1 矩阵对角化

1. 对下列矩阵，求特征值、每个特征值对应的特征子空间的一组基、代数重数、几何重数。在可对角化的时候找到把矩阵对角化的相似变换

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

2. 对下面的对称矩阵，找到相应的正交矩阵Q，使得Q^TAQ是一个对角矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

3. A，B都是n阶方阵。证明：AB和BA有相同的特征多项式

4. A是n阶方阵。证明：A的非0特征值的数目小于等于A的秩

5. 假设A可逆，λ是A的一个特征值。证明：λ^{-1}是A^{-1}的一个特征值，而且他们的代数重数相同。

6. 考虑方阵A的特征多项式$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots$。证明：$a_1 = -\mathrm{Tr}A = -\sum_{i=1}^n a_{ii}$（提示：用行展开计算行列式，然后数每一项的$\lambda$最高的次数）

7. 证明：矩阵A可以对角化当且仅当所有特征值的几何重数都等于代数重数

8. 本题将帮助大家证明两个对易可对角化的n阶矩阵A, B（$AB - BA = 0$）可以同时对角化

   (a) 假设V_λ是A的特征值λ对应的特征子空间，证明：V_λ在B的作用下时稳定的。也就是说，$\forall x \in V_\lambda$，$Bx \in V_\lambda$。

   (b) 假设A的全部特征值是$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$，对应的特征子空间是$\{V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \cdots, V_{\lambda_s}\}$，设它们的维数分别为$m_1, m_2, \cdots, m_s$。证明：$\sum_{i=1}^s m_i = n$。

   (c) 设$n_i = \sum_{j=1}^{i-1} m_i$，$\{v_{n_i+1}, v_{n_i+2}, \cdots, v_{n_i+m_i}\}$是$V_{\lambda_i}$的一组基。设$X = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$。证明：$X$可逆

   (d) 设X^{-1}可以写成分块矩阵的形式$\begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}$。证明：$u_i^T v_j = \delta_{ij}$。

   (e) 把$X^{-1}AX$写成分块对角矩阵的形式

   (f) 证明：$X^{-1}BX$可以写成分块对角的形式$\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{bmatrix}$，其中$B_i$是一个$m_i$阶的方阵

(g) 证明：每一个B_i都可以对角化（提示：用反证法，考虑B_i的代数重数和几何重数和B的代数重数和几何重数的关系）

(h) 假设每一个B_i可以被矩阵Y_i对角化，构造一个矩阵Y将$\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{bmatrix}$对角化，并计算$Y^{-1}X^{-1}AXY$。

令$Z = XY$，我们发现Z可以同时将A和B对角化。