

第 13 次作业题

1. 证明: 函数列 $\{nx^n(1-x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上不为一致收敛.
2. 求下列函数项级数的收敛域并指出使之绝对收敛、条件收敛的 x .

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{x}\right)^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{x}{2^n}.$$

3. 下列函数项级数在收敛域上是否一致收敛?

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos nx}{n^2}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx^2}.$$

4. 证明: 函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ 是 $(1, +\infty)$ 上的连续函数.

5. 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$, 计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} S(x) dx$.

6. 证明: 函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 进而证明它可微.

7. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(2n-1)2^n}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{n\sqrt{n}} (x+1)^n.$$

8. 求下列幂级数的收敛域与和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

9. 将下列函数在点 x_0 处展成幂级数, 并求收敛域:

$$(1) \frac{x+2}{x^2-x-2}, x_0 = -2; (2) \ln(x + \sqrt{x^2+1}), x_0 = 0; (3) \int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt, x_0 = 0.$$

10. 设 $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-2}$. $\forall n \geq 0$, 计算 $f^{(n)}(-2)$.