第 13 次作业题

1. 证明: 函数列 $\{nx^n(1-x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不为一致收敛.

证明: $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x \in [0,1]$, 定义 $f_n(x) = nx^n(1-x)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. 固定 $n \geqslant 1$. $\forall x \in [0,1]$, $f_n'(x) = n\big(n-(n+1)x\big)x^{n-1}$, 于是 f_n 在 $[0, \frac{n}{n+1})$ 上递增, 而在 $(\frac{n}{n+1}, 1]$ 上递减, 由此我们立刻可得

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

因此函数列 $\{nx^n(1-x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不为一致收敛.

2. 求下列函数项级数的收敛域并指出使之绝对收敛、条件收敛的的 x.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{x})^n$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \sin\frac{x}{2^n}$.

解: (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{n+1}{x}|^n} = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{n+1}{x}| = +\infty$, 则由根值判别法立刻可知原函数级数的收敛域为空集.

(2) 当 $x=0$ 时, 通项恒为零, 故原级数收敛. 下面假设 $x \neq 0$. 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}|}{|x^n \sin\frac{x}{2^n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}\cdot\frac{x}{2^{n+1}}|}{|x^n\cdot\frac{x}{2^n}|} = \frac{|x|}{2}.$$

由比率判别法知原函数项级数在 $|x|<2$ 时绝对收敛, 而在 $|x|>2$ 时发散. 又

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \frac{2}{2^n} = 2,$$

因此原函数项级数在点 $x=\pm 2$ 处发散. 故原函数项级数的收敛域为 $(-2,2)$, 它在该区间内绝对收敛.

3. 下列函数项级数在收敛域上是否一致收敛?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos nx}{n^2}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx^2}$.

解: (1) $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $\frac{|1-\cos nx|}{n^2} \leqslant \frac{2}{n^2}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法可知原函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

(2) $\forall n \geqslant 1$ 及 $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $u_n(x) = x^3 e^{-nx^2}$, 则

$$u_n'(x) = (3-2nx^2)x^2 e^{-nx^2}.$$

于是 u_n 在 $[0, (\frac{3}{2n})^{\frac{1}{2}}]$ 上递增, 而在 $[(\frac{3}{2n})^{\frac{1}{2}}, +\infty)$ 上递减, 从而 $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们均有 $|u_n(x)| \leqslant (\frac{3}{2n})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}}$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{2n})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法可知原函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

4. 证明: 函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ 是 $(1,+\infty)$ 上的连续函数.

证明: 固定 $b>a>1$. $\forall n\geqslant 1$ 以及 $\forall x\in[a,b]$, 我们有 $\frac{n}{x^n}\leqslant\frac{n}{a^n}$. 又

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{a^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{a}=\frac{1}{a}<1,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}$ 收敛, 从而由 Weierstrass 判别法可知原函数项级数在 $[a,b]$ 上一致收敛, 进而知该函数项级数在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛. 又该函数项级数的通项均连续, 从而由极限与级数求和可交换性可知 f 在 $(1,+\infty)$ 上连续.

5. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$, 计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}S(x)\,\mathrm{d}x$.

解: $\forall n\geqslant 1$ 以及 $\forall x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$, 我们立刻有 $0\leqslant\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\leqslant\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2^n\sqrt{3}}$. 又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{3}}$ 收敛, 则由 Weierstrass 判别法知原函数项级数在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上一致收敛. 又该函数项级数的通项连续, 从而由积分与级数求和可交换性得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}S(x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(-\log\cos\frac{x}{2^n}\Big)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\log\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2^{n+1}}-\log\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2^n}\Big)=-\log\cos\frac{\pi}{6}=-\log\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

6. 证明: 函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 进而证明它可微.

证明: $\forall n\geqslant$ 以及 $\forall x>0$, 令 $u_n(x)=ne^{-nx}$, 则 u_n 在 $(0,+\infty)$ 上连续可导. 固定 $b>a>0$. 则 $\forall x\in[a,b]$, $|u_n(x)|\leqslant ne^{-na}$, $|u_n'(x)|=n^2e^{-nx}\leqslant n^2e^{-na}$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2e^{-na}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}e^{-a}=e^{-a}<1$, 则由根值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-na}$ 收敛, 再由比较法则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-na}$ 收敛, 进而由 Weierstrass 判别法知函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'$ 在 $[a,b]$ 上为一致收敛, 于是它们在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛, 从而由极限与级数求和可交换性可知 f 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 再由求导与与级数求和可交换性可知 f 在 $(0,+\infty)$ 上可微.

7. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(2n-1)2^n}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{n\sqrt{n}}(x+1)^n$.

解: (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^{3n+1}}{(2n-1)2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x}{2n-1}}\frac{|x|^3}{2}=\frac{|x|^3}{2}$, 由此得题设幂级数在 $|x|<\sqrt[3]{2}$ 时收敛, 在 $|x|>\sqrt[3]{2}$ 时发散, 故收敛半径为 $\sqrt[3]{2}$. 当 $x=\sqrt[3]{2}$ 时, 原幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{2}}{2n-1}$, 发散. 当 $x=-\sqrt[3]{2}$ 时, 原幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt[3]{2}}{2n-1}$, 由 Leibniz 判别法可知该级数收敛. 故所求幂级数的收敛域为 $[-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$.

(2) 由根值判别法可知原幂级数的收敛半径为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n\sqrt{n}}{2^{2n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^2}\sqrt[n]{2n\sqrt{n}}=\frac{1}{4},$$

于是原幂级数的收敛开区间为 $(-\frac{5}{4},-\frac{3}{4})$. 又当 $x=-\frac{5}{4}$ 或 $-\frac{3}{4}$ 时, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{n\sqrt{n}}|x+1|^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{n\sqrt{n}}(\frac{1}{4})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

收敛, 故所求幂级数的收敛域为 $[-\frac{5}{4},-\frac{3}{4}]$.

8. 求下列幂级数的收敛域与和函数:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

解: (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n-1}{2^n}|x|^{2n-2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{2-\frac{2}{n}}}{2}\sqrt[n]{2n-1}=\frac{|x|^2}{2}$, 于是由根值判别法知原幂级数在 $|x|<\sqrt{2}$ 时而在 $|x|>\sqrt{2}$ 发散, 因此其收敛半径为 $\sqrt{2}$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}(\sqrt{2})^{2n-2}=+\infty$, 于是所求幂级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

注意到 $\forall t\in(-1,1)$, 我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{2n-1}=\frac{t}{1-t^2}$, 两边对 t 求导可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)t^{2n-2}=\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2},$$

于是 $\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, 我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)(\frac{x}{\sqrt{2}})^{2n-2}=\frac{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}{(1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2)^2}=\frac{2(2+x^2)}{(2-x^2)^2}$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)}{2^n}x^{2n-2}=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}.$$

(2) 由根值判别法可知题设幂级数的收敛半径等于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n(n+1)}=1$, 又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 因此所求幂级数的收敛域为 $[-1,1]$. 将所求和函数记作 f, 则 $f(0)=0$, 而 $f(-1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n(n+1)}=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=-1$.

注意到 $\forall t\in(-1,1]$, $\log(1+t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}$, 且该幂级数在 $(-1,1]$ 上内闭一致收敛, 于是 $\forall x\in(-1,1]$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\int_0^x\log(1+t)\,\mathrm{d}t=(1+x)\log(1+x)-x.$$

由此立刻可知 $\forall x\in(-1,1]\setminus\{0\}$, 我们有 $f(x)=\frac{1}{x}(1+x)\log(1+x)-1$.

综上所述可, $\forall x\in[-1,1]$, 我们有

$$f(x)=\begin{cases}-1, & 若\ x=-1,\\ 0, & 若\ x=0,\\ \frac{1}{x}(1+x)\log(1+x)-1, & 其它.\end{cases}$$

9. 将下列函数在点 x_0 处展成幂级数, 并求收敛域:

(1) $\frac{x+2}{x^2-x-2}$, $x_0=-2$;   (2) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $x_0=0$;   (3) $\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t$, $x_0=0$.

解: (1) 令 $t=x+2$, 则 $\frac{x+2}{x^2-x-2}=\frac{t}{(t-2)^2-t}=\frac{t}{t^2-5t+4}=\frac{1}{3}\big(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1-\frac{t}{4}}\big)$. 于是当 $|t|<1$ 时, 均有 $\frac{x+2}{x^2-x-2}=\frac{1}{3}\big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{t}{4})^n\big)=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-1}{4^n}t^n$. 该幂级数的收敛半径为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\frac{4^n-1}{4^n}}{\frac{1}{3}\frac{4^{n+1}-1}{4^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-4}{4^{n+1}-1}=1$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{4^n-1}{4^n}=\frac{1}{3}$, 因此上述幂级数在点 $t=\pm1$ 处发散, 从而所求幂级数展式为

$$\frac{x+2}{x^2-x-2}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-1}{4^n}(x+2)^n,$$

并且该幂级数的收敛域为 $(-3,-1)$.

(2) 由于 $\forall t\in(-1,1]$, 均有 $\frac{1}{\sqrt{1+t}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^n$, 于是 $\forall t\in[-1,1]$, 我们有 $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}$, 并且该幂级数在 $[-1,1]$ 上为一致收敛, 从而由积分与级数求和可交换性知, $\forall x\in[-1,1]$, 我们有

$$\begin{aligned}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) &= \int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}x^{2n+1}.\end{aligned}$$

该幂级数的收敛半径也为 1, 因此其收敛域也为 $[-1,1]$.

(3) 由于 $\forall t\in[-1,1]$, $\arctan t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}$, 且该幂级数在 $[-1,1]$ 上一致收敛, 则由积分与级数求和可交换性知, $\forall x\in[-1,1]$, 我们有

$$\int_0^x\frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

该幂级数的收敛半径也为 1, 因此其收敛域也为 $[-1,1]$.

10. 设 $f(x)=\frac{x+2}{x^2-x-2}$. $\forall n\geqslant0$, 计算 $f^{(n)}(-2)$.

解: 由前面的题目可知, $\forall x\in(-3,-1)$, 我们均有 $f(x)=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-1}{4^n}(x+2)^n$, 于是 $f(-2)=0$, 并且 $\forall n\geqslant0$, 我们有 $f^{(n)}(-2)=\frac{n!}{3}\frac{4^n-1}{4^n}$.