第 12 次作业题

1. 设数列 $\{u_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)$ 收敛等价于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 定义 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)(u_{k+1}-u_k)$, 则

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=1}^{n}(k+1)u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n}(k+1)u_k \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} ku_k - \sum_{k=1}^{n}(k+1)u_k = (n+1)u_{n+1} - u_1 - S_n, \end{aligned}$$

从而由题设可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n + S_n) = -u_1$, 故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ 存在当且仅当极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在, 也即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)$ 收敛等价于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

2. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2n^3+n}$ 的敛散性

解: $\forall n \geqslant 1$, 定义 $a_n = \frac{(-1)^n n^3}{2n^3+n} = \frac{(-1)^n}{2+\frac{1}{n^2}}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = -\frac{1}{2}$, 从而数列 $\{a_n\}$ 不收敛, 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2n^3+n}$ 发散.

3. 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$, (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$, (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n!}$.

解: (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{4}}} = 0$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ 收敛, 于是由比较法则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛.

(2) 当 $n\to\infty$ 时, 我们有 $\frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 则由比较法则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛.

(3) $\forall n \geqslant 1$, 令 $u_n = \frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3(n+1)} = \frac{2}{3} < 1$, 于是由比率判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$ 收敛.

(4) **方法 1.** $\forall n \geqslant 1$, 定义 $u_n = \frac{\ln(n!)}{n!}$, 则我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)!}{\ln(n!)} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\Big(1 + \frac{\ln(n+1)}{\ln(n!)}\Big) = 0,$$

于是由比率判别法可知原级数收敛.

方法 2. $\forall n \geqslant 4$, 我们有 $\frac{\ln(n!)}{n!} \leqslant \frac{\ln n^n}{n!} = \frac{\ln n}{(n-1)!} \leqslant \frac{\ln n}{(n-1)(n-2)(n-3)}$, 而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{(n-1)(n-2)(n-3)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n-3} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} = 0,$$

由夹逼原理得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n!)}{n!}}{\frac{1}{n^2}} = 0$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由比较法则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n!}$ 收敛.

方法 3. $\forall n \geqslant 1$, 定义 $u_n = \frac{\ln(n!)}{n!}$, 则由 Stolz 定理可知

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \frac{\ln u_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \big(\ln u_n - \ln u_{n-1}\big) \\ = & \lim_{n\to\infty} \big(\ln(\ln(n!)) - \ln(n!) - \ln(\ln(n-1)!) + \ln(n-1)!\big) \\ = & \lim_{n\to\infty} \Big(\ln\Big(1 + \frac{\ln n}{\ln(n-1)!}\Big) - \ln n\Big) = -\infty, \end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$, 于是由根值判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n!}$ 收敛.

方法 4. $\forall n \geqslant 1$, 定义 $u_n = \frac{\ln(n!)}{n!}$. 由 Stolz 定理可知

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)!}{(n+1)\ln(n!)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln(n!) - n\ln(n-1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln n + \ln(n-1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1)\ln n + \ln(n-1) - n\ln(n-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n + \ln(n-1) - n\ln(1-\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{2\ln n} = 0, \end{aligned}$$

于是由比率判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n!}$ 收敛.

4. 设 $p \in \mathbb{R}$. 判断级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^p}$ 的敛散性.

解: 当 $p \leqslant 0$ 时, $\forall n \geqslant e^e$, 我们有 $\frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^p} \geqslant \frac{1}{n\log n}$. 又广义积分

$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\log x} \overset{t=\log x}{=} \int_{\log 3}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

发散, 故级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ 发散, 从而由比较法则知 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^p}$ 发散.

下面假设 $p > 0$. 此时广义积分

$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)(\log\log x)^p} \overset{t=\log x}{=} \int_{\log 3}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^p} \overset{u=\log t}{=} \int_{\log\log 3}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^p}$$

收敛当且仅当 $p > 1$, 因此级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^p}$ 收敛当且仅当 $p > 1$.

综上所述可知级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^p}$ 收敛当且仅当 $p > 1$.

5. 判断下列级数为绝对收敛、条件收敛还是发散:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\frac{n+1}{n(n-1)}}$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$,

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}+\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$.

解: (1) $\forall n\geqslant 2$, 定义 $u_n=\sqrt{\frac{n+1}{n(n-1)}}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 且 $\forall n\geqslant 2$, 我们有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\sqrt{\frac{n+2}{(n+1)n}\cdot\frac{n(n-1)}{n+1}}=\sqrt{\frac{n^2+n-2}{n^2+2n+1}}<1,$$

故数列 $\{u_n\}$ 单调趋于 0, 从而由 Leibniz 法则可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\frac{n+1}{n(n-1)}}$ 收敛. 注意到 $n\to\infty$ 时, $u_n\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$, 而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 于是由比较法则可知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 发散, 进而可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\frac{n+1}{n(n-1)}}$ 条件收敛.

(2) $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin\big(\pi(\sqrt{n^2+1}-n)\big)=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

而数列 $\{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\}$ 单调趋于 0, 则由 Leibniz 法则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 收敛. 又 $n\to\infty$ 时, $\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{2n}$, 而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ 发散, 于是由比较法则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 条件收敛.

(3) $\forall n\geqslant 1$, 记 S_n 为级数前 n 项的部分和, 则 $S_{2n}=\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}-1}+\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}+1}$. 注意到 $k\to\infty$ 时, $\frac{1}{\sqrt{k}-1}\sim\frac{1}{\sqrt{k}}$, $\frac{1}{\sqrt{k}+1}\sim\frac{1}{\sqrt{k}}$, 而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ 发散, 故由比较法则可知级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}-1}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}+1}$ 均发散, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=+\infty$, 从而原级数发散.

6. 假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.

证明: $\forall N\geqslant 1$, 由题设立刻可得

$$\sum_{n=1}^{N}(a_n+b_n)^2\leqslant\sum_{n=1}^{N}2(a_n^2+b_n^2)\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2,$$

$$\sum_{n=1}^{N}\Big|\frac{a_n}{n}\Big|\leqslant\Big(\sum_{n=1}^{N}a_n^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\Big)^{\frac12}\leqslant\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^{\frac12},$$

于是由单调有界定理知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{a_n}{n}|$ 均收敛, 故所证结论成立.

7. 讨论下列无穷乘积的收敛性:

(1) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$, (2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

解: (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\neq 1$, 因此无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

(2) $\forall n\geqslant 1$, 令 $u_n=\log\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, 则当 $n\to+\infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} u_n &= \log\Big(1-\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^2+1}}\Big)=\log\Big(1-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}(\sqrt{n^2+1}+n)}\Big) \\ &\sim -\frac{1}{\sqrt{n^2+1}(\sqrt{n^2+1}+n)}\sim -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛, 于是由比较法则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ 收敛, 进而可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 从而无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 收敛.