

### 第 3 次作业题

1. 求向量值函数  $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$  的逆映射的 Jacobi 矩阵与 Jacobi 行列式.
2. 求下列曲面在给定点处的切平面方程和法线方程:
  - (1)  $z = x^2 + y^2$ , 点  $P(1, 2, 5)$ ,
  - (2)  $(2a^2 - z^2)x^2 = a^2y^2$ , 点  $P(a, a, a)$ , 其中  $a > 0$ ,
  - (3)  $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$ , 点  $(u, v) = (1, 2)$ .
3. 在椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  上求点  $P$  使过该点的法线与坐标轴成等角.
4. 求曲面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  上平行于  $x + 4y + 6z = 0$  的切平面.
5. 求曲线  $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  在点  $P(1, -2, 1)$  的切线与法平面方程.
6. 证明: 螺旋线  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$  的切线与  $z$  轴成定角.
7.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , 定义  $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ . 求  $f$  在原点一阶带 Lagrange 余项和二阶带 Peano 余项的 Taylor 公式.
8. 研究下列函数的极值:
  - (1)  $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ ;
  - (2)  $z = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}$  ( $x_i > 1, 1 \leq i \leq n$ ).
9. 求由方程  $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{2}{3}z = 0$  所确定的隐函数  $z = z(x, y)$  的极值.