# 第 10 次作业题

**1.** 利用 Green 公式计算曲线积分 $\oint_{L^+}(x+y)^2\,\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$, 其中 $L$ 是以 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ 为顶点的三角形的边界, 逆时针方向为正.

**2.** 计算星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 所围区域的面积, 其中 $a>0$.

**3.** 计算曲线积分 $\int_{L^+}(1+xe^{2y})\,\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y^2)\,\mathrm{d}y$, 其中 $L$ 是从点 $(0,0)$ 经上半圆周 $(x-2)^2+y^2=4$ 到点 $(4,0)$ 的弧段.

**4.** 已知 $f$ 连续可微, 而 $L$ 为任意一条分段光滑的闭曲线, 证明:

$$(1)\ \oint\limits_{L^+} f(xy)(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)=0,\quad (2)\ \oint\limits_{L^+} f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)=0.$$

**5.** 利用 Gauss 公式来计算曲面积分 $\oiint\limits_{S^+} x^3\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中 $S^+$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 的外侧.

**6.** 设 $S$ 为分片光滑闭曲面, $\vec{a}$ 为异于 $\vec{0}$ 的常向量, $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)^T$ 为 $S$ 的单位外法向量. 证明: $\oiint\limits_{S}\cos\langle\vec{n},\vec{a}\rangle\,\mathrm{d}\sigma=0$.

**7.** 证明: 由分片光滑闭曲面 $S$ 所围成的空间立体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\oiint\limits_{S}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)^T$ 为 $S$ 的单位外法向量.

**8.** 利用 Stokes 公式计算曲线积分 $\oint\limits_{L^+} y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$, 其中 $L$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 从 $z$ 轴的正向看去, 其正向为逆时针方向.