微积分 A (1)

姚家燕

第 4 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

重要通知

因国庆节放假, 10 月 2 日周五的课停上,

9 月 27 日周日补 10 月 2 日周五的课

第 3 讲回顾: 数列极限及其性质

- 极限定义: 称数列 $\{a_n\}$ 有极限 $A \in \mathbb{R}$, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, 均有 $|a_n - A| < \varepsilon$. 也称该数列收敛于 A, 记作 $a_n \to A\ (n \to \infty)$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 数列有极限也称为收敛, 否则称为发散.
- (否定形式) 数列 $\{a_n\}$ 不收敛到 A 当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall N > 0, \exists n_N > N$ 满足
$$|a_{n_N} - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

回顾：数列极限的性质

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$.
- 从某项开始取常数的数列收敛，反之不对.
- 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 而 $\{b_n\}$ 有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
- 典型例子:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\ (0 < |q| < 1)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{1+n} - \sqrt[3]{n}) = 0$.

第 4 讲

§3. 收敛数列的性质

性质 1. (唯一性) 若数列收敛, 则其极限唯一.

证明: 用反证法. 设 $\{a_n\}$ 有两不同极限 A, B. 选取 $\varepsilon = \frac{1}{2}|A-B|$. 则 $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$, $|a_n - A| < \varepsilon$. 同样地, $\exists N_2 > 0$ 使得 $\forall n > N_2$, $|a_n - B| < \varepsilon$. 令 $N = \max(N_1, N_2)$. $\forall n > N$,

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= |A-B| = |(a_n - A) - (a_n - B)| \\ &\leqslant |a_n - A| + |a_n - B| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

矛盾! 故所证结论成立.

性质 2. (有限韧性) 仅改变数列有限项 (包括添加、删减项或改变其值) 不改变其敛散性.

证明: 假设 $\{a_n\}$ 的前 k 项变为 $b_1, b_2, \ldots, b_m$, 而之后的项没有做任何的改变, 由此所得到的新数列将被记作 $\{b_n\}$. 则 $\forall i \geqslant 1$, $b_{m+i} = a_{k+i}$.

假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$, $|a_n - A| < \varepsilon$. 选取 $N = N_1 + k + m$.

则 $\forall n > N$, 我们有 $k+(n-m) > N_1$, 于是

$$\begin{aligned} |b_n - A| &= |b_{m+(n-m)} - A| \\ &= |a_{k+(n-m)} - A| < \varepsilon. \end{aligned}$$

故 $\{b_n\}$ 也收敛到 A.

若数列 $\{a_n\}$ 发散, 但数列 $\{b_n\}$ 收敛到 A. 由于改变后者的有限多项也可重新得到前者, 于是由前面讨论可知数列 $\{a_n\}$ 也收敛到 A. 矛盾! 故所证结论成立.

性质 3. (均匀性) 数列 $\{a_n\}$ 收敛到 A 当且仅当它的任意子列均收敛到 A.

证明: 充分性. 如果 $\{a_n\}$ 的任意子列收敛到 A, 则 $\{a_n\}$ 作为其自身子列也收敛到 A. 得证.

必要性. 设 $\{a_n\}$ 收敛到 A 而 $\{a_{k_n}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的任意的子列. 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|a_n - A| < \varepsilon$. $\forall n > N$, 均有 $k_n \geqslant n > N$, 故 $|a_{k_n} - A| < \varepsilon$, 从而子列 $\{a_{k_n}\}$ 也收敛到 A.

评注

上述性质常用来判断数列的发散性.

为证明数列 $\{a_n\}$ 发散, 主要的方法有两个:

- 证明数列 $\{a_n\}$ 的某个子列发散.
- 构造数列 $\{a_n\}$ 的两个不同子列使得它们均收敛, 但它们的极限却不相等.

例 1. 求证: 数列 $\{(-1)^n\}$ 不收敛.

分析: 假设该数列收敛到 A. 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 我们需要找到某一个 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 均有 $|(-1)^n - A| < \varepsilon$. 当 n 为偶数时, $|1 - A| < \varepsilon$, 而当 n 为奇数时, 则有 $|1 + A| < \varepsilon$. 因此总有 $1 + |A| < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = 1 + |A|$ 就可导出矛盾.

该段分析实际上是用反证法证明了上述结论.

证明 1: 用反证法. 设数列 $\{(-1)^n\}$ 收敛到 A. 令 $\varepsilon = 1 + |A|$. 则由极限的定义可知, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 我们有 $|(-1)^n - A| < \varepsilon$. 特别地, 当 $n = 2N$ 和 $2N + 1$ 时, 我们有

$$|1 - A| < \varepsilon, \ |-1 - A| < \varepsilon.$$

由此可得 $1 + |A| < \varepsilon$. 矛盾! 故 $\{(-1)^n\}$ 发散.

下面用极限不收敛的定义来给出一个新证明.

回顾: 数列 $\{a_n\}$ 发散当且仅当对任意 $A \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall N > 0$, $\exists n_N > N$ 满足

$$|a_{n_N} - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

证明 2: $\forall A \in \mathbb{R}$, 令 $\varepsilon_0 = 1 + |A|$. 那么 $\forall N > 0$, 当 $A \geqslant 0$ 时, 成立 $|(-1)^{2N+1} - A| = 1 + A = \varepsilon_0$, 而当 $A < 0$ 时, 我们则有

$$|(-1)^{2N} - A| = 1 + |A| = \varepsilon_0.$$

因此数列 $\{(-1)^n\}$ 不收敛.

下面再利用收敛数列的均匀性来给出一个更为简单的证明.

证明 3: 数列 $\{(-1)^n\}$ 的偶数项子列收敛到 1, 其奇数项子列收敛到 -1, 而收敛数列的任意的子列均收敛到同一个值, 故数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

作业题: 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A 等价于它的子列 $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n-1}\}$ 均收敛于 A.

性质 4. (有界性) 收敛的数列有界.

证明: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 我们均有 $|a_n - A| < 1$. 定义

$$M = |A| + 1 + \max_{1\leqslant k\leqslant N} |a_k|.$$

任取整数 $n \geqslant 1$. 若 $1 \leqslant n \leqslant N$, 则 $|a_n| \leqslant M$; 如果 $n > N$, 那么我们有

$$|a_n| \leqslant |a_n - A| + |A| < 1 + |A| \leqslant M.$$

于是 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $|a_n| \leqslant M$, 也即 $\{a_n\}$ 有界.

性质 5. (局部保序) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.

(1) 若 $A > B$, 则 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n > b_n$.

(2) 若 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n \geqslant b_n$, 则 $A \geqslant B$.

证明: (1) 令 $\varepsilon = \frac{1}{2}(A - B) > 0$. 则 $\exists N_1 > 0$ 使 $\forall n > N_1$, 均有 $|a_n - A| < \varepsilon$. 同样, $\exists N_2 > 0$ 使 $\forall n > N_2$, 均有 $|b_n - B| < \varepsilon$.

令 $N = \max(N_1, N_2)$. 则 $\forall n > N$, 我们有

$$A + \varepsilon > a_n > A - \varepsilon, \quad B + \varepsilon > b_n > B - \varepsilon.$$

从而 $a_n > A - \varepsilon = \frac{1}{2}(A + B) = B + \varepsilon > b_n$.

(2) 用反证法. 假设 $A < B$, 则 $\exists K \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\forall n > K$, 我们有 $a_n < b_n$. 于是 $a_{N+K} < b_{N+K}$. 这与题设矛盾. 故所证成立.

注: (1) 在命题的第二部分, 即便假设 $\forall n > N$, $a_n > b_n$, 一般也不能得到 $A > B$. 例如: $\forall n \geqslant 1$, 若令 $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = 1$, 则 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $a_n > b_n$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

(2) 由局部保序性立刻可得极限的唯一性.

推论. (局部保号) 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

(1) 若 $A > 0$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, $a_n > 0$.

(2) 若 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, $a_n \geqslant 0$, 则 $A \geqslant 0$.

证明: 只需在上述命题中令 $b_n \equiv 0$.

注: (1) 对于 $A < 0$ 也有类似结论.

(2) 若 $A \neq 0$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, $a_n \neq 0$.

定理 1. (四则运算)

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, 则

(1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = AB$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$ (若 $B \neq 0$).

证明: (1) $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1>0$ 使得 $\forall n>N_1$, 均有 $|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}$. 同样, $\exists N_2>0$ 使 $\forall n>N_2$, 均有 $|b_n-B|<\frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$. 令 $N=\max(N_1,N_2)$. 于是 $\forall n>N$, 我们有

$$\begin{aligned}
|(\alpha a_n+\beta b_n)-(\alpha A+\beta B)| &= |\alpha(a_n-A)+\beta(b_n-B)| \\
&\leqslant |\alpha||a_n-A|+|\beta||b_n-B| \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.
\end{aligned}$$

故所证结论成立.

(2) 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 因此 $\exists M > 0$ 使得 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $|a_n| \leqslant M$. 又由极限的定义可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}, \ |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n(b_n - B) + (a_n - A)B| \\ &\leqslant |a_n||b_n - B| + |a_n - A||B| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

由此立刻可得所要的结论.

(3) 因 $\{|b_n|\}$ 收敛于 $|B| > \frac{1}{2}|B| > 0$, 由保序性可知 $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$, $|b_n| > \frac{1}{2}|B|$. 再由极限定义可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_2 > 0$ 使得 $\forall n > N_2$, 均有 $|a_n - A| < \frac{1}{4}\varepsilon|B|$, $|b_n - B| < \frac{\varepsilon|B|^2}{4(|A|+1)}$.

令 $N = \max(N_1, N_2)$. 则 $\forall n > N$, 我们有

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_n - A}{b_n} - \frac{A}{b_n B}(b_n - B)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{|b_n|}|a_n - A| + \frac{|A|}{|b_n B|}|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此所证结论成立.

例 2. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1n+\cdots+a_kn^k}{b_0+b_1n+\cdots+b_\ell n^\ell}$, 其中 $\ell\geqslant k\geqslant 0$ 为整数, $a_i,b_j\in\mathbb{R}$ 且 $b_\ell\neq 0$.

解:
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1n+\cdots+a_kn^k}{b_0+b_1n+\cdots+b_\ell n^\ell}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^{-\ell}+\cdots+a_{k-1}n^{k-1-\ell}+a_kn^{k-\ell}}{b_0n^{-\ell}+\cdots+b_{\ell-1}n^{-1}+b_\ell}\\
=&\begin{cases}0, & \text{若 } k<\ell,\\ \frac{a_\ell}{b_\ell}, & \text{若 } k=\ell.\end{cases}
\end{aligned}$$

例 3. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+e^{-n^2}}{n+\cos n}$.

解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+e^{-n^2}}{n+\cos n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}e^{-n^2}}{1+\frac{1}{n}\cos n} = 1.$$

作业题: 第 1.3 节第 13 页第 4 题第 (1), (4), (6), (8) 题.

定理 2. **(夹逼原理)** 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}$ 满足:

(1) $\exists n_0 > 0$ 使得 $\forall n > n_0$, $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

则数列 $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$, 均有

$$|a_n - A| < \varepsilon,\ |b_n - A| < \varepsilon.$$

令 $N = \max(N_1, n_0)$. 则 $\forall n > N$, 我们有

$$-\varepsilon < a_n - A \leqslant x_n - A \leqslant b_n - A < \varepsilon.$$

也即 $|x_n - A| < \varepsilon$. 故所证结论成立.

评注

四则运算法则和夹逼定理的价值在于使得我们可以从已知的数列极限出发,来得到新的未知的数列极限!

命题 1. 若非负项数列 $\{a_n\}$ 收敛到 A, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{A}.$$

证明: 由保号性知 $A\geqslant 0$. 若 $A=0$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N$, $|a_n|<\varepsilon^2$, 从而 $\sqrt{a_n}<\varepsilon$, 此时所证结论成立. 若 $A>0$, 则 $\forall n\geqslant 1$, 均有

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{A}|=\frac{|a_n-A|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{A}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{A}}|a_n-A|.$$

由题设及夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}|\sqrt{a_n}-\sqrt{A}|=0$, 由此立刻可得所要结论.

例 4. 计算 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}\right)$.

解: $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \sqrt{n+3}-\sqrt{n-1} &= \frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}} \\
&< \frac{4}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}
$$

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}=0$, 于是由夹逼原理可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}\right)=0.$$

例 5. 证明: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 0)$.

证明: 若 $a \geqslant 1$, 那么 $\forall n > a$, 我们有

$$1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{n}.$$

又 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 则由夹逼原理所证结论成立.

若 $0 < a < 1$, 则 $\frac{1}{a} > 1$, 由四则运算法则可得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

例 6. 设 $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_m$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = a_m.$$

证明: $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$a_m \leqslant (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} \leqslant a_m \sqrt[n]{m}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = 1$, 由夹逼原理知所证结论成立.

作业题: 第 1.3 节第 13 页第 4 题第 (9), (12) 题, 第 14 页第 8 题, 其中第一个"$<$"改为"$\leqslant$".

补充题: 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} (2\sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}}$.

数列极限的计算

例 7. 利用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, 其中当 n 为偶数时, $x_n = \frac{n-1}{n}$, 而当 n 为奇数时, $x_n = \frac{n+1}{n}$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 则 $\forall n > N$, 均有

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

故所证结论成立.

例 8. 利用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1.$

证明: $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 则 $\forall n>N$, 均有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right| &= \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}\\ &< \frac{1}{n}<\varepsilon.\end{aligned}$$

故所证结论成立.

例 9. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$ (其中 $k\in\mathbb{N},\ a>1$).

证明: $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\left[\frac{(k+1)!a^k}{(a-1)^{k+1}\varepsilon}\right]+1$. $\forall n>N$,

$$\begin{aligned}\varepsilon a^n &= \frac{\varepsilon}{a^k}\cdot(1+(a-1))^{n+k}=\frac{\varepsilon}{a^k}\sum_{l=0}^{n+k}\binom{n+k}{l}(a-1)^l\\ &\geqslant \frac{\varepsilon}{a^k}\binom{n+k}{k+1}(a-1)^{k+1}\\ &\geqslant \frac{\varepsilon n^{k+1}(a-1)^{k+1}}{(k+1)!a^k}>n^k,\end{aligned}$$

也即我们有 $\frac{n^k}{a^n}<\varepsilon$. 由此得证.

例 10. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ (其中 $\alpha \in \mathbb{R}$, $a > 1$).

证明: 由于 $\alpha \leqslant [|\alpha|] + 1$, 于是 $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $0 < \frac{n^\alpha}{a^n} \leqslant \frac{n^{[|\alpha|]+1}}{a^n}$, 从而由夹逼原理知所证成立.

例 11. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$, 其中 $0 < |q| < 1$.

证明: 在上例中, 令 $k = 1$, $a = \frac{1}{|q|}$. 则

$$\lim_{n\to\infty} |nq^n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0,$$

进而可得所要结论.

例 12. 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n^\alpha}=0\ (\alpha>0)$.

证明: $\forall\varepsilon>0$, 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^{\alpha\varepsilon n}}=0$, 因此 $\exists N_1>0$ 使得 $\forall n>N_1$, 均有 $\frac{n+1}{e^{\alpha\varepsilon n}}<1$, 也即 $n+1<e^{\alpha\varepsilon n}$. 令 $N=[(N_1+1)^{\frac{1}{\alpha}}]+1$. 则 $\forall n>N$, 我们均有 $n^\alpha>N_1+1$, 从而 $[n^\alpha]>N_1$, 进而可得

$$n^\alpha<[n^\alpha]+1<e^{\alpha\varepsilon[n^\alpha]}\leqslant e^{\alpha\varepsilon n^\alpha},$$

于是 $\alpha\log n<\alpha\varepsilon n^\alpha$, 故 $\left|\frac{\log n}{n^\alpha}\right|<\varepsilon$. 由此得证.

例 13. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\ (a\in\mathbb{R})$.

证明: 令 $k=[|a|]+1$. 则 $\forall\varepsilon>0$, 若令

$$N=\max\left(k,\left[\frac{|a|^{k+1}}{k!\varepsilon}\right]\right),$$

那么 $\forall n>N$, 我们有 $n>\frac{|a|^{k+1}}{k!\varepsilon}$, 从而可得

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a|^{k+1}}{n\cdot k!}\prod_{j=k+1}^{n-1}\frac{|a|}{j}\leqslant\frac{|a|^{k+1}}{n\cdot k!}<\varepsilon,$$

进而可知所要结论成立.

例 14. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 由前例可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon^{-n}}{n!} = 0$, 从而知 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $\frac{\varepsilon^{-n}}{n!} < 1$, 即我们有 $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \varepsilon$. 由此可知所证结论成立.

例 15. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

证明: $\forall n > 1$, 我们有 $0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\prod\limits_{j=2}^{n} \frac{j}{n} \leqslant \frac{1}{n}$. 于是由夹逼原理立刻可得所要结论.

例 16. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 由极限定义可知, $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$, 均有 $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 令

$$M = \sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|, \ \ N = \max\left\{N_1, [\frac{2M}{\varepsilon}]\right\}.$$

则 $\forall n > N$, 我们均有

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k - A|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n} |a_k - A|$$

$$\leqslant \frac{M}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此所证结论成立.

小结：典型的极限

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0.$

  对数函数比常数增长得更快!

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$ (其中 $\alpha > 0$).

  幂函数比对数函数增长得更快!

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ (其中 $\alpha \in \mathbb{R},\ a > 1$).

  指数函数比幂函数增长得更快!

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \ (a \in \mathbb{R})$.

连乘积比指数函数增长得更快!

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.
- 平均性: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 则我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

谢谢大家!