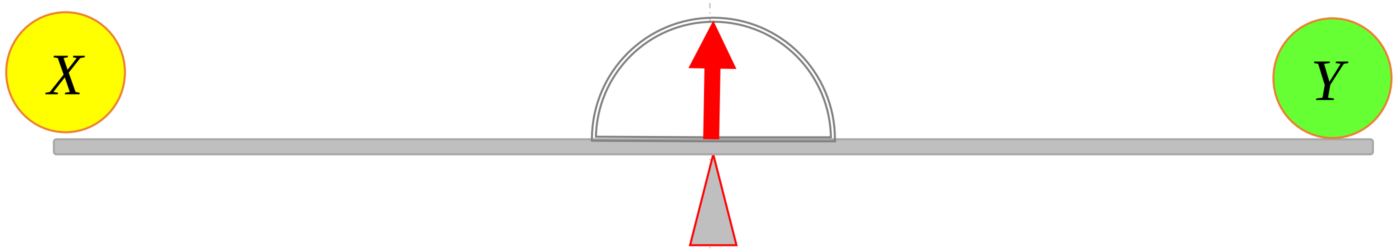


$$\Delta(26,55)-\Delta(25,55)$$
$$=(-57.479)-(-57.710)=0.231MeV<1.022MeV$$

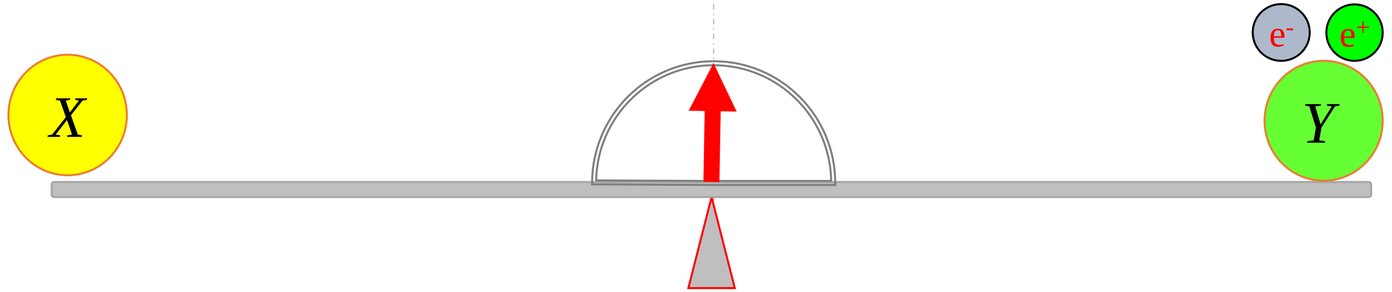
小结（β衰变三种类型）_1:核的事情，从原子质量来看



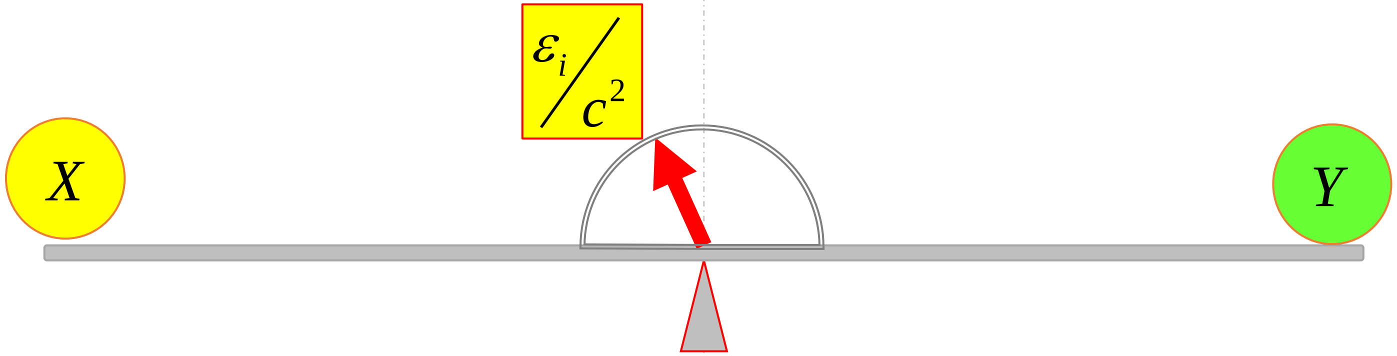
$\boxed{\beta^-:}$ $M_X(Z,A) > M_Y(Z+1,A)$



$\boxed{\beta^+:}$ $M_X(Z,A) - M_Y(Z-1,A) > 2m_e$



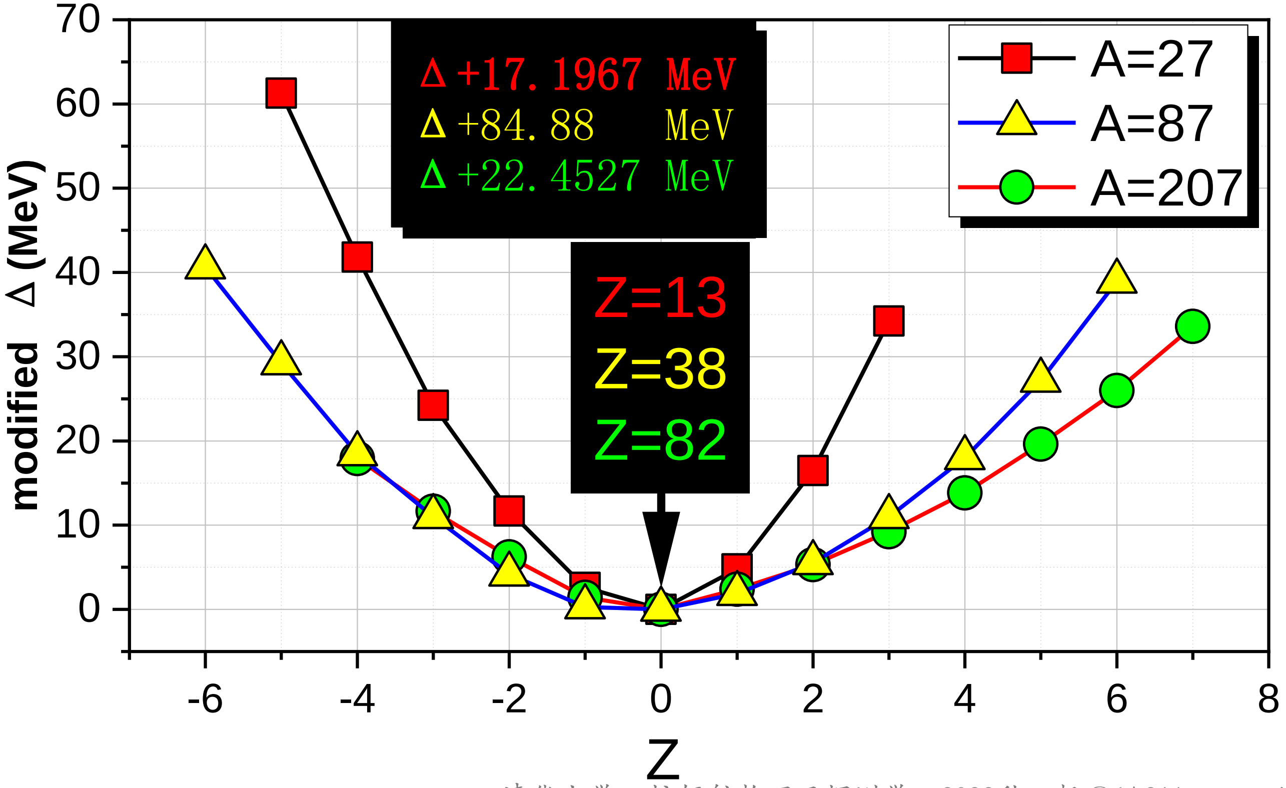
$\boxed{\mathbf{EC:}}$ $M_X(Z,A) - M_Y(Z-1,A) > \varepsilon_i / c^2$



在这页，你看见原子核了吗？

- 当满足β^+衰变条件时，也可能发生轨道电子俘获。
- **轻核**：衰变能较大，β^+几率>>俘获几率；
- **重核**：衰变能较小，俘获几率>>β^+几率；
- **中等**质量核：β^+衰变和俘获几率相仿，都较重要。

核素	$(\lambda_K/\lambda_{\beta+})_{th}$	$(\lambda_K/\lambda_{\beta+})_{exp}$
^{18}F	0.029	0.030 ±0.002
^{48}V	0.066	0.068 ±0.02
^{52}Mn	1.77	1.81 ±0.07
^{107}Cd	310	320 ±30



$$M(Z,A)$$
$$= c_0 - c_1 - \delta a_p A^{-1/2}$$
$$+ Z(M(^1H) - m_n)$$
$$+ \frac{a_c Z^2}{A^{1/3}} + \frac{a_{sym}(A/2 - Z)^2}{A}$$

多选题 1分

设置

在EC发生之后，下面哪句话是对的？

A 我们有可能看到动能取分立值的子核Y

B 我们有可能看到动能取分立值的反电子中微子$\bar{\nu}_e$

C 我们有可能看到动能取分立值的电子中微子ν_e

D 我们有可能看到能量取分立值的X射线

E 我们有可能看到动能取分立值的负电子

F 我们有可能看到动能取分立值的正电子

G 我们有可能看到动能取连续值的正电子

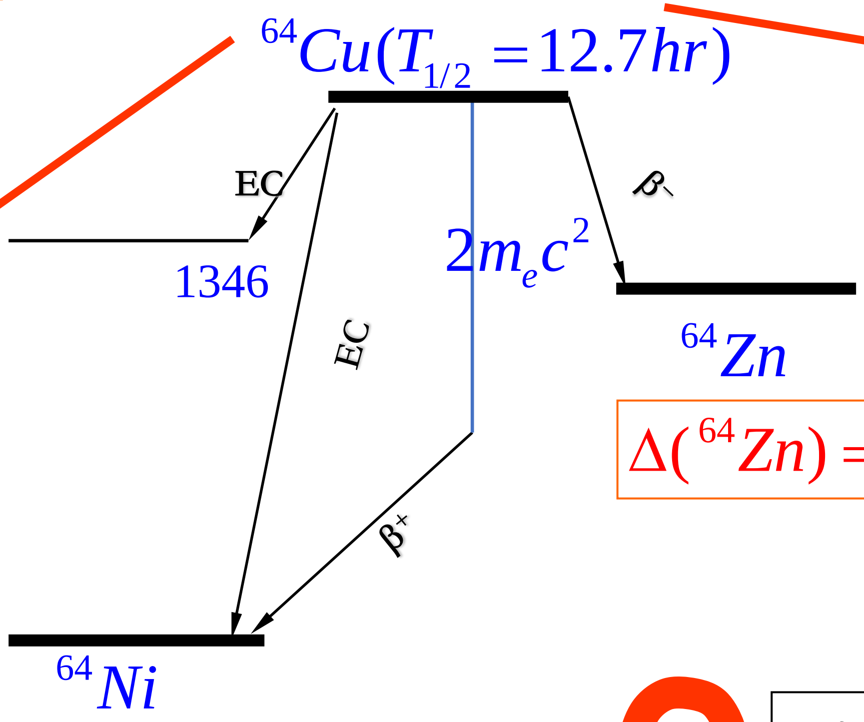
提交

小结（β衰变三种类型）_4: 同时具有β⁻, β⁺和EC衰变可能的核素？

一些核可能同时满足三个条件，可以同时以三种方式进行衰变，各有一定的分支比。

例如：^{64}Cu，

$\Delta(^{64}Cu) = -65.423$



$\Delta(^{64}Cu) > \Delta(^{64}Zn)$

$\Delta(^{64}Cu) - \Delta(^{64}Ni) = 1.675\mathrm{MeV} > 1.022MeV$

$\Delta(^{64}Zn) = -66.001$

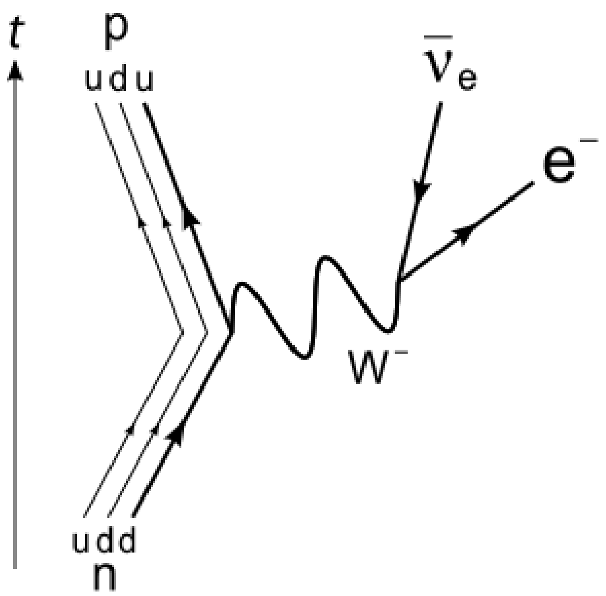
$\Delta(^{64}Ni) = -67.098$

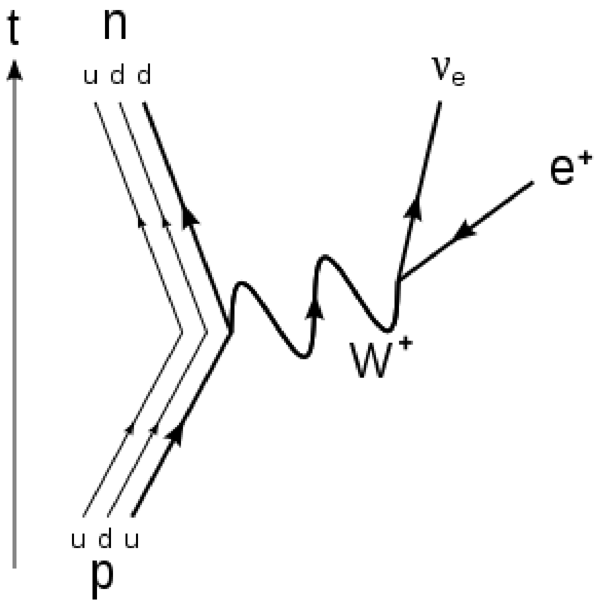
思考：什么样的核素与^{64}Cu特点类似？

	α衰变	β衰变
能发生的基本条件	衰变能>0	衰变能>0
出射粒子事先存在？	核子存在，但需要形成	β和中微子事先都不存在
		这两种粒子从哪里来？
出射粒子的能量	“单能”，非相对论	连续能谱，需考虑相对论效应
		为什么是连续的？具有什么形状？
发生的快慢程度	穿透势垒的概率	无势垒需要穿透！
		什么因素影响衰变速度？
禁戒条件	宇称守恒	宇称不守恒
		宇称在β衰变中起了什么作用？

费米理论的基本思想(解释疑问2)——β粒子从何而来?

1. 质子和中子是核子两种不同的量子态，β衰变是核中质子和中子两种量子态之间的跃迁；





2. 在核子两种量子态跃迁过程中放出电子和中微子，它们是核子不同状态跃迁的产物；

3. β衰变中放出电子和中微子，电子-中微子场与原子核的相互作用为弱相互作用，半衰期（10^{-3}s~10^{18}y）比电磁相互作用（10^{-16}s~10^{-4}s）要长得多。

费米黄金规则

Fermi’s Golden Rule

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar}\left|V_{fi}\right|^2 \rho(E_f)$$

衰变常数
Transition rate

$$V_{fi} = \int \psi_f^* V \psi_i \, dv$$

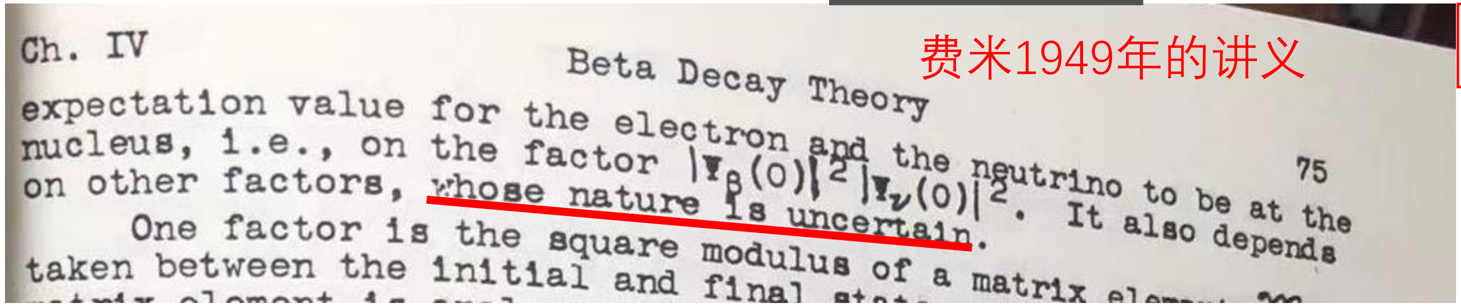
跃迁矩阵元

末态状态密度 $\frac{dn}{dE_f}$

transition operator

实验确定：V_{ector}-$A_{xial\ vector}$矢量 - 轴矢量相互作用

费米1949年的讲义


Ch. IV Beta Decay Theory 75
expectation value for the electron and the neutrino to be at the nucleus, i.e., on the factor $|\Psi_\beta(0)|^2 |\Psi_\nu(0)|^2$. It also depends on other factors, whose nature is uncertain.
One factor is the square modulus of a matrix element taken between the initial and final state

1957年,Sudarshan
http://quest.ph.utexas.edu/sudarshan_vminusa.html
☹ V-A theory: 1969年诺贝尔物理奖
☹ Quantum Optics: 2005年诺贝尔物理奖
https://en.wikipedia.org/wiki/E._C._George_Sudarshan

E.C.G.Sudarshan at TIFR Mumbai in 2009
Born 16 September 1931 Pallam, Kottayam, India
(16 September 1931 – 14 May 2018)

量子力学的微扰理论——单位时间发射动量处于p～p+dp间的β粒子的概率为：

dn: p～p+dp所对应的量子态数

$$I(p_\beta)dp_\beta=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\int\psi_f^* H\psi_i d\tau\right|^2\frac{dn}{dT_\beta}\quad(1)$$

代入(1):

$\psi_i=u_i$　　$\psi_f=u_f\phi_\beta\phi_\nu$　　$H=g$

始态：母核波函数

末态：子核，β，中微子波函数

g：描述弱用强度，类似e

$$I(p_\beta)dp_\beta=\frac{2\pi g^2}{\hbar}\left|\int u_f^*\varphi_\beta^*\varphi_\nu^* u_i d\tau\right|^2\frac{dn}{dT_\beta}\quad(2)$$

轻子波函数: (近似)平面波

$$I(p_\beta)dp_\beta = \frac{2\pi g^2}{\hbar}\left|\int u_f^* \varphi_\beta^* \varphi_\nu^* u_i d\tau\right|^2 \frac{dn}{dT_\beta} \qquad (2)$$

原子核对电子和中微子的波场影响很小，可视电子（近似）和中微子为自由粒子

用平面波描述β粒子和中微子的波函数：

归一化体积

$$\varphi_\beta^* = V^{-1/2}\exp(-i\vec{k}_\beta\cdot\vec{r})$$

$$\varphi_\nu^* = V^{-1/2}\exp(-i\vec{k}_\nu\cdot\vec{r})$$

波矢

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (3)$$

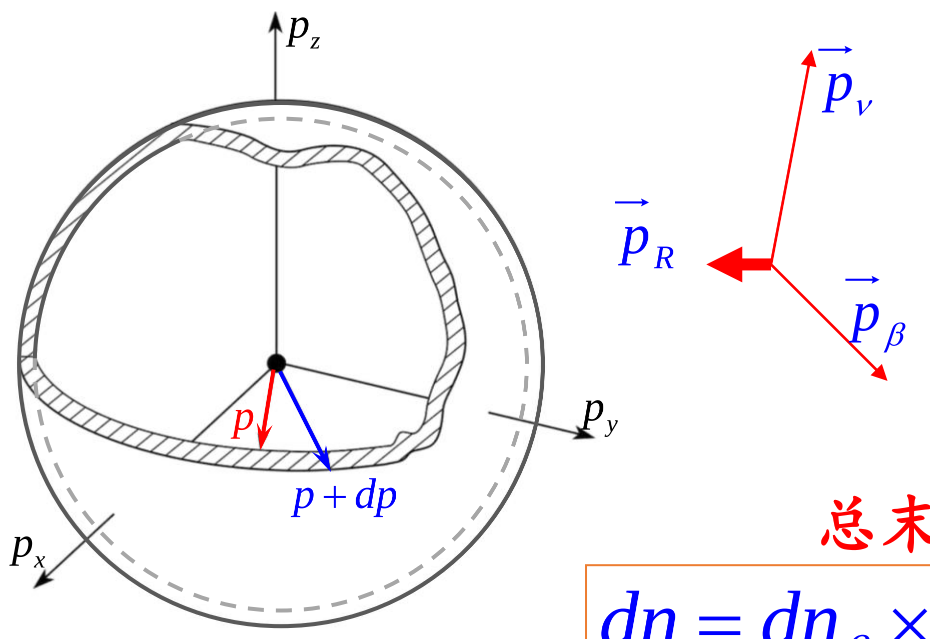
式(2)可写作：

$$I(p_\beta)dp_\beta = \frac{2\pi g^2}{\hbar V^2}\left|M_{if}\right|^2 \frac{dn}{dT_\beta} \qquad (4)$$

M_{if} 是跃迁矩阵元

$$M_{if} = \int u_f^* u_i \exp[-i(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]d\tau \qquad (5)$$

先来看看末态密度



$$I(p_\beta)dp_\beta = \frac{2\pi g^2}{\hbar V^2}\left|M_{if}\right|^2 \frac{dn}{dT_\beta}$$

总末态数

$$dn = dn_\beta \times dn_\nu$$

末态密度

$$\frac{dn}{dT_\beta} = \frac{dn_\beta dn_\nu}{dT_\beta} = \frac{p_\beta^2 p_\nu^2 dp_\beta dp_\nu}{4\pi^4\hbar^6 dT_\beta}V^2 \quad \textbf{(6)}$$

中微子的状态数

$$dn_\nu = \frac{4\pi p_\nu^2 dp_\nu \times V}{(2\pi\hbar)^3}$$

β粒子的状态数

$$dn_\beta = \frac{4\pi p_\beta^2 dp_\beta \times V}{(2\pi\hbar)^3}$$

(x, y, z, p_x, p_y, p_z)

动量空间 × 普通空间 = 相空间

相空间的体积元，**相格——一个量子态在相空间占据的体积**

用β来表达ν

忽略子核反冲动能(?)，则：

$$T_\nu + T_\beta = E_0$$

考虑到 $m_\nu = 0 \rightarrow T_\nu = cp_\nu$

$$cp_\nu + T_\beta = E_0$$

$$p_\nu = \frac{(E_0 - T_\beta)}{c} \Rightarrow \frac{dp_\nu}{dT_\beta} = \frac{-1}{c}$$

代入(6)得：

$$\frac{dn}{dT_\beta} = \frac{p_\beta^2 p_\nu^2 dp_\beta dp_\nu}{4\pi^4\hbar^6 dT_\beta} V^2 \Rightarrow \frac{dn}{dT_\beta} = \frac{p_\beta^2 (E_0 - T_\beta)^2 dp_\beta}{4\pi^4\hbar^6 c^3} V^2$$

m_ν=0时的β衰变跃迁几率公式

$$\frac{dn}{dT_\beta}=\frac{p_\beta^2(E_0-T_\beta)^2dp_\beta}{4\pi^4\hbar^6c^3}V^2 \qquad (6)$$

代入(4)

$$I(p_\beta)dp_\beta=\frac{2\pi g^2}{\hbar V^2}\left|M_{if}\right|^2\frac{dn}{dT_\beta} \qquad (4)$$

$$T_\beta=\sqrt{p_\beta^2c^2+m_0^2c^4}-m_0c^2$$

m_ν=0时的β衰变跃迁几率公式

$$\boxed{I(p_\beta)dp_\beta=\frac{g^2\left|M_{if}\right|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}\left(E_0-\sqrt{p_\beta^2c^2+m_0^2c^4}+m_0c^2\right)^2p_\beta^2dp_\beta} \qquad (7)$$

讨论一下（1）

$$I(p_\beta)=\frac{g^2\left|M_{if}\right|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}\left(E_0-\sqrt{p_\beta^2c^2+m_0^2c^4}+m_0c^2\right)^2p_\beta^2$$

情况1：当β粒子的动量仅仅比0大一点。

$$p_\beta\geq 0$$

$$I(p_\beta)\approx\frac{g^2\left|M_{if}\right|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}E_0^{\ 2}p_\beta^2$$

情况2：β粒子动量仅比最大值小一点。

$$I(p_\beta)=\frac{g^2|M_{if}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}\left(E_0-\sqrt{m_0^2c^4+p_\beta^2c^2}+m_0c^2\right)^2 p_\beta^2$$

$$p_\beta=p_{\beta,\max}-\Delta p_\beta$$

相对于E_0太小，可以忽略

$$I(p_\beta)=\frac{g^2|M_{if}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}\left(E_0-\sqrt{m_0^2c^4+p_{\beta,\max}^2c^2-2p_{\beta,\max}\Delta p_\beta c^2+\Delta p_\beta^{\ 2}c^2}+m_0c^2\right)^2 p_\beta^{\ 2}$$

$$\approx\frac{g^2|M_{if}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}\left(E_0+m_0c^2-\sqrt{(E_0+m_0c^2)^2-2p_{\beta,\max}\Delta p_\beta c^2}\right)^2 p_\beta^{\ 2}$$

$$=\frac{g^2|M_{if}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}(E_0+m_0c^2)^2\left(1-\sqrt{1-\frac{2p_{\beta,\max}\Delta p_\beta c^2}{(E_0+m_0c^2)^2}}\right)^2 p_\beta^{\ 2}$$

$$\sqrt{1-2x}\simeq 1-x\quad ,\text{if}\quad x\ll 1$$

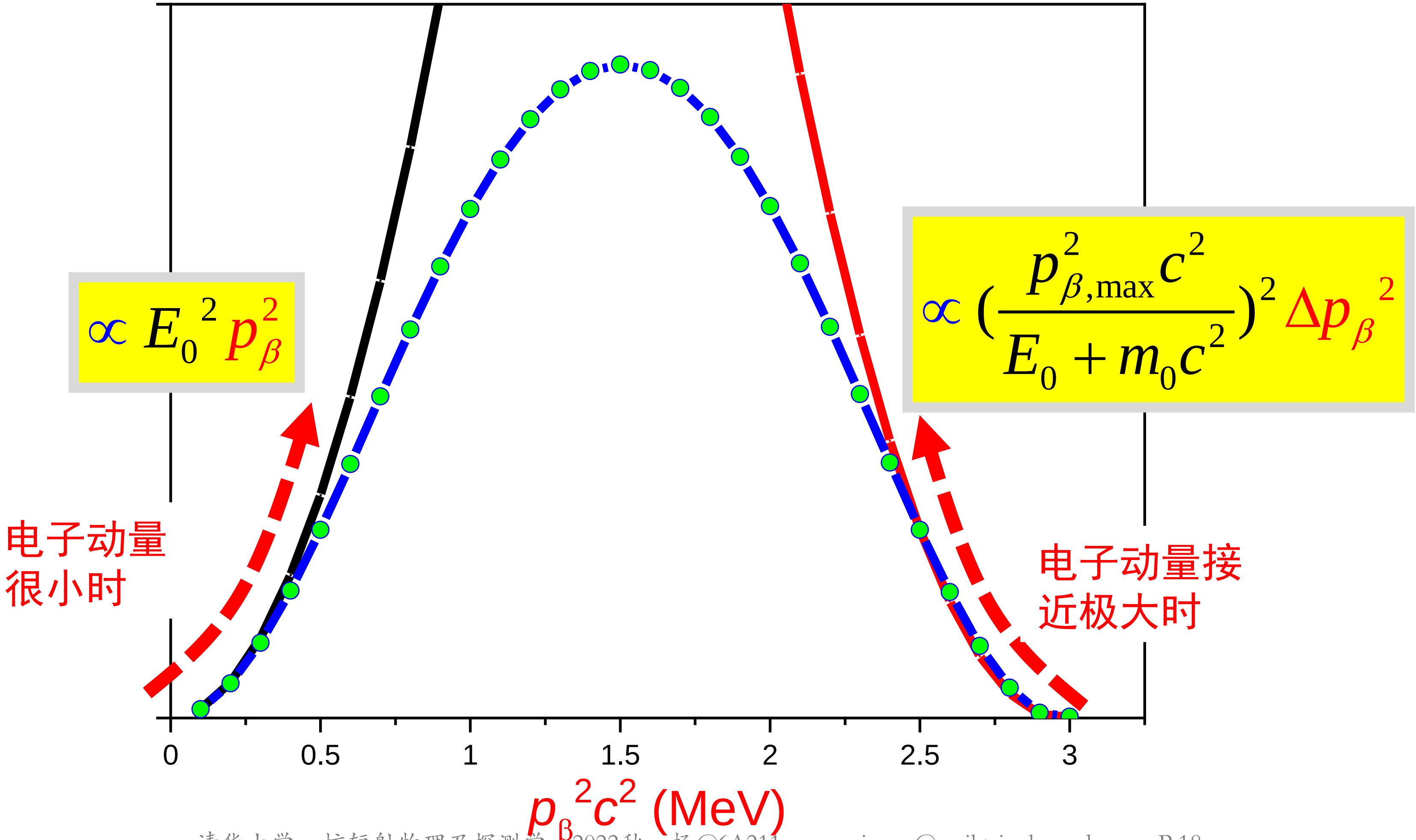
$$\rightarrow\quad 1\text{-}\sqrt{1-2x}\approx x$$

$$\approx\frac{g^2|M_{if}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}(E_0+m_0c^2)^2\cdot\left[\frac{p_{\beta,\max}\Delta p_\beta c^2}{(E_0+m_0c^2)^2}\right]^2(p_{\beta,\max}-\Delta p_\beta)^2$$

$$\approx\frac{g^2|M_{if}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}\left(\frac{p_{\beta,\max}\Delta p_\beta c^2}{E_0+m_0c^2}\right)^2 p_{\beta,\max}^2=\frac{g^2|M_{if}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}\left(\frac{p_{\beta,\max}^2c^2}{E_0+m_0c^2}\right)^2\Delta p_\beta^{\ 2}$$

动量谱的形状

$$I(p_\beta)=\frac{g^2\left|M_{if}\right|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}\left(E_0-\sqrt{p_\beta^2c^2+m_0^2c^4}+m_0c^2\right)^2p_\beta^2$$



β谱的形状：动量谱，动能谱

$$\frac{dn}{dp_\beta}$$

$$\frac{dn}{dT_\beta}$$

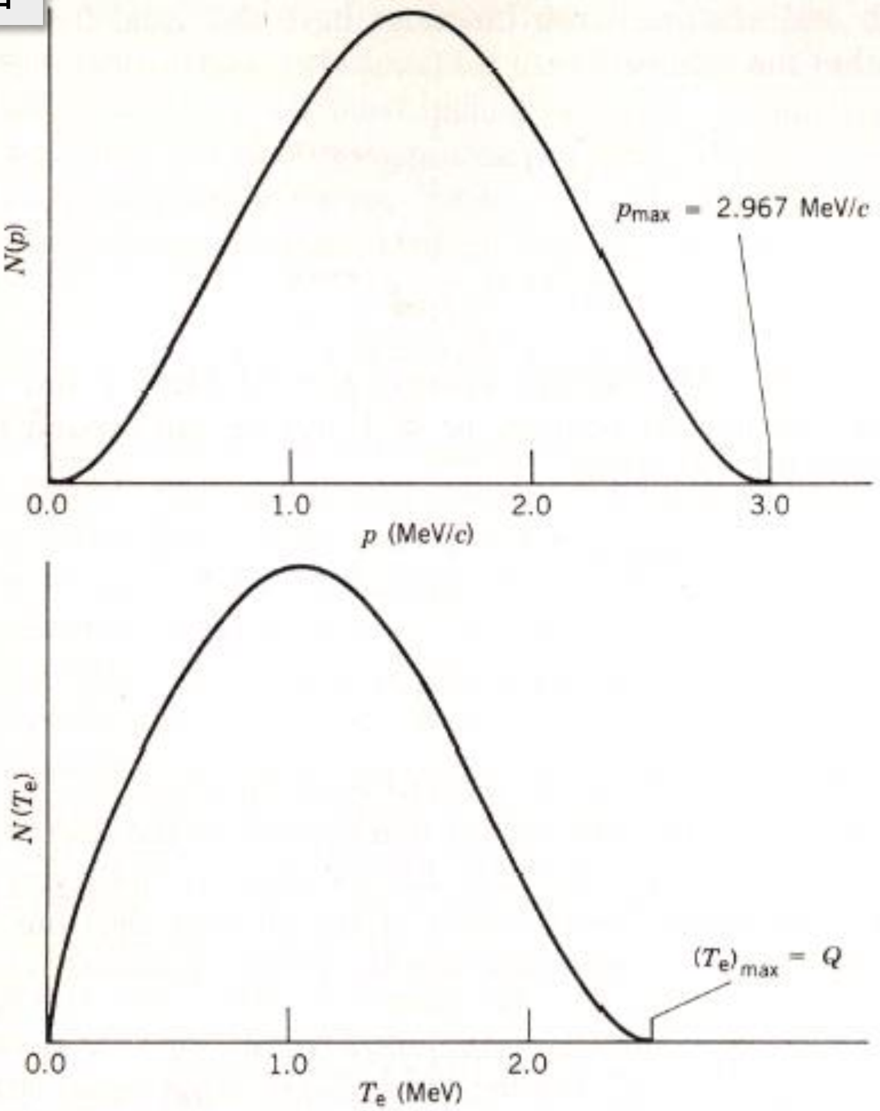


Figure 9.2 Expected electron energy and momentum distributions, from Equations 9.24 and 9.25. These distributions are drawn for $Q = 2.5$ MeV.

$$T_\beta = \sqrt{p_\beta^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2$$

$$dT_\beta = \frac{c^2 p_\beta}{\sqrt{p_\beta^2 c^2 + m_0^2 c^4}} dp_\beta$$

$$\frac{dp_\beta}{dT_\beta} = \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{m_0^2}{p_\beta^2}}$$

β谱的形状：β^- vs β^+?

动量、动能谱的区别是什么？

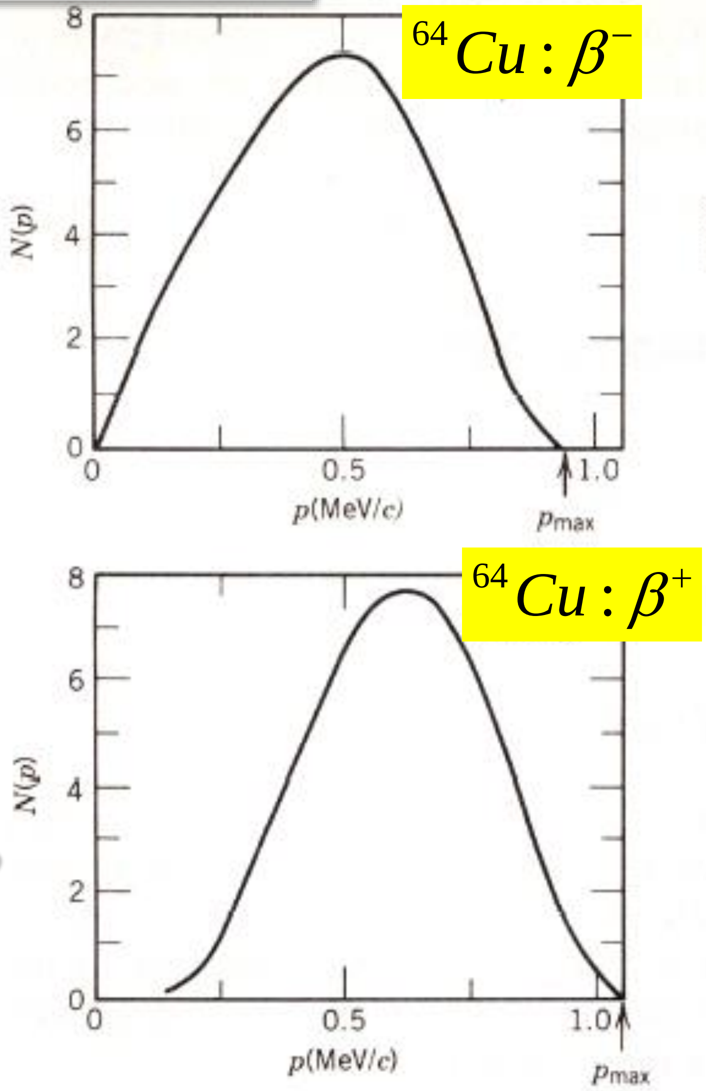
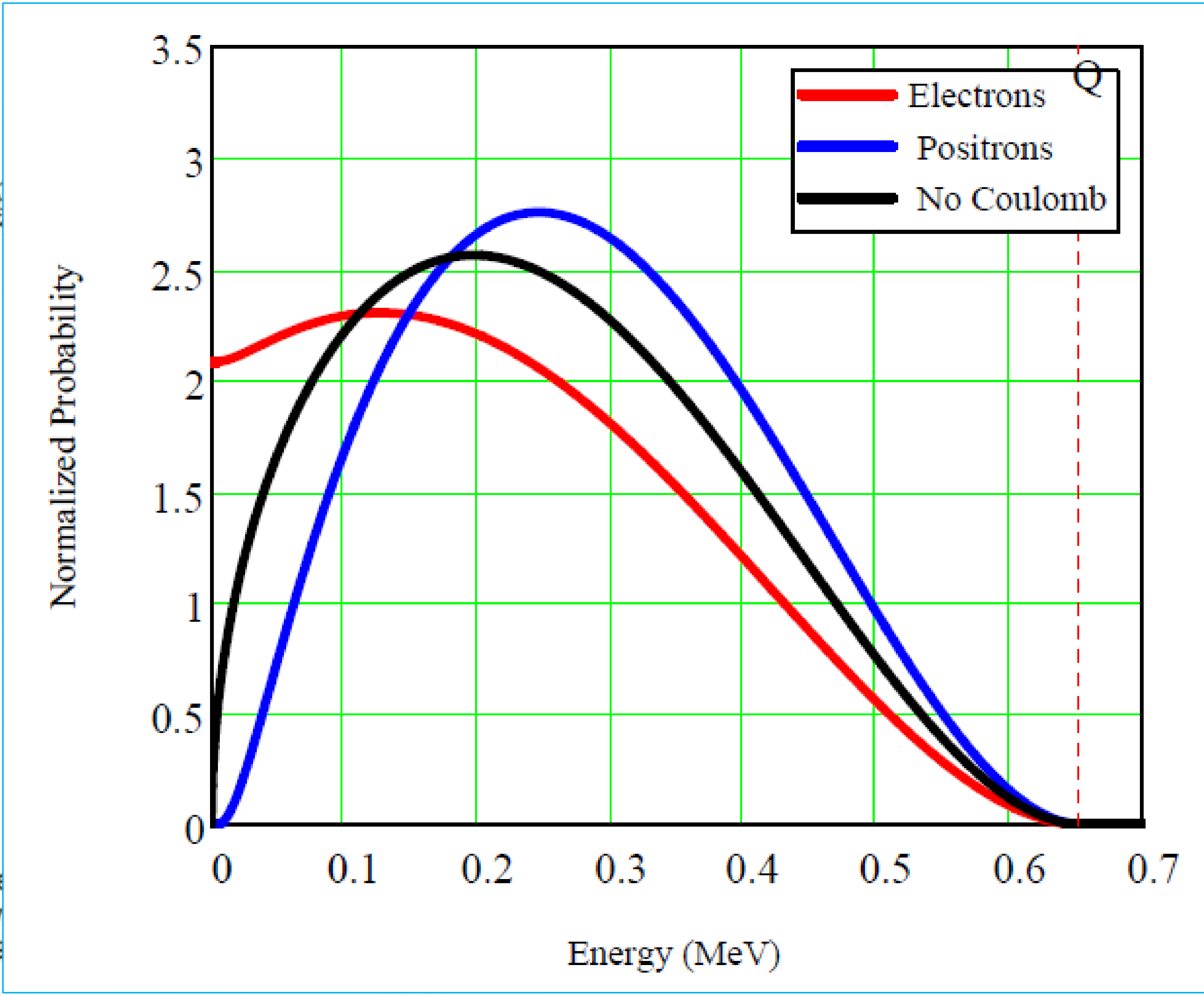


Figure 9.3 Momentum and kinetic ene
emitted in the decay of ^{64}Cu. Compare w
the Coulomb interactions with the daughte
Nucleus (New York: McGraw-Hill, 1955).



考虑库仑改正因子(Fermi function)，费米函数

(7)式还要考虑**核库仑场**的影响，加上**库仑改正因子**，有：

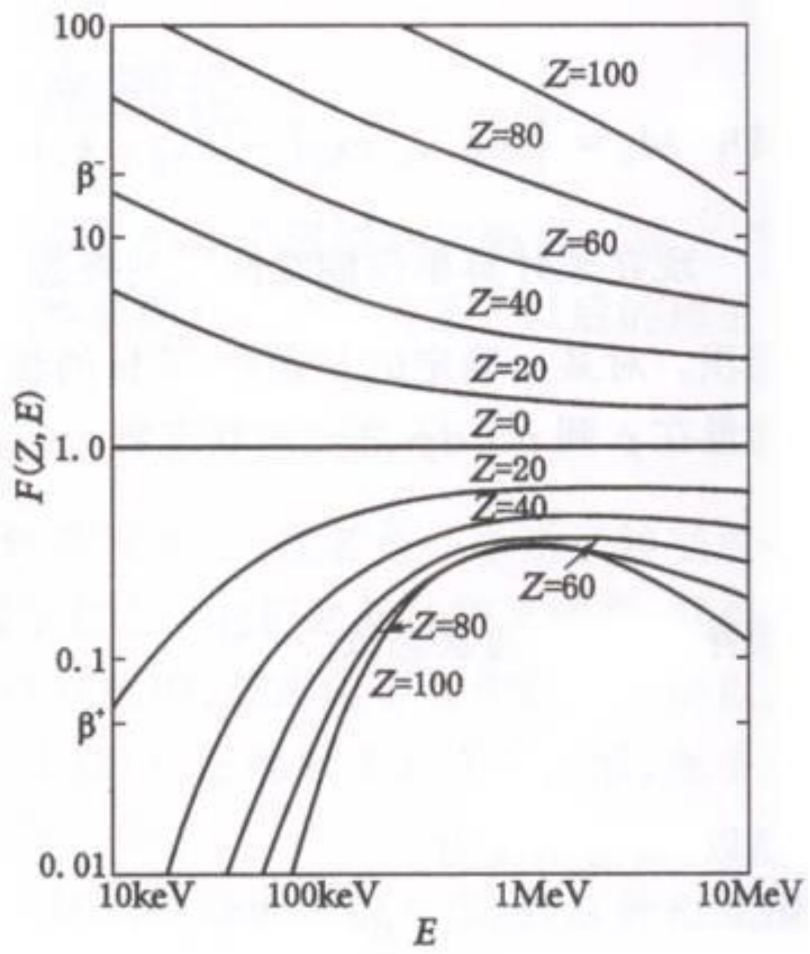
$$I(p_\beta)dp_\beta=\frac{g^2\left|M_{if}\right|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}F(Z,T_\beta)(E_0-T_\beta)^2p_\beta^2dp_\beta$$

Z较小时，用非相对论近似

$$F(Z,T_\beta)=\frac{x}{1-e^{-x}}$$

其中 v是β粒子速度；

$$\begin{cases}\beta^- & x=+\dfrac{2\pi Zc}{137v}\\ \beta^+ & x=-\dfrac{2\pi Zc}{137v}\end{cases}$$



小结（末态密度）

- 末态密度是费米黄金规则中重要的一项。
- 一方面，它决定了β粒子的动量谱是“两个抛物线”的“折中”；当然，这是在假设轻子不受库仑场影响的前提下成立的，库仑改正因子对其做了修正。
- 另一方面，它也会影响衰变速度，毕竟，直观地看，末态密度越大，意味着母核衰变为子核时，“落脚点”越多，衰变的速度就越快。
- 但是，β衰变有可能是很慢的，半衰期分布范围很大（10^{-3}s～10^{24}a），仅靠末态密度来解释，够不够呢？
- 不够！除了末态密度之外，跃迁矩阵元有着更本质的影响。
- 在讨论跃迁矩阵元之前，先看看衰变中出射粒子带走角动量的问题。

轻子组带走的轨道角动量

$$^{87}Rb\left({}^{3}\!/_{2}{}^{-}\right)\xrightarrow{\beta^{-},4.97\times10^{10}a}{}^{87}Sr\left({}^{9}\!/_{2}{}^{+}\right)+e^{-}+\nu_{e}$$

$$\Delta(^{87}Rb)-\Delta(^{87}Sr)=-84.596MeV-\left(-84.869MeV\right)=0.273MeV$$

在这个衰变中，轻子组（电子和中微子）必须带走角动量。

1. 轻子组至少要带走多少角动量？

2. 经典角度看，它俩能带走多少轨道角动量，如何估算其上限？

单选题 1分

设置

β衰变后放出的能量若为1MeV，哪种情况下轻子带走的动量更大?

A 中微子动能为0，电子获得1MeV（子核反冲动能忽略）

B 电子动能为0，中微子获得1MeV（子核反冲动能忽略）

提交

497亿年，好长的半衰期，怎么来的？

$$^{87}Rb(3/2^{-}) \xrightarrow{\beta^-,4.97\times10^{10}a} {}^{87}Sr(9/2^{+}) + e^- + \nu_e$$

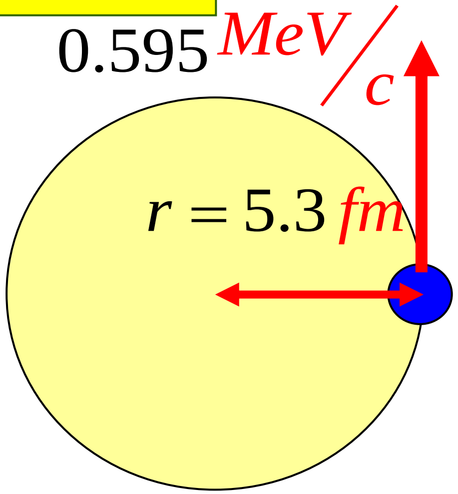
“β粒子+中微子”能带走多大的角动量？

$$\Delta(^{87}Rb)-\Delta(^{87}Sr)$$
$$=-84.596MeV-(-84.869MeV)=0.273MeV$$

粒子带走的动量p vs 动能E_k?

$$E_k+m_0c^2=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}$$
$$\rightarrow p=\frac{\sqrt{E_k^2+2E_k\cdot m_0c^2}}{c}$$

让电子带走所有的动能，此时轻子组带走的动量/角动量最大



同样动能下电子带走的动量更多，则衰变中轻子带走的最大动量为：

$$p_\beta=\frac{\sqrt{0.273^2+2\cdot0.273\cdot0.511}MeV}{c}=0.595MeV/c$$

$$\frac{p_\beta\cdot r}{\hbar}=\frac{0.595MeV\cdot5.3fm}{\hbar c}$$
$$=\frac{3.15MeV\cdot fm}{197MeV\cdot fm}=0.016<<1$$

现在可以考虑跃迁矩阵元了

$$I(p_\beta)dp_\beta = \frac{g^2\left|M_{if}\right|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}\overbrace{F(Z,T_\beta)}^{\text{库仑改正因子}}\overbrace{(E_0-T_\beta)^2p_\beta^2}^{\text{末态密度}}dp_\beta$$

$$\boxed{M_{if}=\int \underset{\text{子核}}{u_f^*}\,\underset{\text{母核}}{u_i}\,\underbrace{\exp[-i(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]}_{\text{轻子“二人组”}}d\tau}$$

跃迁矩阵元→跃迁分类

$$\exp[-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_\beta+\vec{p}_\nu)\cdot\vec{r}]$$

= **做泰勒展开**

$$1+\frac{(\vec{p}_\beta+\vec{p}_\nu)\cdot\vec{r}}{\hbar}\cdot\frac{(-i)^1}{1!}+\left[\frac{(\vec{p}_\beta+\vec{p}_\nu)\cdot\vec{r}}{\hbar}\right]^2\cdot\frac{(-i)^2}{2!}+\cdots+\left[\frac{(\vec{p}_\beta+\vec{p}_\nu)\cdot\vec{r}}{\hbar}\right]^l\cdot\frac{(-i)^l}{l!}+\cdots \quad (8)$$

$$\frac{(\vec{p}_\beta+\vec{p}_\nu)\cdot\vec{r}}{\hbar}\le ?$$

$$p=\frac{\sqrt{E_k^2+2m_0c^2E_k}}{c}$$

若1MeV的β粒子

$$p_\beta^2=\frac{(T_\beta+2m_ec^2)T_\beta}{c^2}\simeq 8m_e^2c^2$$

于是(8)中的高阶量：

$$\left|\frac{(\vec{p}_\beta+\vec{p}_\nu)\cdot\vec{r}}{\hbar}\right|\le\frac{p_\beta}{\hbar}\cdot r=\frac{\sqrt{8}m_ec^2}{\hbar c}\cdot r_0A^{1/3}$$

$$=\frac{\sqrt{8}\cdot 0.511MeV\cdot 1.2\,fm}{197MeV\cdot fm}\cdot A^{1/3}$$

$$=\frac{A^{1/3}}{114}\approx\frac{1}{10}\sim\frac{1}{100}$$

在级数中，<u>第一项贡献最大</u>，以后各项依次很快递减。

做球面波展开——与轨道角动量有关

将**平面波**按不同的**轨道角动量l**正交分解成**球面波**，是我们更喜欢的方式

$$\exp[-i(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(-i)^l \underbrace{j_l[(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]}_{\text{球贝塞尔函数}}\underbrace{P_l(\cos\theta)}_{\text{勒让德多项式}} \quad \textbf{(9)}$$

因为 $(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}<<1$

球贝塞尔函数渐近为 $$j_l[(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]\approx\frac{[(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]^l}{\boxed{(2l+1)!!}}$$

$$\boxed{(2l+1)\times(2l-1)\times\cdots\times 1}$$

$$\exp[-i(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+1)(-i)^l}{(2l+1)!!}[(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]^l P_l(\cos\theta) \quad (10)$$

正交分解的好处

$$\int P dv = \int \psi^* \psi dv$$

$$\psi = \exp[-i(\vec{k}_\beta + \vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)(-i)^l}{(2l+1)!!}[(\vec{k}_\beta + \vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]^l P_l(\cos\theta)$$

先仅看勒让德函数一项

$$\frac{1}{4\pi}\int P_l(\cos\theta)\cdot P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \begin{cases} \dfrac{1}{2l+1} & if: l = l' \\ 0 & if: l \neq l' \end{cases}$$

$4\pi\times$	$P_0(\cos\theta)$	$P_1(\cos\theta)$	$P_2(\cos\theta)$	$P_3(\cos\theta)$
$P_0(\cos\theta)$	1	0	0	0
$P_1(\cos\theta)$	0	$1/3$	0	0
$P_2(\cos\theta)$	0	0	$1/5$	0
$P_3(\cos\theta)$	0	0	0	$1/7$

平面波中不同l（轨道角动量）项间的差异

$$^{87}Rb(3/2^-) \xrightarrow{\beta^-, 4.97\times10^{10}a} {}^{87}Sr(9/2^+) + e^- + \nu_e \qquad kr = 0.016$$

		各项的出现概率	各项的出现概率
$l=0$	$[(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]^0 P_0(\cos\theta)$	$(kr)^0=1$	1
$l=1$	$-i\cdot[(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]^1 P_1(\cos\theta)$	$\frac{1}{3}\cdot(kr)^2$	8.5×10^{-5}
$l=2$	$\frac{-1}{3}\cdot[(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]^2 P_2(\cos\theta)$	$\frac{1}{45}\cdot(kr)^4$	1.5×10^{-9}
$l=3$	$\frac{i}{15}\cdot[(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]^3 P_3(\cos\theta)$	$\frac{1}{1575}\cdot(kr)^6$	1.1×10^{-14}
$l=4$	$\frac{1}{105}\cdot[(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]^4 P_4(\cos\theta)$	$\frac{1}{99225}\cdot(kr)^8$	4.3×10^{-20}

概率级差

$$\frac{(kr)^2}{4l^2-1}$$

l=0有贡献→允许跃迁

将轻子波函数代入跃迁矩阵元，第1项贡献最大，以后各项依次很快递减。

若第1项(**l =0**) **被允许有贡献**:

$$\exp[-i(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+1)(-i)^l}{(2l+1)!!}[(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]^l P_l(\cos\theta)$$

$$\exp[-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_\beta+\vec{p}_\nu)\cdot\vec{r}]\approx 1$$

$$M_{if}=\int u_f^* u_i \exp[-i(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]d\tau$$

$$M_{if}=\int u_f^* u_i d\tau \equiv M$$

此时跃迁称作**允许跃迁(allowed decay)**

M 称为**原子核矩阵元**，只与原子核有关，与轻子无关。

允许跃迁有大的衰变常数，但有时它是不被允许的！

l=0无贡献→禁戒跃迁

当$l=0\ \hbar$项被禁戒而贡献为零时，就要考虑$l>0\hbar$的禁戒跃迁(forbidden decay)了：

- 当第2项($l=1\ \hbar$)主要贡献，为一级禁戒跃迁；
- 当第3项($l=2\ \hbar$)主要贡献，为二级禁戒跃迁；
- 当第n+1项($l=n\ \hbar$)主要贡献，为n级禁戒跃迁；

由于 $(\vec{k}_\beta+\vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}\approx 0.1\sim 0.01$ $\quad I(p_\beta)dp_\beta\propto\left|M_{if}\right|^2\propto(kr)^{2l}$

允许跃迁概率 >> **一级禁戒**跃迁概率；

一级禁戒跃迁概率 >> **二级禁戒**跃迁概率；

…… ……；

级次越高，跃迁几率越小，每级相差～10^{-4}

小结（球面波分解）

- 我们对电子和中微子的**平面波**做**球面波分解**，得到了**l ħ=0ħ, 1ħ, 2ħ , 3ħ …**的各分项；这些分项之间是独立（正交）的，因此我们在分析其中任意一项时，可以不关心其它项；
- 这里的**l ħ**是轻子组（电子+中微子）带走的**轨道角动量（不是总角动量）**；
- 不妨假设**kr=0.1**（这算比较大了），则在该平面波中分别看到的**l ħ=0ħ, 1ħ, 2ħ, 3ħ …分量**的比例关系是：**1，3.3×10^{-3}, 6.7×10^{-6}, 2.8×10^{-8}**，这说明高轨道角动量的成分是很少的。
- 在真正的β衰变中，这些不同l 的分量会按照这里的比例出现吗？
- 不，此述只是**数学上**的分析，并未引入任何**物理考量**，实际比例要看母子核之间**自旋宇称**关系。

下面我们来看看**选择定则**

允许跃迁的选择定则

在β衰变的孤立系统中角动量守恒，母子核的**角动量差**由两个轻子的**自旋**和**轨道角动量**决定。

$$\vec{I}_i = \vec{I}_f + \vec{s} + \vec{l}$$

允许跃迁 $\boxed{\vec{l} = 0}$

$$\vec{I}_i = \vec{I}_f + \vec{s}$$

轻子总自旋 $\vec{s} = \vec{s}_e + \vec{s}_\nu$

(1) 费米(F)选择定则，F跃迁，F相互作用。

(2)伽莫夫-泰勒(G-T)选择定则,G-T跃迁, G-T相互作用。

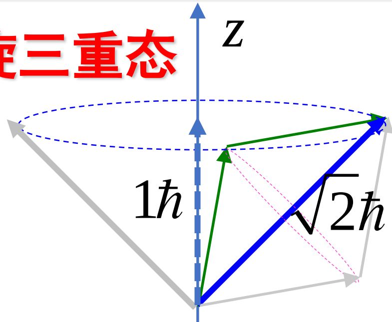
$s = 0$，电子和中微子自旋**反平行**，轻子**自旋单态**

$0\hbar$

$$I_i = I_f$$

$$\Delta I = I_i - I_f = 0$$

$s = 1$，电子和中微子自旋**平行**，轻子**自旋三重态**



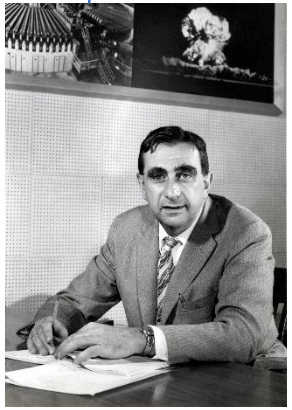
$$I_f = I_i + 1,\ I_i,\ I_i - 1$$

$$\Delta I = -1, 0, +1$$

允许跃迁的自旋选择定则

$$\boxed{\Delta I = 0, \pm 1}$$

? $0^\pm \rightarrow 0^\pm$ “✓”



? $0^\pm \rightarrow 0^\pm$ “✗”

再说说宇称

β衰变母子核宇称的变化等于轻子“**带走**”的轨道宇称，

$$\pi_i = \pi_f (-1)^l$$

>0

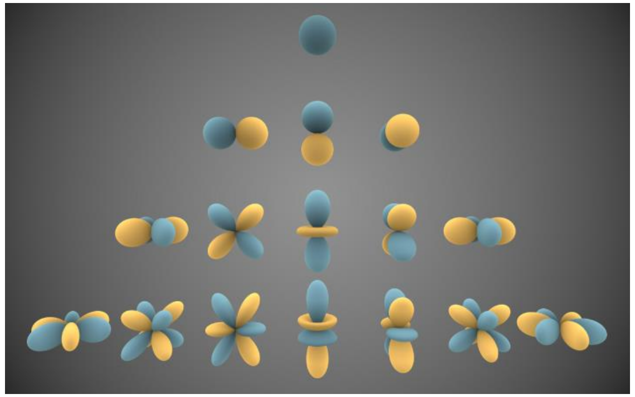
偶函数

$$\exp[-i(\vec{k}_\beta + \vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)(-i)^l}{(2l+1)!!}[(\vec{k}_\beta + \vec{k}_\nu)\cdot\vec{r}]^l P_l(\cos\theta)$$

$$M_{if} = \int u_f^* u_i \varphi_e^* \varphi_{\bar{\nu}_e}^* d\tau$$

对称性

$$\boxed{P_l(\cos\theta)} \quad \boxed{(-1)^l}$$



β衰变的**宇称选择定则**

$$\pi_i \pi_f (-1)^l = +1 \rightarrow \Delta\pi = \frac{\pi_f}{\pi_i} = (-1)^l$$

允许跃迁的宇称选择定则

$$\Delta\pi = (-1)^0 = +1$$