1 矩阵乘法

1. 计算下面矩阵乘积
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n \tag{1}$$

2. 用矩阵乘法的定义证明矩阵结合律，即$(AB)C = A(BC)$。

3. 证明：两个上（下）三角矩阵的乘积还是上（下）三角矩阵

4. 证明：如果方阵A可逆，则$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$。

5. 证明：对于任意方阵B, BB^T是对称的。

6. 假设A是m阶的可逆矩阵，B是n阶的可逆矩阵，求下面分块矩阵的逆矩阵
$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \tag{2}$$
$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \tag{3}$$
其中C是一个$m \times n$的矩阵。

2 消元法、行约化

1. 用消元法解线性方程
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

2. 把下面矩阵化成：1）行阶梯矩阵。2）约化行阶梯矩阵。并写出每一步对应的初等矩阵
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 6 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

3. 用高斯-若当消元法求下面矩阵的逆
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

4. 求下面5×5矩阵的逆

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

5. 证明：如果增广矩阵$(A,\mathbf{b})$和$(B,\mathbf{c})$是行等价的，则线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$和$B\mathbf{x}=\mathbf{c}$有相同的解集。（提示：回忆如何证明两个集合相等）

6. 考虑如下的分块矩阵M，其中A是一个m阶的方阵，D是一个n阶的方阵，

$$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{9}$$

a) （分块行变换）对下面每种情况找到合适的矩阵E，使得EM是相应的矩阵，并且写出矩阵P的行数和列数

$$\begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix} \tag{10}$$

b) （分块行化简）如果A可逆，找到合适的矩阵E，使得

$$EM=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & F \end{bmatrix} \tag{11}$$

并且把F用A,B,C,D表示出来。