# 第 10 次作业题

**1.** 利用 Green 公式计算曲线积分 $\oint\limits_{L^+}(x+y)^2\,\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$, 其中 $L$ 是以 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ 为顶点的三角形的边界, 逆时针方向为正.

**解:** 设闭曲线 $L$ 所围成的平面区域为 $D$, 则由 Green 公式可得

$$\begin{aligned}
&\oint\limits_{L^+}(x+y)^2\,\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\Big(\frac{\partial(-(x^2+y^2))}{\partial x}-\frac{\partial((x+y)^2)}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=\ &\iint\limits_D\Big(-2x-2(x+y)\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint\limits_D(2x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=\ &-2\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}(2x+y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\\
=\ &-2\int_0^1\Big(2x(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2\Big)\,\mathrm{d}x\\
=\ &-2\Big(x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}(x-1)^3\Big)\Big|_0^1=-1.
\end{aligned}$$

**2.** 计算星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 所围区域的面积, 其中 $a>0$.

**解:** 题设星形线 $L$ 的参数方程给出的方向为逆时针方向, 则由 Green 公式可知所求面积为

$$\begin{aligned}
S\ &=\ \frac{1}{2}\oint\limits_{L^+}x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x\\
&=\ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big((a\cos^3 x)\,\mathrm{d}(a\sin^3 t)-a\sin^3 t\,\mathrm{d}(a\cos^3 t)\big)\\
&=\ \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\big((\sin^2 t)(\cos^4 x)+(\sin^4 t)(\cos^2 t)\big)\,\mathrm{d}t\\
&=\ \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}(\sin^2 t)(\cos^2 x)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t\\
&=\ \frac{3}{8}a^2\cdot\frac{1}{2}\Big(t-\frac{1}{4}\sin 4t\Big)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{8}a^2\pi.
\end{aligned}$$

**3.** 计算曲线积分 $\int\limits_{L^+}(1+xe^{2y})\,\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y^2)\,\mathrm{d}y$, 其中 $L$ 是从点 $(0,0)$ 经上半圆周 $(x-2)^2+y^2=4$ 到点 $(4,0)$ 的弧段.

**解:** 由题设立刻可知

$$\begin{aligned}\int_{L^+}(1+xe^{2y})\,\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y^2)\,\mathrm{d}y &= \int_{L^+}\mathrm{d}\Big(x+\frac{1}{2}x^2e^{2y}-\frac{1}{3}y^3\Big)\\ &= \Big(x+\frac{1}{2}x^2e^{2y}-\frac{1}{3}y^3\Big)\Big|_{(0,0)}^{(4,0)}\\ &= 12.\end{aligned}$$

**4.** 已知 $f$ 连续可微, 而 $L$ 为任意一条分段光滑的闭曲线, 证明:

$$(1)\ \oint_{L^+} f(xy)(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)=0,\quad (2)\ \oint_{L^+} f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)=0.$$

**证明:** **方法 1.** 设 $D$ 为曲线 $L$ 所围成的平面区域, 则由 Green 公式可知

$$\oint_{L^+} f(xy)(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)=\iint_D\Big(\frac{\partial(xf(xy))}{\partial x}-\frac{\partial(yf(xy))}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\oint_{L^+} f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)=\iint_D\Big(\frac{\partial(yf(x^2+y^2))}{\partial x}-\frac{\partial(xf(x^2+y^2))}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

**方法 2.** 由于 $f$ 连续可微, 因此 $f$ 有原函数. 设 $F$ 为 $f$ 的一个原函数, 即我们有 $F'=f$. 由此可得

$$\begin{aligned}f(xy)(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y) &= \mathrm{d}\big(F(xy)\big),\\ f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y) &= \mathrm{d}\big(\frac{1}{2}F(x^2+y^2)\big),\end{aligned}$$

进而可知所证结论成立.

**5.** 利用 Gauss 公式计算曲面积分 $\displaystyle\oiint_{S^+} x^3\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中 $S^+$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 的外侧.

**解:** 将球面 $S$ 所围成的球体记作 $\Omega$, 则由 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned}&\oiint_{S^+} x^3\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ =\ &\iiint_\Omega(3x^2+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ =\ &3\int_0^a\Big(\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^\pi r^2\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}\varphi\Big)\,\mathrm{d}r\\ =\ &6\pi\Big(\frac{r^5}{5}\Big|_0^a\Big)\Big(-\cos\theta\Big|_0^\pi\Big)\\ =\ &\frac{12}{5}\pi a^5.\end{aligned}$$

**6.** 设 $S$ 为分片光滑闭曲面, $\vec{a}$ 为异于 $\vec{0}$ 的常向量, $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)^T$ 为 $S$ 的单位外法向量. 证明: $\displaystyle\oiint_S\cos\langle\vec{n},\vec{a}\rangle\,\mathrm{d}\sigma=0$.

**证明:** 设曲面 $S$ 所围成的空间区域为 $\Omega$, 则由 Gauss 公式可知

$$\oiint\limits_S \cos\langle\vec{n},\vec{a}\rangle\,\mathrm{d}\sigma = \oiint\limits_S \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_\Omega \mathrm{div}\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

**7.** 证明: 由分片光滑闭曲面 $S$ 所围成的空间立体的体积为

$$V = \frac{1}{3}\oiint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)^T$ 为 $S$ 的单位外法向量.

**证明:** 设曲面 $S$ 所围成的空间区域为 $\Omega$, 则由 Gauss 公式可知

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\oiint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{3}\oiint\limits_S (x,y,z)^T\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma \\
= \quad &\frac{1}{3}\iiint\limits_\Omega \mathrm{div}(x,y,z)^T\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = |\Omega| = V,
\end{aligned}$$

故所证结论成立.

**8.** 利用 Stokes 公式计算曲线积分 $\oint\limits_{L^+} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, 其中 $L$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 从 $z$ 轴的正向看去, 其正向为逆时针方向.

**解:** 设 $S$ 为圆盘 $x+y+z=0$ $(x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2)$, 其正向与 $L^+$ 满足右手螺旋法则, 其单位法向量为 $\vec{n}^0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T$. 由 Stokes 公式可知

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{C^+} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z &= \iint\limits_{S^+} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y + \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z \\
&= -\iint\limits_{S^+} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= -\iint\limits_{S^+} (1,1,1)^T\cdot\vec{n}^0\,\mathrm{d}\sigma \\
&= -\sqrt{3}|S| = -\sqrt{3}\pi R^2.
\end{aligned}$$