1 矩阵对角化

1. 对下面的对称矩阵，找到相应的正交矩阵Q，使得Q^TAQ是一个对角矩阵，并计算A^n

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

2. A是一个n阶对称矩阵，特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。求$\mathrm{Tr}(A^m)$($m$是任意正整数）。

3. 证明对称矩阵的非零特征值的代数重数之和等于矩阵的秩。

2 正定矩阵和二次型

1. 假设S_1和S_2都是对称矩阵，且对于任意向量x满足$x^TS_1x = x^TS_2x$。证明：$S_1 = S_2$。

2. 证明：正定矩阵都是可逆的。而且它的逆矩阵也是正定矩阵。

3. 写出下列二次型对应的对称矩阵S，计算特征值，并给出二次型是正定的时候λ的取值范围。

$$\begin{aligned} f =& 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ f =& 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 \\ f =& x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 \end{aligned} \tag{2}$$

4. S是一个正定矩阵，

   (a) 对于非零向量x，求$\frac{x^TSx}{x^Tx}$的最大值和最小值，并且写下在x为何值时取到最大和最小值（答案用S的特征值表示）。

3 奇异值分解

1. 求下列矩阵的奇异值分解。

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

2. A是$m \times n$矩阵。证明A^TA和AA^T的非零特征值相同，而且每个特征值的特征子空间维数也相同。

3. A是$m \times n$矩阵。矩阵V将A^TA正交对角化，矩阵U将AA^T正交对角化。证明：U^TAV是一个$m \times n$的矩阵，而且这个矩阵的11到rr分量是A的非零奇异值，其它分量都是零（r是矩阵A的秩）。

4. A是$m \times n$矩阵，并且有奇异值分解$A = U\Sigma V^T$。设$V = (v_1, \cdots, v_n)$且$U = (u_1, \cdots, u_m)$。证明：

   (a) $\{v_1, \cdots, v_r\}$是$C(A^T)$的正交归一基。

   (b) $\{v_{r+1}, \cdots, v_n\}$是$N(A)$的正交归一基。

   (c) $\{u_1, \cdots, u_r\}$是$C(A)$的正交归一基。

   (d) $\{u_{r+1}, \cdots, u_m$是$N(A^T)$的正交归一基。