微积分 A (1)

姚家燕

第 9 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

第 8 讲回顾: 单调性

- 单调函数与严格单调函数.
- 严格单调函数为单射, 由此而得到的反函数与原来的函数有同样的单调性.
- 有反函数的函数不一定严格单调.

回顾：基本初等函数

- 常值函数;
- 单项式: $y = x^n$ ($n \geqslant 1$ 为整数);
- 指数函数: $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$;
- 对数函数: $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$;
  自然对数函数: $y = \ln x = \log x$ $(x > 0)$;
- 三角函数: $y = \sin x$, $y = \cos x$;
- 反三角函数: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.

回顾：初等函数

由上述基本初等函数经过有限多次四则运算和复合运算后得到的函数，称为初等函数.

常用初等函数：多项式，有理函数，幂函数，

- 正切：$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$，余切：$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$；
- 双曲正弦：$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$，
  双曲余弦：$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$，
  双曲正切：$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$，
  双曲余切：$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

回顾：函数极限的概念

- 直观描述：当 x 接近 x_0 时，$f(x)$ 接近 a.
  在下面，固定 X 为非空数集.
- 有限点处的邻域与去心邻域: $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.
- $B_X(a, \varepsilon) = \{x \in X : |x - a| < \varepsilon\}$, 称为点 a 在 X 中的 ε-邻域.
- $\mathring{B}_X(a, \varepsilon) = \{x \in X : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$, 称为点 a 在 X 中的 ε-去心邻域.

无穷远点处的邻域与去心邻域: 固定 $\varepsilon > 0$.

- $B_X(+\infty, \varepsilon) = \mathring{B}_X(+\infty, \varepsilon) = \{x \in X : x > \frac{1}{\varepsilon}\}$, 称为 $+\infty$ 在 X 中的 ε-(去心) 邻域.
- $B_X(-\infty, \varepsilon) = \mathring{B}_X(-\infty, \varepsilon) = \{x \in X : x < -\frac{1}{\varepsilon}\}$, 称为 $-\infty$ 在 X 中的 ε-(去心) 邻域.
- $B_X(\infty, \varepsilon) = \mathring{B}_X(\infty, \varepsilon) = \{x \in X : |x| > \frac{1}{\varepsilon}\}$, 称为 ∞ 在 X 中的 ε-(去心) 邻域.
- 一点处的任意两个邻域总可以比较大小.

回顾: 极限点与函数极限

- 极限点: 点 $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty, \pm\infty\}$ 被称为 X 的极限点, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 均有 $\mathring{B}(x_0, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.
- 任意的 $a \in \mathbb{R}$ 均是 $(a-\eta, a+\eta)$, $(a-\eta, a)$, $(a, a+\eta)$ 的极限点, 其中 $\eta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- 自然数集 $\mathbb{N}$ 的极限点为 $+\infty = \infty$.
- 整数集 $\mathbb{Z}$ 的极限为: $+\infty$, $-\infty$, ∞.
- 任意实数以及 $\pm\infty$, ∞ 均为有理数集 $\mathbb{Q}$ 和实数集 $\mathbb{R}$ 的极限点.

- 刻画: 设 X 为非空数集, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$. 则 a 为 X 的极限点当且仅当在 $X \setminus \{a\}$ 中存在收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$.
- $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$, 也即点 a 的任何邻域在 f 下的原像均包含 x_0 的一个去心邻域.
- 极限的否定表述: 当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 不趋近于点 a 当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, $\exists x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$ 使 $f(x) \notin B(a, \varepsilon_0)$.

- 24 种常用极限的直接定义 (不借助邻域).
- 函数极限的存在性只与 f 在点 x_0 的邻域内的性态有关, 但与 f 在该点的取值无关.
- 如同数列, 当 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x)=a\in\mathbb{R}$ 时, 才说 "当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 收敛于 a".
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=a.$

回顾：典型的函数极限

- 极限 $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ 不存在.
- $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 均有 $\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$.
- $\forall x_0 > 0$, 均有 $\lim\limits_{x\to x_0} \log x = \log x_0$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ $(a > 1)$.

回顾：函数极限的性质

- 函数极限与数列极限的关系：

  $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x)=a$ 当且仅当对于 $X\backslash\{x_0\}$ 中的以 x_0 为极限的任意数列 $\{a_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=a$.

  该结论常用来证明函数极限不存在.

- 唯一性：函数极限若存在且有限，必唯一.
- 局部有界性：如果 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x)=a\in\mathbb{R}$，那么 $\exists\delta, M>0$ 使得 $\forall x\in \mathring{B}_X(x_0,\delta)$，$|f(x)|<M$.

- 局部保序性: 假设

$$\lim_{X\ni x\to x_0} f(x)=a,\quad \lim_{X\ni x\to x_0} g(x)=b.$$

(1) 如果 $a>b$, 则 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x\in \mathring{B}_X(x_0,\delta)$, 我们均有 $f(x)>g(x)$.

(2) 如果 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x\in \mathring{B}_X(x_0,\delta)$, 我们均有 $f(x)\geqslant g(x)$, 则 $a\geqslant b$.

- 局部保号性: 假设 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$.

(1) 如果 $a > 0$, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) > 0$.

(2) 如果 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) \geqslant 0$, 则 $a \geqslant 0$.

注: 同数列极限的情形完全一样, 可由局部保序 (保号) 性导出极限的唯一性.

第 9 讲

定理 2. (四则运算) 设 X 为非空的数集, x_0 为其极限点, 而 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 为函数使得

$$\lim_{X \ni x \to x_0} f(x) = a, \quad \lim_{X \ni x \to x_0} g(x) = b.$$

则下列结论成立 (若等式右边有意义):

(1) $\displaystyle\lim_{X \ni x \to x_0} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda a + \mu b, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

(2) $\displaystyle\lim_{X \ni x \to x_0} (fg)(x) = ab.$

(3) $\displaystyle\lim_{X \ni x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{a}{b}.$

广义四则运算 ($a > 0$ 为实数)

- $a + (+\infty) = +\infty$, $a - (+\infty) = -\infty$.
- $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty - (+\infty) = -\infty$.
- $a \times (+\infty) = +\infty$, $a \times (-\infty) = -\infty$, $a \times \infty = \infty$.
- $(-a) \times (+\infty) = -\infty$, $(-a) \times (-\infty) = +\infty$,

  $(-a) \times \infty = \infty$; $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$,

  $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$, $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$.
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, $\frac{a}{\infty} = 0$, $\frac{a}{0^+} = +\infty$, $\frac{a}{0^-} = -\infty$, $\frac{a}{0} = \infty$.
- 无法确定型: $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$.

例 2. 研究有理函数在 $x \to \pm\infty$ 时的性态.

解: 令 $f(x) = \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j x^j}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k} = x^{n-m} \cdot \frac{a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{j-n}}{b_m + \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^{k-m}}$,

其中假设 a_n, $b_m > 0$. 于是我们有

$$(1) \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & 若\ n = m, \\ 0, & 若\ n < m, \\ +\infty, & 若\ n > m, \end{cases}$$

$$(2) \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & 若\ n = m, \\ 0, & 若\ n < m, \\ +\infty, & 若\ n > m\ 且\ n - m\ 为偶数, \\ -\infty, & 若\ n > m\ 且\ n - m\ 为奇数. \end{cases}$$

定理 3. (夹逼原理) 设 X 为非空的数集, x_0 为其极限点, 而 $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ 为函数满足:

(1) $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x),$$

(2) $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{X \ni x \to x_0} h(x) = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

则我们有 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$.

证明: 利用数列的夹逼原理或其证明思想.

定理 4. (复合函数极限) 设 X, Y 为非空数集, x_0 为 X 的极限点而 $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty, \pm\infty\}$, 并且函数 $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ 满足:

(1) $\forall x \in X \backslash \{x_0\}$, 均有 $f(x) \in Y \backslash \{y_0\}$,

(2) $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{Y \ni y \to y_0} g(y) = a$,

则我们有 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} g(f(x)) = a$.

注: 复合函数极限法则实质是在做变量替换.

证明: 由于 $\lim\limits_{Y\ni y\to y_0} g(y)=a$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$ 使得 $\forall y\in\mathring{B}_Y(y_0,\eta)$, 均有 $g(y)\in B(a,\varepsilon)$. 又因 $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x)=y_0$, 则 $\exists\delta>0$ 使 $\forall x\in\mathring{B}_X(x_0,\delta)$, $f(x)\in B(y_0,\eta)$. 由条件 (1) 可知 $f(x)\in Y\backslash\{y_0\}$, 于是 $f(x)\in\mathring{B}_Y(y_0,\eta)$, 从而 $g(f(x))\in B(a,\varepsilon)$. 由此可知所证结论成立.

评注: 本节的 定理 1 是上述定理的特殊情形, 由此可知该定理中的条件 (1) 不能去掉.

各种基本类型极限的关系

设 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 而 $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, \pm\infty\}$, 由复合函数极限法则可知下述结论等价:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$,
- $\lim\limits_{y \to 0} f(y + x_0) = a$,
- $\lim\limits_{z \to \infty} f(\frac{1}{z} + x_0) = a$.

对于左极限、右极限也有类似的结论.

命题 1. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a > 0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

证明: 因 $\lim\limits_{y\to a} \log y = \log a$, 则由四则运算与复合函数极限法则可知 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\log u(x) = b\log a$. 又因 $\lim\limits_{y\to b\log a} e^y = e^{b\log a} = a^b$, 则由复合函数极限法则可得 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{v(x)\log u(x)} = a^b$.

注: 遇到此类极限, 首先应考虑取对数.

推论 1. 若 $a > 0$, 而 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

推论 2. 若 $x_0 > 0$, 而 $\alpha \in \mathbb{R}$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$.

注: 由极限定义立刻可得 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0 \ (\alpha > 0)$.

推论 3. 假设 X 为非空的数集, x_0 为其极限点, 而函数 $f : X \to [0, +\infty)$ 使得 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = A$, 则我们有 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$.

推论 4. $\forall k \in \mathbb{N}^*$ 以及 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} x^k = x_0^k$.

证明: 若 $x_0 > 0$, 则由前例可知所证成立.

若 $x_0 < 0$, 则由复合函数极限法则可知

$$\lim_{x \to x_0} x^k \overset{y=-x}{=} \lim_{y \to -x_0} (-1)^k y^k = (-1)^k (-x_0)^k = x_0^k.$$

若 $x_0 = 0$, 由前例可知 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^k = 0$. 由复合函数极限法则得 $\lim\limits_{x \to 0^-} x^k \overset{y=-x}{=} \lim\limits_{y \to 0^+} (-1)^k y^k = 0$. 于是 $\lim\limits_{x \to 0} x^k = 0 = x_0^k$. 综上所述可知所证成立.

例 3. 求证: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

证明: 由复合函数极限法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\Big(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\Big)^2 = \frac{1}{2}.$$

注: 以后我们还可以证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

例 4. 计算 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos(2x)}\sqrt[3]{\cos(3x)}}{x^2}$.

解: 由复合函数极限法则可知

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos(2x)}\sqrt[3]{\cos(3x)}}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sqrt{\cos(2x)}\sqrt[3]{\cos(3x)}}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos(2x)}\sqrt[3]{\cos(3x)}}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{\cos(2x)})\sqrt[3]{\cos(3x)}}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{\cos(3x)}}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2(1+\sqrt{\cos(2x)})} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x^2(1+\sqrt[3]{\cos(3x)}+\sqrt[3]{\cos^2(3x)})} \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} \times 2 + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2} \times 3 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 = 3.
\end{aligned}$$

例 5. 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=0\ (a>1,\ \alpha>0)$.

证明: 由复合函数极限法则可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}\overset{y=\log_a x}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{a^{\alpha y}}=0.$$

例 6. 求证: $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$.

证明: 由复合函数极限法则可得

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\log x}\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim_{y\to+\infty}e^{-\frac{\log y}{y}}=1.$$

例 7. 求证: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$

证明: 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, 则我们有

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \overset{x=-y}{=} \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e.$$

注: 综上所述可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$ 这是一个典型的 1^∞ 型极限, 遇到这一类极限, 通常先取对数, 求出极限后再取指数.

例 8. 证明: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

证明: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \overset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$.

例 9. 证明: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$.

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e = 1$.

例 10. 求证: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a \ (a>0)$.

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \overset{y=a^x-1}{=} \lim\limits_{y\to 0}\frac{y\log a}{\log(1+y)} = \log a$.

注: 特别地, 我们有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

例 11. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2-3x}{2+3x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解: 利用复合函数极限法则可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{2-3x}{2+3x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{-6x}{2+3x}\right)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{-6x}{2+3x}\right)}{\frac{-6x}{2+3x}}\cdot\frac{-6}{2+3x}\\
=&-3,
\end{aligned}
$$

于是我们有 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2-3x}{2+3x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-3}$.

例 12. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$. 求证: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$.

证明: 若 $\alpha = 0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = 0 = \alpha$.

若 $\alpha \neq 0$, 则由复合函数极限法则可得

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} \overset{y=\alpha\log(1+x)}{=\!=} \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{e^{\frac{y}{\alpha}}-1}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{y} \cdot \frac{\frac{y}{\alpha}}{e^{\frac{y}{\alpha}}-1} \cdot \alpha = \alpha.$$

作业题:第2.3节第50页第6题(8),(12),(15),(16),第51页第7题 (3), (8), (9), (12), 第 8 题 (3), (5).

定理 5. **(单调有界定理)** 假设 $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, 而 $\eta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $f : (\eta, x_0) \to \mathbb{R}$ 为单调函数. 则函数极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 存在 (可以为无限).

- 若 f 递增, 该极限就是 $\mathrm{Im}(f)$ 的上确界,
- 若 f 递减, 该极限就是 $\mathrm{Im}(f)$ 的下确界.

证明: 在下面我们仅考虑 f 为单调递增的情形. 对于递减的情形, 可通过考察 $-f$ 将之转化成递增的情形.

分情况讨论:

(1) 如果 $\mathrm{Im}(f)$ 没有上界, 则 $\sup \mathrm{Im}(f) = +\infty$. 由此可知 $\forall M > 0$, $\exists \delta \in (\eta, x_0)$ 使得 $f(\delta) > M$. 从而 $\forall x \in (\delta, x_0)$, 我们有

$$f(x) \geqslant f(\delta) > M,$$

进而由极限定义可知

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty = \sup \mathrm{Im}(f).$$

(2) 如果 $\mathrm{Im}(f)$ 有上界, 则其上确界有限. 从而由上确界的性质可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (\eta, x_0)$ 使得

$$f(\delta) > \sup \mathrm{Im}(f) - \varepsilon.$$

于是 $\forall x \in (\delta, x_0)$, 我们均有

$$\begin{aligned} f(x) + \varepsilon &\geqslant f(\delta) + \varepsilon > \sup \mathrm{Im}(f) \\ &\geqslant f(x) > f(x) - \varepsilon. \end{aligned}$$

这就表明 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \sup \mathrm{Im}(f)$.

定理 5′. (单调有界定理) 假设 $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, 而 $\eta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f : (x_0, \eta) \to \mathbb{R}$ 为单调函数. 则函数极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 存在 (可以为无限).

- 若 f 递增, 该极限就是 $\mathrm{Im}(f)$ 的下确界,
- 若 f 递减, 该极限就是 $\mathrm{Im}(f)$ 的上确界.

证明: $\forall x \in (-\eta, -x_0)$, 我们定义 $F(x) = f(-x)$.

对 F 应用前面的定理立刻可得所要的结论.

定理 5″. (单调有界定理) 假设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 为单调函数而 $x_0\in(a,b)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在且有限.

- 若 f 单调递增, 则我们有

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)\leqslant f(x_0)\leqslant \lim_{x\to x_0^+}f(x),$$

- 若 f 单调递减, 则我们有

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)\geqslant f(x_0)\geqslant \lim_{x\to x_0^+}f(x).$$

证明: 这里, 我们仅考虑函数单调递增的情形.

$\forall x \in (x_0, b)$, 我们有 $f(x_0) \leqslant f(x)$, 从而

$$f(x_0) \leqslant \inf_{x_0<x<b} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

与此同时, $\forall x \in (a, x_0)$, 也有 $f(x_0) \geqslant f(x)$. 故

$$f(x_0) \geqslant \sup_{a<x<x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

因此所证结论成立.

例 13. $\forall x_0 \in [-1,1]$, 求证:

$$\lim_{x\to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0,$$

其中当 $x_0 = 1$ 或 -1 时, 该极限表示单侧极限.

证明: 由于函数 $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 为严格单调递增, 则由单调有界定理可知左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} \arcsin x$ 以及右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} \arcsin x$ 均存在,

分别设之为 α, β (当 $x_0 = 1$ 或 -1 时, 仅仅其中一个极限存在). 于是由极限的保序性立刻可知 $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$. 又由复合函数极限法则可得

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \lim_{x \to x_0^-} x = \lim_{x \to x_0^-} \sin(\arcsin x) = \sin \alpha, \\
x_0 &= \lim_{x \to x_0^+} x = \lim_{x \to x_0^+} \sin(\arcsin x) = \sin \beta,
\end{aligned}
$$

故 $\alpha = \beta = \arcsin x_0$, 也即所证结论成立.

作业题: 第 2.2 节第 42 页第 3 题第 (9) 小题.

定理 6. (Cauchy 准则) 假设 X 为非空的数集, x_0 为其极限点, 而 $f: X \to \mathbb{R}$ 为函数. 则极限 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x)$ 存在并且为实数当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, x' \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

证明: 必要性. 假设 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $\forall x, x' \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们有

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &\leqslant |f(x) - A| + |f(x') - A| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

充分性. 由于 x_0 为 X 的极限点, 则 $X\backslash\{x_0\}$ 中存在收敛到点 x_0 的数列 $\{a_n\}$. $\forall\varepsilon > 0$, 由假设可知 $\exists\delta > 0$ 使得 $\forall x, x' \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

又因 $\{a_n\}$ 收敛到 x_0, 故 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$. 于是 $\forall m, n > N$, 均有

$$|f(a_m) - f(a_n)| < \varepsilon.$$

从而 $\{f(a_n)\}$ 为 Cauchy 数列. 将其极限记为 A.

由假设, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta' > 0$ 使得 $\forall x, x' \in \mathring{B}_X(x_0, \delta')$,

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

而数列 $\{a_n\}$ 趋于 x_0 并且数列 $\{f(a_n)\}$ 趋于 A,

则 $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$, 均有 $a_n \in \mathring{B}_X(x_0, \delta')$,

于是 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta')$, 我们有 $|f(x) - f(a_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

同时 $\exists N_2 > 0$ 使得 $\forall n > N_2$, 我们有

$$|f(a_n) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $N = \max(N_1, N_2)$. 则 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta')$, 均有

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &\leqslant |f(x) - f(a_{N+1})| \\ &\quad + |f(a_{N+1}) - A| < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此我们有 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = A$.

谢谢大家!