微积分A1第十三周习题课: 内容提要, 习题, 及参考解答 Dec. 7-13, 2020

本次习题课主要内容是定积分的三方面应用:

一. 几何应用: 用于求平面图形的面积, 曲线的弧长, 旋转体的体积和侧面积

二. 物理应用: 求曲线和平面图形的形心, Guldin 第一定理和第二定理

三. 综合应用: 积分应用于求极限(续), 以及积分估计

第一部分: 内容提要

一. 几何应用提要.

1) 求平面图形的面积

(i) 由非负函数 $y = f(x)$, $a \le x \le b$ 所确定的曲边梯形 $\{(x,y), 0 \le y \le f(x), a \le x \le b\}$ 的面积为 $\int_a^b f(x)dx$. 如图所示

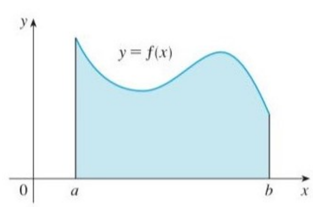


FIGURE 2
If $f(x) \geqslant 0$, the integral $\int_a^b f(x)\,dx$ is the area under the curve $y = f(x)$ from a to b.

(ii) 由两条曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$, 其中 $g(x) \le f(x)$, $a \le x \le b$, 所围成的平面图形 $\{(x,y), g(x) \le y \le f(x), a \le x \le b\}$ 之面积为 $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$. 如图所示

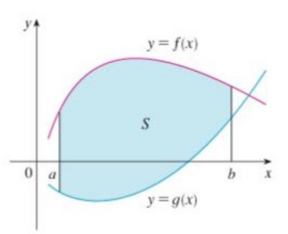
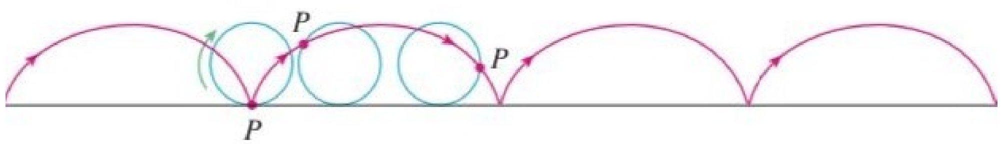


FIGURE 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$

(iii) 参数方程形式下的面积: 设函数 $y=f(x)$, $a\leq x\leq b$, 由参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leq t\leq\beta$ 所确定. (典型例子是旋轮线, 如图所示) 这里 $y(t)=f(x(t))$, $x(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调, 不失一般性, 设 $x(t)$ 为单调增加且连续可微, 并且 $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$. 则对曲边梯形 $S=\{(x,y),0\leq y\leq f(x),a\leq x\leq b\}$ 的面积公式 $|S|=\int_a^b f(x)dx$, 作积分变量代换 $x=x(t)$ 得

$$|S|=\int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$



(iv) 极坐标下的面积公式. 由极坐标曲线 $r=f(\theta)$, $a\leq\theta\leq b$, 以及两条射线 $\theta=a$, $\theta=b$ 所为图形 $\mathcal{R}$ 的面积公式为 $|\mathcal{R}|=\int_a^b \frac{1}{2}[f(\theta)]^2d\theta$.

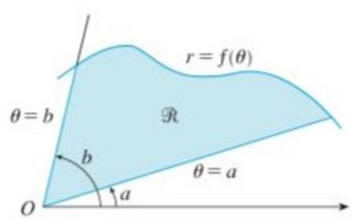


FIGURE 2

2). 曲线弧长公式:

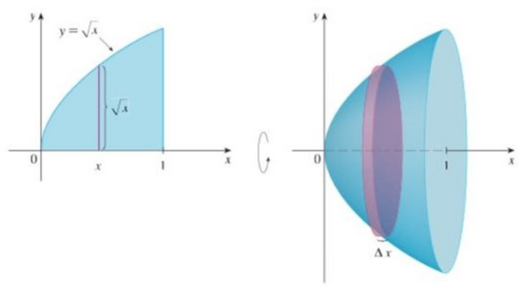
(i) 设平面曲线 Γ 由参数方程 $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$ 给出, $\alpha\leq t\leq\beta$, 则弧长为 $|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$.

(ii) 设 Γ 由函数曲线 $y=f(x)$ 给出, $a\leq x\leq b$, 则弧长为 $|\Gamma|=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$.

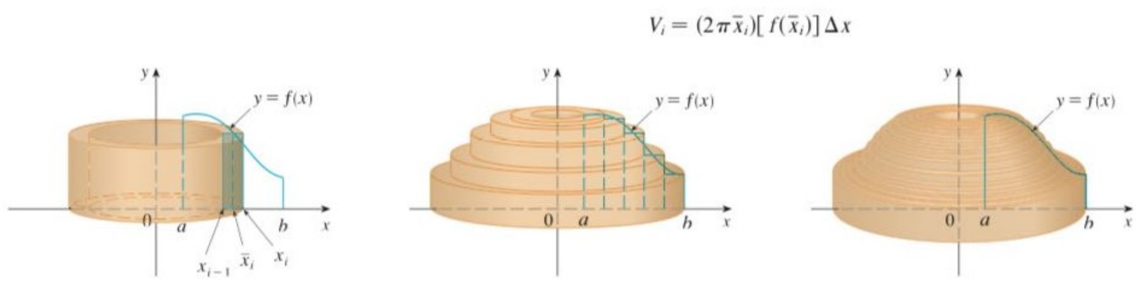
(iii) 设 Γ 由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 给出, $\alpha\leq\theta\leq\beta$, 则弧长为 $|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$.

(iv) 设空间曲线 Γ 由参数方程 $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 给出, $\alpha\le t\le\beta$, 其弧长为 $|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$.

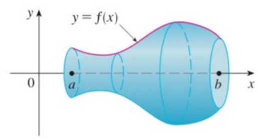
3). 旋转体的体积: 设函数 $f(x)$ 非负, 记曲线 $y=y(x)$, $a\le x\le b$ 所围成的曲边梯形为 $S=\{(x,y),0\le y\le f(x),a\le x\le b\}$,
(i) 则图形 S 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体 V 的体积公式为 $|V|=\int_a^b\pi[y(x)]^2dx$. 如图为情形 $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$.



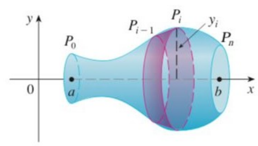
(ii) 假设 $0\le a<b$, 由图形 S 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $|V|=\int_a^b 2\pi xf(x)dx$.



4). 旋转体的侧面积: 非负函数曲线 $y=f(x)$, $a\le x\le b$ 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转面 S 的面积公式为 $|S|=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$.



(a) Surface of revolution



(b) Approximating band

二. 物理应用提要(求曲线和平面图形的形心, Guldin 第一第二定理)

1). 设平面曲线 Γ 由参数方程 $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$, $\alpha\le t\le\beta$ 给出, 则其形心 (x_c,y_c) 坐标为

$$x_c=\frac{1}{|\Gamma|}\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt,\quad y_c=\frac{1}{|\Gamma|}\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt.$$

2). 曲边梯形 $D=\{(x,y),0\le y\le f(x),a\le x\le b\}$ 的形心坐标 (x_c,y_c) 为

$$x_c=\frac{1}{|D|}\int_a^b xf(x)dx,\quad y_c=\frac{1}{2|D|}\int_a^b[f(x)]^2dx.$$

3). Guldin 第一定理: 设平面曲线 Γ 位于上半平面, 则曲线 Γ 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转面 S 的面积 $|S|$, 等于曲线 Γ 的形心绕 x 旋转一周的周长, 乘以曲线 Γ 的弧长 $|\Gamma|$, 即 $|S|=2\pi y_c|\Gamma|$, 其中 y_c 为平面曲线 Γ 的形心的纵坐标.

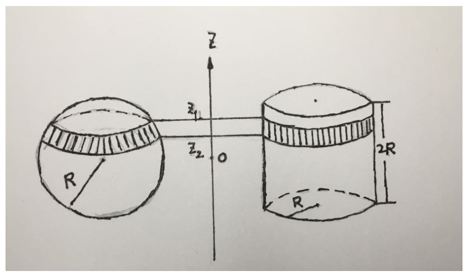
4). Guldin 第二定理: 设平面图形 D 位于上半平面, 则图形 D 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体 V 的体积, 等于 D 的形心绕 x 旋转一周的周长, 乘以图形 D 的面积 $|D|$, 即 $|V|=2\pi y_c|D|$, 其中 y_c 为平面图形的形心的纵坐标.

三. 综合应用提要: (i) 积分用于求极限(续), (ii) 积分估计.

第二部分: 习题及其解答

一. 几何应用习题

题 1. (球带面积与柱面带面积的关系) 将一个半径为 R 的球体, 和一个高为 $2R$, 半径为 R 圆柱并排放置在同一个水平面上. 对任意 $z_1, z_2 \in [-R, R]$, $z_1 > z_2$, 球面和柱面位于两个水平面 $z = z_1$, $z = z_2$ 之间的部分分别记作 $S_{z_1 z_2}$ 和 $C_{z_1 z_2}$, 即如图所示的阴影部分.



猜猜两部分面积 $|S_{z_1 z_2}|$ 和 $|C_{z_1 z_2}|$ 有何关系? 并证明你的结论.

解: 这两部分面积 $|S_{z_1 z_2}|$ 和 $|C_{z_1 z_2}|$ 相等, 即 $|S_{z_1 z_2}| = |C_{z_1 z_2}|$, $\forall z_1, z_2 \in [-R, R]$. 这是两千多年前 Archimedes 发现的一个漂亮的结果. 常称作 Archimedes 球带面积定理. 先看看特殊情形: 取 $z_1 = R$, $z_2 = -R$, 则 $S_{z_1 z_2}$ 和 $C_{z_1 z_2}$ 分别为整个球面和柱面(不含上下底面). 此时 $|S_{z_1 z_2}| = 4\pi R^2$, $|C_{z_1 z_2}| = 2R \cdot 2\pi R = 4\pi R^2$, 即定理成立. 以下证明一般情形的 Archimedes 球带面积定理. 球面部分 $S_{z_1 z_2}$ 可以看作曲线 $y = \sqrt{R^2 - z^2}$, 绕过球心的 z 轴旋转所得的旋转面, 其中 $z_2 \le z \le z_1$. 由旋转面面积公式知

$$|S_{z_1 z_2}| = \int_{z_2}^{z_1} 2\pi y(z) \sqrt{1 + y'(z)^2} dz.$$

计算得

$$y'(z) = \left(\sqrt{R^2 - z^2}\right)' = \frac{-z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \quad \Rightarrow \quad 1 + y'(x)^2 = 1 + \frac{z^2}{R^2 - z^2} = \frac{R^2}{R^2 - z^2}$$

$$\Rightarrow \quad |S_{z_1 z_2}| = 2\pi \int_{z_2}^{z_1} \sqrt{R^2 - z^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - z^2}} dz = 2\pi R (z_1 - z_2) = |C_{z_1 z_2}|.$$

Archimedes 球带面积定理得证.

题 2. 求封闭曲线 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 所围图形的面积.

解：在极坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 下, 曲线 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 具有如下方程

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

于是所求面积为

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} d\theta.$$

上述积分计算不容易. 以下计算方法比较巧妙, 值得仔细体会和学习.

$$A = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \tan^4\theta} d\tan\theta.$$

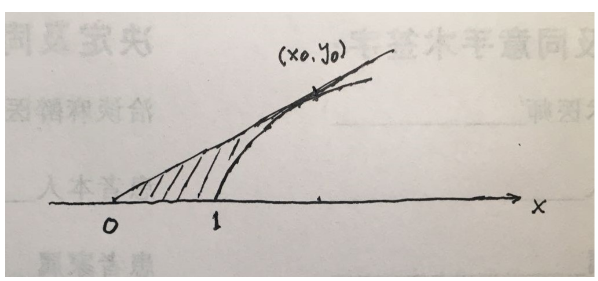
令 $u = \tan\theta$, 则

$$A = 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{1 + u^2}{1 + u^4} du = 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{u^2} + 1}{\frac{1}{u^2} + u^2} du$$

$$= 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{d(u - \frac{1}{u})}{(u - \frac{1}{u})^2 + 2} = \sqrt{2}a^2 \arctan \frac{u - \frac{1}{u}}{\sqrt{2}} \Big|_{0^+}^{+\infty} = \sqrt{2}a^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2}\pi a^2$$

解答完毕.

题 3. 在曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 上某点 (x_0, y_0) 处作切线, 使得该切线过原点. 求切点 (x_0, y_0) 的坐标和切线方程. 进一步求由切线, x 轴, 以及曲线本身所围的平面有界区域, 即图中阴影部分, 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的表面积.



解: 曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y - y_0 = \frac{1}{2\sqrt{x_0 - 1}}(x - x_0).$$

由假设切线过原点, 即 $(x,y)=(0,0)$ 满足上述方程, 故

$$y_0=\frac{x_0}{2\sqrt{x_0-1}}.$$

再与方程 $y_0=\sqrt{x_0-1}$ 联立即可解得 $(x_0,y_0)=(2,1)$. 由此得切线方程为 $y=\frac{1}{2}x$. 再来考虑旋转体的表面积. 表面积由两部分组成, 一是由曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体侧面积, 记作 A_1; 另一部份是由切线绕 x 轴旋转一周所得到旋转体的侧面积, 记作 A_2. 根据旋转面侧面积的计算公式, 我们有

$$A_1=2\pi\int_1^2 y\sqrt{1+(y')^2}dx=2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\sqrt{1+\frac{1}{4(x-1)}}dx$$

$$=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}dx=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1);$$

$$A_2=2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+(y')^2}dx=2\pi\int_0^2\frac{1}{2}x\sqrt{1+\frac{1}{2^2}}dx=\sqrt{5}\pi$$

于是所求面积为 $A=A_1+A_2=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$. 解答完毕.

题 4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导且大于零, 且满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$, 其中 a 为参数. 再设曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=0$ 和 $x=1$ 所围的图形 S 的面积为 2. (1) 求函数 $f(x)$; (2) 当 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小.

分析: 由假设 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ 得 $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2}$, 此即 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{3a}{2}$. 然后两边取不定积分, 可确定 $f(x)$ 的含有任意常数的表达式, 再由已给的面积关系确定, 从而可以讨论旋转体的体积.

解: (1) 由已知条件 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ 可得

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2}.\quad (x\neq 0).$$

由此得

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{3ax}{2}+C\quad \text{或}\quad f(x)=\frac{3ax^2}{2}+Cx,\quad x\in(0,1).$$

由假设图形 S 的面积为 2 可知

$$2=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{3ax^2}{2}+Cx\right)dx=\frac{a}{2}+\frac{C}{2}.$$

故 $C=4-a$. 因此 $f(x)=\frac{3ax^2}{2}+(4-a)x$.

(2). 求旋转体的体积

$$V=V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(\frac{3ax^2}{2}+(4-a)x\right)^2dx=\left(\frac{a^2}{30}+\frac{a}{3}+\frac{16}{3}\right)\pi.$$

令 $V'(a)=0$, 即 $(\frac{a}{15}+\frac{1}{3})\pi=0$. 解之得唯一驻点 $a=-5$. 由于 $V''(-5)=\frac{\pi}{15}>0$, 故 $a=-5$ 为体积 $V(a)$ 的唯一极小值点, 从而是最小值点. 因此当 $a=-5$ 时旋转体体积最小. 解答完毕.

题 5. 用微元法推导出极坐标下的区域 $D: 0\le\alpha\le\theta\le\beta\le\pi, 0\le r\le r(\theta)$, 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积公式为

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta,$$

这里 $r(\theta)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数. (注: 直观推导, 可不必追求严格性)

<u>解</u>: 取微元面积 $dS=rd\theta dr$. 微元 dS 绕极轴 (x 轴)旋转一周所得环形立体的体积为

$$dV=2\pi ydS=2\pi r\sin\theta dS=2\pi r\sin\theta\cdot rd\theta dr=2\pi r^2\sin\theta d\theta dr.$$

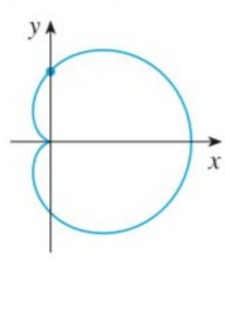
于是所求立体体积为

$$V=\int dV=2\pi\int_\alpha^\beta\sin\theta d\theta\int_0^{r(\theta)}r^2dr=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta.$$

解答完毕.

题 6. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积, 如图所示.

(cardioid)



解: 所考虑的旋转体可以看做如图位于上半平面部分的平面图形, 绕极轴旋转一周所得. 利用上题的体积公式计算:

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^\pi r^3\sin\theta d\theta=\frac{2\pi}{3}\int_0^\pi a^3(1+\cos\theta)^3\sin\theta d\theta$$
$$=\frac{2\pi a^3}{3}\left[-\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\right]_0^\pi=\frac{8a^3\pi}{3}.$$

解答完毕.

二. 物理应用习题

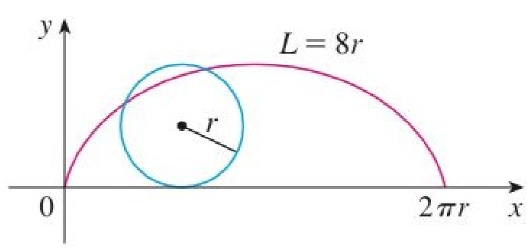
题 1. 考虑旋轮线 Γ: $x=r(\theta-\sin\theta)$, $y=r(1-\cos\theta)$, $0\le\theta\le 2\pi$, $r>0$.

(i) 求曲线 Γ 的弧长 $|\Gamma|$ (课本第175页已经计算过. 为完整计, 这里再计算一遍);

(ii) 求曲线 Γ 的形心坐标 (x_c,y_c);

(iii) 用旋转面面积公式 $|S|=\int_0^{2\pi}2\pi y d\ell$ 求曲线 Γ 绕 x 轴旋转一周所得旋转面 S 的面积, 其中 $d\ell$ 为弧长微分;

(vi) 利用 Guldin 第一定理计算(iii)中的旋转面 S 的面积.



解: (i) 根据曲线的弧长公式得

$$|\Gamma|=\int_0^{2\pi}\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta}d\theta$$
$$=\sqrt{2}r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\theta}d\theta=2r\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta=4r\int_0^\pi\sin\phi d\phi=8r.$$

(ii) 求曲线 Γ 关于 x 轴的静力矩 M_x, 以及 y_c

$$M_x=\int_0^{2\pi}y(\theta)\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}d\theta=\sqrt{2}r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\sqrt{1-\cos\theta}d\theta$$

$$= \sqrt{2}r^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^{3/2} d\theta = \sqrt{2}r^2 \int_0^{2\pi} 2^{3/2} \Big|\sin\frac{\theta}{2}\Big|^3 d\theta$$

$$= 8r^2 \int_0^{\pi} \sin^3\phi d\phi = 16r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi d\phi = 16r^2 \cdot \frac{2!!}{3!!} = \frac{32r^2}{3}.$$

由此得

$$y_c = \frac{M_x}{|\Gamma|} = \frac{\frac{32r^2}{3}}{8r} = \frac{4r}{3}.$$

(iii) 求曲线 Γ 关于 y 轴的静力矩 M_y, 以及 x_c.

$$M_y = \int_0^{2\pi} x(\theta)\sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (\theta - \sin\theta)\sqrt{2(1-\cos\theta)} d\theta$$

$$= 2r^2 \int_0^{2\pi} (\theta - \sin\theta) \sin\frac{\theta}{2} d\theta = 4r^2 \int_0^{\pi} (2\phi - \sin 2\phi)\sin\phi d\phi$$

$$= 4r^2 \int_0^{\pi} 2\phi \sin\phi d\phi = 4r^2 \cdot 2\pi = 8\pi r^2.$$

由此得

$$x_c = \frac{M_y}{|\Gamma|} = \frac{8\pi r^2}{8r} = \pi r.$$

(实际上根据对称性可知 $x_c = \pi r$)

(iv) 考虑由曲线 Γ 绕 x 轴旋转一周所得旋转面 S. 根据旋转面侧面积的计算公式得

$$|S| = \int_0^{2\pi} 2\pi y(\theta)\sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta = 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\sqrt{2(1-\cos\theta)} d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\pi r^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}} d\theta = 2\sqrt{2}\pi r^2 \int_0^{2\pi} 2^{\frac{3}{2}} \sin^3\frac{\theta}{2} d\theta$$

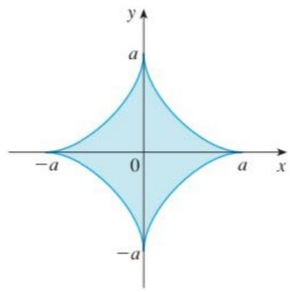
$$= 16\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin^3\phi d\phi = 32\pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi d\phi = 32\pi r^2 \cdot \frac{2!!}{3!!} = \frac{64\pi r^2}{3}.$$

(v) 根据 Guldin 第一定理知, 旋转面 S 的面积为

$$|S| = 2\pi y_c \cdot |\Gamma| = 2\pi \cdot \frac{4r}{3} \cdot 8r = \frac{64\pi r^2}{3}.$$

可见 (iv) 和 (v) 中的计算结果一致.

题 2. 考虑星形线 Γ: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$, $a > 0$. 记 Γ 位于上半平面的部分为 Γ^+, 再记 Γ 所围平面图形为 D, 图形 D 位于上半平面的部分记为 D^+. (注: 星型线的直角坐标方程为 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$)



(i) 求 Γ 的弧长;

(ii) 求 Γ 所围图形 D 的面积;

(iii) 求 Γ^+ 的形心坐标 (x_c, y_c);

(iv) 求平面图形 D^+ 的形心坐标 (x_c, y_c);

(v) 求 Γ^+ 绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积;

(vi) 求 D^+ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解：(i) 求曲线 Γ 的弧长

$$|\Gamma| = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a\sin^2 t \cos t)^2}dt$$

$$= 3a\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 6a.$$

(ii) 求曲线 Γ 所围图形 D 的面积. 由对称性知, 所求面积等于图形 D 位于第一象限 D_1 的四倍. 根据参数方程下的面积公式可得

$$|D_1| = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y(t)x'(t)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t \cdot (a\cos^3 t)'dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t \cdot (-\sin t)dt$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t)dt = 3a^2\left(\frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2}{32}.$$

因此曲线 Γ 所为图形 D 的面积为

$$|D| = 4|D_1| = 4\cdot\frac{3\pi a^2}{32} = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

(iii) 求 Γ^+ 的形心坐标 (x_c, y_c). 由对称性知 $x_c = 0$. 由曲线形心公式得

$$y_c = \frac{1}{|\Gamma^+|}\int_0^{\pi} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

$$= \frac{1}{3a}\int_0^\pi a\sin^3 t\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}dt$$

$$= \frac{1}{3a}\cdot 3a^2\int_0^\pi \sin^3 t\sqrt{\cos^4 t\sin^2 + \sin^4 t\cos^2}dt = a\int_0^\pi \sin^3 t|\cos t\sin t|dt$$

$$= 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t\sin tdt = \frac{2a}{5}.$$

(iv) 求平面图形 D^+ 的形心坐标 (x_c, y_c). 由对称性知 $x_c = 0$. 由结论(ii)知, 平面图形 D^+ 的面积为 $|D^+| = \frac{1}{2}|D| = \frac{3}{16}\pi a^2$. 记 $y = f(x)$ 为曲线 Γ^+ 的直角坐标方程, 即 $f(x) = [a^{2/3} - x^{2/3}]^{3/2}$. 于是

$$y_c = \frac{1}{2|D^+|}\int_{-a}^a [f(x)]^2 dx = \frac{1}{|D^+|}\int_0^a [f(x)]^2 dx.$$

对上述积分作变量代换 $x = a\cos^3 t$, 则 $f(x) = f(x(t)) = y(t) = a\sin^3 t$. 于是

$$y_c = \frac{1}{|D^+|}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 [a\sin^3 t]^2[a\cos^3 t]'dt = \frac{1}{|D^+|}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 [a\sin^3 t]^2 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$$

$$= \frac{3a^3}{|D^+|}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\cos^2 tdt = \frac{3a^3}{|D^+|}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7 t - \sin^9 t)dt = \frac{3a^3}{\frac{3\pi a^2}{16}}\left(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!}\right) = \frac{16a}{9\pi}\frac{6!!}{7!!}.$$

(v) 求 Γ^+ 绕 x 轴旋转所得旋转面 S 的面积 $|S|$. 用两种方法计算面积 $|S|$.

<u>方法一</u>: 根据 Guldin 第一定理知, 所求面积为

$$|S| = 2\pi y_c\cdot|\Gamma^+| = 2\pi\frac{2a}{5}\cdot 3a = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

<u>方法二</u>: 根据旋转面的面积公式得

$$|S| = \int_0^\pi 2\pi y d\ell = \int_0^\pi 2\pi\cdot a\sin^3 t\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}dt$$

$$= 2\pi\cdot 3a^2\int_0^\pi \sin^3 t\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2}dt = 6\pi a^2\int_0^\pi \sin^3 t|\cos t\sin t|dt$$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t\sin tdt = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

(vi) 求 Γ^+ 绕 x 轴旋转所得旋转体 V 的体积 $|V|$. 可用两种方法计算 $|V|$.

方法一: 由 Guldin 第二定理知

$$|V| = 2\pi\cdot y_c\cdot|D^+| = 2\pi\cdot\frac{16a}{9\pi}\frac{6!!}{7!!}\cdot\frac{3\pi a^2}{16} = \frac{32\pi a^3}{105}.$$

方法二: 直接利用旋转体体积公式计算. 由方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 可解得 $y^2=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3$ 于是所求体积为

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2(x)dx=2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3dx$$

$$=2\pi\int_0^a\left(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx=\frac{32\pi a^3}{105}.$$

解答完毕.

三. 综合应用习题

积分综合应用共九道题. 前三道题涉及积分用于求极限. 后六道习题涉及积分估计.

题 1: 计算极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. (提示取对数)

解法一: 记 $a_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, 则

$$\ln a_n=\frac{1}{n}\ln n!-\ln n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\to\int_0^1\ln xdx=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln a_n}=e^{\lim_{n\to+\infty}\ln a_n}=e^{-1}.$$

解答完毕.

(注: 作为比较, 我们再来看看通常解法, 即下面的解法二. 显然解法二不如解法一简单快捷.)

解法二: 由于函数 $y=\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上严格单调上升, 故

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln k<\int_1^n\ln xdx<\sum_{k=2}^{n}\ln k.$$

由此得

$$\ln(n-1)!<(x\ln x-x)\Big|_1^n<\ln n!.$$

此即

$$\ln(n-1)!<n\ln n-n+1<\ln n!.$$

于上式取指数得

$$(n-1)! < e^{n\ln n - n + 1} < n!.$$

此即

$$(n-1)! < e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!.$$

由上述第一个和第二个不等式得

$$n(n-1)! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{and} \quad e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!.$$

综上得

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

于上式开 n 次方得

$$\sqrt[n]{e}\left(\frac{n}{e}\right) < \sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{en}\left(\frac{n}{e}\right) \quad 或 \quad \frac{\sqrt[n]{e}}{e} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{\sqrt[n]{en}}{e}.$$

于上式令 $n \to +\infty$ 取极限, 并注意到 $\sqrt[n]{e} \to 1$, $\sqrt[n]{en} \to 1$, 即得到

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

证毕.

题 2. 求极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$, 其中

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}.$$

解: 若在 a_n 的表达式中, 以 $\frac{k\pi}{n^2}$ 代替 $\sin\frac{k\pi}{n^2}$, 则容易求得当 $n \to +\infty$ 时, 和式

$$b_n \triangleq \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2} = \pi\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}$$

$$\to \pi\int_0^1 (1+x)x\,dx = \frac{5\pi}{6}.$$

我们再来考虑 a_n 和 b_n 的极限关系. 由 Taylor 公式知, 对于 $\forall x \in (0,1)$, $\sin x = x - \frac{1}{3!}(\cos\xi)x^3$, 其中 $\xi \in (0,x)$. 因此 $|\sin x - x| \le \frac{x^3}{6}$, $\forall x \in [0,1]$. 于是

$$|a_n - b_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\sin\frac{k\pi}{n^2} - \frac{k\pi}{n^2}\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n} 2\left|\sin\frac{k\pi}{n^2} - \frac{k\pi}{n^2}\right|$$

$$\leq 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^3=\frac{\pi^3}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^6}<\frac{\pi^3}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^3}=\frac{\pi^3}{3n^2}\to 0,\quad n\to+\infty.$$

这说明

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=\frac{5\pi}{6}.$$

解答完毕.

题 3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上连续. 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}f(x)|\sin nx|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx.$$

证明: 记

$$I_n=\int_0^{\pi}f(x)|\sin nx|dx.$$

根据积分区间的可加性, 我们可以将区间 $[0,\pi]$ 上积分等分成 n 段子区间上的积分之和

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}f(x)|\sin nx|dx$$

应用积分中值定理可知存在 $\xi_k\in[\frac{(k-1)\pi}{n},\frac{k\pi}{n}]$, 使得

$$\int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}f(x)|\sin nx|dx=f(\xi_k)\int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}|\sin nx|dx.$$

再注意到

$$\int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}|\sin nx|dx=\frac{1}{n}\int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}|\sin nx|d(nx)=\frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin y|dy=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin ydy=\frac{2}{n},$$

我们就得到

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\frac{2}{n}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\frac{\pi}{n}.$$

注意上式右端可以看作函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上均匀分割 n 等分的 Riemann 和. 由 $f(x)$ 的可积性(因为它连续)可知

$$I_n=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\frac{\pi}{n}\to\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\quad n\to+\infty.$$

结论得证. 证毕.

题 4. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导, $a>0$ 且 $f''(x)\geq 0, \forall x\in[0,a]$. 证明

$$\int_0^a f(x)dx \geq af(a/2).$$

证: 将 $f(x)$ 在点 $x=\frac{a}{2}$ 展开成一阶 Taylor 公式, 带 Lagrange 余项:

$$f(x)=f(a/2)+f'(a/2)(x-a/2)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a/2)^2,$$

其中 ξ 介于 x 和 $a/2$ 之间. 由假设 $f''(x)\geq 0$ 知函数 $f(x)$ 于区间 $[0,a]$ 下凸. 因此

$$f(x)\geq f(a/2)+f'(a/2)(x-a/2), \quad x\in[0,a].$$

关于上述不等式两边从 0 到 a 积分, 并注意到 $\int_0^a(x-a/2)dx=0$, 我们就得到

$$\int_0^a f(x)dx \geq af(a/2), \quad x\in[0,a].$$

证毕.

题 5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导且 $f''(x)\leq 0, \forall x\in[0,1]$. 证明 $\int_0^1 f(x^2)dx\leq f(1/3)$.

证: 证明思想同上题. 由条件 $f''(x)\leq 0$ 可知函数 $f(x)$ 上凸. 于是

$$f(x)\leq f(1/3)+f'(1/3)(x-1/3), \quad \forall x\in[0,1].$$

于上式中用 x^2 替换 x 得

$$f(x^2)\leq f(1/3)+f'(1/3)(x^2-1/3), \quad \forall x\in[0,1].$$

对上式两边从 0 到 1 积分, 并注意到 $\int_0^1(x^2-1/3)dx=0$. 因此我们就得到 $\int_0^1 f(x^2)dx\leq f(1/3)$. 证毕.

推广：在题 5 的假设下, 我们可以类似证明 $\int_0^1 f(x^n)dx\leq f(\frac{1}{n+1})$, n 为任意正整数.

题 6: 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可积, 且存在两个正常数 $M>m>0$, 使得 $m\le f(x)\le M$, $\forall x\in[0,1]$. 证明

$$1\le\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\le\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

证明: 由于 $f(x)\ge m>0$, $\forall x\in[0,1]$, 故

$$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\ge 2\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}\cdot\frac{f(y)}{f(x)}}=2,\quad\forall x,y\in[0,1].$$

对上式关于 x 积分得

$$\frac{1}{f(y)}\int_0^1 f(x)dx+f(y)\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\ge 2,\quad\forall y\in[0,1].$$

再对上式关于 y 积分得

$$\int_0^1\frac{dy}{f(y)}\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(y)dy\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\ge 2.$$

此即

$$2\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\int_0^1 f(x)dx\ge 2,\quad\text{亦即}\quad\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\int_0^1 f(x)dx\ge 1.$$

第一个不等式得证. 由于

$$\Big[f(x)-m\Big]\left[\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{M}\right]\ge 0,\quad\forall x\in[0,1],$$

$$\text{即}\quad 1-\frac{f(x)}{M}-\frac{m}{f(x)}+\frac{m}{M}\ge 0,\quad\forall x\in[0,1].$$

积分得

$$1-\frac{1}{M}\int_0^1 f(x)dx-m\int_0^1\frac{dx}{f(x)}+\frac{m}{M}\ge 0,$$

$$\text{即}\quad m\int_0^1\frac{dx}{f(x)}+\frac{1}{M}\int_0^1 f(x)dx\le 1+\frac{m}{M}.$$

又由于

$$2\sqrt{m\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\cdot\frac{1}{M}\int_0^1 f(x)dx}\le m\int_0^1\frac{dx}{f(x)}+\frac{1}{M}\int_0^1 f(x)dx\le 1+\frac{m}{M}.$$

上式两边平方得

$$\frac{4m}{M}\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}\cdot\int_0^1 f(x)dx \le \Big(1+\frac{m}{M}\Big)^2.$$

由此得

$$\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}\cdot\int_0^1 f(x)dx \le \frac{(1+\frac{m}{M})^2}{\frac{4m}{M}} = \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

即第二个不等式成立. 证毕.

题 7. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可微, 证明存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

(注: 这是课本第146页习题11. 入选这道题是因为恐怕有些同学误用积分中值定理. 详见题解)

<u>证</u>: 考虑 $f(x)$ 在点 $x=\frac{a+b}{2}$ 处的 Taylor 展式

$$f(x)=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{2}f''(\theta(x))\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2,$$

其中 $\theta(x)$ 为介于 x 和 $\frac{a+b}{2}$ 之间的某个不确定的点. 对上式两边积分, 并注意到 $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx=0$, 即得

$$\int_a^b f(x)dx = f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\theta(x))\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2dx.$$

如果对右边的积分, 应用积分中值定理, 即

$$\frac{1}{2}\int_a^b f''(\theta(x))\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2dx=\frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2dx=\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3,$$

其中 $\eta=\theta(x_0)\in[a,b]$, 则命题得证. 但是由于 $\theta(x)$ 不一定连续, 甚至是否是函数都成问题, 故 $f''(\theta(x))$ 不一定连续. 因此应用积分中值定理的合理性存疑. 但我们可以用如下方式回避利用积分中值定理. 由于 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $f''(x)$ 在其上取得最小值和最大值, 即存在 x_1, $x_2\in[a,b]$, 使得

$$f''(x_1)=m\triangleq\min\{f''(x),x\in[a,b]\},\quad f''(x_2)=M\triangleq\max\{f''(x),x\in[a,b]\}.$$

因此 $m \le f''(\theta(x)) \le M$, 进而成立

$$m\int_a^b \Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2 dx \le \int_a^b f''(\theta(x))\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2 dx \le M\int_a^b \Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2 dx.$$

于是

$$m \le \frac{\int_a^b f''(\theta(x))\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2 dx}{\int_a^b \Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2 dx} \le M.$$

根据连续函数的介值定理知存在 $\xi \in [a,b]$ 介于 x_1 和 x_2 之间, 使得

$$f''(\xi) = \frac{\int_a^b f''(\theta(x))\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2 dx}{\int_a^b \Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2 dx}.$$

此即

$$\int_a^b f''(\theta(x))\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2 dx = f''(\xi)\int_a^b \Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2 dx = \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3.$$

于是我们得到所要证明的结论

$$\int_a^b f(x)dx = f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

证毕.

题 8. 设 $f(x)$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调减函数, 证明对任何正整数 n 成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \ge 0.$$

证：将积分区间按照 $\sin nx$ 的符号分段

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx + \int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx\right).$$

考虑上述括号里的两个积分. 对第一个积分

$$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx$$

作变量代换 $nx = 2k\pi + t$ 得

$$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} f\left(\frac{2k\pi + t}{n}\right)\sin t dt.$$

对第二个积分

$$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx$$

作变量代换 $nx = (2k+1)\pi + t$ 得

$$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} f\left(\frac{(2k+1)\pi + t}{n}\right)\sin t dt.$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调减少, 且 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上非负, 所以

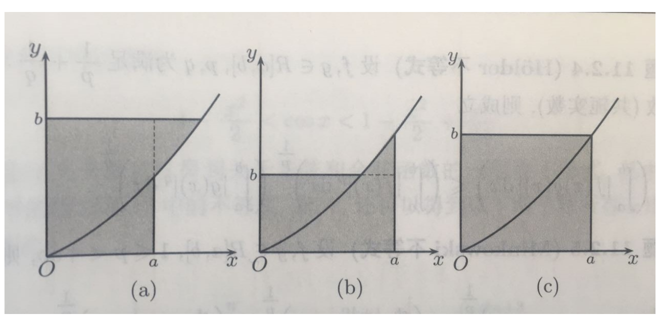
$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left[f\left(\frac{2k\pi + t}{n}\right) - f\left(\frac{(2k+1)\pi + t}{n}\right)\right]\sin t dt \geq 0.$$

证毕.

题 9. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微, 严格单调上升, 且 $f(0)=0$, 则对任意 $a>0$, $b>0$, $b \in Range(f)$, 成立

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy, \qquad (\text{称为 Young 不等式})$$

其中 $x = f^{-1}(y)$ 记 $y = f(x)$ 的反函数, 并且不等式等号成立的充要条件是 $b = f(a)$. 几何意义如图所示.



几何意义: 在如下三个不同情形下 (a) $f(a) < b$; (b) $f(a) > b$; (c) $f(a) = b$, 积分 $\int_0^a f(x)dx$ 与 $\int_0^b f^{-1}(y)dy$ 之和为如图影印部分的面积. 由图可知 Young 不等式显然成立.

证: 为方便记 $g(y)=f^{-1}(y)$, 则 $f(g(y))=y$, $g(f(x))=x$. 对积分 $\int_0^b g(y)dy$ 作变量代换 $y=f(x)$ 得

$$\int_0^b g(y)dy=\int_0^{g(b)} g(f(x))df(x)=\int_0^{g(b)} xdf(x)$$
$$=xf(x)\Big|_0^{g(b)}-\int_0^{g(b)} f(x)dx=g(b)b-\int_0^{g(b)} f(x)dx.$$

于是

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy=\int_0^a f(x)dx+g(b)b-\int_0^{g(b)} f(x)dx=g(b)b-\int_a^{g(b)} f(x)dx.$$

情形一: $a<g(b)$. 由于 $f(x)$ 严格单调上升, 故 $f(x)<b, \forall x<g(b)$. 因此

$$g(b)b-\int_a^{g(b)} f(x)dx=ab+[g(b)-a]b-\int_a^{g(b)} f(x)dx=ab+\int_a^{g(b)}[b-f(x)]dx>ab.$$

即 Young 不等式号严格成立.

情形二: $a>g(b)$. 由于 $f(x)$ 单调上升, 故 $f(x)>b, \forall x>g(b)$. 因此

$$g(b)b-\int_a^{g(b)} f(x)dx=ab-[a-g(b)]b+\int_{g(b)}^a f(x)dxab+\int_{g(b)}^a[f(x)-b]dx>ab.$$

即 Young 不等式号严格成立.

情形三: $a=g(b)$, 即 $f(a)=b$,

$$g(b)b-\int_a^{g(b)} f(x)dx=ab.$$

则 Young 不等式等号成立. 命题得证.