第3章　特殊函数及其应用

问题：1）分离变量法与坐标系的关系？

2）应用时如何确定S-L框架？

3）特殊函数在这里扮演什么样的角色？

§3. 1 Laplace 算子

例：高维热传导方程

$$\begin{cases} u_t(X,t) = a^2\Delta u(X,t) \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad u\big|_{t=0} = \varphi \end{cases} \qquad X \in \Omega \subset R^n,\ t > 0$$

注：齐次（第一类）边界条件

令 $u(X,t) = U(X)T(t)$（分离时间与空间变量）

$$\Rightarrow \frac{T'}{a^2T} = \frac{\Delta U}{U} = -\lambda \qquad (\lambda \text{ 为待定常数})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0 \\ \Delta U + \lambda U = 0 \end{cases}$$ —— Helmholtz 方程

注：高维发展方程 ⟶ 求解 Helmholtz 方程 + 边界条件

（Ω 上 Laplace 算子的特征值问题）

例：Poisson 方程

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \qquad \underline{X \in \Omega \subset \mathbb{R}^n}$$

注：齐次（第一类）边界条件

想法：求解 Ω上 Laplace 算子的特征值问题

⟶ 特征函数族

⟶ 沿特征函数展开（特征函数法）

综上，三大典型方程高维问题转化为：

求解 $\Delta U + \lambda U = 0$（齐次边界条件）

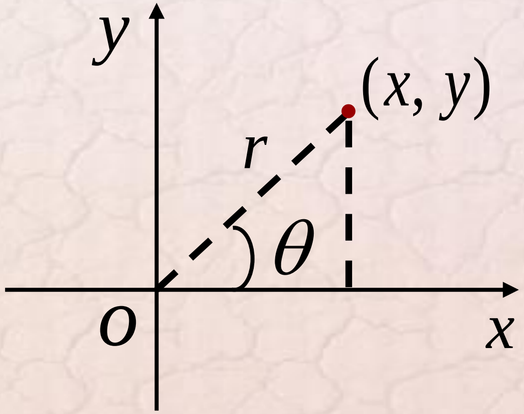
或者 $\Delta U = 0$（非齐次边界条件）

注：Laplace 方程可看成 Helmholtz 方程中 $\lambda \equiv 0$

Laplace 算子在常见坐标中的表达式

平面极坐标：(r, θ)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \le \theta < 2\pi)$$



$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy}$$

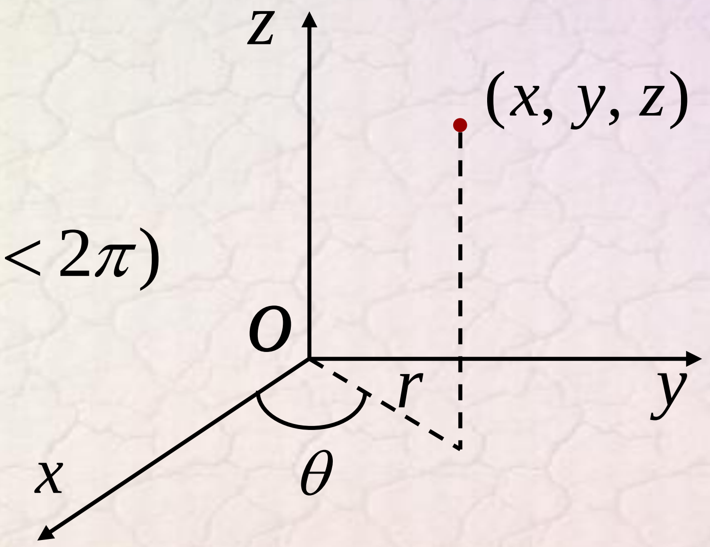
$$= v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}$$

$$= \frac{1}{r}(r v_r)_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} \qquad \text{（练习）}$$

注：Laplace 算子的表达式与角度取值范围无关

柱坐标: (r, θ, z)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (0 \le \theta < 2\pi)$$



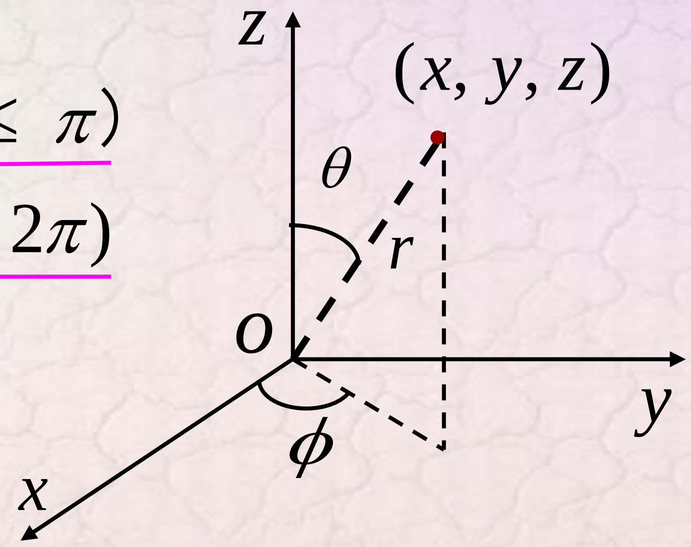
$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}$$

$$= v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + v_{zz}$$

$$= \frac{1}{r}(r v_r)_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + v_{zz}$$

球坐标: (r,ϕ,θ)

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi & (0 \le \theta \le \pi) \\ y = r\sin\theta\sin\phi & (0 \le \phi < 2\pi) \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(r^2 v_r\right)_r + \frac{1}{r^2}\left(v_{\theta\theta} + \cot\theta\, v_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta} v_{\phi\phi}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(r^2 v_r\right)_r + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\, v_\theta\right)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta} v_{\phi\phi}\right)}_{}$$

$\boxed{\text{球面 Laplace 算子}}$

（练习）

Laplace 算子在平移、正交变换下保持不变

不失一般性，仅以二维情形说明

若 $\begin{cases} \bar{x} = ax + by + e \\ \bar{y} = cx + dy + f \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $u_{\bar{x}\bar{x}} + u_{\bar{y}\bar{y}} = u_{xx} + u_{yy}$

可直接验证（练习）

注：平移不变性显然

§3.2 圆域上的 Helmholtz 方程

方程：$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+\lambda u=0 \\ u\big|_{x^2+y^2=r_0^2}=0 \end{cases}$ $\quad x^2+y^2<r_0^2$

（λ 为待定常数）

注：齐次（第一类）边界条件

区域形状 ⟶ 使用极坐标

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\lambda u=0 & 0<r<r_0,\ 0<\theta<2\pi \\ u(r_0,\theta)=0 & 0\le\theta<2\pi \\ \overline{\lim_{r\to 0^+}}|u(r,\theta)|<\infty & 0\le\theta<2\pi \\ u(r,0)=u(r,2\pi) & 0<r<r_0 \\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,2\pi) & 0<r<r_0 \end{cases}$$

—自然条件

周期条件

令 $u(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$ （分离变量）

方程 $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\lambda u=0$

$$\Rightarrow R''\Phi+\frac{1}{r}R'\Phi+\frac{1}{r^2}R\Phi''+\lambda R\Phi=0$$

$$\Rightarrow \frac{r^2R''+rR'}{R}+\lambda r^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\mu$$ （μ 为待定常数）

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2R''+rR'+\underline{(\lambda r^2-\mu)}R=0 \\ \Phi''+\mu\Phi=0 \end{cases}$$

周期条件 $\Rightarrow \begin{cases} \Phi(0)=\Phi(2\pi) \\ \Phi'(0)=\Phi'(2\pi) \end{cases}$

自然条件 $\Rightarrow |R(0)|<\infty$

先解 $\begin{cases}\Phi''+\mu\Phi=0\\ \Phi(0)=\Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)\end{cases}$

讨论可知（练习） $0\le\mu=n^2$ $\qquad (n=\underline{0},1,2,\cdots)$

且 $\boxed{\Phi_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta}$

再解 $r^2R''+rR'+(\lambda r^2-\mu)R=0$

$\Rightarrow r^2R''+rR'+(\lambda r^2-n^2)R=0$

作变量代换 $x=\sqrt{\lambda}r \qquad f(x)=R(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})=R(r)$

$\Rightarrow \boxed{x^2f''+xf'+(x^2-n^2)f=0} \qquad \boxed{\sqrt{\lambda}f'(x)=R'(r)}$

$\boxed{n\text{阶（标准）Bessel 方程}}$

注：λ 若为负值，则 x 为复变量

注：柱坐标下的 Helmholtz/Laplace 方程（柱形区域）

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}+\lambda u=0$$

令 $u(r,\theta,z)=R(r)\Phi(\theta)Z(z)$ （分离变量）

$$\Rightarrow R''\Phi Z+\frac{1}{r}R'\Phi Z+\frac{1}{r^2}R\Phi''Z+R\Phi Z''+\lambda R\Phi Z=0$$

$$\Rightarrow \frac{r^2R''+rR'}{R}+\lambda r^2+r^2\boxed{\frac{Z''}{Z}}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\mu$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\Phi''+\mu\Phi=0 & （\mu\text{ 为待定常数}）\\ Z''+\alpha Z=0 & （\alpha\text{ 为待定常数}）\\ \boxed{r^2R''+rR'+[(\lambda-\alpha)r^2-\mu]R=0} & \end{cases}$$

作变量代换 $x=\sqrt{\lambda-\alpha}\,r \quad f(x)=R\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda-\alpha}}\right)=R(r)$

$$\Rightarrow x^2 f''+xf'+(x^2-\mu)f=0$$

（x 可能为复变量）

记 $\mu=n^2$ （n 可能为复数）

$$\Rightarrow x^2 f''+xf'+(x^2-n^2)f=0$$

（n 阶 Bessel 方程）

结论：（1）求解柱坐标下的 Helmholtz/Laplace 方程的关键转化为求解 n 阶 Bessel 方程

（2）可应用于圆形区域或柱形区域上的二阶典型偏微分方程

—— Wave, Heat, Poisson, Laplace

§3. 3 Bessel 方程与 Bessel 函数

§3.3.1 二阶线性常微分方程的解析理论

对于变系数的常微分方程，它们的解一般不能用初等函数表示，求它们的幂级数解是较有效的方法。

为了求解Bessel 方程与Legendre 方程，我们引入关于幂级数解法的两个重要定理。

在复数域上考察二阶线性常微分方程

$$w''(z)+p(z)w'(z)+q(z)w(z)=0 \qquad \text{(A)}$$

z 为复变量， $w=w(z)$为未知函数， $p(z)$, $q(z)$ 是已知函数。

定义（1）若 z_0 是 $p(z), q(z)$ 的解析点,则称 z_0 是 方程(A)的常点。

（2）若 z_0 是 $p(z)$ 的至多一级极点，是 $q(z)$ 的至多二级极点，则称 z_0 是 方程(A)的正则奇点。

Cauchy定理 设 $p(z), q(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析， 则初值问题

$$\begin{cases} w''(z)+p(z)w'(z)+q(z)w(z)=0 \\ w(z_0)=\alpha, w'(z_0)=\beta \end{cases} \qquad \text{（B）}$$

在圆域 $|z-z_0|<R$ 内的解存在且唯一。

如果选取两组线性无关的初值 $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)$,在 $|z-z_0|<R$ 内，

可采用幂级数方法求出方程（A）的线性无关的两个解析解

$$w_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\ w_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n,$$

从而得到通解 $w(z)=C_1w_1(z)+C_2w_2(z).$

Fuchs（富克斯）定理 设 z_0 是 方程（A）的正则奇点，即 $(z-z_0)p(z)$，$(z-z_0)^2 q(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，则在空心圆域 $0<|z-z_0|<R$ 内，方程（A）有另个线性无关解

广义幂级数

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \qquad \text{(C)}$$

$$w_2(z)=\gamma w_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n, \qquad \text{(D)}$$

其中，系数 $a_0 b_0 \neq 0$，常数 γ 可以为0，常数 ρ_1, ρ_2 称为正则奇点 z_0 的指标。

把形如 $(z-z_0)^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 的级数称为**广义幂级数**。

注:(1)若 z_0 是 $p(z)$ 的至少2级极点，或是 $q(z)$ 的至少3级极点，或是它们的本性奇点，则称 z_0 是 方程(A)的非正则奇点。此时，方程（A）在空心圆域内有两个线性无关解，其形式等同于（C）或（D）式， 但是求和指标的下限应改为$-\infty$.

（2）当常数 $\gamma \neq 0$ 或 ρ_1, ρ_2 至少有一个为非整数时，为保证单值解析性,空心圆域应理解为沿某支割线剪开后的带裂痕圆域。

§3.3.2 n 阶 Bessel 方程求解

n 阶 Bessel 方程 $$x^2 f'' + xf' + (x^2 - n^2) f = 0$$

近似地，在 $x=0$ 附近

Bessel 方程 ≈ Euler 方程

即

$$x^2 f'' + xf' - n^2 f \approx 0 \qquad (|x| \ll 1)$$

将Bessel 方程的通解表示为

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

进而期望当 $|x| \ll 1$ 时

$$f_1(x) \sim \begin{cases} x^n & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \qquad f_2(x) \sim \begin{cases} x^{-n} & n > 0 \\ \ln|x| & n = 0 \end{cases}$$

求解 n 阶 Bessel 方程

$$x^2 f'' + xf' + (x^2 - n^2) f = 0$$

注：n 为参数，可实可复

$$\Rightarrow f'' + \frac{1}{x} f' + \frac{x^2 - n^2}{x^2} f = 0$$

只考虑 $n \in \mathbb{R}$，不妨设 $n \geq 0$

尝试广义幂级数形式解

$$f(x) = x^c \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+c} \qquad (a_0 \neq 0)$$

这里 c, a_k 为待定常数 $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

$$\boxed{x^2 f'' + xf' + (x^2 - n^2) f = 0}$$

直接计算可得

$$x f' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+c) a_k x^{k+c}$$

$$x^2 f'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+c)(k+c-1) a_k x^{k+c}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+c)^2 a_k x^{k+c} + (x^2 - n^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+c} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{(c^2 - n^2) a_0} x^c + \underline{\left[(1+c)^2 - n^2 \right] a_1} x^{1+c}$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} x^{k+c} \underline{\left[\left((k+c)^2 - n^2 \right) a_k + a_{k-2} \right]} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (c^2 - n^2) a_0 = 0 \\ \left[(1+c)^2 - n^2\right] a_1 = 0 \\ \left[\left((k+c)^2 - n^2\right) a_k + a_{k-2}\right] = 0 & k = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2 - n^2 = 0 \\ (1+2c) a_1 = 0 \\ k(k+2c) a_k + a_{k-2} = 0 & k = 2, 3, \cdots \end{cases} \qquad \boxed{a_0 \neq 0}$$

先尝试 $\boxed{c = n \geq 0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_k = -\dfrac{a_{k-2}}{k(k+2c)} & k = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0 \\ a_{2m} = -\dfrac{a_{2m-2}}{2m(2m+2c)} \end{cases} \qquad m = 1, 2, \cdots$$

$$\Rightarrow a_{2m} = (-1)^m a_0 \frac{1}{2m \cdot (2m-2) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2}$$

$$\cdot \frac{1}{(2m+2c)(2m-2+2c) \cdot \cdots \cdot (2+2c)}$$

$$\Rightarrow a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(m+c)(m-1+c) \cdot \cdots \cdot (1+c)}$$

$$m = 1, 2, \cdots$$

从而，当$c=n$时，可得到广义幂级数解

$$f_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}x^{2m+c}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}m!(m+c)(m-1+c)\cdots\cdots(1+c)}x^{2m+c}$$

注：（1）a_0的取值可确定此解

（2）$f_1(x)\sim x^n \quad (|x|\ll 1)$

问题：（1）a_0取何值应用时较为方便？

（2）如何求另一个（与f_1线性无关的）解？

$$\boxed{f_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}m!(m+c)(m-1+c)\cdots\cdots(1+c)}x^{2m+c}}$$

取 $a_0=\dfrac{1}{2^c\Gamma(1+c)}$ Gamma 函数 $\boxed{c=n}$

$$\Rightarrow f_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1+c)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+c}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

$$=: J_n(x)$$

$\boxed{s\Gamma(s)=\Gamma(s+1)\quad \forall s>0}$

第一类 n 阶 Bessel 函数

$$\boxed{\begin{aligned} & c^2 - n^2 = 0 \\ & (1+2c)a_1 = 0 \\ & k(k+2c)a_k + a_{k-2} = 0 \qquad\qquad k = 2, 3, \cdots \end{aligned}}$$

再尝试 $\boxed{c = -n}$ （只需考虑 $n > 0$）

情形 1 $\boxed{2n \notin \mathbb{Z}}$

$$\Rightarrow k + 2c = k - 2n \neq 0 \qquad\qquad k = \underline{1}, 2, \cdots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_k = -\dfrac{a_{k-2}}{k(k+2c)} \end{cases} \qquad\qquad k = 2, 3, \cdots$$

同法

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{2m-1} = 0 & m = 1, 2, \cdots \\ a_{2m} = \dfrac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(m+c)(m-1+c)\cdot\cdots\cdot(1+c)} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & c^2 - n^2 = 0 \\ & (1+2c)a_1 = 0 \\ & k(k+2c)a_k + a_{k-2} = 0 \qquad\qquad k = 2, 3, \cdots \end{aligned}}$$

情形 2 $\boxed{2n\text{为奇数}}$ $(c=-n)$

$$\Rightarrow \exists\ 0 \le m_0 \in \mathbb{Z} \qquad \text{s.t. } 2m_0 + 1 + 2c = 0$$

同法

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{2m} = \dfrac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(m+c)(m-1+c)\cdots\cdots(1+c)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad m = 1, 2, \cdots \\ a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2m_0-1} = 0 \end{cases}$$

可选取 $a_{2m_0+1} = 0$ （与递归等式相容）

$$\Rightarrow a_{2m-1} = 0 \qquad\qquad m = 1, 2, \cdots$$

$$\boxed{\begin{aligned} & c^2 - n^2 = 0 \\ & (1+2c)a_1 = 0 \\ & k(k+2c)a_k + a_{k-2} = 0 \qquad\qquad k = 2, 3, \cdots \end{aligned}}$$

情形 3 $\boxed{2n\text{ 为偶数}} \Leftrightarrow c \in \mathbb{Z}^- \quad (c = -n)$

$$\Rightarrow \ \exists \ m_0 \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{s.t. } 2m_0 + 2c = 0$$

$$\Rightarrow \ a_{2m_0-2} = \cdots = a_0 = 0 \qquad （\text{与 } a_0 \neq 0 \text{ 矛盾}）$$

综上，当 $c = -n \notin \mathbb{Z}^-$ 时，方程有广义幂级数解

$$f_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m+c} \qquad \sim x^{-n} \quad (|x| \ll 1)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(m+c)(m-1+c)\cdots\cdots(1+c)} x^{2m+c}$$

$$\boxed{f_2(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}m!(m+c)(m-1+c)\cdots\cdots(1+c)}x^{2m+c}}$$

取 $a_0=\dfrac{1}{2^c\Gamma(1+c)}$ $\boxed{c=-n\notin\mathbb{Z}^-}$

$$\Rightarrow f_2(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1+c)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+c}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1-n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$$

$$=: J_{-n}(x)$$

$$\boxed{s\Gamma(s)=\Gamma(s+1)\quad \forall s\notin\mathbb{Z}^-\cup\{0\}}$$

第一类 $-n$ 阶 Bessel 函数

$$\boxed{J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1-n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}}\qquad \boxed{-n\notin\mathbb{Z}^-}$$

注意到

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=0\quad \forall s=0,-1,-2,\cdots$$

对于 $\boxed{-n\in\mathbb{Z}^-}$，可以形式上定义

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1-n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$$

注：（1）此时前 n 项 $(0\le m\le n-1)$ 为0

（2）$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)\qquad (n\in\mathbb{Z})$ （练习）

总结：（1）Bessel 方程具有广义幂级数解

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \qquad (n\in\mathbb{R})$$

（2）

$$J_n(x)\sim x^n \qquad (n\notin\mathbb{Z})$$

$$J_{-n}(x)\sim x^{|n|}\sim J_n(x) \qquad (n\in\mathbb{Z})$$

$$(|x|\ll 1)$$

（3）当 $n\notin\mathbb{Z}$ 时, Bessel 方程的通解为

$$f(x)=c_1J_n(x)+c_2J_{-n}(x)$$

注：收敛性、可微性可直接验证（练习）

问题：当 $n\in\mathbb{Z}$ 时, Bessel 方程的通解如何表示？

第二类 Bessel 函数（又称Neumann函数）的构造

定义

$$Y_n(x) := \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \qquad (n \notin \mathbb{Z})$$

注：当 $n \notin \mathbb{Z}$ 时，$Y_n(x)$ 与 $J_n(x)$ 线性无关，从而 Bessel 方程的通解可写为

$$f(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x) \qquad (n \notin \mathbb{Z})$$

定义

$$Y_n(x) := \lim_{s \to n} \frac{J_s(x)\cos s\pi - J_{-s}(x)}{\sin s\pi} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

$\frac{0}{0}$ 不定型

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

应用 L’Hospital 法则可得（计算冗长）

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k+1}$$

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)^m}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}\left(\sum_{k=0}^{n+m-1}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k+1}\right)$$

$(n=1,2,\cdots)$

其中

$$\gamma=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln k\right)=0.57721\cdots$$ （Euler 常数）

注：（1）当 $|x| \ll 1$ 时，不失一般性只考虑 $x>0$，

$$Y_n(x) \sim \begin{cases} \ln x & (n=0) \\ -x^{-n} & (n>0) \end{cases}$$

（2）$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \quad (n \in \mathbb{Z})$ （练习）

从而 $n \ge 0$ 时 Bessel 方程的通解为

$$f(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$$

注：从第一类 Bessel 函数可以衍生出 Bessel 方程的多种形式的解，如第三类Bessel函数，又称Hankel函数（可参阅书中第 93页）

第一类 Bessel 函数的性质

常用递推公式：$\forall n \in \mathbb{R}$

（1） $$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)$$

（2） $$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$\Rightarrow$ （3） $$x J_n'(x) + n J_n(x) = x J_{n-1}(x)$$

（4） $$x J_n'(x) - n J_n(x) = -x J_{n+1}(x)$$

$\Rightarrow$ （5） $$x J_{n-1}(x) + x J_{n+1}(x) = 2n J_n(x)$$

（6） $$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2 J_n'(x)$$

注：（1）公式（4）$\Rightarrow J_0'(x)=-J_1(x)$，根据递推公式，

掌握了 $J_0(x)$ 理论上就可了解 $J_n(x)\,(n\in\mathbb{Z})$

（2）递推公式可用来计算有关 $J_n(x)$ 的积分

（3）

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$\Rightarrow J_{n+\frac{1}{2}}(x)\quad (n\in\mathbb{Z})$ 为初等函数（仅有的！）

（4）第二类 Bessel 函数有同样的递推公式

§ 3. 3. 3 Bessel 函数无穷远渐近表示与零点

$$J_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-\frac{3}{2}})\quad (x\gg 0)$$

Damped Cosine

$\longrightarrow J_n(x)$ 有无穷多正值零点，记为

$$0<\mu_1^{(n)}<\mu_2^{(n)}<\cdots<\mu_m^{(n)}<\cdots$$

注：（1） 上述渐近公式的证明比较复杂

（2） $\mu_m^{(n)}$ 一般没有确定的公式表达（有数值表）

（3） $\lim\limits_{m\to\infty}\left[\mu_{m+1}^{(n)}-\mu_m^{(n)}\right]=\pi$

（4） $$Y_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-\frac{3}{2}})\ (x\gg 0)$$

Bessel 函数的零点在特征值问题中有重要意义。由渐进表达式，

$J_n(x)$, $Y_n(x)$ 都有无穷多个实零点。

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \qquad (n\in\mathbb{R})$$

下面是一些关于Bessel 函数零点的重要结论（证明略）：

（1）当 $n>-1$ 时, $J_n(x)$ 所有零点都在实轴上，且非0零点都是1级的。

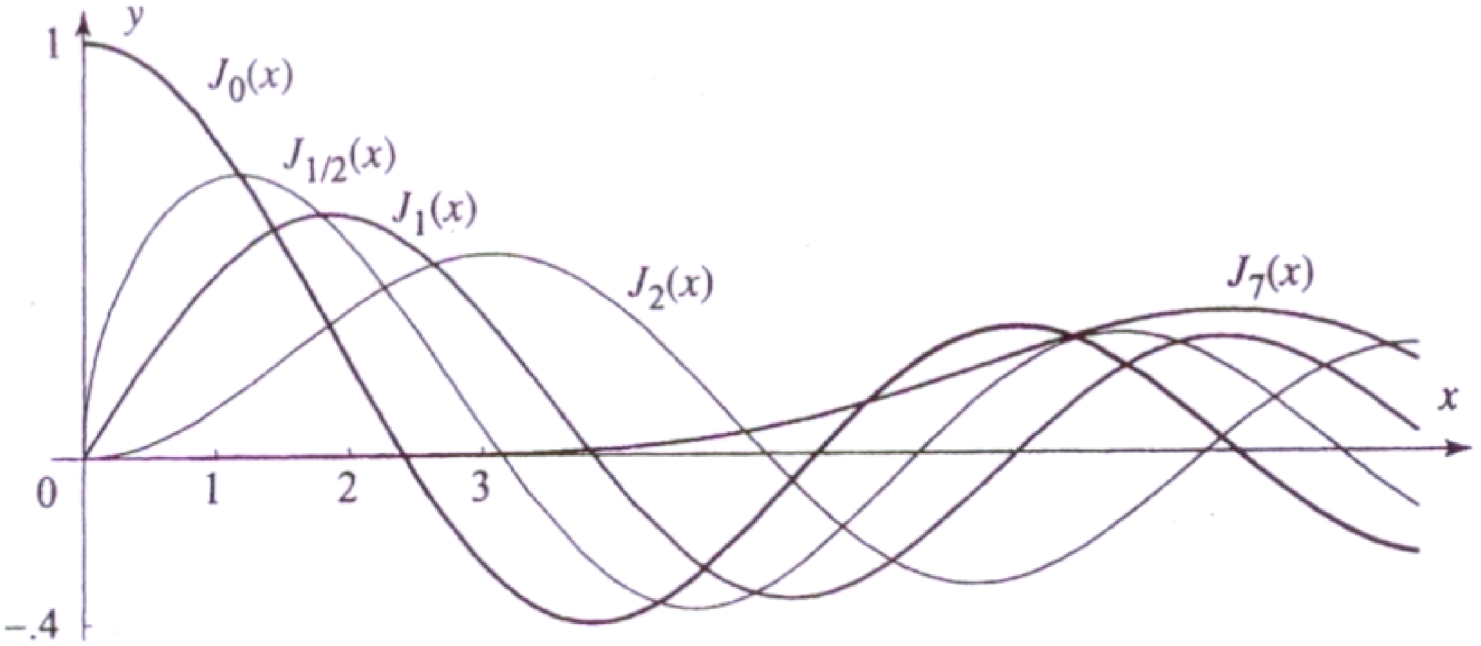
（2） $J_n(x)$ 的零点在实轴上关于原点是对称分布的。

$$(\because J_n(-x)=(-1)^n J_n(x))$$

（3）当 $n\in\mathbb{Z}$ 时, 0是 $J_n(x)$ 的$|n|$级零点；当 $n\notin\mathbb{Z}$ 时, 0是$J_n(x)$的支点。

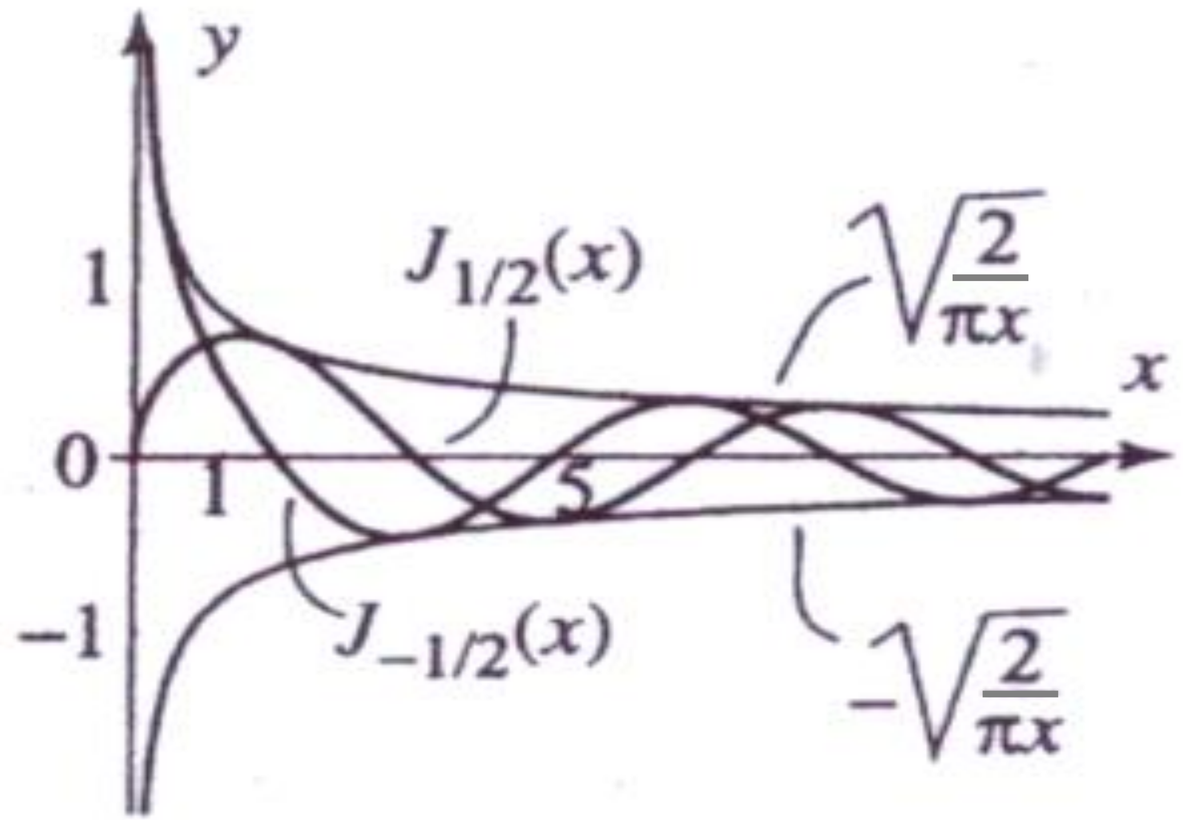
（4）$J_n(x)$ 与 $J_{n+1}(x)$ 的零点是彼此相间的，即 $J_n(x)$ 的任意两个相邻实零点之间必存在且只有一个$J_{n+1}(x)$ 的零点。$J_n(x)$ 与 $J_{n+1}(x)$ 无非0的公共零点。$J_n(x)$ 第一个正零点小于$J_{n+1}(x)$ 的第一个正零点。

（5）$J_n'(x)$ 与 $J_n(x)+hxJ_n'(x)$（h为常数）都有无穷多个实零点。



第一类Bessel函数

From *N. Asmar, PDEs with Fourier Series and Boundary Value Problems, Second Edition*



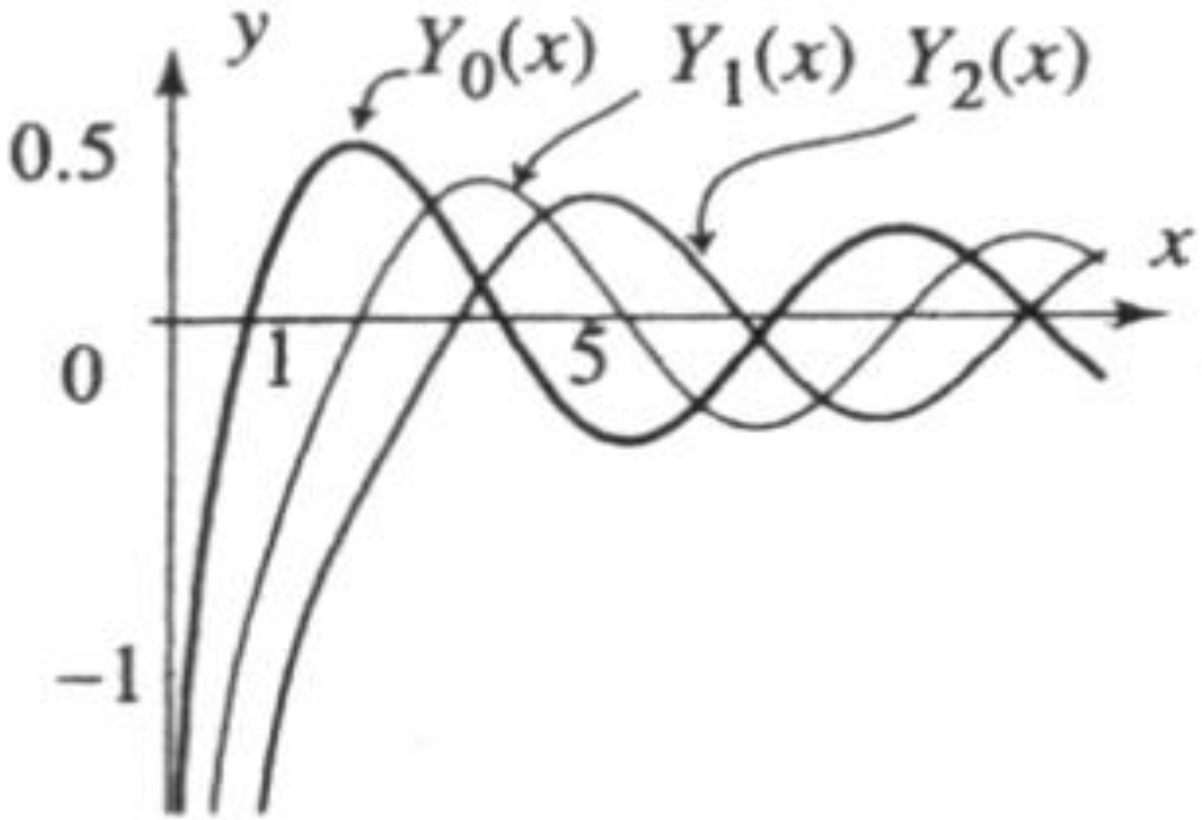
第一类Bessel函数

From *N. Asmar, PDEs with Fourier Series and Boundary Value Problems, Second Edition*

第一类Bessel函数的正值零点数值表

$\mu_m^{(n)}$ m \ n	0	1	2	3	4	5
1	2.405	3.832	5.136	6.380	7.588	8.771
2	5.520	7.016	8.417	9.761	11.065	12.339
3	8.654	10.173	11.620	13.015	14.373	15.700
4	11.792	13.324	14.796	16.223	17.616	18.980
5	14.931	16.471	17.960	19.409	20.827	22.218
6	18.071	19.616	21.117	22.583	24.019	25.430
7	21.212	22.760	24.270	25.748	27.199	28.627
8	24.352	25.904	27.421	28.908	30.371	31.812
9	27.493	29.047	30.569	32.065	33.537	34.989

引自《*数学物理方程与特殊函数*》（*第三版*），*王元明编*



第二类Bessel函数

From *N. Asmar, PDEs with Fourier Series and Boundary Value Problems, Second Edition*

§3. 3. 4 虚变量 Bessel 方程

柱坐标下的 Laplace 方程（柱形区域）

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0$$

令 $u(r,\theta,z)=R(r)\Phi(\theta)Z(z)$ （分离变量）

$$\Rightarrow R''\Phi Z+\frac{1}{r}R'\Phi Z+\frac{1}{r^2}R\Phi''Z+R\Phi Z''=0$$

$$\Rightarrow \frac{r^2R''+rR'}{R}+r^2\frac{Z''}{Z}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\mu$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi''+\mu\Phi=0 & （\mu \text{ 为待定常数}） \\ Z''+\alpha Z=0 & （\alpha \text{ 为待定常数}） \\ \boxed{r^2R''+rR'-[\alpha r^2+\mu]R=0} & \end{cases}$$

$$\boxed{r^2R''+rR'-[\alpha r^2+\mu]R=0}$$

作变量代换 $x=\sqrt{\alpha}r$ $\quad f(x)=R(\frac{x}{\sqrt{\alpha}})=R(r)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^2f''+xf'-(x^2+n^2)f=0} \qquad (0\le\mu=n^2)$$

称为n阶虚变量Bessel方程。

再作变量代换 $\xi=ix,$ 上述方程化为n阶Bessel方程

$$\Rightarrow \quad \xi^2f''+\xi f'+(\xi^2-n^2)f=0$$

$\Rightarrow$ n阶虚变量Bessel方程的通解为

$$f(x)=CJ_n(ix)+DY_n(ix)$$

引进两个实函数

$$I_n(x) \triangleq e^{-i\frac{n\pi}{2}} J_n(ix)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(m+1+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n},$$

$$K_n(x) \triangleq \begin{cases} \dfrac{\pi[-I_n(x)+I_{-n}(x)]}{\sin n\pi}, & n\notin\mathbb{Z} \\ \lim\limits_{s\to n}\dfrac{\pi[-I_s(x)+I_{-s}(x)]}{\sin s\pi}, & n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$I_n(x)$，$K_n(x)$ 分别称为第一、第二类n阶虚变量Bessel函数。

可以证明 $I_n(x)$，$K_n(x)$ 不存在实零点，且

$$|I_n(0)|<+\infty, \lim_{x\to 0}|K_n(x)|=+\infty。$$

n阶虚变量Bessel方程的通解为：$f(x)=AI_n(x)+BK_n(x).$

§3.4 Bessel方程特征值问题
及Bessel函数的应用

柱坐标下的 Helmholtz/Laplace 方程通过分离变量，得到关于$R(r)$的Bessel 方程。如果在圆柱或圆盘上求解问题，则需配以边界条件，构成Bessel特征值问题

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+(\lambda r^2-\nu^2)R=0,\quad 0<r<a & (1) \\ \underline{|R(0)|<+\infty,}\qquad \alpha R(a)+\beta R'(a)=0 & (2) \end{cases}$$

自然边界条件

其中，有界性条件是由于$r=0$ 是方程的正则奇点而自然添加。

这是正则奇点下的S-L特征值问题, 故有 $\lambda=\omega^2\geq 0.$

令 $x=\omega r,\qquad y(x)=R(\frac{x}{\omega})=R(r)$，则（1）式化为标准的Bessel方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \qquad (3)$$

（3）的通解为

$$R(r)=CJ_\nu(\omega r)+DY_\nu(\omega r)$$

由于$Y_\nu(x)$ 在x=0处无界，$|R(0)|<+\infty$ $\Rightarrow$ D=0

$\Rightarrow$ $\alpha J_\nu(\omega a)+\beta J'_\nu(\omega a)=0$ （4）

根据 $J_\nu(x)$ 的零点性质，可得特征值和特征函数如下；

Case 1. a 端为第I类边界条件(β=0)

$\lambda_n=\omega_{1n}^2, n=1,2,\cdots,$ ω_{1n} 是方程 $J_\nu(\omega a)=0$ 的第n个正根，

特征函数 $R_n(r)=J_\nu(\omega_{1n}r).$

Case 2. a 端为第II类边界条件 (α=0)

$\lambda_n=\omega_{2n}^2, n=1,2,\cdots,$ ω_{1n} 是方程 $J'_\nu(\omega a)=0$ 的第n个正根，

特征函数 $R_n(r)=J_\nu(\omega_{2n}r)$. 另加特征值 $\lambda_0=0$, $R_0(r)=1.$

Case 3. a 端为第III类边界条件

$\lambda_n = \omega_{3n}^2, n = 1, 2, \cdots,\quad \omega_{1n}$ 是方程 $\alpha J_\nu(\omega a) + \beta J_\nu'(\omega a) = 0$

的第n个正根，特征函数 $R_n(r) = J_n(\omega_{3n} r)$.

由S-L定理，特征函数系 $\{J_\nu(\omega_{1n} r)\}, \{1, J_\nu(\omega_{2n} r)\}, \{J_\nu(\omega_{3n} r)\}$

分别是函数空间$L_r^2([0,a])$ 里的完备正交基底。

故对 $\forall f(r) \in L_r^2([0,a])$, 有Fourier-Bessel展开

$$f(r) = \sum_{n=0\text{或}1}^{+\infty} C_n J_\nu(\omega_{kn} r), \qquad C_n = \frac{1}{N_{\nu kn}^2} \int_0^a r\, f(r) J_\nu(\omega_{kn} r) dr,$$

其中，模平方

$$N_{\nu kn}^2 = \int_0^a r\, J_\nu^2(\omega_{kn} r) dr.$$

例 求解 Helmholtz 方程：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+\lambda u=0 & x^2+y^2<r_0^2 \\ u\big|_{x^2+y^2=r_0^2}=0 & （\lambda \text{ 为待定常数}） \end{cases}$$

使用分离变量法 $u(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2R''+rR'+(\lambda r^2-n^2)R=0 \qquad (0\le n\in\mathbb{Z}) \\ |R(0)|<\infty \qquad R(r_0)=0 \end{cases}$$

注：（1）原方程两端同乘以 u, 分部积分可得

$$\int_{x^2+y^2<r_0^2} -|\nabla u|^2+\lambda|u|^2\,dxdy=0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda>0}$$

（2）第二类齐次边界条件蕴含 $\lambda\ge 0$（练习）

$$\boxed{r^2R''+rR'+(\lambda r^2-n^2)R=0}\qquad \boxed{(0\le n\in\mathbb{Z},\ \lambda>0)}$$

根据 Bessel 方程的通解公式可得

$$\boxed{x=\sqrt{\lambda}\,r}$$

$$R(r)=c_1J_n(\sqrt{\lambda}\,r)+c_2Y_n(\sqrt{\lambda}\,r)$$

$$\boxed{|R(0)|<\infty}$$

$\Rightarrow R(r)=J_n(\sqrt{\lambda}\,r)$ （忽略常数 c_1）

$$\boxed{R(r_0)=0}$$

$$\Rightarrow J_n(\sqrt{\lambda}\,r_0)=0$$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda_m^{(n)}}=\dfrac{\mu_m^{(n)}}{r_0}$ （$\mu_m^{(n)}$ 为 $J_n(x)$ 的正值零点）

从而得到满足自然条件和边界条件的一族解

$$R_{mn}(r)=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\qquad (0\le n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}^+)$$

又 $\Phi_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta \qquad (0\le n\in\mathbb{Z})$

从而得到 Helmholtz 方程的解

$$J_n(\sqrt{\lambda_m^{(n)}}\,r)\cos n\theta \qquad (0\le n\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}^+)$$

$$J_n(\sqrt{\lambda_m^{(n)}}\,r)\sin n\theta \qquad (n\in\mathbb{Z}^+, m\in\mathbb{Z}^+)$$

圆域上 Laplace 算子的特征函数

$$\lambda=\lambda_m^{(n)}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2$$

—— 特征值

注：（1）可以证明特征函数在 $L^2(B_{r_0}(O))$ 内正交,

类似矩形域上的特征函数 $\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}$

$$\boxed{J_n(\sqrt{\lambda_m^{(n)}}\,r)\cos n\theta} \qquad \boxed{J_n(\sqrt{\lambda_m^{(n)}}\,r)\sin n\theta}$$

注：（2）注意到 $\cos n\theta, \sin n\theta$ 在 $L^2([0,2\pi])$ 内正交，

并且 $dxdy = r\,dr\,d\theta$，只需证明 $J_n(\sqrt{\lambda_m^{(n)}}\,r)$

相同的 n
不同的 m

在加权 r 的平方可积函数空间 $L_r^2([0,r_0])$ 内

正交，这可直接验证 （练习）

或应用Sturm-Liouville 理论

（3）Laplace 算子的特征函数的完备正交特性

是应用（特征函数法）可行的基础

Bessel 函数的进一步应用

例：求解 $\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) & x^2 + y^2 < 1,\ t > 0 \\ u\big|_{x^2+y^2=1} = 0 & u\big|_{t=0} = 1 - (x^2 + y^2) \end{cases}$

注：齐次（第一类）边界条件　圆形区域

解：令 $u(x,y,t) = U(x,y)T(t)$

$$\Rightarrow \frac{T'}{a^2T} = \frac{\Delta U}{U} = -\lambda \qquad （\lambda \text{ 为待定常数}）$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0 \\ \Delta U + \lambda U = 0 \end{cases}$$

边界条件 $\Rightarrow U\big|_{x^2+y^2=1} = 0$

Laplace算子
特征值问题

采用极坐标，由前面讨论可知特征函数为

$$J_n(\mu_m^{(n)} r)\cos n\theta \qquad J_n(\mu_m^{(n)} r)\sin n\theta$$

对应的特征值为 $\lambda = (\mu_m^{(n)})^2 \qquad (0 \le n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+)$

$$\Rightarrow T_{mn}(t) = \exp\left[-a^2(\mu_m^{(n)})^2 t\right]$$ （相差常数意义下）

从而得到满足方程和边界条件的一族解

$$\exp\left[-a^2(\mu_m^{(n)})^2 t\right] J_n(\mu_m^{(n)} r)\cos n\theta$$

$$\exp\left[-a^2(\mu_m^{(n)})^2 t\right] J_n(\mu_m^{(n)} r)\sin n\theta$$

$$(0 \le n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+)$$

期望 $u(r,\theta,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-a^2(\mu_m^{(n)})^2 t\right]J_n(\mu_m^{(n)}r)$

$$\cdot\left[C_{mn}\cos n\theta+D_{mn}\sin n\theta\right]$$

满足初始条件 $u(r,\theta,0)=1-r^2$

$$\sim\underline{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}J_n(\mu_m^{(n)}r)\left[C_{mn}\cos n\theta+D_{mn}\sin n\theta\right]}$$

沿特征函数展开

$$\Rightarrow\ C_{mn}=D_{mn}=0\quad(n>0)$$

$$\Rightarrow\ 1-r^2\sim\boxed{\sum_{m=1}^{\infty}C_m J_0(\mu_m^{(0)}r)}$$

Fourier-Bessel 级数

$$\Rightarrow\ C_m=\frac{1}{\int_0^1\left[J_0(\mu_m^{(0)}r)\right]^2 r\,dr}\int_0^1 J_0(\mu_m^{(0)}r)(1-r^2)r\,dr$$

例：求解常微分方程

$$\boxed{x^2 f'' + axf' + (b + cx^d) f = 0}$$ （a,b,c,d 为常数）

解：$cd = 0 \longrightarrow$ Euler 方程（易解）

不妨设 $cd \neq 0$

令 $\boxed{x = kt^{\alpha}}$ $\boxed{u(t) = t^{-\beta} f(kt^{\alpha})}$ （k, α, β 为待定常数）

$$\Rightarrow \quad t^2 u'' + \left[\underline{2\beta + (a-1)\alpha} + 1\right] tu'$$

$$+ \left[\underline{c\alpha^2 k^d} t^{\underline{d\alpha}} + \underline{(a-1)\alpha\beta + b\alpha^2 + \beta^2}\right] u = 0$$

$\boxed{记为 -n^2}$

取 $\begin{cases} 2\beta + (a-1)\alpha = 0 \\ d\alpha = 2 \quad c\alpha^2 k^d = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow t^2 u'' + tu' + (t^2 - n^2) u = 0$$ （n 阶 Bessel 方程）

例：（Bernoulli 的悬链问题）

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(xu_{xx} + u_x) \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u|_{x=0} \text{ 有界}，\quad u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = f(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

解：运用分离变量法 $u(x,t) = U(x)T(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} xU'' + U' + \lambda U = 0 \\ U(0) \text{ 有界}，\quad U(l) = 0 \end{cases}$$

（λ 为待定常数）

及 $\quad T'' + \lambda a^2 T = 0$

$xU'' + U' + \lambda U = 0$ **不是** Bessel 方程。

注意 $a=1,b=0,c=\lambda,d=1 \quad \Rightarrow \quad \alpha=2,\beta=0,k=\dfrac{1}{4\lambda}$

$\Rightarrow$ 作变量替换 $s=2\sqrt{\lambda x},\ \ y(s)=U(\dfrac{s^2}{4\lambda})=U(x)$

$xU''+U'+\lambda U=0$ 转化成 0 阶Bessel 方程

$$s^2y''+sy'+s^2u=0$$

$\Rightarrow \quad y(s)=CJ_0(s)+DY_0(s) \Rightarrow U(x)=CJ_0(2\sqrt{\lambda x})+DY_0(2\sqrt{\lambda x})$

$\because U(0)$ 有界 $\Rightarrow$ $D=0$,

又 $\quad U(l)=CJ_0(2\sqrt{\lambda l})=0 \ \Rightarrow$

特征值 $\lambda_n=\dfrac{x_n^2}{4l},n=1,2,\cdots,$ $\quad x_n$ 是 $J_0(x)$ 的第 n 个正零点,

特征函数 $U_n(x)=J_0\left(x_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right),\quad n=1,2,\cdots.$

相应地，$T_n(t)=A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t,$

$$\omega_n=\frac{a\,x_n}{2\sqrt{l}},\ n=1,2,\cdots.$$

$$\Rightarrow\quad u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t)J_0\left(x_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right),$$

由初始条件

$$u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}A_nJ_0\left(x_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)=f(x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}\omega_nB_nJ_0\left(x_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)=g(x),$$

$$\Rightarrow\quad A_n,\ B_n,\ n=1,2,\cdots.$$

注：$\{U_n(x)\}$ 是函数空间 $L^2([0,l])$ 里的完备正交基底。

§3.5 球形域上的 Laplace 方程

方程：$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 \qquad x^2+y^2+z^2<1$

区域形状 ⟶ 使用球坐标 (r,ϕ,θ)

$$\boxed{x=r\sin\theta\cos\phi \qquad y=r\sin\theta\sin\phi \qquad z=r\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\left(r^2u_r\right)_r+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta u_\theta\right)_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}u_{\phi\phi}\right)=0$$

$$0<r<1,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\phi<2\pi$$

令 $u(r,\phi,\theta)=R(r)\Phi(\phi)\Theta(\theta)$ （分离变量）

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\left(r^2R'\right)'}{R}+\frac{1}{r^2}\left(\underline{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\left(\sin\theta\Theta'\right)'}{\Theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\boxed{\frac{\Phi''}{\Phi}}}\right)=0$$

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\left(r^2R'\right)'}{R}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\left(\sin\theta\,\Theta'\right)'}{\Theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}\right)=0}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Phi''+\alpha\Phi=0\\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\left(\sin\theta\,\Theta'\right)'}{\Theta}+\dfrac{-\alpha}{\sin^2\theta}=-\mu \\ r^2R''+2rR'-\mu R=0\end{cases}$$

（α,μ 为待定常数）

$r^2R''+2rR'-\mu R=0$ —— Euler 方程

注：（1） Φ的周期条件 $\Rightarrow\alpha=m^2\qquad(0\le m\in\mathbb{Z})$

（2）若是球形域上的 Helmholtz 方程，则导出

$$r^2R''+2rR'+(\lambda r^2-\mu)R=0$$

（球 Bessel 方程）可化为 Bessel 方程求解

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\Theta}+\frac{-\alpha}{\sin^2\theta}=-\mu}\qquad \boxed{\alpha=m^2}$$

作变量代换 $x=\cos\theta \quad f(x)=\Theta(\theta)$ 计算可得（练习）

$$\boxed{(1-x^2)f''-2xf'+\left(\mu-\frac{m^2}{1-x^2}\right)f=0\qquad(-1<x<1)}$$

m 阶 Legendre 伴随方程

特别地，当 $m=0$ 时

$$\boxed{(1-x^2)f''-2xf'+\mu f=0\qquad(-1<x<1)}$$

Legendre 方程

注：（1） $m=0 \longleftrightarrow u$ 与 ϕ无关

（2）Laplace / Helmholtz 方程的定解条件的处理与圆域情形类似

§3.6 Legendre 方程与 Legendre 函数

§ 3. 5. 1 Legendre 方程求解

$$(1-x^2)f''-2xf'+\mu f=0 \qquad (-1<x<1)$$

记 $\mu=n(n+1)$，n 可实可复

$$\Rightarrow \quad f''-\frac{2x}{1-x^2}f'+\frac{n(n+1)}{1-x^2}f=0 \qquad (-1<x<1)$$

在 $|x|<1$ 内解析

尝试幂级数形式解

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \qquad (-1<x<1)$$

这里 a_k 为待定常数 $(k=0,1,2,\cdots)$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_k x^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}[n(n+1)-k(k+1)]a_k x^k=0$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[n(n+1)-k(k+1)\right]a_k x^k = 0}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left[\underline{\big(n(n+1)-k(k+1)\big)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2}}\right]x^k = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{k+2} = \frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+2)(k+1)}a_k \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

$\Rightarrow$ 奇数项系数与偶数项系数无关，分别由 a_1和 a_0 的取值确定

取 $a_1 = 0 \quad a_0 \neq 0$ 得到 $f_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}x^{2m}$

Legendre 函数

取 $a_1 \neq 0 \quad a_0 = 0$ 得到 $f_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1}x^{2m+1}$

注：（1）直接计算可得

$$\boxed{a_{k+2}=\frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+2)(k+1)}a_k}$$

$$a_{2m}=\frac{a_0}{(2m)!}(2m-2-n)(2m-4-n)\cdots\cdots(0-n)$$

$$\cdot(2m-2+n+1)(2m-4+n+1)\cdots\cdots(0+n+1)$$

$$a_{2m+1}=\frac{a_1}{(2m+1)!}(2m-1-n)(2m-3-n)\cdots\cdots(1-n)$$

$$\cdot(2m-1+n+1)(2m-3+n+1)\cdots\cdots(1+n+1)$$

$$(m=0,1,2,\cdots)$$

（2）对于适当值的 n, 可以用 Gamma 函数简化系数的表达式

注：（3） f_1, f_2 线性无关，从而 Legendre 方程通解为

$$f(x)=c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)$$

（收敛性、可微性可直接验证，练习）

（4）可以证明：当 $n\notin\mathbb{Z}$ 时，f_1, f_2 在 $|x|<1$ 内绝对收敛，但在 $x=1$ 或 -1 处发散（练习）

$\Rightarrow$ f 在 $|x|\le 1$ 上无界 （一般**不是**想要的！）

只考虑 $n\in\mathbb{Z}$，不妨设 $n\ge 0$

$$\boxed{n(n+1)=(-n-1)(-n)}$$

$\Rightarrow a_{n+2}=a_{n+4}=\cdots=0$

$$\boxed{a_{k+2}=\frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+2)(k+1)}a_k}$$

$\Rightarrow$ f_1, f_2 之一为 n 次多项式

另一为无穷级数

取适当值的 a_1（n奇）或 a_0（n偶）使得该多项式在

$x=1$ 处值为1（正规化）

记此多项式为 $P_n(x)$ —— n次 Legendre 多项式
或第一类Legendre 函数

通过（较繁杂的）计算可得

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$$

这里 $[n/2]=\begin{cases}(n-1)/2 & n\text{为奇数}\\ n/2 & n\text{为偶数}\end{cases}$

特别地，最高次项系数为

$$a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

可以用常微分方程中的Liouville公式求得另外一个线性无关解。

Liouville公式：　设 $y_1(x)$ 是方程

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$$

的非零解，则 $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{[y_1(x)]^2}\exp(-\int P(x)dx)dx$

是上述方程的另一个线性无关解。

Legendre 方程的另一个无穷级数解记为 $Q_n(x)$，则

$$Q_n(x)=P_n(x)\int\frac{1}{[P_n(x)]^2}\exp(-\int\frac{-2x}{1-x^2}dx)dx=P_n(x)\int\frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2}$$

$$\Rightarrow Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x)$$

$Q_n(x)$ 称为第二类Legendre 函数。

注：（1）可以证明 当 $x\to\pm1$ 时，$Q_n(x)\to\infty$，

故 $Q_n(x)$ 在 $|x|\le 1$上无界

（2）当$0\le n\in\mathbb{Z}$时 Legendre 方程的通解为

$$f(x)=c_1P_n(x)+c_2Q_n(x)$$

（3）Legendre 多项式的生成函数（或母函数）：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \qquad |x|\le 1,\ |t|<1$$

（4）Rodrigues （罗德里格斯）公式：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad n=0,1,2,\cdots$$

前几个 Legendre 多项式

$$P_0(x)=1 \qquad P_1(x)=x$$

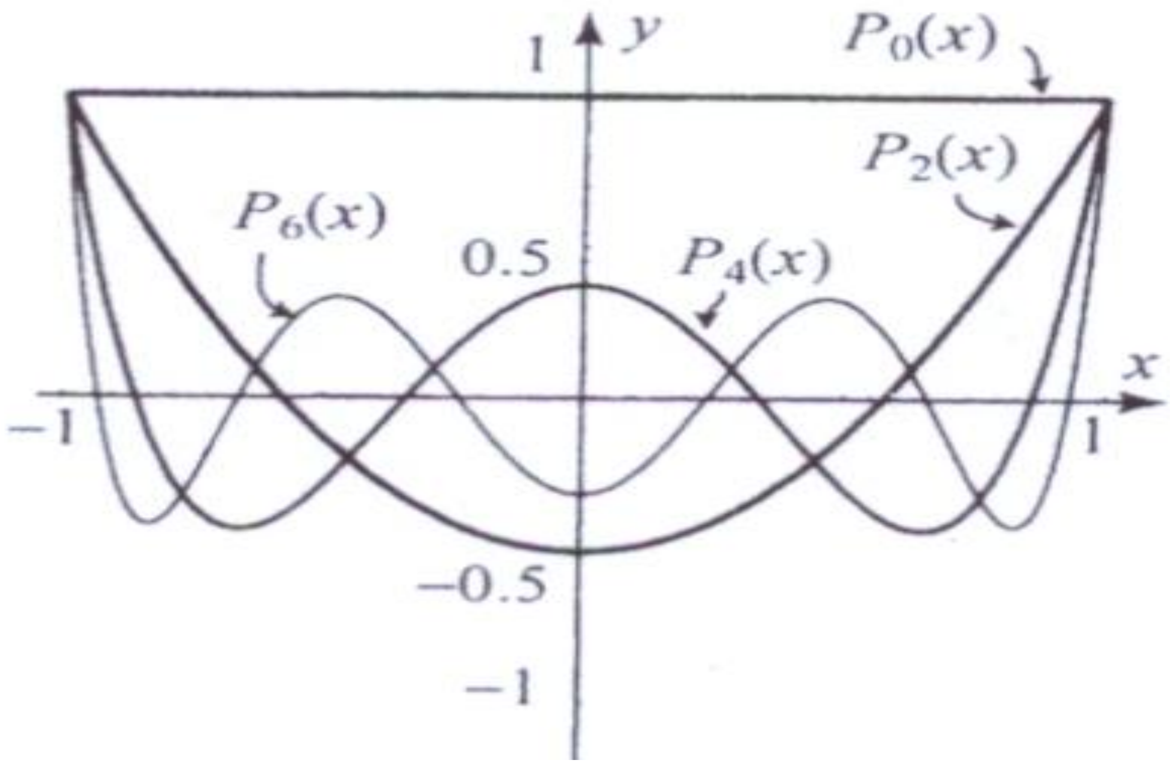
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

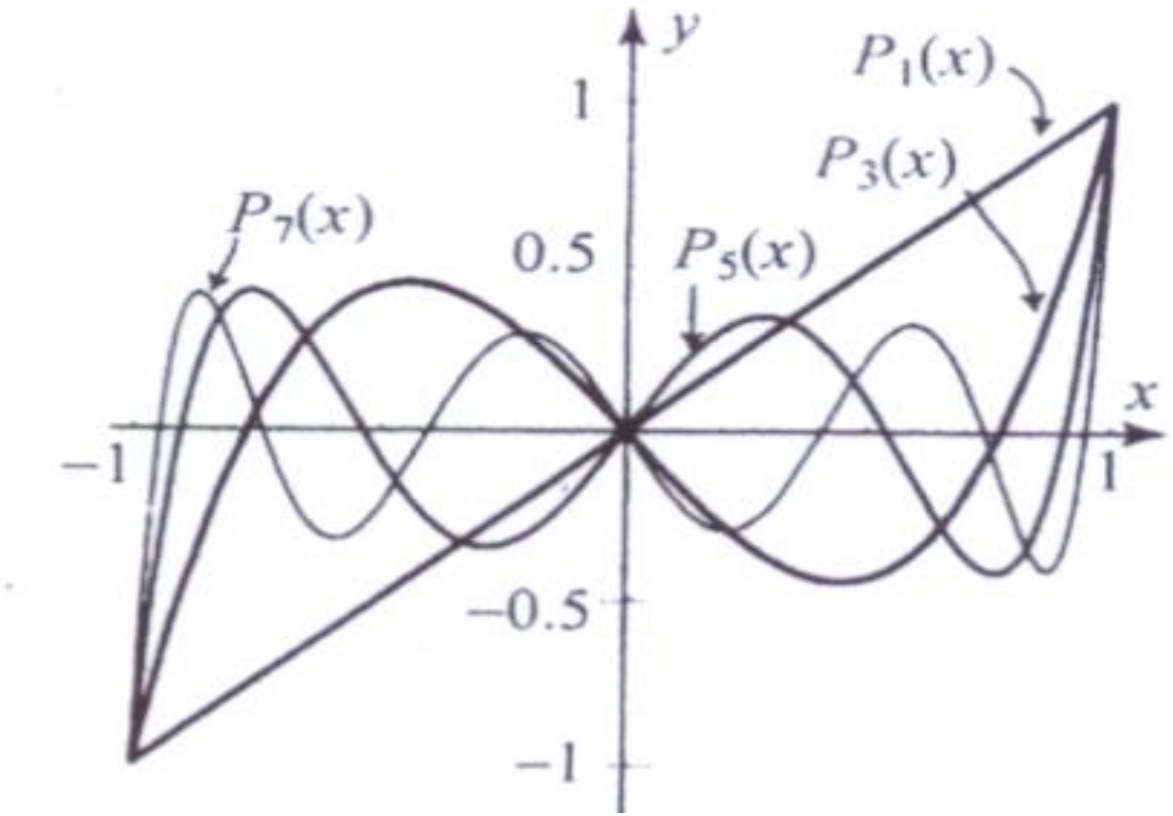
$$P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$$

$$P_7(x)=\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$$



Legendre 多项式

From *N. Asmar, PDEs with Fourier Series and Boundary Value Problems, Second Edition*



Legendre 多项式

From *N. Asmar, PDEs with Fourier Series and Boundary Value Problems, Second Edition*

Legendre 多项式的性质 （练习）

（1）若 n 为奇（偶）数，则 $P_n(x)$ 为奇（偶）函数

（2） $P_n(1)=1$ 且 $P_n(-1)=(-1)^n \qquad (n=0,1,2,\cdots)$

（3） $|P_n(x)|\le 1, \quad \forall\, |x|\le 1,\ n=0,1,2,\cdots$

（4） $P_n(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有且仅有 n 个相异简单零点

（5） $(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)=(2n+1)xP_n(x)$

$(n=1,2,\cdots)$

（6）正交：

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases} 0 & m\ne n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m=n \end{cases}$$

§3.5.2 伴随Legendre 方程求解

Helmholtz 方程在球坐标下，得到关于θ 的常微分方程

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\left(\sin\theta\,\Theta'\right)'}{\Theta}+\frac{-\alpha}{\sin^2\theta}=-\mu} \qquad \boxed{\alpha=m^2} \qquad (1)$$

作变量代换 $x=\cos\theta$， $f(x)=\Theta(\theta)=\Theta(\arccos x)$， 计算可得

$$\boxed{(1-x^2)f''-2xf'+\left(\mu-\frac{m^2}{1-x^2}\right)f=0 \qquad (-1<x<1)} \qquad (2)$$

此为 m 阶 Legendre 伴随方程。 特别地，当 $m=0$ 即 $\alpha=0$ 时，为Legendre方程。

注: $\theta=0,\pi$ 为方程（1）的奇点，需要添加有界性边界条件

$$|\Theta(0)|<+\infty，\ |\Theta(\pi)|<+\infty \ \Rightarrow\ |f(\pm1)|<+\infty \longrightarrow \text{自然边界条件}$$

当$m \in \mathbb{Z}^+$时,我们找出Legendre方程的与伴随Legendre方程的联系。

令 $f(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} y(x)$，代入方程（2）$\Rightarrow$

$$(1-x^2)y'' - 2x(m+1)y' + [\mu - m(m+1)]y = 0 \qquad (3)$$

若对Legendre方程

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + \mu v = 0 \qquad (4)$$

关于x 求一阶导数, 可得

$$(1-x^2)(v')'' - 2x(1+1)(v')' + [\mu - 1\cdot(1+1)]v' = 0$$

恰为方程（3）取 m=1 时的情形。

一般地，对方程（4）两边关于x 求m 阶导数，可以得到

$$(1-x^2)v^{(m+2)} - 2x(m+1)v^{(m+1)} + [\mu - m(m+1)]v^{(m)} = 0$$

$\Rightarrow$ 当$v(x)$是Legendre方程（4）的解时，$y(x)=v^{(m)}(x)$

是方程（3）的解，进一步，$f(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y(x)$ 是整数m 阶伴随Legendre方程（2）的解。

当 $\mu=n(n+1)$ 时, Legendre方程（4）的通解为

$$v(x)=CP_n(x)+DQ_n(x)$$

$P_n(x)$ 为n次Legendre多项式，$Q_n(x)$ 为n次第二类Legendre函数。记

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x),$$

$$m\le n$$

$$Q_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}Q_n(x)$$

它们分别称作m阶n次第一类、第二类Legendre函数。

相应地，m阶伴随Legendre方程（2）的通解为

$$f(x)=CP_n^m(x)+DQ_n^m(x),$$

其中， 伴随Legendre函数 $P_n^m(x)$在± 1有界，$Q_n^m(x)$在± 1无界。

§3. 7 Legendre 方程特征值问题及Legendre函数应用

正则奇点下的S-L定理： S-L型方程的特征值问题

$$\begin{cases} \left(k(x)f'\right)' - q(x)f + \lambda\rho(x)f = 0, & a<x<b, & (1) \\ |f(a)| < +\infty, \quad |f(b)| < +\infty \longrightarrow \text{自然边界条件} & & (2) \end{cases}$$

方程的系数满足

(i) $k(x)\in C^1[a,b]$, $q(x),\rho(x)\in C[a,b]$,

(ii) 在(a,b)上，$k(x)>0, q(x)\geq 0, \rho(x)>0$, a, b端是$k(x)$的零点（至多一级），或是$q(x)$的极点（至多一级）。

则该正则奇点下的特征值问题的特征值、特征函数与S-L定理2有相同的结论。

注：上述定理假设了两端均为正则奇点，若一端为正则奇点，另一端为常点，则常点端配以齐次边界条件，如Bessel特征值问题。

Legendre方程的特征值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)f''-2xf'+\lambda f=0, & -1<x<1, \quad (1) \\ |f(\pm1)|<+\infty \longrightarrow \text{自然边界条件} & (2) \end{cases}$$

±1 是Legendre方程的正则奇点。类似于Bessel 方程的特征值问题

Legendre方程的特征值问题是上述S-L定理的一个特殊情形。

事实上，根据上一节对Legendre方程解的分析，Legendre方程的特征值为

$$\lambda_n = n(n+1),\ n=0,1,2,\cdots,$$

相应特征函数为 n 次Legendre多项式

$$P_n(x),\ \ n=1,2,\cdots.$$

$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是函数空间 $L^2([-1,1])$ 里的完备正交基底。

$\forall\, \varphi(x) \in L^2([-1,1])$, 有Fourier-Legendre展开

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n P_n(x),$$

其中，广义Fourier系数

$$C_n = \frac{1}{\| P_n(x) \|^2} \int_{-1}^{1} \varphi(x) P_n(x) dx,$$

$$\| P_n(x) \|^2 = \int_{-1}^{1} |P_n(x)|^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

由上一节的讨论，m阶伴随Legendre方程的特征值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)f''-2xf'+\left(\mu-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)f=0, & -1<x<1 \quad (1) \\ |f(\pm 1)|<+\infty & (2) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ 自然边界条件

的特征值为$\mu_n=n(n+1),\ n=0,1,2,\cdots,$

相应特征函数为 m阶n次第二类Legendre函数

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x), \qquad m\le n.$$

对任意固定的$m\in\mathbb{Z}^+$,

$\left\{P_n^m(x)\right\}_{n=m}^{\infty}$是函数空间 $L^2([-1,1])$ 里的完备正交基底。

$\forall\, \varphi(x) \in L^2([-1,1])$, 有Fourier-Legendre展开

$$\varphi(x) = \sum_{n=m}^{+\infty} C_n P_n^m(x),$$

其中，广义Fourier系数

$$C_n = \frac{1}{\| P_n(x) \|^2} \int_{-1}^{1} \varphi(x) P_n^m(x) dx,$$

$$\| P_n^m(x) \|^2 = \int_{-1}^{1} |P_n^m(x)|^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad n = m, m+1, \ldots$$

例：求单位球内关于 z 轴旋转对称的调和函数

解：方程为 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 \qquad x^2+y^2+z^2<1$

使用球坐标 (r,ϕ,θ)

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}}$$

关于 z 轴旋转对称

$\Rightarrow$ u 与 ϕ 无关

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\left(r^2u_r\right)_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\, u_\theta\right)_\theta=0$$

令 $u=u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\left(r^2R'\right)'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\left(\sin\theta\,\Theta'\right)'}{\Theta}=0$$

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\left(r^2R'\right)'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\left(\sin\theta\,\Theta'\right)'}{\Theta}=0}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\left(\sin\theta\,\Theta'\right)'}{\Theta}=-\mu & (\mu\text{为待定常数})\\ r^2R''+2rR'-\mu R=0 & \text{—— Euler 方程}\end{cases}$$

作变量代换 $x=\cos\theta \quad f(x)=\Theta(\theta) \quad \mu=n(n+1)$

$$\Rightarrow\boxed{(1-x^2)f''-2xf'+n(n+1)f=0 \qquad (-1<x<1)}$$

Legendre 方程

$\Rightarrow 0\le n\in\mathbb{Z}$

且 $\Theta(\theta)=P_n(\cos\theta)$ 　　 $\boxed{f(x)=\Theta(\theta)\text{有界}}$

$\Rightarrow R(r)=r^n$ （相差常数意义下） 　　 $\boxed{|R(0)|<\infty}$

一般的，关于 z 轴旋转对称的调和函数为

$$u=u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(C_n r^n+D_n r^{-(n+1)})P_n(\cos\theta)$$

(1) 球内：$u=\sum_{n=0}^{\infty}C_n r^n P_n(\cos\theta)$　　(2) 球外：$u=C_0+\sum_{n=0}^{+\infty}D_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$

注：系数C_n，D_n 可由边界条件确定

例：　$u|_{r=1}=\cos^2\theta$

$$dxdydz=r^2dr\sin\theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta=\sum_{n=0}^{\infty}C_n P_n(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\cos^2\theta P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\int_{-1}^{1}x^2P_m(x)dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\int_0^{\pi}P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=C_m\int_{-1}^{1}(P_m(x))^2dx$$

$$\Rightarrow\ C_m = \frac{1}{\int_{-1}^{1}\left(P_m(x)\right)^2 dx}\int_{-1}^{1} x^2 P_m(x)dx$$

$$= \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 P_m(x)dx$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta)$$

$$= \frac{2m+1}{2}\frac{1}{2^m m!}\int_{-1}^{1} x^2 \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx$$

$$= \begin{cases} 1/3 & m=0 \\ 2/3 & m=2 \end{cases}$$

$$P_0(x) = 1$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

所以 $u = \frac{1}{3} + \left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)r^2$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - x^2 - y^2 + 2z^2\right)$$

例：球坐标下3维调和方程 $\Delta_3 u = 0$ 的解的一般形式

解：方程为 $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$

使用球坐标 (r, ϕ, θ)

$$\boxed{x = r\sin\theta\cos\phi \qquad y = r\sin\theta\sin\phi \qquad z = r\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\, u_\theta\right)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta} u_{\phi\phi}\right) = 0,$$

$$0 < \theta < \pi,\ 0 < \phi < 2\pi$$

令 $u(r,\phi,\theta) = R(r)\Phi(\phi)\Theta(\theta)$ （分离变量）

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{\left(r^2 R'\right)'}{R} + \frac{1}{r^2}\left(\underline{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\left(\sin\theta\,\Theta'\right)'}{\Theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\boxed{\frac{\Phi''}{\Phi}}}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\left(r^2R'\right)'}{R}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\left(\sin\theta\Theta'\right)'}{\Theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}\right)=0}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Phi''+\alpha\Phi=0\\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\left(\sin\theta\Theta'\right)'}{\Theta}+\dfrac{-\alpha}{\sin^2\theta}=-\mu\\ r^2R''+2rR'-\mu R=0\end{cases}$$

（α,μ 为待定常数）

$r^2R''+2rR'-\mu R=0$ —— Euler 方程

$$\begin{cases}\Phi''+\alpha\Phi=0\\ \Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)\end{cases}\quad\text{（A）}\qquad\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\left(\sin\theta\Theta'\right)'}{\Theta}+\dfrac{-\alpha}{\sin^2\theta}=-\mu\\ |\Theta(0)|<+\infty,\ |\Theta(\pi)|<+\infty\end{cases}\quad\text{（B）}$$

（A）中 Φ 的周期条件 $\Rightarrow$

特征值为 $\alpha_m=m^2$，　相应特征函数为 $\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix}$　$(0\le m\in\mathbb{Z})$

（B）事实上是m 阶伴随Legendre方程特征值问题，由上节讨论得

特征值为 $\mu_n = n(n+1),\ n = 0,1,2,\cdots,$

相应特征函数为

$$\Theta_{mn}(\theta) = P_n^m(\cos\theta), \quad m \le n.$$

Euler 方程

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

的解为 $R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}$

$\Rightarrow$ 球坐标下3维调和方程 $\Delta_3 u = 0$ 的解的一般形式

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)})P_n^m(\cos\theta)(C_{nm}\cos m\phi + D_{nm}\sin m\phi).$$

注：关于z 轴旋转对称的调和函数相当于取 $\alpha = m^2 = 0$ 时得到的解。

Gamma 函数简单回顾

定义

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx,\quad \forall s>0.$$

性质：（1）$\Gamma(s)=(s-1)!\quad \forall s\in\mathbb{Z}^{+}$

（2）$s\Gamma(s)=\Gamma(s+1)\quad \forall s>0$

（3）$\lim\limits_{s\to 0}\Gamma(s)=\infty$

利用（2）可将 Gamma 函数延拓到$\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\cdots\}$

$$\Rightarrow \lim_{s\to k}\Gamma(s)=\infty\quad (k=0,-1,-2,\cdots)$$

有时写成

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=0\quad \forall s=0,-1,-2,\cdots$$