第2章　分离变量法

§2.1　分离变量法实例（三大典型方程）

§2.2　Sturm-Liouville理论

§2.3　非齐次方程的解法

§2.4　非齐次边界条件的处理

§2.5　高维情形的分离变量法

问题： 1）什么是分离变量法？（思想、步骤）

2）适用什么样问题？

3）理论基础是什么？

预备知识

2 阶常微

- 常系数、齐次：$y''(x)+ay'(x)+by=0$

解辅助方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 得到 λ_1, λ_2.

若 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$, 则 $y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$;

若 $\lambda_1=\lambda_2$, 则 $y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2xe^{\lambda_1 x}$;

若 $\lambda_1=\overline{\lambda_2}=\alpha+i\beta \notin \mathbb{R}$, 则

$$y(x)=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x).$$

• 变系数、非齐次：

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y=f(x), \qquad (*)$$

解法一　$y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

y_h 为对应的齐次方程解

y_p 为方程的任意特解

解法二　参数变异法

$$y(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$$

y_1, y_2 为对应的齐次方程线性无关解

•定理：设 y_1, y_2 为对应的齐次方程线性无关解

则(*)有特解：

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(s)y_2(x)-y_1(x)y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s)-y_1'(s)y_2(s)}f(s)ds,\quad \forall\ x_0.$$

特别的，此特解满足齐次边界条件：

$$y(x_0)=0, y'(x_0)=0.$$

Euler方程 $x^2y''(x)+axy'(x)+by(x)=f(x)$

令 $x=e^t$，则 $u(t):=y(e^t)=y(x)$ 满足

$$u''(t)+(a-1)u'(t)+bu=f(e^t).$$

一般情况则较为复杂，级数法求解比较有效.

§2.1 分离变量法实例（三大典型方程）

Fourier级数简单回顾

考虑定义在区间 $[-L, L]$ 上的实值函数

内积：$\langle f, g\rangle := \int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx$

范数（长度）：$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$

正交：f, g 正交 $\Leftrightarrow \langle f, g\rangle = 0$

正交（完备）函数族：

$$\left\{1, \cos\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{\pi x}{L}, \cdots, \cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}, \cdots\right\}$$

Fourier级数

$$FSf(x) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

这里

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

问题： $f(x)$ 与 $FSf(x)$ 之间的关系？

Parserval等式：若 f 平方可积 $(f \in L^2([-L, L])$,

则 $$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx.$$

Dirichlet收敛定理： 设在$[-L, L]$上，$f(x)$是以$2L$为周期的函数，

且在$[-L, L]$上满足Dirichlet条件：

(1) f, f' 连续或分段连续，且至多有有限个第一类间断点，

(2) f 至多有有限个极值点，则

$$\mathrm{FS}f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right), & -L < x < L, \\ \frac{1}{2}\left(f(-L^+) + f(L^-)\right), & x = \pm L. \end{cases}$$

故在 f 连续点x，有： $\mathrm{FS}f(x) = f(x).$

Fourier正弦级数 $FSSf(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Fourier余弦级数 $FSCf(x) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$,

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

§2.1.1 有界弦的自由振动

方程：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \ 0 \le x \le L. \end{cases}$$

注： 齐次方程 齐次（第一类）边界条件

解的想法：

1. 将初始条件奇延拓至[−L, 0]，然后再以2L为周期，周期延拓到整个实轴，便可利用d'Alembert公式求解，最后从通解求特解。

2. 利用简谐波的叠加原理，考虑方程的解是一系列驻波的叠加。因此首先考虑满足齐次方程和齐次边界条件的驻波解，即变量分离形式的特解。

驻波解 $u(x,t)=X(x)T(t)$（分离变量）

代入方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ T''+\lambda a^2T=0 \end{cases}$$

（λ 为待定常数）

边界条件 $\Rightarrow X(0)T(t)=X(L)T(t)=0,\quad t>0$

$$\Rightarrow X(0)=X(L)=0$$

先解 $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$ （特征值问题）

讨论：（1）$\lambda < 0 \Rightarrow X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$\Rightarrow A \equiv B \equiv 0 \quad \Rightarrow u \equiv 0$ 矛盾！

（2）$\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$

$\Rightarrow A \equiv B \equiv 0 \quad \Rightarrow u \equiv 0$ 矛盾！

$$(3)\ \lambda > 0 \Rightarrow X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$\boxed{X(0) = X(L) = 0} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B\sin\sqrt{\lambda}L = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}L \equiv 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 \\ X_n(x) = B_n \sin\dfrac{n\pi}{L}x \end{cases} \quad n = 1, 2, \cdots$$

特征值

特征函数

为简化表示，可取 $B_n = 1$

再解 $T'' + \lambda a^2 T = 0$

$$\Rightarrow T_n(t) = C_n \cos\frac{na\pi}{L}t + D_n \sin\frac{na\pi}{L}t \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

从而得到满足方程与边界条件的一族解

$$u_n(x,t) = \left[C_n \cos\frac{na\pi}{L}t + D_n \sin\frac{na\pi}{L}t\right]\sin\frac{n\pi}{L}x \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

故期望原定解问题有形式解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, X_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n \cos\frac{na\pi}{L}t + D_n \sin\frac{na\pi}{L}t\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

C_n, D_n 由初始条件来决定

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{L}x = \varphi(x),$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{L} \sin\frac{n\pi}{L}x = \psi(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \\ D_n = \dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^L \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \end{cases} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n \cos\frac{na\pi}{L}t + \frac{L}{na\pi}\psi_n \sin\frac{na\pi}{L}t\right]\sin\frac{n\pi}{L}x}$$

其中φ_n, ψ_n分别为$\varphi(x)$, $\psi(x)$对应的Fourier系数。

命题（特殊初值）

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\left[C_n\cos\frac{na\pi}{L}t+D_n\sin\frac{na\pi}{L}t\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

是如下定解问题的解：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<L, t>0,\\ u(0,t)=u(L,t)=0, & t>0,\\ u(x,0)=\sum_{n=1}^{N}C_n\sin\frac{n\pi}{L}x, & 0\le x\le L,\\ u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{N}\frac{na\pi}{L}D_n\sin\frac{n\pi}{L}x, & 0\le x\le L.\end{cases}$$

例：求解 $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<L, t>0, \\ u(0,t)=u(L,t)=0, & t>0, \\ u(x,0)=2\sin\dfrac{3\pi}{L}x, & 0\le x\le L, \\ u_t(x,0)=\sin\dfrac{\pi}{L}x-3\sin\dfrac{5\pi}{L}x, & 0\le x\le L. \end{cases}$

解：由上述命题及初始条件可知

$$C_3=2,\qquad \frac{a\pi}{L}D_1=1,\qquad \frac{5a\pi}{L}D_5=-3,$$

其余 C_n, D_n 都为 0.

从而得到

$$u(x,t)=\frac{L}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{L}\sin\frac{\pi x}{L}+2\cos\frac{3a\pi t}{L}\sin\frac{3\pi x}{L}$$
$$-\frac{3L}{5a\pi}\sin\frac{5a\pi t}{L}\sin\frac{5\pi x}{L}.$$

问题： 一般初始值 φ,ψ 如何处理？

想法： 将 φ,ψ 分别展成 Fourier（正弦）级数（FSS），

然后比较系数.

本质：沿特征函数展开

例：$L=10,\quad a^2=10000=100^2$

$$u(x,0)=\varphi(x)=\frac{x(10-x)}{1000},\quad u_t(x,0)=\psi(x)\equiv 0.$$

尝试：

$$\mathrm{FSS}\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{10}$$

其中

$$C_n=\frac{2}{10}\int_0^{10}\frac{x(10-x)}{1000}\sin\frac{n\pi x}{10}dx$$

$$=\frac{2}{5n^3\pi^3}\left(1-\cos n\pi\right)=\begin{cases}0, & n\text{ even}\\ \dfrac{4}{5n^3\pi^3}, & n\text{ odd}\end{cases}$$

得到 $$u(x,t)=\frac{4}{5\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos 10(2n+1)\pi t$$

$$\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi x}{10}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x,0)=\dfrac{x(10-x)}{1000} \\ u_t(x,0)\equiv 0 \end{array}}$$

然而 u在点$(0,0)$处不 C^2光滑.

$$\uparrow$$

$$u_{xx}(0,0)=-0.002,\ u_t(0,0)=0,\ u_{tt}(0,0)=0$$

注：上例中问题在 $[0,L]\times[0,\infty)$ 上没有 C^2光滑解，

原因在于：边界条件、初始条件以及偏微方程

在$(0,0)$处不相容

注：（1）严格意义上，叠加原理对无穷和不一定成立

（2）上例中所求得的解仅为形式解

（3）古典解、形式解与近似解

约定： 课程主要关注形式解的存在性！

驻波（Standing Wave）

$$u_n(x,t)=\left[C_n\cos\frac{na\pi}{L}t+D_n\sin\frac{na\pi}{L}t\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$=\sqrt{C_n^2+D_n^2}\cos\left(\omega_n t-\theta_n\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

这里

$$\omega_n=\frac{na\pi}{L}$$ —— 角频率

$$\theta_n=\arctan\frac{D_n}{C_n}$$ —— 初位相

§2.1.2 有限长杆的热传导

方程：
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(L,t) + hu(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le L. \end{cases}$$

这里 $h > 0$ 为给定常数（热交换常数）.

注：　齐次方程　　齐次(第一、三类)边界条件

考虑具有如下形式的解

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$ （分离变量）

代入方程 $\Rightarrow \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{a^2T(t)} = -\lambda$ （λ 为待定常数）

边界条件 $\Rightarrow X(0)=0,\ \ X'(L)+hX(L)=0$

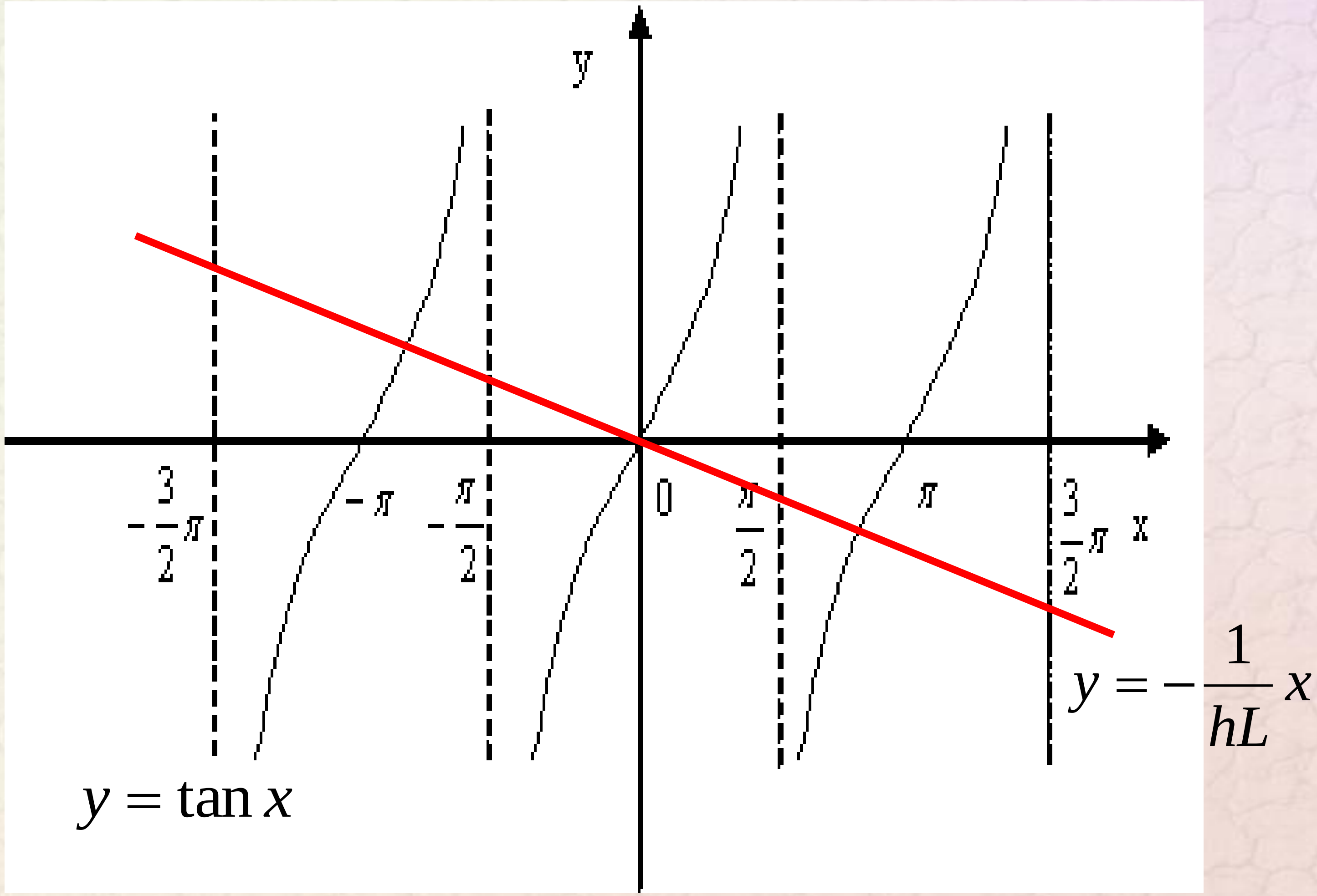
先解特征值问题 $\begin{cases} X''+\lambda X = 0 \\ X(0)=0,\ \ X'(L)+hX(L)=0 \end{cases}$

讨论可知（练习）

$$0<\lambda := \beta^2$$

$$\beta\cos\beta L + h\sin\beta L = 0$$

$$\Rightarrow \tan\beta L = -\frac{\beta}{h} = -\frac{1}{hL}\beta L$$


y
x
0
$-\frac{3}{2}\pi$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
$y = \tan x$
$y = -\frac{1}{hL}x$

$$x = \beta L$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0<\beta_1<\cdots<\beta_n<\cdots \\ X_n(x)=B_n\sin\beta_n x, \quad n=1,2,\cdots \end{cases}$$

特征函数

再解 $T'+\lambda a^2 T=0$

$$\Rightarrow T_n(t)=E_n e^{-\beta_n^2 a^2 t}$$

从而得到满足方程与边界条件的一族解

$$u_n(x,t)=C_n e^{-\beta_n^2 a^2 t}\sin\beta_n x \qquad (n=1,2,\cdots)$$

进而期望 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\beta_n^2 a^2 t}\sin\beta_n x,$$

满足初始条件 $u(x,0)=\varphi(x)$

$$\simeq\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\beta_n x.$$

沿特征函数展开 —— 广义 Fourier 级数

问题：如何确定系数 C_n？

容易验证（练习）

$$\int_0^L \sin\beta_m x \sin\beta_n x dx = 0, \quad m \neq n. \quad \text{（正交）}$$

所以

$$C_n = \frac{1}{\int_0^L \sin^2 \beta_n x dx} \int_0^L \varphi(x) \sin\beta_n x dx.$$

注：（1）可证明此特征函数族在函数空间 $L^2([0, L])$ 中完备

（2）与经典 Fourier 级数的异同 $(X'(L) + hX(L) = 0)$

（3）严格的一般理论 —— Sturm-Liouville 理论

§2. 1. 3 圆域上的 Laplace 方程

方程：$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & x^2+y^2<r_0^2 \\ u\big|_{x^2+y^2=r_0^2} = \varphi(x,\ y) & \end{cases}$

区域形状 ⟶ 使用极坐标

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 & 0<r<r_0,\ 0<\theta<2\pi \\ u(r_0,\theta)=\varphi(\theta) & 0\le\theta<2\pi \\ \overline{\lim\limits_{r\to 0^+}}|u(r,\theta)|<\infty \quad \text{——自然条件} & 0\le\theta<2\pi \\ \boxed{\begin{matrix} u(r,0)=u(r,2\pi) & 0<r<r_0 \\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,2\pi) & 0<r<r_0 \end{matrix}} \quad \text{周期条件} & \end{cases}$$

注：若取角度坐标范围 $-\infty<\theta<\infty$，则周期条件为

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi) \qquad 0<r<r_0,\ -\infty<\theta<\infty$$

令 $u(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$ （分离变量）

方程 $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$

$$\Rightarrow R''\Phi+\frac{1}{r}R'\Phi+\frac{1}{r^2}R\Phi''=0$$

$$\Rightarrow -\frac{r^2R''+rR'}{R}=\frac{\Phi''}{\Phi}=-\lambda$$ （λ 为待定常数）

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2R''+rR'-\lambda R=0 \\ \Phi''+\lambda\Phi=0 \end{cases}$$

周期条件 $\Rightarrow \begin{cases} \Phi(0)=\Phi(2\pi) \\ \Phi'(0)=\Phi'(2\pi) \end{cases}$

自然条件 $\Rightarrow |R(0)|<\infty$

先解 特征值问题 $\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ \Phi(0)=\Phi(2\pi),\ \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)\end{cases}$

特征函数

讨论可知（练习） $0\le\lambda=n^2\quad(n=0,1,2,\cdots)$

且 $\boxed{\Phi_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta}\triangleq\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}$

再解 $r^2R''+rR'-\lambda R=0$ —— Euler 方程

在自变量代换 $r=e^t$ 下，$\dfrac{d^2R}{dt^2}-n^2R=0$， $\Rightarrow$

通解为 $R_0(r)=c_0+d_0\ln r\qquad(n=0)$

$R_n(r)=c_nr^n+d_nr^{-n}\qquad(n=1,2,\cdots)$

$|R(0)|<\infty\Rightarrow\boxed{R_n(r)=c_nr^n}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$

从而得到满足方程、周期以及自然条件的一族解

$$\boxed{u_n(r,\theta)=r^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)} \qquad (n=\underline{0,}\,1,\,2,\,\cdots)$$

进而**期望**

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(r,\theta)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)$$

满足边界条件 $u(r_0,\theta)=\varphi(\theta)$

$$\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r_0^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi r_0^n}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt \\ b_n=\dfrac{1}{\pi r_0^n}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt \end{cases} \qquad (n=\underline{0,}\,1,\,2,\,\cdots)$$

$$\Rightarrow \quad u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r_0^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(\frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\cos nt\cos n\theta\,dt+\frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\sin nt\sin n\theta dt\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{r_0^n}\cos n(\theta-t)\right]dt$$

注意：利用Euler公式，当实数 k 满足 $|k|<1$ 时，成立

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n\cos n(\theta-t)+ik^n\sin n(\theta-t)=\sum_{n=0}^{\infty} k^n e^{in(\theta-t)}=\sum_{n=0}^{\infty}[ke^{i(\theta-t)}]^n$$

$$=\frac{1}{1-ke^{i(\theta-t)}}=\frac{1}{1-2k\cos(\theta-t)+k^2}[1-k\cos(\theta-t)+ik\sin(\theta-t)]$$

$$\Rightarrow \quad 1+2\sum_{n=1}^{\infty} k^n\cos n(\theta-t)=2\sum_{n=0}^{\infty} k^n\cos n(\theta-t)-1=\frac{1-k^2}{1-2k\cos(\theta-t)+k^2}$$

取$k=\dfrac{r}{r_0}$， $\Rightarrow$

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_0^2-r^2)\varphi(t)}{r_0^2-2rr_0\cos(\theta-t)+r^2}dt$$ $\longrightarrow$ 圆域内的Poisson公式

$$P=\frac{(r_0^2-r^2)\varphi(t)}{r_0^2-2rr_0\cos(\theta-t)+r^2}$$ 称作Poisson核。

当$\varphi(\theta)$是圆周上连续函数且$\varphi(0)=\varphi(2\pi)$ 时，

Poisson公式所确定的函数给出了古典解。

注:

（1）右边两个特征值问题是等价的

(证明见教材P55)

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ \Phi(0)=\Phi(2\pi),\ \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)\end{cases}$$

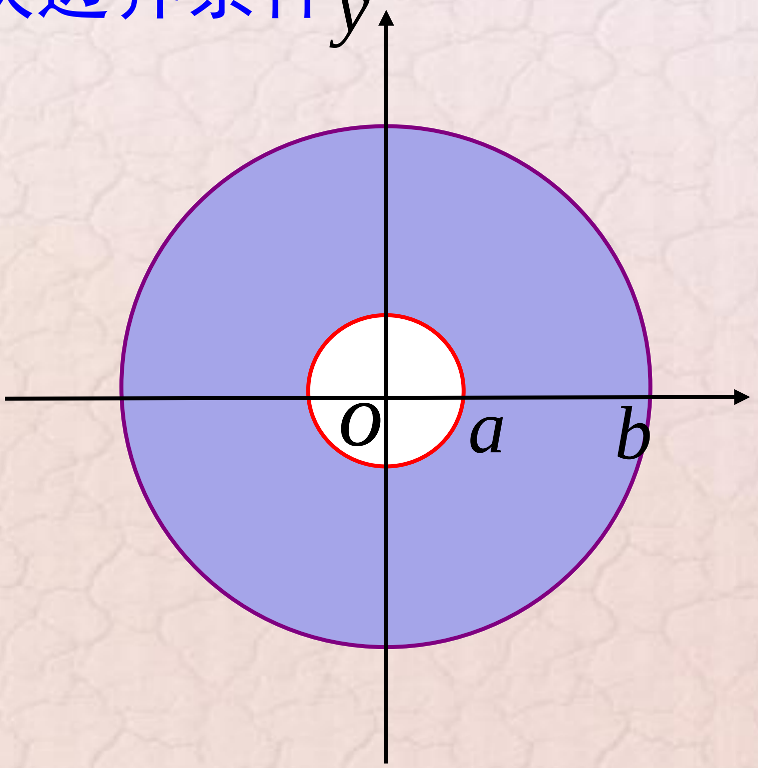
$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi).\end{cases}$$

（2）坐标改换时要注意（自然）条件的挖掘

（3）圆域上的 Laplace 方程在极坐标下的周期条件类似于直角坐标情形的齐次边界条件

（4）环域可以类似处理



$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\theta)=\frac{C_0}{2}+\frac{D_0}{2}\ln r$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n r^n+D_n r^{-n})(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta),$$

$$a<r<b$$

练习：圆域上的Neumann问题

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, & x^2 + y^2 < R^2 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R} = \varphi(\theta), & 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$$

分析： 由Green公式，

$$0 = \iint\limits_{x^2+y^2<R^2} \Delta u dxdy = \oint_{r=R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = R\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta.$$

$\Rightarrow$ Neumann问题须满足相容条件 $\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta = 0.$

答案： $u(r,\theta) = A - \dfrac{R}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(t) \ln\left[R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2\right] dt,$

A为任意常数。

提示：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n} \cos n(\theta - t) = \frac{-1}{2} \ln[1 - 2k\cos(\theta - t) + k^2],$

实数 k 满足 $|k| < 1.$

例：绝热环形金属丝内的热流

可化为定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad -L < x < L, t > 0, \\ u(-L,t) = u(L,t),\ u_x(-L,t) = u_x(L,t), \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad -L \le x \le L. \end{cases}$$

注：齐次方程　**周期**边界条件 $\longrightarrow$ **叠加原理适用**

练习求解：　其中 $\varphi(x) = \cos^3 \dfrac{\pi x}{L}$

§2.1.4 分离变量法的一般格式

应用分离变量的核心是特征值问题，前面一些实例涉及一些标准的特征值问题，下面考察分离变量法的的一般格式，以期能解决更多的定解问题。

一般格式：

$$
\begin{cases}
L_t u + L_x u = 0, \quad a < x < b, t \in I, & (1) \\
(c_1 u + c_2 u_x)|_{x=a} = 0, \ (d_1 u + d_2 u_x)|_{x=b} = 0, \quad t \geq 0, & (2) \\
\text{关于}t\text{的定解条件} & (3)
\end{cases}
$$

其中，L_t，L_x，分别是关于t, x的二阶线性偏微分算子，比如

$$L_t = a_0(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial}{\partial t} + a_2(t),$$

$$L_x = b_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x),$$

其中$a_j(t)\in C^0, b_j(x)\in C^0,$ $c_1^2+c_2^2\neq 0,$ $d_1^2+d_2^2\neq 0.$

关于t的定解条件既可以是初始条件也可以是非发展方程的边界条件

Step 1. 分离变量

设$u(x,t)=T(t)X(x)$，代入原方程（1）和齐次边界条件分离得特征值问题

$$\begin{cases} L_x X(x)+\lambda X(x)=0,\ a<x<b, \\ c_1x(a)+c_2x'(a)=0,\ d_1x(b)+d_2x'(b)=0 \end{cases}$$

和常微分方程 $L_tT(t)-\lambda T(t)=0,$

注：原方程（1）总是可以分离变量的

Step 2. 解特征值问题，得到变量分离形式特解

求出相应的特征值$\{\lambda_n\}$及特征函数系$\{X_n(x)\}$, 将λ_n代入常微分方程(4),

求出相应的通解$T_n(t)$, 得到一族分离形式的解$\{u_n(x,t)=T_n(t)X_n(x)\}$.

Step 3. 叠加起来确定系数

令 $$u(x,t)=\sum_n C_n T_n(t)X_n(x),$$

代入关于t的初始条件(3)（或为边界条件），定出系数 C_n,

从而得到原定解问题的形式解。

注：上述三个步骤中，分离变量是基础，特征值问题是核心。

更重要的是特征函数系正好构成函数Fourier展开的完备正交基。

问题：

（1）是否存在一串特征值与相应的特征函数?

（2）所得到特征函数系能否成为函数空间的完备正交基？

在下一节中，将考虑一般特征值问题，Sturm-Liouville理论保证了很多定解问题可以采用分离变量法来求解。

注：特征值，本征值，固有值是等价的称呼，相应的有称呼特征函数，本征函数，固有函数。

表 3.1　常用的本征值问题的本征值和本征函数

本征值问题	本 征 值	本征函数
$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0, X(l)=0 \end{cases}$	$\lambda_k=\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2, k=1,2,\cdots$	$X_k=\sin\dfrac{k\pi}{l}x$
$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=0, X'(l)=0 \end{cases}$	$\lambda_k=\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2,\ k=0,1,2,\cdots$	$X_k=\cos\dfrac{k\pi}{l}x$
$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=0, X(l)=0 \end{cases}$	$\lambda_k=\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}\right)^2,\ k=0,1,2,\cdots$	$X_k=\cos\dfrac{2k+1}{2l}\pi x$

本征值问题	本征值	本征函数
$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0,\ X'(l)=0 \end{cases}$	$\lambda_k=\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}\right)^2$, $k=0,1,2,\cdots$	$X_k=\sin\dfrac{2k+1}{2l}\pi x$
$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0,\ X'(l)+hX(l)=0 \end{cases}$	$\lambda_k=\left(\dfrac{\gamma_k}{l}\right)^2$，$\gamma_k$为$\tan\gamma=-\dfrac{\gamma}{hl}$之正根，$k=1,2,\cdots$	$X_k=\sin\dfrac{\gamma_k}{l}x$
$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=0,\ X'(l)+hX(l)=0 \end{cases}$	$\lambda_k=\left(\dfrac{\gamma_k}{l}\right)^2$，$\gamma_k$为 $\tan\gamma=\dfrac{hl}{\gamma}$之正根，$k=1,2,\cdots$	$X_k=\cos\dfrac{\gamma_k}{l}x$
$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)-h_1X'(0)=0 \\ X(l)+h_2X'(l)=0 \end{cases}$	λ_k 是方程 $\tan\sqrt{\lambda}l=\dfrac{(h_1+h_2)\sqrt{\lambda}}{h_1h_2\lambda-1}$ 之正根，$k=1,2,\cdots$	$X_k=\sin\sqrt{\lambda_k}x+h_1\sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_k}x$
$\begin{cases} \Phi''+\lambda\Phi(\theta)=0 \\ \Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta) \end{cases}$	$\lambda_k=k^2$，$k=0,1,2,\cdots$	$\Phi_k=A\cos k\theta+B\sin k\theta$

§2.2 Sturm-Liouville 理论

§2.2.1 Sturm-Liouville 定理

下面一般方程称为Sturm-Liouville方程，简称S-L方程：

$$\boxed{\left(k(x)f'\right)' - q(x)f + \lambda\rho(x)f = 0 \qquad (a<x<b)}$$

其中：λ 为参数，$k(x), q(x), \rho(x)$ 为实函数。

对于一般的2阶线性常微分方程

$$b_0(x)X''(x)+b_1(x)X'(x)+b_2(x)X(x)+\lambda X(x)=0,$$

当$b_0(x)\neq 0$，两边同时乘以 $\dfrac{1}{b_0(x)}\exp\left(\displaystyle\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx\right)$，

原方程可以化为S-L方程，其中

$$k(x)=\exp\left(\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx\right),\quad q(x)=-\frac{b_2(x)}{b_0(x)}k(x),\quad \rho(x)=\frac{1}{b_0(x)}k(x).$$

常见的（1维）特征值问题：　　λ（待定）

方程：（1）$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad (0<x<L)$

（2）$r^2R''+rR'+(\lambda r^2-n^2)R=0 \quad (0<r<r_0)$

$$\Rightarrow \left(rR'\right)'-\frac{n^2}{r}R+\lambda rR=0$$

（n 阶参数化Bessel 方程）

（3）$(1-x^2)f''-2xf'+\lambda f=0 \quad (-1<x<1)$

$$\Rightarrow \left((1-x^2)f'\right)'+\lambda f=0$$

（Legendre 方程）

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad (0 < x < L)$$

- $X(0) = 0,\ \ X(L) = 0$

  特征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2$ 特征函数 $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{L}$

  $n = 1, 2, \cdots$

- $X(0) = 0,\ \ X'(L) + hX(L) = 0$ （$h > 0$ 为常数）

  特征值 $\lambda_n = \beta_n^2$ 特征函数 $X_n(x) = \sin\beta_n x$

  这里 $\beta_n > 0$ 满足 $\tan(\beta_n L) = \dfrac{-\beta_n}{hL}$ $n = 1, 2, \cdots$

注：特征值与特征函数（相差常数意义下）1−1对应，

特征函数在函数空间 $L^2([0, L])$ 内（完备）正交

$$\boxed{X'' + \lambda X = 0 \qquad (0 < x < L)}$$

- $X(0) = X(L),\ \ X'(0) = X'(L)$ （周期边界条件）

特征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{2n\pi}{L}\right)^2 \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$

特征函数 $X_n(x) = \sin\dfrac{2n\pi x}{L}$ 或 $\cos\dfrac{2n\pi x}{L}$ （练习）

注：每个特征值（特征值 0 除外）对应 2 个特征函数（相差常数意义下），所有的这些特征函数在函数空间 $L^2([0, L])$ 内（完备）正交

问题：对于S-L方程

$$\left(k(x)f'\right)' - q(x)f + \lambda\rho(x)f = 0 \qquad (a<x<b)$$

有类似的结果吗？此时边界条件如何？

正交函数

考虑定义在区间$[a,b]$上的实值函数

加权内积 $\langle f, g\rangle_\rho := \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$

权函数 $\rho \geq 0$ 分段连续且零点孤立

加权正交 f, g 加权ρ正交 $\Leftrightarrow \langle f, g\rangle_\rho = 0$

加权范数 $\|f\|_\rho := \sqrt{\langle f, f\rangle_\rho}$

加权平方可积函数空间

$$L_\rho^2([a,b]) := \left\{ f \,\middle|\, \|f\|_\rho < \infty \right\}$$

注：$\rho \equiv 1$ 即为不加权（或称平权）

定理：若 $f_1, f_2, \cdots$ 在 $L^2_\rho([a,b])$ 中完备且加权 ρ 正交，

则 $\forall f \in L^2_\rho([a,b])$ 有广义 Fourier 级数展开

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)$$

其中展开系数 $a_k = \langle f, f_k \rangle_\rho / \| f_k \|^2_\rho$

且 $\| f \|^2_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \dfrac{f_k}{\| f_k \|_\rho} \rangle^2_\rho$ （Parserval 等式）

注：（1）Parserval 等式 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \| f - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \|_\rho = 0$

（2）完备性 $\Leftrightarrow$ Parserval 等式

（3）广义 Fourier 级数性质与 Fourier 级数类似

Lagrange 恒等式

记 $\mathrm{L}[f](x) := -\dfrac{\left(k(x)f'(x)\right)' - q(x)f(x)}{\rho(x)}$ 则

$$\langle \mathrm{L}f, g\rangle_\rho - \langle f, \mathrm{L}g\rangle_\rho = \int_a^b g\mathrm{L}[f]\rho(x)dx - \int_a^b f\,\mathrm{L}[g]\rho(x)dx$$

$$= \left[k\left(fg' - f'g\right)\right]\Big|_a^b$$

证明：直接分部积分（练习）

注：（1）若区间无界或函数在端点无界，则恒等式中边界项取其极限意义

（2）“好的”边界条件可使得恒等式右边为 0

$$\boxed{\mathrm{L}[f](x) := -\frac{\left(k(x)f'(x)\right)' - q(x)f(x)}{\rho(x)}}$$

定义：正则 Sturm-Liouville（简记为 S-L）问题

方程： $\mathrm{L}[f](x)=\lambda f(x)$ $\quad (a<x<b)$ $\quad$（λ 待定）

正则条件：在 $a \le x \le b$ 上 k, k', q, ρ 连续且 $k>0, \rho>0$

边界条件：

（可分）（I） $\begin{cases} c_1 f(a) + c_2 f'(a) = 0 & (c_1^2 + c_2^2 \neq 0) \\ d_1 f(b) + d_2 f'(b) = 0 & (d_1^2 + d_2^2 \neq 0) \end{cases}$

（周期）（II） $\begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b) \end{cases}$ $\quad (k(a)=k(b))$

注：这两种边界条件都是“好的”:若 f,g满足（I）

或（II），则 $\left[k\left(f g'-f'g\right)\right]\Big|_a^b=0$

$\Rightarrow \quad \langle \mathrm{L}f,g\rangle_\rho=\langle f,\mathrm{L}g\rangle_\rho$

$\Rightarrow$ L是对称算子（或称自伴算子）。

若将S-L方程改写成：

$$f''(x)+\frac{k'(x)}{k(x)}f'(x)+\frac{-q(x)f+\lambda\rho(x)}{k(x)}f(x)=0$$

上面正则条件保证了方程在$[a,b]$上包括端点a,b 没有奇性。

定义: 若a或b 是$k(x)$的一级零点，是$q(x)$的至多一级极点时，称 a 或b 是方程的正则奇点。

S-L定理1：正则 Sturm-Liouville 问题

（1） 有可数多个实特征值

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \quad \nearrow +\infty$$

（2） 不同特征值对应的特征函数加权 ρ 正交

（3） 每个特征值对应的特征子空间至多 2 维，

可分边界条件时特征子空间为 1 维

（4） 这些特征函数构成函数空间 $L_\rho^2([a,b])$

一个完备（加权）正交基底

注：根据结论（4）从而有广义 Fourier 级数展开

S-L定理提供了分离变量法的理论基础

证明：只证明（2）. 设 f_n, f_m 为特征函数，对应特征值 λ_n, λ_m

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{L}[f_n](x) - \lambda_n f_n(x) = 0 \\ \mathrm{L}[f_m](x) - \lambda_m f_m(x) = 0 \end{cases}$$

边界条件 $\Rightarrow \left[k\left(f_m f_n' - f_m' f_n\right)\right]\Big|_a^b = 0$

根据 Lagrange 恒等式可得

$$\int_a^b f_m \mathrm{L}[f_n]\rho(x)dx = \int_a^b f_n \mathrm{L}[f_m]\rho(x)dx$$

$$\Rightarrow \lambda_n \int_a^b f_m f_n \rho dx = \lambda_m \int_a^b f_n f_m \rho dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f_m f_n \rho dx = 0 \qquad (\lambda_n \neq \lambda_m)$$

注：（1）特征值为实数来源于对称（或自伴）算子具有实特征值，完备性一般不易验证

（2）前例中 $X'' + \lambda X = 0, (0 < x < L)$ 在三种边界条件下都是正则 S-L 问题

（3）前例中参数化 Bessel 方程不是正则☆S-L 问题

$$(rR')' - \frac{n^2}{r} R + \lambda r R = 0 \qquad (0 < r < r_0)$$

$k(r) = \rho(r) = r$ 在 $[0, r_0]$ 上不严格大于 0

$q(r) = \dfrac{n^2}{r}$ 在 $[0, r_0]$ 上不连续

$$\boxed{(k f')' - qf + \lambda \rho f = 0 \quad (a < x < b)}$$

$$\left(k f'\right)' - qf + \lambda \rho f = 0 \quad (a < x < b)$$

（3）前例中的 Legendre 方程不是正则 S-L 问题

$$\left((1-x^2) f'\right)' + \lambda f = 0 \qquad (-1 < x < 1)$$

$k(x) = 1 - x^2$ 在 $[-1,1]$ 上不严格大于 0

（4）正则条件不满足或区间无界的S-L问题称作奇异 S-L 问题

前例中参数化 Bessel 方程及 Legendre 方程为奇异 S-L 问题

注意到，此时区间有界且边界条件还是“好的”

（5）前述定理结论对于奇异 S-L 问题一般不全成立，但是如果 S-L方程以a或b为正则奇点，前述正则 S-L 问题的定理结论**此时**仍旧成立！

（**此时**正则奇点处一般配以一定自然边界条件）

（6）S-L 理论实际上可以给出更多结果，这里从略

（7）一般的 S-L 问题无法求出显式解，有关方程解的许多信息可由 S-L 理论得到

（8）类似地，还有高阶的 S-L 方程及其理论

$$(k f')' - qf + \lambda \rho f = 0 \quad (a<x<b)$$

S-L定理2：若正则 Sturm-Liouville 问题还满足条件：

$q(x) \ge 0, \forall x \in [a,b]$，可分情形还需满足条件

$$\operatorname{sgn}(c_1 c_2) \le 0, \operatorname{sgn}(d_1 d_2) \ge 0$$

则（1）其所有特征值非负：

$$0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \nearrow +\infty$$

特别的，存在零特征值$\lambda_0 = 0$的充要条件是：

$q(x) \equiv 0, \forall x \in [a,b]$，且两端不出现第I、III类边界条件。

此时，零特征值$\lambda_0 = 0$对应的特征函数为常数1.

（2）若正则条件为周期条件，那么其对应于每一个非最小特征值λ_0的特征值有两个相互正交的特征函数。

这里给出所有特征值非负性证明：

设 f 为对应于特征值λ的特征函数，即有

$$\mathrm{L}[f](x)=\lambda f(x)$$

$$\boxed{\mathrm{L}[f](x):=-\frac{\left(k(x)f'(x)\right)'-q(x)f(x)}{\rho(x)}}$$

可得 $\lambda\langle f,f\rangle_\rho=\langle \mathrm{L}f,f\rangle_\rho$

$$=-k(x)f'(x)f(x)\Big|_a^b+\int_a^b k(x)[f'(x)]^2dx+\int_a^b q(x)[f(x)]^2dx$$

$$\geq 0.$$

$$\Rightarrow \lambda\geq 0.$$

$$\boxed{-k(x)f'(x)f(x)\Big|_a^b\geq 0}$$

注：$\langle \mathrm{L}f,g\rangle_\rho=\int_a^b g(x)\mathrm{L}[f](x)\rho(x)dx$

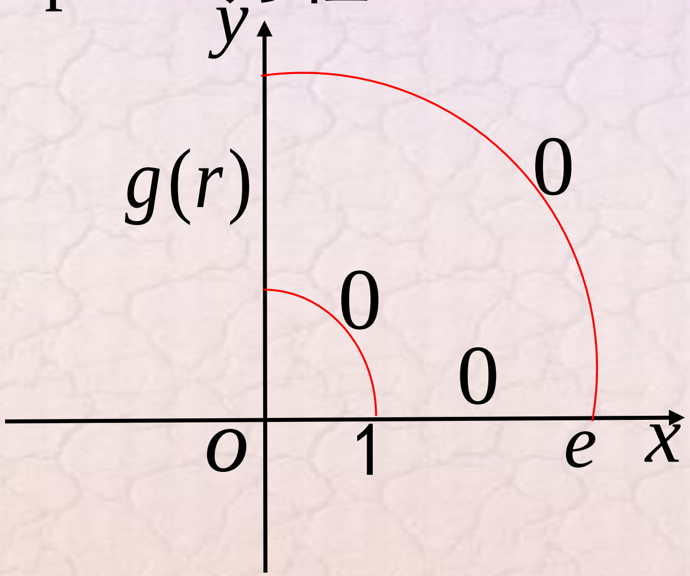
$$=\int_a^b[-(k(x)f'(x))'g(x)+q(x)f(x)g(x)]dx$$

$$=-k(x)f'(x)g(x)\Big|_a^b+\int_a^b k(x)f'(x)g'(x)dx+\int_a^b q(x)f(x)g(x)dx$$

§2.4.2 Sturm-Liouville定理应用举例

例：求解扇形区域上的Dirichlet问题 （齐次 Laplace 方程）

$$
\begin{cases}
\Delta_2 u = 0, & 1 < r < e, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\
u|_{r=1} = 0, & u|_{r=e} = 0, \\
u|_{\theta=0} = 0, & u|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = g(r).
\end{cases}
$$



解：极坐标下

$$\Delta_2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0,$$

$$\Rightarrow \qquad r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0,$$

令 $u(r,\theta) = R(r)\Phi(\theta)$ 代入方程和关于r 的齐次边界条件，

分离变量得特征值问题

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda R(r)=0 \\ R(1)=R(e)=0. \end{cases}$$

及常微分方程 $\Phi''(\theta)-\lambda\Phi(\theta)=0$

特征值问题中方程可化为S-L型

$$[rR'(r)]'+\lambda\frac{1}{r}R(r)=0,$$

这里， $k(r)=r, q(r)=0,\ \rho(r)=\dfrac{1}{r}.$

由S-L定理知道，$\lambda > 0$.

关于$R(r)$的方程是Euler方程，令 $r=e^t, y(t)=R(e^t)$,

则特征值问题可化为最简S-L型 $\begin{cases} y''(t)+\lambda y(t)=0, 0<t<1, \\ y(0)=y(1)=0. \end{cases}$

即得特征值 $\lambda_n=(n\pi)^2, n=1,2,\cdots.$

及特征函数 $y_n(t)=\sin n\pi t,$

$\Rightarrow \quad R_n(r)=\sin(n\pi\ln r),$

相应地 $\Phi_n(\theta)=A_n\cosh n\pi\theta+B_n\sinh n\pi\theta.$

设 $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh n\pi\theta+B_n\sinh n\pi\theta)\sin(n\pi\ln r),$

代入关于θ 边界条件，得

$$u\big|_{\theta=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\pi\ln r),\qquad u\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi^2}{2}\sin(n\pi\ln r),$$

$\{\sin(n\pi\ln r)\}_{n=1}^{\infty}$ 是关于权函数 $\rho(r)=\dfrac{1}{r}$ 的完备正交系

可得

$$A_n = 0,$$

$$B_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi^2}{2}} \frac{\int_1^e g(r)\sin(n\pi \ln r)\frac{1}{r}\,dr}{\int_1^e \sin^2(n\pi \ln r)\frac{1}{r}\,dr} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$= \frac{2}{\sinh \frac{n\pi^2}{2}} \int_0^1 g(e^t)\sin(n\pi t)\,dt.$$

§2.3 非齐次方程的解法

例：非齐次热传导方程

求解 $$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le L. \end{cases}$$

1. 特解法

Step 1. 分解：$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ 使得

$$v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t)$$

$$v(0,t) = v(L,t) = 0$$

Step 2. 求解 w 满足

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0, \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ w(x,0) = \varphi(x) - v(x,0), \quad 0 \le x \le L. \end{cases}$$

从而得到

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t).$$

注：（1）v 的取法可能不唯一.

（2）Step 1 如何实现？

例：（1） $f(x,t) = f(x)$

$$\Rightarrow v(x,t) = v(x) \text{ 满足 } \begin{cases} a^2 v''(x) + f(x) = 0, \\ v(0) = v(L) = 0. \end{cases}$$

（2） $f(x,t) = \cos 2t \sin 3x$

（练习）

Step 1 求解

问题：一般自由项呢？

$$\begin{cases} \boxed{v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t),} \\ v(0,t) = v(L,t) = 0. \end{cases}$$

2. Duhamel 方法（齐次化原理）

求解 $$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le L. \end{cases}$$

先考虑简单情形

$\varphi \equiv 0$ （仅由热源引起的温度分布）

物理背景：

由热传导方程的推导可知 $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{c\rho}$

ρ ——长杆的（线）密度

$F(x,t)$ ——热源强度

（单位时间单位体积产生的热量）

c——比热

（单位质量升高单位温度所需热量）

(1). 瞬时热源产生的效应

固定时刻 $s \geq 0$, 考虑短时段 $[s-\Delta s,\ s]$,

在 $s-\Delta s$ 时刻打开热源, 在 s 时刻关闭热源.

在 x 点附近, 仅由此次开关热源引起的热效应

所产生的热量 $\approx F(x,s)\Delta s\Delta x$

所产生的温度分布 $\approx \dfrac{F(x,s)\Delta s\Delta x}{c\rho\Delta x} = f(x,s)\Delta s$

$t \geq s$ 时的温度分布（记为）$v(x,t;s)\Delta s$

满足 $\begin{cases} (v\Delta s)_t = a^2 (v\Delta s)_{xx}, & 0 < x < L, t > s, \\ v(0,t;s)\Delta s = v(L,t;s)\Delta s = 0, & t > s, \\ v(x,t;s)\Delta s\big|_{t=s} = f(x,s)\Delta s, & 0 \le x \le L. \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & 0 < x < L, t > s, \\ v(0,t;s) = v(L,t;s) = 0, & t > s, \\ v(x,t;s)\big|_{t=s} = f(x,s), & 0 \le x \le L. \end{cases}$$

注： $v(x,t;s)$ 中的 s 不是变量，而是固定的参数.

(2). 热源产生的总效应

将瞬时热源效应引起的温度分布 $v(x,t;s)\Delta s$

$(0\le s\le t)$ 进行“累加”，得到总效应

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;s)ds \;=\int_0^t \bar{v}(x,t-s;s)ds$$

其中 $\bar{v}(x,t;s)=v(x,t+s;s)$ 满足

$$\begin{cases}\bar{v}_t=a^2\bar{v}_{xx}, & 0<x<L, t>0,\\ \bar{v}(0,t;s)=\bar{v}(L,t;s)=0, & t>0,\\ \bar{v}(x,t;s)\big|_{t=0}=f(x,s), & 0\le x\le L.\end{cases}$$

命题（Duhamel Principle for Heat Equation）

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L. \end{cases}$$

的形式解为 $u(x,t) = \int_0^t \bar{v}(x,t-s;s)ds.$ 其中$\bar{v}(x,t;s)$

满足

$$\begin{cases} \bar{v}_t = a^2 \bar{v}_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0, \\ \bar{v}(0,t;s) = \bar{v}(L,t;s) = 0, \quad t > 0, \\ \bar{v}(x,t;s)\big|_{t=0} = f(x,s), \quad 0 \le x \le L. \end{cases}$$

例：上例中假设 $f(x,t)=t^2\sin\frac{3\pi x}{L}$.

略解：
$$\begin{cases}\bar{v}_t=a^2\bar{v}_{xx}, & 0<x<L, t>0,\\ \bar{v}(0,t;s)=\bar{v}(L,t;s)=0, & t>0,\\ \bar{v}(x,t;s)\big|_{t=0}=s^2\sin\frac{3\pi x}{L}, & 0\le x\le L.\end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{v}(x,t;s)=s^2e^{-\frac{9a^2\pi^2t}{L^2}}\sin\frac{3\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\int_0^t s^2e^{-\frac{9a^2\pi^2(t-s)}{L^2}}\sin\frac{3\pi x}{L}ds$$

$=\ldots$ （练习）

注：（1）棘手的自由项 $\xrightarrow{\text{DP}}$ “无害”的初始条件

（2）若 f 性质足够好，则 DP 给出的是古典解，

例如 $f(x,t)=\sum_{n=1}^{N} b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$

（3）可应用于其它形式的齐次边界条件，

$\bar{v}$（或 v）需满足相应的边界条件

问题：Poisson 方程有相应的齐次化原理（ DP ）吗？

一般情形

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L. \end{cases}$$

分解：$u = w + v$

w ——仅由初始温度分布引起的温度分布

v ——仅由热源引起的温度分布

即分别满足

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0, \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ w(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L. \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0, \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ v(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L. \end{cases}$$

对于一般的非齐次发展方程的混合问题，例如

$$\begin{cases} L_t u + L_x u = f(x,t), \quad a < x < b, t > 0, & (1) \\ (c_1 u + c_2 u_x)|_{x=a} = 0, \ (d_1 u + d_2 u_x)|_{x=b} = 0, \quad t \geq 0, & (2) \\ u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = 0, \quad a < x < b. & (3) \end{cases}$$

其中，L_t，L_x，分别是关于t, x的二阶线性常微分算子。

设L_t中关于2阶导数的系数为1，先用分离变量法求出齐次方程的混合问题

$$\begin{cases} L_t v + L_x v = 0, \quad a < x < b, t > 0, \\ (c_1 v + c_2 v_x)|_{x=a} = 0, \ (d_1 v + d_2 v_x)|_{x=b} = 0, \quad t > 0, \\ v|_{t=s} = 0, \ v_t|_{t=s} = f(x,s), \quad a < x < b. \end{cases}$$

的解$v(x,t,s)$，则 $u(x,t) = \int_0^t v(x,t,s)ds$ 是原混合问题的解。

例：非齐次波动方程的齐次化原理

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \; u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L. \end{cases}$$

的形式解为 $u(x,t) = \int_0^t \overline{v}(x, t-s; s) ds.$ 其中

$\overline{v}(x,t;s)$ 满足

$$\begin{cases} \overline{v}_{tt} = a^2 \overline{v}_{xx}, \quad 0 < x < L, \; t > 0, \\ \overline{v}(0,t;s) = \overline{v}(L,t;s) = 0, \quad t > 0, \\ \overline{v}(x,0;s) = 0, \; \overline{v}_t(x,0;s) = f(x,s), \quad 0 \le x \le L. \end{cases}$$

答案：

$$\bar{v}(x,t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{na\pi}f_n(s)\sin\frac{na\pi}{L}t\sin\frac{n\pi}{L}x$$

其中 $$f_n(s)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x,s)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{L}{na\pi}\int_0^t f_n(s)\sin\frac{na\pi}{L}(t-s)ds\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

回顾对应齐次方程的形式解：

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n\cos\frac{na\pi}{L}t+\frac{L}{na\pi}\psi_n\sin\frac{na\pi}{L}t\right]\sin\frac{n\pi}{L}x}$$

3. 特征函数法（Fourier展开法）

求解
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le L. \end{cases}$$

Step 1.　找出相应齐次方程的特征函数族

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Step 2. 沿特征函数展开

待定系数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

这里

$$f_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$\varphi_n=\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

代入方程 $\Rightarrow \begin{cases} T_n' + \dfrac{n^2a^2\pi^2}{L^2}T_n = f_n \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases}$

Step 3. 求解

$$T_n(t) = e^{-\frac{n^2a^2\pi^2 t}{L^2}} \left(\int_0^t f_n(s) e^{\frac{n^2a^2\pi^2 s}{L^2}} ds + \varphi_n \right).$$

所以

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L}$$

特征函数法一般步骤

根据Sturm-Liouville 定理,我们可以采用广义 Fourier 级数展开法来解一般的非齐次方程。

例：
$$\begin{cases} L_t u + L_x u = f(x,t), \quad a<x<b, t>0, & (1) \\ (c_1 u + c_2 u_x)|_{x=a} = 0, \ (d_1 u + d_2 u_x)|_{x=b} = 0, \quad t \geq 0, & (2) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \ a<x<b. & (3) \end{cases}$$

其中，L_t，L_x，分别是关于t,x的二阶线性常微分算子。

Step 1. 分离变量法，求出上述方程对应齐次问题$(f(x,t)=0)$，的特征值问题，得到相应的特征值$\{\lambda_n\}$及特征函数系$\{X_n(x)\}$；

Step 2. 根据S-L定理判断的特征函数系的完备性，并将未知函数

$u(x,t)$ 及已知函数 $f(x,t)$, $\varphi(x),\psi(x)$ 按特征函数系 $\{X_n(x)\}$

做广义Fourier展开

$$u(x,t)=\sum_n T_n(t)X_n(x), \qquad f(x,t)=\sum_n f_n(t)X_n(x),$$

$$\varphi(x)=\sum_n \varphi_n X_n(x), \qquad \psi(x)=\sum_n \psi_n X_n(x),$$

代入方程（1）及初始条件（3）式，利用 $L_x X_n(x)=-\lambda X_n(x)$,

得到未知函数$u(x,t)$的广义 Fourier系数$T_n(t)$的初值问题

$$\begin{cases} L_t T_n(t)-\lambda_n T_n(t)=f_n(t), \\ T_n(0)=\varphi_n, T_n'(0)=\psi_n. \end{cases}$$

Step 3. 解出$T_n(t)$, 给出$u(x,t)$的级数表达式。

注　若L_t 是关于t的1阶线性常微分算子，处理方法类似，此时初始条件（3）只有一项　$u|_{t=0}=\varphi(x)$.

练习：
$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<L,t>0, \\ u(0,t)=u(L,t)=0, & t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le L. \end{cases}$$

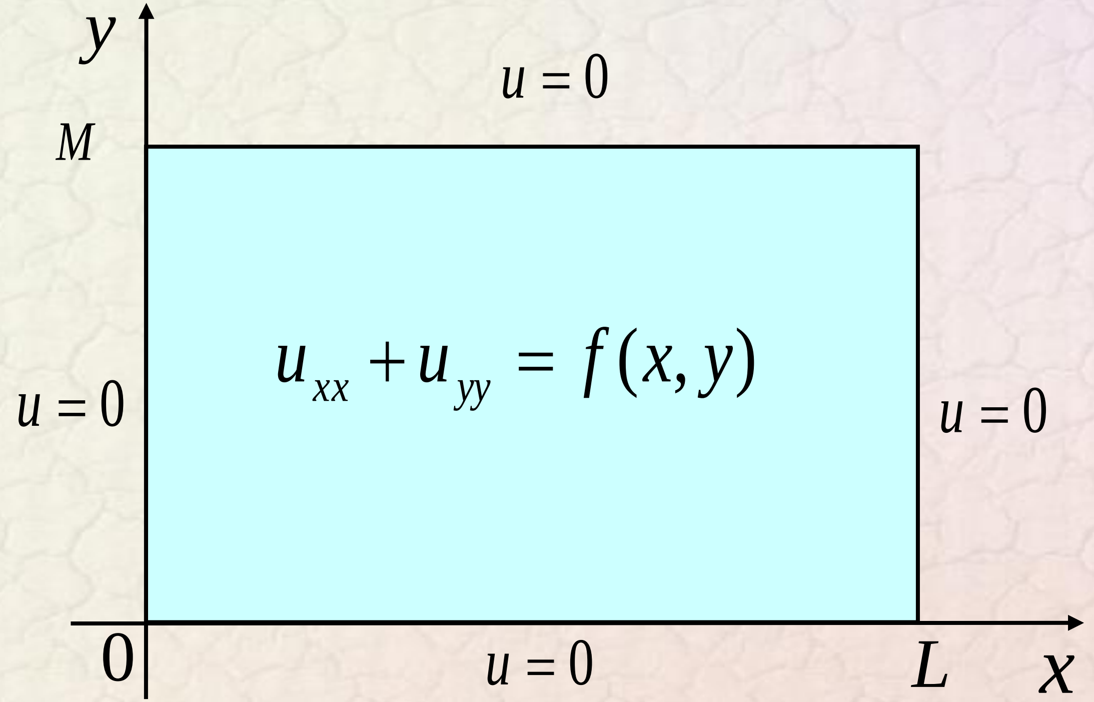
非齐次波动方程

用特征函数法求解，与前面使用的冲量原理法比较一下

回顾对应齐次方程的形式解：

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n\cos\frac{na\pi}{L}t+\frac{L}{na\pi}\psi_n\sin\frac{na\pi}{L}t\right]\sin\frac{n\pi}{L}x}$$

例：求解 Poisson 方程（非齐次方程）



注：　矩形域　齐次（第一类）边界条件

想法：视 y 为“时间变量”t，类似波动方程求解

采用特征函数法

求得特征函数族 $\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{L}\right\}_{n=1}^{\infty}$

注：$\boxed{\text{齐次边界条件不同}\rightarrow\text{特征函数可能不同！}}$

沿特征函数展开

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(y)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

代入方程 $\Rightarrow\begin{cases}u_n''-\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}u_n=f_n\\ u_n(0)=u_n(M)=0\end{cases}$

（参数变异法）求得

$$\boxed{u_n(y)=\frac{-1}{\frac{n\pi}{L}\sinh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)}\left[h_1(y)\int_0^y h_2(s)f_n(s)ds + h_2(y)\int_y^M h_1(s)f_n(s)ds\right]}$$

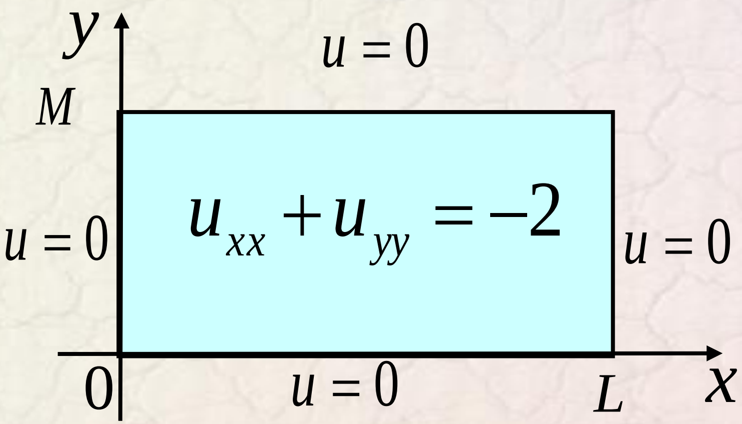
其中

$$h_1(y)=\sinh\left(\frac{n\pi(M-y)}{L}\right),\quad h_2(y)=\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

满足 $h''-\frac{n^2\pi^2}{L^2}h=0$ （练习）

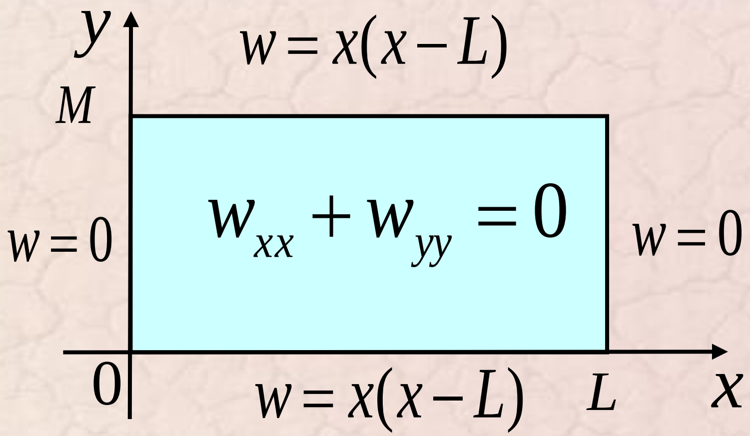
注：（1）对于较特殊的自由项，可采用特解法

例：



选取 $v(x)=-x(x-L)$ 则 $u=v+w$

这里 w 满足



注：（2）齐次化原理此时不适用！（为什么？）

（3）所得为单重级数形式解

（4）也可视 x 为 “时间变量” t ，类似求解，

此时求得的特征函数族为 $\left\{\sin\dfrac{n\pi y}{M}\right\}_{n=1}^{\infty}$

问题：这两个单重级数解是否相同？

注意到

$$\phi_{mn}(x,y) := \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{M} \quad (m,n=1,2,\cdots)$$

满足给定的齐次边界条件，且

$$\Delta_2\phi_{mn} + \underbrace{\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{M}\right)^2\right]}_{\lambda_{mn}}\phi_{mn} = 0$$

Laplace 算子的特征函数

特征值

尝试 $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{mn}\phi_{mn}(x,y)$

$$=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{M}}_{\boxed{\text{二重(Fourier)级数}}}$$

代入方程 $\Rightarrow \Delta_2 u = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{mn}\lambda_{mn}\varphi_{mn}(x,y) = f(x,y)$

$$\Rightarrow C_{mn}=\frac{-4}{LM\lambda_{mn}}\int_0^M\int_0^L f(x,y)\phi_{mn}(x,y)dxdy$$

这里用到$\{\phi_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$的（完备）正交性

问题： 此二重级数解是否同所求单重级数解？

注： （1）此法称为特征函数法（或Fourier展开法）

（2）Laplace 算子特征值问题

Helmholtz方程

$$\Delta_2\phi + \lambda\phi = 0$$ + 齐次边界条件

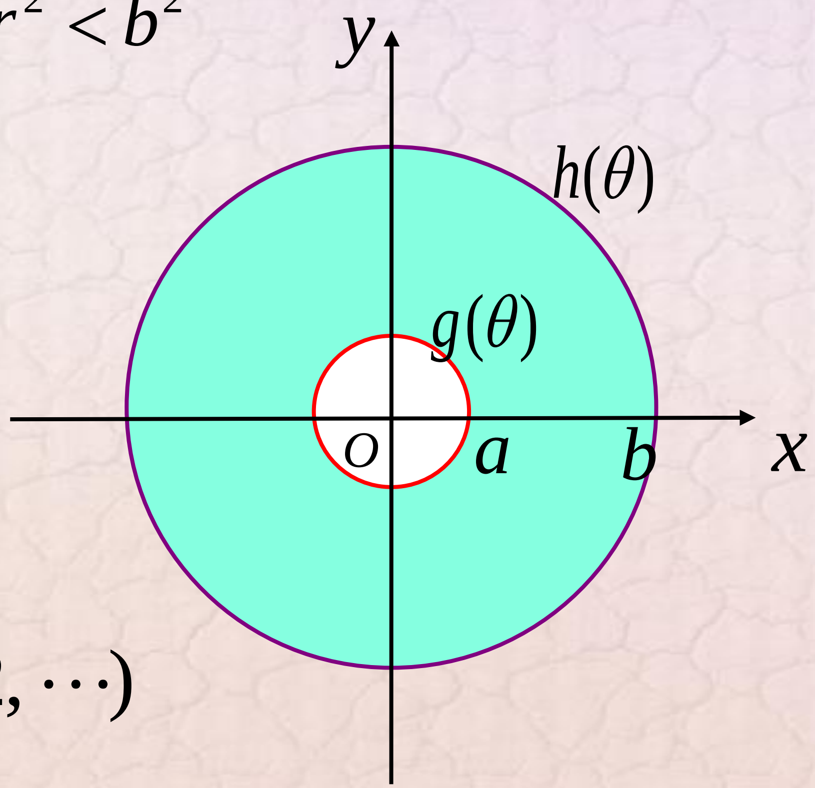
特征函数族

多重级数解

高维情形
基本思想

例： 求解 Poisson 方程

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy} = f(x,y)=F(r,\theta), & a^2 < x^2+y^2 = r^2 < b^2 \\ u\big|_{r=a} = g(\theta), \quad u\big|_{r=b} = h(\theta). \end{cases}$$



注： 环域　　非齐次（第一类）边界条件

采用特征函数法

求得特征函数族 $\begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix}$ $(n=0,1,2,\cdots)$

沿特征函数展开 $u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(r)\cos n\theta + B_n(r)\sin n\theta$

$$F(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^1(r)\cos n\theta+F_n^2(r)\sin n\theta$$

满足边界条件 $u(a,\theta)=g(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^1\cos n\theta+g_n^2\sin n\theta$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(a)\cos n\theta+B_n(a)\sin n\theta$$

$$u(b,\theta)=h(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n^1\cos n\theta+h_n^2\sin n\theta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(b)\cos n\theta+B_n(b)\sin n\theta$$

其中 $F_n^1(r), F_n^2(r), g_n^1, g_n^2, h_n^1, h_n^2$ 是对应的Fourier展开系数

代入方程

$$\boxed{u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=F(r,\theta)}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left[A''_n(r)+\frac{1}{r}A'_n(r)-\frac{n^2}{r^2}A_n(r)\right]\cos n\theta$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[B''_n(r)+\frac{1}{r}B'_n(r)-\frac{n^2}{r^2}B_n(r)\right]\sin n\theta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^1(r)\cos n\theta+F_n^2(r)\sin n\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A''_n(r)+\frac{1}{r}A'_n(r)-\frac{n^2}{r^2}A_n(r)=F_n^1(r) \\ A_n(a)=g_n^1, A_n(b)=h_n^1 \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

$$\begin{cases} B''_n(r)+\frac{1}{r}B'_n(r)-\frac{n^2}{r^2}B_n(r)=F_n^2(r) \\ B_n(a)=g_n^2, B_n(b)=h_n^2 \end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

$$\Rightarrow \quad A_n(r)=\cdots, B_n(r)=\cdots$$

若边界条件改变，则（i）（ii）也相应改变

例如： $u\big|_{r=a}=g(\theta),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=b}=h(\theta).$ **（练习写出系数定解方程组）**

思考：若方程是齐次的但边界条件非齐次，**即：** $F(r,\theta)\equiv 0,$

$u(r,\theta)$ 应该如何沿着特征函数系展开更便捷？

例： 求解 Poisson 方程（非齐次 Laplace 方程）P77例2.3.3

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=12(x^2-y^2), \\ u\big|_{r=a}=1,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=b}=0. \end{cases} \qquad a^2<x^2+y^2=r^2<b^2$$

方法1： 发现特解 $v = x^4 - y^4$ 满足原始方程。

设 $u = v + w,$ 则 w **满足**Laplace方程的定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 w = 0, \\ w\big|_{r=a} = 1 - a^4 \cos 2\theta, \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=b} = -4b^3 \cos 2\theta. \end{cases}$$

环内Laplace方程的一般解为

$$u(r,\theta) = \frac{C_0}{2} + \frac{D_0}{2}\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),$$

$$a < r < b$$

代入边界条件，可求得相应解。

方法2： 沿特征函数直接展开

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(r)\cos n\theta+B_n(r)\sin n\theta$$

此时 $F(r,\theta)=12r^2\cos 2\theta, g(\theta)=1, h(\theta)=0,$

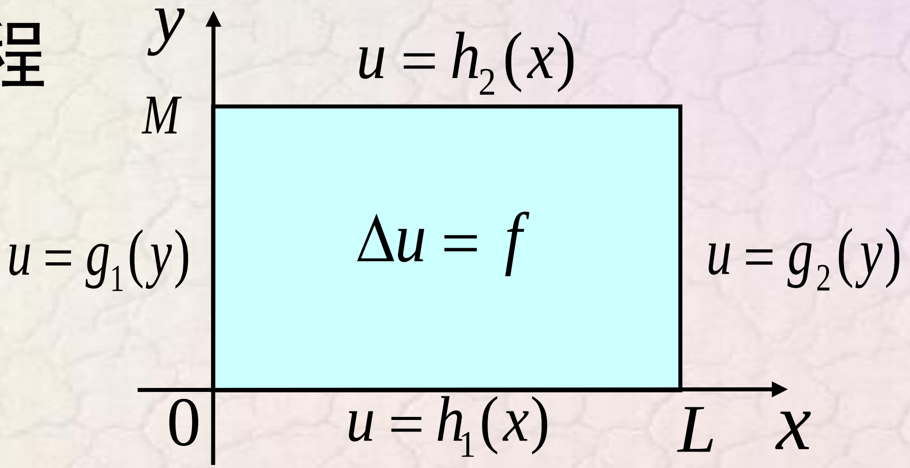
按照前述方法可定出 $A_n(r)$，$B_n(r)$.

答案： $$u(r,\theta)=1-\left[\frac{a^6+2b^6}{a^4+b^4}r^2+\frac{a^4b^4(a^2-2b^2)}{a^4+b^4}r^{-2}-r^4\right]\cos 2\theta.$$

问题：　几种方法的异同？

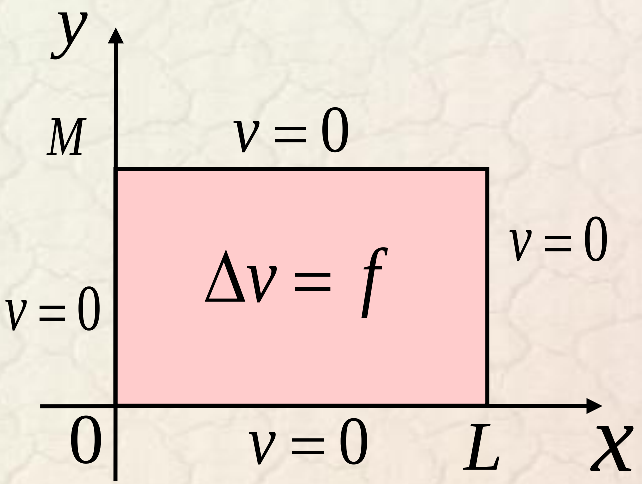
§2.4 非齐次边界条件的处理

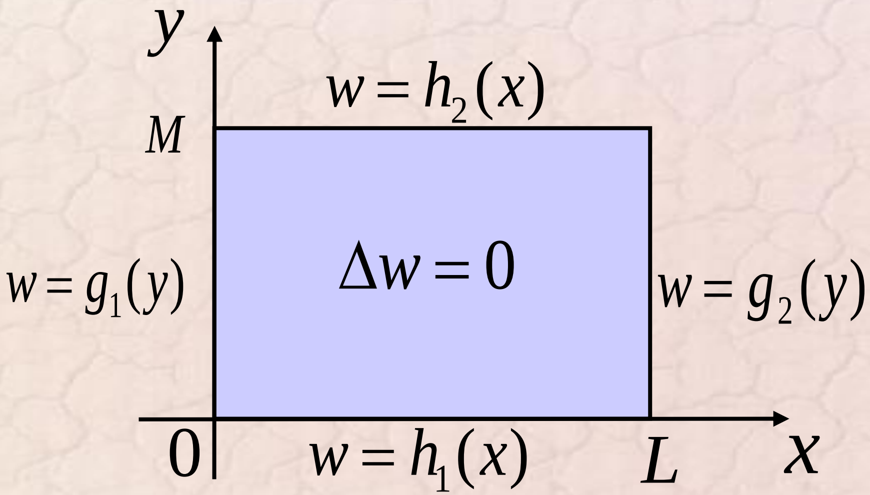
例：求解 Poisson 方程



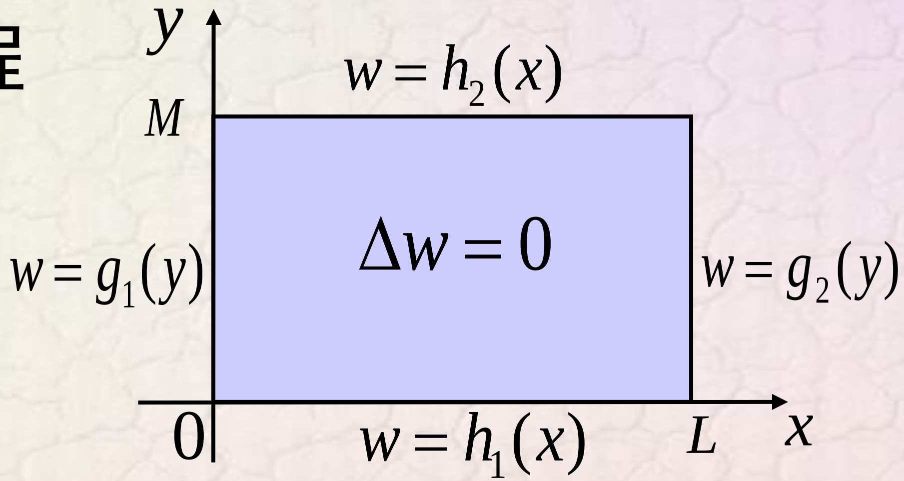
分解：

$u=v+w$ 使得



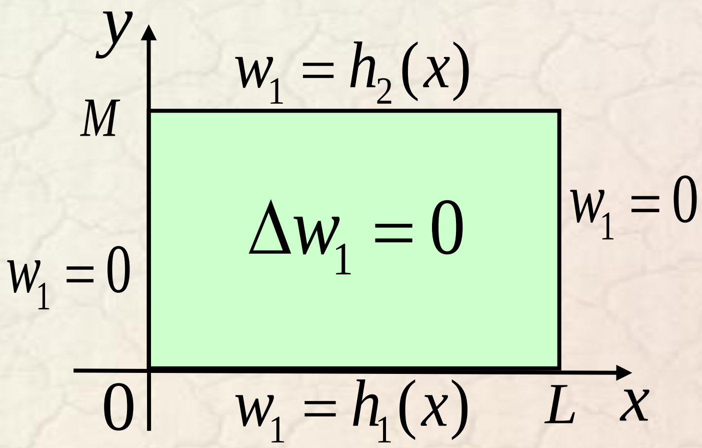


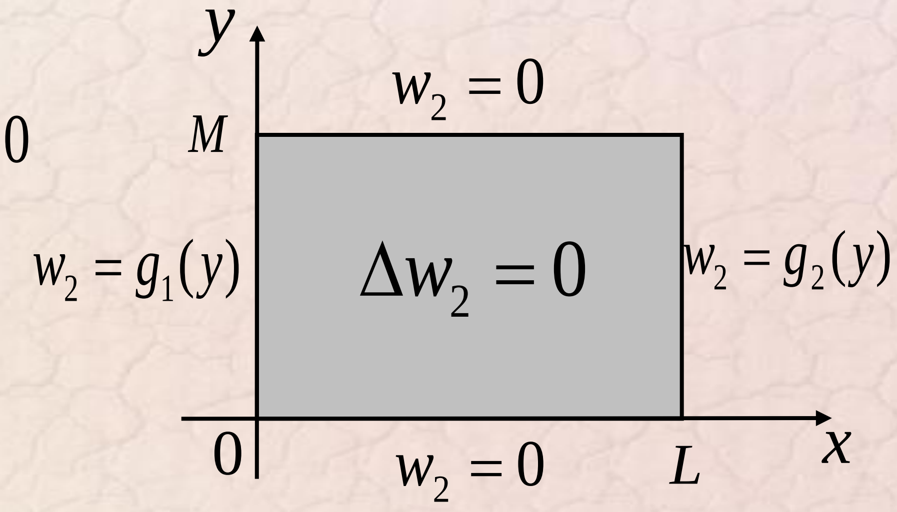
例：求解 Laplace 方程



分解：

$w=w_1+w_2$ 使得





例：求解非齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u_1(t), \ u(L,t) = u_2(t), \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le L. \end{cases}$$

注： 非齐次（第一类）边界条件

分解： $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$

非齐次边值

齐次边值

即 $w(0,t)=u_1(t),\ \ w(L,t)=u_2(t)\quad \forall t>0$

进而

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx}+f_1(x,t), & 0<x<L,t>0, \\ v(0,t)=0,\ \ v(L,t)=0, & t>0, \\ v(x,0)=\varphi_1(x),\ \ v_t(x,0)=\psi_1(x), & 0\le x\le L. \end{cases}$$

这里

$$f_1(x,t)=f(x,t)-\left(w_{tt}-a^2w_{xx}\right)$$

$$\varphi_1(x)=\varphi(x)-w(x,0)$$

$$\psi_1(x)=\psi(x)-w_t(x,0)$$

问题：如何选取 w ?

选取连接 u_1, u_2 的直线： $w(x,t)=B(t)x+A(t)$

其中

$$A(t)=u_1(t) \qquad B(t)=\frac{1}{L}(u_2(t)-u_1(t))$$

注： （1） w的取法不唯一

（2）较为理想的取法可以同时使得

$$f_1(x,t)=f(x,t)-(w_{tt}-a^2w_{xx})\equiv 0$$

例：若 f, u_1, u_2 都与 t 无关，则可取 w

满足

$$\begin{cases} a^2w''(x)+f(x)=0, \\ w(0)=u_1,\ \ w(L)=u_2. \end{cases}$$

一般边界条件

$$\begin{cases} \alpha_1 u(0,t)+\beta_1 u_x(0,t)=u_1(t) \\ \alpha_2 u(L,t)+\beta_2 u_x(L,t)=u_2(t) \end{cases}$$

可做类似处理

一般地，可以寻求多项式形式的 w

例如：$w(x,t)=C(t)x^2+B(t)x+A(t)$

其中 $A(t),B(t),C(t)$ 之一视情形选为常数

（如 0）

例：边界条件 $\begin{cases} u(0,t)+2u_x(0,t)=u_1(t) \\ u(L,t)-u_x(L,t)=u_2(t) \end{cases}$

令 $w(x,t)=C(t)x^2+B(t)x+A(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(t)+2B(t)=u_1(t) \\ C(t)L^2+B(t)L+A(t)-2LC(t)-B(t)=u_2(t) \end{cases}$$

可取 $\begin{cases} B(t)=0 & (L=3) \\ C(t)=0 & (L\neq 3) \end{cases}$

注： 系数取法一般不唯一

基本策略：　对于一般非齐次方程非齐次边界条件问题

（1）通过叠加原理分解成多个具有一定齐次边界条件的定解问题

↓

分别进行分离变量处理 +非齐次项处理

↓

形式解叠加

（2）处理非齐次边界条件

↓

处理非齐次项

↓

分离变量

§2.5 高维情形的分离变量法

例：3 维热传导方程

$$\boxed{u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})}$$

令 $u(x,y,z,t) = U(x,y,z)T(t)$

$$\Rightarrow \frac{T'}{a^2T} = \frac{\Delta U}{U} = -\lambda$$ （λ 为待定常数）

$$\Rightarrow \begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0 \\ \Delta U + \lambda U = 0 \end{cases}$$

Helmholtz 方程

注：第一、二类齐次边界条件下可以证明 $\lambda \geq 0$

求解 Helmholtz 方程

假设 $(x, y, z) \in [0, L] \times [0, M] \times [0, N]$

长方体区域

齐次边界条件 $\forall t > 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &u(0, y, z, t) = u(L, y, z, t) = 0 \\ &u(x, 0, z, t) = u(x, M, z, t) = 0 \\ &u(x, y, 0, t) = u(x, y, N, t) = 0 \end{aligned}}$$

进一步对 U 进行分离变量

令 $U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + \alpha X = 0 \\ Y'' + \beta Y = 0 \\ Z'' + \gamma Z = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = \lambda \end{cases} \quad 且 \quad \begin{cases} X(0) = X(L) = 0 \\ Y(0) = Y(M) = 0 \\ Z(0) = Z(N) = 0 \end{cases}$$

（α,β,γ 为待定常数）

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_l = \left(\dfrac{l\pi}{L}\right)^2 \qquad \beta_m = \left(\dfrac{m\pi}{M}\right)^2 \qquad \gamma_n = \left(\dfrac{n\pi}{N}\right)^2 \\ \sin\dfrac{l\pi x}{L} \qquad \sin\dfrac{m\pi y}{M} \qquad \sin\dfrac{n\pi z}{N} \\ \lambda_{lmn} = \alpha_l + \beta_m + \gamma_n \end{cases}$$

（特征值）

得到特征函数族：

$$U_{lmn}(x,y,z) := \sin\frac{l\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}\sin\frac{n\pi z}{N} \qquad (l,m,n = 1,2,\cdots)$$

再解 $T' + \lambda a^2 T = 0 \quad \Rightarrow T_{lmn}(t) = E_{lmn} e^{-\lambda_{lmn} a^2 t}$

从而得到满足方程与边界条件的一族解

$$u_{lmn}(x,y,z,t) = C_{lmn} e^{-\lambda_{lmn} a^2 t} U_{lmn}(x,y,z)$$

$$(l,m,n = 1,2,\cdots)$$

$$\Rightarrow u(x,y,z,t) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{lmn}(x,y,z,t)$$

$$= \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{lmn} e^{-\lambda_{lmn} a^2 t} U_{lmn}(x,y,z)}_{\boxed{\text{三重(Fourier)级数}}}$$

…… ……

练习： $(x,y,z)\in[0,L]\times[0,M]\times[0,N]$， 求解

$$\begin{cases} \boxed{u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f(x,y,z)} \\ u_x(0,y,z)=u_x(L,y,z)=0 \\ u(x,0,z)=u(x,M,z)=0 \\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), u(x,y,N)=\psi(x,y) \end{cases}$$

注：（1）直角区域上的高维齐次波动方程与高维
Laplace 方程可类似求解

（2）关键是特征函数族的正确求解

（3）非齐次方程以及非齐次边界条件的处理
与低维情形类似

问题： 无界区域是否有相应的分离变量法？

如无界弦的振动

（特征值是什么，特征函数又该是什么）