微积分 A (2)

姚家燕

第 18 讲

在听课过程中，

严禁使用与教学无关的电子产品!

关于考试的感悟

- 考试是容易的: 只有两小时!
- 学习是艰难的: 每周两次课, 温习, 作业, ...
- 且行且珍惜!

第 4 章 曲线积分与曲面积分

§1. 第一类曲线积分

定义 1. 假设 $L \subset \mathbb{R}^3$ 为空间曲线, 其起点为 A, 终点为 B, 而 $f: L \to \mathbb{R}$ 为函数. 对任意的整数 $n \geqslant 1$, 将 L 分割成 n 段:

$$\overparen{P_0P_1},\ \overparen{P_1P_2},\ \ldots,\ \overparen{P_{n-1}P_n},$$

其中 $P_0 = A$, $P_n = B$.

在每个小段 $\overset{\frown}{P_{j-1}P_j}$ 上取点 X_j. 令

$$d = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\overline{P_{j-1}P_j}|,$$

并称之为分割的步长. 定义 (若极限存在)

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell = \lim_{d\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(X_j)|\overline{P_{j-1}P_j}|,$$

并且称之为 f 在曲线 L 上的第一类曲线积分, 也记之为 $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell$, 其中称 L 为积分路径, f 为被积函数, $f(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell$ 为被积分式, $\mathrm{d}\ell$ 为曲线元素或弧微分或弧微元.

评注

- 上述极限存在意味着: $\exists a \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得当 $d < \delta$ 时, 均有
$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(X_j) |\overline{P_{j-1}P_j}| - a \right| < \varepsilon.$$
此时将 a 记作 $\int_L f(x, y, z)\, \mathrm{d}\ell$.
- 若 L 为分段光滑曲线 (也即 L 可分成有限多段, 且每一段均有连续可导的参数表示), 而 f 为连续函数, 则 $\int_L f(x, y, z)\, \mathrm{d}\ell$ 存在.

- $\int_L 1\,\mathrm{d}\ell$ 为曲线 L 的长度.
- 若 $L \subset \mathbb{R}^2$, 可将之看成 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线, 由此定义的第一类曲线积分记作

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}\ell.$$

该曲线积分给出了柱面

$$z = f(x,y),\ (x,y) \in L$$

的面积.

- (质心或形心) 假设 $L \subset \mathbb{R}^3$ 为分段光滑曲线, 在它上面分布有质量使得在点 $X \in L$ 处的密度为 $\rho(X)$. 若 ρ 连续, 则 L 的总质量为

$$M = \int_L \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell.$$

设 L 的质心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 则我们有

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{M}\int_L x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell,\\ \bar{y} &= \frac{1}{M}\int_L y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell,\\ \bar{z} &= \frac{1}{M}\int_L z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell.\end{aligned}$$

第一类曲线积分的性质

- 第一类曲线积分具有定积分的所有性质, 例如: 有界性, 线性性, 路径可加性, (严格) 保号性, (严格) 保序性, 绝对值不等式, 上、下界以及积分中值定理等.
- 函数 f 沿曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{BA}$ 的积分相等:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell.$$

也即第一类曲线积分与曲线的方向无关.

第一类曲线积分的计算

设分段光滑曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \\ z = z(t), \end{cases}$$

则其弧微分为

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t,$$

从而我们有

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

注: 若 $L \subset \mathbb{R}^2$, 则 $z(t) \equiv 0$. 此时

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}\ell = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

特别地, 若曲线 $L \subset \mathbb{R}^2$ 由方程

$$y = y(x), \ x \in [a, b]$$

给出, 则我们有

$$\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}\ell = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

同样地, 若曲线 $L \subset \mathbb{R}^2$ 由方程

$$x = x(y), \ y \in [c, d]$$

给出, 则我们有

$$\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}\ell = \int_c^d f(x(y), y)\sqrt{(x'(y))^2 + 1}\,\mathrm{d}y.$$

若曲线 L 由隐函数方程组

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z)=0, \\ \varphi_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

给出, 利用隐函数定理来局部求解上述方程组,

由此得到曲线 L 的分段的参数表示, 随后再对

每段分别利用前面的公式计算.

例 1. 求 $\int_L y\,\mathrm{d}\ell$, 其中 L 是以原点为中心, 以 R 为半径的圆周在第一象限内的部分.

解: 方法 1. 曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = R\cos\theta, \\ y = R\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned} \int_L y\,\mathrm{d}\ell &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(\theta)\sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin\theta\sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = R^2. \end{aligned}$$

方法 2. 曲线 L 的参数方程为

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \ \ x \in [0, R].$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned} \int_L y \,\mathrm{d}\ell &= \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \Big(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\Big)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = R^2. \end{aligned}$$

例 2. 求 $\int_{\overset{\frown}{OABO}} xy\,\mathrm{d}\ell$, 其中 O 为原点, $A=(1,0)$, $B=(1,1)$, $\overset{\frown}{OA}$ 为线段 $\overrightarrow{OA}$, $\overset{\frown}{AB}$ 为线段 $\overrightarrow{AB}$, 而 $\overset{\frown}{BO}$ 为夹在 O, B 间的抛物线 $y=x^2$.

解: 由积分路径可加性知

$$\begin{aligned}\int_{\overset{\frown}{OABO}} xy\,\mathrm{d}\ell &= \int_0^1 x\cdot 0\,\mathrm{d}x+\int_0^1 1\cdot y\,\mathrm{d}y+\int_0^1 x\cdot x^2\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}(x^2)=\frac{5\sqrt{5}}{24}+\frac{61}{120}.\end{aligned}$$

例 3. 求 $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\ell$, 其中曲线 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线.

解: 由题设知 L 是一个半径为 R 的圆周, 则

$$\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\ell = R^2\int\limits_L \mathrm{d}\ell = 2\pi R^3.$$

注: 同通常的多重积分一样, 借助被积函数以及积分路径的特点, 比如说对称性或者奇偶性等, 我们可以极大地简化计算.

例 4. 求柱面 $x^2+y^2=2ax\,(a>0)$ 被平面 $z=0$ 以及曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所截部分的面积.

解: 设 L 为圆周 $x^2+y^2=2ax$, 其参数方程为

$$\begin{cases} x=a+a\cos\varphi, \\ y=a\sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi\in[0,2\pi].$$

于是所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\ell \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a+a\cos\varphi)^2+(a\sin\varphi)^2}\,a\,\mathrm{d}\varphi = 8a^2. \end{aligned}$$

例 5. 设半圆周 $L:\ x^2+y^2=r^2\,(y\geqslant 0)$ 上分布密度为 $\rho(x,y)=x^2+y$ 的质量, 求质心 $(\bar{x},\bar{y})$.

解: 半圆周的总质量为

$$
\begin{aligned}
M &= \int_L \rho(x,y)\,\mathrm{d}\ell \\
&\overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}}{=} \int_0^{\pi} (r^2\cos^2\theta + r\sin\theta)\sqrt{(-r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= r^2\int_0^{\pi} (r\cos^2\theta+\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= r^2\left(\frac{\theta}{2}r+\frac{r}{4}\sin 2\theta-\cos\theta\right)\bigg|_0^{\pi} = \frac{r^2}{2}(\pi r+4).
\end{aligned}
$$

于是由对称性可知所求质心坐标 $\bar{x}, \bar{y}$ 满足:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{M}\int_L x\rho(x,y)\,\mathrm{d}\ell = \frac{1}{M}\int_L x(x^2+y)\,\mathrm{d}\ell = 0, \\
\bar{y} &= \frac{1}{M}\int_L y\rho(x,y)\,\mathrm{d}\ell = \frac{1}{M}\int_L y(x^2+y)\,\mathrm{d}\ell \\
&= \frac{1}{M}\int_0^{\pi}(r\sin\theta)(r^2\cos^2\theta + r\sin\theta)r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{r^3}{6M}(3\pi+4r) = \frac{r(3\pi+4r)}{3(\pi r+4)}.
\end{aligned}$$

作业题: 第 4.2 节第 182 页第 1 题第 (1), (2) 题, 第 183 页第 3 题第 (1) 小题, 第 5 题.

例 6. 计算 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\ell$, 其中曲线 L 是由圆周 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$, 直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限所围的图形的边界.

解: 由题设可知

$$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\ell = \int\limits_{\overline{OA}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\ell + \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\ell + \int\limits_{\overline{BO}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\ell,$$

其中我们有 $\overline{OA}:\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant a,$

$$\widehat{AB}:\quad x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4},$$

$$\overline{BO}:\quad y=x,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned}\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\ell &= \int_0^a e^x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\\ &= e^a-1+\frac{\pi}{4}ae^a+e^a-1\\ &= 2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a.\end{aligned}$$

例 7. 计算 $\int_L |y|\,\mathrm{d}\ell$, 其中 L 为双纽线

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)\ (a>0).$$

解: 由对称性, 只需考虑 L 在第一象限的部分.

在极坐标系下, 该部分的方程为

$$\rho^4 = a^2\big((\rho\cos\varphi)^2 - (\rho\sin\varphi)^2\big),\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},$$

也即 $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$, 由此立刻可得

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi},\ \varphi\in\Big[0,\frac{\pi}{4}\Big].$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
&\int_L |y|\,\mathrm{d}\ell = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\rho(\varphi)\sin\varphi|\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\sqrt{(a\sqrt{\cos 2\varphi})^2+\Big(a\cdot\frac{-\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\Big)^2}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\sqrt{a^2\cos 2\varphi+a^2\cdot\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -4a^2\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 4a^2\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big).
\end{aligned}$$

例 8. 计算 $\int_L z^2 \, \mathrm{d}\ell$, 其中 $a > 0$, 而 L 为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

解: 由对称性可知 $\int_L z^2 \, \mathrm{d}\ell = \int_L x^2 \, \mathrm{d}\ell = \int_L y^2 \, \mathrm{d}\ell$,

由此立刻可得

$$\int_L z^2 \, \mathrm{d}\ell = \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}\ell = \frac{1}{3} \int_L a^2 \, \mathrm{d}\ell = \frac{2\pi}{3} a^3.$$

§2. 第一类曲面积分

定义 1. 假设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为曲面, $f: S \to \mathbb{R}$ 为函数. 我们将 S 分割成 n 块 $S_1, \ldots, S_n$, 在每块 S_j 上取一点 X_j. 记 d 为所有 S_j 的直径中的最大者, 我们定义 (若极限存在)

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, \mathrm{d}\sigma = \lim_{d \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(X_j)|S_j|,$$

并称之为函数 f 在曲面 S 上的第一类曲面积分, S 为积分曲面, $f(x, y, z)\, \mathrm{d}\sigma$ 为被积分式, $\mathrm{d}\sigma$ 则为面积元素或面积微分或面积微元.

评注

- 上述极限存在意味着: $\exists a \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得当 $d < \delta$ 时, 我们均有
$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(X_j)|S_j| - a \right| < \varepsilon.$$
此时将 a 记作 $\iint\limits_S f(x, y, z)\, \mathrm{d}\sigma$.
- 若 S 为分片光滑正则曲面 (也即 S 可分成有限多片, 每片均有连续可导的参数表示且法向量非零), f 连续, 则 $\iint\limits_S f(x, y, z)\, \mathrm{d}\sigma$ 存在.

- $\iint\limits_S 1\,\mathrm{d}\sigma$ 为曲面 S 的面积.
- 若 $S \subset \mathbb{R}^2$ 为平面区域, 此时我们有

$$\iint\limits_S f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

该曲面积分给出了支撑在 S 上且介于曲面 $z=0$ 与 $z=f(x,y)$ 之间的立体的体积.

- 第一类曲面积分与二重积分完全类似.
- 同样可以考虑分布有质量的曲面的质心.

第一类曲面积分的计算

设分片光滑曲面 S 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

其中 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为 Jordan 可测集, 则面积微元为

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中

$$
\begin{aligned}
E &= (\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial u})^2,\\
G &= (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2,\\
F &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.
\end{aligned}
$$

于是我们有

$$
\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}\,\sigma = \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.
$$

特别地, 若曲面 S 由方程

$$z = z(x, y),\ (x, y) \in D$$

给出, 则我们有

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

当曲面 S 由方程 $x = x(y, z)$ 或方程 $y = y(x, z)$ 给出时, 我们也有类似的公式.

例 1. 计算 $\iint\limits_{S} z\,\mathrm{d}\sigma$, 其中曲面 S 为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 在 $z \leqslant \frac{1}{4}$ 的部分.

解: 由题设可知

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S} z\,\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}} z\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}} (x^2+y^2)\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1+\sqrt{2}}{60}\pi.
\end{aligned}$$

例 2. 计算 $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 S 为半球面

$$x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geqslant 0).$$

解: 方法 1. 半球面 S 的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\sin\theta\cos\varphi, \\ y=a\sin\theta\sin\varphi, \quad (0\leqslant\varphi<2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}). \\ z=a\cos\theta, \end{cases}$$

由此我们立刻可知

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=a^2\sin^2\theta, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=a^2,\ F=0. \end{aligned}$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi<2\pi\\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}} (a^2\sin^2\theta)a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= a^4\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi = 2\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= -2\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta) \\
&= -2\pi a^4\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4}{3}\pi a^4.
\end{aligned}
$$

方法 2. 由对称性立刻可得

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2\\ z\geqslant 0}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= 2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2\\ z\geqslant 0}} x^2\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2} x^2\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2} (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{a^2}{3}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2} \mathrm{d}\sigma = \frac{a^2}{3}\cdot 4\pi a^2 = \frac{4}{3}\pi a^4.$$

例 3. 考虑锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 其中 $a>0$, $z\geqslant 0$.

(1) 求锥面被圆柱面所截部分的面积.

(2) 求圆柱面被锥面所截部分的面积.

解: (1) 锥面的面积微元为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma &= \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

于是锥面被圆柱面所截部分的面积为

$$\iint\limits_{(x-a)^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\pi a^2.$$

(2) 圆柱面被锥面所截部分的参数方程为

$$x = a + a\cos\varphi,\ \ y = a\sin\varphi,\ \ z = z,$$

其中 $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, 而且还有

$$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = a\sqrt{2+2\cos\varphi}.$$

则圆柱面的面积微元为 $\mathrm{d}\sigma = a\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$.

于是圆柱面被锥面所截部分的面积为

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant2\pi \\ 0\leqslant z\leqslant a\sqrt{2+2\cos\varphi}}} a\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z &= a\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{a\sqrt{2+2\cos\varphi}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} a^2\sqrt{2+2\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2a^2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\mathrm{d}\varphi \\
&\overset{\varphi=2u}{=} 4a^2\int_0^{\pi}|\cos u|\,\mathrm{d}u \\
&= 4a^2\left(\sin u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin u\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) \\
&= 8a^2.
\end{aligned}$$

圆柱面被锥面所截的部分的面积也可以表示成第一类曲线积分:

$$\int_{(x-a)^2+y^2=a^2} z\,\mathrm{d}\ell = \int_{(x-a)^2+y^2=a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\ell$$

$$\overset{\substack{x=a+a\cos\varphi\\ y=a\sin\varphi}}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{(a+a\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,a\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = a^2\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2a^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = 4a^2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 8a^2.$$

作业题: 第 4.3 节第 186 页第 1 第 (1), (2) 题.

例 4. 计算 $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=2az\ (a>0)$.

解: 方法 1. 考虑球面 S 的参数方程

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi, \\ y = a\sin\theta\sin\varphi, \quad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi). \\ z = a + a\cos\theta, \end{cases}$$

由此可得 $EG-F^2=a^4\sin^2\theta$, 于是我们有

$$\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\sigma = 2a\iint\limits_S z\,\mathrm{d}\sigma$$

$$
\begin{aligned}
&= 2a\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}(a+a\cos\theta)a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= 2a^4\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}(\sin\theta+\cos\theta\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\pi a^4\int_0^{\pi}(\sin\theta+\cos\theta\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4\pi a^4\left(-\cos\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\Big|_0^{\pi} \\
&= 8\pi a^4.
\end{aligned}
$$

方法 2. 由对称性立刻可得

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{x^2+y^2+(z-a)^2=a^2} (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_{x^2+y^2+(z-a)^2=a^2} (x^2+y^2+(z-a)^2+2a(z-a)+a^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= 2a^2|S| + 2a \iint_{x^2+y^2+(z-a)^2=a^2} (z-a)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= 2a^2|S| = 2a^2\cdot 4\pi a^2$$

$$= 8\pi a^4.$$

例 5. 求 $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ay$ 所截部分.

解: 锥面的面积微元为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma &= \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

于是由对称性可知

$$
\begin{aligned}
& \iint\limits_{S} (xy + yz + zx)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{S} yz\,\mathrm{d}\sigma \\
= & \iint\limits_{x^2+(y-a)^2 \leqslant a^2} y\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\overset{\substack{x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi}}{=} & \sqrt{2}\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2a\sin\varphi} (\rho\sin\varphi)\rho \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\varphi \\
= & \sqrt{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{\rho^4}{4}\sin\varphi \right) \Bigg|_0^{2a\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi = 4\sqrt{2}a^4 \int_0^{\pi} \sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
= & 4\sqrt{2}a^4 \int_0^{\pi} (1-\cos^2\varphi)^2\,\mathrm{d}(-\cos\varphi) = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.
\end{aligned}
$$

例 6. 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上取点 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 为顶点的球面三角形 S. 若球面密度为 $\rho(x,y,z)=x^2+z^2$, 求上述球面三角形块的总质量.

解: 设 S 在 xz 面上的投影为 D, 则其方程为

$$y=\sqrt{1-x^2-z^2},\ (x,z)\in D.$$

于是 S 的面积微元为

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{\sqrt{1-x^2-z^2}}.$$

由此立刻可得所求总质量为

$$
\begin{aligned}
M &= \iint\limits_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S (x^2+z^2)\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \iint\limits_D \frac{x^2+z^2}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\
&\overset{\substack{x=\rho\cos\theta \\ z=\rho\sin\theta}}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}\int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\mathrm{d}(\rho^2) \\
&\overset{u=\sqrt{1-\rho^2}}{=\!=} \frac{\pi}{8}\int_1^0 \frac{1-u^2}{u}\,\mathrm{d}(1-u^2) = \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-u^2)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{4}\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

例 7. 计算积分 $\iint\limits_S x^2\,\mathrm{d}\sigma$, 其中曲面 S 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2\,(a>0)$ 介于平面 $z=0$ 以及 $z=h$ 之间的部分 $(h>0)$.

解: 由对称性可知 $\iint\limits_S x^2\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_S y^2\,\mathrm{d}\sigma$, 于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_S x^2\,\mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{2}\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_S a^2\,\mathrm{d}\sigma\\ &= \frac{a^2}{2}|S|=\frac{a^2}{2}\cdot 2\pi a\cdot h=\pi a^3 h.\end{aligned}$$

§3. 第二类曲线积分

定义 1. 设 $L \subset \mathbb{R}^3$ 为空间曲线, 它的起点为 A, 它的终点为 B, 而 $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) : L \to \mathbb{R}^3$ 为向量值函数. 对任意整数 $n \geqslant 1$, 我们将曲线 L 分割成 n 小段: $\overset{\frown}{P_0P_1}$, $\overset{\frown}{P_1P_2}$, $\ldots$, $\overset{\frown}{P_{n-1}P_n}$, 其中 $P_0 = A$, $P_n = B$. 我们记

$$P_j = (x_j, y_j, z_j) \ (0 \leqslant j \leqslant n), \ \vec{\ell} = (x, y, z),$$

并在每个小段 $\widehat{P_{j-1}P_j}$ 上取点 X_j. 令

$$d = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\overline{P_{j-1}P_j}|,$$

并称之为分割的步长. 定义 (若极限存在)

$$\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \lim_{d\to 0} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}(X_j) \cdot \overrightarrow{P_{j-1}P_j}$$

$$= \lim_{d\to 0} \sum_{j=1}^{n} \Big(F_1(X_j)(x_j - x_{j-1}) + F_2(X_j)(y_j - y_{j-1}) + F_3(X_j)(z_j - z_{j-1}) \Big),$$

并且称之为向量值函数 $\vec{F}$ 沿曲线 L 由点 A 到点 B 的第二类曲线积分.

评注

- 上述极限存在意味着: $\exists a \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得当 $d < \delta$ 时, 我们均有

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \vec{F}(X_j) \cdot \overrightarrow{P_{j-1}P_j} - a \right| < \varepsilon.$$

此时我们将 a 记作 $\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$.

- 若 L 为分段光滑曲线 (也即 L 可分成有限多段, 每段均有连续可导的参数表示), 而 $\vec{F}$ 为分段连续, 则 $\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ 存在.

- 由定义立刻可知

$$\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{L(A)}^{(B)} F_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \int_{L(A)}^{(B)} F_2(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \int_{L(A)}^{(B)} F_3(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

出于简化, 我们也将右边记作

$$\int_{L(A)}^{(B)} F_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\,\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

- 若 $L \subset \mathbb{R}^2$ 为平面曲线, 则

$$\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{L(A)}^{(B)} F_1(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{L(A)}^{(B)} F_2(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

第二类曲线积分的性质

第二类曲线积分的性质可分为两类:

一类只涉及到被积函数, 这样的性质与定积分相应的性质的类似; 另外一类涉及积分路径.

- 路径的有向性:

$$\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_{L(B)}^{(A)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

- 对路径的可加性: 设 $A_1, A_2, A_3 \in L$, 则

$$\int_{L(A_1)}^{(A_3)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{L(A_1)}^{(A_2)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{L(A_2)}^{(A_3)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

- 若 L 为封闭曲线, 规定其逆时针方向为正向, 此时将第二类曲线积分记作 $\oint_{L^+} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$. 考虑曲线 $L^+ :\ ABCDA$, $L_1^+ :\ ABCEA$, $L_2^+ : AECDA$, 则我们有

$$\oint_{L^+} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_{L_1^+} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \oint_{L_2^+} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

第二类曲线积分的计算

设分段光滑曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \\ z = z(t), \end{cases}$$

其中 A, B 所对应的参数分别为 α, β, 则

$$\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{L(A)}^{(B)} F_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \int_{L(A)}^{(B)} F_2(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \int_{L(A)}^{(B)} F_3(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} F_1\big(x(t), y(t), z(t)\big) x'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha}^{\beta} F_2\big(x(t), y(t), z(t)\big) y'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$+ \int_{\alpha}^{\beta} F_3\big(x(t), y(t), z(t)\big) z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

特别地, 如果 $L \subset \mathbb{R}^2$ 为平面曲线并且其方程为 $y = y(x)$, 而 A, B 的横坐标分别为 a, b, 则

$$\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_a^b F_1(x, y(x))\,\mathrm{d}x + \int_a^b F_2(x, y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x.$$

作业题: 第 4.4 节第 191 页第 1 题第 (1) 题 (改 R 为 a), 第 2 题第 (2), (3) 题, 第 192 页第 4 题.

例 1. 计算下列积分

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{L(A)}^{(B)} \left((x+2)^2 - y^2\right) \mathrm{d}x - 2(x+2)y \, \mathrm{d}y, \\
I_2 &= \int_{L(A)}^{(B)} 2(x+2)y \, \mathrm{d}x + \left((x+2)^2 - y^2\right) \mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

其中积分路径 L 是从 $A(-2,0)$ 到 $B(-2,1)$ 的有向直线段.

解: 路径 L 的方程为 $x=-2$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$. 故

$$
I_1 = \int_0^1 0 \, \mathrm{d}y = 0, \quad I_2 = \int_0^1 (-y^2) \, \mathrm{d}y = -\frac{1}{3}.
$$

例 2. 计算 $I=\int_{L(A)}^{(B)} y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$, 其中

(1) 路径 L 是圆弧 $x^2+y^2=a^2\ (y\geqslant 0,\ a>0)$,

由点 $A(a,0)$ 到点 $B(0,a)$.

(2) 路径 L 为直线段 $\overrightarrow{AB}$.

解: (1) 路径 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi, \\ y=a\sin\varphi, \end{cases} \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{L(A)}^{(B)} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin\varphi\,\mathrm{d}(a\cos\varphi) + (a\cos\varphi)\,\mathrm{d}(a\sin\varphi) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos(2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}a^2\sin(2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.
\end{aligned}
$$

(2) $\overrightarrow{AB}$ 的方程为 $x = a - y\ (0 \leqslant y \leqslant a)$, 则

$$
I = \int_0^a y\,\mathrm{d}(a-y) + (a-y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a (a-2y)\,\mathrm{d}y = 0.
$$

例 3. 计算 $\int_{L(A)}^{(B)} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$, 其中 L 为上半圆 $x^2 + y^2 = R^2$ $(y \geqslant 0)$, $A = (-R, 0)$, $B = (R, 0)$.

解: 方法 1. 曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

由于 A, B 分别对应于参数 $t = \pi, 0$, 于是

$$\int_{L(A)}^{(B)} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} R\cos t\,\mathrm{d}(R\sin t) - R\sin t\,\mathrm{d}(R\cos t)$$

$$= \int_{\pi}^{0} R^2\,\mathrm{d}t = -\pi R^2.$$

方法 2. 曲线 L 方程为

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},\ x \in [-R, R],$$

并且点 A 对应于 $x = -R$, 点 B 对应于 $x = R$, 由此我们立刻可得

$$\int_{L(A)}^{(B)} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} x\,\mathrm{d}(\sqrt{R^2 - x^2}) - \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-R}^{R} \left(\frac{-x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} - \sqrt{R^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x = -\int_{-R}^{R} \frac{R^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$= -R^2 \arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\Big|_{-R}^{R} = -\pi R^2.$$

例 4. 假设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 从 z 轴的正向看, 其正向为逆时针方向, 计算 $\int_{L^+} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$.

解: 圆周 L^+ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = R\Big(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cos\varphi - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\Big), \\ y = R\Big(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cos\varphi + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\Big), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \\ z = -\dfrac{2R}{\sqrt{6}}\cos\varphi, \end{cases}$$

由此我们立刻可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{L^+} z\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{2}{\sqrt{6}} R\cos\varphi\Big)\,\mathrm{d}\Big(R\Big(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\Big)\Big)\\
= \ &\int_0^{2\pi} \Big(\frac{2R^2}{\sqrt{6}}\cos\varphi\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi\Big)\,\mathrm{d}\varphi\\
= \ &R^2\Big(\frac{1}{6}\sin^2\varphi + \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big(\varphi + \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\Big)\Big)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^2.
\end{aligned}
$$

同样可得 $\int_{L^+} x\,\mathrm{d}y = \int_{L^+} y\,\mathrm{d}z = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi R^2$, 于是

$$
\int_{L^+} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z = \sqrt{3}\pi R^2.
$$

例 5. 设在原点放置正的点电荷 q, 求该点电荷所产生的电场在单位正电荷沿下述路径移动时所做的功:

(1) 沿空间直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{0}$ 由点 $A(2,0,1)$ 到点 $B(1,1,1)$;

(2) 在 xy 面上沿弧 $x^2+y^2=a^2$ 由点 $P(a,0,0)$ 到点 $Q(0,a,0)$.

解: 原点处的正电荷对点 $M(x,y,z)$ 处的单位正电荷的作用力为 $\vec{F}(x,y,z)=kq\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(1) 题设直线 L_1 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 1 + t, \quad t \in [-1, 0]. \\ z = 1, \end{cases}$$

于是所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{L_1(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{L_1(A)}^{B} \frac{kqx\,\mathrm{d}x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{kqy\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad + \frac{kqz\,\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = kq\int_{-1}^{0} \frac{-(1-t)+(1+t)}{(3+2t^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{kq}{\sqrt{3+2t^2}}\bigg|_{-1}^{0} = kq\Big(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big). \end{aligned}$$

(2) 设圆弧为 L_2, 则 $W = \int_{L_2(P)}^{(Q)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0.$

谢谢大家!