第 1 次作业题解答

1. 求下列集合 Ω 的内部, 外部, 边界, 闭包.

(1) $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$,

(2) $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1\leqslant x^2+y^2+z^2<4\}$.

解: (1) **方法 1.** $\forall X_0\in\mathbb{R}^2\setminus\Omega$, 或者 $\|X_0\|>1$, 此时 $B(X_0,\|X_0\|-1)\subseteq\mathbb{R}^2\setminus\Omega$; 或者 $\|X_0\|<1$, 此时则有 $B(X_0,1-\|X_0\|)\subseteq\mathbb{R}^2\setminus\Omega$. 于是 X_0 为 Ω 的外点, 从而 $\operatorname{Ext}\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\Omega$. 又 $\forall X_0\in\Omega$ 以及 $\forall r>0$, 我们有总有

$$B(X_0,r)\cap\Omega\neq\emptyset,\ B(X_0,r)\cap(\mathbb{R}^2\setminus\Omega)\neq\emptyset,$$

则 X_0 为 Ω 的边界点, 从而 $\partial\Omega=\Omega$, 进而 $\operatorname{Int}\Omega=\emptyset$, 故 $\bar{\Omega}=\Omega$.

方法 2. 由于 Ω 为闭集, 故 $\mathbb{R}^2\setminus\Omega$ 为开集, 则 $\mathbb{R}^2\setminus\Omega$ 的每点均为其内点, 于是 $\operatorname{Ext}\Omega=\operatorname{Int}(\mathbb{R}^2\setminus\Omega)=\mathbb{R}^2\setminus\Omega$. 又 $\forall X_0\in\Omega$ 以及 $\forall r>0$, 我们有总有

$$B(X_0,r)\cap\Omega\neq\emptyset,\ B(X_0,r)\cap(\mathbb{R}^2\setminus\Omega)\neq\emptyset,$$

则 X_0 为 Ω 的边界点, 从而 $\partial\Omega=\Omega$, 进而 $\operatorname{Int}\Omega=\emptyset$, 故 $\bar{\Omega}=\Omega$.

(2) 记 $\mathbf{0}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的原点, 并令

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1<x^2+y^2+z^2<4\}=B(\mathbf{0},2)\setminus\overline{B(\mathbf{0},1)}\\
&= B(\mathbf{0},2)\cap(\mathbb{R}^3\setminus\overline{B(\mathbf{0},1)}),\\
\Omega_2 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2<1 \text{ 或 } x^2+y^2+z^2>4\}\\
&= B(\mathbf{0},1)\cup(\mathbb{R}^3\setminus\overline{B(\mathbf{0},2)}),\\
\Omega_3 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1 \text{ 或 } x^2+y^2+z^2=4\}\\
&= \partial B(\mathbf{0},1)\cup\partial B(\mathbf{0},2).
\end{aligned}$$

则 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ 互不相交并且 $\mathbb{R}^3$ 为它们的并集. 另外 Ω_1,Ω_2 为开集, 而 Ω_3 为闭集. 由于 $\Omega_1\subseteq\Omega$, $\Omega_2\subseteq\mathbb{R}^3\setminus\Omega$, 则由定义立刻可得 $\Omega_1\subseteq\operatorname{Int}\Omega$, $\Omega_2\subseteq\operatorname{Ext}\Omega$. 又 $\forall r>0$ 以及 $\forall X_0\in\Omega_3$, 我们均有

$$B(X_0,r)\cap\Omega\neq\emptyset,\ B(X_0,r)\cap(\mathbb{R}^2\setminus\Omega)\neq\emptyset,$$

因此 X_0 为 Ω 的边界点, 故 $\Omega_3\subseteq\partial\Omega$. 但 $\mathbb{R}^3$ 也为 $\operatorname{Int}\Omega,\operatorname{Ext}\Omega,\partial\Omega$ 的不交并, 故 $\operatorname{Int}\Omega=\Omega_1$, $\operatorname{Ext}\Omega=\Omega_2$, $\partial\Omega=\Omega_3$, 进而我们有

$$\bar{\Omega}=\Omega_1\cup\Omega_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4\}.$$

2. 若 $P_1,P_2,\ldots,P_k\in\mathbb{R}^n$, 求证: $\{P_1,P_2,\ldots,P_k\}$ 为闭集.

证明: 令 $\Omega=\mathbb{R}^n\setminus\{P_1,P_2,\ldots,P_k\}$. $\forall X_0\in\Omega$, 令 $r=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\|P_j-X_0\|$, 那么我们有 $B(X_0,r)\subseteq\Omega$, 从而 X_0 为 Ω 的内点, 故 Ω 为开集, 因此所证成立.

3. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 下列函数的极限是否存在? 若存在, 求出该极限.

(1) $(x^2+y^2)e^{-x-y}$, (2) $\frac{x+y}{|x|+|y|}$, (3) $\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$, (4) $\frac{\sin(x^2y)-\arcsin(x^2y)}{x^6y^3}$.

解: (1) $\forall (x,y)\in B((0,0),1)$, 我们有 $0\leqslant (x^2+y^2)e^{-x-y}\leqslant (x^2+y^2)e^2$, 于是由夹逼原理可得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)e^{-x-y}=0$.

(2) 因 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x}{|x|+|x|}$不存在, 由复合函数极限法则知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{|x|+|y|}$也不存在.

(3) $\forall k\in\mathbb{R}$, 由于极限 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{(ky^2)^4y^4}{((ky^2)^2+y^4)^3}=\frac{k^4}{(k^2+1)^3}$ 与 k 有关, 于是由复合函数极限法则可知极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ 也不存在.

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)-\arcsin(x^2y)}{x^6y^3}\overset{t=x^2y}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t-\arcsin t}{t^3}$
$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}+\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\arcsin t}{t^3}=-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$.

4. 求下列函数极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+\sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$,

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}(x^2+y^2)e^{y-x}$, (4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(\frac{|xy|}{x^2+y^2})^{x^2}$.

解: (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+\sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln 3}{3}$.

(2) 对于 $|x|,|y|>1$, 均有 $\frac{|x+y|}{|x^2+xy+y^2|}\leqslant\frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{x^2+y^2-|xy|}\leqslant\frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}=0$.

(3) $\forall x>1$ 以及 $y<-1$, 我们有 $0\leqslant e^{y-x}=e^{-(x-y)}\leqslant e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$, 而

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}(x^2+y^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to+\infty}\rho^2e^{-\rho}=0,$$

于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}(x^2+y^2)e^{y-x}=0$.

(4) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 均有 $0<(\frac{|xy|}{x^2+y^2})^{x^2}\leqslant(\frac{1}{2})^{x^2}$. 而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(\frac{1}{2})^{x^2}=0$, 于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}=0$.

5. 讨论下列累次极限与二重极限是否存在, 若存在, 求其值:

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to 0^+}\frac{x^y}{1+x^y},\ \lim_{y\to 0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y},\ \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 0^+}}\frac{x^y}{1+x^y}.$$

解: $\forall x>2$, 我们有 $\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{x^y}{1+x^y}=\frac{1}{2}$, 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{x^y}{1+x^y}=\frac{1}{2}$.

$\forall y>0$, 则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^{-y}}=1$, 故 $\lim\limits_{y\to 0^+}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}=1$.

由于两个累次极限均存在但不相等, 故二重极限不存在.

6. 判断下列函数在原点 $(0,0)$ 的连续性

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

解: (1) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 我们有 $0<\frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}\leqslant |x|+|y|$, 于是由夹逼原理知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$, 则 f 在原点处连续.

(2) $\forall k\in\mathbb{R}$, 我们有 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{(ky^2)y^2}{(ky^2)^2+y^4}=\frac{k}{k^2+1}$ 与 k 有关, 则由复合函数极限法则知极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在, 故 f 在原点处间断.

7. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 讨论下列无穷小量的阶 (如果有阶, 则计算出该阶; 如果无阶, 则需说明理由):

(1) $\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})$, (2) $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解: (1) 由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\overset{\rho=\sqrt{x^2+y^2}}{=}\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{\ln(1+\rho)}{\rho}=1$, 从而知所求无穷小量的阶等于 1.

(2) 题设函数在 $(x,y)\to(0,0)$ 时没有阶.

用反证法, 假设其阶为 k. $\forall n\geqslant 1$, 令 $x_n=0$, $y_n=\frac{1}{2n\pi}$, 由复合法则可得

$$0\neq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n^2+y_n^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}}{(\sqrt{x_n^2+y_n^2})^k}=0,$$

矛盾! 故所证结论成立.

注: 若函数 f 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时有阶, 则 f 在原点的某个去心邻域内恒正或恒负, 利用该性质也可以解答上题.

8. 求下列函数的偏导数:

(1) $z=\ln(x+\sqrt{x^2-y^2})$, (2) $z=\cos(1+2^{xy})$.

解: (1) 由题设可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}(x+\sqrt{x^2-y^2})}.\end{aligned}$$

(2) 由题设可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=-\sin(1+2^{xy})\cdot(y2^{xy}\log 2)=-y2^{xy}(\log 2)\big(\sin(1+2^{xy})\big),\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-\sin(1+2^{xy})\cdot(x2^{xy}\log 2)=-x2^{xy}(\log 2)\big(\sin(1+2^{xy})\big).\end{aligned}$$

9. 考察下列函数在坐标原点的可微性:

(1) $f(x,y)=\sqrt{|x|}\cos y$, (2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

(4) $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 其中 φ 在原点的某邻域内连续且 $\varphi(0,0)=0$.

解: (1) 由于 $f(x,0)=\sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可微, 则 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ 不存在, 从而 f 在原点不可导, 因此也不可微.

(2) 若 f 在原点处可微, 则由 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ 可知 $\mathrm{d}f(0,0)=0$, 从而由微分的定义以及复合函数极限法则可得

$$0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{x^2+x^2}=1,$$

矛盾! 故 f 在原点处不可微.

(3) 若 f 在原点处可微, 则由 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ 可知 $\mathrm{d}f(0,0)=0$, 从而由微分的定义以及复合函数极限法则可得

$$0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{(x^2+x^2)^2}=\frac{1}{4},$$

矛盾! 故 f 在原点处不可微.

(4) 由于 $|f(x,y)|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}|\varphi(x,y)|$ 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=\varphi(0,0)=0$, 由夹逼原理知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, 则 f 在点 $(0,0)$ 可微且 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

10. 求下列函数的全微分:

(1) $u=\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$, (2) $z=\frac{x-y}{x+y}$.

解: (1) 由题设可知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}+\frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}+\frac{z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}.\end{aligned}$$

(2) 由题设可知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{2y}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x-\frac{2x}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$