微积分 A (2)

姚家燕

第 19 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

重要通知

4 月 30 日星期五以及 5 月 2 日星期三停上《微积分A (2)》, 5 月 7 日星期五恢复上课.

第 18 讲回顾: 第一类曲线积分

- 第一类曲线积分 $\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell$ 的定义: 形式上与 $[a,b]$ 上的定积分完全相同, 但却要将闭区间 $[a,b]$ 换成空间曲线 L.
- 若 L 为分段光滑曲线, 而函数 f 为分段连续, 则第一类曲线积分 $\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell$ 存在.
- 若 $L\subset\mathbb{R}^2$, 则曲线积分 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}\ell$ 为柱面 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in L$ 的面积.

- 第一类曲线积分具有与 $[a, b]$ 上的定积分完全类似的性质.
- 第一类曲线积分与曲线的方向无关.
- 空间曲线 L 的质心 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_L x\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\ell,\ \ \bar{y} = \frac{1}{M}\int_L y\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\ell,$$
$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int_L z\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\ell,\ \ M = \int_L \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\ell,$$

其中 ρ 为质量分布的密度函数.

回顾: 第一类曲线积分的计算

设分段光滑曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \\ z = z(t), \end{cases}$$

则第一类曲线积分 $\int_L f(x, y, z)\,\mathrm{d}\ell$ 等于

$$\int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

特别地, 若曲线 $L \subset \mathbb{R}^2$ 由方程

$$y = y(x),\ \ x \in [a, b]$$

给出, 则我们有

$$\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}\ell = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

同样地, 若曲线 $L \subset \mathbb{R}^2$ 由方程

$$x = x(y),\ \ y \in [c, d]$$

给出, 则我们有

$$\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}\ell = \int_c^d f(x(y), y)\sqrt{(x'(y))^2 + 1}\,\mathrm{d}y.$$

若 L 在极坐标系下的方程为

$$\rho = \rho(\varphi), \ \varphi \in [\alpha, \beta],$$

则 L 在直角坐标系下的参数方程为

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \ y = \rho(\varphi)\sin\varphi,$$

于是曲线 L 的弧微分为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\ell &= \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \sqrt{\big(\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi\big)^2 + \big(\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi\big)^2}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}$$

若曲线 L 由隐函数方程组

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z)=0, \\ \varphi_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

给出, 利用隐函数定理来局部求解上述方程组,

由此得到曲线 L 的分段的参数表示, 随后再对

每段分别利用前面的公式计算.

回顾: 第一类曲面积分

- 第一类曲面积分 $\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$ 的定义:
  形式上与二重积分相同, 但要将二维的坐标平行体换成曲面 S, 故二者性质完全类似.
- 若 S 为分片光滑正则曲面, 而 f 为分片连续函数, 则 $\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$ 存在.
- 如果 $S \subset \mathbb{R}^2$, 则 $\iint\limits_S f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 为 S 上且介于曲面 $z=0$ 与 $z=f(x,y)$ 之间的立体体积.

回顾: 第一类曲面积分的计算

设分片光滑正则曲面 S 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

其中 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为 Jordan 可测集, 则面积微元为

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

其中

$$
\begin{aligned}
E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\
G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \\
F &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.
\end{aligned}
$$

于是我们有

$$
\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.
$$

特别地, 若曲面 S 由方程

$$z = z(x, y),\ (x, y) \in D$$

给出, 则我们有

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

当曲面 S 由方程 $x = x(y, z)$ 或方程 $y = y(x, z)$ 给出时, 我们也有类似的公式.

回顾: 第二类曲线积分

- 第二类曲线积分的定义及其意义.
- 如果 L 为分段光滑曲线, 而 $\vec{F}$ 为分段连续, 则 $\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ 存在.
- 第二类曲线积分的性质: 一类只涉及到被积函数, 这样的性质与定积分的相应性质类似; 另外一类涉及到积分路径: 路径的有方向性, 对路径的可加性 (闭路径的可加性).

回顾: 第二类曲线积分的计算

设分段光滑曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [a,b], \qquad \vec{\ell} = (x,y,z), \\ z = z(t), \end{cases}$$

其中 A, B 所对应的参数分别为 a, b, 则

$$\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{L(A)}^{(B)} F_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\,\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_a^b \Big(F_1(x(t),y(t),z(t))x'(t) + F_2(x(t),y(t),z(t))y'(t)$$

$$+F_3(x(t),y(t),z(t))z'(t) \Big)\,\mathrm{d}t.$$

第 19 讲

第一、二类曲线积分之间的关系

设路径 $L \subset \mathbb{R}^3$ 是起点为 A, 终点为 B 的分段光滑曲线, 其参数方程为

$$\vec{\ell}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), \ t \in [a, b],$$

而 $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) : L \to \mathbb{R}^3$ 为分段连续函数. $\forall P \in L$, 设 L 在点 P 处的单位切向量为

$$\vec{\tau}^0(P) = \big(\cos\alpha(P), \cos\beta(P), \cos\gamma(P)\big).$$

于是 $\forall t \in [a,b]$, 我们有

$$\vec{\tau}^0(\vec{\ell}(t)) = \frac{\vec{\ell}'(t)}{\|\vec{\ell}'(t)\|} = \frac{\big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}.$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\big(\vec{\ell}(t)\big) &= \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}, \\
\cos\beta\big(\vec{\ell}(t)\big) &= \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}, \\
\cos\gamma\big(\vec{\ell}(t)\big) &= \frac{z'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}.
\end{aligned}$$

注意到 $\mathrm{d}\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t$, 故

$$x'(t)\,\mathrm{d}t = \cos\alpha\,\mathrm{d}\ell,\ \ y'(t)\,\mathrm{d}t = \cos\beta\,\mathrm{d}\ell,\ \ z'(t)\,\mathrm{d}t = \cos\gamma\,\mathrm{d}\ell.$$

进而我们就有

$$\begin{aligned}
\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}(\vec{\ell})\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} &= \int_{L(A)}^{(B)} F_1(\vec{\ell})\,\mathrm{d}x + F_2(\vec{\ell})\,\mathrm{d}y + F_3(\vec{\ell})\,\mathrm{d}z \\
= \quad & \int_a^b \Big(F_1(\vec{\ell}(t))x'(t) + F_2(\vec{\ell}(t))y'(t) + F_3(\vec{\ell}(t))z'(t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
= \quad & \int_L \big(F_1(x,y,z)\cos\alpha + F_2(x,y,z)\cos\beta + F_3(x,y,z)\cos\gamma\big)\mathrm{d}\ell \\
= \quad & \int_L (\vec{F}\cdot\vec{\tau}^0)(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell.
\end{aligned}$$

评注

- 由于第二类曲线积分可以转化成第一类曲线积分，因此只要不涉及到路径时，第二类曲线积分就具有与第一类曲线积分类似的性质.
- 形式上，我们有 $\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{\tau}^0 \, \mathrm{d}\ell$，也即

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha \, \mathrm{d}\ell, \ \ \mathrm{d}y = \cos\beta \, \mathrm{d}\ell, \ \ \mathrm{d}z = \cos\gamma \, \mathrm{d}\ell.$$

例 6. 求证: $\left|\int_L \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}\right| \leqslant \int_L \|F(x,y,z)\|\,\mathrm{d}\ell.$

证明: 由题设可知

$$\begin{aligned}
\left|\int_L \vec{F}(\vec{\ell}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}\right| &= \left|\int_L (\vec{F} \cdot \vec{\tau}^0)(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell\right| \\
&\leqslant \int_L |(\vec{F} \cdot \vec{\tau}^0)(x,y,z)|\,\mathrm{d}\ell \\
&\leqslant \int_L \|\vec{F}(x,y,z)\|\,\mathrm{d}\ell,
\end{aligned}$$

由此可知所证结论成立.

例 7. 求 $I=\oint_{L^+}\dfrac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$, 其正向为逆时针方向.

解: $\forall (x,y)\in L$, L 在该点的单位切向量为

$$\vec{\tau}^{\,0}(x,y)=\Big(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big),$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned} I &= \int_L \Big(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\cdot\Big(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)\,\mathrm{d}\ell \\ &= \int_L \frac{\mathrm{d}\ell}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_L\frac{1}{a}\,\mathrm{d}\ell=\frac{|L|}{a}=\frac{1}{a}\cdot 2\pi a=2\pi. \end{aligned}$$

例 8. 计算 $I = \int_L (ye^x \sin y - xe^x \cos y)\,\mathrm{d}\ell$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 位于第一象限的部分.

解: $\forall (x, y) \in L$, 圆周 L 在该点处的单位切向量为 $\vec{\tau}^0(x, y) = (-y, x)$, 于是我们有

$$\begin{aligned}
I &= \int_L (-e^x \sin y, -e^x \cos y) \cdot (-y, x)\,\mathrm{d}\ell \\
&= \int_L (-e^x \sin y, -e^x \cos y) \cdot \vec{\tau}^0(x, y)\,\mathrm{d}\ell \\
&= \int_{L^+} -e^x \sin y\,\mathrm{d}x - e^x \cos y\,\mathrm{d}y = -\int_{L^+} \mathrm{d}(e^x \sin y) \\
&= \Big(-e^x \sin y\Big)\Big|_{(1,0)}^{(0,1)} = -\sin 1.
\end{aligned}$$

§4. 第二类曲面积分

1. 曲面的定向

设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 光滑正则曲面, 参数方程为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

其中 $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ 连续可微且法向量

$$\vec{n}_\pm = \pm \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{D(y,z)}{D(u,v)} \\ \frac{D(z,x)}{D(u,v)} \\ \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \end{pmatrix}.$$

$\forall P \in S$, $\vec{n}_+(P), \vec{n}_-(P)$ 在该点处给出曲面 S 的“两个”侧面. 我们现在来定义该曲面的定向.

固定 $P_0 \in S$ 并在该点处取定单位法方向 $\vec{n}(P_0)$ (如 $\vec{n}^0_+(P_0)$) 为正方向. 如果在任意点 $P \in S$ 处可确定单位法方向 $\vec{n}^0(P)$ 使得 $\vec{n}^0$ 在连接 P_0 的任意的光滑曲线上连续, 则称 S 为可定向曲面, 否则称为不可定向曲面.

例 1. 空间 $\mathbb{R}^3$ 中的球面为可定向曲面, 但著名 Möbius 带为不可定向曲面.

命题 1. 设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为连通的光滑曲面. 则 S 为可定向曲面当且仅当法向量 $\vec{n}_+$ 永不为零向量. 此时曲面 S 只有两个定向, 分别为 $\vec{n}_+$ 和 $\vec{n}_-$.

定义 1. 假设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为连通的可定向光滑曲面, 在 S 上给定一个定向并且将相应的单位法向量记作 $\vec{n}_S^0$, 此时我们将 S 称为定向曲面.

2. 第二类曲面积分的概念

定义 2. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为开集, $S \subset \Omega$ 为可定向曲面 (正侧为 S^+), 而 $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ 为函数. 将 S 分成 k 小块: $S_1, \ldots, S_k$. 在 S_j 上取点 X_j, 并令 $\vec{S}_j = \vec{n}_S^0(X_j)|S_j|$. 记 d 为所有 S_j 的直径当中的最大者. 定义 (若极限存在)

$$\iint_{S^+} \vec{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \lim_{d \to 0} \sum_{j=1}^{k} \vec{F}(X_j) \cdot \vec{S}_j,$$

称为 $\vec{F}$ 在定向曲面 S^+ 上的第二类曲面积分.

评注

- 上述极限存在意味着: $\exists a \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得当 $d < \delta$ 时, 我们有
$$\left| \sum_{j=1}^{k} \vec{F}(X_j) \cdot \vec{S}_j - a \right| < \varepsilon,$$
此时将 a 记作 $\iint\limits_{S^+} \vec{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$.
- 若 $\vec{F}$ 为分片连续, 则 $\iint\limits_{S^+} \vec{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$ 存在.
- 若 S 为封闭曲面, 常将外侧取为正侧并且将第二类曲面积分记作 $\oiint\limits_{S^+} \vec{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$.

第一、二类曲面积分之间的关系

由定义可知

$$\iint\limits_{S^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \lim_{d\to 0}\sum_{j=1}^{k} \vec{F}(X_j)\cdot \vec{S}_j$$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{j=1}^{k} \vec{F}(X_j)\cdot \vec{n}_S^0(X_j)|S_j|$$

$$= \iint\limits_{S} (\vec{F}\cdot \vec{n}_S^0)(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma,$$

也即我们有 $\mathrm{d}\vec{\sigma} = \vec{n}_S^0(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma.$

若记 $\vec{n}_S^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 则我们有

$$\iint_{S^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \iint_{S} (\vec{F}\cdot\vec{n}_S^0)(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_{S} \Big(F_1(x,y,z)\cos\alpha + F_2(x,y,z)\cos\beta + F_3(x,y,z)\cos\gamma \Big)\,\mathrm{d}\sigma.$$

现定义 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = \cos\beta\,\mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma$, 则我们有

$$\iint_{S^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \iint_{S^+} \Big(F_1(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$+F_2(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + F_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \Big).$$

第二类曲面积分的性质

- 当不涉及到曲面的定向时，第二类曲面积分具有与第一类曲面积分类似的性质.
- 曲面的有向性:

$$\iint_{S^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = -\iint_{S^-} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}.$$

- 曲面的可加性: 如果曲面 S 由 S_1, S_2 所组成，并且 S_1, S_2 的定向由 S 的定向诱导，则

$$\iint_{S^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \iint_{S_1^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} + \iint_{S_2^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}.$$

第二类曲面积分的计算

设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 光滑正则曲面, 参数方程为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

其中 D 为 Jordan 可测, x, y, z 为连续可微且

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D(y,z)}{D(u,v)} \\ \frac{D(z,x)}{D(u,v)} \\ \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

$\forall(u,v)\in D$, 我们记

$$\vec{r}(u,v)=\begin{pmatrix} x(u,v)\\ y(u,v)\\ z(u,v)\end{pmatrix},$$

则 $\vec{n}(u,v)=\vec{r}\,'_u(u,v)\times\vec{r}\,'_v(u,v)$, 并且

$$\mathrm{d}\sigma=\|\vec{n}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

于是 $\mathrm{d}\vec{\sigma}=\vec{n}^0_S(\vec{r}(u,v))\,\mathrm{d}\sigma=\pm\vec{n}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 其中 $\pm$ 在 $\vec{n}$ 与 S^+ 同向时取正号, 反向时取负号.

由此我们立刻可得

$$\iint_{S^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \pm \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot \vec{n}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \pm \iint_D \Big(F_1(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{D(y,z)}{D(u,v)}$$

$$+F_2(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$$

$$+F_3(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $\pm$ 由任意一点处, $\vec{n}, S^+$ 是否同向来定.

又由混合积 $\vec{F}\cdot(\vec{r}\,'_u\times\vec{r}\,'_v)$ 的表达式可知

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{S^+}\vec{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}\\
=\;&\pm\iint\limits_{D}\vec{F}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\vec{n}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
=\;&\pm\iint\limits_{D}\big(\vec{F}\cdot(\vec{r}\,'_u\times\vec{r}\,'_v)\big)(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
=\;&\pm\iint\limits_{D}\begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

形式上, 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z &= \pm \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \\
\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x &= \pm \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \\
\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= \pm \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

若对符号 $\wedge$ (称为外积) 给予适当的诠释, 上述关系式的确成立.

不严格的数学推导

事实上, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z &= \left(\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)\wedge\left(\frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)\\
&= \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u\wedge\frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\wedge\frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u\\
&\quad+\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u\wedge\frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v+\frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\wedge\frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v\\
&= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}u\\
&= \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\\
&= \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

计算第二类曲面积分的步骤

- 给出定向曲面 S^+ 的参数方程. 有时还需要将 S 分片, 在每片上给出各自的参数表示.
- 在曲面上任取一个定点 P_0, 并将相应的参数记作 (u_0, v_0). 利用参数方程来计算法向量

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}\,'_u(u_0, v_0) \times \vec{r}\,'_v(u_0, v_0),$$

随后再将 $\vec{n}(u_0, v_0)$ 与 S^+ 在点 P_0 处的方向进行比较, 以便确定二重积分前的正负号.

例 1. $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 令 $\vec{F}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)^T$. 假设 S 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围的四面体的表面. 求流速场 $\vec{F}$ 由 S 的内部流向外部的流量 Q.

解: 封闭曲面 S 由下述四个平面组成:

$$S_1:\ x=0;\ S_2:\ y=0,\ S_3:\ z=0,\ S_4:\ x+y+z=1,$$

于是所求流量为

$$Q=\unicode{x222F}_{S^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}=\iint_{S_1^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}+\iint_{S_2^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}+\iint_{S_3^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}+\iint_{S_4^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}.$$

在 S_1^+ 上, $x=0$, 此时我们则有 $\vec{n}_S^0=(-1,0,0)^T$,

于是 $\vec{F}\cdot\vec{n}_S^0=0$, 故 $\displaystyle\iint\limits_{S_1^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}=0$.

在 S_2^+ 上, $y=0$, 此时我们则有 $\vec{n}_S^0=(0,-1,0)^T$,

于是 $\vec{F}\cdot\vec{n}_S^0=0$, 故 $\displaystyle\iint\limits_{S_2^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}=0$.

在 S_3^+ 上, $z=0$, 此时我们则有 $\vec{n}_S^0=(0,0,-1)^T$,

于是 $\vec{F}\cdot\vec{n}_S^0=0$, 故 $\displaystyle\iint\limits_{S_3^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}=0$.

平面 S_4^+ 的方程为

$$z = 1 - x - y \ (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x),$$

在其上任意一点处, $\vec{n}_S^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 并且

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned} Q &= \iint\limits_{S_4^+} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \iint\limits_{S_4} \vec{F} \cdot \vec{n}_S^0\, \mathrm{d}\sigma \\ &= \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x}} \left(x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 2. 求 $\displaystyle\oiint_{S^+} y^2 z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中闭曲面 S^+ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围的立体的表面的外侧.

解: 假设 S_1^+ 为 $z=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的外侧, 而 S_2^+ 为平面 $z=1$ $(x^2+y^2\leqslant 1)$ 的上侧.

(1) 曲面 S_1^+ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x, \\ y=y, \\ z=x^2+y^2, \end{cases} \qquad (x^2+y^2\leqslant 1).$$

注意到 $\frac{D(x,y)}{D(x,y)}=1$, 而在原点处, 曲面 S_1^+ 的正向为 $(0,0,-1)^T$, 于是我们有

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{S_1^+} y^2 z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = -\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} y^2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\overset{\substack{x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi}}{=}\;& -\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(\rho\sin\varphi)^2\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi \\
=\;& -\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^6}{6}\cdot\sin^2\varphi\right)\Big|_0^1\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
=\;& -\frac{1}{6}\frac{\varphi-\frac{1}{2}\sin(2\varphi)}{2}\Big|_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

(2) 曲面 S_2^+ 的参数方程为 $\begin{cases} x = x, \\ y = y, \quad (x^2+y^2 \leqslant 1), \\ z = 1, \end{cases}$

此时 $\frac{D(x,y)}{D(x,y)} = 1$, 而在点 $(0,0,1)$ 处, 曲面 S_2^+ 的正向为 $(0,0,1)^T$, 于是我们有

$$\iint_{S_2^+} y^2 z \, dx \wedge dy = \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} y^2 \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (\rho \sin\varphi)^2 \rho \, d\rho \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} \cdot \sin^2\varphi \Big|_0^1 \right) d\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)}{2} \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{\pi}{4},$$

由此可得 $\oiint_{S^+} y^2 z \, dx \wedge dy = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

例 3. 计算 $\displaystyle\oiint_{S^+} x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$, 其中闭曲面 S^+ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围的立体的表面的外侧.

解: 假设 S_1^+ 为 $z=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的外侧, 而 S_2^+ 为平面 $z=1$ $(0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1)$ 的上侧.

(1) 曲面 S_1^+ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x, \\ y=y, \\ z=x^2+y^2, \end{cases} \qquad (x^2+y^2\leqslant 1).$$

注意到 $\frac{D(y,z)}{D(x,y)}=-2x$, 并且在原点处, 曲面 S_1^+ 的正向为 $(0,0,-1)^T$, $\frac{D(x,y)}{D(x,y)}=1$, 于是我们有

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S_1^+} x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z &= -\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\overset{\substack{x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi}}{=} 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(\rho\cos\varphi)^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{4}\cdot\cos^2\varphi\right)\Big|_0^1\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2}\frac{\varphi+\frac{1}{2}\sin(2\varphi)}{2}\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(2) 曲面 S_2^+ 的参数方程为 $\begin{cases} x = x, \\ y = y, \quad (x^2+y^2 \leqslant 1), \\ z = 1, \end{cases}$

此时 $\frac{D(y,z)}{D(x,y)} = 0$, 而在点 $(0,0,1)$ 处, 曲面 S_2^+ 的正向为 $(0,0,1)^T$, $\frac{D(x,y)}{D(x,y)} = 1$, 于是我们有

$$\iint\limits_{S_2^+} x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} x \frac{D(y,z)}{D(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

由此可得 $\oiint\limits_{S^+} x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}$.

例 4. 求 $\displaystyle\oiint_{S^+} x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

其中 S^+ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

解: 椭球面的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi, \\ y = b\sin\theta\sin\varphi, \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi). \\ z = c\cos\theta, \end{cases}$$

由此立刻可得

$$\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} b\cos\theta\sin\varphi & b\sin\theta\cos\varphi \\ -c\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = bc\sin^2\theta\cos\varphi,$$

同样, 我们也有

$$\begin{aligned}\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} &= \begin{vmatrix} -c\sin\theta & 0 \\ a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} \\ &= ac\sin^2\theta\sin\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} &= \begin{vmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \\ b\cos\theta\sin\varphi & b\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \\ &= ab\sin\theta\cos\theta.\end{aligned}$$

在点 $(a,0,0)$ 处, $\varphi=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, 此时 S^+ 的正向为 $(1,0,0)^T$, 而 $\vec{n}=(bc,0,0)^T$,

于是我们有

$$
\begin{aligned}
& \oiint\limits_{S^+} x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
= & \iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi}} \left(x\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} + y\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} + z\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} \right) \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \\
= & \int_0^\pi \Big(\int_0^{2\pi} \big(a\sin\theta\cos\varphi (bc\sin^2\theta\cos\varphi) \\
& + b\sin\theta\sin\varphi(ac\sin^2\theta\sin\varphi) + c\cos\theta(ab\sin\theta\cos\theta) \big) \mathrm{d}\varphi \Big) \mathrm{d}\theta \\
= & \ abc \int_0^\pi \Big(\int_0^{2\pi} \big(\sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos^2\theta \big) \mathrm{d}\varphi \Big) \mathrm{d}\theta \\
= & \ abc \int_0^\pi \Big(\int_0^{2\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi \Big) \mathrm{d}\theta = 2\pi abc \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\pi abc.
\end{aligned}
$$

例 5. 求 $\displaystyle\oiint_{S^+} x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, 其中 S^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧.

解: 由题设可知

$$\oiint_{S^+} x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \oiint_{S} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \vec{n}^0\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \oiint_{S} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}\sigma = R|S| = 4\pi R^3.$$

作业题: 第 4.5 节第 201 页第 1 题第 (3) 小题, 第 3 题第 (4) 小题, 第 202 页第 5 题.

谢谢大家!