第 4 次作业题解答

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$, (2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$,

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}$,

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{x}$, (6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$,

(7) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$, (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}+2\sin x}{x}$,

(9) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan x)^{\cot x}$, (10) $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$.

解: (1)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}=1.$$

(2) **方法 1.**
$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}\overset{x=y+1}{=}\lim_{y\to0}\frac{(y+1)^m-1}{(y+1)^n-1}=\lim_{y\to0}\frac{\sum_{j=1}^m\binom{m}{j}y^j}{\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}y^k}=\lim_{y\to0}\frac{m+\sum_{j=2}^m\binom{m}{j}y^{j-1}}{n+\sum_{k=2}^n\binom{n}{k}y^{k-1}}=\frac{m}{n}.$$

方法 2.
$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}\overset{x=1+y}{=}\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^m-1}{(1+y)^n-1}=\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^m-1}{y}\frac{y}{(1+y)^n-1}=\frac{m}{n}.$$

(3)
$$\lim_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(mx)^j-\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}(nx)^k}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\binom{n}{2}(mx)^2+\sum_{j=3}^n\binom{n}{j}(mx)^j\right)-\left(\binom{m}{2}(nx)^2+\sum_{k=3}^m\binom{m}{k}(nx)^k\right)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}mn(n-m)+\sum_{j=3}^{n}\binom{n}{j}(mx)^{j-2}-\sum_{k=3}^{m}\binom{m}{k}(nx)^{k-2}\right)=\frac{1}{2}mn(n-m).$$

(4)
$$\lim_{x\to0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{1-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{n}{m}x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{-\frac{m}{n}x}{x}=\frac{n}{m}-\frac{m}{n}=\frac{n^2-m^2}{mn}.$$

(5)
$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{\cos x}=3.$$

(6)
$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

(7)
$$\lim_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}\overset{y=1-x}{=}\lim_{y\to0}y\tan\frac{\pi(1-y)}{2}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\tan\frac{\pi y}{2}}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\frac{\pi y}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

(8)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}+2\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\overset{x=\frac{1}{y}}{=}\lim_{y\to0}\frac{3\sin y}{y}=3.$$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\log(1+3\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\log(1+3\tan x)}{3\tan x}=3$, 故 $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan x)^{\cot x}=e^3$.

(10) 由于 $\lim\limits_{x\to1}\log(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}\overset{x=y+1}{=}\lim\limits_{y\to0}\frac{\log(1+2y)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{2y}{y}=2$, 于是我们有 $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}=e^2$.

2. 用函数极限的定义证明 $\lim_{x\to x_0}\arctan x=\arctan x_0\ (x_0>0)$.

证明: $\forall\varepsilon>0$, 我们选取 $\bar\varepsilon=\min(\varepsilon,\frac{\pi}{4})$, 而 $\delta=\min\big(\tan\bar\varepsilon,\frac{x_0}{2}\big)$. 那么 $\forall x\in\mathbb{R}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 我们有 $x>x_0-\delta>\frac{x_0}{2}>0$, 从而

$$\begin{aligned}&|\tan(|\arctan x-\arctan x_0|)|=|\tan(\arctan x-\arctan x_0)|\\ =\ &\Big|\frac{\tan(\arctan x)-\tan(\arctan x_0)}{1+\tan(\arctan x)\tan(\arctan x_0)}\Big|=\frac{|x-x_0|}{1+xx_0}<|x-x_0|<\tan\bar\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $0<\arctan x,\ \arctan x_0<\frac{\pi}{2}$, 则 $|\arctan x-\arctan x_0|<\frac{\pi}{2}$, 从而

$$|\arctan x-\arctan x_0|<\arctan(\tan\bar\varepsilon)=\bar\varepsilon<\varepsilon.$$

故所证结论成立.

3. 求下列极限:

(1) $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos(kx^2)}}{x^4}$, (2) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$,

(3) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(1-\cos\frac{x}{2})}{x^3\ln(1+x)}$ (4) $\lim_{x\to+\infty}x\big(\ln(x-2)-\ln x\big)$

(5) $\lim_{n\to\infty}\big(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\big)^n$ $(a,b>0)$, (6) $\lim_{n\to\infty}n^2\sin^2(\pi\sqrt{n^2+1})$,

(7) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$, (8) $\lim_{x\to0}\big(\frac{a_1^x+\cdots+a_k^x}{k}\big)^{\frac{1}{x}}$,其中 $a_j>0$.

解: (1) $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos(kx^2)}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(kx^2)}{x^4(1+\sqrt{\cos(kx^2)})}=\lim_{x\to0}\frac{\frac12(kx^2)^2}{2x^4}=\frac{k^2}{4}$.

(2) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan x}(e^{x-\tan x}-1)}{x-\tan x}=\lim_{x\to0}e^{\tan x}=1$.

(3) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(1-\cos\frac{x}{2})}{x^3\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac12(1-\cos\frac{x}{2})^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac12(\frac12(\frac{x}{2})^2)^2}{x^4}=\frac{1}{128}$.

(4) $\lim_{x\to\infty}x\big(\log(x-2)-\log x\big)=\lim_{x\to\infty}x\log\big(1-\frac{2}{x}\big)\overset{x=\frac1y}{=}\lim_{y\to\infty}\frac{\log(1-2y)}{y}=-2$.

(5) $\lim_{n\to\infty}\log\big(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\big)^n=\lim_{n\to\infty}n\log\big(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\big)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt[n]{b}-1)}{a}=\frac{\log b}{a}$, 于是我们有 $\lim_{n\to\infty}\big(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\big)^n=b^{\frac1a}$.

(6) $\lim_{n\to\infty}n^2\sin^2(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}n^2\sin^2\big(\pi(\sqrt{n^2+1}-n)\big)$
$=\lim_{n\to\infty}n^2\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\big(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\big)^2$
$=\lim_{n\to\infty}\big(\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+1}+n}\big)^2=\lim_{n\to\infty}\big(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\big)^2=\frac{\pi^2}{4}$.

(7) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac12x\sin x}{x^2}=\frac12$.

(8) $\lim_{x\to0}\log\big(\frac{a_1^x+\cdots+a_k^x}{k}\big)^{\frac1x}=\lim_{x\to0}\frac1x\log\big(1+\frac1k\sum_{j=1}^{k}(a_j^x-1)\big)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}(a_j^x-1))}{\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}(a_j^x-1)} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j^x-1}{x} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\log a_j,$$

由此可得 $\lim\limits_{x\to 0}\log\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_k^x}{k}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{a_1\cdots a_k}$.

4. 研究下列函数在 $x=x_0$ 处的连续性:

(1) $f(x)=\begin{cases} |x|^\alpha\sin\frac{1}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$ 其中 $x_0=0$;

(2) $f(x)=\begin{cases} x^{-1}(1-e^{\frac{x}{x-2}}), & 若\ x\neq 0,2,\\ 0, & 若\ x=2,\\ \frac{1}{2}, & 若\ x=0,\end{cases}$ 其中 $x_0=0,2$.

解: (1) 若 $\alpha>0$, 则 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $|f(x)|\leqslant|x|^\alpha$. 于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$. 此时 f 在点 $x_0=0$ 处连续.

现在假设 $\alpha\leqslant 0$. $\forall n\geqslant 1$, 定义 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$. 则 $f(x_n)=x_n^\alpha\geqslant 1$. 因此数列 $\{x_n\}$ 收敛到 0, 但数列 $\{f(x_n)\}$ 却不收敛到 $f(0)=0$. 这表明 f 在点 $x_0=0$ 处间断.

综上所述可知 f 在点 $x_0=0$ 处连续当且仅当 $\alpha>0$

(2) 由题设可知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{\frac{x}{x-2}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{x-2}}{x}=\frac{1}{2}$, 因此函数 f 在点 $x_0=0$ 处连续. 又 $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=+\infty$, 于是由复合函数极限法则可知 $\lim\limits_{x\to 2^+}e^{\frac{x}{x-2}}=+\infty$, 由此得 $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1-e^{\frac{x}{x-2}}}{x}=-\infty$, 故 $x_0=2$ 为 f 的间断点, 且为第二类间断点.

5. 指出下列函数的间断点及其类型:

(1) $f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$;

(2) $f(x)=[|\sin x|]$;

(3) $f(x)=\mathrm{sgn}(|x|)$.

解: (1) 函数 f 在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上为初等函数, 因此连续. 又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$, 因此 $x=0$ 为 f 唯一的间断点, 且为第二类间断点.

(2) 由题设立刻可知

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 若\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}),\\ 0, & 其余,\end{cases}$$

于是 $\forall k\in\mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi}f(x)=0$, 而其余点 x_0 处, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0=f(x_0)$. 故 f 的间断点均形如 $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, 它们均为可去间断点.

(3) 由题设立刻可知

$$f(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$$

于是 f 在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上为常值函数, 因此连续. 又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, 故点 $x=0$ 为函数 f 唯一的间断点, 且为可去间断点.

6. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}$, 确定 f 的间断点.

解: 由题设可知 f 的定义域为 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 且 $f(-1)=0$, $f(1)=2$.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 若 $|x|<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$, 从而

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}=\frac{1}{x}.$$

若 $|x|>1$, 则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^{2n+1}}}{1-\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{2n}}}=1$.

因 f 在 $(-1,1)\setminus\{0\}$ 和 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 上为初等函数, 因此连续. 又

$$f(-1-0)=\lim_{x\to(-1)^-}1=1,\ f(-1+0)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{x}=-1,$$
$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x}=1,\ f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}1=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty,$$

故函数 f 的间断点为 0, -1 和 1, 其中 0 为第二类间断点, -1 为跳跃间断点, 而 1 为可去间断点.

7. 若 $f\in\mathscr{C}[a,b]$ 在 $[a,b]$ 的任意点处均不为零, 求证: f 在 $[a,b]$ 上不变号.

证明: 用反证法, 假设 f 在 $[a,b]$ 变号, 那么 $\exists a_1,b_1\in[a,b]$ 使得 $a_1<b_1$ 且 $f(a_1)f(b_1)<0$. 但 f 在 $[a_1,b_1]$ 上连续, 于是由连续函数介值定理可知 $\exists\xi\in[a_1,b_1]$ 使得 $f(\xi)=0$, 矛盾! 故所证成立.

8. 若 $f\in\mathscr{C}[a,b]$ 且 $x_1,x_2,\dots,x_n\in[a,b]$, 求证: $\exists\xi\in[a,b]$ 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}.$$

证明: 由题设可知 $\exists i,j\in\mathbb{N}$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 使得

$$f(x_i)=\min_{1\leqslant k\leqslant n}f(x_k),\ f(x_j)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}f(x_k),$$

故 $f(x_i)\leqslant\frac{1}{n}\big(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\big)\leqslant f(x_j)$. 又 $f\in\mathscr{C}[a,b]$, 则由连续函数介值定理可知存在 ξ 介于 x_i,x_j 之间使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

9. 设 $a<b<c$. 求证: $f(x)=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}$ 在 (a,c) 内恰有两个零点.

证明: **方法 1.** 由于 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$, 于是由极限的保序性可知, $\exists a_1\in(a,b)$ 使得 $\forall x\in(a,a_1]$, 均有 $f(x)>0$. 同样由 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$ 以及极限的保序性可知 $\exists b_1\in(a,b)$ 使得 $\forall x\in[b_1,b)$, 均有 $f(x)<0$. 特别地, 我们还有 $a_1<b_1$. 又 f 在 $[a_1,b_1]$ 上连续, 则由连续函数介值定理可知 f 在 $[a_1,b_1]$ 上有零点. 由于 f 在 (a,b) 上严格递减, 因此 f 在 (a,b) 内有唯一零点.

同样地, 由于 f 在 (b,c) 上连续且严格递减, 而

$$\lim_{x\to b^+}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to c^-}f(x)=-\infty,$$

于是援用与前面同样的讨论可知 f 在 (b,c) 内也有唯一的零点.

综上所述可知所证结论成立.

方法 2. 由于 f 在 (a,b) 上为初等函数, 故连续. 又 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$, 于是由广义连续函数介值定理可知 f 在 (a,b) 上有零点. 但 f 在 (a,b) 上严格递减, 因此 f 在 (a,b) 内有唯一零点.

同样地, 由于 f 在 (b,c) 上连续且严格递减, 而

$$\lim_{x\to b^+}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to c^-}f(x)=-\infty,$$

于是援用与前面同样的讨论可知 f 在 (b,c) 内也有唯一的零点.

综上所述可知所证结论成立.

10. 设 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. 求证: 函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上有最小值.

证明: 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty>f(0)$, 则由函数极限局部保序性可知, $\exists M>0$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, 当 $|x|>M$ 时, 均有 $f(x)>f(0)$, 由此立刻可得

$$\inf_{x\in\mathbb{R}}f(x)=\inf_{x\in[-M,M]}f(x).$$

又 f 在 $[-M,M]$ 上连续, 因此 f 在 $[-M,M]$ 上有最小值, 于是所证成立.