第 14 次作业题

1. 将下列函数展成指定周期的 Fourier 级数并求其和函数:

(1) $T=2\pi$, $f(x)=\begin{cases} x+\pi, & 若\ x\in[-\pi,0) \\ \pi-x, & 若\ x\in[0,\pi] \end{cases}$;

(2) $T=2\pi$, $f(x)=|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$;

(3) $T=2$, f 为奇函数且 $f(x)=x(1-x)$, $x\in(0,1)$, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-3)^3}$;

(4) 将 $f(x)=\begin{cases} 1-x, & 若\ x\in[0,1] \\ 0, & 若\ x\in(1,2] \end{cases}$ 展成以 4 为周期的正弦级数.

解: (1) 由于 $\forall x\in[-\pi,\pi]$, 均有 $f(x)=\pi-|x|$, 故 f 为偶函数, 从而 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $b_n=0$. 又 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-|x|)\,\mathrm{d}x=2\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi$, 而 $\forall n\geqslant 1$, 则有

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi}.$$

注意到 f 连续且分段可导, 则由 Dirichlet-Jordan 定理知, $\forall x\in[0,2\pi]$, 均有

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x.$$

(2) 由于 f 为偶函数, 故 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $b_n=0$. 又 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}$, 而 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=-\frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)}$. 但 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上为连续且分段可导, 于是由 Dirichlet-Jordan 定理可知 $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}.$$

(3) 由于 f 为奇函数, 则 $\forall n\geqslant 0$, 均有 $a_n=0$. 又 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{n\pi}x(1-x)\cos(n\pi x)\Big|_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1(1-2x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{(n\pi)^2}(1-2x)\sin(n\pi x)\Big|_0^1+\frac{4}{(n\pi)^2}\int_0^1\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{4(1-(-1)^n)}{(n\pi)^3}, \end{aligned}$$

而 f 在 $[-1,1]$ 上连续, 分段可导且 $f(-1)=f(1)$, 于是 $\forall x\in[-1,1]$, 均有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3}\sin(2n-1)\pi x.$$

特别地, 当 $x=\frac{1}{2}$ 时, 我们有 $\frac{1}{4}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3}\sin(\frac{\pi(2n-1)}{2})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3\pi^3}$.
由此可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-3)^3}=-1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-3)^3}=-1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^3}=-\frac{32+\pi^3}{32}$.

(4) 由题设可知延拓后的函数为奇函数且 $T=4$, 故 $\ell=2$. 于是 $\forall n\geqslant 0$, 均有 $a_n=0$, 而 $\forall n\geqslant 1$, 我们则有

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_0^2 f(x)\sin(\frac{1}{2}n\pi x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)\sin(\frac{1}{2}n\pi x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{\frac{1}{2}n\pi}(1-x)\cos(\frac{1}{2}n\pi x)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{1}{\frac{1}{2}n\pi}\cos(\frac{1}{2}n\pi x)\,\mathrm{d}(1-x)\\
&= \frac{2}{n\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos(\frac{1}{2}n\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}-\frac{4}{(n\pi)^2}\sin(\frac{1}{2}n\pi x)\Big|_0^1\\
&= \frac{2}{n\pi}-\frac{4}{(n\pi)^2}\sin(\frac{1}{2}n\pi).
\end{aligned}$$

由于 f 在 $[0,2]$ 上连续且分段可微, 则 $\forall x\in(0,2)$, 我们有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{n\pi}-\frac{4}{(n\pi)^2}\sin(\frac{1}{2}n\pi)\Big)\sin(\frac{1}{2}n\pi x),$$

而在点 $x=0,2$ 处, 上述 Fourier 级数均收敛到 0.

2. 设 $f(x)=x-1$.

(1) 将 f 在 $(0,2\pi)$ 上展成以 2π 为周期的 Fourier 级数并求其和函数;

(2) 将 f 在 $(0,\pi)$ 上展成以 2π 为周期的正弦级数并求其和函数;

(3) 将 f 在 $(0,1)$ 上展成以 4 为周期的余弦级数并求其和函数: 如何展开, 展法是否唯一?

解: (1) 由定义知 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}(x-1)^2\big|_0^{2\pi}=2(\pi-1)$, 而 $\forall n\geqslant 1$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-1)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}(x-1)\sin(nx)\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-1)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}(x-1)\cos(nx)\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{n},$$

由于 f 在 $(0,2\pi)$ 上连续可导, 则由 Dirichlet-Jordan 定理可知, $\forall x\in(0,2\pi)$,

$$f(x)=x-1=\pi-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(nx).$$

(2) 由题知应将 f 进行奇延拓, 于是 $\forall n\geqslant 0$, 均有 $a_n=0$, 而 $\forall n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-1)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}(x-1)\cos(nx)\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{2}{n\pi}\big((-1)^n(\pi-1)+1\big)+\frac{2}{n^2\pi}\sin(nx)\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{n\pi}\big((-1)^n(\pi-1)+1\big).
\end{aligned}$$

又 f 在 $(0,\pi)$ 上连续可导, 于是由 Dirichlet-Jordan 定理知, $\forall x\in(0,\pi)$, 均有

$$f(x)=x-1=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\big((-1)^n(\pi-1)+1\big)\sin(nx).$$

(3) 由题知应将 f 奇延拓成周期为 4 的周期函数, 为此首先须将 f 延拓到 $(0,2)$ 上, 此时由于延拓方式不唯一, 故展法也不唯一. 下面我们取零延拓. 则 $a_0=\int_0^1(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x-1)^2\big|_0^1=-\frac{1}{2}$, 而 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}a_n &= \int_0^1(x-1)\cos(\frac{1}{2}n\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}(x-1)\sin(\frac{1}{2}n\pi x)\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin(\frac{1}{2}n\pi x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{4}{(n\pi)^2}\cos(\frac{1}{2}n\pi x)\Big|_0^1=\frac{4}{(n\pi)^2}\big(\cos(\frac{1}{2}n\pi)-1\big),\end{aligned}$$

又 f 在 $(0,\pi)$ 上连续可导, 于是由 Dirichlet-Jordan 定理知, $\forall x\in(0,1)$, 均有

$$\begin{aligned}f(x) &= x-1=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n\pi)^2}\big(\cos(\frac{1}{2}n\pi)-1\big)\cos(\frac{1}{2}n\pi x)\\ &= -\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n\pi)^2}\big(\cos(\frac{1}{2}n\pi)-1\big)\cos(\frac{1}{2}n\pi x).\end{aligned}$$

3. 证明下列等式:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ $(0<x<2\pi)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 进而求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n}=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ $(0<x<\pi)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$ $(0<x<\pi)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx)=\frac{x}{2}$ $(|x|<\pi)$.

证明: (1) $\forall x\in[0,2\pi]$, 定义 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, 则 f 的 Fourier 级数的系数满足:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4\pi}(\pi-x)^2\Big|_0^{2\pi}=0.$$

而 $\forall n\geqslant 1$, 我们则有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2n\pi}(\pi-x)\sin(nx)\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x=0,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin(nx)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2n\pi}(\pi-x)\cos(nx)\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}.$$

由于 f 在 $[0,2\pi]$ 上可导, 则由 Dirichlet-Jordan 定理知, $\forall x\in(0,2\pi)$, 我们有

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$

(2) 由 (1) 以及 Parseval 等式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{12\pi}(x-\pi)^3\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi^2}{6}.$$

进而可得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{8}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

(3) $\forall x\in(0,\pi)$, 由 (1) 可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\cdot 2x)}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi-2x}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$.

(4) $\forall x\in(0,\pi)$, 借助 (1), (3) 可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n}=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$. 由第一式减去第二式立刻可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

(5) $\forall x\in(0,\pi)$, 由 (1), (4) 可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n}=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$. 由第二式减去第一式可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx)=\frac{x}{2}$, 该等式两边均为奇函数, 因此所证结论对任意 $x\in(-\pi,\pi)$ 均成立.