微积分 A1 第 4 次习题课题目　　导数的计算与应用、高阶导数的计算

第一部分：内容回顾

反函数求导法则：设 f 在 (a,b) 上严格单调且连续，$x_0\in(a,b),\ f'(x_0)\neq 0,$ 则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导，且 $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}.$

参数方程确定的函数求导法则：$x=\varphi(t),y=\psi(t),t\in(a,b),$ 若 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 (a,b) 上可导，$\varphi(t)$ 在 (a,b) 上存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 且 $\varphi'(t)\neq 0,$ 则

$$y=\psi(t)=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

由复合函数的链式法则可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

隐函数求导法则：由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数。如果能够证明隐函数可导，则可以将方程 $F(x,y)=0$ 中 y 视为 $y(x),$ 即

$$F(x,y(x))=0,$$

则可利用复合函数的求导法则，方程两边对 x 求导，从而求解 $y'(x).$

高阶求导公式：

$\sin^{(n)}x=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2}),$

$\cos^{(n)}x=\cos(x+\dfrac{n\pi}{2}),$

$(\ln(1+x))^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n},$

$(f+g)^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x),$

$(cf)^{(n)}(x)=c\cdot f^{(n)}(x),c\in\mathbb{R},$

$(f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$　(Leibniz公式).

第二部分：习题

1. 证明:1) $2^y = xy + 4(x \le 0)$确定隐函数$y = y(x)$;

   2) $y(x)$在其定义域上可导,并求$y'(x)$及曲线$y = y(x)$在点$(-2,1)$处的切线方程;

   3) $y(x)$在其定义域上二阶可导,并求$y''(x)$.

2. 设曲线 $y = y(x)$ 二阶可导，已知其极坐标方程为$r = r(\theta)$.求 $y'(x), y''(x)$.

3. 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

为了近似求解 $f(x) = 0$, 我们用这条切线与 x 轴的交点 x_1 近似曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴的交点 c. 换言之，我们用方程 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$ 的解 $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ 作为方程 $f(x) = 0$ 的近似解。以 x_1 代替 x_0, 重复上面的过程，得到 $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. 如此迭代下去，得到数列

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

近似求解方程的这种迭代法是牛顿首先提的，所以叫做**牛顿法**。试用牛顿法计算算术平方根 $\sqrt{a}$.

（1）设 $a > 0$, 求牛顿法计算 $\sqrt{a}$ 的迭代公式。

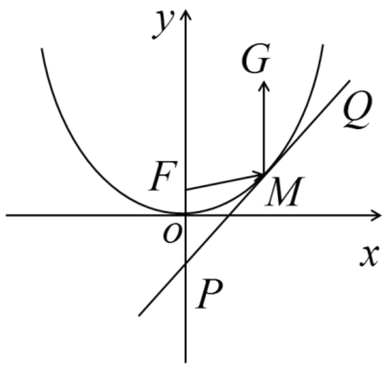
（2）任意取定 $x_0 > 0$, 试证迭代公式中数列 $\{x_n\}$ 收敛到 $\sqrt{a}$ 。

（3）证明：计算 $\sqrt{a}$ 的牛顿法是二次收敛的，即存在常数 $c > 0$, 使得

$$\left| x_{n+1} - \sqrt{a} \right| \le c \left| x_n - \sqrt{a} \right|^2, \quad \forall n \ge 1.$$

4. 如图，假设从光源 $F(0,1)$ 处发出的光线经过光滑曲线 $y = f(x)$ 反射后得到的光线与 y 轴平行，求证： $y = f(x)$ 满足

$$xy'^2 + 2y'(1 - y) - x = 0, y'(0) = 0.$$



5. 设 $y=f(g(x))$，求 $y'''(x)$.

6. 求下列函数的 n 阶导数

（1） $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0)$

（2） $f(x)=x^2\cos 2x$

（3） $f(x)=e^x\sin x$

（4） $f(x)=x^n\ln x$

7. 设 $P_{n,m}(x)=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^m)^n$，求 $P_{n,m}(1)$.

8. 设 $y=(x+\sqrt{x^2+1})^m$，求 $y^{(n)}(0)$.