第 1 次作业题

1. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 证明:

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}, \quad \min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

2. 设 A, B 为非空有界数集且 $A \cap B$ 非空, 证明:

$$\inf(A\cap B) \geqslant \max\{\inf A, \inf B\}.$$

3. 设 A, B 均为非空有界数集, 定义 $A+B=\{x+y \mid x\in A,\ y\in B\}$. 证明:

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

4. 利用极限的定义证明以下极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{n^3-n+1} = 2$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+4}) = 0$.

5. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A 等价于它的子列 $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n-1}\}$ 均收敛于 A.

6. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-2n^2-n-1}{3n^3+n^2+2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+n-2})$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2})$.

7. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (2\sin^2 n+\cos^2 n)^{\frac{1}{n}}$.

8. 证明不等式: $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}}$.

思考题 (不用交):

9. 下列说法中, 哪些与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 等价. 如果等价, 请证明. 如果不等价, 请举出反例.

(1) 对于无限多个 $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 只要 $n\geqslant N$, 就有 $|a_n-A|<\varepsilon$;

(2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 只要 $n\geqslant N$, 就有 $|a_n-A|<\varepsilon$;

(3) $\forall\varepsilon\in(0,1)$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 只要 $n>N$, 就有 $|a_n-A|<\varepsilon$;

(4) $k>0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 只要 $n>N$, 就有 $|a_n-A|<k\varepsilon$;

(5) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - A| < \varepsilon^{\frac{2}{3}}$;

(6) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N_k$, 就有 $|a_n - A| < \frac{1}{2^k}$;

(7) $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - A| < \frac{1}{n}$;

(8) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{n}$;

(9) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - A| < \sqrt{n}\varepsilon$.

10. 用 $\varepsilon - N$ 语言叙述: "$\{a_n\}$ 不收敛于 A", 并讨论下列哪些说法与"$\{a_n\}$ 不收敛于 A" 等价:

(1) $\exists \varepsilon_0 > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon_0$;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n \geqslant N$, 就有 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon$;

(3) $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使得 $\{a_n\}$ 中除有限项外, 都满足 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon_0$;

(4) $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使得 $\{a_n\}$ 中有无穷多项满足 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon_0$.