第 13 次作业题

1. 求解下列常微分方程:

(1)	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5y=e^x$,	(2)	$y'+xy=x^3$, $y(0)=0$,
(3)	$(1-x)\,\mathrm{d}y=(1+y)\,\mathrm{d}x$,	(4)	$\cos x\cos y\,\mathrm{d}y-\sin x\sin y\,\mathrm{d}x=0$,
(5)	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{xy}\ (x>0)$,	(6)	$(x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x(y^2+1)$,
(7)	$x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=\sin x\,\mathrm{d}x$,	(8)	$y'=(2-x+y)^2$,
(9)	$xy'+y=y\log(xy)$,	(10)	$y'=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$,
(11)	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-x+2}{x+y+4}$,	(12)	$y'+2xy=2x^3y^2$.

2. 求解下列常微分方程:

(1) $y''=2x-\cos x$, 其中 $y(0)=1$, $y'(0)=-1$,

(2) $(1+x^2)y''-2xy'=0$,

(3) $(y''')^2+(y'')^2=1$.

3. 假设 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$ 是一个以 $T>0$ 为周期的周期函数, 并且 $y=\varphi(x)$ 为方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=f(x)$ 的解使得 $\varphi(T)=\varphi(0)$, 求证: 解 $y=\varphi(x)$ 也是一个以 T 为周期的周期函数.

4. 对函数 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$, 求 y', y'', 并求以 y 为通解的常微分方程.

5. 已知三阶非齐次的线性常微分方程的特解为 x^2+x, x^2+x^3, 相应齐次常微分方程的解为 $1,x$, 求上述非齐次线性常微分方程的通解.

6. 若 x,x^2,x^3 为三阶齐次线性常微分方程的解, 求证它们为基本解组, 并求相应的三阶齐次线性常微分方程.

7. 求解下列常微分方程:

(1) $y''-6y'+9y=0$, 其中 $y(0)=y'(0)=1$,

(2) $y'''-3y''-4y'=0$, 其中 $y(0)=y'(0)=y''(0)=1$,

(3) $y''+3y'+2y=\sin x+x^2$,

(4) $y''-2y'+y=xe^x+4$, 其中 $y(0)=y'(0)=1$,

(5) $x^2y''+2xy'-n(n+1)y=0$,

(6) $xy''+2y'=12\log x$.

8. 求解下列齐次常微分方程组 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{A}\mathbf{Y}$, 其中

(1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 8 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}(0)=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$;

(2) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}(0)=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$.

9. 求解下列非齐次常微分方程组:

(1) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + 2y_1 - 3y_2 = e^x \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - 2y_1 - 3y_2 = e^{2x} \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = -y_1 + y_2 + 3 \\ \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = y_1 + y_2 - 3 \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} 4\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = -3y_1 + \sin x \\ \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = -y_2 + \cos x \end{cases}$.