微积分 A (1)

姚家燕

第 2 讲

在线下听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

清华大学本科生学籍管理规定

第十条　学生应当参加学校教育计划规定的各项活动，自觉遵守课堂纪律，完成规定学业.

因故不能参加学校教育计划规定的活动，应当事先请假并获得批准，未经批准而缺席的，学校视情节轻重根据有关规定给予相应的批评教育，纪律处分.

未请假或者请假未获批准连续两周未参加教学计划规定的活动的，予以退学处理.

期末总评成绩计算方式

- 平时占 20%，期中占 30%，期末占 50%
- 将作业扫描成一个单独的 pdf 文件，每周三上课前提交到网络学堂的作业栏，下一周的周二网上发作业 (抄题，用数学文稿纸!)
- 不接受补交作业!
- 无故缺交平时作业 4 次及 4 次以上或无故缺席期中考试，取消参加期末考试的资格!
- 拒绝修改上述规则的任何建议!

选择适合自己的课程!

主讲老师联系方式与答疑时间

欢迎大家平时到办公室来咨询或讨论问题，

拒绝在考试后以各种名目来要分数！

不建议在网络学堂提问，无法保证时效!

- 办公室：理科楼数学科学系 A 216
- 电话：62794494
- 微信群答疑时间：任何时候？
- 线下答疑时间：每周三下午 16:00-17:00
- 9 月 23 日周三课堂上点名，请务必出席!

教材

- 刘智新 闫浩 章纪民编《高等微积分教程 (上)》清华大学数学科学系自编教材 (2014)
- 教学 ppt、作业题解答、习题课题目解答.

除课堂上所布置的作业外, 建议大家自己做完该书中的所有习题! 喜欢做题目的同学, 可以自行解答所推荐的习题集当中的题目!

本学期的主要内容

- 实数部分以及极限理论
- 一元函数的微分学
- 一元函数的积分学
- 常微分方程部分
- 期中考试时间:

  2019 年 11 月 14 日星期六晚 19:20-21:20

强力推荐的习题辅导书

- 吉米多维奇著, 数学分析习题集. 高等教育出版社 (1986)
- 华苏 扈志明 莫骄编, 微积分学习指导 —— 典型例题精解. 科学出版社 (2004)
- 刘坤林 谭泽光编著, 大学数学: 概念, 方法与技巧. 清华大学出版社 (2001)

其它习题辅导书

- 方企勤 林源渠著, 数学分析习题课教材. 北京大学出版社 (1990)
- 李大华 胡适耕 林益编, 高等数学典型问题 100 类. 华中工学院出版社 (1987)
- 高等数学辅导, 同济高数配套书. 机械工业出版社 (2002)

数学专业学生常用教材

- 常庚哲 史济怀编, 数学分析教程. 高等教育出版社 (2004)
- 张筑生著, 数学分析新讲. 北京大学出版社 (1990)
- 卓里奇著, 数学分析. 高教出版社 (2006)

数学史

- 《数学文化》 http://www.global-sci.org/mc/
- 《数学与人文》 http://intlpress.sinaapp.com/mh/

§1. 实数系

两个常用的记号:

$\exists$ = there exists = 存在　$\forall$ = for all = 对任意

集合的非严格定义: 对象的全体称为一个集合.

为避免悖论, 我们将预先固定一个大的集合 X, 称之为“宇宙”, 而所有研究均局限在 X 中.

集合的表示方法有两种: 列举法, 描述法.

基本的集合:

- $\emptyset =$ 空集,
- $\mathbb{N} =$ 自然数集 $= \{0, 1, 2, \ldots\}$,
- $\mathbb{N}^* =$ 正整数集 $= \{1, 2, \ldots\}$,
- $\mathbb{Z} =$ 整数集,
- $\mathbb{Q} =$ 有理数集,
- $\mathbb{R} =$ 实数集 (实数集的子集简称为数集),
- $\mathbb{C} =$ 复数集.

基本的运算:

- $a \in A$, $a \notin A$,
- $B \subseteq A$, $B \subsetneq A$ (也记作 $B \subset A$), $B \not\subseteq A$,
- $A \cap B$, $A \cup B$,
- $A \backslash B := \{x \in A \mid x \notin B\}$,
- $A^c := X \backslash A$ (称为 A 的余集). 则 $(A^c)^c = A$.

基本性质:

(1) $A\backslash B = A \cap B^c$;

(2) (交换律)

$$E \cap F = F \cap E, \quad E \cup F = F \cup E;$$

(3) (结合律)

$$\begin{aligned}(E \cap F) \cap G &= E \cap (F \cap G), \\ (E \cup F) \cup G &= E \cup (F \cup G);\end{aligned}$$

(4) (分配律)

$$\text{(a)} \quad E\cap(F\cup G) = (E\cap F)\cup(E\cap G),$$
$$\text{(b)} \quad E\cup(F\cap G) = (E\cup F)\cap(E\cup G);$$

(5) (De Morgan 律)

$$\text{(a)} \quad (A\cap B)^c = A^c\cup B^c,$$
$$\text{(b)} \quad (A\cup B)^c = A^c\cap B^c.$$

证明: (a) 首先我们将证明 $(A\cap B)^c \subseteq A^c\cup B^c$. $\forall x\in(A\cap B)^c$, 我们均有 $x\notin A\cap B$, 故 $x\notin A$

或 $x \notin B$, 即 $x \in A^c$ 或 $x \in B^c$, 则 $x \in A^c \cup B^c$, 由此可知 $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

现在我们将证明 $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$. $\forall x \in A^c \cup B^c$, 我们均会有 $x \in A^c$ 或者 $x \in B^c$, 即 $x \notin A$ 或 $x \notin B$, 故 $x \notin A \cap B$, 则 $x \notin A \cap B$, 于是 $x \in (A \cap B)^c$, 从而 $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.

综上所述可知 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(b) 由 (a) 中结论可知

$$
\begin{aligned}
A^c \cap B^c &= \left((A^c \cap B^c)^c\right)^c \\
&= \left((A^c)^c \cup (B^c)^c\right)^c = (A \cup B)^c.
\end{aligned}
$$

数集的有界性

定义 1. 设 A 为非空数集.

- 如果 $M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in A$, 我们均有 $x \leqslant M$, 则称 M 为 A 的一个上界.
- 如果 $m \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in A$, 我们均有 $x \geqslant m$, 则称 m 为 A 的一个下界.
- 如果 A 既有上界同时也有下界, 则称 A 为有界集, 否则则称之称为无界集.

评注

- 若 A 有上界, 则它有无穷多个上界.
- 若 A 有下界, 则它有无穷多个下界.
- 例如, 闭区间 $[0,1]$ 以及开区间 $(-1,1)$ 均为有界集; 自然数集 $\mathbb{N}$ 有下界 0, 但没有上界, 因此为无界集; 有理数集 $\mathbb{Q}$ 既无上界、也无下界, 故也为无界集.

命题 1. 非空数集 A 有界当且仅当 $\exists M \geqslant 0$ 使得 $\forall x \in A$, 均有 $|x| \leqslant M$.

证明: **充分性.** 如果 $\exists M \geqslant 0$ 使得 $\forall x \in A$, 均有 $|x| \leqslant M$, 则 $-M \leqslant x \leqslant M$, 故 A 有界.

必要性. 若 A 有界, 则 $\exists a, b \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in A$, 均有 $a \leqslant x \leqslant b$. 令 $M = \max\{|a|, |b|\}$. $\forall x \in A$, 若 $x \geqslant 0$, 那么 $b \geqslant 0$, 故 $M \geqslant b \geqslant |x|$; 若 $x \leqslant 0$, 则有 $a \leqslant 0$, 故 $M \geqslant |a| = -a \geqslant -x = |x|$. 于是 $\forall x \in A$, 均有 $|x| \leqslant M$.

定义 2. (最值与确界) 设 A 为非空数集.

- 如果 $M \in A$ 使得 $\forall x \in A$, 我们均有 $x \leqslant M$, 则称 M 为 A 的最大值.
- 如果 $m \in A$ 使得 $\forall x \in A$, 我们均有 $x \geqslant m$, 则称 m 为 A 的最小值.
- 如果 A 有上界, 称 A 的最小上界 ξ (若存在) 为 A 的上确界, 记作 $\sup A$.
- 如果 A 有下界, 称 A 的最大下界 η (若存在) 为 A 的下确界, 记作 $\inf A$.

评注

- 如果 A 有最大值 M, 则 $\sup A = M$, 但反之不对. 例 $[-1,1)$ 的上确界为 1, 但没最大值.
- 如果 A 有最小值 m, 则 $\inf A = m$, 反之不对. 例如 $(-1,1]$ 的下确界为 -1, 但没最小值.
- 典型例子: 1) $[0,3]$ 的上、下确界为 3 和 0;
  2) $(0,+\infty)$ 无上界, 其下确界为 0;
  3) $\{1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots\}$ 的上、下确界为 1 和 0;
  4) $(0,1)$ 内无理数集的上、下确界为 1 和 0.

关于实数集的基本假设

定理 1. (确界定理)

- 有上界的非空数集必有上确界;
- 有下界的非空数集必有下确界.

命题 2. 设 A 为有上界的非空数集. 则 $\xi = \sup A$ 当且仅当 ξ 为 A 的上界, 并且 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ 使得我们有 $x > \xi - \varepsilon$.

证明: 必要性. 若 $\xi = \sup A$, 则 ξ 为 A 的上界, 并且还是 A 的所有上界当中最小的, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\xi - \varepsilon$ 不是 A 的上界, 则 $\exists x \in A$ 使 $x > \xi - \varepsilon$.

充分性. 如果 ξ 为 A 的上界且 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ 使得 $x > \xi - \varepsilon$, 则对于 A 的任意上界 b, 我们均有 $b \geqslant \xi$. 事实上, 若 $b < \xi$, 则 $\varepsilon = \xi - b > 0$, 从而 $\exists x \in A$ 使得 $x > \xi - \varepsilon = b$, 也即 b 不是 A 的上界, 矛盾! 于是 ξ 为 A 的上界且不大于 A 的任意上界, 因此 $\xi = \sup A$.

注: (否定形式) $\xi \neq \sup A$ 当且仅当 ξ 不是 A 的上界或 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $\forall x \in A$, 均有 $x \leqslant \xi - \varepsilon$.

命题 3. 设 A 为有下界的非空数集. 则 $\eta = \inf A$ 当且仅当 η 为 A 的下界, 并且 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ 使得我们有 $x < \eta + \varepsilon$.

注: (否定形式) $\eta \neq \inf A$ 当且仅当 η 不是 A 的下界或 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $\forall x \in A$, 均有 $x \geqslant \eta + \varepsilon$.

例 1. 设 $A = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$. 求证: $\inf A = 0$.

证明: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $\frac{1}{n} > 0$, 故 0 为 A 的下界. $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 则 $N > \frac{1}{\varepsilon}$, 从而 $\frac{1}{N} \in A$, 并且 $\frac{1}{N} < \varepsilon$, 由此可知 $\inf A = 0$.

对任意非空数集 A, 定义 $-A = \{-x \mid x \in A\}$.

命题 4. 非空数集 A 有上界当且仅当 数集 $-A$ 有下界, 此时 $\sup A = -\inf(-A)$.

证明: 数集 A 具有上界当且仅当 $\exists M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in A$, 我们有 $x \leqslant M$, 而这又等价于 $\forall x \in A$, 均有 $-x \geqslant -M$, 即 $-M$ 为 $-A$ 的下界. 于是非空数集 A 有上界当且仅当 $-A$ 有下界.

如果令 $\xi = \sup A$, 则 ξ 为 A 的上界, 从而 $-\xi$ 为 $-A$ 的下界. 又 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 ξ 恰好为 A 的上确界, 故 $\exists x \in A$ 使得 $x > \xi - \varepsilon$. 令 $y = -x$. 则 $y \in -A$ 且 $y < -\xi + \varepsilon$. 于是 $-\xi = \inf(-A)$. 也即 $\sup A = -\inf(-A)$.

注: 借助于前面的命题, 我们就可以将关于 sup 和 inf 的结论互相转换.

谢谢大家!