

微积分 A (2)

姚家燕

第 5 讲

在听课过程中，
严禁使用与教学无关的电子产品！

第 5 讲回顾: 二重极限与累次极限

二重极限: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y).$

累次极限: $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y), \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y).$

- 二者的存在性之间一般没有关系.
- 如果二重极限与某一个累次极限同时存在, 则二者必然相等.
- 如果两个累次极限均存在但不相等, 则二重极限不存在.

回顾: 连续函数的局部性质

- 向量值函数的连续性, 连续函数, 连续函数空间 $\mathcal{C}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ 和 $\mathcal{C}(\Omega)$.
- 多元数量值连续函数经过四则运算后仍为连续函数; 多元向量值连续函数经过加、减、数乘与复合运算后仍连续.
- 多变元的初等函数在 **其定义区域内** 连续.

回顾: 连续函数的性质

- 向量值函数连续当且仅当开集的原像集为开集 (闭集的原像集为闭集).
- **弧连通集**: 任意两点可用连续曲线连接.
- **连通性**: 折线连通集为弧连通集. 可以证明弧连通**开集**为折线连通. 实数集 \mathbb{R} 的子集 D 为弧连通集当且仅当它为区间.

回顾: 连续函数的整体性质

- **最值定理:** 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空的有界闭集, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, 则 f 在 Ω 上有最大值和最小值.
- **连通性定理:** 若 $f \in \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ 而 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为弧连通, 则 $f(\Omega)$ 为弧连通集.
- **介值定理:** 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 连通, 而 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, 则对任意 $X_1, X_2 \in \Omega$ 及介于 $f(X_1), f(X_2)$ 之间的任意 μ , $\exists X_0 \in \Omega$ 使得 $f(X_0) = \mu$.

回顾: 连续函数整体性质的典型应用

例 9. 证明: 存在正实数 m, M 使得对任意的 $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$m \sum_{j=1}^n |x_j| \leq \|X\|_n \leq M \sum_{j=1}^n |x_j|.$$

回顾: 无穷小函数的阶

- $f(X) = o(1)$ ($\Omega \ni X \rightarrow X_0$).
- $f(X) = O(g(X))$ ($\Omega \ni X \rightarrow X_0$); f, g 同阶.
- 高阶无穷小 ($k > 0$): 若当 $\Omega \ni X \rightarrow X_0$ 时,
 $f(X) = o(\|X - X_0\|^k) = \|X - X_0\|^k o(1)$.
- 若 $\lim_{\Omega \ni X \rightarrow X_0} \frac{f(X)}{\|X - X_0\|^k} = c \neq 0$, 则称函数 f 在
 $\Omega \ni X \rightarrow X_0$ 时为 $\|X - X_0\|$ 的 k 阶无穷小.
此时 f 在 X_0 的某个去心邻域恒正或恒负.

回顾: 全微分

- 线性函数, 线性函数的向量表示, 全微分.
- 可微蕴含连续, 但反之不对.
- 微分若存在, 则唯一.
- 线性函数在每点的微分均等于其本身.
- 记号 dx_j 的定义以及线性函数的微分表示.
- 多元函数求微分的四则运算法则.

回顾: 全微分及偏导数

- 偏导数的定义及其几何意义.
- **可导与可微的关系:** 可微蕴含可导, 但可导并不意味着连续, 因此也不意味着可微.
- 微分的表达式 (利用偏导数).

回顾: 计算二元函数的微分的方法

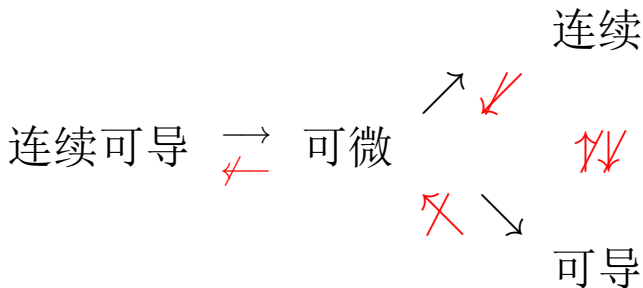
问题: 如何判断函数 f 在点 (x_0, y_0) 是否可微?

- 判断 f 在该点的连续性. 若连续, 则继续.
- 判断 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ 的存在性.
- 若在该点可导, 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时, 估计

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

的阶. 若为 $o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$, 则可微.

回顾: 连续性, 可导性, 可微性, 连续可导性之间的关系



- 初等函数在其定义区域内连续可导、可微.

第 5 讲

方向导数

定义 4. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集, $X_0 \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为函数, $\vec{\ell}$ 为非零向量, $\vec{\ell}^0 = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n)^T$ 为其单位向量, 其中 α_j 为 $\vec{\ell}$ 与 x_j 轴的夹角.

若极限 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(X_0 + h\vec{\ell}^0) - f(X_0)}{h}$ 存在, 则称之为 f 在点 X_0 处沿 $\vec{\ell}$ 方向的方向导数, 记作 $\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0)$, 或 $\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}|_{X_0}$, 或 $f'_{\vec{\ell}}(X_0)$. 于是 $\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}^0}(X_0)$.

定理 5. 若 f 在点 X_0 可微, 则 $\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0)$ 存在且

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) \cos \alpha_j.$$

证明: 由于 f 在点 X_0 可微, 则当 $h \rightarrow 0^+$ 时,

$$\begin{aligned} f(X_0 + \vec{\ell}^0 h) - f(X_0) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) h \cos \alpha_j + o(\|\vec{\ell}^0 h\|) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) \cos \alpha_j \right) h + o(|h|), \end{aligned}$$

由此立刻可得所要结论.

评注

- 即便 $\vec{\ell}^0 = \vec{e}_j$, 方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0)$ 也不一定为 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$, 这是因为前者为单侧极限, 而后者却为双侧极限.
- 若 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$ 存在, 则 f 在 X_0 处沿 $\vec{e}_j, -\vec{e}_j$ 的方向导数分别为 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0), -\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$.
- 函数 f 在 X_0 处沿任意的方向均有方向导数并不意味着 f 在该点可导或可微.

例 9. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 定义 $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.
求证: 函数 f 在点 $(0, 0)$ 处不可微, 但在该点处沿任意方向均有方向导数.

证明: 因极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-|h|}{h}$ 不存在, 故 f 在点 $(0, 0)$ 处不可导, 从而不可微. 但沿任意方向 $\vec{\ell}^0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$, 均有方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}^0}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h \cos \alpha, h \sin \alpha) - f(0, 0)}{h} = -1.$$

作业题: 第1.4节第43页第9题, 第11.(3)题.

数量场的梯度

定义 5. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集. 定义在 Ω 上的实值函数也称为 Ω 上的数量场.

定义 6. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集, $X_0 \in \Omega$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 在点 X_0 沿任意方向有方向导数. 称向量 \vec{e} 为 f 在点 X_0 的梯度, 若 f 在 X_0 处沿 \vec{e} 的方向导数的值最大且该值等于 $\|\vec{e}\|$, 此时将 \vec{e} 记作 $\text{grad} f(X_0)$ 或 $\vec{\nabla} f(X_0)$, 也将之记作 $\overrightarrow{\text{grad}} f(X_0)$, 或 $\text{grad} f(X_0)$, 或 $\nabla f(X_0)$.

定义 7. 将 \mathbb{R}^n 中的向量表示成列向量. 若

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

令 $X \cdot Y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$, 称为 X, Y 的内积或点积.

命题 2. 若 f 在点 X_0 处可微, 则

$$\text{grad} f(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}.$$

证明: 设右边为 \vec{e} , $\vec{\ell}^0 = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n)^T$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}^0}(X_0) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) \cos \alpha_j \\ &= \vec{e} \cdot \vec{\ell}^0 = \|\vec{e}\| \cos \langle \vec{e}, \vec{\ell}^0 \rangle,\end{aligned}$$

其中 $\langle \vec{e}, \vec{\ell}^0 \rangle$ 表示 \vec{e} 与 $\vec{\ell}^0$ 的夹角. 由此得证.

推论: f 在点 X_0 沿梯度增长最快, 反向最慢.

方向导数与梯度的关系: $\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}^0}(X_0) = \text{grad} f(X_0) \cdot \vec{\ell}^0$.

基本的梯度公式

设 u, v 为可微数量场, a, b 为常数.

- $\text{grad } c = \vec{0}$, 其中 c 为常值函数.
- $\text{grad}(au + bv) = a \text{grad} u + b \text{grad} v$.
- $\text{grad}(uv) = v \text{grad} u + u \text{grad} v$.
- $\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v \text{grad} u - u \text{grad} v)$, $v \neq 0$.
- $\text{grad} f(u) = f'(u) \text{grad} u$ (f 为单变量、可导).

例 10. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, 定义

$$f(x, y, z) = x^2 + e^{xyz} + \log(x^2 + y^2 + z^2).$$

求 f 在点 $P_0 = (1, 0, 0)$ 处的梯度与最大的方向导数, 以及沿 $\vec{\ell} = (1, 2, -2)^T$ 的方向导数.

解: 由题设可知

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + yze^{xyz} + \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \\ xze^{xyz} + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \\ xye^{xyz} + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix},$$

故 f 在点 P_0 处的梯度为 $\text{grad} f(P_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

在点 P_0 处的最大方向导数为 $\|\text{grad} f(P_0)\| = 4$.

沿 $\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 的单位向量为 $\vec{\ell}^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

于是 f 在点 P_0 处沿 $\vec{\ell}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(P_0) = \text{grad} f(P_0) \cdot \vec{\ell}^0 = \frac{4}{3}.$$

例 11. 设函数 f 在点 (x_0, y_0) 处可微且

$$df(x_0, y_0) = 3dx - 2dy.$$

求单位向量 \vec{l}_1^0, \vec{l}_2^0 使得 f 在点 (x_0, y_0) 处沿 \vec{l}_1^0 增长最快, 沿 \vec{l}_2^0 减少最快.

解: 由题设可知 \vec{l}_1^0 为梯度方向, 并且 $\vec{l}_2^0 = -\vec{l}_1^0$.
又 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 3, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -2$. 故

$$\vec{l}_1^0 = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}, \quad \vec{l}_2^0 = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}.$$

作业题: 第 1.4 节第 43 页第 13 题.

高阶偏导数

定义 8. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为非空开集. 若 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 在 Ω 上可导, 则我们可以在 Ω 上定义 n 个偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($1 \leq i \leq n$). 如果 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 关于第 j 个变量有偏导数 $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$, 我们将之称为二阶偏导数, 记作 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ 或者 $\partial_{ji} f$. 特别地, 当 $i = j$ 时, 我们将之记作 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. 如此递归下去, 我们可定义三阶偏导数以及任意阶的偏导数.

问题: 求二阶偏导数时能否交换求导次序?

回答: 一般不行.

例 12. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 定义

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)xy}{x^2 + y^2}, & \text{若 } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{若 } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

则 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 当 $y \neq 0$ 时, $f(x, y) = \frac{(x^2 - y^2)xy}{x^2 + y^2}$,

由此立刻可得 $f(x, y) = xy - \frac{2xy^3}{x^2 + y^2}$.

从而我们就有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(xy - \frac{2xy^3}{x^2 + y^2} \right) \\ &= y - \frac{2y^3}{x^2 + y^2} + \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (2x) \\ &= \frac{(x^2 - y^2)y}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

特别地, 我们有 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$.

由偏导数的定义, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0.$$

于是 $\forall y \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y.$$

由反对称性或直接由偏导数的定义可得

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x.$$

从而我们有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x} = 1.$$

因此 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

问题: 何时能交换求偏导函数的次序?

定理 6. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为非空开集. 若 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 在 Ω 上有二阶偏导函数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ($i \neq j$), 并且它们当中的一个在点 $X_0 \in \Omega$ 处连续, 则

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0).$$

分析: 出于简便, 仅考虑 $n = 2$ 的情形. 首先

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)}{h_2}.$$

记 $X_0 = (a_1, a_2)$. 于是我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2) &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)}{h_1} \\&= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{1}{h_1} \left(\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2)}{h_2} \right. \\&\quad \left. - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)}{h_2} \right) \\&= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{1}{h_1 h_2} \left((f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2)) \right. \\&\quad \left. - (f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)) \right).\end{aligned}$$

故定理 6 等价于说上述累次极限可交换次序.

证明: 出于简便, 仅考虑 $n = 2$ 的情形并且假设 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ 在点 $X_0 = (a_1, a_2)$ 处连续. 定义

$$F(h_1, h_2) = (f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2)) - (f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)),$$

则由偏导数的定义可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2) &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{1}{h_1 h_2} F(h_1, h_2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2) &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{1}{h_1 h_2} F(h_1, h_2).\end{aligned}$$

令 $\varphi(x_1) = f(x_1, a_2 + h_2) - f(x_1, a_2)$. 则我们有

$$F(h_1, h_2) = \varphi(a_1 + h_1) - \varphi(a_1).$$

因 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ 存在, 则 φ 可导, 从而由 Lagrange 中值定理可知, $\exists \theta_1 \in (0, 1)$ 使得

$$\begin{aligned} F(h_1, h_2) &= \varphi'(a_1 + \theta_1 h_1) h_1 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2) \right) h_1. \end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ 存在, 于是在上式中对第二个变量应用 **Lagrange** 中值定理可知, $\exists \theta_2 \in (0, 1)$ 使得

$$\begin{aligned} F(h_1, h_2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2) \right) h_1 \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + \theta_2 h_2) h_1 h_2. \end{aligned}$$

由夹逼原理, 连续性以及复合极限法则可知

$$\begin{aligned} \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{F(h_1, h_2)}{h_1 h_2} &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} (a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + \theta_2 h_2) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} (a_1, a_2), \end{aligned}$$

也即二重极限存在. 故所证结论成立.

定义 9. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $k \geq 0$ 为整数. 记

$$\mathcal{C}^{(k)}(\Omega) = \{f \mid f \text{ 在 } \Omega \text{ 上的 } k \text{ 阶偏导数连续}\}.$$

特别地, $\mathcal{C}^{(0)}(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$. 若 $f \in \mathcal{C}^{(k)}(\Omega)$, 则称 f 在 Ω 上 k 阶连续可导, 也称 k 阶连续可微.

定理 7. 设 $k \geq 2$ 为整数. 若 $f \in \mathcal{C}^{(k)}(\Omega)$, 则对任意整数 $1 \leq r \leq k$, 均有 $f \in \mathcal{C}^{(r)}(\Omega)$ 且 f 的任意一个 r 阶偏导数均与求偏导的次序无关.

证明: 记 g 为 f 的任意一个 $k-1$ 阶偏导函数. 由于 g 的任意偏导数是 f 的一个 k 阶偏导数, 故该偏导数连续, 从而 g 连续可导, 因此连续, 如此递降下去可知, 对任意的整数 $1 \leq r \leq k$, f 的任意一个 r 阶偏导函数均连续. 对任意的一组指标 $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$, 因 $\frac{\partial^2}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \frac{\partial^{r-2} f}{\partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_r}}$ 连续, 故前两个求偏导可以交换次序, 如此进行下去可知任意改变求偏导的次序都不变.

作业题: 第 1.4 节第 43 页第 15 题第 (1), (4) 题.

谢谢大家!