清华大学工程物理系

复变函数期末复习

2021年6月6日

主讲人：夏子睿

说明

- 我们根据考试的要求，将复变函数的知识点分为以下三个部分：
  - 概念（A）：与定义有关的知识，建议掌握。
  - 计算（B）：与计算有关的知识，必须掌握。
  - 证明（C）：与证明有关的知识，根据自己的实际情况来选择。
- 复习讲座的计划：详细地复习（A）和（B）类知识，快速复习（C）类知识；（C）类知识的细节同学们可以课下看PPT。
- 复习的过程中会以作业题和真题为例题。

目录

1.1 复数

- (A) 复数域：$\mathbb{C}=\{x+\mathrm{i}y|x,y\in\mathbb{R}\}$。
- (B) 复数的四则运算。
- (A) 复数的模长、辐角表示：$z=x+\mathrm{i}y=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。
  - 其中模长$r=\sqrt{x^2+y^2}$，辐角$\theta=\operatorname{Arg}z=\arg z+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$。
- (B) Euler 公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$。
- (B) D'Mowve 公式：$\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$。
- (A) 扩充复平面：$\bar{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$。

1.2 区域和曲线

- (A) 区域：连通的开集。
- (A) 单连通域、多连通域。
- (A) 曲线：$\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$，$t\mapsto x(t)+\mathrm{i}y(t)$。
- (A) 连续曲线：$x(t),y(t)\in\mathcal{C}[a,b]$。
- (A) 光滑曲线（$\mathcal{C}^1$正则曲线）及分段光滑曲线：$x(t),y(t)\in\mathcal{C}^1[a,b]$且$|z'(t)|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\neq 0$。
- (A) 简单曲线、闭曲线、Jordan 曲线。

1.3 复变函数

- (A) 复变函数：$f: G \to \mathbb{C}$，$G \subseteq \mathbb{C}$，$z \mapsto f(z)$。
- (A) 单值函数、多值函数、主值分支。
  - 例：$w = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$为多值函数，$k = 0$（第0支）为主值分支。
  - 例：$w = \sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i} \operatorname{Arg} z}{n}} (z \neq 0, k = 1,2, \dots, n-1)$为多值函数，$k = 0$（第0支）为主值分支。
- (A) 反函数：令$G^* = f(G)$，则$f^{-1}: G^* \to G$称为f的反函数。
- (A) 一一：若f, f^{-1}均为单值函数，则G, G^*中的元素一一对应。

1.3 复变函数

- （A）极限：设f在z_0的去心领域$B^*(z_0,\rho)$有定义，给定$A\in\mathbb{C}$。若对任意$\epsilon>0$，存在$\delta_\epsilon>0$使得$|z-z_0|<\delta\Rightarrow|f(z)-A|<\epsilon$，则$A$称为$f(z)$在$z\to z_0$处的极限，记为$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$。
- （B）定理：设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，则$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$当且仅当$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0$且$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$。
- （B）极限的四则运算。

1.3 复变函数

- (A) 连续：若$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$，则$f$在$z_0$处连续。
- (B) 设$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，则$f$在$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$处连续的充要条件为$u(x,y), v(x,y)$均在$(x_0, y_0)$处连续。

  - 例：$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$在$z = 0$处不连续。

  - 例：$f(z) = \begin{cases} \frac{\Re(z)\Im(z)}{|z|^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$在$z = 0$处不连续。

目录

2.1 可导性和解析性

- (A) 可导：设$z_0 \in D$（区域），若$\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = A \in \mathbb{C}$，其中$\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y$，则$f$在$z_0$处可导，$A$称作$f$在$z = z_0$处的导数，记作$f'(z_0) = A$或$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}|_{z=z_0} = A$。
- (A) 可微：设f在z_0的去心邻域内满足$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(|\Delta z|)$，其中$A \in \mathbb{C}$，则$f$在$z_0$处可微，$A\Delta z$称作$f$在$z = z_0$处的微分，记作$\mathrm{d}f(z_0)(\Delta z) = A\Delta z$或$\mathrm{d}f = A\mathrm{d}z$。
- (C) 可导等价于可微，且$\mathrm{d}f = f'(z_0)\mathrm{d}z$。

2.1 可导性与解析性

- 例：$f(z)=z^2$，$f'(z)=2z$。
- 例：$f(z)=\bar{z}$，注意到$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$，极限不存在，故连续函数$f$在$\mathbb{C}$上处处不可导。
- 例：$f(z)=\bar{z}^2$，注意到$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}^2}{\Delta z}+2\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\bar{z}$，仅当$z=0$时极限存在，故$f$仅在$z=0$处可导，且导数为0。
- 例：$f(z)=z\bar{z}$，注意到$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\bar{z}+\overline{\Delta z}+\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}z$，仅当$z=0$时极限存在，故$f$仅在$z=0$处可导，且导数为0。

2.1 可导性与解析性

- (A) 解析与解析点：若f在z_0的某个邻域处处可导，则称f在z_0处解析，z_0称为f的解析点。
  - 例：多项式在$\mathbb{C}$上解析。
  - 例：有理函数在所有有定义点解析。
- (A) 奇点：若f在z_0处不解析，则z_0称为f的奇点。
  - 例：奇点的分类：
  - 1. f在z_0处无定义。
  - 2. f在z_0处有定义但不连续。
  - 3. f在z_0处连续但不可导。
  - 4. f在z_0处可导但不解析。

2.2 可导的条件

- (B) 定理：设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，则$f$在$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$处可导的充要条件为$u(x,y),v(x,y)$均在$(x_0,y_0)$处可微且满足Cauchy-Riemann(CR) 方程：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$，且有$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}$。
- (B) 定理：设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，则$f$在区域$D$上解析的充要条件为$u(x,y),v(x,y)$在$D$上可微且满足CR方程。
- (C) 上述两个定理的证明。

定理的证明

- 必要性：设$f(z)$在$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$处可导，则$\Delta f = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v = A\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z$。记$A = \alpha + \mathrm{i}\beta$，$\rho(\Delta z) = \rho_1(\Delta z) + \mathrm{i}\rho_2(\Delta z)$，则
  - $\Delta u + \mathrm{i}\Delta v = (\alpha\Delta x - \beta\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y) + \mathrm{i}(\beta\Delta x + \alpha\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y)$
  - $\Delta u = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$；$\Delta v = \beta\Delta x + \alpha\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$
- 故$u(x, y), v(x, y)$在(x_0, y_0)处均可微，且满足$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \alpha \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = \beta \end{cases}$，并

  且有$f'(z) = \alpha + \mathrm{i}\beta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}$。

定理的证明

- 充分性：设$u(x,y),v(x,y)$在(x_0,y_0)处均可微，则
  - $\Delta u=u_x\Delta x+u_y\Delta y+o_1(|\Delta z|)$；$\Delta v=v_x\Delta x+v_y\Delta y+o_2(|\Delta z|)$
- 因$u(x,y),v(x,y)$满足CR方程，故
  - $u_x=v_y=\alpha$；$v_x=-u_y=\beta$
- 所以
  - $\Delta f=(\alpha+\mathrm{i}\beta)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+o_1(|\Delta z|)+\mathrm{i}o_2(|\Delta z|)=A\Delta z+o(|\Delta z|)$
- 即f在$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$处可导。
- 在区域D上重复上述操作，即可得到关于解析性的证明。

2.2 可导的条件

- (B) 推论：设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，若$u(x,y),v(x,y)\in\mathcal{C}^1(D)$且在$D$上满足CR方程，则$f$在$D$上解析。
  - 例：$f'(z)=0\Leftrightarrow f(z)=\mathrm{const}$。
  - 例：$f(z)=\exp z=\exp x\,(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$在$\mathbb{C}$上解析。
- (A) 整函数：在$\mathbb{C}$上解析的函数。
- (B) 形式导数。
  - 视$z,\bar{z}$为独立的自变量，则$x=\frac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$。
  - 设$w=f(z)=\tilde{f}(z,\bar{z})$，则$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\bar{z}}=0\Leftrightarrow$CR，$f'(z)=\frac{\partial\tilde{f}}{\partial z}$。

2.3 初等函数

- (A) 指数函数：$\exp z = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$。
- (B) 指数函数的性质：
  - $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2$。
  - $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp z}$。
  - $\exp(z + 2k\pi\mathrm{i}) = \exp z$。
  - $\forall z \in \mathbb{C}$，$\exp z \neq 0$。
  - $\lim\limits_{z\to\infty} \exp z$不存在。

2.3 初等函数

- (A) 对数函数：$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)$。其主值分支为$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$。
- (B) 对数函数的性质：
  - $\operatorname{Ln} z_1 z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$。
  - $\operatorname{Ln} z^n \supseteq n \operatorname{Ln} z$，因$\operatorname{Arg} z \supseteq n \operatorname{Arg} z$。
  - $\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z$，因$\sqrt[n]{z}$也是多值函数。
  - $\ln z$不具有上述任何性质。
  - $\ln z$在$\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$上解析。对$\operatorname{Ln} z$的任何单值分支$w_k$，成立$\frac{\mathrm{d}w_k}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z}$。

2.3 初等函数

- (A) 幂函数：$z^b = \exp(b\,\mathrm{Ln}\,z)$，$z \neq 0$。
- (B) 幂函数的性质：
  - 当$b \in \mathbb{Z}$时，z^b为单值函数；当$b \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$时，设$b = \frac{m}{n}$（其中$m, n$不可约），则$z^b$为$n$值多值函数；当$b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$时，$z^b$为无穷值多值函数。
  - z^b的任一个单值分支在$\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$上解析。
  - 若在下列等式中，等号的两侧选定的单值分支相同，则：
    - $z^{a+b} = z^a z^b$。
    - $(z^a)' = a z^{a-1}$，其中$a \neq 0$。
    - $z^{-a} = \frac{1}{z^a}$，其中$a \neq 0$。

2.3 初等函数

- (A) 三角函数：$\sin z = \dfrac{\exp iz - \exp(-iz)}{2i}$， $\cos z = \dfrac{\exp iz + \exp(-iz)}{2}$，
  $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$。
- (B) 三角函数的性质：
  - $\sin z, \cos z$均为整函数，且$(\sin z)' = \cos z$，$(\cos z)' = -\sin z$。
  - $\sin(-z) = -\sin z$，$\cos(-z) = \cos z$。
  - $\sin z, \cos z$均具有周期$T = 2k\pi$，且在$\mathbb{C}$上无界。
  - 和角公式。
  - Euler 公式。

2.3 初等函数

- (A) 双曲三角函数：$\sinh z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2}$，$\cosh z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}$，$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$。
- (B) 双曲三角函数的性质：
  - $\sinh z, \cosh z$均为整函数，且$(\sinh z)' = \cosh z$，$(\cosh z)' = \sinh z$。
  - $\sinh(-z) = -\sinh z$，$\cosh(-z) = \cosh z$。
  - $\sin z, \cos z$均具有周期$T = 2k\pi\mathrm{i}$，且在$\mathbb{C}$上无界。
  - 和角公式。
  - Yao 公式。

目录

- 复数和复变函数
- 解析函数
- 复变函数的积分
- 级数
- 留数
- 重要的公式汇总

3.1 积分的定义

- （A）积分：设$C \subseteq D$是一条光滑有向曲线，f在D上有定义，用分离的点$A = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = B$将$C$划分成$n$小段曲线。在每小段曲线$\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$上选择一点$\zeta_k$，考虑$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$，其中$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$。令$\delta = \max\limits_{1 \le k \le n} |\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}|$。若当$n \to +\infty$且$\delta \to 0$时，$I_n$存在极限$I \in \mathbb{C}$，则称$f$沿着路径$C$可积，记作$f \in \mathcal{R}(C)$；$I$称为$f$沿着路径$C$的积分，记作$I = \int_C f(z)\mathrm{d}z$。特别地，如果$C$为闭合曲线，则记作$I = \oint_C f(z)\mathrm{d}z$。

3.1 积分的定义

- （B）积分存在性的判定：
  - $f \in \mathcal{C}(C)$，则$f \in \mathcal{R}(C)$。
  - 分离实部和虚部后，I可以通过实积分表示出来。
  - 设曲线具有$\mathcal{C}^1$正则表示，即$z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$，其中$x(t), y(t) \in \mathcal{C}^1[a, b]$，则$I = \int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$。
- （B）区域可加性：设$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_m$，其中$C_1, C_2, \ldots, C_m$均为分段光滑曲线，则$I = \int_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{l=1}^{m} \int_{C_l} f(z)\mathrm{d}z$。

3.1 积分的定义

- (B) 积分的性质：
  - 线性性：$\int_C[\lambda f(z)+\mu g(z)]\mathrm{dz}=\lambda\int_C f(z)\mathrm{dz}+\mu\int_C g(z)\mathrm{dz}$。
  - 有向性：设$-C$为C的反向曲线，则$\int_{-C} f(z)\mathrm{dz}=-\int_C f(z)\mathrm{dz}$。
  - 积分不等式：设$\forall z\in C$，$|f(z)|\le M<+\infty$，L为曲线C的弧长，则
    $\left|\int_C f(z)\mathrm{dz}\right|\le\int_C|f(z)||\mathrm{dz}|\le\int_C M\mathrm{ds}=ML$。

3.1 积分的定义

- 例：设$C_r: |z - z_0| = r > 0$，计算$\oint_{C_r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$，其中$n \in \mathbb{Z}$。
- 解：令$z = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其中$\theta \in [0,2\pi)$，则$\mathrm{d}z = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$，故
  - $I_n = \oint_{C_r} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1}} = \frac{\mathrm{i}}{r^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\pi\mathrm{i}, & n = 0 \end{cases}$。

3.2 Cauchy-Goursat 定理

- （B） Cauchy-Goursat 定理：设f在单连通域D上解析，$C \subseteq D$是任意闭曲线，则$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$。
- （C） （弱化）证明：设$f'(z)$连续，记$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，则$u_x, u_y, v_x, v_y$均连续。设$C$包围的区域为$B$，由Green 公式可得
  - $I = \oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\oint_C (v\mathrm{d}x - u\mathrm{d}y)$
  - $\xrightarrow{\text{Green}} \int_B (-v_x - u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_B (u_x - v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xrightarrow{\text{CR}} 0$。
- （B） 推论：设f在单连通域D上解析，在闭区域$\overline{D} = D \cup \partial D$上连续，则$\oint_{\partial D} f(z)\mathrm{d}z = 0$。

3.3 复合闭路定理

- （B）闭路变形原理：沿着路径的积分不随着路径的连续变形（即从一个路径变成另一个路径的时候不碰及奇点）而改变。
- （A）复合闭路：$\gamma = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$为一条由$n+1$条闭合回路组成的复合闭路。
- （B）复合闭路定理：设f在由上述复合闭路组成的$(n+1)$连通域上解析，在$\overline{D} = D \cup \gamma$上连续，则$\oint_\gamma f(z)\mathrm{dz} = 0$，或$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{dz} = \oint_{C_1+\cdots+c_m} f(z)\mathrm{dz}$。

3.3 复合闭路定理

- 例：设$a,b\in\mathbb{C}$且$a\neq b$，$\gamma\subseteq\mathbb{C}$是一条不经过$a,b$的Jordan 闭曲线，求$I=\oint_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)}$。
- 解：易得$I=\frac{1}{b-a}\oint_{C_a+C_b}\left(\frac{1}{z-b}-\frac{1}{z-a}\right)\mathrm{d}z$。设$\gamma$包围的区域为$D$。
  - $a,b\in D$，则$I=\frac{1}{b-a}(2\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{i})=0$。
  - $a,b\notin D$，则$I=0+0=0$。
  - $a\in D,b\notin D$，则$I=\frac{1}{b-a}(0-2\pi\mathrm{i})=-\frac{2\pi\mathrm{i}}{b-a}$。
  - $a\notin D,b\in D$，则$I=\frac{1}{b-a}(2\pi\mathrm{i}-0)=\frac{2\pi\mathrm{i}}{b-a}$。

3.4 原函数与不定积分

- (C) 定理：设f在单连通域D上解析，由Cauchy-Goursat 定理可知积分$\int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$与路径的选取无关。故定义$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}z$，则$F$在$D$上解析，且$\forall z\in D$，都有$F'(z)=f(z)$。
- (C) 定理的证明。
- (A) 原函数：设f在区域D上有定义，若存在函数G使得$\forall x\in D$，$G'(z)=f(z)$，则G称为f的原函数。
- (A) 不定积分：f,G如上所述，定义f的不定积分为$\int f(z)dz=G(z)+C$，其中$C\in\mathbb{C}$。

定理的证明

- 证明：注意到
  - $F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$
  - $=\int_{z}^{z+\Delta z}[f(z)+f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta=f(z)\Delta z+\frac{\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta}{\Delta z}\Delta z$
  - $|\rho(z)|=\frac{\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta\right|}{|\Delta z|}\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)||\mathrm{d}\zeta|$
  - $\xrightarrow{\Delta z\to 0,|f(\zeta)-f(z)|<\epsilon}\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}\epsilon\mathrm{d}s=\epsilon=o(1)$
  - 故$F(z+\Delta z)-F(z)=f(z)\Delta z+o(\Delta z)$，$\forall z\in D$。

3.4 原函数与不定积分

- （B） Newton-Leibniz 公式：设f在单连通域D上解析，G为f在D上的原函数，则$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0)$。
- （B） 分部积分公式：设f, g在单连通域D上解析，则$\int_{z_0}^{z_1} f'(z)g(z)\mathrm{d}z = f(z)g(z)\big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)\mathrm{d}z$。

3.4 原函数与不定积分

- 例：
  - $\int \frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}} = \begin{cases} -\frac{1}{n}z^{-n} + C, & n \neq 0,\ D = \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ \ln z + C, & n = 0,\ D = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \end{cases}$。
  - $\int_C \ln z\,\mathrm{d}z = \int_0^{\mathrm{i}} \ln z\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\ln\mathrm{i}$，其中$C$为一条从1到i的连续曲线。

3.4 原函数与不定积分

- （B）设f在区域D上解析，则以下三条陈述等价：
  - f沿着D中的任何闭合回路的积分为0。
  - f沿着D中的任一路径积分，积分结果只与路径的起点与终点有关。
  - f在D上有原函数。
- 亦即，如果以上三条中任意一条成立，则N-L公式成立。

3.5 Cauchy 积分公式

- (B) Cauchy 积分公式：设f在单连通域D上解析，在闭区域$\overline{D} = D \cup \partial D$上连续，则$\forall z_0 \in D$，有$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z - z_0}$。
- (C) Cauchy 积分公式的证明。
- (B) 线平均公式：$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta$。
- (B) 面平均公式：$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z - z_0| < r} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

定理的证明

- 证明：根据闭路变形原理，设$C_r=\{z||z-z_0|<r\}$，则
  - $I=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(z_0)+[f(z)-f(z_0)]}{z-z_0}\mathrm{d}z=f(z_0)+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z$
- 记$I'=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z$，则
  - $|I'|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right|\leq\frac{1}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}|\mathrm{d}z|$
  - $\xrightarrow{r\ll 1,|f(z)-f(z_0)|<\epsilon}\leq\frac{1}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{\epsilon\mathrm{d}s}{r}=\epsilon\Rightarrow I'=0$
- 所以$f(z_0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\partial D}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}$。

3.6 解析函数的高阶导数

- (B) 定理：设f在D上解析，则f在D上的任意阶导数存在，且 $\forall z_0 \in D$，$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$，其中$\gamma \subseteq D$且$\gamma$包围的区域为$D$的子区域。
- (C) 定理的证明。

定理的证明

- 证明：对n使用数学归纳法。
  - 当$n=0$时，据Cauchy 积分公式，定理成立。
  - 假设定理在$n\in\mathbb{N}$时成立，即有$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$。下面证明定理在$n+1$时也成立。注意到
  - $\frac{f^{(n)}(z_0+\Delta z)-f^{(n)}(z_0)}{\Delta z}=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}\Delta z}\oint_{C_r}\left(\frac{1}{[z-(z_0+\Delta z)]^{n+1}}-\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\right)f(z)\mathrm{d}z$
  - $=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}\Delta z}\oint_{C_r}\frac{(z-z_0)^{n+1}-(z-z_0-\Delta z)^{n+1}}{(z-z_0-\Delta z)^{n+1}(z-z_0)^{n+1}}f(z)\mathrm{d}z=\frac{(n+1)!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+2}}$
  - $+\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}\Delta z}\oint_{C_r}\frac{(z-z_0)^{n+2}-(z-z_0)(z-z_0-\Delta z)^{n+1}-(n+1)(z-z_0-\Delta z)^{n+1}\Delta z}{(z-z_0-\Delta z)^{n+1}(z-z_0)^{n+2}}f(z)\mathrm{d}z$

定理的证明

- 证明（续）：
  - $\rho(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}\Delta z}\oint_{C_r}\frac{(z-z_0)^{n+2}-(z-z_0-\Delta z)^{n+2}-(n+2)(z-z_0-\Delta z)^{n+1}\Delta z}{(z-z_0-\Delta z)^{n+1}(z-z_0)^{n+2}}f(z)\mathrm{d}z$
  - $=$
    $\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}\Delta z}\oint_{C_r}\frac{\sum_{k=1}^{n+2}(-1)^{k-1}\binom{n+2}{k}(z-z_0)^{n+2-k}\Delta z^k+(n+2)\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^{l-1}\binom{n+1}{l}(z-z_0)^{n+1-l}\Delta z^{l+1}}{(z-z_0-\Delta z)^{n+1}(z-z_0)^{n+2}}f(z)\mathrm{d}z$
  - $=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{\sum_{k=2}^{n+2}(-1)^{k-1}(1-k)\binom{n+2}{k}(z-z_0)^{n+2-k}\Delta z^{k-1}}{(z-z_0-\Delta z)^{n+1}(z-z_0)^{n+2}}f(z)\mathrm{d}z$
  - $|\rho(z)|\le\frac{n!}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{\left|\sum_{k=2}^{n+2}(-1)^{k-1}(1-k)\binom{n+2}{k}(z-z_0)^{n+2-k}\Delta z^{k-1}\right|}{|z-z_0-\Delta z|^{n+1}|z-z_0|^{n+2}}|f(z)||\mathrm{d}z|$

定理的证明

- 证明（续）：
  - $|\rho(z)| \le \frac{n!}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{\sum_{k=2}^{n+2}(k-1)\binom{n+2}{k}|z-z_0|^{n+2-k}|\Delta z^{k-1}|}{|z-z_0-\Delta z|^{n+1}|z-z_0|^{n+2}}|f(z)||\mathrm{d}z|$
  - $\xrightarrow{|\Delta z|<\min\left\{\frac{r}{2},1\right\},|f(z)|\le M} \le \frac{n!|\Delta z|}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{2^{n+1}\sum_{k=2}^{n+2}(k-1)\binom{n+2}{k}r^{n+2-k}}{r^{n+1}r^{n+2}}M\mathrm{d}s \le A|\Delta z| \xrightarrow{\Delta z\to 0} 0$
- 所以有
  - $f^{(n+1)}(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{f^{(n)}(z_0+\Delta z)-f^{(n)}(z_0)}{\Delta z} = \frac{(n+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+2}}$
- 据数学归纳法可知定理成立。

3.6 解析函数的高阶导数

- （C）Morera 定理：设f在D上连续，且对任意Jordan 闭曲线C满足$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$，则$f$在$D$上解析。
- （C）Cauchy 不等式：设f在$D: |z - z_0| < R(R > 0)$上解析，且$\forall z \in D$，$|f(z)| \leq M < +\infty$，则$\forall n \geq 1$，有$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!M}{R^n}$。
- （C）Liouville 定理：设f为一有界整函数，则f为常函数。
- （C）代数基本定理：复系数多项式$p_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$在$\mathbb{C}$中恰有$n$个零点（包括重数），其中$n \geq 1$，$a_n \neq 0$。

定理的证明

- 证明（Morera）：因积分与路径无关，故定义 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ ，仿照该定理的证明可得F在D上解析，且$F'(z)=f(z)$，所以f在D上解析。
- 证明（Cauchy）：根据解析函数的高阶导数公式，
  - $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$，其中$C_r$: $|z-z_0|=r, r\in(0,R)$。
  - $\left|f^{(n)}(z_0)\right|\le\frac{n!}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{|f(z)||\mathrm{d}z|}{|z-z_0|^{n+1}}\le\frac{n!}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{M\mathrm{d}s}{r^{n+1}}=\frac{n!M}{r^n}$。
  - $\left|f^{(n)}(z_0)\right|=\lim_{r\to R}\left|f^{(n)}(z_0)\right|\le\lim_{r\to R}\frac{n!M}{r^n}=\frac{n!M}{R^n}$。

定理的证明

- 证明（Liouville）：$\forall z_0 \in \mathbb{C}$，设$C_r\colon |z - z_0| = R \in \mathbb{R}^+$，则
  - $|f'(z_0)| \le \frac{M}{R} \xrightarrow{R\to+\infty} 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0 \Rightarrow f(z_0) = \text{const}$。
- 证明（代数基本定理）：原命题等价于证明$p_n(z)$在$\mathbb{C}$中至少有一个零点。
  - 假设$\forall z \in \mathbb{C}$，$p_n(z) \ne 0$，令$f(z) = \frac{1}{p_n(z)}$，则f为整函数。
  - 注意到$|f(z)| = \left|\frac{1}{p_n(z)}\right| = \frac{1}{|p_n(z)|} = \frac{1}{|a_n z^n + \cdots + a_0|} \xrightarrow{z\to+\infty} 0$，故存在$R \in \mathbb{R}^+$使得$|z| > R \Rightarrow |f(z)| \le 1$；此外，$f$在有界闭集$\{z \mid |z| \le R\}$上有界；所以$f$为有界整函数，即$p_n(z)$为常函数，矛盾！

3.7 解析函数与调和函数

- (A) 调和函数：记$\Delta = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}$，设$\phi: D \to \mathbb{R} \in C^2(D)$，若$\forall (x,y) \in D$，$\Delta\phi(x,y) = 0$，则称$\phi$为调和函数。
- (B) 定理：设$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$在$D$上解析，则$u, v$在$D$上调和。可通过CR方程直接证明本定理。
- (A) 共轭调和函数：上述v称为u在D上的共轭调和函数。
- (B) 定理：设u在单连通域D上调和，则u在D上的共轭调和函数存在。
- (B) 上述定理的证明。

定理的证明

- 证明：设$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$在$D$上解析，则$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = u_x - \mathrm{i}u_y = U(z)$在$D$上也解析。所以$f(z) = \int U(z)\mathrm{dz}$。
- 因D为单连通域，U在D上解析，所以U在D上存在原函数。作不定积分、分离实部虚部后即可得到v。
- 注：D必须是单连通域。
  - 如$u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$，$D = \mathbb{C}\backslash\{0\}$，易验证$\Delta u = 0$。仿照上述过程可得$U(z) = \frac{1}{z}$，而$\frac{1}{z}$在$D$上无原函数，所以$u$在$D$上不存在共轭调和函数。
  - 若修改区域为$D' = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$，则$v(x,y) = \arg z + C \in C^\infty(D')$。

3.7 解析函数与调和函数

- (B) 寻找共轭调和函数的方法。以$u(x,y)=x^3-3xy^2$为例。
  - 不定积分法：设$U(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=3x^2-3y^2+\mathrm{i}6xy=3(x+\mathrm{i}y)^2=3z^2$，所以$f(z)=\int U(z)\mathrm{d}z=z^3+C=(x+\mathrm{i}y)^3+C$，$C\in\mathbb{C}$，亦即$v(x,y)=-y^3+3x^2y+C_1$，$C_1\in\mathbb{R}$。
  - 偏积分法：根据CR方程，$v_x=-u_y=6xy$，$v_y=u_x=3x^2-3y^2$，所以$v(x,y)=\int v_x\mathrm{d}x+g(y)=3x^2y+g(y)$；再对$y$求偏导可得$v_y=3x^2+g'(y)=3x^2-3y^2$，所以$g(y)=-y^3+C_1$，$C_1\in\mathbb{R}$；综上所述，$v(x,y)=3x^2y-y^3+C_1$。

3.7 解析函数与调和函数

- 例：设$f(z)=u\left(x^2-y^2\right)+\mathrm{i}v(x,y)$在$\mathbb{C}$上解析，求$f(z)$。
- 解:
  - $\Delta\left(u\left(x^2-y^2\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xu'\left(x^2-y^2\right)\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(2yu'\left(x^2-y^2\right)\right)$
  - $=4\left(x^2+y^2\right)u''\left(x^2-y^2\right)=0\Rightarrow u''\left(x^2-y^2\right)=0$。
  - $u\left(x^2-y^2\right)=C_1\left(x^2-y^2\right)+C_2$，$C_1,C_2\in\mathbb{R}$。
  - $f'(z)=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\left(x^2-y^2\right)\right)-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(u\left(x^2-y^2\right)\right)=2C_1(x+\mathrm{i}y)=2C_1z$。
  - $f(z)=C_1z^2+C\Rightarrow v=2C_1xy+C_3$，$C_3\in\mathbb{R}$。

目录

4.1 复数项级数

- （A）复数项数列：$\{z_n|z_n = x_n + \mathrm{i}y_n\}_{n=0}^{+\infty} \subseteq \mathbb{C}$，其中$\{x_n\},\{y_n\} \subseteq \mathbb{R}$。
- （A）复数列极限：给定$A \in \mathbb{C}$，若$\forall \epsilon > 0$，$\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$使得$n > N \Rightarrow |z_n - A| < \epsilon$，则$z_n$在$n \to +\infty$时有极限$A$，记作$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = A$或$z_n \to A, n \to +\infty$。
- （B）复数列极限的存在性：设$A = \alpha + \mathrm{i}\beta$，则
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = A = \alpha + \mathrm{i}\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \beta \end{cases}$。

4.1 复数项级数

- （A）级数：$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$称为级数，记$S_n=\sum_{k=0}^{n} z_k$称为级数的部分和，$\{S_n\}$称为部分和数列。
- （A）级数的敛散性：
  - 若$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S\in\mathbb{C}$，则级数$I$收敛（C.V.），否则级数$I$发散（D.V.）。
  - 若级数$\sum_{n=0}^{+\infty}|z_n|$收敛，则级数$I$绝对收敛（A.C.）。
  - 若级数I收敛但不绝对收敛，则级数I条件收敛（C.C.）。
- （B）定理：
  - $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$收敛$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n, \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$收敛。
  - $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n, \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ 绝对收敛，且 $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty}|z_n|$。

4.1 复数项级数

- (B) 定理（Cauchy）：
  - 一般形式：若$\exists N_0 \in \mathbb{N}$使得$\forall n > N_0$，$\sqrt[n]{|z_n|} \le q < 1$，则$I$绝对收敛；若$\sqrt[n]{|z_n|} \ge q \ge 1$对无数个$n$成立，则$I$发散。
  - 极限形式：$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q \begin{cases} < 1 \Rightarrow & \text{A. C.} \\ > 1 \Rightarrow & \text{D. V.（与一般形式不等价）。} \\ = 1 \Rightarrow & \text{Indef.} \end{cases}$
  - 极限形式的Cauchy 判别法可以放宽为$\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q$（与一般形式等价）。

4.1 复数项级数

- (B) 定理(D'Alembert):
  - 一般形式:若$\exists N_0 \in \mathbb{N}$使得$\forall n > N_0$,$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \le q < 1$,则$I$绝对收敛;若$\exists N_0 \in \mathbb{N}$使得$\forall n > N_0$,$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \ge q \ge 1$,则$I$发散。
  - 极限形式:$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = q\begin{cases} < 1 \Rightarrow & \mathrm{A.C.} \\ > 1 \Rightarrow & \mathrm{D.V.} \\ = 1 \Rightarrow & \mathrm{Indef.}\end{cases}$。

4.1 复数项级数

- （B）定理（Dirichlet）：设$\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$，$\{b_n\} \subseteq \mathbb{C}$，若$\{a_n\}$单调趋近于0，$\{b_n\}$的部分和数列有界，则级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$收敛。
- （B）定理（Abel）：设$\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$，$\{b_n\} \subseteq \mathbb{C}$，若$\{a_n\}$单调有界，级数$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$收敛，则级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$收敛。
- 例:
  - $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{in}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{\cos n}{n} + \mathrm{i}\frac{\sin n}{n}\right]$。令$a_n = \frac{1}{n}$，$b_n = \cos n$，据Dirichlet 判定可知级数收敛。显然级数不绝对收敛，故级数条件收敛。
  - $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+\mathrm{i}b)^n}{n!}$，$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(a+\mathrm{i}b)^n}{n!}\right| \leq \mathrm{e}^{|a+\mathrm{i}b|}$，级数绝对收敛。

4.2 幂级数

- (A) 函数项级数：设$\{f_n(z)|n\in\mathbb{N},z\in D\}$为函数项数列，称则$\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(z)$为函数项级数，称$S_n=\sum_{k=0}^{n}f_k(z)$为部分和。
- (A) 函数项级数的敛散性：
  - 若$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(z_0)=S(z_0)$，$z_0\in D$，则称级数$\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(z)$在$z_0$处收敛。
  - 若$\forall z\in D$，级数$\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(z)$在$z$处收敛，则称级数$\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(z)$在$D$上收敛。
  - 和函数：$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(z)$，其中$z\in D$。
- (A) 幂函数：形如$I=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$的级数，其中$a\in\mathbb{C}$。

4.2 幂级数

- (B) 定理（Abel）：设级数$I=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$。
  - 设I在$z_0(z_0\neq 0)$处收敛，则$|z|<|z_0|\Rightarrow I$在z处绝对收敛。
  - 设I在z_0处发散，则$|z|>|z_0|\Rightarrow I$在z处发散。
- (C) 定理的证明。
- (A) 收敛半径：$R=\sup\{|z|\,|\,I \text{ is C.V. at } z\}$。
  - 等价于$R=\sup\{|z|\,|\,I \text{ is A.C. at } z\}$，等价于$R=\inf\{|z|\,|\,I \text{ is D.V. at } z\}$。
- (A) 收敛圆周：$C_R=\{z\,|\,|z|=R\}$（$C_R=\{z\,|\,|z-a|=R\}$）。
- (A) 收敛圆盘：$D_R=\{z\,|\,|z|<R\}$（$D_R=\{z\,|\,|z-a|<R\}$）。

定理的证明

- 证明：仅证明第一条，第二条的证明类似。
- 因$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$收敛，故
  - $c_n z_0^n \to 0 \Rightarrow |c_n z_0^n| \le M < +\infty$，$\forall n \in \mathbb{N}$。
- 所以
  - $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$，其中$\left|\frac{z}{z_0}\right| = q < 1$。
  - $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \le \sum_{n=0}^{+\infty} M q^n$，绝对收敛。

4.2 幂级数

- 例：
  - $R=+\infty$，如$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n^n}$，$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$。
  - $R=0$，如$\sum_{n=0}^{+\infty}n^n z^n$。
  - $R=1$，如$\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$，$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$。

4.2 幂级数

- 例（收敛圆周上级数的敛散性）：设$R=1$，C_1表示收敛圆周，
  - $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^k}(k>1)$，在$C_1$上处处绝对收敛。
  - $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}z^n$，在$C_1$上处处条件收敛。
  - $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$，在$z=1$处发散，在$C_1\backslash\{1\}$上条件收敛。
  - $\sum_{n=1}^{+\infty}z^n$，在C_1上处处发散。

4.2 幂级数

- (B) 定理（收敛半径的计算）：
  - 根式法（Cauchy）：若$\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda$，则$R=\begin{cases}+\infty, & \lambda=0\\ \frac{1}{\lambda}, & \lambda\in(0,+\infty)\\ 0, & \lambda=+\infty\end{cases}$。
  - 比值法（D'Alembert）：若$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda$，则$R=\begin{cases}+\infty, & \lambda=0\\ \frac{1}{\lambda}, & \lambda\in(0,+\infty)\\ 0, & \lambda=+\infty\end{cases}$。
- (C) 上述定理的证明。

定理的证明

- 证明（Cauchy）：Cauchy 法只证明极限存在这一种简单的情况。设 $I=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$，则
  - 设$|z|<\frac{1}{\lambda}$，此时$\frac{1}{|z|}>\lambda$。因$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda$，故存在$N\in\mathbb{N}$使得$n>N\Rightarrow\sqrt[n]{|c_n|}<\frac{\lambda|z|+1}{2|z|}$，即$\sqrt[n]{|c_n|}|z|<q=\frac{\lambda|z|+1}{2}<1$。
  - 当$n>N$时，有$\sqrt[n]{|c_n z^n|}=\sqrt[n]{|c_n|}|z|<q<1$，亦即$\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n z^n|\le\sum_{n=0}^{N}|c_n z^n|+\sum_{n=N+1}^{+\infty} q^n$收敛，即$|z|<\frac{1}{\lambda}\Rightarrow I$绝对收敛。
  - 同理可推出$|z|<\frac{1}{\lambda}\Rightarrow I$绝对收敛。
  - 根据定义可知$R=\frac{1}{\lambda}$。
- 证明（D'Alembert）：与上述证明过程类似。

4.2 幂级数

- 例:
  - $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\mathrm{i}n)\, z^n$，因$\sqrt[n]{|\sin(\mathrm{i}n)|} \xrightarrow{n\to+\infty} \mathrm{e}$，故$R=\frac{1}{\mathrm{e}}$。
  - $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$，因$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to+\infty} \mathrm{e}$，故$R=\frac{1}{\mathrm{e}}$。
- （B）定理：设$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n : |z|<R_1$，$g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n : |z|<R_2$，$h(z)$则
  - $f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \pm b_n)z^n : |z|<r=\min\{R_1,R_2\}$。
  - $f(z)g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n : |z|<r$，其中$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$。

4.2 幂级数

- (B) 定理：设$I=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$的收敛半径为$R(R>0)$，则在它的收敛圆盘$D_R$:$|z-a|<R$上，有：
  - 它的和函数$f(z)$解析。
  - $f'(z)$可通过逐项求导获得，即：
    - $f'(z)=\left[\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n\right]'=\sum_{n=1}^{+\infty}nc_n(z-a)^{n-1}$，收敛半径$R_1=R$。
  - $f(z)$可逐项积分，即：
    - $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C\left[\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n\right]\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\int_C c_n(z-a)^n\,\mathrm{d}z\right]$，收敛半径$R_2=R$。
    - $\int_a^z f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\int_a^z c_n(z-a)^n\mathrm{d}z\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$，收敛半径$R_2=R$。

4.2 幂级数

- 例：$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$，$R=1$，我们有
  - $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(z_{n+1})'=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}z_{n+1}\right)'=\left(\frac{z}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}$，$R=1$。
- 例：$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$，$R=1$，我们有
  - $f'(z)=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z}\Rightarrow f(z)=-\ln(1-z)+C$。
  - 因$f(0)=0$，故$f(z)=-\ln(1-z)$。

4.3 Taylor 级数

- （B）定理（Taylor 展开）：设f在D上解析，取$z_0 \in D$。令$d = \min_{z \in \partial D} |z - z_0|$，则$\forall z \in B(z_0, d)$，有$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$，其中$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$，$n \in \mathbb{N}$；且该展开唯一。
- （C）定理：设$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n : |z| < R$，则在其收敛圆周$C_R$上至少存在$f$的一个奇点。
- （C）上述两个定理的证明。

定理的证明

- 证明（存在性）：设$z \in B(z_0, d)$，则$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}$，其中$r = \frac{d + |z - z_0|}{2}$，$C_r: |z - z_0| = r$。注意到
  - $q = \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1 \Rightarrow \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}$
- 所以
  - $f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_r} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right] \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta\right] + E$，其中$E = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_r} \left[\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right] \mathrm{d}\zeta$。

定理的证明

- 证明（续）：注意到
  - $|E| \leq \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r}\left[\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{|f(\zeta)||z-z_0|^n}{|\zeta-z_0|^{n+1}}\right]|\mathrm{d}\zeta| \leq \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r}\left[\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{Mq^n}{r}\right]\mathrm{d}s = \frac{Mq^N}{1-q}\xrightarrow{N\to+\infty}0$
- 所以
  - $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$
- 证明（唯一性）：设$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\tilde{c}_n(z-z_0)^n$。首先$f(z_0) = c_0 = \tilde{c}_0$；求导后可得$f'(z_1) = c_1 = \tilde{c}_1$；由数学归纳法可最终得$\forall n \in \mathbb{N}$，$c_n = \tilde{c}_n$。

定理的证明

- 证明：假设f在C_R上处处解析，则$\forall z \in C_R$，$\exists \delta(z) > 0$使得f在$B\big(z, \delta(z)\big)$内解析。由此得到C_R的开覆盖$C_R \subseteq \bigcup_{z \in C_R} B\big(z, \delta(z)\big)$。
- 根据有限覆盖定理（Heine-Borel Theorem），由于C_R为有界闭集，故必存在上述开覆盖的有限子覆盖$C_R \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B\big(z_k, \delta(z_k)\big) = G$。
- 设$\rho = \min\limits_{z \in C_R, z' \in \partial G} |z - z'|$（有限子覆盖才能取min），则$\rho > 0$；否则$\exists z \in C_R \subseteq G$且$z \in \partial G$，即$z \in G \cap \partial G = \emptyset$，矛盾！
- 设$R' = R + \rho > R$，则f在$D_{R'}$中是解析的，此时的f的收敛半径大于等于R'，与收敛半径为R矛盾！

4.3 Taylor 级数

- 例:
  - $f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n : |z|<1=d$。
  - $g(z)=\begin{cases}\frac{1}{1-z}, & z\neq\frac{1}{2}\\ 1, & z=\frac{1}{2}\end{cases}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n : |z|<\frac{1}{2}=d$。
  - $\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$, $\sin z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $z\in\mathbb{C}$。
  - 因$(\ln(1+z))'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-z)^n$，故$\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^z(-\zeta)^n\mathrm{d}\zeta+C=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}$。

4.4 解析函数的零点

- （A）零点：设f在D上解析，$z_0 \in D$满足$f(z_0) = 0$，则z_0称作$f(z)$的零点；如果$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$而$f^{(m)}(z_0) \neq 0$，则$z_0$称作$f$的$m$级零点。
- （B）定理：z_0是f的m级零点当且仅当在z_0的某个去心领域$B^*(z_0,\delta)$中有$f(z) = (z - z_0)^m \phi(z)$，其中$\phi(z)$在$B(z_0,\delta)$上解析且满足$\phi(z_0) \neq 0$。
- （B）证明：⇐直接求导可得定理成立。⇒据Taylor 展开可得：
  - $f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \phi(z)$

4.4 解析函数的零点

- (A) 孤立零点：若$f(z_0)=0$，且在z_0的某个去心领域$B^*(z_0,\delta)$中恒有$f(z)\neq 0$，则z_0称为f的孤立零点。
- (C) 引理：设$D\subseteq\mathbb{C}$为区域，开集$\Omega_1,\Omega_2\subseteq D$满足$\Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$且$\Omega_1\cup\Omega_2=D$，则$\emptyset\in\{\Omega_1,\Omega_2\}$。
- (C) 定理：设f在D上解析且不恒为零，则f在D上的所有零点均为孤立零点。
- (C) 定理（解析函数的唯一性）：设f,g在D上解析，则$\forall z\in D$都有$f(z)=g(z)$成立，如果
  - $a\notin\{z_n\}\subseteq D, a\in D, \lim\limits_{n\to+\infty} z_n=a$； $f(z_n)=g(z_n),\forall n\in\mathbb{N}$ 。

定理的证明

- 证明（定理）：记
  - $\Omega_1=\{z_0\in D|\exists B^*(z_0,\delta)\subseteq D\ \mathrm{s.t.}\ f(z)=0,\forall z\in B^*(z_0,\delta)\}$
  - $\Omega_2=\{z_0\in D|\exists B^*(z_0,\delta)\subseteq D\ \mathrm{s.t.}\ f(z)\neq 0,\forall z\in B^*(z_0,\delta)\}$
- 易知Ω_1,Ω_2为开集且$\Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$。$\forall z_0\in D$，在某个$B(z_0,d)$中，据Taylor 展开式有$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$。
  - 1° $\forall n\in\mathbb{C},c_n=0$，此时$z_0\in\Omega_1$。
  - 2° 设c_m为第一个非零系数，则$f(z)=(z-z_0)^m\phi(z)$，其中$\phi(z_0)=c_m\neq 0$，此时$z_0\in\Omega_2$。
- 因f在D上不恒为零，由引理可知Ω_1为空集，即$D=\Omega_2$，所以f的所有零点均为孤立零点。

定理的证明

- 定理（解析函数的唯一性）：设$h(z)=f(z)-g(z)$，则
  - $0=\lim\limits_{n\to+\infty}h(z_n)=h\left(\lim\limits_{n\to+\infty}z_n\right)=h(a)$
- 即$a\in D$为h的零点。注意到
  - $\forall\epsilon>0$，$\exists N>0$使得$n>N\Rightarrow|a-z_n|<\epsilon$，且$h(z_n)=0$
- 即$\forall\epsilon>0$，$\exists z\in B^*(a,\epsilon)$使得$h(z)=0$。
- 所以a是h的非孤立零点，据解析函数零点的孤立性可得$h(z)=0,\forall z\in D$，亦即$f(z)=g(z),\forall z\in D$。

4.5 Laurent 级数

- （A）广义幂级数：形如$I=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$的幂级数。
- （A）广义幂级数收敛：设$I_1=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n$，$I_2=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$，则当$I_1,I_2$在$z_0$处都收敛时称$I$在$z_0$处收敛。
- （A）收敛圆环：设I_2的收敛半径为R；对于I_1，作变换$\zeta=\frac{1}{\zeta-z_0}$，则设$I_1=\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}\zeta^n$的收敛半径为$\tilde{r}$，则$I_1$在$|z-z_0|>r=\frac{1}{\tilde{r}}$时收敛；若$r<R$，则$I$在$D(z_0,r,R)$: $r<|z-z_0|<R$上收敛，称$D(z_0,r,R)$为I的收敛圆环。

4.5 Laurent 级数

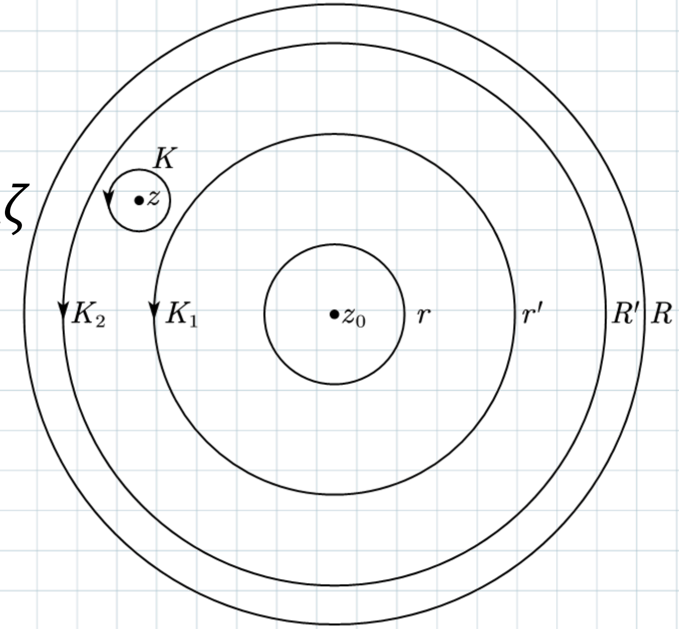
- (B) 定理：设$I=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$的收敛圆环为$D(z_0,r,R)$，则在它的收敛圆环上，有：
  - 它的和函数$f(z)$解析。
  - $f'(z)$可通过逐项求导获得，即：
    - $f'(z)=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n\right]'=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$
  - $f(z)$可逐项积分，即：
    - $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n\right]\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_C c_n(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z\right]$

4.5 Laurent 级数

- （B）定理（Laurent 展开）：设f在$D(z_0,r,R)$上解析，则$\forall z\in D(z_0,r,R)$，有$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$，其中$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$，$C\subseteq D(z_0,r,R)$是任一条包围$z_0$的Jordan 闭曲线。上述展开式唯一，称为Laurent 级数。
- （C）定理的证明。

定理的证明

- 证明（存在性）：设$\zeta \in K_2$，此时$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$，有$\frac{1}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$。
- 设$\zeta \in K_1$，此时$\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| < 1$，有$\frac{1}{\zeta-z} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$。所以
  - $f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_K \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}$
  - $= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{K_2} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right] \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{K_1} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right] \mathrm{d}\zeta$
  - $= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta\right] (z-z_0)^n$



定理的证明

- 证明（唯一性）：设$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n(z-z_0)^n$，$\forall z\in D(z_0,r,R)$，所以
  - $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{p+1}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^{n-p-1}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n(z-z_0)^{n-p-1}:D(z_0,r,R)$
  - $\oint_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{p+1}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \oint_C c_n(z-z_0)^{n-p-1}\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \oint_C \tilde{c}_n(z-z_0)^{n-p-1}\mathrm{d}z$
- 遍历$n\in\mathbb{Z}$，我们有
  - 当$n\neq p$时，$\oint_C c_n(z-z_0)^{n-p-1}\mathrm{d}z=\oint_C \tilde{c}_n(z-z_0)^{n-p-1}\mathrm{d}z=0$
  - 故当$n=p$时，$c_n\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}=\tilde{c}_n\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}\Rightarrow 2\pi\mathrm{i}c_n=2\pi\mathrm{i}\tilde{c}_n\Rightarrow c_n=\tilde{c}_n$

4.5 Laurent 级数

- 例：设$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}$，在$z=0$处对$f$进行Laurent 展开。
- 解：设$D_1: 0<|z|<1$，$D_2: 1<|z|<+\infty$，则
  - 在D_1上，有$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$。
  - 在D_2上，有$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$。

4.5 Laurent 级数

- 例：设$f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{z^2}$，在$z=0$处对$f$进行Laurent 展开。
- 解：$f(z)=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=-2}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+2)!}$。
- 例：求积分$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r}\frac{\mathrm{e}^z\mathrm{d}z}{z^{n+3}}$。
- 解：设$f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{z^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n z^n : 0<|z|<+\infty$，则
  - $c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r}\frac{\mathrm{e}^z\mathrm{d}z}{z^{n+3}}=\begin{cases}0, & n<-2\\ \frac{1}{(n+2)!}, & n\geq -2\end{cases}$。

4.5 Laurent 级数

- 例：设$f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z^2+1)(z-2)}$，求$f$在$z=0$处的Laurent 展开。
- 解：$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{1+z^2}$，设$D_1{:}\,0<|z|<1$，$D_2{:}\,1<|z|<2$，$D_3{:}\,2<|z|<+\infty$，则
  - 在D_1上，有$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{2}{1+z^2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}-2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}$。
  - 在D_2上，有$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}$。
  - 在D_3上，有$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{2}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n}-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}$。

4.5 Laurent 级数

- 例：设$f(z)=\frac{\mathrm{z}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{z}}}}{\mathrm{z}-1}$，求积分$I_1=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}f(z)\mathrm{d}z$和$I_2=\oint_{|z|=2}f(z)\mathrm{d}z$。
- 解：设$D_1: 0<|z|<1$，$D_2: 1<|z|<+\infty$，设$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n : D$，则当$C\subseteq D$时，$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}c_{-1}$。
  - 在D_1上，有$f(z)=-\frac{z}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=-(z+z^2+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots)$
  - $\Rightarrow c_1=-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)=-(\mathrm{e}-2)=2-\mathrm{e}\Rightarrow I_1=2\pi\mathrm{i}(2-\mathrm{e})$。
  - 在D_2上，有$f(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\left(1+\frac{1}{\mathrm{z}}+\frac{1}{\mathrm{z}^2}\dots\right)\left(1+\frac{1}{\mathrm{z}}+\frac{1}{2\mathrm{z}^2}\dots\right)$
  - $\Rightarrow c_1=1+1=2\Rightarrow I_2=4\pi\mathrm{i}$。

目录

5.1 孤立奇点

- (A) 孤立奇点：设z_0为f的奇点，且f在z_0的某个去心邻域$B^*(z_0,\delta)$解析，则称z_0为f的孤立奇点；否则称z_0为f的非孤立奇点。此时，f在$B^*(z_0,\delta)$的Laurent 级数存在。
- (A) 奇点的分类：设$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n : B^*(z_0,\delta)$，则
  - 可去奇点：Laurent 展开式中无负幂项，此时 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$。若定义$f(z_0)=c_0$，则$f$在$B(z_0,\delta)$上解析。
  - m级极点：Laurent 展开式中有有限项负幂项，且次数（绝对值）最高的负幂项的次数为$-m$；当$m=1$时，称作简单极点。此时$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$，其中$g(z_0)=c_{-m}\neq 0$，$g$在$B(z_0,\delta)$上解析，表明$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$。
  - 本性奇点：Laurent 展开式中有无限项负幂项。

5.1 孤立奇点

- (B) 定理（可去奇点）：设z_0为f的孤立奇点，则以下三条陈述等价:
  - 1. z_0为f的可去奇点。
  - 2. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}$。
  - 3. f在z_0的某个去心邻域$B^*(z_0,\delta)$内有界。
- (C) 定理的证明。

定理的证明

- 证明：$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$显然成立，下证$3 \Rightarrow 1$。设$f$在$B^*(z_0,\delta)$上的Laurent 展开式为
  - $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n : z \in B^*(z_0,\delta)$，其中$c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$，$C_r: |z-z_0|=r \in (0,\delta)$。
- 注意到
  - $|c_n| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{|f(z)||\mathrm{d}z|}{|z-z_0|^{n+1}} \le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{M\mathrm{d}s}{r^{n+1}}=\frac{M}{r^n}\xrightarrow{r\to 0,n<0} 0$
- 所以$\forall n<0$，$c_n=0$，即z_0为f的可去奇点。

5.1 孤立奇点

- (B) 定理（m级极点）：设z_0为f的孤立奇点，则以下四条陈述等价：
  - 1. z_0为f的m级极点。
  - 2. 在z_0的某个去心邻域$B^*(z_0,\delta)$内成立$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$，其中$g$在$B(z_0,\delta)$上解析且$g(z_0)\neq 0$。
  - 3. $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=A\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$。
  - 4. z_0为$\frac{1}{f(z)}$在可去意义下的m级零点。
- (C) 定理的证明。

定理的证明

- 证明： $1 \Leftrightarrow 2 \Rightarrow 3$以及$4 \Rightarrow 2$显然成立，下证$3 \Rightarrow 4$。设 $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = A \neq 0$，令$g(z) = (z - z_0)^m f(z)$，则 $\lim_{z \to z_0} g(z) = A \neq 0$，表明$g$在$z_0$处解析，所以$\frac{1}{g(z)}$在$z_0$处解析。
- 所以$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^m}{g(z)} = (z - z_0)^m \phi(z)$，其中$\phi(z) = \frac{1}{g(z)}$在某个 $B(z_0, \delta)$上解析且$\phi(z_0) = \frac{1}{A} \neq 0$，表明$z_0$为$f$（在可去意义下）的$m$级零点。

5.1 孤立奇点

- （A）∞作为奇点：若f在∞的去心邻域$R < |z| < +\infty$内解析，则称∞为f的孤立奇点；否则称∞为f的非孤立奇点。
- （A）∞的奇点类型：设$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n : R < |z| < +\infty$，令$\zeta = \frac{1}{z}$，定义$\phi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n} \zeta^n : 0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$，则$\infty$为$f$的可去奇点、$m$级极点和本性奇点当且仅当0为$\phi$的相应类型的奇点。

5.1 孤立奇点

- (B) 定理：设$z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$为f的孤立奇点，则
  - 1. z_0是可去奇点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}$。
  - 2. z_0是极点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$。
  - 3. z_0是本性奇点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$不存在且不为$\infty$ 。
- (C) 定理的证明。

定理的证明

- 证明：已证1 $\Leftrightarrow$、2 $\Rightarrow$成立，下证2 $\Leftarrow$成立。
- 因z_0为f的孤立零点，故$\exists\delta > 0$使得f在$B^*(z_0,\delta)$上解析。
- 设$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$，则$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)} = 0$。令$F(z) = \begin{cases} 0, & z = z_0 \\ \frac{1}{f(z)}, & z \in B^*(z_0,\delta) \end{cases}$，

  则F在$B(z_0,\delta)$上解析，且$\forall z \in B^*(z_0,\delta)$有$F(z) \neq 0$。
- 设z_0为F的m级零点，则可设$F(z) = (z - z_0)^m\phi(z)$，其中$\phi$在$B(z_0,\delta)$上解析且$\forall z \in B(z_0,\delta)$有$\phi(z) \neq 0$。

定理的证明

- 证明（续）：所以$\frac{1}{\phi(z)}$在$B(z_0,\delta)$上解析，则其Taylor 展开式存在，可设为$\frac{1}{\phi(z)}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$。
- 所以$f(z)=\frac{1}{\phi(z)(z-z_0)^m}=\sum_{n=-m}^{+\infty}a_{n+m}(z-z_0)^n$，即$f$的Laurent 展开式的负幂项有限，即$z_0$为$f$的极点。
- 已证1 ⇔、2 ⇔成立，则3 ⇔自然成立。

5.1 孤立奇点

- （C）定理（Weierstrass）：设z_0为f的本性奇点，则$\forall A \in \bar{\mathbb{C}}$，存在$\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq B^*(z_0,\delta)$使得$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z_0$且$\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n) = A$。
- （C）定理的证明。
- （C）定理（Great Picard）：设z_0为f的本性奇点，则$\forall A \in \bar{\mathbb{C}}$（至多存在一个例外值$A_0$），存在$\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq B^*(z_0,\delta)$使得$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z_0$且$f(z_n) \equiv A$。
- 例：设$f(z) = \exp\frac{1}{z} = A \neq 0$，则$\frac{1}{z} = \operatorname{Ln} A = \ln A + \mathrm{i}2k\pi, k \in \mathbb{Z}$。取$k \in \mathbb{Z}^+$，则$z_k = \frac{1}{\ln A+\mathrm{i}2k\pi} \xrightarrow{k\to+\infty} 0, f(z_k) = A$。

定理的证明

- 证明：先证明定理对$A=\infty$成立。易知f在z_0的任何半径小于δ的去心邻域都无界，否则由f的有界性即可推出z_0为可去奇点，矛盾！所以$\forall \epsilon \in (0,\delta)$，$\forall M>0$，$\exists z \in B^*(z_0,\epsilon)$使得$|f(z)|>M$。
- 取$\epsilon=\frac{\delta}{n}$，$M=n$，其中$n\in\mathbb{N}^+$，则$\exists z_n \in B^*\left(z_0,\frac{\delta}{n}\right)$使得$|f(z_n)|>n$。由此得到数列$\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$。容易验证
  - $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n-z_0|\le\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\delta}{n}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=z_0$；
  - $\lim\limits_{n\to+\infty}|f(z_n)|\ge\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}f(z_n)=\infty=A$；
- 满足题意。

定理的证明

- 证明（续）：再证明定理对$A \in \mathbb{C}$成立。假设$\exists \epsilon_0 \in (0,\delta)$使得$z \in B^*(z_0,\epsilon_0) \Rightarrow f(z) \neq A$，令$\phi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$，则$\phi(z)$在$B^*(z_0,\epsilon_0)$上解析。
- 易知$\lim\limits_{z\to z_0}\phi(z)$不存在且不为$\infty$，否则假设$\lim\limits_{z\to z_0}\phi(z) \in \bar{\mathbb{C}}$，则$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A + \lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{\phi(z)} \in \bar{\mathbb{C}}$，即$z_0$为$f$的可去奇点或极点，矛盾！
- 所以z_0为ϕ的本性奇点。由于已证定理对∞成立，所以$\exists \{z_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq B^*(z_0,\epsilon_0)$满足$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z_0$且$\lim\limits_{n\to+\infty}\phi(z_n) = \infty$，此时$\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n) = A + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\phi(z_n)} = A + 0 = A$，符合题意。

定理的证明

- 证明（续）：假设$\forall \epsilon \in (0,\delta)$，$\exists z \in B^*(z_0,\epsilon)$满足$f(z)=A$，取$\epsilon=\frac{\delta}{n}$，则$\exists z_n \in B^*\left(z_0,\frac{\delta}{n}\right)$满足$f(z_n)=A$，此时容易验证
  - $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n-z_0| \le \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} z_n=z_0$；
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} A=A$；
- 符合题意。

5.1 孤立奇点

- 例:
  - $f(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3}+\cdots:0<|z|<+\infty$，0为可去奇点。
  - $f(z)=\frac{\ln(1+z)}{z}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}+\cdots:0<|z|<1$，0为可去奇点。
  - $f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$，0为2级极点。
  - $f(z)=\frac{z}{\sin^3 z}$，0为2级极点。
  - $f(z)=\exp\frac{1}{z}$，0为本性奇点。
  - $f(z)=\sin\frac{1}{z}$，0为本性奇点。

5.1 孤立奇点

- 例：设$f(z) = \exp\frac{1}{z-1} + \frac{1}{\mathrm{e}^z-1} - \frac{1}{z}$，求$f$在$\overline{\mathbb{C}}$上的所有奇点并分类。
- 解：所有奇点：$\infty, 0, 1, 2k\pi\mathrm{i}(k \neq 0)$。
  - $z = 0$，注意到$\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^z-1} - \frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2}$，故0为可去奇点。
  - $z = 1$，本性奇点。
  - $z = 2k\pi\mathrm{i}$，简单极点。
  - $z = \infty$，非孤立奇点。

5.2 留数

- (A) 留数：设z_0为f的孤立奇点，则f在$B^*(z_0,\delta)$上的Laurent 展开存在，即$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$，其中$c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}=\oint_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$。取$n=-1$，定义$f$在$z_0$处的留数为$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$。
- (B) 定理（留数）：设f在单连通域D上除了有限孤立奇点$z_1,\dots,z_n$外解析，$C\subseteq D$为一条包围所有奇点的Jordan 闭曲线，则$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$。
- (B) 证明：设C包围的区域为B，$C_k\subseteq B$为一条环绕z_k的曲线，则
  - $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_1+\cdots+C_n} f(z)\mathrm{d}z=2\pi \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$

5.2 留数

- (A) ∞处的留数：设$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n : R<|z|<+\infty$，则$c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$，定义$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1}$。
- (B) 定理（全留数）：设f在$\bar{\mathbb{C}}$上除了有限孤立奇点（包括∞）外解析，则f在所有奇点处的留数之和为0。
- (B) 证明：因f在$\bar{\mathbb{C}}$上的奇点数有限，故∞为f的孤立奇点。设$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n : R<|z|<+\infty$，设$C:|z|=R$，则
  - $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z=-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$

5.2 留数

- (B) 定理（留数的计算规则）：设z_0为f的孤立奇点，则
  - 1. 若z_0为f的可去奇点，则$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$。
  - 2. 若z_0为f的简单极点，则$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$。
  - 3. 若$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$，P, Q在z_0处解析，$P(z_0) \neq 0, Q(z_0) = 0$且$Q'(z_0) \neq 0$，则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$。
  - 4. 若z_0为f的m级极点，则$\forall k \geq m$，$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}$。
  - 5. $\mathrm{Res}[f(z), \infty] = \mathrm{Res}\left[-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right]$。

5.2 留数

- (B) 证明：
  - 1. Laurent 展开→Taylor 展开，所以$c_{-1}=0$。
  - 2. 根据Laurent 展开可直接得证。
  - 3. 根据命题2，有$\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)}=P(z_0)\lim\limits_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{Q(z)-Q(z_0)}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$。
  - 4. 根据Laurent 展开可直接得证。
  - 5. 设$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n:R<|z|<+\infty$，作代换$\zeta=\frac{1}{z}$，则$\phi(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{-n}\zeta^n:0<|\zeta|<\frac{1}{R}$。所以$\frac{\phi(\zeta)}{\zeta^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{-n}\zeta^{n-2}$，取$n=1$即可得到$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1}=-\mathrm{Res}\left[\frac{\phi(\zeta)}{\zeta^2},0\right]=\mathrm{Res}\left[-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$。

5.2 留数

- 例：设$f(z)=\frac{z-\sin z}{z^6}$，计算$\mathrm{Res}[f(z),0]$。
- 解：我们采用三种方法计算这个留数。
  - 从Laurent 展开式可直接得$c_{-1}=-\frac{1}{5!}$。
  - 易知0为f的3级极点。若取$k=3$，则$c_{-1}=\frac{1}{2!}\lim\limits_{z\to 0}\left[z^3\frac{z-\sin z}{z^6}\right]''$，较难算!
  - 若取$k=6$，则$c_{-1}=\frac{1}{5!}\lim\limits_{z\to 0}\left[z^6\frac{z-\sin z}{z^6}\right]^{(5)}=-\frac{1}{5!}$。

5.2 留数

- 例：当$n \geq 2$，$r > 1$时，计算$I_n = \oint_{|z|=r} \frac{z\mathrm{d}z}{z^n-1}$。
- 解：我们采用两种方法计算这个积分。设$f(z) = \frac{z}{z^n-1}$，则
  - 应用留数定理，
    - $I_n = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k] = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{nz_k^{n-1}} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k^2$
    - $= \frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp\frac{4k\pi\mathrm{i}}{n} \xrightarrow{n>2} \frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\exp\frac{4\pi\mathrm{i}}{n}\frac{1-\exp 4\pi\mathrm{i}}{1-\exp\frac{4\pi\mathrm{i}}{n}} = 0$，$I_n \xrightarrow{n=2} 2\pi\mathrm{i}$。
  - 应用全留数定理，
    - $I_n = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z), \infty] = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}\frac{z^{-1}}{z^{-n}-1}, 0\right] = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{z^{n-3}}{1-z^n}, 0\right] = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n = 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$。

5.2 留数

- 例：设$f(z)=\frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{z(z-1)^2}$，求$I=\oint_{|z|=3}f(z)\mathrm{d}z$。
- 解：应用留数定理，
  - $I=2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\right]=2\pi\mathrm{i}\left[\lim\limits_{z\to 0}\frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2}-\lim\limits_{z\to 1}\frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{z(1-z)}\right]$
  - $=2\pi\mathrm{i}\left(1-\frac{\pi}{2}\right)$。

5.2 留数

- 例：设$f(z)=\frac{z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z-1}$，求积分$I_1=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}f(z)\mathrm{d}z$ 和$I_2=\oint_{|z|=2}f(z)\mathrm{d}z$。
- 解：除了Laurent 展开法以外，我们用留数计算这个积分。
  - $f(z)=-z\left(1+z+z^2+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots\right)\Rightarrow c_{-1}=-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)=2-\mathrm{e}$
  - $I_1=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),0]=2\pi\mathrm{i}(2-\mathrm{e})$
  - $I_2=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),0]+2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),1]=2\pi\mathrm{i}(2-\mathrm{e}+\mathrm{e})=4\pi\mathrm{i}$
  - $I_2=-2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),\infty]=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{z^2(1-z)},0\right]=4\pi\mathrm{i}$

5.3 留数在定积分中的应用

- （B）若定积分具有形式$I=\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$，其中$R$为有理函数，令$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$，$\sin\theta=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$，$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$，则$I=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z$。若$f$在$|z|=1$上无极点且$f$的奇点个数有限，则$I=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$，其中$\{z_k\}$为$f$在$\{z:|z|<1\}$上的极点集合。
- （B）定理的证明。

5.3 留数在定积分中的应用

- 例：当$a > 1$时，求$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a-\cos\theta}$。
- 解：$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}}{a-\frac{z^2+1}{2z}} = \oint_{|z|=1} \frac{2\mathrm{i}\mathrm{d}z}{z^2-2az+1} = \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z$。
- 令$z^2 - 2az + 1 = 0$，得$z_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$，其中$|z_1| < 1$。
- 故$I = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z), z_1] = 2\pi\mathrm{i} \frac{\mathrm{i}}{z-a}\Big|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$。

5.3 留数在定积分中的应用

- 例：当$0<p<1$、$n\in\mathbb{N}$时，求$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta}{1+p^2-2p\cos\theta}$。
- 解：令$\tilde{I}=\int_0^{2\pi}\frac{\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta}{1+p^2-2p\cos\theta}$，则$I+\mathrm{i}\tilde{I}=\oint_{|z|=1}\frac{z^n}{1+p^2-2p\frac{1+z^2}{2z}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$
- $=\oint_{|z|=1}\frac{-\mathrm{i}z^n\mathrm{d}z}{z(1+p^2)-p(1+z^2)}=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{i}z^n\mathrm{d}z}{(pz-1)(z-p)}=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z$
- $=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),p]=2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}p^n}{p^2-1}=\frac{2\pi p^n}{1-p^2}$。

5.3 留数在定积分中的应用

- (B) 若定积分具有形式$I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x$，其中$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$为有理函数，$n=\deg P$，$m=\deg Q$，且$m-n\geq 2$，若$R$在$\mathbb{R}$上无极点且$R$的奇点个数有限，则$I=2\pi\mathrm{i}\sum_{\Im(z_k)>0}\operatorname{Res}[f(z),z_k]=-2\pi\mathrm{i}\sum_{\Im(z_k)<0}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$，其中$\{z_k\}$为$R$在$\mathbb{C}$上的极点集合。
- (C) 定理的证明。

定理的证明

- 证明：设$C_L: |z| = L \cap \Im(z) > 0$，$I_L = [-L, L]$，$C = C_L + I_L$，则
  - $\oint_C R(z)\mathrm{d}z = \int_{I_L} R(z)\mathrm{d}z + \int_{C_L} R(z)\mathrm{d}z = \int_{-L}^{L} R(x)\mathrm{d}x + \int_{C_L} R(z)\mathrm{d}z$
- 注意到存在r满足当$|z| > r$时，有
  - $|R(z)| = \frac{|a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0|}{|b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0|} = \frac{|a_n|}{|b_m|} \frac{1}{|z|^{m-n}} \frac{\left|1 + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|}{\left|1 + \cdots + \frac{b_1}{z^{m-1}} + \frac{b_0}{z^m}\right|} \le \frac{A}{|z|^{m-n}} = \frac{A}{L^{m-n}}$
  - $\left|\int_{C_L} R(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_{C_L} |R(z)||\mathrm{d}z| \le \frac{A}{L^{m-n}} \int_{C_L} \mathrm{d}s = \frac{A\pi}{L^{m-n-1}} \xrightarrow{L \to +\infty} 0$
- 设$\{z_k\}$为f在$\mathbb{C}$上的极点集合，所以
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = \lim_{L \to +\infty} \int_{-L}^{L} R(x)\mathrm{d}x = \lim_{L \to +\infty} \oint_C R(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\Im(z_k) > 0} \mathrm{Res}[R(z), z_k]$
- 另一个等式的证明类似。

5.3 留数在定积分中的应用

- 例：计算$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$。
- 解：令$R(z)=\frac{1}{1+z^4}$，则$z_k=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(2k+1)\pi}{4}}$，其中$\Im(z_{0,1})>0$。
- 所以$I=\frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}[R(z),z_0]+\mathrm{Res}[R(z),z_1])=\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4z_0^3}+\frac{1}{4z_1^3}\right)$
- $=\frac{\pi\mathrm{i}}{4}(z_0+z_1)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$。

5.3 留数在定积分中的应用

- (B) 若定积分具有形式$I=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}dx$，其中$a\in\mathbb{R}^*$，$R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$为有理函数，$n=\deg P$，$m=\deg Q$，且$m-n\geq 1$，若$R$在$\mathbb{R}$上无极点且$R$的奇点个数有限，则$I=$
$$\begin{cases}2\pi\mathrm{i}\sum_{\Im(z_k)>0}\mathrm{Res}[f(z),z_k], & a>0\\ -2\pi\mathrm{i}\sum_{\Im(z_k)<0}\mathrm{Res}[f(z),z_k], & a<0\end{cases}$$
，其中$\{z_k\}$为R在$\mathbb{C}$上的极点集合。
- (C) 定理的证明。

定理的证明

- 证明：当$a > 0$时，设C_L: $|z| = L \cap \Im(z) > 0$，$I_L = [-L, L]$，$C = C_L + I_L$，则
  - $\oint_C R(z)\mathrm{e}^{iaz}\mathrm{d}z = \int_{I_L} R(z)\mathrm{e}^{iaz}\mathrm{d}z + \int_{C_L} R(z)\mathrm{e}^{iaz}\mathrm{d}z = \int_{-L}^{L} R(x)\mathrm{e}^{iax}\mathrm{d}x + \int_{C_L} R(z)\mathrm{e}^{iaz}\mathrm{d}z$
- 注意到存在r满足当$|z| > r$时，有$|R(z)| \leq \frac{A}{L^{m-n}}$，则
  - $\left|\int_{C_L} R(z)\mathrm{e}^{iaz}\mathrm{d}z\right| \leq \int_{C_L} |R(z)|\left|\mathrm{e}^{ia(x+\mathrm{i}y)}\right||\mathrm{d}z| \leq \frac{A}{L^{m-n}}\int_{C_L} \mathrm{e}^{-ay}\mathrm{d}s = \frac{A}{L^{m-n-1}}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-aL\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$
  - $\leq \frac{2A}{L^{m-n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-aL\frac{2\theta}{\pi}}\mathrm{d}\theta = \frac{2A}{L^{m-n-1}}\frac{\pi}{2aL}\left(1 - \mathrm{e}^{-aL}\right) \leq \frac{A\pi}{aL^{m-n}} \xrightarrow{L\to+\infty} 0$
- 设$\{z_k\}$为f在$\mathbb{C}$上的极点集合，所以
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{L\to+\infty}\int_{-L}^{L} R(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{L\to+\infty}\oint_C R(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\Im(z_k)>0}\mathrm{Res}[R(z), z_k]$
- 另一个等式的证明类似。

5.3 留数在定积分中的应用

- 例：当$b>0$时，计算$I(b)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x\mathrm{d}x}{x^2+b^2}$。
- 解：令$R(z)=\frac{z}{z^2+b^2}$，则
- $I(b)=\Im\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x}{x^2+b^2}=\Im\left[2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z},\mathrm{i}b\right]\right]$
- $=\Im\left[2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{2}\Big|_{z=\mathrm{i}b}\right]=\pi\mathrm{e}^{-b}$。

目录

- 复数和复变函数
- 解析函数
- 复变函数的积分
- 级数
- 留数
- 重要的公式汇总

6.1 重要的公式汇总

- （B）定理：设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，则$f$在$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$处可导的充要条件为$u(x,y),v(x,y)$均在$(x_0,y_0)$处可微且满足Cauchy-Riemann(CR) 方程：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$，且有$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}$。
- （B）Cauchy-Goursat 定理：设f在单连通域D上解析，$C\subseteq D$是任意闭曲线，则$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$。

6.1 重要的公式汇总

- （B）复合闭路定理：设f在由上述复合闭路组成的$(n+1)$连通域上解析，在$\overline{D}=D\cup\gamma$上连续，则$\oint_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z=0$，或$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_1+\cdots+C_m} f(z)\mathrm{d}z$。
- （B）Newton-Leibniz 公式：设f在单连通域D上解析，G为f在D上的原函数，则$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z=G(z_1)-G(z_0)$。
- （B）分部积分公式：设f,g在单连通域D上解析，则$\int_{z_0}^{z_1} f'(z)g(z)\mathrm{d}z=f(z)g(z)|_{z_0}^{z_1}-\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)\mathrm{d}z$。

6.1 重要的公式汇总

- （B） Cauchy 积分公式：设f在单连通域D上解析，在闭区域$\overline{D} = D \cup \partial D$上连续，则$\forall z_0 \in D$，有$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}$。
- （B） 定理：设f在D上解析，则f在D上的任意阶导数存在，且$\forall z_0 \in D$，$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$，其中$\gamma \subseteq D$且$\gamma$包围的区域为$D$的子区域。
- （B） 定理：设$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$在$D$上解析，则$u, v$在$D$上调和。可通过CR方程直接证明本定理。

6.1 重要的公式汇总

- (B) 定理（Cauchy）：
  - 一般形式：若$\exists N_0 \in \mathbb{N}$使得$\forall n > N_0$，$\sqrt[n]{|z_n|} \le q < 1$，则$I$绝对收敛；若$\sqrt[n]{|z_n|} \ge q \ge 1$对无数个$n$成立，则$I$发散。
  - 极限形式：$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q \begin{cases} < 1 \Rightarrow & \text{A. C.} \\ > 1 \Rightarrow & \text{D. V.（与一般形式不等价）} \\ = 1 \Rightarrow & \text{Indef.} \end{cases}$。
  - 极限形式的Cauchy 判别法可以放宽为$\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q$（与一般形式等价）。

6.1 重要的公式汇总

- (B) 定理（D'Alembert）：
  - 一般形式：若$\exists N_0\in\mathbb{N}$使得$\forall n>N_0$，$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\le q<1$，则$I$绝对收敛；若$\exists N_0\in\mathbb{N}$使得$\forall n>N_0$，$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\ge q\ge 1$，则$I$发散。
  - 极限形式：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=q\begin{cases}<1\Rightarrow & \mathrm{A.C.}\\ >1\Rightarrow & \mathrm{D.V.}\\ =1\Rightarrow & \mathrm{Indef.}\end{cases}$。
- (B) 定理（Dirichlet）：设$\{a_n\}\subseteq\mathbb{R}$，$\{b_n\}\subseteq\mathbb{C}$，若$\{a_n\}$单调趋近于0，$\{b_n\}$的部分和数列有界，则级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nb_n$收敛。
- (B) 定理（Abel）：设$\{a_n\}\subseteq\mathbb{R}$，$\{b_n\}\subseteq\mathbb{C}$，若$\{a_n\}$单调有界，级数$\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$收敛，则级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nb_n$收敛。

6.1 重要的公式汇总

- (B) 定理（收敛半径的计算）：

  - 根式法（Cauchy）：若$\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda$，则$R=\begin{cases}+\infty, & \lambda=0\\ \frac{1}{\lambda}, & \lambda\in(0,+\infty)\\ 0, & \lambda=+\infty\end{cases}$。

  - 比值法（D'Alembert）：若$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda$，则$R=\begin{cases}+\infty, & \lambda=0\\ \frac{1}{\lambda}, & \lambda\in(0,+\infty)\\ 0, & \lambda=+\infty\end{cases}$。

6.1 重要的公式汇总

- （B）定理（Taylor 展开）：设f在D上解析，取$z_0 \in D$。令$d = \min\limits_{z\in\partial D} |z - z_0|$，则$\forall z \in B(z_0, d)$，有$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$，其中$c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$，$n \in \mathbb{N}$；且该展开唯一。
- （B）定理（Laurent 展开）：设f在$D(z_0, r, R)$上解析，则$\forall z \in D(z_0, r, R)$，有$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$，其中$c_n = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \dfrac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$，$C \subseteq D(z_0, r, R)$是任一条包围$z_0$的Jordan 闭曲线。上述展开式唯一，称为Laurent 级数。

6.1 重要的公式汇总

- (A) 留数：设z_0为f的孤立奇点，定义f在z_0处的留数为 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$。
- (B) 定理（留数）：设f在单连通域D上除了有限孤立奇点 $z_1,\dots,z_n$外解析，$C\subseteq D$为一条包围所有奇点的Jordan 闭曲线，则 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$。
- (B) 定理（全留数）：设f在$\overline{\mathbb{C}}$上除了有限孤立奇点（包括∞）外解析，则f在所有奇点处的留数之和为0。

6.1 重要的公式汇总

- (B) 定理（留数的计算规则）：设z_0为f的孤立奇点，则
  - 1. 若z_0为f的可去奇点，则$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=0$。
  - 2. 若z_0为f的简单极点，则$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$。
  - 3. 若$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，P,Q在z_0处解析，$P(z_0)\neq 0,Q(z_0)=0$且$Q'(z_0)\neq 0$，则$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$。
  - 4. 若z_0为f的m级极点，则$\forall k\geq m$，$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(k-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}$。
  - 5. $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\mathrm{Res}\left[-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$。

6.1 重要的公式汇总

- (B) 若定积分具有形式$I=\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$，其中$R$为有理函数，令$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$，$\sin\theta=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$，$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$，则$I=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z$。若$f$在$|z|=1$上无极点且$f$的奇点个数有限，则$I=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$，其中$\{z_k\}$为$f$在$\{z:|z|<1\}$上的极点集合。

6.1 重要的公式汇总

- （B）若定积分具有形式$I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x$，其中$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$为有理函数，$n=\deg P$，$m=\deg Q$，且$m-n\geq 2$，若$R$在$\mathbb{R}$上无极点且$R$的奇点个数有限，则$I=2\pi\mathrm{i}\sum_{\Im(z_k)>0}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=-2\pi\mathrm{i}\sum_{\Im(z_k)<0}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$，其中$\{z_k\}$为$R$在$\mathbb{C}$上的极点集合。

6.1 重要的公式汇总

- (B) 若定积分具有形式$I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{e}^{iax}dx$，其中$a\in\mathbb{R}^*$，$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$为有理函数，$n=\deg P$，$m=\deg Q$，且$m-n\geq 1$，若$R$在$\mathbb{R}$上无极点且$R$的奇点个数有限，则$I=$

$$\begin{cases}2\pi\mathrm{i}\sum_{\Im(z_k)>0}\operatorname{Res}[f(z),z_k], & a>0\\ -2\pi\mathrm{i}\sum_{\Im(z_k)<0}\operatorname{Res}[f(z),z_k], & a<0\end{cases}$$

其中$\{z_k\}$为R在$\mathbb{C}$上的极点集合。

谢谢大家

2021年6月6日

主讲人：夏子睿