电磁学
Electromagnetism

姜开利

清华大学物理系

2017年春季学期

电磁学

教材： 胡友秋，程福臻，叶邦角

电磁学与电动力学（上册）

(科学出版社，北京，2008)

静电能 Outline

（1）为什么要单独讲静电能？

（2）两种等价的观点

（3）点电荷系的静电能

（4）连续电荷分布的静电能

（5）有电介质存在时的静电能

（6）由静电能到静电力

为什么要单独讲静电能？

能 量 是 一 个 标 量

利 用 虚 功 可 以 计 算 力

克 服 体 系 中 的 内 力 做 的 功 等 于 体 系 能 量 的 增 加

$$-\vec{F}\cdot d\vec{r} = \delta W$$

如 同 从 电 势 计 算 电 场 一 样

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

$$\vec{F} = -\nabla W$$

两种等价的观点

能 量 储 存 在 电 荷 系 中

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i} q_i U_i$$

能 量 储 存 在 电 场 中

$$W = \frac{1}{2}\iiint \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

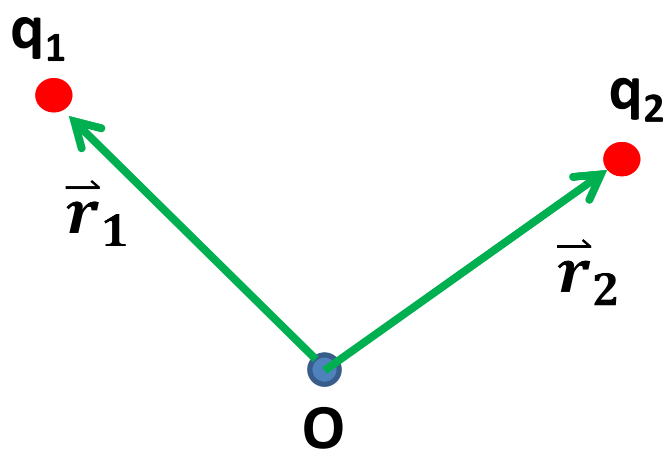
两个点电荷间的相互作用电能

（1）设想q_2从无穷远移动到$\vec{r}_2$处

$$U_{12}=\int_{\infty}^{\vec{r}_2}-\vec{E}_1\cdot d\vec{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

获得的电势能

$$W_{12}=U_{12}\cdot q_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$



（2）再设想q_1从无穷远移动到$\vec{r}_1$处

$$U_{21}=\int_{\infty}^{\vec{r}_1}-\vec{E}_2\cdot d\vec{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

获得的电势能 $W_{21}=U_{21}\cdot q_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$

两个点电荷间的相互作用电能

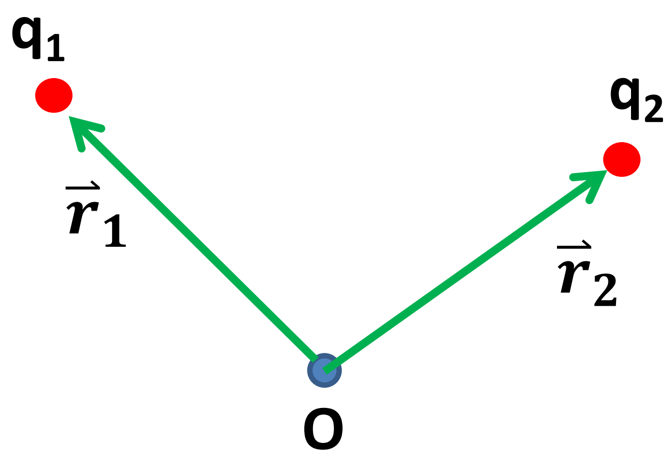
$$W_{12}=W_{21}=\frac{1}{2}(U_{21}\cdot q_1+U_{12}\cdot q_2)$$

从相互作用电能到相互作用力

（1）q_2受到q_1的力

$$\vec{F}_{12} = -\nabla^{(2)} W_{12} = \frac{-q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\nabla^{(2)}\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}$$



（2）q_1受到q_2的力

$$\vec{F}_{21} = -\nabla^{(1)} W_{21} = \frac{-q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\nabla^{(1)}\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}$$

注意 $\nabla^{(1)}\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} = -\nabla^{(2)}\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$

点电荷系的静电能

推广到 N 个点电荷系

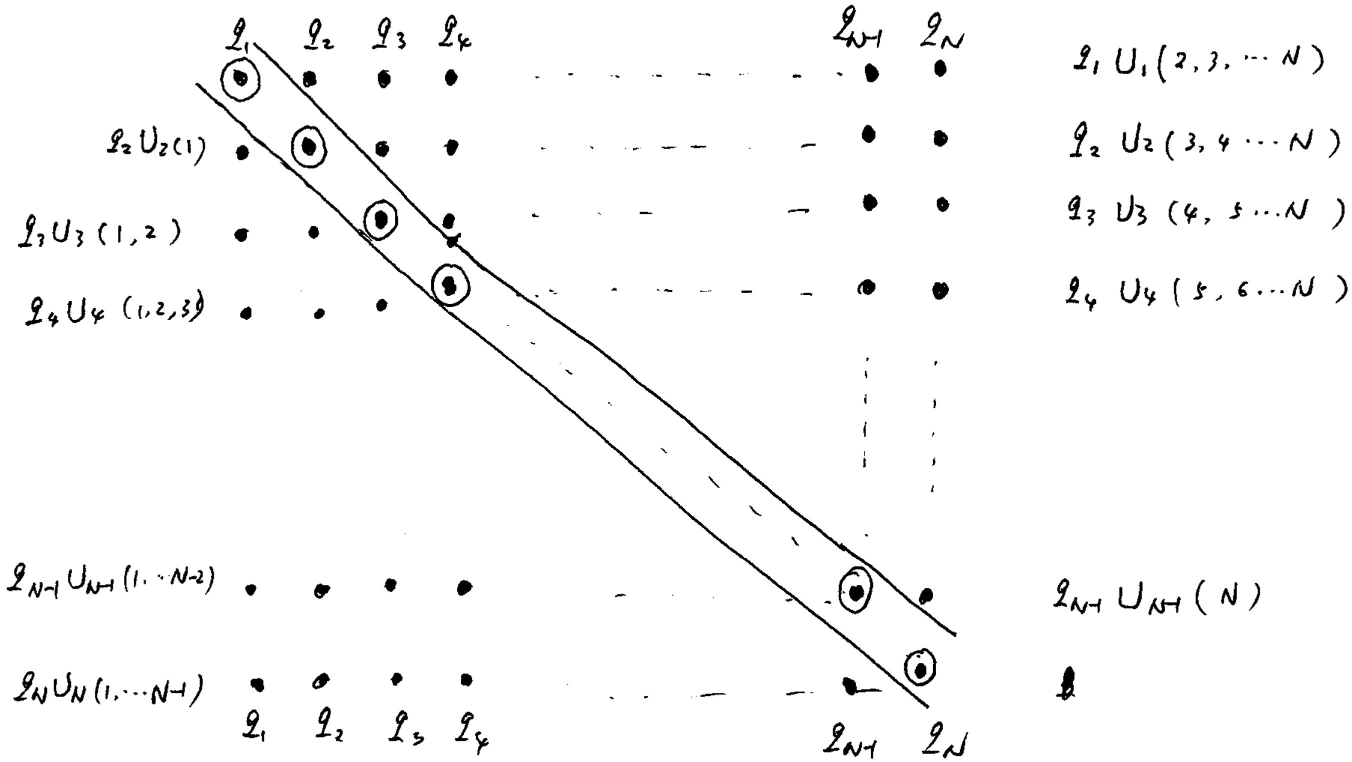
$$W_{互} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i$$

其中

$$U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} U_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$$W_{互} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

点电荷系的静电能



先设想q_1 q_2 ··· q_N 依次移到无穷远，
再设想q_N q_{N-1} ··· q_1依次移到无穷远。

$$W_{互} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

连续电荷分布的静电能

推广到连续电荷分布

（1）体电荷分布

$$W_e=\frac{1}{2}\iiint_V \rho_e(\vec{r})U(\vec{r})dV$$

$U(\vec{r})$为除 $\rho_e(\vec{r})dV$外其余所有电荷在 $\vec{r}$ 处产生的电势

（2）面电荷分布

$$W_e=\frac{1}{2}\iint_S \sigma_e(\vec{r})U(\vec{r})dS$$

$U(\vec{r})$为除 $\sigma_e(\vec{r})dS$外其余所有电荷在 $\vec{r}$ 处产生的电势

（3）线电荷分布

$$W_e=\frac{1}{2}\int_L \lambda_e(\vec{r})U(\vec{r})dL$$

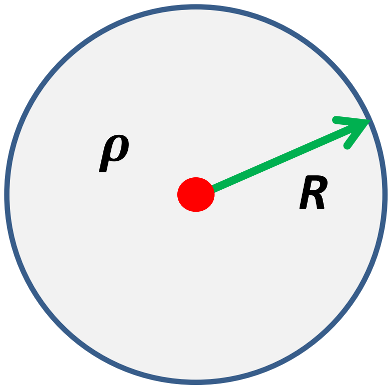
$U(\vec{r})$为除 $\lambda_e(\vec{r})dL$外其余所有电荷在 $\vec{r}$ 处产生的电势 ?

连续体电荷分布的静电能

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho_e(\vec{r})U(\vec{r})dV$$

$U(\vec{r})$为除 $\rho_e(\vec{r})dV$外其余所有电荷在 $\vec{r}$ 处产生的电势

例：半径为R电荷密度为ρ的球体的静电能



设想从无穷远依次搬来 $dq = \rho dV$ 的电荷量，则克服静电能所做的功

$$dW = Udq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(r)}{r}dq$$

则球体所获得的静电能

$$W = \int dW = \int Udq = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(r)}{r}dq = \iiint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(r)}{r}\rho dV$$

$$= \iiint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\cdot\frac{4\pi}{3}r^3}{r}\rho r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$$

连续体电荷分布的静电能

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho_e(\vec{r})U(\vec{r})dV$$

$U(\vec{r})$为除 $\rho_e(\vec{r})dV$外其余所有电荷在 $\vec{r}$ 处产生的电势

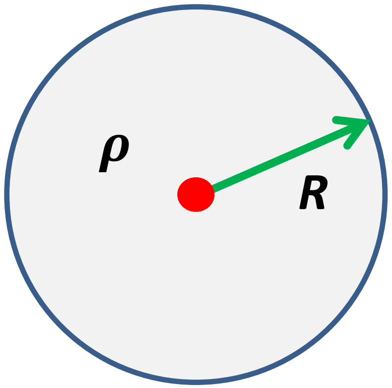
例：半径为R电荷密度为ρ的球体的静电能

（1）ρ固定

$$W = \frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_0}$$

当$R \to 0$时，静电能 $W \to 0$

对应无限小体积元 ρdV 的静电自能等于零



（2）Q固定

$$W = \frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

当$R \to 0$时，静电能 $W \to \infty$

对应点电荷模型，其静电自能发散！（电子自能发散）

连续体电荷分布的静电能

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho_e(\vec{r})U(\vec{r})dV$$

$U(\vec{r})$为除 $\rho_e(\vec{r})dV$外其余所有电荷在 $\vec{r}$ 处产生的电势

无限小体积元 ρdV 的静电自能等于零

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho_e(\vec{r})U(\vec{r})dV$$

$U(\vec{r})$为所有电荷在 $\vec{r}$ 处产生的电势

重新计算小球的静电自能

$$W = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho(\vec{r})U(\vec{r})dV \qquad U(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \frac{\rho^2}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)dV = \frac{\pi\rho^2R^5}{3\varepsilon_0} - \frac{\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_0}$$

与前面计算结果一致！

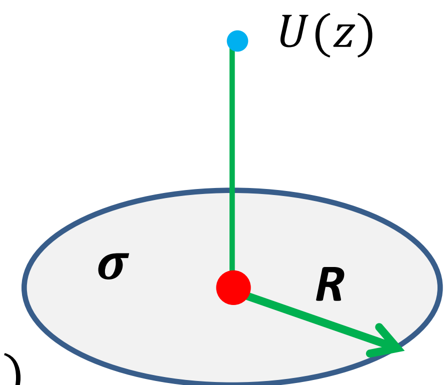
说明无限小体积元 ρdV 的静电自能确实等于零

连续面电荷分布的静电能

$$W_e = \frac{1}{2}\iint_S \sigma_e(\vec{r})U(\vec{r})dS$$

$U(\vec{r})$为除 $\sigma_e(\vec{r})dS$外其余所有电荷在 $\vec{r}$ 处产生的电势

例：半径为R面电荷密度为σ的薄圆盘的静电能



其在轴线上z点的电势

$$U(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma r dr d\varphi}{(r^2+z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{r^2+z^2} - |z|\right)$$

当$z \to 0$　　$U = \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$

当$R \to 0$时，$U \to 0$

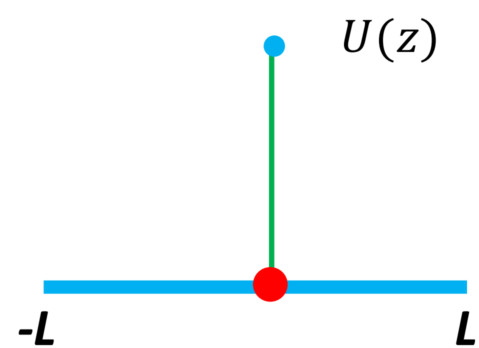
对应无限小面积元 σdS在自身处产生的电势为零

其静电自能等于零

连续线电荷分布的静电能

$$W_e = \frac{1}{2}\int_L \lambda_e(\vec{r})U(\vec{r})dL$$

$U(\vec{r})$为除 $\lambda_e(\vec{r})dL$外其余所有电荷在 $\vec{r}$ 处产生的电势？



例：长度为 2L 线电荷密度为λ的长线的静电能

其在轴线上z点的电势

$$U(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{\lambda dx}{(x^2+z^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\frac{\sqrt{L^2+z^2}+L}{\sqrt{L^2+z^2}-L}$$

当$z \to 0$时，$U \to \infty$

不包含自身贡献时，静电能已经发散！
自身贡献的静电能也发散！
不能正确定义静电能！

带电导体的静电能

面电荷分布

$$W_e = \sum_i \frac{1}{2} \iint_S \sigma_i(\vec{r}) U_i(\vec{r}) dS$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} U_i \iint_S \sigma_i(\vec{r}) dS = \frac{1}{2} \sum_i q_i U_i$$

孤立导体球，带电量Q，半径R

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$$

$$W_e = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

连续电荷分布的静电能

连续电荷分布

（1）体电荷分布

$$W_e=\frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho_e(\vec{r})U(\vec{r})dV$$

$U(\vec{r})$为除 $\rho_e(\vec{r})dV$外其余所有电荷在 $\vec{r}$ 处产生的电势

（2）面电荷分布

$$W_e=\frac{1}{2}\iint\limits_S \sigma_e(\vec{r})U(\vec{r})dS$$

$U(\vec{r})$为除 $\sigma_e(\vec{r})dS$外其余所有电荷在 $\vec{r}$ 处产生的电势

两种等价的观点

能 量 储 存 在 电 荷 系 中

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i U_i$$

能 量 储 存 在 电 场 中

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint \vec{E} \cdot \vec{E} dV$$

两种等价的观点

能量储存在电荷系中 $W=\frac{1}{2}\iiint \rho\phi dV$

静电场方程 $\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 是所有电荷分布，包括自由电荷和极化电荷

$$W=\frac{1}{2}\iiint -\varepsilon_0\phi\nabla^2\phi dV$$

$\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)=\phi\nabla^2\phi+\nabla\phi\cdot\nabla\phi$ $\Rightarrow$ $-\phi\nabla^2\phi=-\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)+\nabla\phi\cdot\nabla\phi$

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint -\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)dV+\frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint \nabla\phi\cdot\nabla\phi dV$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0\oiint \phi\nabla\phi\cdot\hat{n}dS+\frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint \vec{E}\cdot\vec{E}dV$$

在电荷分布有界的情况下，当$r\to\infty$时，$\phi\sim\frac{1}{r}$，$\nabla\phi\sim\frac{1}{r^2}$，而面积$S\sim r^2$，因此第一项在全空间的积分为零

两种等价的观点

$$W=\frac{1}{2}\iiint\rho\phi dV=\frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint\vec{E}\cdot\vec{E}dV$$

上式的物理意义是：

储存在电荷系中能量等于
储存在空间中静电场的能量！

注意：

（1）当空间中有电介质时，由于被极化的电介质可以等效为真空加上极化电荷，因此上述推导也成立。

（2）此时ρ为所有电荷分布，包括了自由电荷和极化电荷，对应$\vec{E}$为宏观静电场

自能与互能

电荷系观点

$$W=\frac{1}{2}[q_1(U_1+U_2)+q_2(U_1+U_2)]$$

$$=\frac{1}{2}q_1U_1+\frac{1}{2}q_2U_2+\frac{1}{2}(q_2U_1+q_1U_2)$$

电场观点

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0(\vec{E}_1+\vec{E}_2)\cdot(\vec{E}_1+\vec{E}_2)$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}_1\cdot\vec{E}_1+\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}_2\cdot\vec{E}_2+\varepsilon_0\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2$$

有电介质存在时的静电能

考虑一个平行板电容器，极板间填充介电常数为 ε 的电介质。

当外接电源给其充电时，电源做的功为：

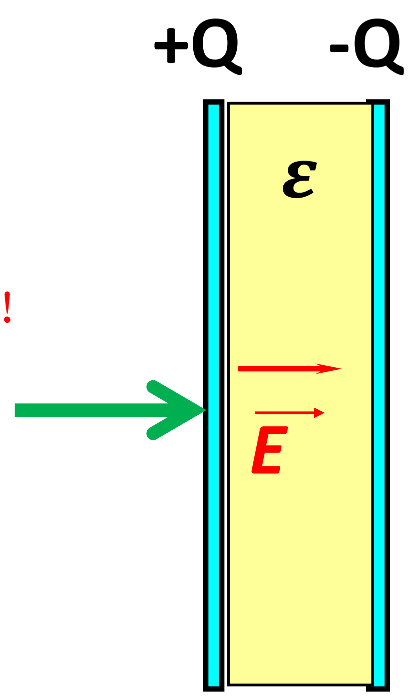
$$W=\int_0^{Q_0} u\,dq_0$$

注意：
电源搬运的是自由电荷！

$$=\int_0^{Q_0}\frac{q_0}{C}dq_0=\frac{1}{2}\frac{{Q_0}^2}{C}=\frac{1}{2}Q_0U$$

$Q_0=\sigma_0\cdot S=D_n\cdot S$ S是电容器极板的面积

$U=E\cdot d$ d是电容器极板的间距



$$\Rightarrow\quad W=\frac{1}{2}Q_0U=\frac{1}{2}D_nSEd=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}V$$ V是电容器极板间电介质的体积

有电介质存在时的静电能

考虑一个平行板电容器，极板间填充介电常数为 ε 的电介质。

当外接电源给其充电时，电源做的功为：

$$W = \frac{1}{2}\iiint \vec{E}\cdot\vec{D}\,dV$$

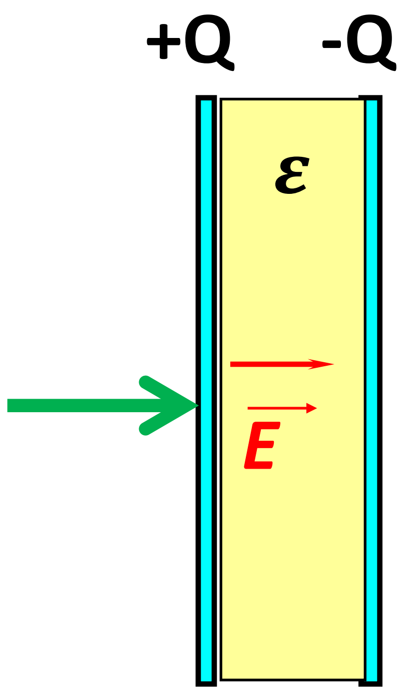
因此单位体积电介质内储存的能量为

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}$$

电容器充电



上式的物理意义是：储存在电介质中能量等于储存在宏观静电场中的能量加上储存在偶极子微观电场中的能量！

从电荷的观点看

电介质中静电场方程

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_0}{\varepsilon}$$

ρ_0是自由电荷分布

电介质中储存的总能量

$$W = \frac{1}{2}\iiint \vec{E}\cdot\vec{D}dV = \frac{1}{2}\iiint \vec{E}\cdot\varepsilon\vec{E}dV = \frac{1}{2}\varepsilon\iiint \nabla\phi\cdot\nabla\phi dV$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon \oiint \phi\nabla\phi\cdot\hat{n}dS + \frac{1}{2}\iiint -\varepsilon\phi\nabla^2\phi dV$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon \oiint \phi\nabla\phi\cdot\hat{n}dS + \frac{1}{2}\iiint \rho_0\phi dV$$

在电荷分布有界的情况下，当$r\to\infty$时，$\phi\sim\frac{1}{r}$，$\nabla\phi\sim\frac{1}{r^2}$，而面积$S\sim r^2$，因此第一项在全空间的积分为零

$$W = \frac{1}{2}\iiint \vec{E}\cdot\vec{D}dV = \frac{1}{2}\iiint \rho_0\phi dV$$

从两种观点看

电介质中储存的总能量

电场观点

$$W=\iiint \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}dV=\iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{E}dV+\iiint \frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}dV$$

储存在 宏观场 微观场 的能量

电荷观点

$$W=\iiint \frac{1}{2}\rho_0\phi dV=\iiint \frac{1}{2}\underset{\overset{\parallel}{\rho}}{(\rho_0+\rho')}\phi dV+\iiint \frac{1}{2}(-\rho')\phi dV$$

由静电能到静电力

利用虚功求力本质上是能量守恒定律

克服体系中的内力做的功等于体系能量的增加

$$-\vec{F}\cdot d\vec{r}=\delta W$$

$$\vec{F}=-\nabla W$$

注意：

（1）$\vec{F}$是内力
（2）W是体系的总能量
（3）在虚过程中没有其他能量输入

如果还有其他能量输入，对体系做功δA，则表达式为：

$$\delta A-\vec{F}\cdot d\vec{r}=\delta W$$

由静电能到静电力

例一：两个带电导体之间的力（电容器）

（1）假定虚过程保证电量$\boldsymbol{Q}$不变，此时无其他能量输入

$$\vec{F} = -\nabla W_e\Big|_Q$$

（2）假定虚过程保证电压$\boldsymbol{U}$不变，此时电源对体系做功$\delta A = \sum U_i dq_i$，体系能量的增加$\delta W_e = \frac{1}{2}\sum U_i dq_i$

$$\delta A - \vec{F} \cdot d\vec{r} = \delta W_e$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = \delta W_e \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \nabla W_e\Big|_U$$

由静电能到静电力

例二：电偶极子在外场中受到的力

（1）电偶极子在外场中的能量

$$W_I = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

注意：该能量是偶极子和外电场的相互作用能，而利用虚功求力公式中的能量是体系的总能量，包括了两个子系统的相互作用能和自能。

（2）假定虚过程保证电偶极矩$\vec{p}$不变，此时偶极子自能$W_p = \frac{1}{2\alpha\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\vec{p}$不变且无其他能量输入

$$\vec{F} = -\nabla W_I\Big|_{\vec{p}}$$

（3）假定虚过程电偶极矩$\vec{p}$改变，此时偶极子自能$W_p = \frac{1}{2\alpha\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\vec{p}$也相应改变，

$$\vec{F} = -\nabla(W_p+W_I)$$

静电能 Summary

（1）为什么要单独讲静电能？

（2）两种等价的观点

（3）点电荷系的静电能

（4）连续电荷分布的静电能

（5）有电介质存在时的静电能

（6）由静电能到静电力