微积分 A (2)

姚家燕

第 10 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

重要通知

- 希望大家认真温习第 1 章!
- 希望大家能重温上学期所学的广义积分!

第 9 讲回顾: 条件极值

定义 2. 设 $n > k \geqslant 1$ 为整数, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k} : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得 $\forall X \in \Omega$, 矩阵 $\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-k})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(X)$ 的秩为 $n-k$. 令

$$S = \{X \in \Omega \mid \varphi_i(X) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n-k\}.$$

若 $S \neq \emptyset$, 则称 S 为 k 维曲面.

注: $\forall X_0 \in S$, 由隐函数定理可知, 在 X_0 的某个邻域内, S 中的点可表示成 k 个变量的函数.

定义 3. 假设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为 k 维曲面, $X_0 \in S$, 而 $f : S \to \mathbb{R}$ 为函数.

(1) 如果 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0, r) \cap S$, 均有 $f(X) \geqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为 f 在 S 上的 (条件) 极小值点, 而称 $f(X_0)$ 为 (条件) 极小值.

(2) 如果 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0, r) \cap S$, 均有 $f(X) \leqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为 f 在 S 上的 (条件) 极大值点, 称 $f(X_0)$ 为 (条件) 极大值.

(3) 如果 $\forall X \in S$, 均有 $f(X) \geqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为 f 在 S 上的最小值点, 称 $f(X_0)$ 为最小值.

(4) 如果 $\forall X \in S$, 均有 $f(X) \leqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为 f 在 S 上的最大值点, 称 $f(X_0)$ 为最大值.

注: 条件最值点必为条件极值点.

定理 4. (Lagrange 乘数法) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 而 $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k} : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类函数使得 $\forall X \in \Omega$, 矩阵 $\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-k})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ 的秩为 $n-k$. 令

$$S = \{X \in \Omega \mid \varphi_i(X) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n-k\} \neq \emptyset.$$

$\forall X \in \Omega$ 及 $\forall \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$, 定义

$$\text{(拉氏函数)} \quad L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \varphi_j(X).$$

如果点 $X_0 \in S$ 为函数 f 在 S 上的条件极值点, 则 $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{n-k}$ 使得 (X_0, λ) 为 L 的驻点.

评注

- 点 (X_0,λ) 为 L 的驻点当且仅当

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(X_0,\lambda)=0\ (1\leqslant i\leqslant n), \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(X_0,\lambda)=0\ (1\leqslant i\leqslant n-k). \end{cases}$$

等价地, 我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)+\sum\limits_{j=1}^{n-k}\lambda_j\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(X_0)=0\ (1\leqslant i\leqslant n), \\ \varphi_i(X_0)=0\ (1\leqslant i\leqslant n-k). \end{cases}$$

- 即便 (X_0,λ) 为 L 的驻点, 点 X_0 也不一定为 f 在 S 上的条件极值点, 还需具体分析!

求曲面上的条件极值的典型方法

- 由于 Lagrange 乘数法只给出条件极值点的必要条件，于是为了确定条件极值点，首先需想办法将条件极值问题转化成最值问题，例如有界闭集上的连续函数的最值问题.
- 定义拉氏函数并求它的驻点，由此得到原来那个函数可能的条件极值点.
- 比较原来那个函数在上述驻点处值的大小，由此确定极值点.

求有界闭区域上的最值的典型方法

- 极值或最值问题常可被转化有界闭区域上的连续函数的最值问题, 由于问题的解一定存在, 关键在于如何确定最值点.
- 求函数在区域内部的驻点并计算相应值.
- 将函数限制在边界上, 求相应的拉氏函数的驻点, 并计算原来那个函数的相应值.
- 比较上述值的大小, 由此确定最值点.

第 10 讲

例 12. 求原点到曲面 $z^2 = xy + x - y + 4$ 的距离.

解: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, 定义

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= z^2 - xy - x + y - 4, \\ f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

那么 F, f 均为初等函数. 特别地, 由于 F 连续, 故 $S := F^{-1}(0)$ 为闭集. 则存在原点到 S 上的点的最短的距离, 也即 f 在曲面 S 上有最小值. 我们将相应的最小值点记作 (x_0, y_0, z_0).

$\forall(x,y,z,\lambda)\in\mathbb{R}^4$, 定义

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2-xy-x+y-4).$$

由 Lagrange 乘数法, $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 (x_0,y_0,z_0,λ) 为拉氏函数 L 的驻点, 在该点处, 我们有

$$\begin{aligned}
0=\frac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0,z_0,\lambda) &= 2x_0-\lambda(y_0+1),\\
0=\frac{\partial L}{\partial y}(x_0,y_0,z_0,\lambda) &= 2y_0+\lambda(-x_0+1),\\
0=\frac{\partial L}{\partial z}(x_0,y_0,z_0,\lambda) &= 2z_0+2\lambda z_0,\\
0=\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0,y_0,z_0,\lambda) &= z_0^2-x_0y_0-x_0+y_0-4.
\end{aligned}$$

由此可得所求驻点为

$$P_1 = \left(1+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}, 0, -\frac{2(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5}}\right),$$

$$P_2 = \left(1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}, 0, \frac{2(1-\sqrt{5})}{\sqrt{5}}\right),$$

$$P_3 = (-1, 1, 1, -1),\ P_4 = (-1, 1, -1, -1),$$

而函数 f 在相应点处的值分别为 $2(1+\sqrt{5})^2$, $2(1-\sqrt{5})^2$, 3, 3, 由此知原点到曲面 S 的距离为 $\sqrt{3}$, 曲面上相应点为 $(-1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$.

作业题: 第 1.9 节第 94 页第 9 题第 (1) 小题.

第 1 章小结

1. 极限的一般性质:

- 与单变量数量值函数极限的关系.
- 极限的计算: 转化成单变量函数的情形! 夹逼原理, 复合极限法则, 利用极限存在的必要条件来得出极限的不存在性.
- 极限的性质: 唯一, 保序、保号, 四则运算, 序列极限与函数极限的关系, Cauchy 准则.
- 二重极限与累次极限的关系.

2. 连续函数的基本性质:

- 四则运算法则.
- 复合法则 (初等函数在其定义区域内连续).
- 最值定理及其应用:

  (1) 若 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为闭集, 则 $\exists Y_0 \in \Omega$ 使得 $\|X_0 - Y_0\| = \inf\limits_{Y \in \Omega} \|X_0 - Y\|$.

  (2) 设 $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. 若 Ω_1 有界闭集而 Ω_2 为闭集, 则存在 $X_0 \in \Omega_1$, $Y_0 \in \Omega$ 使得

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \|X_0 - Y_0\|.$$

- 连通性 (介值定理).

3. 无穷小 (向量值) 函数的阶: 定义.

4. 微分与偏导数的定义及其性质:

- 连续, 可微, 可导, 连续可导之间的关系.
- 偏导数, Jacobi 矩阵, Jacobi 行列式.
- 方向导数, 梯度及其几何意义.
- 高阶偏导数, 计算二阶偏导数何时可以交换求导次序 (二阶偏导函数连续).
- 复合求微分法则, 复合函数的二阶偏导数.
- 判断函数在一点可微的标准方法.
- 初等函数在其定义区域的内部无穷可导.

5. 隐函数定理与反函数定理:

- 隐函数定理: 两个变量一个方程, 多个变量一个方程, 多个变量多个方程.
- 隐函数的二阶偏导数.
- 反函数定理.

6. 几何应用:

- 曲面 (三种表示法) 的切平面与法线.
- 空间曲线 (两种表示法) 的切线与法平面.

7. Taylor 公式:

- 带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 公式.
- 带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式.

8. 极值: 必要条件, 充分条件 (海赛), 方法.

9. 条件极值:

- k 维曲面.
- 必要条件 (Lagrange 乘数法).
- 求条件极值的方法 (曲面或空间闭区域).

综合练习

例 1. 假设 $n \geqslant 1$ 为整数, 而 $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$, 则 $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ 使得 $\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$.

证明: $\forall z \in \mathbb{C}$, 定义

$$P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_0.$$

则 P 为连续函数. 令

$$\mu = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|.$$

我们将证明 $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $\mu = |P(z_0)|$. 由于

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|P(z)|}{|z|^n} = \lim_{|z|\to+\infty} \left|1 + \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^{j-n}\right| = 1,$$

则 $\exists R > 0$ 使得 $|z| > R$ 时, $|P(z)| \geqslant 2\mu + 1$. 故

$$\mu = \inf_{|z|\leqslant R} |P(z)|.$$

由于 $|P|$ 为连续函数而闭圆盘为有界闭集, 从而由最值定理立刻可知 $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $\mu = |P(z_0)|$.
下面将证明 $\mu = 0$, 由此立刻可推出所要结论.

用反证法, 假设 $\mu \neq 0$. $\forall z \in \mathbb{C}$, 定义

$$Q(z) = \frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}.$$

由前面的讨论知 $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |Q(z)| = |Q(0)| = 1$, 从而我们可以将多项式 $Q(z)$ 表示成

$$Q(z) = 1 + q_k z^k + \cdots + q_n z^n,$$

其中 $1 \leqslant k \leqslant n$, $q_k, \ldots, q_n \in \mathbb{C}$ 且 $q_k \neq 0$.

记 $q_k = \rho e^{i\theta}$ $(\rho > 0)$. 取 $\varphi = \frac{\pi-\theta}{k}$. 那么 $\forall r > 0$,

$$\begin{aligned} Q(re^{i\varphi}) &= 1 + q_k r^k e^{ik\varphi} + \sum_{j=k+1}^{n} q_j r^j e^{ij\varphi} \\ &= 1 - \rho r^k + \sum_{j=k+1}^{n} q_j r^j e^{ij\varphi}. \end{aligned}$$

由于对任意整数 $j \geqslant 1$, 我们均有

$$\lim_{r\to 0^+} r^j = 0,$$

于是 $\exists r>0$ 使得我们有

$$\rho r^k<1,\quad \sum_{j=k+1}^{n}|q_j|r^{j-k}<\frac{1}{2}\rho.$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned}|Q(re^{i\varphi})| &\leqslant |1-\rho r^k|+\sum_{j=k+1}^{n}|q_j||r^j||e^{ij\varphi}|\\ &\leqslant 1-\rho r^k+\frac{1}{2}\rho r^k<1=|Q(0)|.\end{aligned}$$

矛盾! 故 $\mu=0$, 从而所证结论成立.

例 2. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为单连通区域, 而 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 为可微使得 $\forall P \in \Omega$, 均有 $\operatorname{grad} u(P) \neq \vec{0}$. 求证: 函数 u 在 Ω 内没有封闭的等值面.

证明: 用反证法, 假设 $\exists a \in \mathbb{R}$ 使 $u(x, y, z) = a$ 在 Ω 内定义了一个封闭曲面 S. 由于 Ω 单连通, 则 S 所围的闭区域 Ω_1 包含于 Ω. 又 Ω_1 为有界闭集而 u 连续, 于是 u 在 Ω_1 上有最大值 M 和最小值 m. 注意到 $\operatorname{grad} u \neq \vec{0}$, 因此最值点属于 $\partial\Omega_1 = S$, 从而 $M = m = a$, 故 $\operatorname{grad} u$ 在 Ω_1 上恒为零, 矛盾! 因此所证结论成立.

例 3. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 使 $f(0,0)=1$, $f(1,0)=e$, 且 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=g(x^2+y^2)=\varphi(x)\varphi(y)$, 其中 $g\in\mathscr{C}[0,+\infty)$, 求函数 f 的表达式.

解: 由题设知 $1=f(0,0)=\varphi(0)\varphi(0)$, 故 $\varphi(0)=\pm1$.

若 $\varphi(0)=1$, 则 $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x^2)=\varphi(x)\varphi(0)=\varphi(x)$, 从而 $\varphi(x)=g(x^2)$. 于是 $\forall x,y\geqslant 0$, 我们有

$$g(x+y)=\varphi(\sqrt{x})\varphi(\sqrt{y})=g(x)g(y).$$

又 $g \in \mathscr{C}[0,+\infty)$, 则 $\exists a>0$ 使得 $\forall x \geqslant 0$, 均有 $g(x)=a^x$. 注意到 $e=f(1,0)=g(1)=a$, 于是 $g(x)=e^x$, 故 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 均有 $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$.

若 $\varphi(0)=-1$, 则 $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$g(x^2)=\varphi(x)\varphi(0)=-\varphi(x),$$

从而 $\varphi(x)=-g(x^2)$. 于是 $\forall x,y\geqslant 0$, 我们均有 $g(x+y)=\varphi(\sqrt{x})\varphi(\sqrt{y})=g(x)g(y)$. 援用与前面同样的讨论可知 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$.

例 4. 设 $f:(0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续可导使得 $\forall(x,y)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, 我们均有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

(1) $\forall(u,v)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, 令 $F(u,v)=f(u,uv)$. 则 F 为连续可导并且 $\forall(u,v)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, 均有 $\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)=\sqrt{1+v^2}$.

(2) 求函数 f 的表达式.

解: (1) 由 f 为连续可导, 则 F 也为连续可导, 并且由题设可知, $\forall (u,v)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, 均有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u,uv)+v\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv)\\
&= \frac{1}{u}\Big(u\frac{\partial f}{\partial x}(u,uv)+uv\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv)\Big)\\
&= \frac{1}{u}\sqrt{u^2+(uv)^2}=\sqrt{1+v^2}.
\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 立刻可知 $F(u,v)=u\sqrt{1+v^2}+g(v)$, 其中 g 连续可导. 于是 $\forall (x,y)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, 我们有 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+g(\frac{y}{x})$.

例 5. 设 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 使 $f(0) \neq -1$, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(1) 求证: 存在 $t_0 = 1$ 的邻域 U 和 $x_0 = 0$ 的邻域 V 以及函数 $g \in \mathscr{C}^{(1)}(U; V)$ 使得 $\forall (t, x) \in U \times V$, 我们有 $\int_x^t f(u)\,\mathrm{d}u = x$ 当且仅当 $x = g(t)$.

(2) 求 $g'(1)$.

解: (1) $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$, 令 $F(t, x) = \int_x^t f(u)\,\mathrm{d}u - x$. 则 $F \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2)$, 且 $F(1, 0) = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = -f(0) - 1 \neq 0.$$

于是由隐函数定理可知, 存在 $t_0=1$ 的邻域 U 和 $x_0=0$ 的邻域 V, 以及函数 $g\in\mathscr{C}^{(1)}(U;V)$ 使得 $\forall(t,x)\in U\times V$, 我们有 $F(t,x)=0$, 也即 $\int_x^t f(u)\,\mathrm{d}u=x$, 当且仅当 $x=g(t)$.

(2) 由 (1) 知,$\forall t\in U$, 均有 $\int_{g(t)}^t f(u)\,\mathrm{d}u=g(t)$, 将之对 t 求导可得 $f(t)-f(g(t))g'(t)=g'(t)$. 令 $t=1$ 并注意到 $g(1)=0$, 则 $g'(1)=\frac{f(1)}{1+f(0)}$.

例 6. 设 f 为 $\mathbb{R}^2$ 上的可微函数使 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. 求证: 存在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数 g 使 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $g(\sqrt{x^2+y^2})=f(x,y)$.

证明: $\forall r\geqslant 0$ 以及 $\forall\theta\in[0,2\pi)$, 定义

$$h(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta),$$

那么由复合可微法则可知 h 可微. 又由题设知

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta) &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\\ &\quad +r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)=0,\end{aligned}$$

故 h 仅依赖 r. 再令 $g(r)=h(r,0)$, 由此得证.

例 7. 假设 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 为连续可导. 若 $\exists\alpha>0$ 使得 $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 我们均有

$$y\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)-x\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\geqslant\alpha,$$

求证: $\lim\limits_{t\to+\infty}F(-\cos t,\sin t,t)=+\infty$.

证明: $\forall t\in\mathbb{R}$, 令 $f(t)=F(-\cos t,\sin t,t)$. 那么由复合函数微分法则可知 f 为连续可导, 且

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(-\cos t,\sin t,t)\sin t\\ &\quad+\frac{\partial F}{\partial y}(-\cos t,\sin t,t)\cos t+\frac{\partial F}{\partial z}(-\cos t,\sin t,t)\geqslant\alpha.\end{aligned}$$

于是由单变量函数的 Lagrange 中值定理可知，
$\forall t > 0$, $\exists \theta \in (0,t)$ 使得我们有

$$f(t) = f(0) + f'(\theta)t \geqslant f(0) + \alpha t.$$

又由于 $\alpha > 0$, 于是我们有

$$\lim_{t\to+\infty} F(-\cos t, \sin t, t) = +\infty.$$

例 8. 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\log(xy)}$.

解: $\forall x, y \geqslant 2$, 均有 $0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\log(xy)} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\log(xy)}$,
于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\log(xy)} = 0$.

例 9. 求函数 $f(x,y)=x^2y$ 在点 $(1,-1)$ 处的二阶 Taylor 多项式.

解: 令 $u=x-1$, $v=y+1$. 则我们有

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (u+1)^2(v-1)=(1+2u+u^2)(v-1)\\
&= -1-2u+v-u^2+2uv+u^2v\\
&= -1-2u+v-u^2+2uv+o(u^2+v^2)\\
&= -1-2(x-1)+(y+1)-(x-1)^2\\
&\quad +2(x-1)(y+1)+o\big((x-1)^2+(y+1)^2\big).
\end{aligned}$$

于是所求二阶 Taylor 多项式为

$$-1-2(x-1)+(y+1)-(x-1)^2+2(x-1)(y+1).$$

例 10. 设 $k \geqslant 0$ 为实数. 称函数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 为 k 次齐次函数, 若 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ 与 $\forall t > 0$, 均有

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z).$$

设 f 可微, 求证: 函数 f 为 k 次齐次函数当且仅当 $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, 均有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = kf(x, y, z).$$

证明: 必要性. 假设 f 为 k 次齐次, 那么 $\forall t > 0$ 及 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, 均有 $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$.

将上式两边对 t 求导可得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)=kt^{k-1}f(x,y,z),$$

再令 $t=1$ 立刻可得所要结论.

充分性. 假设 $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 均有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=kf(x,y,z).$$

$\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ 及 $\forall t>0$, 令 $F(t)=t^{-k}f(tx,ty,tz)$.

则 F 为可导函数且 $\forall t > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} F'(t) &= xt^{-k}\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz) + yt^{-k}\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz) \\ &\quad + zt^{-k}\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz) - kt^{-k-1}f(tx,ty,tz) \\ &= t^{-k-1}\Big(tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz) + ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz) \\ &\quad + tz\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz) - kf(tx,ty,tz)\Big) = 0, \end{aligned}$$

于是 $\forall t > 0$, 均有 $F(t) = F(1) = f(x,y,z)$, 也即 $f(tx,ty,tz) = t^k f(x,y,z)$. 故所证成立.

例 11. 假设 $f(x,y)=|x-y|g(x,y)$, 其中函数 g 在原点 $(0,0)$ 处连续.

(1) 问 g 满足什么条件时 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 均存在? 此时它们的值是多少?

(2) 在上述条件下, 函数 f 是否在原点处可微? 若不可微, 说明理由. 若可微, 计算 $\mathrm{d}f(0,0)$.

解: (1) 若 $f'_x(0,0)$ 存在, 由 g 在原点的连续性,

$$\begin{aligned} g(0,0) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|g(x,0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} \\ &= f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|g(x,0)}{x} = -g(0,0), \end{aligned}$$

于是 $g(0,0)=0$. 反过来, 假设 $g(0,0)=0$, 那么由夹逼原理及 g 在原点的连续性可得

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{|x|g(x,0)}{x}=0,\\ f'_y(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{|y|g(0,y)}{y}=0. \end{aligned}$$

故所求条件为 $g(0,0)=0$, 此时我们有

$$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0.$$

(2) 在 (1) 中得到的条件下, 函数 f 在原点处可微且我们有 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

事实上, 由于 g 在原点处连续, $g(0,0)=0$, 且 $|x-y|\leqslant\sqrt{2(x^2+y^2)}$, 则 $(x,y)\to(0,0)$ 时,

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(0,0) &= |x-y|g(x,y)=|x-y|o(1) \\ &= o(|x-y|)=o(\sqrt{x^2+y^2}), \end{aligned}$$

故由微分的定义可知 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

例 12. 证明函数 $f(x,y)=\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上可以取到最大值和最小值, 并求出它的最大值和最小值以及最大值点和最小值点.

解: 由于 f 为初等函数, 因此连续可导且

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(1+x^2+y^2)-2x(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{1+y^2-x^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{(1+x^2+y^2)-2y(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{1+x^2-y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2},$$

故函数 f 的有两个驻点: $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$, 于是 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上至多只有两个极值点.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 我们有

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \frac{|x+y|}{1+x^2+y^2} \leqslant \frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{1+x^2+y^2},$$

那么由夹逼原理可得知 $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = 0$,

再注意到 $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

从而由函数极限的保序性可得知, $\exists R > 0$ 使得

当 $x^2 + y^2 > R^2$ 时, 均有$-\frac{1}{\sqrt{2}} < f(x,y) < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

于是由最值定理可知

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \max_{x^2+y^2\leqslant R^2} f(x,y),$$
$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{x^2+y^2\leqslant R^2} f(x,y),$$

这表明 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最大值与最小值, 但 $\mathbb{R}^2$ 为开集, 故相应的最值点也为 f 的极值点, 又我们已知函数 f 只有两驻点: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, 则它们必为 f 的最大值点与最小值点, 相应的最大值为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 最小值为 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

例 13. 设 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\right\}$, 而且函数 $u,v:D\to\mathbb{R}$ 在 D 上连续且在 D 的内部为二阶连续可导. 若 $\forall(x,y)\in\mathrm{Int}D$, 均有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=e^{u(x,y)},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)\leqslant e^{v(x,y)},$$

且 $\forall(x,y)\in\partial D$, 成立 $u(x,y)=v(x,y)$. 求证:

$$\forall(x,y)\in D,\ \text{均有}\ u(x,y)\leqslant v(x,y).$$

证明: 定义 $f = v - u$. 用反证法, 假设函数 f 在 D 上不为非负, 由题设得 f 在 $\mathrm{Int}D$ 上不为非负. 又 f 连续且 D 为有界闭集, 则 f 在 D 上有最小值. 将相应的最小值点记作 P_0. 由于 f 在 ∂D 上等于零但在 $\mathrm{Int}D$ 上却不为非负, 于是 $P_0 \in \mathrm{Int}D$ 且 $f(P_0) < 0$, 故 P_0 为 f 的极小值点, 由此立刻知海赛矩阵 $H_f(P_0)$ 为正定或半正定.

进而我们就有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) &= (1,0)H_u(P_0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \geqslant 0,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) &= (0,1)H_u(P_0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \geqslant 0.\end{aligned}$$

但由题设又可得知

$$0 \leqslant \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \leqslant e^{v(P_0)} - e^{u(P_0)} < 0,$$

矛盾! 故所证结论成立.

例 14. 求 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $\frac{(x+ay)\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某个二元函数的全微分, 并求该函数.

解: 由题设我们可假设 $\mathrm{d}f(x,y)=\frac{(x+ay)\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$, 由于 $\frac{x+ay}{(x+y)^2}, \frac{y}{(x+y)^2}$ 为初等函数, 因此连续可导, 从而 f 为二阶连续可导, 因而我们有

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x+ay}{(x+y)^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{(x+y)^2},$$

则 $\frac{a(x+y)^2-2(x+ay)(x+y)}{(x+y)^4}=-\frac{2y}{(x+y)^3}$, 由此可得 $a=2$,

进而我们就有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(x,y) &= \frac{(x+2y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2} \\
&= \frac{\mathrm{d}x}{x+y} - y\,\mathrm{d}(\frac{1}{x+y}) \\
&= (\frac{\mathrm{d}x}{x+y} + x\,\mathrm{d}(\frac{1}{x+y})) - (x+y)\,\mathrm{d}(\frac{1}{x+y}) \\
&= \mathrm{d}(\frac{x}{x+y}) + \frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y} \\
&= \mathrm{d}(\frac{x}{x+y} + \log|x+y|),
\end{aligned}$$

由此立刻可得知 $f(x,y) = \frac{x}{x+y} + \log|x+y| + C$, 其中 C 为任意的常数.

例 15. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$, $f\in\mathscr{C}(D)$ 在 D 的内部可微使得 $\forall (x,y)\in D$, $|f(x,y)|\leqslant 1$. 求证: $\exists (x_0,y_0)\in \mathring{D}$ 使得我们有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2\leqslant 16.$$

证明: $\forall (x,y)\in D$, 令 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$. 则 $g\in\mathscr{C}(D)$ 在 D 的内部可微且 $\forall (x,y)\in\partial D$, $g(x,y)=f(x,y)+2\geqslant 1$. 又 $g(0,0)=f(0,0)\leqslant 1$, 且 $g\in\mathscr{C}(D)$, 于是我们由最值定理立刻可得知,

$\exists(x_0, y_0) \in \mathring{D}$ 使得函数 g 在该点处取到最小值，则该点也为 g 的极小值点，而 g 在该点处可微，于是点 (x_0, y_0) 为 g 的驻点，也即

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + 4x_0, \\ 0 &= \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + 4y_0, \end{aligned}$$

由此我们立刻可得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 = 16(x_0^2 + y_0^2) \leqslant 16.$$

谢谢大家!