微积分 A (1)

姚家燕

第 7 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

重要通知

1. 本周三的答疑时间改为 17:00-18:00.
2. 自今日起课程微信群每晚 23:00 至第 2 天上午 6:00 为休息静默时间.

第 7 讲

综合练习 (续)

例 4. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0\ (\alpha\in\mathbb{R},\ a>1)$.

证明: $\forall n\geqslant 1$, 定义

$$x_n=\frac{\frac{(n+1)^{[\alpha]+1}}{a^{n+1}}}{\frac{n^{[\alpha]+1}}{a^n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{[\alpha]+1}\frac{1}{a}.$$

那么 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{a}<1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{[\alpha]+1}}{a^n}=0$. 注意到 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $0\leqslant\frac{n^\alpha}{a^n}\leqslant\frac{n^{[\alpha]+1}}{a^n}$, 于是由夹逼原理可知所证结论成立.

例 5. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\ (a\in\mathbb{R})$.

证明: 若 $a=0$, 则所证成立.

现假设 $a\neq 0$. $\forall n\geqslant 1$, 我们定义

$$x_n=\frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}}=\frac{|a|}{n+1},$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0<1$, 由此我们立刻可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

例 6. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+1})$.

解: $\forall n\geqslant 1$, 我们均有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \sin^2(\pi\sqrt{n^2+1})=\sin^2(\pi(\sqrt{n^2+1}-n))\\ &= \Big(\sin\big(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\big)\Big)^2\\ &\leqslant \big(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\big)^2\leqslant\frac{\pi^2}{n^2}.\end{aligned}$$

于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+1})=0.$

例 7. 求 $\lim_{n\to\infty}(a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+\cdots a_m\sqrt{n+m})$, 其中 $a_1+a_2+\cdots+a_m=0$.

解: $\forall n\geqslant 1$, 我们均有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{m}a_k\sqrt{n+k}\right| &= \left|\sum_{k=1}^{m}a_k(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{m}|a_k||\sqrt{n+k}-\sqrt{n}| = \sum_{k=1}^{m}\frac{k|a_k|}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{m}k|a_k|.
\end{aligned}$$

则由夹逼原理可知 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}a_k\sqrt{n+k}=0$.

例 8. 若 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{2n-1}\}$ 收敛于 a, 并且 $x_{2n} = x_{2n-1} + \frac{1}{2n-1}$, 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

证明: 由题知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$. 得证.

例 9. 假设数列 $\{a_n\}$ 收敛. 则 $\{a_n + b_n\}$ 收敛当且仅当 $\{b_n\}$ 收敛.

证明: 如果 $\{b_n\}$ 收敛, 则由四则运算法则可知 $\{a_n + b_n\}$ 收敛. 反过来, 假设 $\{a_n + b_n\}$ 收敛. 由于 $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $b_n = (a_n + b_n) - a_n$, 则由四则运算法则可知 $\{b_n\}$ 收敛.

例 10. 假设 $\{x_n\}$ 收敛到 a, 而 $\{y_n\}$ 收敛到 b.

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n} = ab$.

证明: 因为 $\{y_n\}$ 收敛, 故有界, 则 $\exists M > 0$ 使得 $\forall n \geqslant 1$, $|y_n| \leqslant M$. 故 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+1-k} - ab\Big| = \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)y_{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} a(y_{n+1-k} - b)\Big|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - a||y_{n+1-k}| + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a||y_{n+1-k} - b|$$

$$\leqslant \frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - a| + \frac{|a|}{n}\sum_{k=1}^{n}|y_k - b|$$

由于 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别收敛于 a, b, 于是

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - a| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} |y_n - b| = 0,$$

从而由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - a| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{n} \sum_{k=1}^{n} |y_k - b| = 0.$$

进而由夹逼原理可知

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+1-k} - ab \right| = 0.$$

由此可立刻导出所要结论.

例 11. 假设 $0 < q < 1$, 而函数 $f : [a, b] \to [a, b]$ 使得 $\forall x, y \in [a, b]$, 均有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant q|x - y|.$$

求证: 函数 f 在 $[a, b]$ 上有唯一的不动点.

证明: **唯一性.** 若 f 有不动点 $a_1, a_2 \in [a, b]$, 则

$$|a_1 - a_2| = |f(a_1) - f(a_2)| \leqslant q|a_1 - a_2|.$$

但 $0 < q < 1$, 故 $a_1 = a_2$.

存在性. 任取 $x_1 \in [a,b]$. $\forall n \geqslant 1$, 我们递归定义 $x_{n+1} = f(x_n)$. 则 $\forall n \geqslant 2$, 我们有

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant q|x_n - x_{n-1}|.$$

于是 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $|x_{n+1} - x_n| \leqslant q^{n-1}|x_2 - x_1|$. 从而 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 数列, 因此收敛. 设其极限为 A. 由极限的保序性知 $A \in [a,b]$. 又 $\forall n \geqslant 1$,

$$|x_{n+1} - f(A)| = |f(x_n) - f(A)| \leqslant q|x_n - A|.$$

由夹逼原理可知 $f(A)$ 为数列 $\{x_{n+1}\}$ 的极限, 因此它也为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 从而 $f(A) = A$.

例 12. 求证 Kepler 方程

$$x = y_0 + q\sin x \ (0 < q < 1)$$

有且仅有一个实解 x.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = y_0 + q\sin x$. 则原问题等价于证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上有且仅有一个不动点.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= q|\sin x - \sin y| = 2q\left|\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| \\ &\leqslant 2q\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leqslant q|x-y|. \end{aligned}$$

唯一性. 若函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上有两个不动点 a_1, a_2, 则 $f(a_1) = a_1$, $f(a_2) = a_2$. 于是

$$|a_1 - a_2| = |f(a_1) - f(a_2)| \leqslant q|a_1 - a_2|.$$

但 $0 < q < 1$, 故 $a_1 = a_2$.

存在性. 取 $x_1 \in \mathbb{R}$. $\forall n \geqslant 1$, 递归定义 $x_{n+1} = f(x_n)$. 则 $\forall n \geqslant 2$, 我们均有

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant q|x_n - x_{n-1}|.$$

于是 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $|x_{n+1} - x_n| \leqslant q^{n-1}|x_2 - x_1|$.
由此立刻可知 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 数列, 从而收敛.
设其极限为 a. 则 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$|x_{n+1} - f(a)| = |f(x_n) - f(a)| \leqslant q|x_n - a|.$$

故由夹逼原理可知 $f(a)$ 为数列 $\{x_{n+1}\}$ 的极限,
从而它也为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 于是 $f(a) = a$,
也即点 a 是函数 f 的不动点.

例 13. 若 $\forall m,n\geqslant 1$, 均有 $0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_m+x_n$, 求证: 数列 $\{\frac{x_n}{n}\}$ 收敛.

证明: 由于数列 $\{\frac{x_n}{n}\}$ 以 0 为下界, 于是它必有下确界, 记作 A. 于是 $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $\frac{x_n}{n}\geqslant A$, 并且 $\forall\varepsilon>0$, $\exists q>0$ 使得 $\frac{x_q}{q}<A+\frac{\varepsilon}{2}$. 令

$$N=\max\big(q,[\frac{2qx_1}{\varepsilon}]\big).$$

$\forall n > N$, 由欧氏带余除法可知 $\exists r \in \mathbb{N}$ 使得

$$n = kq + r \ (0 \leqslant r < q).$$

于是 $x_n = x_{kq+r} \leqslant x_{kq} + x_r \leqslant kx_q + rx_1$, 进而

$$\begin{aligned} A \ &\leqslant \ \frac{x_n}{n} \leqslant \frac{kx_q}{n} + \frac{rx_1}{n} \leqslant \frac{x_q}{q + \frac{r}{k}} + \frac{qx_1}{n} \\ &\leqslant \ \frac{x_q}{q} + \frac{qx_1}{n} < A + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

也即 $|\frac{x_n}{n} - A| < \varepsilon$. 故所证结论成立.

例 14. 固定 $d \geqslant 2$ 为整数. 则数列 $\{a_n\}$ 收敛到实数 a 当且仅当对任意的整数 $0 \leqslant k < d$, 子列 $\{a_{dn+k}\}$ 均收敛到 a.

证明: 必要性. 由于数列 $\{a_n\}$ 可收敛到实数 a, 则它的任何子列均收敛到 a. 特别地, 对任意的整数 $0 \leqslant k < d$, 子列 $\{a_{dn+k}\}$ 均收敛到 a.

充分性. 若对任意整数 $0 \leqslant k < d$, 子列 $\{a_{dn+k}\}$ 均收敛到 a, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_k > 0$ 使得 $\forall n > N_k$, 我们均有 $|a_{dn+k} - a| < \varepsilon$. 令

$$N = 1 + \max_{0 \leqslant k < d} N_k.$$

则 $\forall n > dN$, 由 Euclid 除法知存在整数 $0 \leqslant k < d$ 以及 $m > 0$ 使得 $n = dm + k$, 于是 $m \geqslant N > N_k$, 故 $|a_n - a| = |a_{dm+k} - a| < \varepsilon$. 由此得证.

例 15. 固定 $d \geqslant 2$ 为整数. 假设数列 $\{a_n\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-d}) = a \in \mathbb{R}$. 求证: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0$.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 定义 $b_n = \frac{a_n}{n}$. 下证 $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{a}{d}$. 对于整数 j $(0 \leqslant j < d)$, 由题设与 Stolz 定理,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_{dn+j} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{dn+j}}{dn+j} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{d(n+1)+j} - a_{dn+j}}{(d(n+1)+j) - (dn+j)} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{d}(a_m - a_{m-d}) = \frac{a}{d}.
\end{aligned}$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{a}{d}$. 进而可导出

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{n-1}\cdot(1-\frac{1}{n}) = \frac{a}{d},\end{aligned}$$

最后由四则运算法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{n}\\ &= \frac{a}{d}-\frac{a}{d}=0.\end{aligned}$$

§1. 函数

定义 1. 设 X, Y 为非空集合. 若它们之间存在对应规则 f 使得 $\forall x \in X$, 均有唯一确定 $y \in Y$ (记作 $y = f(x)$) 与之对应, 称 f 为 X 到 Y 的映射 (记作 $f : X \to Y$), $y = f(x)$ 为自变量 x 在 f 下的像, 而 x 为因变量 y 的原像.

评注

- 严格地讲, 一个映射 $f: X \to Y$ 由三个部分组成: 定义域 X (记作 $D(f)$), 取值的范围 Y 以及对应规则 f. 但知道 f, 也就知道 X, Y, 因此人们通常直接将对应规则 f 称为映射, 而用 $f(x)$ 表示 f 在点 x 处的值. 比如说 $\sin$ 表示正弦函数, $\sin x$ 为正弦函数在点 x 的值. 但习惯上也用 $y = \sin x$ 表示正弦函数.

- 我们称 $R(f)=\{f(x)\mid x\in X\}$ 为映射 f 的值域, 也叫 f 的像集, 记作 $f(X)$ 或 $\mathrm{Im} f$.
- 定义域与值域均为数集的映射被称为函数.
- 对于由表达式 $y=f(x)$ 所定义的函数, 使得表达式有意义的所有点 x 组成的集合被称为函数 f 的自然定义域, 由所有取值而组成的集合则被称为 f 的值域. 例如 $f(x)=\sqrt{x}$ 的自然定义域和值域均为 $[0,+\infty)$.

典型例子

例 1. $\forall x \in X$, 令 $id_X(x) = x$. 称 id_X 为 X 上的恒等映射.

例 2. 设 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$. 假设对应规则 f 是将 1 与 a, b 对应, 而将 $2, 3$ 与 c 对应. 则 f 不是一个映射.

例 3. 数列就是定义在 $\mathbb{N}^*$ 上的函数. 例如 $\{\frac{1}{n}\}$ 就是函数 $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \frac{1}{n}$.

函数的四则运算

设 D 为非空数集, f, g 为定义在 D 上的函数.

- 线性组合: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

  $(\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x), \ \forall x \in D.$

- 乘法: $(fg)(x) := f(x)g(x), \ \forall x \in D.$

- 除法: $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, \ \forall x \in D$ 使得 $g(x) \neq 0.$

定义 2. (映射的复合)

设 $f : A \to B$, $g : B \to C$ 为映射. $\forall x \in A$, 令

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

则 $g \circ f$ 为从 A 到 C 的映射, 被称为 g 与 f 的复合映射. 映射的复合可用下图表示:

$$g \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

定义 3. 设 $f: X \to Y$ 为映射.

- 称 f 为单射, 若 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 均有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ (也即 $f(x_1) = f(x_2)$ 时, 我们必有 $x_1 = x_2$).
- 称 f 为满射, 若 $R(f) = Y$, 也即说 $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ 使得 $y = f(x)$.
- 若 f 既是单射也是满射, 则称 f 为双射或者可逆映射.

逆映射

若 $f: X \to Y$ 为双射, 那么 $\forall y \in Y$, $\exists!\ x \in X$ 使得 $f(x) = y$. 记 $x = f^{-1}(y)$. 如此定义的 f^{-1} 是一个从 Y 到 X 的映射, 被称为 f 的逆映射. 此时 $f^{-1} \circ f = id_X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$. 也即

$$\forall x \in X,\ f^{-1}(f(x)) = x;\ \forall y \in Y,\ f(f^{-1}(y)) = y.$$

当 f 为函数时, 则称 f^{-1} 为 f 的反函数.

函数的基本性质

有界性: 设 X 为非空数集, $f: X \to \mathbb{R}$ 为函数.

- 称 f 有上界, 若 $\exists M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in X$, 我们均有 $f(x) \leqslant M$.
- 称 f 有下界, 若 $\exists m \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in X$, 我们均有 $f(x) \geqslant m$.
- 称 f 有界, 若 f 既有上界也有下界.
- 称 f 无界, 若 f 没有上界或者没有下界.

评注

函数 f 的有界性等价于像集 $R(f)$ 的有界性:

- 函数 f 有上界当且仅当 $R(f)$ 有上界.
- 函数 f 有下界当且仅当 $R(f)$ 有下界.
- 函数 f 有界当且仅当 $R(f)$ 有界; 而这恰好等价于说 $\exists M > 0$ 使 $\forall x \in X, |f(x)| \leqslant M$.
- 函数 f 无界当且仅当 $R(f)$ 无界.

周期性

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为函数.

- 如果 $\exists T\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们均会有 $f(x+T)=f(x)$, 那么称函数 f 为周期函数, 而 T 为其周期. 此时 $-T$ 也为 f 的周期.
- 满足上述性质的最小的正数 T (如果存在) 称为 f 的最小正周期.

本课程将只讨论具有最小正周期的周期函数.

奇偶性

设 X 为非空数集使得 $\forall x \in X$, 均有 $-x \in X$. 设 $f : X \to \mathbb{R}$ 为函数.

- 若 $\forall x \in X$, 均有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 f 为偶函数.
- 如果 $\forall x \in X$, 均有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 f 为奇函数.

作业题: 第 2.1 节第 36 页第 10 题.

谢谢大家!