第 13 次作业题

1. 求解下列常微分方程:

(1)	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5y=e^x$,	(2)	$y'+xy=x^3$, $y(0)=0$,
(3)	$(1-x)\,\mathrm{d}y=(1+y)\,\mathrm{d}x$,	(4)	$\cos x\cos y\,\mathrm{d}y-\sin x\sin y\,\mathrm{d}x=0$,
(5)	$\mathrm{d}y=\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\ (x>0)$,	(6)	$(x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x(y^2+1)$,
(7)	$x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=\sin x\,\mathrm{d}x$,	(8)	$y'=(2-x+y)^2$,
(9)	$xy'+y=y\log(xy)$,	(10)	$y'=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$,
(11)	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-x+2}{x+y+4}$,	(12)	$y'+2xy=2x^3y^2$.

解: (1) 由题设可知方程的解为

$$y=e^{-\int 5\,\mathrm{d}x}\big(C+\int e^x e^{\int 5\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\big)=e^{-5x}\big(C+\int e^{6x}\,\mathrm{d}x\big)=\tfrac{1}{6}e^x+Ce^{-5x}.$$

其中 C 为任意的常数.

(2) 由题设可知方程的解为

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int x\,\mathrm{d}x}\big(C+\int x^3e^{\int x\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\big)=e^{-\frac{1}{2}x^2}\big(C+\int x^3e^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\big)\\&=e^{-\frac{1}{2}x^2}\big(C+\int x^2e^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}(\tfrac{1}{2}x^2)\big)\\&=e^{-\frac{1}{2}x^2}\big(C+(x^2-2)e^{\frac{1}{2}x^2}\big).\end{aligned}$$

带入初值条件 $y(0)=0$ 可得 $C=2$, 故 $y=2e^{-\frac{1}{2}x^2}+x^2-2$.

(3) **方法 1.** 由题设知 $\mathrm{d}(y-x)-(x\mathrm{d}\,y+y\,\mathrm{d}x)=0$, 故 $\mathrm{d}(y-x-xy)=0$, 从而原方程的解满足 $y-x-xy=C$, 其中 C 为任意的常数.

方法 2. 若 $y\neq-1$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{1+y}=\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$, 故 $1+y=\frac{C}{x-1}$, 其中 $C\neq0$ 为常数. 又 $y\equiv-1$ 也为方程的解, 则方程的解为 $y=\frac{C}{x-1}-1$, 其中 C 为任意的常数.

(4) **方法 1.** 由题知 $\cos x\,\mathrm{d}(\sin y)+\sin y\,\mathrm{d}(\cos x)=0$, 故 $\mathrm{d}(\sin y\cos x)=0$, 于是原方程的解为 $(\sin y)(\cos x)=C$, 其中 C 为任意的常数.

方法 2. 若 $\sin y\neq0$, 则由题设可知 $\frac{\cos y\,\mathrm{d}y}{\sin y}=\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x}$, 于是

$$\log|\sin y|=-\log|\cos x|+C_1,$$

从而 $(\sin y)(\cos x)=C$, 其中 $C\neq0$ 为任意常数. 注意到 $\sin y\equiv0$ 也给出了原方程的解, 故原方程的解为 $(\sin y)(\cos x)=C$, 其中 C 为任意的常数.

(5) 由题设可知 $y\geqslant0$. 若 $y>0$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}=\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$, 于是 $2\sqrt{y}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1$, 故通解为 $y=(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+C)^2$, 其中 C 为任意的常数. 另外 $y\equiv0$ 也为方程的解.

(6) 由题设知 $x\neq-1$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}=\frac{x\,\mathrm{d}x}{x+1}$, 故 $\arctan y=x-\log|x+1|+C$, 从而原方程的通解为 $y=\tan(x-\log|x+1|+C)$, 其中 C 为任意的常数.

(7) **方法 1.** 由题知 $\mathrm{d}(xy)=\mathrm{d}(-\cos x)$, 故原方程的解满足 $xy+\cos x=C$, 其中 C 为任意的常数.

方法 2. 由题设可知, 当 $x \neq 0$ 时, 我们有 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$. 于是

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\big(C + \int \frac{\sin x}{x} e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\big) \\ &= \frac{1}{x}\big(C + \int \sin x\,\mathrm{d}x\big) \\ &= \frac{1}{x}(C - \cos x), \end{aligned}$$

其中 C 为任意的常数.

(8) 令 $u = 2 - x + y$, 则 $u' = -1 + y' = -1 + u^2$. 当 $u \neq \pm 1$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2 - 1} = \mathrm{d}x,$$

从而 $\frac{1}{2}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = x + C_1$, 故 $\frac{u-1}{u+1} = Ce^{2x}$, 即 $\frac{1-x+y}{3-x+y} = Ce^{2x}$, 其中 C 为任意常数. 而 $u \equiv 1$ 和 $u \equiv -1$ 也为方程的解, 前者包含在通解中 (对应于 $C = 0$), 后者则给出不包含在上述通解当中的特解 $y = x - 3$.

(9) 由题设可知 $(xy)' = y\log(xy)$. 令 $u = xy$, 则 $u' = \frac{u}{x}\log u$. 若 $u \neq 1$, 则 $\frac{\mathrm{d}u}{u\log u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, 从而 $\log|\log u| = \log|x| + C_1$, 于是 $\log u = Cx$, 也即 $y = \frac{1}{x}e^{Cx}$, 其中 $C \neq 0$ 为常数. 而 $u \equiv 1$ 也为方程的解. 由此知原方程的解为 $y = \frac{1}{x}e^{Cx}$, 其中 C 为任意的常数.

(10) 定义 $u = \frac{y}{x}$. 则 $u + xu' = y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2$. 当 $u \neq 1$ 时, $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{2\mathrm{d}u}{(u-1)^2}$, 故 $-\frac{2}{u-1} = \log|x| + C$. 于是原方程的通解为

$$y = x\big(1 - \tfrac{2}{\log|x| + C}\big),$$

其中 C 为任意常数. 而 $u = 1$ 也为方程的解, 也即 $y = x$ 也为原方程的解.

(11) 直线 $y - x + 2 = 0$, $x + y + 4 = 0$ 的交点为 $(-1, -3)$. 作变换

$$X = x + 1,\ Y = y + 3,$$

则 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{Y - X}{X + Y}$. 令 $u = \frac{Y}{X}$, 那么 $u + Xu' = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{u-1}{u+1}$, 即 $-\frac{(u+1)\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{\mathrm{d}X}{X}$. 故

$$\log|X| = -\int \tfrac{(u+1)\mathrm{d}u}{u^2+1} = -\tfrac{1}{2}\log(u^2+1) - \arctan u + C,$$

由此立刻可得所求常微分方程的解满足

$$\frac{1}{2}\log\big((\frac{y+3}{x+1})^2 + 1\big) + \arctan\frac{y+3}{x+1} = -\log|x+1| + C.$$

(12) 如果 $y \neq 0$, 则 $\frac{y'}{y^2} + \frac{2x}{y} = 2x^3$. 定义 $z = \frac{1}{y}$, 则我们有 $z' = -\frac{y'}{y^2}$, 从而原方程变为 $-z' + 2xz = 2x^3$, 也即 $z' - 2xz = -2x^3$. 于是我们有

$$z = e^{\int 2x\,\mathrm{d}x}\big(C + \int(-2x^3)e^{\int(-2x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\big) = x^2 + 1 + Ce^{x^2},$$

于是 $y = \frac{1}{x^2 + 1 + Ce^{x^2}}$, 其中 C 为任意的常数.

另外 $y \equiv 0$ 也为原常微分方程的解.

2. 求解下列常微分方程:

(1) $y'' = 2x - \cos x$, 其中 $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$,
(2) $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$,
(3) $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$.

解: (1) 由题设我们立刻可知

$$\begin{aligned} y'(x) &= y'(0) + \int_0^x y''(t)\,\mathrm{d}t = -1 + \int_0^x (2t - \cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= -1 + (t^2 - \sin t)\Big|_0^x = -1 + x^2 - \sin x. \end{aligned}$$

由此我们可以导出

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + \int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x (-1 + t^2 - \sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + \Big(-t + \frac{1}{3}t^3 + \cos t\Big)\Big|_0^x = -x + \frac{1}{3}x^3 + \cos x. \end{aligned}$$

(2) 令 $p = y'$. 则原方程变为 $p' - \frac{2x}{1+x^2}p = 0$. 于是

$$p = C_1 e^{\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x} = C_1 e^{\log(x^2+1)} = C_1(x^2+1),$$

进而可得 $y = C_2 + C_1\int(x^2+1)\,\mathrm{d}x = C_2 + C_1\big(x + \frac{1}{3}x^3\big)$.

(3) **方法 1.** 令 $p = y''$, 则 $(p')^2 + p^2 = 1$. 当 $p \neq \pm 1$ 时, $\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1-p^2}} = \pm\,\mathrm{d}x$. 由此可得 $\arccos p = \mp x + C$, 故 $p = \cos(x + C_1)$, 从而 $y' = \sin(x + C_1) + C_2$, 进而可得所求通解为 $y = -\cos(x + C_1) + C_2 x + C_3$.

另外 $p = \pm 1$ 也给出两组解 $y = \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$. 这两组解既不是原方程的特解, 也不是原方程的通解.

方法 2. 由方程可得 $2y'''y'''' + 2y''y''' = 0$. 于是 $y'''' + y'' = 0$ 或 $y''' = 0$. 下面分情况讨论:

情形 1: 由方程 $y'''' + y'' = 0$ 可得 $y'' = c_1\cos x + c_2\sin x$, 其中 c_1, c_2 为任意常数. 从而 $y''' = -c_1\sin x + c_2\cos x$. 将之带入原方程可得 $c_1^2 + c_2^2 = 1$, 故 $y'' = \cos(x + C_1)$, 于是我们有

$$y = -\cos(x + C_1) + C_2 x + C_3,$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

情形 2: 对于方程 $y''' = 0$, 我们有 $y'' = c_1$, 其中 c_1 为任意的常数. 带入原方程可得 $c_1^2 = 1$, 故 $c_1 = \pm 1$, 从而 $y'' = \pm 1$, 进而可知

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2, \text{ 或 } y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

综上所述可知, 原方程的解有三组;

$$\begin{aligned} y &= -\cos(x+C_1)+C_2x+C_3, \\ y &= \frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2, \\ y &= -\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2, \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

方法 3. 由方程可设 $y'''=\sin t$, $y''=\cos t$, 其中 t 为关于x 的可导函数. 由第二个式子可得 $y'''=-t'\sin t$, 从而 $(1+t')\sin t=0$.

下面分情况讨论:

情形 1: $1+t'=0$. 由此得 $t=-(x+C_1)$, 于是 $y''=\cos(x+C_1)$, 进而可知 $y=-\cos(x+C_1)+C_2x+C_3$, 其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

情形 2: $\sin t=0$. 此时 $y'''=0$, 故 $y''=1$ 或 $y''=-1$, 由此可知

$$y=\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2, \text{ 或 } y=-\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

综上所述可知, 原方程的解有三组:

$$\begin{aligned} y &= -\cos(x+C_1)+C_2x+C_3, \\ y &= \frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2, \\ y &= -\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2, \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

3. 假设 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$ 是一个以 $T>0$ 为周期的周期函数, 并且 $y=\varphi(x)$ 为方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=f(x)$ 的解使得 $\varphi(T)=\varphi(0)$, 求证: 解 $y=\varphi(x)$ 也是一个以 T 为周期的周期函数.

证明: $\forall x\in\mathbb{R}$, 定义 $\psi(x)=\varphi(x+T)$. 则 $\psi(0)=\varphi(T)=\varphi(0)$, 并且 $\forall x\in\mathbb{R}$, 由题设可知 $\psi'(x)+\psi(x)=\varphi'(x+T)+\varphi(x+T)=f(x+T)=f(x)$. 于是 φ,ψ 满足同样的一阶线性常微分方程和初值条件, 于是由解的唯一性可知 $\varphi=\psi$, 也即 φ 是一个以 T 为周期的周期函数.

4. 对函数 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$, 求 y', y'', 并求以 y 为通解的常微分方程.

解: 由题设可知

$$\begin{aligned} y' &= (C_2-C_1-C_2x)e^{-x}, \\ y'' &= (-C_2-C_2+C_1+C_2x)e^{-x}=(-2C_2+C_1+C_2x)e^{-x}, \end{aligned}$$

于是 $y'=C_2e^{-x}-y$, $y''=-2C_2e^{-x}+y$, 从而 $y''=-2(y'+y)+y$, 因此所求常微分方程为 $y''+2y'+y=0$.

5. 已知三阶非齐次的线性常微分方程的特解为 x^2+x, x^2+x^3, 相应的齐次常微分方程的解为 $1, x$, 求上述非齐次线性常微分方程的通解.

解: 由于 x^2+x, x^2+x^3 为三阶线性非齐次方程的特解, 故

$$(x^2+x)-(x^2+x^3)=x-x^3$$

为相应齐次方程的特解. 又

$$W(1,x,x-x^3)=\begin{vmatrix} 1 & x & x-x^3 \\ 0 & 1 & 1-3x^2 \\ 0 & 0 & -6x \end{vmatrix}=-6x$$

不恒为零, 则 $1, x, x-x^3$ 为相应齐次方程的基本解组, 故非齐次方程的通解为 $y=x^2+x+C_1+C_2x+C_3(x-x^3)$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

6. 若 x, x^2, x^3 为三阶齐次线性常微分方程的解, 求证它们为基本解组, 并求相应的三阶齐次线性常微分方程.

解: 由题设可知

$$W(x,x^2,x^3)(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}=(12x^3+2x^3)-(6x^3+6x^3)=2x^3$$

不恒为零, 故 x, x^2, x^3 为基本解组, 它们所满足的三阶方程为

$$0=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & y \\ 1 & 2x & 3x^2 & y' \\ 0 & 2 & 6x & y'' \\ 0 & 0 & 6 & y''' \end{vmatrix}=2x^3y'''-6x^2y''+12xy'-12y,$$

也即我们有 $y'''-\frac{3}{x}y''+\frac{6}{x^2}y'-\frac{6}{x^3}y=0$.

7. 求解下列常微分方程:

(1) $y''-6y'+9y=0$, 其中 $y(0)=y'(0)=1$,
(2) $y'''-3y''-4y'=0$, 其中 $y(0)=y'(0)=y''(0)=1$,
(3) $y''+3y'+2y=\sin x+x^2$,
(4) $y''-2y'+y=xe^x+4$, 其中 $y(0)=y'(0)=1$,
(5) $x^2y''+2xy'-n(n+1)y=0$,
(6) $xy''+2y'=12\log x$.

解: (1) 特征方程为 $\lambda^2-6\lambda+9=0$, 故特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=3$, 则方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$. 带入初值条件可知 $C_1=1$, $C_2+3C_1=1$, 则 $C_1=1$, $C_2=-2$. 从而所求常微分方程的解为 $y=(1-2x)e^{3x}$.

(2) 特征方程为 $\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda=0$, 故特征根为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=4$. 则方程的通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{4x}$. 带入初值条件可得

$$C_1+C_2+C_3=1,\ -C_2+4C_3=1,\ C_2+16C_3=1,$$

于是 $C_3=\frac{1}{10}$, $C_2=-\frac{3}{5}$, $C_1=\frac{3}{2}$, 从而所求常微分方程的解为

$$y=\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{5}e^{-x}+\tfrac{1}{10}e^{4x}.$$

(3) 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+3\lambda+2=0$, 则特征根为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$. 非齐次项为 $x^2+\sin x$, 这促使考虑方程 $y''+3y'+2y=x^2$, $y''+3y'+2y=e^{ix}$.

由于 0 不是特征根, 故第一个方程有特解 $z_0=A+Bx+Cx^2$. 带入方程可得 $2C+3(B+2Cx)+2(A+Bx+Cx^2)=x^2$, 于是

$$2C+3B+2A=0,\ 6C+2B=0,\ 2C=1,$$

从而 $C=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{3}{2}$, $A=\frac{7}{4}$, 则 $z_0=\frac{7}{4}-\frac{3}{2}x+\frac{x^2}{2}$.

由于 i 不是特征根, 故第二个方程有特解 $z_1=De^{ix}$. 带入方程得

$$-De^{ix}+3iDe^{ix}+2De^{ix}=e^{ix},$$

则 $D=\frac{1}{1+3i}=\frac{1}{10}(1-3i)$. 故 $z_1=\frac{1}{10}(1-3i)e^{ix}$, 从而我们有

$$\operatorname{Im} z_1=\tfrac{1}{10}(\sin x-3\cos x).$$

于是所求常微分方程的通解为

$$y=\left(\tfrac{7}{4}-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{x^2}{2}\right)+\tfrac{1}{10}(\sin x-3\cos x)+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

(4) 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$, 故特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=1$. 由于非齐次项为 xe^x+4, 这促使我们来考虑下述常微分方程

$$y''-2y'+y=xe^x,\ y''-2y'+y=4.$$

由于 1 为二重特征根, 故第一个方程有特解 $z_0=(A+Bx)x^2e^x$. 则

$$\begin{aligned}
z_0' &= (2Ax+3Bx^2+Ax^2+Bx^3)e^x\\
&= \big(2Ax+(A+3B)x^2+Bx^3\big)e^x,\\
z_0'' &= \big(2A+2(A+3B)x+3Bx^2+2Ax+(A+3B)x^2+Bx^3\big)e^x\\
&= \big(2A+2(2A+3B)x+(A+6B)x^2+Bx^3\big)e^x,
\end{aligned}$$

带入第一个方程立刻可得

$$\begin{aligned}
&2A+2(2A+3B)x+(A+6B)x^2+Bx^3\\
&\qquad\qquad -2\big(2Ax+(A+3B)x^2+Bx^3\big)+(A+Bx)x^2=x,
\end{aligned}$$

于是 $2A+6Bx=x$, 故 $A=0$, $B=\frac{1}{6}$, 则所求特解为 $z_0=\frac{1}{6}x^3e^x$.

由于 0 不是特征根, 故第二个方程有特解 $z_1=C$, 带入方程可得 $C=4$. 故相应特解为 $z_1=4$. 则非齐次方程的通解为 $y=\frac{1}{6}x^3e^x+4+(C_1+C_2x)e^x$.

带入初值条件可得 $4+C_1=1$, $C_1+C_2=1$, 故 $C_1=-3$, $C_2=4$. 从而所求常微分方程的解为 $y=\frac{1}{6}x^3e^x+4+(-3+4x)e^x=\big(\frac{x^3}{6}+4x-3\big)e^x+4$.

(5) 令 $t=\log|x|$. 则 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $y''=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$. 将之带入原方程立刻可得 $-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-n(n+1)y=0$, 也即我们有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-n(n+1)y=0.$$

该常微分方程的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-n(n+1)=0$, 则其特征根为

$$\lambda_1=n,\ \lambda_2=-n-1.$$

于是所求常微分方程的通解为

$$y=C_1e^{nt}+C_2e^{-(n+1)t}=C_1|x|^n+\frac{C_2}{|x|^{n+1}}.$$

(6) 令 $t=\log x$. 则 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $y''=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$. 将之带入原方程可得 $-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2y}{dt^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=12x\log x=12te^t$, 也即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=12te^t.$$

该方程的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+\lambda=0$, 于是特征根为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$. 由于 1 不是特征根, 则非齐次方程有特解 $z_0=(A+Bt)e^t$, 从而

$$z_0'=\big((A+B)+Bt\big)e^t,\ z_0''=\big((A+2B)+Bt\big)e^t,$$

带入方程得 $(2A+3B)+2Bt=12t$, 则 $B=6$, $A=-9$. 故所求方程的通解为

$$y=\big(-9+6t\big)e^t+C_1+C_2e^{-t}=3x(-3+2\log x)+C_1+\frac{C_2}{x}.$$

8. 求解下列齐次常微分方程组 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{AY}$, 其中

(1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&-2\\8&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}(0)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$;

(2) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&2&-2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}(0)=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

解: (1) **方法 1.** 由题设我们立刻得 $y_1'=-y_1-2y_2$, $y_2'=8y_1-y_2$. 由第一式可知 $y_2=-\frac{1}{2}(y_1'+y_1)$, 将之带入第二式得 $-\frac{1}{2}(y_1'+y_1)'=8y_1+\frac{1}{2}(y_1'+y_1)$, 也即 $y_1''+2y_1'+17y_1=0$. 它的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+17=(\lambda+1)^2+16=0$, 故相应特征根为 $\lambda_1=-1+4i$, $\lambda_2=-1-4i$, 于是上述齐次方程的通解为 $y_1=C_1e^{-x}\cos 4x+C_2e^{-x}\sin 4x$, 其中 C_1,C_2 为任意的常数. 进而我们有

$$y_2=-\frac{1}{2}(y_1'+y_1)=2C_1e^{-x}\sin 4x-2C_2e^{-x}\cos 4x.$$

又 $y_1(0)=0$, $y_2(0)=-1$, 则 $C_1=0$, $C_2=\frac{1}{2}$, 故所求常微分方程组的解为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-x}\sin 4x\\-2e^{-x}\cos 4x\end{pmatrix}.$$

方法 2. 方程组的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -8 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2+16=0.$$

故特征根为 $\lambda_1=-1+4i$, $\lambda_2=-1-4i$. 与 $\lambda_1=-1+4i$ 相伴特征向量满足:

$$\begin{pmatrix} 4i & 2 \\ -8 & 4i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故 $r_2=-2ir_1$. 由此可得与 $\lambda_1=-1+4i$ 相伴的一个特征向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}.$$

于是所求齐次常微分方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} e^{-x}\cos 4x \\ 2e^{-x}\sin 4x \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} e^{-x}\sin 4x \\ -2e^{-x}\cos 4x \end{pmatrix},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 又 $y_1(0)=0$, $y_2(0)=-1$, 由此可得 $C_1=0$, $C_2=\frac{1}{2}$, 故所求齐次常微分方程组的解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-x}\sin 4x \\ -2e^{-x}\cos 4x \end{pmatrix},$$

(2) 方程组的特征方程为

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 2 & \lambda-2 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)+\lambda-2=\lambda^2(\lambda-2).$$

故特征根为 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=0$.

与 $\lambda_1=2$ 相伴的特征向量满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

故 $r_1+r_2-r_3=0$, $r_1+r_3=0$, 从而我们有 $r_2=-2r_1$, $r_3=-r_1$, 于是与 $\lambda_1=2$ 相伴的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

由于 0 为二重特征根, 则方程组有解形如:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1x \\ a_2+b_2x \\ a_3+b_3x \end{pmatrix}.$$

带入方程组可得

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 + a_3 + (b_1 - b_2 + b_3)x \\ 2(a_2 - a_1 - a_3) + 2(b_2 - b_1 - b_3)x \\ a_2 - a_1 - a_3 + (b_2 - b_1 - b_3)x \end{pmatrix}.$$

由此可得

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = b_1, \\ 2(a_2 - a_1 - a_3) = b_2, \\ a_2 - a_1 - a_3 = b_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 - b_2 + b_3 = 0, \\ 2(b_2 - b_1 - b_3) = 0, \\ (b_2 - b_1 - b_3) = 0, \end{cases}$$

由左边的三个等式可知 $b_2 = 2b_3$, $b_1 = -b_3$. 带入右边第一个等式可得

$$-b_3 - 2b_3 + b_3 = 0,$$

则 $b_3 = 0$, 从而 $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $a_2 = a_1 + a_3$. 于是相应的解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 + a_3 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故所求齐次常微分方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数. 又 $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$, $y_3(0) = 0$, 则

$$C_1 + C_2 = 1,\ -2C_1 + C_2 + C_3 = -1,\ -C_1 + C_3 = 0,$$

故 $C_1 = C_3 = 1$, $C_2 = 0$, 从而所求齐次常微分方程组的解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. 求解下列非齐次常微分方程组:

(1) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + 2y_1 - 3y_2 = e^x \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - 2y_1 - 3y_2 = e^{2x} \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = -y_1 + y_2 + 3 \\ \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = y_1 + y_2 - 3 \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} 4\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = -3y_1 + \sin x \\ \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = -y_2 + \cos x \end{cases}$.

解: (1) 由题设可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

齐次方程的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & -3 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^2-\lambda-12=(\lambda-4)(\lambda+3).$$

则特征根为 $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-3$.

与 $\lambda_1=4$ 相伴的特征向量满足

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故 $r_2=2r_1$, 从而与 $\lambda_1=4$ 相伴的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

与 $\lambda_2=-3$ 相伴的特征向量满足

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

从而 $r_1=-3r_2$, 由此可得与 $\lambda_2=-3$ 相伴的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. 于是齐次常微分方程组的一个基本解组为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{4x},\ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3x}.$$

故相应的基解矩阵为

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & -3e^{-3x} \\ 2e^{4x} & e^{-3x} \end{pmatrix}.$$

于是非齐次方程组的有特解

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_0(x) &= \begin{pmatrix} e^{4x} & -3e^{-3x} \\ 2e^{4x} & e^{-3x} \end{pmatrix}\int_0^x \begin{pmatrix} e^{4u} & -3e^{-3u} \\ 2e^{4u} & e^{-3u} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e^u \\ e^{2u} \end{pmatrix}\mathrm{d}u \\
&= \begin{pmatrix} e^{4x} & -3e^{-3x} \\ 2e^{4x} & e^{-3x} \end{pmatrix}\int_0^x \frac{1}{7e^u}\begin{pmatrix} e^{-3u} & 3e^{-3u} \\ -2e^{4u} & e^{4u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^u \\ e^{2u} \end{pmatrix}\mathrm{d}u \\
&= \begin{pmatrix} e^{4x} & -3e^{-3x} \\ 2e^{4x} & e^{-3x} \end{pmatrix}\int_0^x \begin{pmatrix} \frac{1}{7}e^{-3u}+\frac{3}{7}e^{-2u} \\ -\frac{2}{7}e^{4u}+\frac{1}{7}e^{5u} \end{pmatrix}\mathrm{d}u \\
&= \begin{pmatrix} e^{4x} & -3e^{-3x} \\ 2e^{4x} & e^{-3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{21}(1-e^{-3x})+\frac{3}{14}(1-e^{-2x}) \\ \frac{1}{14}(1-e^{4x})+\frac{1}{35}(e^{5x}-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{11}{42}e^{4x}-\frac{3}{10}e^{2x}+\frac{1}{6}e^x-\frac{9}{70}e^{-3x} \\ \frac{11}{21}e^{4x}-\frac{2}{5}e^{2x}-\frac{1}{6}e^x+\frac{3}{70}e^{-3x} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

故所求非齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{42}e^{4x} - \frac{3}{10}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{x} - \frac{9}{70}e^{-3x} \\ \frac{11}{21}e^{4x} - \frac{2}{5}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{x} + \frac{3}{70}e^{-3x} \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4x} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3x},$$

其中 C_1, C_2 为任意的常数.

(2) 由题设立刻可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

于是齐次方程组的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

从而特征根为 $\lambda = \pm i$. 与特征根 i 相伴的特征向量满足

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

也即 $r_2 = ir_1$, 故与特征根 i 相伴的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, 则齐次常微分方程组的一个复值特解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} e^{it} \\ ie^{it} \end{pmatrix}$, 相应的基本解组为

$$\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix},$$

由此可得相应的基解矩阵为

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

则非齐次方程组有特解

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_0(x) &= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \int_0^x \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{d}u \\
&= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \int_0^x \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{d}u \\
&= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \int_0^x \begin{pmatrix} -3\sin u \\ 3\cos u \end{pmatrix} \mathrm{d}u \\
&= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\cos x - 3 \\ 3\sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3\cos x \\ 3\sin x \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

于是所求非齐次常微分方程组的通解为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3-3\cos x \\ 3\sin x \end{pmatrix} + \widetilde{C}_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + \widetilde{C}_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中 C_1, C_2 为任意的常数.

(3) 由题设我们立刻可得

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = -y_2 + \cos x, \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = 4\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + 3y_1 - \sin x = 3y_1 - 4y_2 + 4\cos x - \sin x, \end{cases}$$

于是我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x \\ 4\cos x - \sin x \end{pmatrix}.$$

上述非齐次常微分方程组相应的齐次方程组的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -3 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3) = 0,$$

从而特征根为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$.

与 $\lambda_1 = -1$ 相伴的特征向量满足

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故 $r_2 = r_1$, 由此可得与 $\lambda_1 = -1$ 相伴的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

与 $\lambda_2 = -3$ 相伴的特征向量满足

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故 $r_2 = 3r_1$, 从而与 $\lambda_2 = -3$ 相伴的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. 进而可知齐次方程组的一个基本解组为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}, \ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3x},$$

相应的基解矩阵为

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-3x} \\ e^{-x} & 3e^{-3x} \end{pmatrix},$$

进而可得非齐次常微分方程组的一个特解为

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_0(x) &= \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-3x} \\ e^{-x} & 3e^{-3x} \end{pmatrix} \int_0^x \begin{pmatrix} e^{-u} & e^{-3u} \\ e^{-u} & 3e^{-3u} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos u \\ 4\cos u - \sin u \end{pmatrix} \mathrm{d}u \\
&= \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-3x} \\ e^{-x} & 3e^{-3x} \end{pmatrix} \int_0^x \frac{1}{2e^{-4u}} \begin{pmatrix} 3e^{-3u} & -e^{-3u} \\ -e^{-u} & e^{-u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u \\ 4\cos u - \sin u \end{pmatrix} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-3x} \\ e^{-x} & 3e^{-3x} \end{pmatrix} \int_0^x \begin{pmatrix} e^{u}(\sin u - \cos u) \\ e^{3u}(3\cos u - \sin u) \end{pmatrix} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-3x} \\ e^{-x} & 3e^{-3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - e^{x}\cos x \\ e^{3x}\cos x - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-x} - e^{-3x} \\ e^{-x} - 3e^{-3x} + 2\cos x \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

于是所求非齐次常微分方程组的通解为

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-x} - e^{-3x} \\ e^{-x} - 3e^{-3x} + 2\cos x \end{pmatrix} + \widetilde{C}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + \widetilde{C}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3x} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \cos x \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3x},
\end{aligned}$$

其中 C_1, C_2 为任意的常数.

注: 同前面一样, 上述题目也可以转化成二阶非齐次线性常微分方程来求解.