线性代数（理科类）期中考试

2020年10月31日

说明：总分100分。所有向量不加说明都是列向量。

1　计算题（65分）

1. （20分）矩阵运算：

   (a) （5分）A是一个$n\times n$的矩阵，并且A的逆矩阵存在，那么 $A(A^TA)^{-1}A^T=?$

   (b) （5分）计算下面的矩阵乘积

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \tag{1}$$

   (c) （5分）求投影到$v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$v_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$张成的子空间上的投影矩阵。

   (d) （5分）设 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$，求$A^n$。

2. （10分）假设矩阵$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (a) （5分）求A的LU分解，写下L和U。

   (b) （5分）解方程$Ax=b$，$b=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

3. （25分）3乘3的矩阵$A(\lambda)$定义为

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda-1 & 3 & -1 \\ -3 & \lambda-6 & -3 \\ 0 & -3 & \lambda \end{bmatrix}. \tag{2}$$

其中λ是一个实参数。

(a) （5分）计算$A(\lambda)$的行列式。

(b) （5分）λ等于多少的时候矩阵的行列式等于0?

(c) （5分）找到$A(\lambda)$在λ分别为上述值的时候矩阵的零空间的一组基。

(d) （5分）证明：上面找到的全部基的并集构成$\mathbb{R}^3$中的一组基。

(e) （5分）将上面找到的所有基并起来写成一个矩阵M，计算$M^{-1}A(0)M$

4. （5分）增广矩阵$(A|I)$可以通过一系列初等行变换变成$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$。求$A$。

5. （5分）矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵$B$满足方程$A^2B+3AB+4B+A=0$, 求矩阵$B$的行列式。

2 证明题（35分）

1. （10分）$m\times n$矩阵A的秩为r，如果$EA=R$，其中E是初等矩阵的乘积，$R=\mathrm{rref}(A)$。证明：E的后$m-r$行是$N(A^T)$的一组基。

2. （10分）假设$R=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$是分块矩阵，且$A$是可逆的$n$阶方阵。证明：$R$的秩等于$n$当且仅当$D=CA^{-1}B$。

3. （5分）证明：任何秩为r的矩阵可以表为r个秩为1的矩阵的和，但不能表为少于r个这种矩阵的和。

4. （5分）$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$是一组线性独立的向量组，向量组$\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$（$m\le n$）可以写成$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$的线性组合$u_i=\sum_{j=1}^n v_j m_{ji}$。所有系数构成一个$n\times m$的矩阵$M$。证明：$\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$中最大的线性无关向量的数目等于系数矩阵$M$的秩。

5. （5分）矩阵A的秩为r，证明：AA^T的秩也是r。