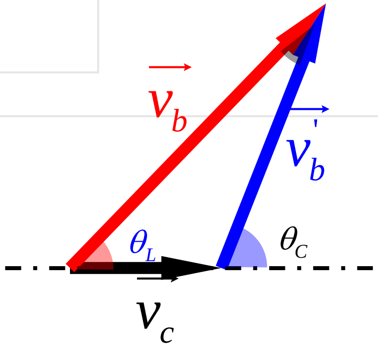
➢上节回顾：

$$Q=\left(1+\frac{A_b}{A_B}\right)T_b-\left(1-\frac{A_a}{A_B}\right)T_a-\frac{2\sqrt{A_aA_bT_aT_b}}{A_B}\cos\theta$$

$$T_b=\left\{\frac{\sqrt{A_aA_bT_a}}{A_B+A_b}\cos\theta\pm\left[\left(\frac{A_B-A_a}{A_B+A_b}+\frac{A_aA_b}{(A_B+A_b)^2}\cos^2\theta\right)T_a+\frac{A_B}{A_B+A_b}Q\right]^{1/2}\right\}^2$$

- 核反应概述与分类
- Q方程与核能级
- 相对运动动能与阈能

$$\gamma=\frac{v_c}{v_b'}=\left(\frac{A_aA_b}{A_AA_B}\frac{T'}{T'+Q}\right)^{1/2}$$



➢本节提要：

- 截面（测量）与产额
- 分波分析与截面（计算）
- “打哪儿来，回哪儿去”——（a，a）反应总是存在的
- 核反应的三个阶段

3.单选题 (1分)

下面哪个反应的γ值最大?

A 中子与U235的弹性碰撞

B 中子与质子的弹性碰撞

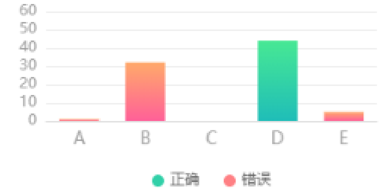
C 中子与C12的弹性碰撞

D 4.82MeV的中子与C12的非弹性碰撞（已知C12的第一激发能级高度为4.44MeV）

E 14MeV的中子与C12的非弹性碰撞（已知C12的第一激发能级高度为4.44MeV）

正确答案：D

82/84 完成人数 | 97.62% 完成率 | 53.66% 正确率



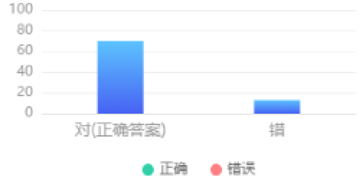
答题分布

4.判断题 (1分)

截面的量纲是面积，其单位barn与一个球形原子核的几何面积相仿?

正确答案：正确

83/84 完成人数 | 98.81% 完成率 | 84.34% 正确率



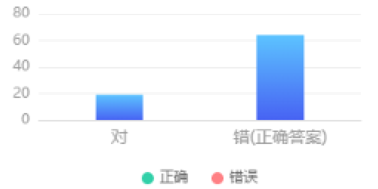
答题统计 (统计数据中的人数，为已交卷人数)

5.判断题 (1分)

如果两个原子核的核子数A相差不大，则它们与射线（例如中子）发生相互作用的截面也是相近的。

正确答案：错误

83/84 完成人数 | 98.81% 完成率 | 77.11% 正确率



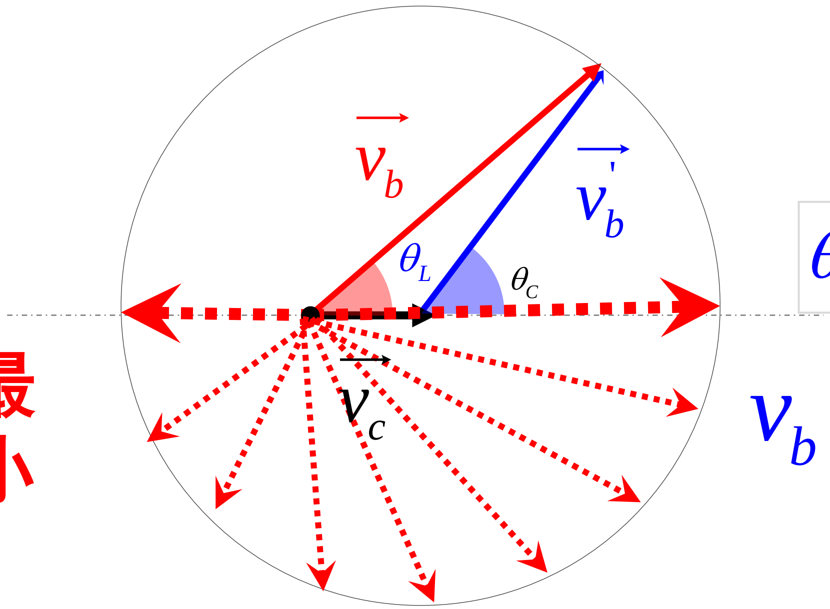
对于**一般情况**：

(1)

$\gamma < 1 \Leftrightarrow v_c < v_b^{'}$

$\theta_c = 180^\circ \Leftrightarrow \theta_L = 180^\circ$

$v_b = v_b^{'} - v_c$ **最小**



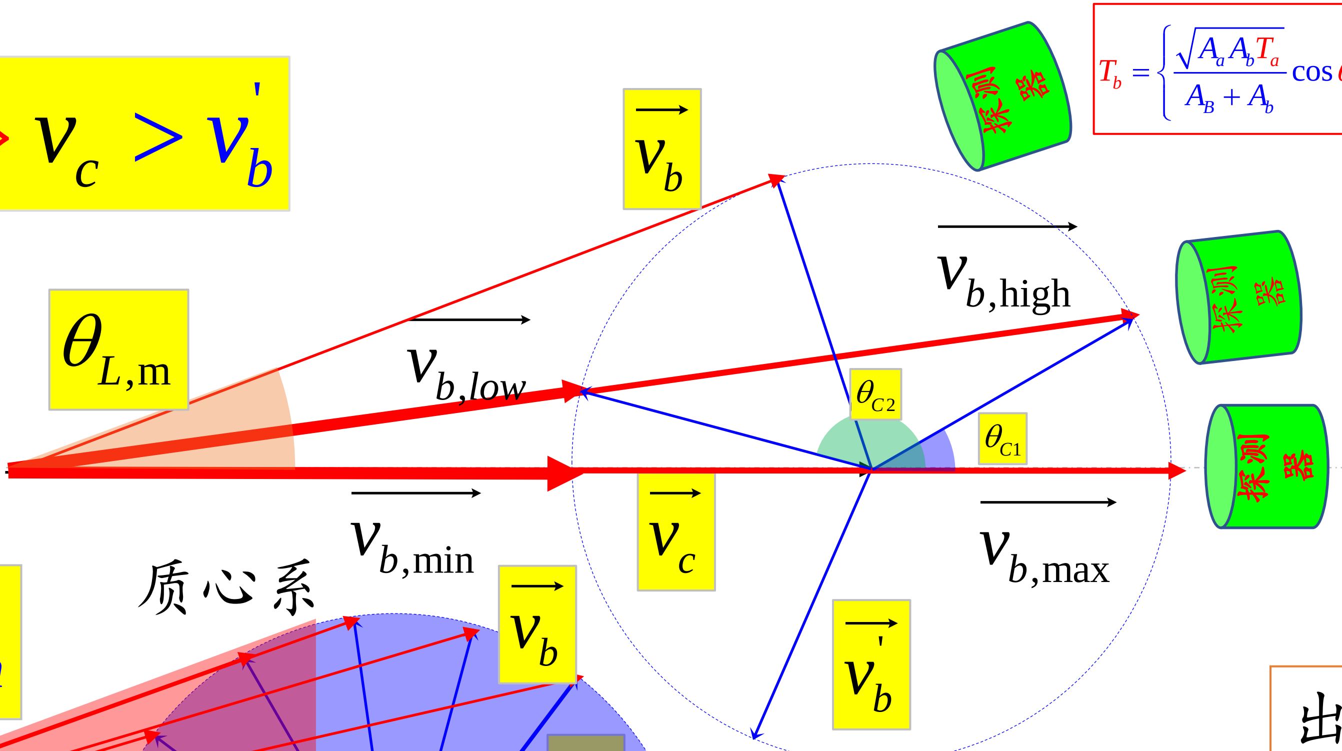
$\theta_c = 0^\circ \Leftrightarrow \theta_L = 0^\circ$

$v_b = v_b^{'} + v_c$ **最大**

- v_b 随出射角 θ_c 或 θ_L 增大而**单调下降**；
- **γ越小**，出射粒子能量分布越**平坦**；
- **γ→0**时（小a大A），v_b几乎**不随**θ_L **变化**；
- **γ→1**时（aA等重），出射粒子能量随角度**下降最快**，θ_L大角度时，v_b趋于零。

$$T_b=\left\{\frac{\sqrt{A_aA_bT_a}}{A_B+A_b}\cos\theta\pm\left[\left(\frac{A_B-A_a}{A_B+A_b}+\frac{A_aA_b}{(A_B+A_b)^2}\cos^2\theta\right)T_a+\frac{A_B}{A_B+A_b}Q\right]^{1/2}\right\}^2$$

(2) $\gamma>1\Leftrightarrow v_c>v_b'$

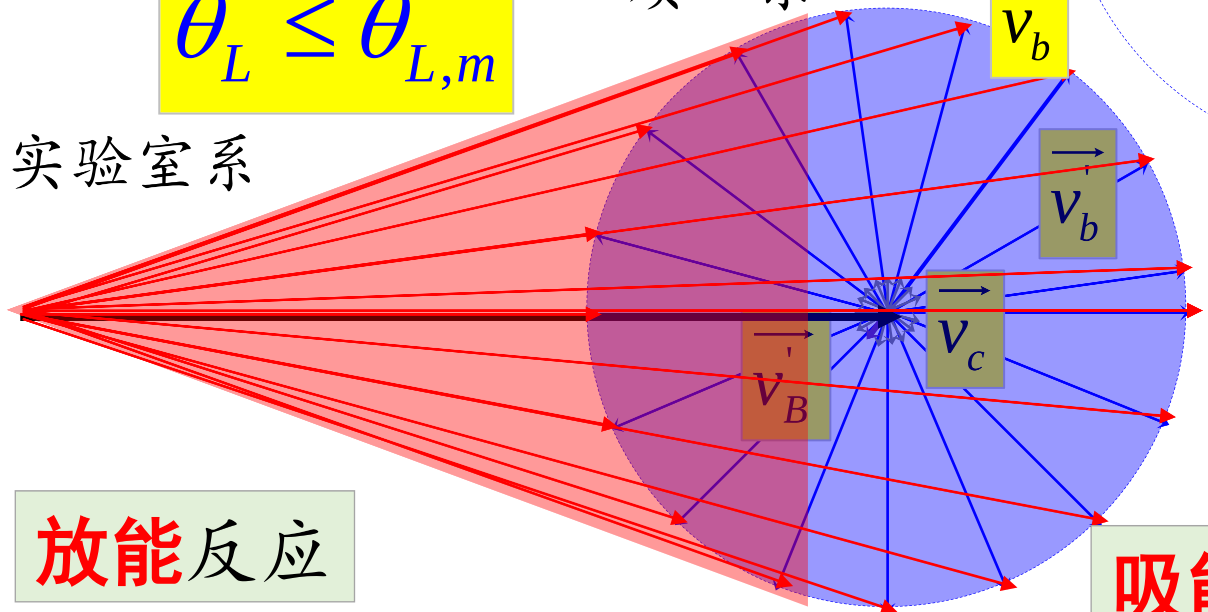


$$\theta_{L,\text{m}}=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{v_b'}{v_c}\right)$$

出现**圆锥效应**的条件：

$\theta_L\le\theta_{L,m}$



$$\gamma=\frac{v_c}{v_b'}=\left(\frac{A_aA_b}{A_AA_B}\frac{T'}{T'+Q}\right)^{1/2}>1$$

放能反应

吸能反应

$A_a\,A_b>A_A\,A_B$时，才可能$\gamma>1$；

入射粒子能量**超过阈值**（但不能过多）可能发生，但概率较小；

$$^{14}C(p,n)^{14}N$$

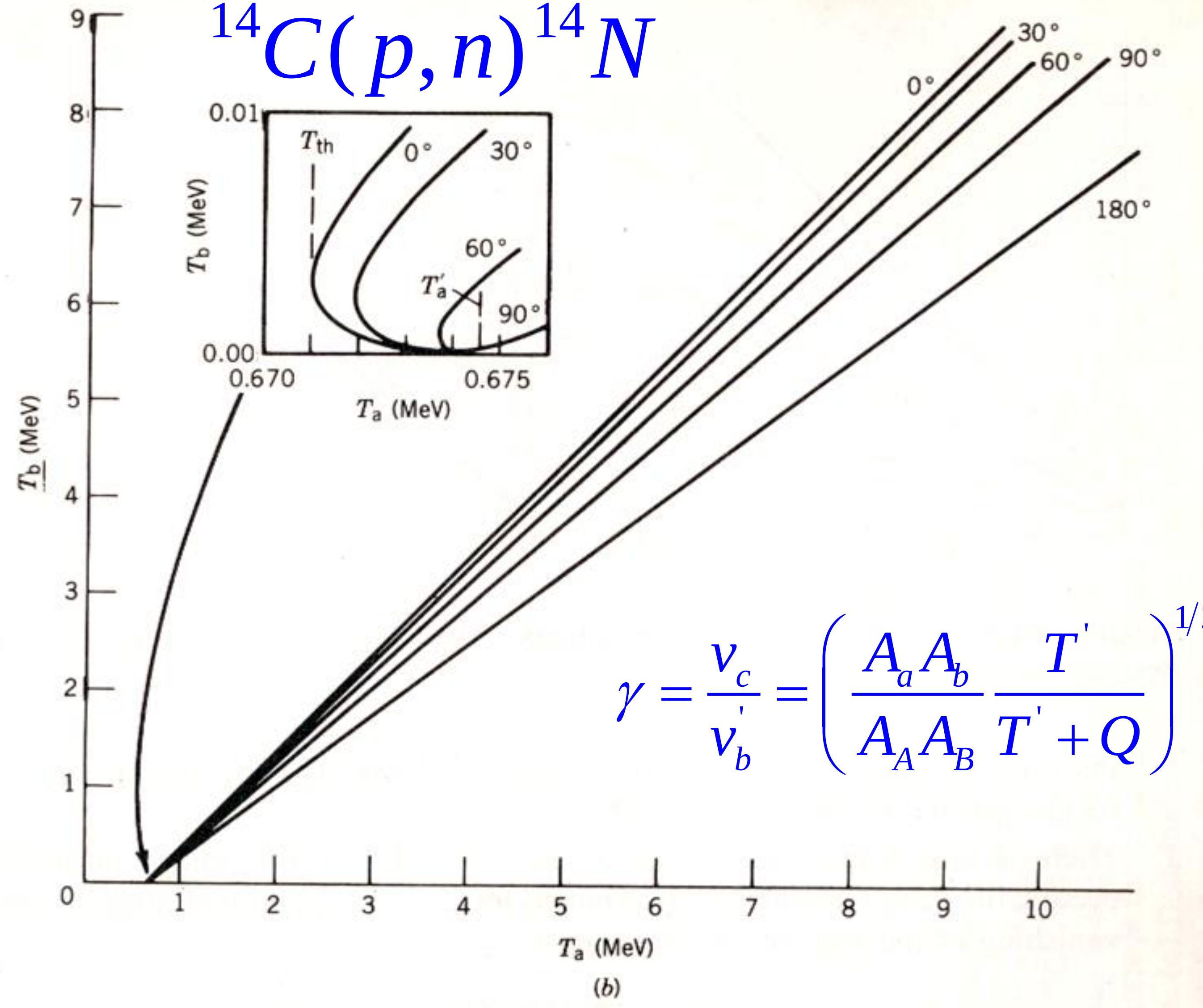


Figure 11.2 (*b*) T_a vs T_b for the reaction $^{14}C(p,n)^{14}N$. The inset shows the double-valued region.

$$\gamma = \frac{v_c}{v_b'} = \left(\frac{A_a A_b}{A_A A_B}\frac{T'}{T'+Q}\right)^{1/2} > 1$$

$$Q = 7.2889 + 3.0198 - 8.0713 - 2.8634$$
$$= -0.626 MeV$$
$$T_{th} = \frac{m_a + m_A}{m_A}|Q| = \frac{A_a + A_A}{A_A}|Q|$$
$$= \frac{15}{14}\cdot 0.626 = 0.6707 MeV$$

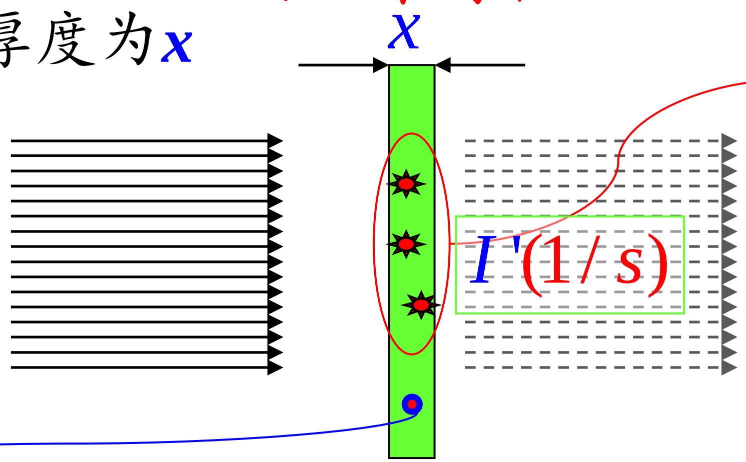
$$\frac{T'}{T'+Q} > \frac{A_A A_B}{A_a A_b} = 196$$
$$\rightarrow T' < \frac{-196}{195}\cdot Q = 0.6292(MeV)$$
$$\rightarrow T_a < \frac{15}{14}\cdot T' = 0.6742(MeV)$$

核反应能否发生：守恒定律，能量条件；
核反应发生的几率：反应截面。

单位时间入射粒子与靶核发生**反应数**

对一个薄靶

厚度为x



入射粒子强度 $I(1/s)$

$I'(1/s)$

$$N' \propto I \cdot N_s$$

$1/s$ $\quad 1/s \cdot 1/cm^2$

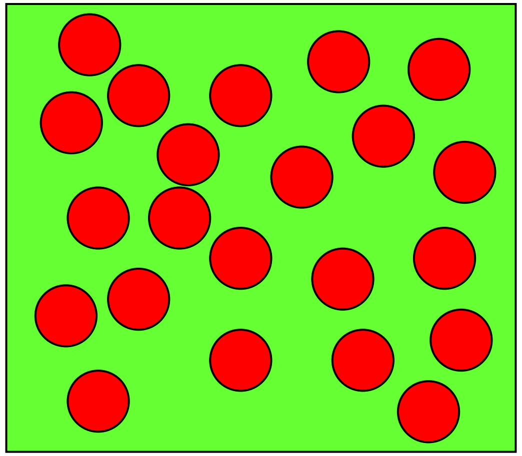
$$N' = \sigma I N_s$$

核反应截面

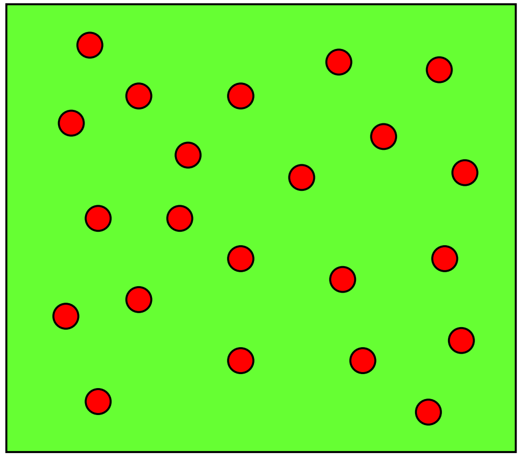
N_v $(1/cm^3)$

$N_s = N_v \cdot x$ $(1/cm^2)$

单位体积靶核数



单位面积靶核数



σ的单位为barn、靶，**面积**量纲

$$1b = 10^{-24} cm^2$$

核半径～$10^{-12\sim-13}$cm，1b与原子核的几何截面相当。

截面σ（Cross section）

$$\sigma = \frac{N'}{IN_s} = \frac{\cancel{\text{单位时间内}}\text{发生的核反应数}}{\cancel{\text{单位时间内的}}\text{入射粒子数} \times \text{单位面积的靶核数}}$$

提示：这个定义仅是从实验测量的角度来理解的。更具物理图像的定义（计算）请见后面的分波分析部分的讨论。

物理意义

- **一个入射粒子**与**单位面积**上的**一个靶核**发生反应的**概率**。
- 每单位面积1个**靶核A**，“**捕捉**”1个**入射粒子a**的概率。

不同反应道有各自截面：**分截面**

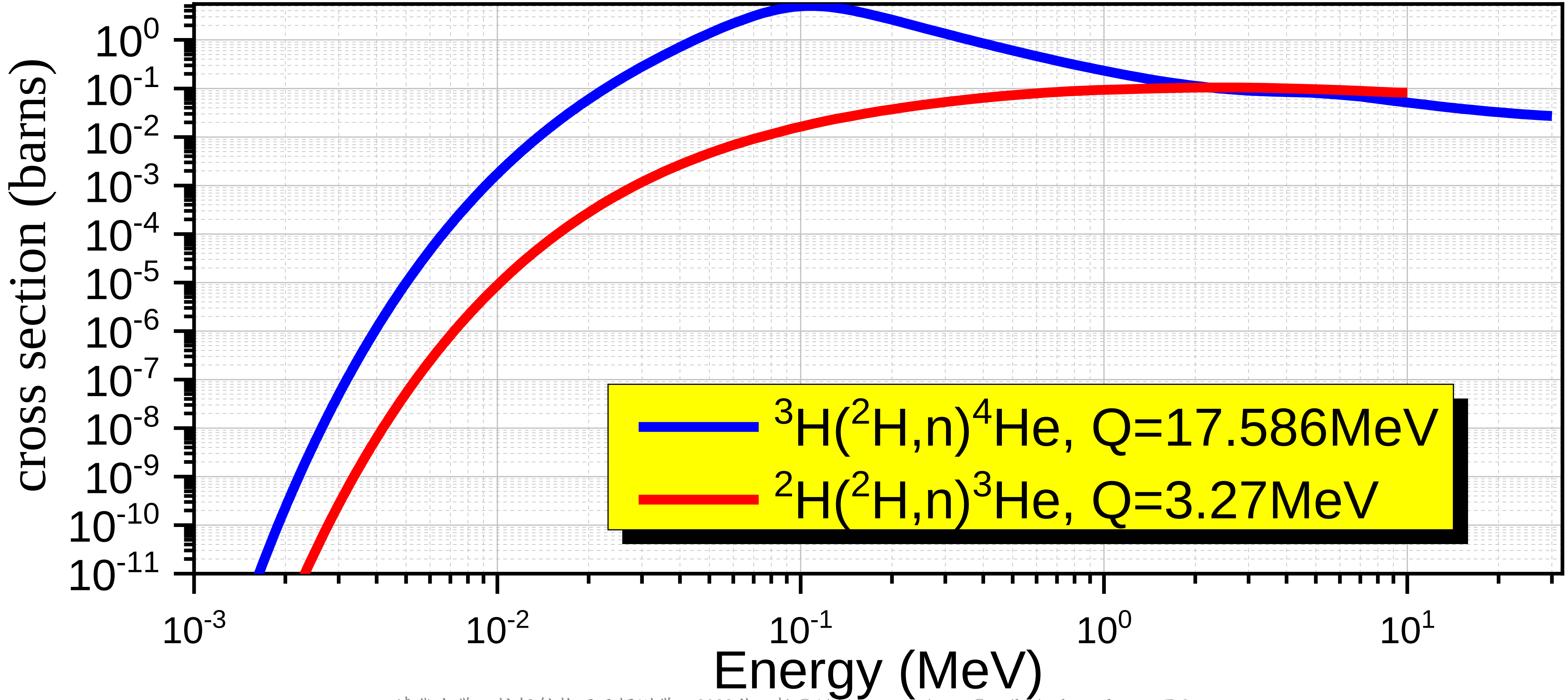
分截面之和，称为**总截面**

$$\sigma_1 = \sigma_1(n,p) \quad \sigma_2 = \sigma_2(n,\alpha) \quad \cdots\cdots$$

$$\boxed{\sigma = \sum_i \sigma_i}$$

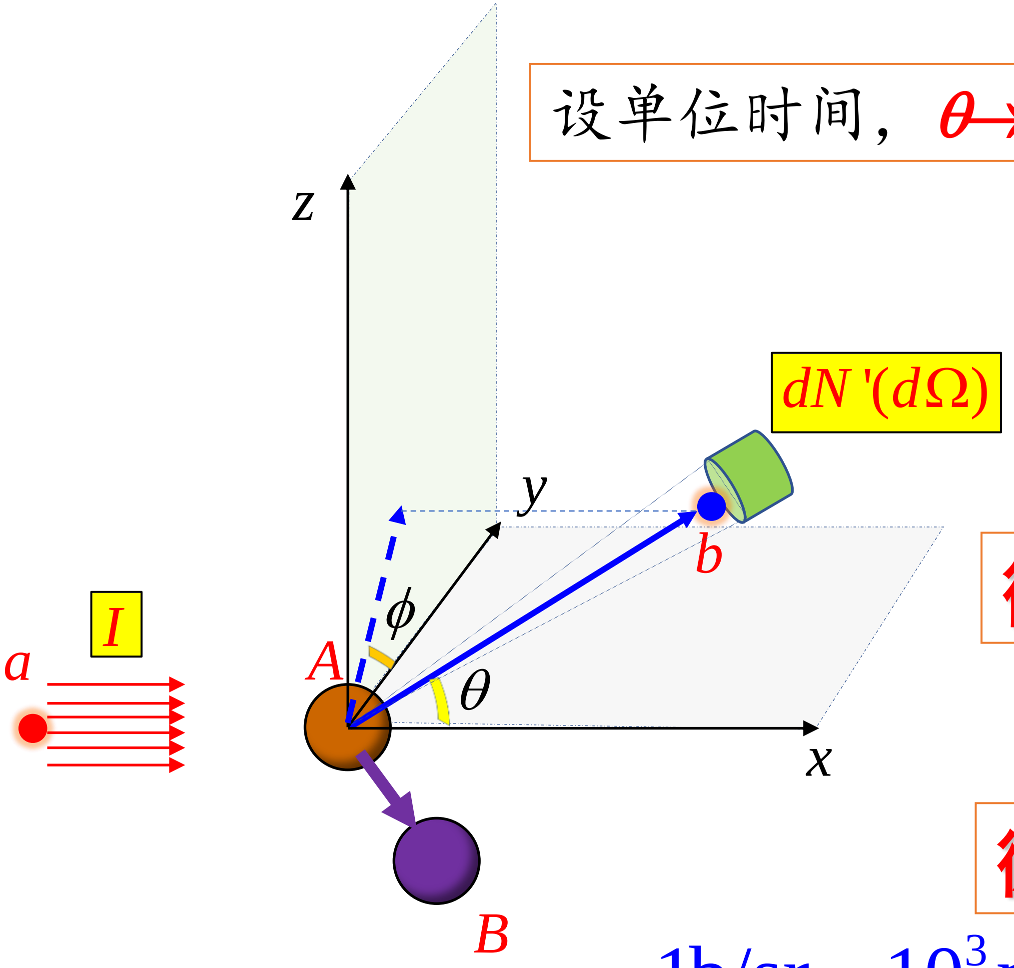
➢**激发函数：** 截面随入射粒子能量的变化关系。

➢**激发曲线：** 由激发函数画出的曲线。



核反应产物的出射可能**各向异性** ⟹ **微分截面**

设单位时间，$\theta\to\theta+d\theta$，$\phi\to\phi+d\phi$出射粒子数dN'



则 $dN' \propto IN_s d\Omega$

$$dN' = \sigma(\theta,\phi) I N_s d\Omega$$

微分截面

$\sigma(\theta,\phi)$ 或 $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\phi)$

微分截面单位

$$1\text{b/sr} = 10^3\text{mb/sr} = 10^6\mu\text{b/sr(steradian)}$$

微分截面（differential cross section）

$$\sigma(\theta,\phi)=\frac{dN'}{IN_s d\Omega}=\frac{\text{单位时间内、}(\theta,\Phi)\text{方向单位立体角发生的核反应数}}{\text{单位时间内的入射粒子数}\times\text{单位面积的靶核数}}$$

- **微分截面**既是**实验测量**量，又是**理论计算**量；
- 实验测量微分截面，积分可得到总截面。

$$N'=IN_s\int_{\Omega}\sigma(\theta,\varphi)d\Omega=IN_s\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$$

总截面

$$\sigma=\frac{N'}{IN_s}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=2\pi\int_0^{\pi}\sigma(\theta)\sin\theta d\theta$$

实验测量截面$\sigma_L(\theta_L)$ ⬅➡ 理论计算截面$\sigma_c(\theta_c)$。

L系中，单位时间$\theta_L \to \theta_L + d\theta_L$的出射粒子数$dN_L'$，

$$dN_L' = IN_s \sigma_L(\theta_L) d\Omega_L$$

同一个过程，不同系的观察

C系中，单位时间$\theta_c \to \theta_c + d\theta_c$的出射粒子数$dN_c'$，

$$dN_c' = IN_s \sigma_c(\theta_c) d\Omega_c$$

出射粒子数dN'不随坐标系选择而改变

$$\sigma_L(\theta_L) d\Omega_L = \sigma_c(\theta_c) d\Omega_c$$

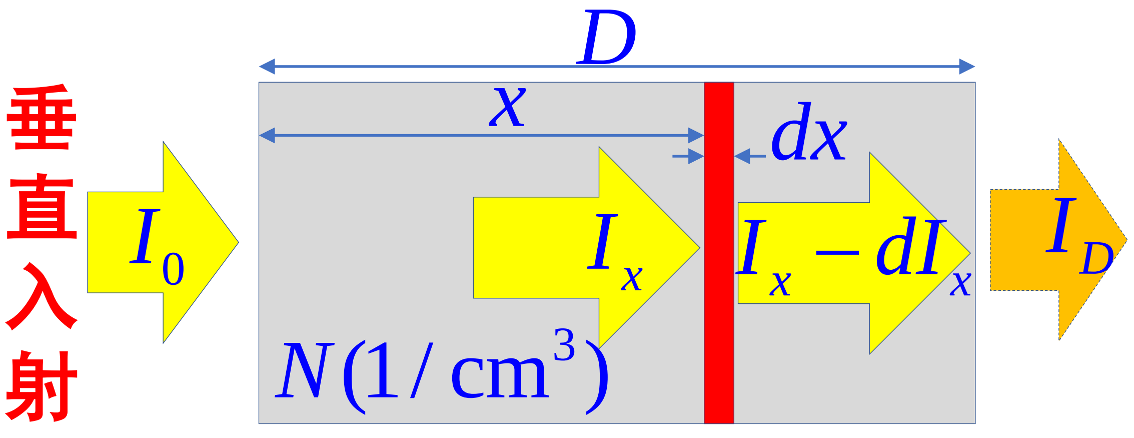
以下三页，请自行阅读

定义： 入射粒子在靶中引起的**核反应数** N' 与**入射粒子数** I_0 之比，称为**核反应产额** Y 。

$$Y = \frac{N'}{I_0}$$

反应产额与下列因素有关：

- **截面**特性（a，A，T_a）→σ：cm^2
- **靶的**特性（厚度，纯度，密度）→ND：$1/cm^2$



$$N_S = Ndx$$

$$\frac{-dI_x}{I_x} = \sigma N_S$$

$$d\ln I_x = -\sigma N dx$$

初始条件：

$$I\,(x=0) = I_0$$

$$\boxed{I_x = I_0 e^{-\sigma N x}}$$

通过厚度为D的靶后

$$\boxed{I_D = I_0 e^{-\sigma N D}}$$

反应产额：

$$\boxed{Y = \frac{N'}{I_0} = \frac{I_0 - I_D}{I_0} = 1 - e^{-\sigma N D}}$$

$$\boxed{Y = 1 - e^{-\sigma N D}}$$

Σ=Nσ，宏观截面(1/cm)
λ=1/Σ，平均自由程（cm)

$D << \lambda = \frac{1}{\sigma N}$ 时，这种靶称为**薄靶**，$\boxed{Y = \sigma N D}$

$D >> \lambda = \frac{1}{\sigma N}$ 时，这种靶称为**厚靶**，$\boxed{Y = 1}$

透射率

$$\boxed{T = \frac{I_D}{I_0} = e^{-\sigma N D}}$$

可以通过透射率测量**总截面**

$$\boxed{\sigma = -\frac{1}{ND}\ln T}$$

已知^3He气体的数密度为$10^{19}/cm^3$,某能量中子与其反应截面为1000barn，则该能量中子穿透0.1cm后的^3He气体的反应产额是多少?

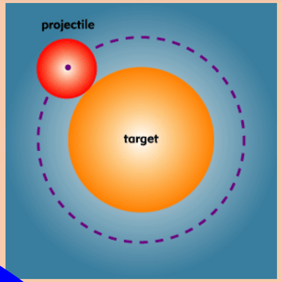
[填空1]

作答

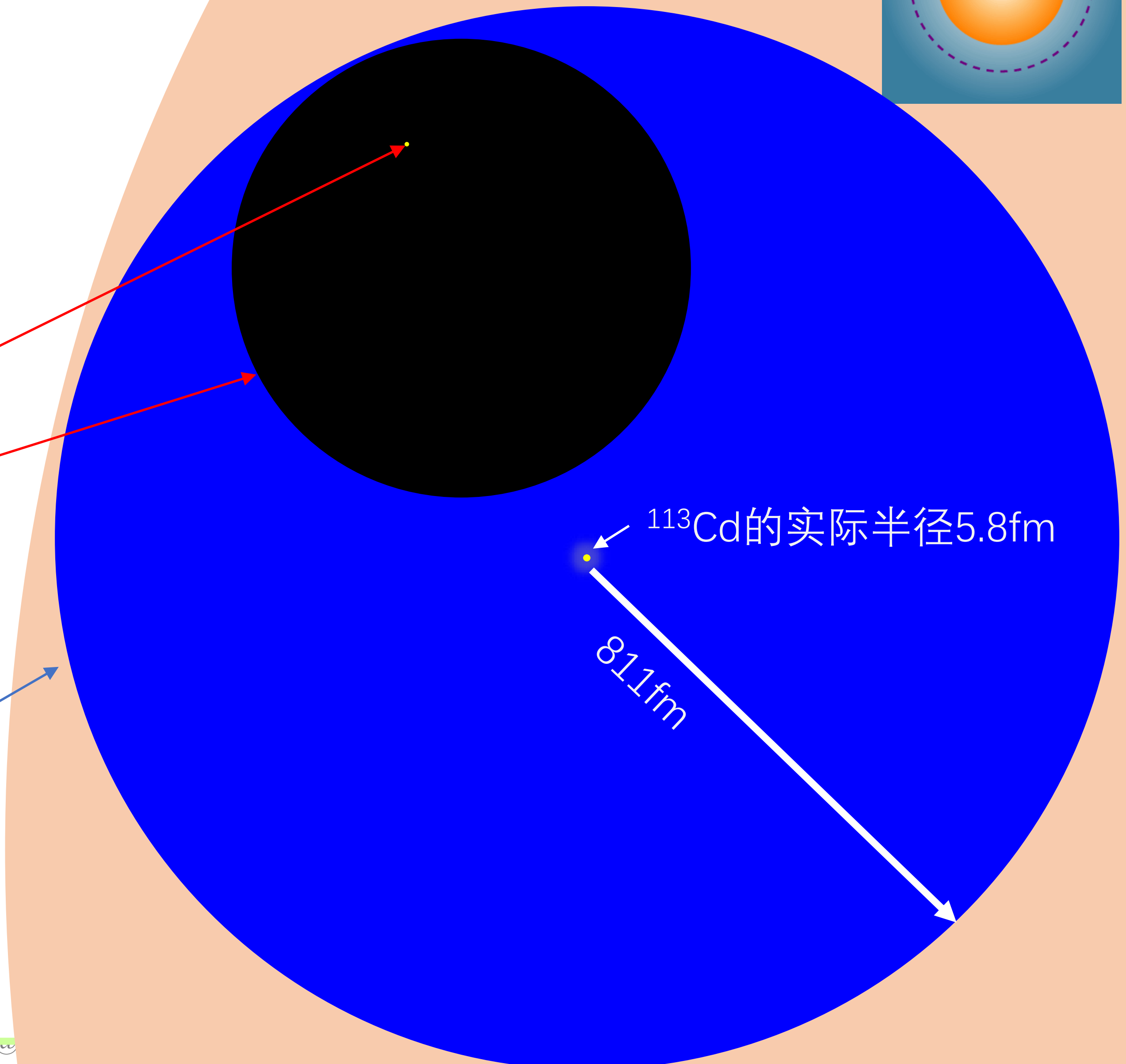
- 所谓截面，朴素地讲，就是a和A互相“观察”对方时面积的大小。1 barn=10^{-24} cm^2=100 fm^2，与核子数为100的原子核的截面大小相当。

- 但实际核反应的截面，却既有可能比1barn大，也有可能比1barn小；
- 决定总截面大小的因素有三个：**a**，**A**，**T_a**；
- 如果考虑到入射道**(a,A)**可能对应于不同的出射道**(B,b)**（**B’,b’**），则各反应道还会有其各自的分截面；
- 截面 σ是有量纲的，因此不能用它直接得到反应产额（物理意义是概率），给它乘以数密度 N，得到的是量纲为距离倒数的宏观截面 Nσ，再乘以靶厚 D，就可以得到无量纲数 NσD了，用它就能计算反应产额：**$Y=1-e^{-N\sigma D}$**。

核反应截面差异巨大，导致截面“>>”或“<<”原子核真实几何截面大小的因素可能是什么？



几何截面πR^2(barn)		25.3 meV中子的(n,γ)截面（barn）：
0.29	^{16}O	1.7×10^{-4}
0.07	^{2}H	5.06×10^{-4}
0.045	^{1}H	3.32×10^{-1}
0.21	^{10}B	3.84×10^{3}
0.22	^{11}B	5.5×10^{-3}
1.06	^{113}Cd	2.06×10^{4}
1.32	^{157}Gd	2.54×10^{5}
1.19	^{135}Xe	2.65×10^{6}



入射粒子带来的轨道角动量有不同的组成（s，p，d，f……），可以根据不同的**轨道角动量**来分析核反应截面。

一．半经典的分波分析

二．量子力学的分波分析

三．低能中子的弹性散射截面

入射粒子a速度v_a

相对运动**动能**

$$T'=\frac{1}{2}\mu v_a^2$$

相对运动**动量**

$$p=\sqrt{2\mu T'}=\frac{m_A}{m_A+m_a}m_a v_a$$

约化德布罗意**波长**

$$\lambda\!\!\!^{-}=\frac{\hbar}{p}$$

相对运动的**角动量**

$$L=p\cdot\rho=\frac{\hbar}{\lambda\!\!\!^{-}}\cdot\rho=\frac{\rho}{\lambda\!\!\!^{-}}\cdot\hbar$$

轨道角动量

量子化存在

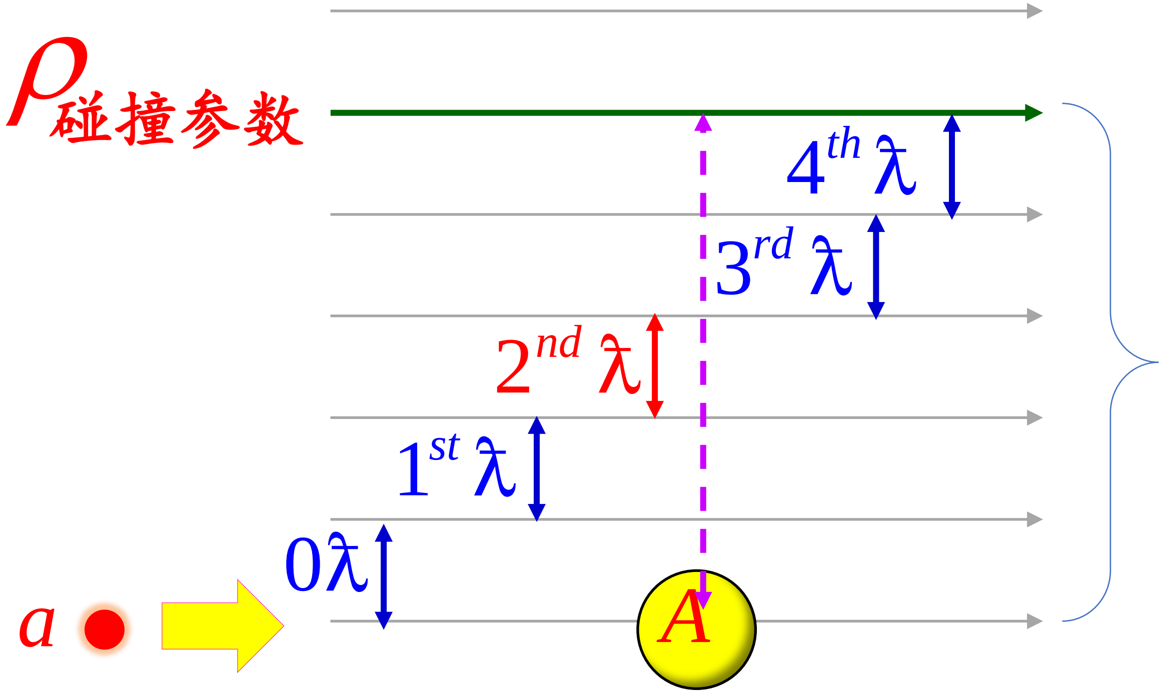
$$L=l\hbar$$

$$(l=0,1,2\ldots)$$

$$\frac{\rho}{\lambda\!\!\!^{-}}=0,1,2,3,\cdots$$

$$\rho=l\lambda\!\!\!^{-}$$

$$=0\lambda\!\!\!^{-},1\lambda\!\!\!^{-},2\lambda\!\!\!^{-},3\lambda\!\!\!^{-},\cdots$$

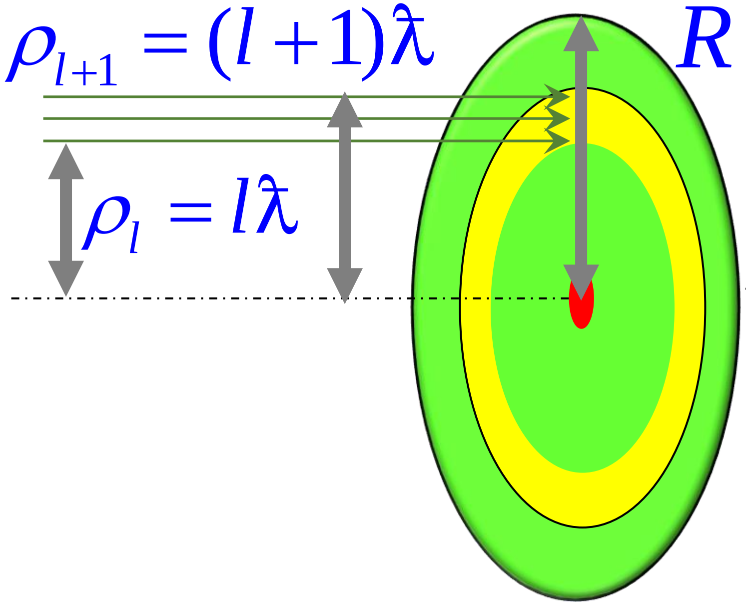


因此(a,A)的碰撞过程，可以被分解为对应于**不同轨道角动量**的部分

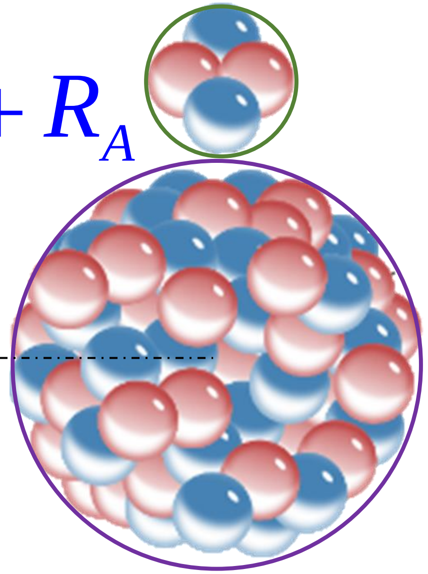
$$\rho = l\bar{\lambda} \le R = R_a + R_A$$

$$l \le \frac{R}{\bar{\lambda}} = l_{\max}$$

带来角动量 $l\hbar$



$R = R_a + R_A$



轨道角动量为$l\hbar$的入射粒子与靶核的作用**截面**为

$$S_l = \pi(\rho_{l+1}^2 - \rho_l^2) = \pi\left[(l+1)^2 - l^2\right]\bar{\lambda}^2 = (2l+1)\pi\bar{\lambda}^2$$

发生**反应**的**截面**满足

$$\sigma_{r,l} \le S_l = (2l+1)\pi\bar{\lambda}^2$$

总截面

$$\sigma = \sum_{l=0}^{R/\bar{\lambda}} (2l+1)\pi\bar{\lambda}^2 = \pi(R+\bar{\lambda})^2$$

核的大小

波动性

核的**尺寸**和粒子的**波动性**，都对截面有贡献

单选题 1分

设置

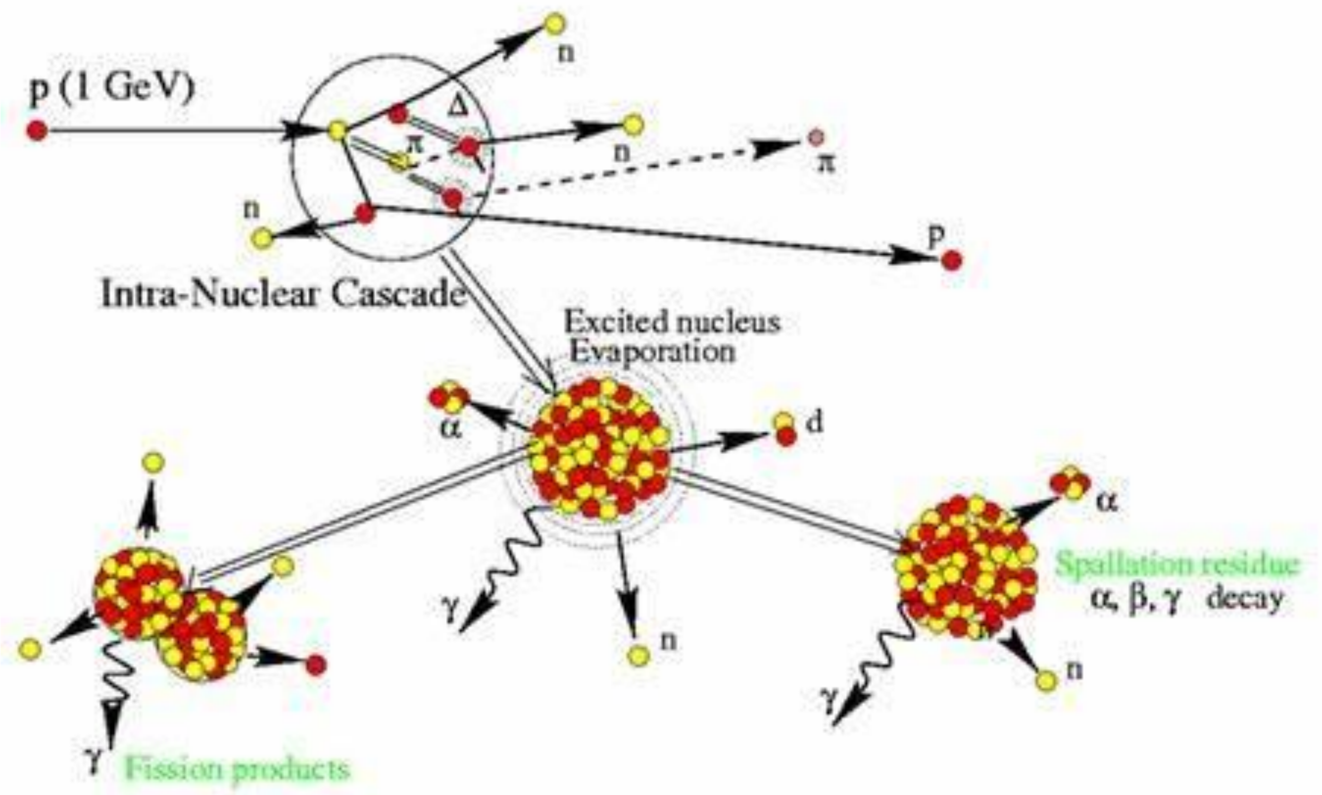
散裂中子源，一般是（1）用动能大于1000MeV的质子来轰击高Z靶（例如钨，水银）来制造中子，然后将中子慢化为热中子或冷中子（波长1.85×10^{-10}m或更长）后（2）来分析被检测对象（假设是^{10}B，$\sigma(n,\gamma)=3836$barn）。请问，在（1）和（2）中，对反应截面起主要贡献的分别是质子和中子的什么因素?

A R，R

B ƛ，ƛ

C R，ƛ

D ƛ，R



$$\sigma=\sum_{l=0}^{R/ƛ}(2l+1)\pi ƛ^2=\pi(R+ƛ)^2$$

提交

向x方向入射的粒子束可用**平面波**表示，在有心力场中，**球面波分解更合适**

$$\psi_i = e^{ikx} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l \cdot j_l(kr)\cdot P_l(\cos\theta)$$

kr>> l

波函数远离原子核

$$j_l(kr) \approx \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr} = i\,\frac{e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{+i(kr-l\pi/2)}}{2kr}$$

$$\psi_i = \frac{1}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1}(2l+1)\left[e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)} - e^{+i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right]\cdot P_l(\cos\theta)$$

-r: 入射球面波

+r: 出射球面波

原点仅仅是个几何意义上的点，空空如也

$$\psi_i = \frac{1}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1}(2l+1)\left[1\times e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)} - 1\times e^{+i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right]P_l(\cos\theta)$$

入射波系数不变

出射波系数改变

靶核导致波函数变化了

原点上有靶核，散射会导致**出射波函数**的变化

$$\psi = \frac{1}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1}(2l+1)\left[1\times e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)} - \eta_l\times e^{+i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right]P_l(\cos\theta)$$

与散射、反应有关

出射波系数η_l——一个与l有关的复数

- 入射**轨道角动量l**不同，出射波**振幅**和**相位**也不同
- **散射**时，$|\eta_l|=1$
- **反应**时，$|\eta_l|<1$

$$\psi_{sc}=\psi-\psi_i=\frac{1}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}i^{l+1}(2l+1)\left[1\times e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}-\eta_l\times e^{+i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right]P_l(\cos\theta)$$

$$-\frac{1}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}i^{l+1}(2l+1)\left[1\times e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}-1\times e^{+i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right]P_l(\cos\theta)$$

ψ_{sc}：靶核导致的散射

ψ：有靶核

ψ_i：无靶核

抵消

差异反应了散射

$$=\frac{1}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}i^{l+1}(2l+1)(1-\eta_l)e^{+i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}P_l(\cos\theta)$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\psi_{sc,l}$$

示例：不同轨道角动量对应的散射波函数

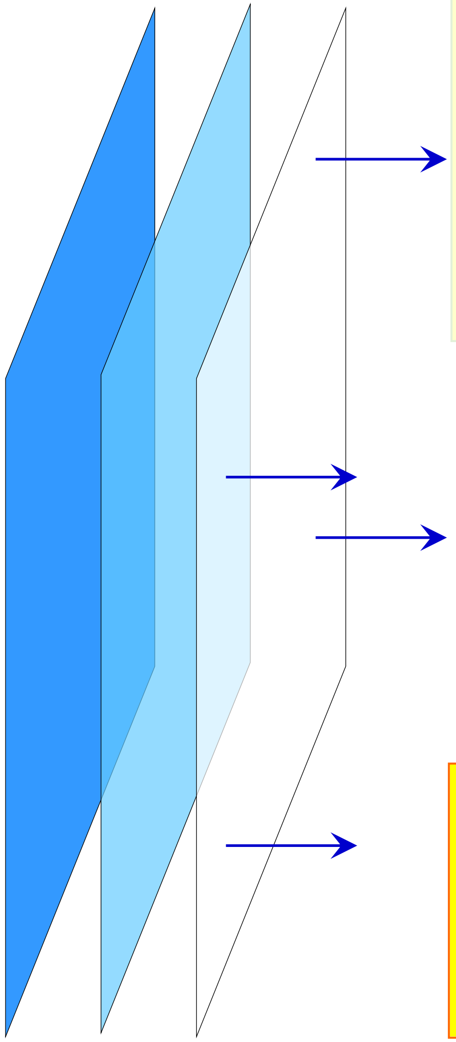
$$\psi_{sc,0}=\frac{i}{2kr}(1-\eta_0)e^{ikr}$$

$$\psi_{sc,1}=\frac{-3}{2kr}(1-\eta_1)e^{i(kr-\pi/2)}\cos\theta$$

$$\psi_{sc,2}=\frac{-5i}{2kr}(1-\eta_2)e^{i(kr-\pi)}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)$$

散射截面（cm²） = 散射粒子数(1/s) / 入射粒子注量率（1/cm²/s）

入射平面波

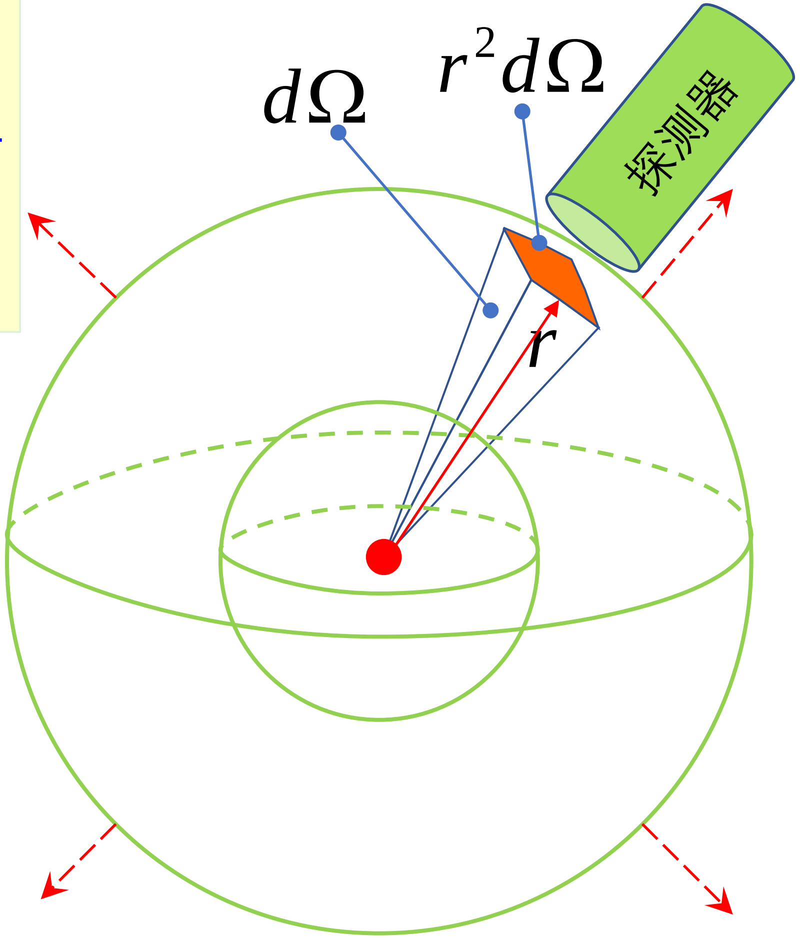


$$d\sigma_{sc}=\frac{j_{scattered}\cdot r^2 d\Omega}{j_{incident}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{cm^2\cdot s}\cdot cm^2\right)}{\left(\frac{1}{cm^2\cdot s}\right)}$$

j: 粒子流注量率

$$j=\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\psi\right)$$

$$\frac{d\sigma_{sc}}{d\Omega}=\frac{(j_{scattered})r^2}{j_{incident}}$$



散射球面波

$$j=\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\psi\right)$$

（以l=0为例入手）

$$\psi_{sc,0}=\frac{i(1-\eta_0)}{2k}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$j_{scattered}=\frac{\hbar}{2mi}\cdot\frac{|1-\eta_0|^2}{4k^2}\left[\frac{e^{-ikr}}{r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)'-\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)'\right]$$

抵消为0

$$j_{scattered}=\frac{\hbar|1-\eta_0|^2}{8mk^2i}\left[\frac{e^{-ikr}}{r}\left(\frac{ike^{ikr}}{r}-\frac{e^{ikr}}{r^2}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{-ike^{-ikr}}{r}-\frac{e^{-ikr}}{r^2}\right)\right]$$

$$j_{scattered}=\frac{\hbar|1-\eta_0|^2}{8mk^2i}\cdot\frac{2ik}{r^2}$$

$$j_{scattered}=\frac{\hbar k}{m}\cdot\frac{|1-\eta_0|^2}{4k^2r^2}$$

$$\psi_i=e^{ikx}$$

$$j_{incident}=\frac{\hbar}{2mi}\left[e^{-ikx}\cdot ike^{ikx}-(-ik)e^{-ikx}\cdot e^{ikx}\right]$$

$$j_{incident}=\frac{\hbar k}{m}$$

$$\frac{d\sigma_{sc,0}}{d\Omega}=\frac{(j_{scattered})r^2}{j_{incident}}=\frac{|1-\eta_0|^2}{4k^2}=\frac{\lambda^2}{4}|1-\eta_0|^2$$

把**所有角动量**都考虑进去

$$\frac{d\sigma_{sc}}{d\Omega}=\frac{\lambda^2}{4}\left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i(1-\eta_l)P_l(\cos\theta)\right|^2$$

以上是单位立体角下的微分截面，对4π立体角做积分，得到总截面：

$$\sigma_{sc}=\int\frac{d\sigma_{sc}}{d\Omega}\cdot d\Omega$$

$$d\Omega=\sin\theta d\theta d\phi$$

$$\sigma_{sc}=\frac{\lambda\!\!\!^{-2}}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i(1-\eta_l)P_l(\cos\theta)\right|^2\cdot\sin\theta d\theta d\phi$$

$$\sigma_{sc}=\frac{\pi\lambda\!\!\!^{-2}}{2}\cdot\int_0^{\pi}\left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i(1-\eta_l)P_l(\cos\theta)\right|^2\cdot\sin\theta d\theta$$

$$\int P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\begin{cases}\dfrac{2}{2l+1}, & l=l'\\ 0, & l\neq l'\end{cases}$$

对于反应截面，即出射粒子b不是a的反应，可以认为a消失了，此时需要考虑 $1-|\eta_l|^2$

类似的推导过程可得反应截面的表达式

$$\sigma_{sc}=\pi\lambda\!\!\!^{-2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\cdot|1-\eta_l|^2$$

$$\sigma_r=\pi\lambda\!\!\!^{-2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\cdot\left(1-|\eta_l|^2\right)$$