

## 第 5 次作业题

1. 判断下列函数是否一致连续:

(1)  $f(x) = x \sin x$  ( $0 \leq x < +\infty$ ), (2)  $f(x) = \frac{x^2+1}{4-x^2}$  ( $-1 < x < 1$ ).

2.  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 定义  $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy$ , 求  $F'$ .

3. 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  可微.  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 定义  $F(x) = \int_0^x (x+y)f(y) dy$ , 求  $F''$ .

4. 设  $\varphi \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R})$ ,  $\psi \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  $\forall x, t \in \mathbb{R}$ , 定义

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.$$

求证:  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

5. 证明: 广义含参积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} dx$  在含  $t=0$  的区间上不为一致收敛.

6. 讨论下列积分在所给区间上的一致收敛性:

(1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(yx)}{1+x^2} dx$  ( $-\infty < y < +\infty$ );

(2)  $\int_1^{+\infty} e^{-tx} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$  ( $0 \leq t < +\infty$ ).

7. 计算下列积分:

(1)  $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ;

(2)  $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin(\ln \frac{1}{x}) dx$  ( $a, b > 0$ );

(3)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$  ( $a, b > 0$ );

(4)  $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin(yx) dx$  ( $a > 0$ );

(5)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}$ , 其中  $n \geq 0$  为整数.