第 5 次作业题解答

1. 如果 $f \in \mathscr{C}(0,+\infty)$ 使得 $\forall x, y > 0$, 均有 $f(xy) = f(x) + f(y)$. 求证: 或者 $f \equiv 0$, 或者 $\exists a > 0$ $(a \neq 1)$ 使得 $\forall x > 0$, $f(x) = \log_a x$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $F(x) = f(e^x)$. 则 $F \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, 并且 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 我们有

$$F(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x e^y) = f(e^x) + f(e^y) = F(x) + F(y).$$

从而 $\exists c \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $F(x) = cx$.

若 $c = 0$, 则 $\forall x > 0$, 我们有

$$f(x) = f(e^{\log x}) = F(\log x) = c \log x = 0.$$

若 $c \neq 0$, 令 $a = e^{1/c}$, 则 $\forall x > 0$, 均有

$$f(x) = F(\log x) = c \log x = \log_a x.$$

2. 如果 $f \in \mathscr{C}(0,+\infty)$ 使得 $\forall x, y > 0$, 均有 $f(xy) = f(x)f(y)$. 求证: 或者 $f \equiv 0$, 或者 $\exists a \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x > 0$, 均有 $f(x) = x^a$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $F(x) = f(e^x)$. 则 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 我们有

$$F(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x \cdot e^y) = f(e^x)f(e^y) = F(x)F(y).$$

由于 $F \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, 于是或者 $F \equiv 0$, 或者 $\exists c > 0$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $F(x) = c^x$.

在第一种情形, $\forall x > 0$, 我们有 $f(x) = f(e^{\log x}) = F(\log x) = 0$.

在第二种情形, 令 $a = \log c$, 则 $\forall x > 0$, 均有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(e^{\log x}) = F(\log x) \\ &= c^{\log x} = e^{(\log c)(\log x)} \\ &= e^{\log x^a} = x^a. \end{aligned}$$

3. 设 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ 使得 $a_1 + \cdots a_n = 0$, 求证: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin\sqrt{x+k} = 0$.

证明: $\forall x > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} & \Big|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin\sqrt{x+k}\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} a_k(\sin\sqrt{x+k} - \sin\sqrt{x})\Big| \\ \leqslant\ & \sum_{k=1}^{n} 2|a_k| \Big|\sin\frac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}}{2}\Big| \\ \leqslant\ & \sum_{k=1}^{n} 2|a_k| \Big|\sin\frac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x}}{2}\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| |\sqrt{x+k} - \sqrt{x}| \\ =\ & \sum_{k=1}^{n} \frac{k|a_k|}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=1}^{n} k|a_k|, \end{aligned}$$

于是由夹逼原理可知所证成立.

4. 利用极限来定义函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n^x\big((1+\frac{1}{n})^{n+1}-(1+\frac{1}{n})^n\big)$. 求函数 f 的定义域与表达式.

解: 当 $n\to\infty$ 时, 我们有

$$n^x\Big(\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1}-\big(1+\frac{1}{n}\big)^n\Big)=n^{x-1}\big(1+\frac{1}{n}\big)^n\sim en^{x-1}.$$

于是题设极限收敛当且仅当 $x\leqslant 1$, 也即 f 的定义域为 $(-\infty,1]$, 并且 $\forall x\leqslant 1$,

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若\ x<1,\\ e, & 若\ x=1.\end{cases}$$

5. 如果 $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ 使得 $\forall x\in(-1,1)$, 均有 $\big|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx\big|\leqslant|\sin x|$, 求证: $\big|\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\big|\leqslant 1$.

证明: 由题设可知, $\forall x\in(-1,1)\setminus\{0\}$, 我们有 $\big|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{\sin x}\big|\leqslant 1$, 于是

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}ka_k\Big|\leqslant\Big|\sum_{k=1}^{n}a_k\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin x}\Big|=\lim_{x\to 0}\Big|\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{\sin x}\Big|\leqslant 1.$$

6. 假设极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\big((x^3+x^2)^c-x\big)$ 存在 (有限), 求常数 c 以及极限值.

解: 令 $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\big((x^3+x^2)^c-x\big)$, 那么我们有

$$\alpha\overset{x=\frac{1}{y}}{=}\lim_{y\to 0^+}\big((\frac{1}{y^3}+\frac{1}{y^2})^c-\frac{1}{y}\big)=\lim_{y\to 0^+}\frac{y^{1-3c}(1+y)^c-1}{y},$$

则 $\lim\limits_{y\to 0^+}\big(y^{1-3c}(1+y)^c-1\big)=\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{y^{1-3c}(1+y)^c-1}{y}\cdot y=0$, 故 $\lim\limits_{y\to 0^+}y^{1-3c}(1+y)^c=1$, 由此可得 $\lim\limits_{y\to 0^+}y^{1-3c}=\lim\limits_{y\to 0^+}(1+y)^{-c}=1$, 从而我们有 $\lim\limits_{y\to 0^+}(1-3c)\log y=0$, 故 $3c-1=\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{(3c-1)\log y}{\log y}=0$, 即 $c=\frac{1}{3}$, 则所求极限为 $\alpha=\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{y}=\frac{1}{3}$.

7. 研究下列函数在点 $x_0=0$ 处的连续性与可导性. 若可导, 求 $f'(x_0)$.

(1) $f(x)=|x-3|$, (2) $f(x)=\begin{cases}x, & 若\ x<0,\\ \log(1+x), & 若\ x\geqslant 0.\end{cases}$

解: (1) 由连续函数复合法则可知 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 因此在点 $x_0=0$ 处连续. 又 $\forall x\in(-1,1)$, $f(x)=3-x$, 从而 f 在点 $x_0=0$ 处且 $f'(0)=-1$.

(2) 由题设条件知 $f(0-0)=f(0+0)=0=f(0)$, 因此 f 在点 $x_0=0$ 处连续. 又由左、右导数的定义得

$$\begin{aligned}f'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1,\\ f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+x)}{x}=1,\end{aligned}$$

于是 f 在点 $x_0=0$ 处可导且 $f'(0)=1$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 若\ x\leqslant 1 \\ ax+b, & 若\ x>1 \end{cases}$. 问 a,b 取何值时 f 在点 $x=1$ 可导.

解: 由题设立刻可知 $f(1-0)=2$, $f(1+0)=a+b$. 而由定义可知, 函数 f 在点 $x=1$ 处可导当且仅当 f 在该点连续 (也即 $a+b=2$) 且 $f'_-(1)=f'_+(1)$, 也即 $2=a$. 故 f 在点 $x=1$ 处可导当且仅当 $a=2$, $b=0$.

9. 当 a 为何值时, 曲线 $y=ax^2$ 与 $y=\log x$ 相切? 并求切点与切线方程.

解: 曲线 $y=ax^2$ 与 $y=\log x$ 相切当且仅当两曲线有公共的交点 (x_0,y_0), 且在该点处, 两曲线的切线重合. 在点 (x_0,y_0)处, 抛物线 $y=ax^2$ 的切线斜率为 $y'|_{x=x_0}=2ax_0$, 曲线 $y=\log x$ 的切线斜率为 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$. 故 (x_0,y_0) 为两曲线的公切点当且仅当 $y_0=ax_0^2=\log x_0$, $2ax_0=\frac{1}{x_0}$, 从而 $\log x_0=ax_0^2=\frac{1}{2}$. 故 $x_0=\sqrt{e}$, 进而可得 $a=\frac{1}{2x_0^2}=\frac{1}{2e}$. 因此当且仅当 $a=\frac{1}{2e}$ 时, 抛物线 $y=ax^2$ 与曲线 $y=\log x$ 相切, 其公切点为 $(\sqrt{e},\frac{1}{2})$, 切线方程为 $y-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e})$, 也即 $y=\frac{x}{\sqrt{e}}-\frac{1}{2}$.

10. 求 $\operatorname{th}x$, $\operatorname{cth}x$ 的导数.

解: 由导数的四则运算法则可得

$$\begin{aligned}
(\operatorname{th}x)' &= \left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh}x)'\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x\,(\operatorname{ch}x)'}{(\operatorname{ch}x)^2} = \frac{(\operatorname{ch}x)^2-(\operatorname{sh}x)^2}{(\operatorname{ch}x)^2} \\
&= \frac{(\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)}{(\operatorname{ch}x)^2} = \frac{e^x\cdot e^{-x}}{(\operatorname{ch}x)^2} = \frac{1}{(\operatorname{ch}x)^2}, \\
(\operatorname{cth}x)' &= \left(\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\right)' = \frac{(\operatorname{ch}x)'\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x\,(\operatorname{sh}x)'}{(\operatorname{sh}x)^2} = \frac{(\operatorname{sh}x)^2-(\operatorname{ch}x)^2}{(\operatorname{sh}x)^2} \\
&= \frac{(\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x)(\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x)}{(\operatorname{sh}x)^2} = \frac{e^x\cdot(-e^{-x})}{(\operatorname{sh}x)^2} = -\frac{1}{(\operatorname{sh}x)^2}.
\end{aligned}$$

11. 求下列函数的导函数:

(1) $y=x\big(\frac{1}{\sqrt{x}}-3x^{\frac{2}{3}}\big)$,

(2) $y=2^x(\sec x+\csc x)+\log_2(3x)+\log_{10}x^2$,

(3) $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$,

(4) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$,

(5) $y=(x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\cdots(x-a_n)^{a_n}$,

(6) $y=x+x^x+x^{x^x}$.

解: (1) $y'=\big(x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{5}{3}}\big)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-5x^{\frac{2}{3}}$.

(2) $y'=2^x\log 2\,(\sec x+\csc x)+2^x\big(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\big)+\frac{1}{x\log 2}+\frac{2}{x\log 10}$.

(3) $$\begin{aligned} y &= \cos(\cos^2 x)\cdot(2\cos x)\cdot(-\sin x)\cdot\cos(\sin^2 x) \\ &\quad+\sin(\cos^2 x)\cdot\big(-\sin(\sin^2 x)\cdot(2\sin x\cdot\cos x)\big) \end{aligned}$$

$$= -\cos(\cos^2 x)\cdot\sin(2x)\cdot\cos(\sin^2 x)$$
$$-\sin(\cos^2 x)\cdot\sin(\sin^2 x)\cdot\sin(2x).$$

(4) $y' = \frac{(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{1+\frac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
$= \frac{1+\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{1+\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
$= \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$

(5) $y' = (x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\cdots(x-a_n)^{a_n}\big(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x-a_k}\big).$

(6) $y' = 1+(e^{x\log x})' + (e^{x^x\log x})'$
$= 1+x^x(x\log x)' + x^{x^x}(x^x\log x)'$
$= 1+x^x(1+\log x) + x^{x^x}\big(x^{x-1}+(x^x)'\log x\big)$
$= 1+x^x(1+\log x) + x^{x^x}\big(x^{x-1}+x^x(1+\log x)\log x\big).$

12. 设 f 为可微函数, 求 $f(f(f(x)))$ 的导函数.

解: 由复合函数求导法则可知

$$\big(f(f(f(x)))\big)' = f'(f(f(x)))\cdot\big(f(f(x))\big)' = f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x).$$

13. 求函数 $y = x+e^x$ 的反函数的导数.

解: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{1+e^x}.$

14. 设方程 $xy = 1+xe^y$ 确定了 y 是 x 的可导函数, 求 $y'(x)$.

解: 将 $xy = 1+xe^y$ 对 x 求导得 $y+xy' = e^y+xe^yy'$, 于是 $y' = \frac{e^y-y}{x(1-e^y)}$.

15. 求曲线 $xy+\log y = 1$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程.

解: 将隐函数方程 $xy+\log y = 1$ 关于 x 求导立刻可得

$$y+xy'+\frac{y'}{y} = 0,$$

则我们有 $y' = -\frac{y^2}{1+xy}$, 从而 $y'|_{x=1} = -\frac{1}{2}$. 故所求切线方程为

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x-1).$$

16. 对参数方程 $\begin{cases} x = 3t^2+2t \\ e^y\sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 将参数方程关于 t 求导可得

$$x' = 6t+2,\ e^y\cos t + e^yy'\sin t - y' = 0,$$

则 $x' = 2(3t+1)$, $y' = \frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}$. 故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'}{x'} = \frac{e^y\cos t}{2(3t+1)(1-e^y\sin t)}$.