在增广矩阵上计算:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{第 1,2 行}]{\text{对换变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{第 2 行}]{\text{倍乘变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[\text{第 1,2 行}]{\text{倍加变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

原方程组变换为:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad - 2x_4 = -2, \\ \qquad\qquad x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{1.4.8}$$

把 x_2, x_4 移到右边，得

$$x_1 = -2 + x_2 + 2x_4, \quad x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4. \tag{1.4.9}$$

任取 x_2, x_4 的一组值，就得到方程组的一组解. 注意，在变换后的系数矩阵中，x_1, x_3 所在的两列恰好构成恒同矩阵 I_2. ☺

如例 1.4.7 中的 x_2, x_4 这类可以任意取值的未知数，称为**自由变量**，而取值依赖于自由变量的未知数，称为**主变量**. 而如 (1.4.9) 这样的表达式，称为**通解**或**一般解**. 通解就是用含自由变量的表达式表示主变量. 注意，在变换后的系数矩阵中，主变量所在的列恰好构成恒同矩阵，这使得我们可以通过移项直接写出通解.

在消元的过程中，首先选择的是主变量，其余的变量即为自由变量. 而主变量的选取并不是唯一的. 如例 1.4.7 ，可以选择 x_2, x_4 为主变量进行消元，其对应的增广矩阵计算为:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{第 1,2 行}]{\text{对换变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{第 1 行}]{\text{倍乘变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

通解为 $x_2 = x_1 + 4x_3, \quad x_4 = 1 - 2x_3$.

在实际计算中，我们通常选择角标小的变量（对应矩阵中靠左的列）作为主变量进行消元. 观察上面的例子，对矩阵的计算总体上分两步.

首先，从角标最小的变量开始，必要时通过换行把该变量的系数非零的方程换到上面，然后利用此方程向下消元. 变换后的矩阵满足如下特点:

1. 元素全为 0 的行（称为**零行**），只可能存在在下方;
2. 元素不全为 0 的行（称为**非零行**），从左数第一个不为 0 的元素（称为**主元**）的列指标随着行指标的增加而严格增加.

这样的矩阵称为**阶梯形矩阵**. 阶梯形矩阵具有如下形式:

$$\left[\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\
 & & & & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & * & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}\right],$$

其中 “$*$” 表示可能不为 0 的数, “$\bullet$” 表示一定不为 0 的数, 即 “$\bullet$” 处元素是主元. 一个阶梯形矩阵的非零行数称为它的阶梯数. 当求解方程组时, 把增广矩阵化成阶梯形矩阵后, 就可以判断方程组解的情形.

其次, 先通过倍乘变换将主元化成 1, 然后从角标最大的主变量 (对应矩阵中靠右的列) 开始, 依次向上消元. 变换后的矩阵仍是阶梯形矩阵, 并满足如下特点:

1. 每个非零行的主元都是 1;
2. 每个主元所在的列的其他元素都是 0.

这样的阶梯形矩阵称为**行简化阶梯形矩阵**. 行简化阶梯形矩阵具有如下形式:

$$\left[\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}\right].$$

注意, 在行简化阶梯形中, 主元所在的行和列的交叉点上的元素组成的矩阵是恒同矩阵. 当求解方程组时, 把增广矩阵化成行简化阶梯形矩阵后, 就可以写出它的通解.

下面, 我们来解决理论问题, 即说明使用初等变换就可以把矩阵化为阶梯形和行简化阶梯形.

定理 1.4.8 任意矩阵都可以用对换行变换和倍加行变换化为阶梯形; 任意矩阵都可以用初等行变换化为行简化阶梯形.

证. 先证明第一部分. 对 $m \times n$ 矩阵, 对 m 用数学归纳法. $m = 1$ 时, 矩阵只有一行, 自然是阶梯形. 注意保持不变也是一种倍加变换, 故 $m = 1$ 时, 方程组可以通过倍加变

换化为阶梯形．现假设对任意 n，$(m-1)\times n$ 矩阵都可以通过对换变换和倍加变换化为阶梯形，考察 $m\times n$ 矩阵，分如下情形讨论．

1. 如果 $a_{11}\neq 0$，那么把第 1 行的 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 个方程上（倍加变换），就可以把其他行中的第一个元素化成 0．那么第 2 到 m 行和第 2 到 n 列交叉点上的元素组成的矩阵，根据归纳假设，可以化为阶梯形．从而原矩阵也可以化为阶梯形．

2. 否则 $a_{11}=0$．如果 $a_{21},\cdots,a_{m1}$ 中有某个不为 0，记为 a_{i1}．则把第 $1,i$ 两方程互换位置（对换变换），问题归于第一种情形．

3. 否则 $a_{11},\cdots,a_{m1}$ 全为 0，即矩阵第一列元素全为 0．类似前面情形考察矩阵的其他列．如果存在 $j\leqslant n$ 使得矩阵的第 $2,\cdots,j-1$ 列全为 0 而第 j 列的元素不全为 0，类似第一二种情形，可以将原方程组化为阶梯形．

4. 否则矩阵的所有元素全为 0，自然是阶梯形．

第二部分留给读者． □

阶梯形矩阵可以定性地判断方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是否有解．具体来说，用初等行变换把增广矩阵 $\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ 化成阶梯形，系数矩阵 A 也同时化成了阶梯形．此时就可以确定解的情形．

定理 1.4.9 (判定定理)

1. 如果 $\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ 对应的阶梯数比 A 对应的阶梯数多 1（此时方程出现了矛盾），则方程组无解；

2. 如果 $\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ 和 A 对应的阶梯数相等，则方程组有解．其中，

   (a) 如果阶梯形的阶梯数和未知数个数相等，则方程组有唯一解；

   (b) 如果阶梯形的阶梯数小于未知数个数，则方程组有无穷多组解．

例 1.4.3 中，$\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ 的阶梯数是 3，而 A 的阶梯数是 2，此时方程组无解．例 1.4.2 中，$\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ 和 A 的阶梯数都是 2，未知数个数也是 2，此时方程组有唯一解．例 1.4.7 中，$\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ 和 A 的阶梯数都是 2，而未知数个数是 4，此时方程组有无穷多组解．

方程组有解的情形下，将增广矩阵化成阶梯形进行消元的办法，称为 **Gauss 消元法**．化为阶梯形后，可以自下而上逐个代入从而求出主变量的表达式，这种方法仍称为**回代法**；也可以进一步将增广矩阵从阶梯形化成行简化阶梯形，通过移项直接写出通解公式，这种方法称为 **Gauss-Jordan 消元法**．由于计算在矩阵上进行，Gauss 消元法和 Gauss-Jordan 消元法又称为矩阵消元法．