微积分A2第八周习题课：广义含参变量积分

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 广义含参变量积分一致收敛

设函数f在$\Lambda\times[c,+\infty)$上定义。若对每一个$x\in\Lambda$，广义积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)dt$ 都收敛，则此积分值可以看成是定义在Λ上的函数。

(1) **定义：**

若$\forall\varepsilon>0$, $\exists A(\varepsilon)>c$，当$A_2>A_1>A(\varepsilon)$时，$\forall x\in\Lambda$，有$\left|\displaystyle\int_{A_1}^{A_2} f(x,t)dt\right|<\varepsilon$, 则称广义含参变量积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)dt$关于$x$在$\Lambda$上一致收敛。

(2) **Weierstrass 判别法 (也称比较判别法)：**

设有函数$F(t)$，使得

$$|f(x,t)|\le F(t)\quad (x\in\Lambda,\quad t\ge c)$$

且广义积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} F(t)dt$收敛，则广义含参变量积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)dt$关于$x$在$\Lambda$上一致收敛。

(3) **Dirichlet判别法:**

设$f(x,t)$, $g(x,t)$满足：

(i) 存在正常数M，当$x\in\Lambda$, $A>c$时，有$\left|\displaystyle\int_c^{A} f(x,t)dt\right|\le M$;

(ii) 对固定的$x\in\Lambda$，$g(x,t)$是t的单调函数，当$t\to+\infty$时，$g(x,t)$关于$x\in\Lambda$ 一致趋于零（即$\forall\varepsilon>0$, $\exists A(\varepsilon)>c$，当$t>A(\varepsilon)$ 时，$\forall x\in\Lambda$，有$|g(x,t)|<\varepsilon$).

则广义含参变量积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)g(x,t)dt$关于$x$在$\Lambda$ 上一致收敛。

(4) **Abel判别法:**

设$f(x,t)$, $g(x,t)$满足：

(i) 广义含参变量积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)dt$关于$x$在$\Lambda$上一致收敛;

(ii) 对固定的$x\in\Lambda$，$g(x,t)$是t的单调函数，存在正常数M，当$x\in\Lambda$, $t\ge c$时，有$|g(x,t)|\le M$.

则广义含参变量积分$\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)g(x,t)dt$关于$x$在$\Lambda$ 上一致收敛。

2. 广义含参变量积分性质

(1) **积分与积分次序可交换性:**

设$f \in C([a,b]\times[c,+\infty))$, 且广义含参变量积分$\int_c^{+\infty} f(x,t)dt$关于$x$在$[a,b]$上一致收敛. 记$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,t)dt$, 则$I \in C[a,b]$，且对任何$u \in [a,b]$

$$\int_a^u I(x)dx = \int_c^{+\infty}\left[\int_a^u f(x,t)dx\right]dt.$$

(2) **求导与积分次序可交换性:**

设f, $f_1' \in C([a,b]\times[c,+\infty))$，存在$x_0 \in [a,b]$使得广义积分$\int_c^{+\infty} f(x_0,t)dt$ 收敛，且广义含参变量积分$\int_c^{+\infty} f_1'(x,t)dt$ 关于x在$[a,b]$上一致收敛。则广义含参变量积分$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,t)dt$ 关于x在$[a,b]$上一致收敛，且

$$I'(x)=\int_c^{+\infty} f_1'(x,t)dt.$$

第 2 部分 习题课题目

1. 证明:广义含参变量积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(ax)}{a(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$ 在 $a\in[\alpha,+\infty)$ 上一致收敛；在 $a\in(0,\beta)$ 上非一致收敛. 其中 α, β 为任意正数。

证明: 由于

$$\left|\int_0^A \sin(ax)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{a}|\cos A - 1| \le \frac{2}{a},$$

及$\dfrac{x}{a(1+x^2)}$对x单调，且当$x\to+\infty$时，$\dfrac{x}{a(1+x^2)}$关于$a\in[\alpha,+\infty)$ 一致趋于零，故由*Dirichlet*判别法知该广义含参变量积分在 $a\in[\alpha,+\infty)$ 上一致收敛.

现证该广义含参变量积分在 $a\in(0,\beta)$ 上非一致收敛. （反证法）假设它一致收敛，则对$\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}$, $\exists A_0>0$, 当$A_2>A_1>A_0$时，有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}\frac{x\sin(ax)}{a(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon_0,\ \forall a\in(0,\beta).$$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$, 故必有$M_0>A_0$, 当$x>M_0$时, $\dfrac{x^2}{1+x^2}\geq\dfrac{1}{2}$. 另一方面, 由于因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 故必有$x_0>0$, 当$x\in(0,x_0)$时, $\dfrac{\sin x}{x}\geq\dfrac{1}{2}$. 这样, 当

$$0<a<\min\left\{\beta,\frac{x_0}{M_0+1}\right\}$$

时, 如果$x\in[M_0,M_0+1]$, 那么$0<ax\leq a(M_0+1)<x_0$, 因而

$$\frac{\sin(ax)}{ax}\geq\frac{1}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}=\varepsilon_0 &> \left|\int_{M_0}^{M_0+1}\frac{x\sin(ax)}{a(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\right|\\ &= \left|\int_{M_0}^{M_0+1}\frac{x^2}{1+x^2}\frac{\sin(ax)}{ax}\,\mathrm{d}x\right|\\ &\geq \left|\int_{M_0}^{M_0+1}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{4},\end{aligned}$$

矛盾.

2. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a,b>0$.

解: 由题设可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\Big(\int_a^b\frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$ $\forall(x,y)\in[0,+\infty)\times[a,b]$, 定义

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{x} & 若\ x\neq 0,\\ y & 若\ x=0,\end{cases}$$

则 f 为连续函数. 因 $\forall y\in[a,b]$ 以及 $\forall A>1$, 我们有

$$\Big|\int_1^A\sin(xy)\,\mathrm{d}x\Big|=\frac{1}{y}|\cos y-\cos Ay|\leqslant\frac{2}{a},$$

而函数 $\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致成立, 则由 Dirichlet 判别准则知广义含参积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致收敛, 从而由积分与积分次序可交换性可得

$$\int_1^{+\infty}\int_a^b\frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_a^b\Big(\int_1^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y.$$

综上所述立刻可知

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_a^b\Big(\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y\\ \xlongequal{t=xy}\ &\int_a^b\Big(\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}y=(b-a)\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}(b-a).\end{aligned}$$

注: 关于等式 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$, 参见课堂讲义.

3. 计算 $I(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a\geq 0$.

解: 定义

$$f(x,a)=\begin{cases} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则

$$f_2'(x,a)=\begin{cases} -\frac{2a}{x^2}\ e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

且f, f_2'在$[0,+\infty)\times[0,+\infty)$上都连续. 因为

$$|f(x,a)|\leq e^{-x^2},\ \forall x\in[0,+\infty),\ \forall a\in[0,+\infty)$$

及$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$收敛, 故根据*Weierstrass*判别法知, 广义含参变量积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x,a)\,\mathrm{d}x$关于$a$在$[0,+\infty)$上一致收敛。取$\beta>\alpha>0$, 因为当$a\in[\alpha.\beta]$时,

$$|f_2'(x,a)|\leq\frac{2a}{x^2}\ e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\leq\frac{2\beta}{x^2}\ \min\left\{e^{-x^2},\ e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}}\right\}$$

所以, 广义含参变量积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}f_2'(x,a)\,\mathrm{d}x$关于$a$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.于是, 应用求导与积分次序可交换性质得到

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{+\infty}f_2'(x,a)\,\mathrm{d}x=-2a\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\ e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,\mathrm{d}x\\ &\overset{x=\frac{a}{t}}{=\!=\!=} -2a\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{a^2}\ e^{-\left(\frac{a^2}{t^2}+t^2\right)}\ \frac{a}{t^2}\,\mathrm{d}t=-2I(a),\end{aligned}$$

所以

$$I(a)=I(0)\ e^{-2a}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ e^{-2a}$$

4. 计算 $I(y)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xy)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$, 其中 $y\geqslant 0$.

解: 由题设 $I(0)=0$. 取 $y>0$. 当 $x\to 0^+$ 时, $\frac{\arctan(xy)}{x(1+x^2)}\sim y$, 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\frac{\arctan(xy)}{x(1+x^2)}\sim\frac{\pi}{2x^3},$$

于是由比较法则可知 $I(y)$ 收敛.

$\forall x, y \geqslant 0$, 我们有 $\frac{1}{(1+x^2)(1+(xy)^2)} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+(xy)^2)}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [0,+\infty)$ 一致收敛, 进而由求导与积分次序可交换性知 I 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导且

$$I'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+(xy)^2)}.$$

从而当 $y \neq \pm 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} I'(y) &= \frac{1}{1-y^2} \int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+(xy)^2} \Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1-y^2} \Big(\arctan x - y\arctan(xy) \Big)\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2(1+y)}. \end{aligned}$$

由连续性知 $\forall y \geqslant 0$, 均有 $I'(y) = \frac{\pi}{2(1+y)}$, 进而

$$I(y) = \int_0^y I'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\log(1+y).$$

5. 计算 $I(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{y^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $y > 0$.

解: $\forall x \geqslant 0$ 以及 $\forall y > 0$, 我们均有 $\frac{|\cos x|}{y^2+x^2} \leqslant \frac{1}{y^2+x^2}$, 而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{y^2+x^2}$ 收敛, 故 $I(y)$ 收敛. 固定 $a > 0$. $\forall y \geqslant a$ 以及 $\forall A > 0$, 我们有

$$\Big| \int_0^A \cos x\,\mathrm{d}x \Big| = |1 - \cos A| \leqslant 2,$$

而函数 $\frac{2y}{(y^2+x^2)^2}$ 关于 $x \geqslant 0$ 递减且 $\frac{2y}{(y^2+x^2)^2} \leqslant \frac{2}{a(a^2+x^2)}$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2y}{(y^2+x^2)^2} = 0$ 关于 $y \in [a,+\infty)$ 一致成立, 由求导与积分次序可交换性知 I 在 $[a,+\infty)$ 上可导, 并且 $\forall y \geqslant a$, 我们均有

$$I'(y) = -\int_0^{+\infty} \frac{2y\cos x}{(y^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=ty} -\frac{2}{y^2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ty)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

再由 $a > 0$ 的任意性知 I 在 $(0,+\infty)$ 上可导且 $\forall y > 0$, 我们有

$$y^2 I'(y) = -\int_0^{+\infty} \frac{2\cos(ty)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

又 $\forall t \geqslant 0$ 以及 $\forall y > 0$, 我们有 $\frac{|t\sin(ty)|}{(1+t^2)^2} \leqslant \frac{t}{(1+t^2)^2}$, 而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ 收敛, 则由 Weierstrass 判别法可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(ty)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ 关于 $y \in (0,+\infty)$ 一致收敛, 由求导与积分次序可交换性知, $\forall y > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} (y^2 I'(y))' &= \int_0^{+\infty} \frac{2t\sin(ty)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\sin(ty)}{1+t^2}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{y\cos(ty)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{y\cos(ty)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \xlongequal{x=ty} y^2\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{y^2+x^2}\,\mathrm{d}t = y^2 I(y). \end{aligned}$$

$\forall y>0$, 令 $J(y)=yI(y)$, 则 $I'(y)=\frac{1}{y}J'(y)-\frac{1}{y^2}J(y)$, 由此可得

$$yJ(y)=(yJ'(y)-J(y))'=J'(y)+yJ''(y)-J'(y)=yJ''(y),$$

故 $J''(y)=J(y)$, 从而 $J(y)=C_1e^{y}+C_2e^{-y}$, 其中 C_1,C_2 为常数. 又 $\forall y>0$,

$$\begin{aligned}|I(y)| &\leqslant \int_0^{+\infty}\frac{|\cos x|}{y^2+x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{y^2+x^2}\\ &= \frac{1}{y}\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2y},\end{aligned}$$

由此可知 J 在 $(0,+\infty)$ 上为有界函数, 从而 $C_1=0$. 故 $\forall y>0$, 我们有

$$C_2e^{-y}=yI(y)=y\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{y^2+x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=ty}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ty)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

但 $\forall y\geqslant 0$, 均有 $\frac{|\cos(ty)|}{1+t^2}\leqslant\frac{1}{1+t^2}$, 并且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法可知含参广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ty)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ 关于参数 $y\in[0,+\infty)$ 一致收敛, 由极限与积分次序可交换性可得

$$C_2=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2},$$

由此我们可以导出, $\forall y>0$, 我们有

$$I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{y^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2y}e^{-y}.$$

6. 计算 $I_\alpha(\beta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\beta x)}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$, $J_\alpha(\beta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(\beta x)}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $\alpha>0$.

解: 由题设立刻可知 $I_1(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$, $J_1(0)=0$.

固定 $a>0$. $\forall A>0$ 以及 $\forall\beta\geqslant a$, 我们有

$$\Big|\int_0^{A}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x\Big|=\frac{1}{\beta}|\sin(\beta A)|\leqslant\frac{1}{a},\quad\Big|\int_0^{A}\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x\Big|=\frac{1}{\beta}|1-\cos(\beta A)|\leqslant\frac{2}{a},$$

而 $\frac{1}{x^2+1},\frac{x}{x^2+1}$ 均为单调函数并且随着 $x\to+\infty$ 而趋于 0, 由 Dirichlet 判别准则可知 $I_1(\beta),J_1(\beta)$ 关于 $\beta\in[a,+\infty)$ 一致收敛, 于是由求导与积分次序可交换性知, $\forall\beta\geqslant a$, 我们均有 $I_1'(\beta)=-J_1(\beta)$, 进而可得

$$I_1'(\beta)+\frac{\pi}{2}=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(\beta x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\beta x)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\beta x)}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x,$$

由求导与积分次序可交换性知, $I_1''(\beta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\beta x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=I_1(\beta)$, 进而可得

$$I_1(\beta)=C_1e^{\beta}+C_2e^{-\beta}.$$

由 a 的任意性知, $\forall\beta>0$, 均有 $I_1(\beta)=C_1e^{\beta}+C_2e^{-\beta}$, 从而 $\forall\alpha>0$, 我们有

$$I_\alpha(\beta)\xlongequal{x=\alpha y}\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha\beta y)}{y^2+1}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\alpha}(C_1e^{\alpha\beta}+C_2e^{-\alpha\beta}).$$

又 $|I_\alpha(1)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\alpha}$, 于是 $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} I_\alpha(1) = 0$, 故 $C_1 = 0$.

注意到 $\forall \alpha > 0$ 以及 $\forall \beta \geqslant 0$, 我们有 $\frac{|\cos(\beta x)|}{x^2+\alpha^2} \leqslant \frac{1}{x^2+\alpha^2}$, 而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha^2}$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法知 $I_\alpha(\beta)$ 关于 $\beta \in [0,+\infty)$ 一致收敛, 从而由极限与积分次序可交换性可知 I_α 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 因此

$$C_2 = \alpha I_\alpha(0) = \frac{\pi}{2},$$

于是 $I_\alpha(\beta) = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}$, 进而可得 $J_\alpha(\beta) = -I'_\alpha(\beta) = -\frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}$. 再注意到 $\forall \beta \in \mathbb{R}$, 我们均有 $I_\alpha(-\beta) = I_\alpha(\beta)$, $J_\alpha(-\beta) = -J_\alpha(\beta)$, 从而$I_\alpha(\beta) = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha|\beta|}$, $J_\alpha(\beta) = -\frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}\mathrm{sgn}(\beta)$.

第 3 部分 期中考前答疑