微积分 A (1)

姚家燕

第 17 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

期中综合练习 (续)

例 4. 设 f 在区间 (a,b) 可导使得

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明: 若 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f(x) = A$, 则 $f'(x) = 0$. 此时所证结论成立.

下面假设 $\exists x_0 \in (a,b)$ 使得我们有 $f(x_0) \neq A$. 任取 μ 严格介于 $A, f(x_0)$ 之间. 则由广义连续函数介值定理可知, 可以找到 $\xi_1 \in (a, x_0)$ 以及 $\xi_2 \in (x_0, b)$ 使得我们有

$$f(\xi_1) = \mu = f(\xi_2),$$

故由 Rolle 定理知, $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

注: 该结论被称为“广义 Rolle 定理”.

例 5. 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上可导.

(1) 若 $f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 求证: $\exists\xi>0$ 使得我们有 $f'(\xi)=0$.

(2) 如果 $\forall x\geqslant 0$, 均有 $0\leqslant f(x)\leqslant \log(\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}})$, 求证: $\exists\xi>0$ 使得 $f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$.

证明: (1) $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2})$, 定义 $F(t)=f(\tan t)$, 并且令 $F(\frac{\pi}{2})=0$. 则由题设及复合函数极限法则知 $F\in\mathscr{C}[0,\frac{\pi}{2}]$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上可导, 且 $F(0)=0=F(\frac{\pi}{2})$,

由 Rolle 定理, $\exists\eta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 使得 $0=F'(\eta)=\frac{f'(\tan\eta)}{\cos^2\eta}$. 令 $\xi=\tan\eta$, 则 $f'(\xi)=0$. 因此所证结论成立.

(2) $\forall x\geqslant 0$, 我们令 $F(x)=f(x)-\log(\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}})$, 则 F 在 $[0,+\infty)$ 上可导且 $\forall x\geqslant 0$, 均有

$$-\log(\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}})\leqslant F(x)\leqslant 0.$$

则 $F(0)=0$. 又由夹逼原理得 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$, 于是由 (1) 可知 $\exists\xi>0$ 使得 $F'(\xi)=0$, 也即

$$f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

例 6. 设 $a \in \mathbb{R}$ 使得当 $x \to 0^+$ 时,

$$f(x) = x - \Big(\frac{4}{3} + a\cos x\Big)\sin x$$

为 x 的 $k > 1$ 阶无穷小, 求 a, k.

解: 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^k} \cdot x^{k-1} = 0$, 故

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \Big(1 - \big(\frac{4}{3} + a\cos x\big)\frac{\sin x}{x}\Big) \\ &= 1 - \big(\frac{4}{3} + a\big), \end{aligned}$$

由此立刻可得 $a = -\frac{1}{3}$.

方法 1. 由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^5} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos x\right)\sin x}{x^5} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{x-\frac{4}{3}\sin x+\frac{1}{6}\sin 2x}{x^5} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{4}{3}\cos x+\frac{1}{3}\cos 2x}{5x^4} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4}{3}\sin x-\frac{2}{3}\sin 2x}{20x^3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4}{3}\cos x-\frac{4}{3}\cos 2x}{60x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x+2\sin 2x}{90x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\cos x+4\cos 2x}{90} = \frac{1}{30},
\end{aligned}$$

由此可知 $k=5$.

方法 2. 于是当 $x \to 0^+$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos x\right)\sin x \\
&= x - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)\right) \\
&\quad \times \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) \\
&= x - \left(1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \\
&= x - \left(x + \frac{x^5}{120} - \frac{x^5}{36} - \frac{x^5}{72} + o(x^5)\right) = \frac{x^5}{30} + o(x^5),
\end{aligned}
$$

由此立刻可知 $k = 5$.

方法 3. 当 $x \to 0^+$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos x\right)\sin x \\
&= x - \frac{4}{3}\sin x + \frac{1}{6}\sin 2x \\
&= x - \frac{4}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o((2x)^5)\right) \\
&= \frac{x^5}{30} + o(x^5),
\end{aligned}
$$

于是我们有 $k = 5$.

例 7. 计算 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{x+1}(\log x+1)-x}{1-x}$.

解: 方法 1.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{x+1}(\log x+1)-x}{1-x}=\lim_{x\to1}\left(x-x^{x+1}(\log x+1)\right)'$$

$$=\lim_{x\to1}\left(1-x^{x+1}\cdot x^{-1}-\left(x^{x+1}\right)'(\log x+1)\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(1-x^{x}-e^{(x+1)\log x}\left((x+1)\log x\right)'(\log x+1)\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(1-e^{x\log x}-e^{(x+1)\log x}\left(\log x+\frac{x+1}{x}\right)(\log x+1)\right)$$

$$=1-1-1\times(0+2)(0+1)=-2.$$

方法 2.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\log x+1)-x}{1-x}\\
\overset{x=1+y}{=}\;&\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{2+y}(\log(1+y)+1)-(1+y)}{-y}\\
=\;&\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{2+y}-1}{-y}+\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{2+y}\log(1+y)}{-y}+1\\
=\;&\lim_{y\to 0}\frac{e^{(2+y)\log(1+y)}-1}{-y}-1+1\\
=\;&\lim_{y\to 0}\frac{(2+y)\log(1+y)}{-y}=-2.
\end{aligned}
$$

例 8. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$.

解:
$$\lim_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{\frac{1}{x+1}}(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}} - 1)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \times \frac{1}{x(x+1)}$$
$$= 1.$$

注: 也可作变换 $y = \frac{1}{x}$, 再利用 L'Hospital 法则.

例 9. 设 $n > 1$ 为整数. 求证: 方程

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$$

在 $(0,1)$ 内有唯一的实根 x_n, 并计算 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k - 1$. 则 f_n 为多项式且在 $[0,+\infty)$ 上严格增. 又 $f_n(0) = -1$, $f_n(1) = n - 1 > 0$, 则由连续函数介值定理以及严格单调性可知 f_n 在 $(0,1)$ 中有唯一实根 x_n.

再注意到 $f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) > f_n(x_{n+1})$, 由 f_n 的严格递增知 $x_n > x_{n+1}$. 故数列 $\{x_{m+1}\}$ 递降且以 0 为下界, 因此收敛. 设其极限为 A, 则 $0 \leqslant A < 1$. 但 $0 = f_n(x_n) = \frac{x_n - x_n^{n+1}}{1-x_n} - 1$, 于是我们有 $\frac{A}{1-A} = 1$, 也即 $A = \frac{1}{2}$.

例 10. 假设 $x_0 \in (a,b)$, 而 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 可导且在点 x_0 处二阶可导使得 $f''(x_0)\neq 0$, 求证:

(1) $\forall x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$, $\exists\theta(x)\in(0,1)$ 使得

$$f(x)=f(x_0)+f'\big(x_0+\theta(x)(x-x_0)\big)\cdot(x-x_0).$$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

证明: (1) $\forall x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$, 由于 f 为可导函数, 则 f 在以 x_0, x 为端点的闭区间上可导, 从而由 Lagrange 中值定理可知所证结论成立.

(2) 由于 $f''(x_0)$ 存在, 而又由夹逼原理可得知 $\lim\limits_{x \to x_0} \theta(x)(x - x_0) = 0$, 于是由导数的定义以及复合函数极限法则可知

$$
\begin{aligned}
f''(x_0) &= \lim_{y \to x_0} \frac{f'(y) - f'(x_0)}{y - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f'\big(x_0 + \theta(x)(x - x_0)\big) - f'(x_0)}{\theta(x)(x - x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\theta(x)(x - x_0)^2}.
\end{aligned}
$$

再由 L'Hospital 法则与导数的定义可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}\\
=\ &\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{1}{2}f''(x_0).
\end{aligned}$$

又 $f''(x_0)\neq 0$, 于是我们有

$$\lim_{x\to x_0}\theta(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{f''(x_0)(x-x_0)^2}=\frac{1}{2}.$$

例 11. 如果 $f \in \mathscr{C}[1,2]$ 在 $(1,2)$ 内可导, 求证: $\exists \xi \in (1,2)$ 使得 $f(2)-f(1)=\frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$.

证明: 方法 1. $\forall x \in [1,2]$, 定义 $g(x)=\frac{1}{x}$, 那么由 Cauchy 中值定理知, $\exists \xi \in (1,2)$ 使得我们有

$$\frac{f(2)-f(1)}{\frac{1}{2}-1}=\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}},$$

由此立刻可得 $f(2)-f(1)=\frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$.

方法 2. $\forall x \in [1,2]$, 令 $F(x)=f(x)+\frac{2}{x}(f(2)-f(1))$.
则 $F \in \mathscr{C}[1,2]$ 在 $(1,2)$ 内可导且

$$F(1) = 2f(2) - f(1) = F(2),$$

于是由 Rolle 定理可知, $\exists \xi \in (1,2)$ 使得我们有

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{2}{\xi^2}\big(f(2) - f(1)\big),$$

也即 $f(2) - f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$.

例 12. 如果 $b > a > 0$, 求证: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$b \log a - a \log b = (b-a)(\log \xi - 1).$$

证明: $\forall x \in [a, b]$, 我们令 $f(x) = \frac{\log x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, 那么 $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$ 在 (a, b) 内可导. 由 Cauchy 中值定理可知, $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{\frac{\log a}{a} - \frac{\log b}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{1-\log \xi}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}},$$

由此立刻可得所证结论成立.

例 13. 假设函数 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导且使得 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 求证:

(1) $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) $\exists \theta, \eta \in (0,1)$ 使得 $\theta \neq \eta$, 且 $f'(\theta)f'(\eta)=1$.

证明: (1) $\forall x \in [0,1]$, 定义 $F(x)=f(x)-1+x$. 那么 $F \in \mathscr{C}[0,1]$ 且 $F(0)=-1$, $F(1)=1$. 于是由连续函数的介值定理可知, $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $F(\xi)=0$, 也即我们有 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 由于 f 在 $(0,1)$ 上可导, 则我们分别对 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 应用 Lagrange 中值定理知, $\exists\theta\in(0,\xi)$, $\exists\eta\in(\xi,1)$ 使得我们有

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi}, \\ f'(\eta) &= \frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}, \end{aligned}$$

注意到 $f(\xi)=1-\xi$, 故 $f'(\theta)f'(\eta)=1$.

例 14. 设隐函数 $y=y(x)$ 由方程

$$\arctan\frac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

确定, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解: 将方程两边对 x 求导可得

$$\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2},$$

于是 $y-xy'=x+yy'$, 由此可得 $y'=\frac{y-x}{y+x}$. 故

$$y''=\frac{(y'-1)(y+x)-(y-x)(y'+1)}{(y+x)^2}=\frac{2xy'-2y}{(y+x)^2}=-\frac{2(y^2+x^2)}{(y+x)^3}.$$

例 15. 设 $y = 2x + \sin x$, 求其反函数 $x = x(y)$ 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}$.

解: 将等式两边对 y 求导得 $1 = 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \cos x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, 于是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2+\cos x}$, 进而可得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{2+\cos x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2+\cos x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \\
&= -\frac{-\sin x}{(2+\cos x)^2} \cdot \frac{1}{2+\cos x} = \frac{\sin x}{(2+\cos x)^3}.
\end{aligned}$$

例 16. 设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 为函数. $\forall c\in(a,b)$ 以及 $x\in(a,b)\setminus\{c\}$, 定义 $F_c(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. 则 f 为凸函数当且仅当 $\forall c\in(a,b)$, 函数 F_c 递增.

证明: 充分性. $\forall x,y\in(a,b)$ 及 $\forall\lambda\in(0,1)$, 定义 $c=\lambda x+(1-\lambda)y$, 则 $\lambda=\frac{y-c}{y-x}$. 若 $x<y$, 则

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=F_c(x)\leqslant F_c(y)=\frac{f(y)-f(c)}{y-c},$$

故 $f(c)\leqslant\frac{y-c}{y-x}f(x)+\frac{c-x}{y-x}f(y)$, 于是 f 为凸函数.

必要性. 任取 $x, y \in (a, b) \setminus \{c\}$ 使得 $x < y$.

若 $c < x < y$, 则 $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant \frac{f(y)-f(c)}{y-c} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

若 $x < c < y$, 则 $\frac{f(c)-f(x)}{c-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(c)}{y-c}$.

若 $x < y < c$, 则 $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(c)-f(x)}{c-x} \leqslant \frac{f(c)-f(y)}{c-y}$.

于是我们有 $F_c(x) \leqslant F_c(y)$, 故 F_c 为单调递增.

例 17. 若 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 为下凸, 则 $\forall c\in(a,b)$, $f'_-(c)$、$f'_+(c)$ 存在 且 $f'_-(c)\leqslant f'_+(c)$.

证明: $\forall c\in(a,b)$, F_c 在 $(a,b)\setminus\{c\}$ 上递增, 于是由单调有界定理可知 $F_c(c-0)$, $F_c(c+0)$ 收敛并且 $F_c(c-0)\leqslant F_c(c+0)$. 而 $f'_-(c)=F_c(c-0)$, $f'_+(c)=F_c(c+0)$. 故所证成立.

例 18. 若 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 为凸函数, 则 f 连续.

证明: $\forall x\in(a,b)$, 由于 f 在点 x 的左、右导数存在, 则 f 在该点左、右连续, 故连续.

例 19. 若 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 下凸, 则 $\forall x,y\in(a,b)$, 当 $x<y$ 时, 我们均有

$$f'_+(x)\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant f'_-(y).$$

证明: 对于 $a<x<z<y<b$, 我们有

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant\frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

于是由函数极限的保序性可知

$$f'_+(x)\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant f'_-(y).$$

例 20. 设 $f \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ 为凸函数.

(1) 求证: $\forall x_0, x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

(2) 若 $\exists M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $f(x) \leqslant M$, 求证: f 为常值函数.

证明: (1) 因 f 为凸函数, 则 f' 单调递增. 于是 $\forall x_0, x \in \mathbb{R}$, 若 $x < x_0$, 则由 Lagrange 中值定理可知 $\exists \xi \in (x, x_0)$ 使得

$$f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0 - x) \leqslant f'(x_0)(x_0 - x),$$

由此立刻可得 $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

若 $x > x_0$, 同理可知 $\exists \xi \in (x_0, x)$ 使得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0),$$

故此时我们也有 $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
综上所述可知所证结论成立.

(2) 任取 $x_0 \in \mathbb{R}$. 若 $f'(x_0) \geqslant 0$, 由 (1) 及题设知,
$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{M - f(x_0)}{x - x_0} = 0$. 如果 $f'(x_0) \leqslant 0$,
我们同样也有 $0 \geqslant f'(x_0) \geqslant \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{M - f(x_0)}{x - x_0} = 0$.
故 $f'(x_0) = 0$, 进而 $f' \equiv 0$, 则 f 为常值函数.

例 21. 求 $f(x)=\sin(x^2+2\sqrt{\pi}x)$ 在 $x_0=-\sqrt{\pi}$ 带一般 Peano 余项的 Taylor 公式与 $f^{(n)}(-\sqrt{\pi})$.

解: 当 $x\to-\sqrt{\pi}$ 时, 令 $t=x+\sqrt{\pi}$, 则我们有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin\left((t-\sqrt{\pi})^2+2\sqrt{\pi}(t-\sqrt{\pi})\right)=\sin(t^2-\pi)\\
&= -\sin(t^2)=-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(t^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left((t^2)^{2n+1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(x+\sqrt{\pi})^{4k+2}}{(2k+1)!}+o\left((x+\sqrt{\pi})^{4n+2}\right),
\end{aligned}
$$

于是 $f^{(n)}(-\sqrt{\pi})=\begin{cases}\frac{(-1)^{k+1}(4k+2)!}{(2k+1)!}, & \text{若 } n=4k+2,\\ 0, & \text{其余.}\end{cases}$

例 22. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2)}{\sqrt{1+x^2}-1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

解:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2)}{\sqrt{1+x^2}-1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}(-2)\cdot\frac{e^x-1-x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}(-2)\cdot\frac{e^x-1}{2x}=-1.$$

例 23. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-e^{-\frac{x^2}{6}}}{\sin(x^2)-\log(1+x^2)}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-e^{-\frac{x^2}{6}}}{\sin(x^2)-\log(1+x^2)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{(\sin(x^2)-\log(1+x^2))(\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}e^{-\frac{x^2}{6}}+e^{-\frac{x^2}{3}})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4))-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4))}{3(x^2-\frac{x^6}{3!}+o(x^6)-(x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)))}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{3(\frac{x^4}{2}+o(x^4))}=-\frac{1}{18}.$$

例 24. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

解: $$\lim_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\exp\Big(\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^x+x)}{x}\Big)$$
$$=\exp\Big(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x}\Big)$$
$$=\exp\Big(\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}\Big)=e.$$

例 25. 计算 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\log x}}{(\log x)^x}$.

解: $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\log x}}{(\log x)^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(\log x)^2}}{e^{x\log\log x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \exp\left((\log x)^2 - x\log\log x\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\left((x\log\log x)\left(\frac{(\log x)^2}{x\log\log x} - 1\right)\right)\right)$$

$$= 0.$$

例 26. 设函数 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导使得 $f(0)=f(1)$, 且 $\forall x \in (0,1)$, $|f'(x)|<1$. 求证: $\forall x_1, x_2 \in [0,1]$, 均有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$.

证明: $\forall x_1, x_2 \in [0,1]$, 不失一般性, 我们可假设 $x_1 \leqslant x_2$, 否则可以重新编号. 若 $x_1 = x_2$, 则

$$|f(x_1)-f(x_2)| = 0 < \frac{1}{2}.$$

下面假设 $x_1 < x_2$, 则由 Lagrange 中值定理可知,

$\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得我们有

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

但由题设可知 $|f'(\xi)| < 1$, 于是

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_2 - x_1| < |x_2 - x_1|,$$

则当 $|x_2 - x_1| \leqslant \frac{1}{2}$ 时, 成立 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$.
若 $|x_2 - x_1| > \frac{1}{2}$, 那么 $x_1 + 1 - x_2 < \frac{1}{2}$, 此时

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leqslant |f(x_1) - f(0)| + |f(1) - f(x_2)| \\ &< |x_1| + |1 - x_2| = x_1 + 1 - x_2 < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 27. 设 $x_1 > 0$ 且 $\forall n \geqslant 1$, $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$. 求证:

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求其值.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 2$.

证明: (1) 由题设立刻可知 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $x_n > 0$ 并且 $x_{n+1} = \ln(1+x_n) < x_n$. 故数列 $\{x_n\}$ 单调下降且有下界, 因此收敛, 设其极限为 A. 则由数列极限的保号性可知 $A \geqslant 0$, 进而由题设得 $A = \ln(1+A)$. 又 $\forall x > 0$, 我们有 $\ln(1+x) < x$, 由此我们立刻可得 $A = 0$.

(2) 因数列 $\{\frac{1}{x_n}\}$ 严格递增且趋近于 $+\infty$, 于是由 Stolz 定理立刻可知

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n \ln(1+x_n)}{x_n - \ln(1+x_n)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x)}{x - \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x - \ln(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1 - \frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0} 2(1+x) = 2.$$

例 28. 设 $c>1$ 且 $0 \leqslant x_1 \leqslant \sqrt{c}$, $x_{n+1}=\frac{c(1+x_n)}{c+x_n}$, 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证明: 对 $n \geqslant 1$ 用数学归纳法证明 $0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{c}$.

当 $n=1$ 时, 所证即为题设条件, 故成立.

现假设所证对 $n \geqslant 1$ 成立, 则我们有

$$0 < x_{n+1} = \frac{c(1+x_n)}{c+x_n} = c + \frac{c(1-c)}{c+x_n} \leqslant c + \frac{c(1-c)}{c+\sqrt{c}} = \sqrt{c},$$

于是由数学归纳法立刻可知所证结论成立.

进而可知, $\forall n \geqslant 1$, 我们均有

$$x_{n+1} - x_n = \frac{c(1+x_n)}{c+x_n} - x_n = \frac{c-x_n^2}{c+x_n} \geqslant 0.$$

因此数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界, 于是由单调有界定理可知该数列有有限极限, 将之设为 A. 又 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $x_{n+1} = \frac{c(1+x_n)}{c+x_n}$, 则由数列极限的四则运算法则可得 $A = \frac{c(1+A)}{c+A}$, 因此 $A = \pm\sqrt{c}$. 再由数列极限的保号性知 $A \geqslant 0$, 故 $A = \sqrt{c}$.

例 29. 假设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导使得$\forall x \in (0,1)$, 均有$f(x) \neq 0$. 求证: $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

证明: $\forall x \in [0,1]$, 令 $F(x) = f(x)f(1-x)$. 则 F 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导. 又 $F(0) = F(1)$, 则由 Rolle 定理可知, $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $0 = f'(\xi)f(1-\xi) - f(\xi)f'(1-\xi)$, 由此得证.

注: 也可直接取 $\xi = \frac{1}{2}$, 但该证明缺乏启发性.

例 30. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为二阶连续可导使得 $f(0)=0$. $\forall x\in\mathbb{R}$, 令

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ f'(0), & 若\ x=0.\end{cases}$$

(1) 求函数 g'.

(2) 讨论函数 g' 在点 $x=0$ 处的连续性.

解: (1) 若 $x\neq 0$, 则 $g'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$. 由定义,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0). \end{aligned}$$

(2) 由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} g'(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)x + f'(x) - f'(x)}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}\\ &= \frac{1}{2}f''(0)\\ &= g'(0).\end{aligned}$$

因此函数 g' 在点 $x = 0$ 处的连续.

例 31. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

解: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{(x\ln(1+x)-x^2)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)(1-\cos x)}{2x(\ln(1+x)-x)\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{4(\ln(1+x)-x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2(\frac{1}{1+x}-1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}(1+x)=-\frac{1}{2}.$$

例 32. 设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $\{x_n\}$ 为 $[a,b]$ 中的数列使得 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $g(x_n) = f(x_{n+1})$. 求证: $\exists \xi \in [a,b]$ 使得 $g(\xi) = f(\xi)$.

证明: $\forall x \in [a,b]$, 定义 $F(x) = g(x) - f(x)$. 则我们有 $F \in \mathscr{C}[a,b]$. 不失一般性, 设 $F(x_1) \geqslant 0$, 我们否则可以考虑 $-F$.

方法 1. 下面分情况讨论:

1) 若 $\exists \ell \geqslant 1$ 使得 $F(x_\ell) \leqslant 0$, 由连续函数介值定理知存在 ξ 介于 x_1 与 x_ℓ 使得 $F(\xi) = 0$.

2) 若 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $F(x_n) > 0$, 则由题设可知

$$0 < F(x_n) = g(x_n) - f(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n).$$

又 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 故 f 有界, 则由单调有界定理可知数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 从而

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \big(f(x_{n+1}) - f(x_n)\big) = 0.$$

由列紧性定理知数列 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{k_n}\}$, 设其极限为 ξ. 则由连续性以及复合函数极限法则得 $F(\xi) = \lim_{n\to\infty} F(x_{k_n}) = 0$. 故所证成立.

方法 2. 用反证法, 设 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $F(x) \neq 0$. 于是由连续函数介值定理可知 F 恒正或恒负, 从而 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $F(x) > 0$. 因而 $\forall n \geqslant 1$,

$$0 < F(x_n) = g(x_n) - f(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n).$$

又 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 故 f 有界, 则由单调有界定理可知数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 从而

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \big(f(x_{n+1}) - f(x_n)\big) = 0.$$

由介值定理和最值定理知 $\mathrm{Im}F$ 为闭区间且不包含 0, 这与函数极限的保序性矛盾. 得证.

方法 3. 用反证法, 设 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $F(x) \neq 0$. 于是由连续函数介值定理可知 F 恒正或恒负, 从而 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $F(x) > 0$. 再由最值定理知 F 有最小值, 设为 m. 则 $m > 0$. 则 $\forall n \geqslant 1$,

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = g(x_n) - f(x_n) = F(x_n) \geqslant m,$$

从而 $\forall n \geqslant 1$, $f(x_n) \geqslant f(x_1) + m(n-1)$, 进而

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty.$$

但 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 故 f 有界. 矛盾! 由此得证.

例 33. 设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导且 g' 恒不为零. 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$.

证明: $\forall x \in [a,b]$, 我们定义

$$F(x) = \big(f(x) - f(a)\big)\big(g(b) - g(x)\big).$$

则 $F \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导. 又 $F(a)=0=F(b)$, 则由 Rolle 定理可知 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$. 注意到 g' 恒不为零, 故 g 严格单调, 从而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}.$$

例 34. 设 f 在原点可导且 $f(0)=0$, $f'(0)=1$. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}$.

解: 由导数的定义及复合函数极限可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{x^2(f(x)-f(0))}{x^3}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\\
=\ &f'(0)-2f'(0)=-1.
\end{aligned}$$

例 35. 设 $f(x) = 1 - \cos\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)$. 求实数 a, n 使得当 $x \to \infty$ 时, $f(x) \sim \frac{a}{x^n}$.

解: 当 $x \to \infty$ 时, 由无穷小量替换以及复合函数极限法则可知

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)^2 \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2 = \frac{1}{8x^4},$$

于是 $a = \frac{1}{8}$, $n = 4$.

例 36. 设函数 f 在区间 $[0,1]$ 上为二阶可导且 $f(1)>0$, 极限 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$ 存在为有限实数并且严格小于 0. 求证: 方程

$$f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$$

在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

证明: 由于 f 为二阶可导, 因此连续. 特别地

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0.$$

由题设我们有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$, 于是由函数极限保号性可知, 存在 $a\in(0,1)$ 使得我们有

$$\frac{f(a)}{a}<0,$$

也即 $f(a)<0$. 但 $f(1)>0$, 由连续函数介值定理可知存在 $b\in(a,1)$ 使 $f(b)=0$, 最后再由 Rolle 定理可知存在 $c\in(0,b)$ 使得 $f'(c)=0$.

$\forall x \in [0,1]$, 令 $F(x) = f(x)f'(x)$. 则 F 可导且

$$F'(x) = f(x)f''(x) + (f'(x))^2.$$

由 $F(0) = F(c) = F(b)$ 以及 Rolle 定理知存在 $\alpha \in (0, c)$ 以及 $\beta \in (c, b)$ 使得我们有

$$F'(\alpha) = F'(\beta) = 0.$$

故所证结论成立.

例 37. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-(\frac{\sin x}{x})^x}{x^3}$.

解: 由题设立刻可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}}{x^3} \\
= &\lim_{x\to 0^+} \frac{-x\ln\frac{\sin x}{x}}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\frac{x}{\sin x}}{x^2} \\
= &\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\frac{x-\sin x}{\sin x})}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x-\sin x}{\sin x}}{x^2} \\
= &\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\sin x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

例 38. 假设 $h>0$, 而函数 $f\in\mathscr{C}[x_0-h,x_0+h]$ 在 (x_0-h,x_0+h) 内可导, 求证: $\exists\theta\in(0,1)$ 使

$$f(x_0+h)-f(x_0-h)=\big(f'(x_0+\theta h)+f'(x_0-\theta h)\big)h.$$

证明: $\forall t\in[0,1]$, 令 $F(t)=f(x_0+th)-f(x_0-th)$, 那么 $F\in\mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导. 由 Lagrange 中值定理可知, $\exists\theta\in(0,1)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x_0+h)-f(x_0-h) &= F(1)-F(0)=F'(\theta)\\ &= \big(f'(x_0+\theta h)+f'(x_0-\theta h)\big)h. \end{aligned}$$

例 39. 求函数 $f(x)=x^6|x|$ 在 $x=0$ 处存在的最高阶导数的阶数.

解: 由题设条件可知

$$f(x)=\begin{cases} -x^7, & 若\ x\leqslant 0, \\ x^7, & 若\ x\geqslant 0. \end{cases}$$

由此我们立刻可得

$$f^{(6)}(x)=\begin{cases} -5040x, & 若\ x\leqslant 0, \\ 5040x, & 若\ x\geqslant 0, \end{cases} = 7!|x|.$$

于是 f 在 $x=0$ 处最高存在 6 阶导数.

例 40. 计算极限 $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(2\sqrt{x})-2x}{x^2}$.

解: 由变量替换与 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(2\sqrt{x})-2x}{x^2} \overset{y=\sqrt{x}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{1-\cos(2y)-2y^2}{y^4}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{2\sin(2y)-4y}{4y^3} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(2y)-2y}{2y^3}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{2\cos(2y)-2}{6y^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos(2y)-1}{3y^2}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}(2y)^2}{3y^2} = -\frac{2}{3}.$$

例 41. 若 $e \leqslant a < b$, 求证: $a^b > b^a$.

证明: **方法 1.** $\forall x \geqslant e$, 令 $f(x) = \frac{\log x}{x}$. 则函数 f 可导且 $\forall x > e$, 我们均有

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} < 0,$$

由此可知函数 f 在 $[e, +\infty)$ 上严格递减, 从而当 $e \leqslant a < b$ 时, 均有 $\frac{\log b}{b} < \frac{\log a}{a}$, 也即 $a^b > b^a$.

方法 2. 固定 $a \geqslant e$. $\forall x > 0$, 定义

$$g(x) = x \log a - a \log x.$$

则 g 可导且 $\forall x > a$, 我们均有

$$g'(x) = \log a - \frac{a}{x} = \frac{x \log a - a}{x} > 0.$$

于是 g 在 $[a, +\infty)$ 上为严格递增, 从而 $\forall b > a$, 均有 $g(b) > g(a) = 0$, 也即 $a^b > b^a$.

例 42. 求证: 方程 $x^5-2x^3-1=0$ 有并且仅有一个正根.

证明: $\forall x\in\mathbb{R}$, 定义 $f(x)=x^5-2x^3-1$, 则 f 为初等函数, 故连续可导. 又 $f(0)=-1$, $f(2)=15$, 于是由连续函数介值定理可知 f 在 $(0,2)$ 上有零点. 又 $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4-6x^2 \\ &= x^2(\sqrt{5}x-\sqrt{6})(\sqrt{5}x+\sqrt{6}), \end{aligned}$$

于是 f' 在 $(0,\sqrt{\frac{6}{5}})$ 上取负值, 而在 $(\sqrt{\frac{6}{5}},+\infty)$ 上取正值, 由此可知 f 在 $[0,\sqrt{\frac{6}{5}}]$ 上为严格递减, 而在 $[\sqrt{\frac{6}{5}},+\infty)$ 上为严格递增, 则 $\forall x\in[0,\sqrt{\frac{6}{5}}]$, 均有 $f(x)\leqslant f(0)<0$, 因此 f 在 $[0,\sqrt{\frac{6}{5}}]$ 上没有零点. 又 f 在 $[\sqrt{\frac{6}{5}},+\infty)$ 上为单射且它在 $(0,2)$ 上有零点, 因此该零点为 f 唯一的正根.

例 43. 寻求 $f(x)=\frac{\log x}{x}$ 在开区间 $(0,+\infty)$ 上的单调区间, 极值和极值点, 凸性区间以及渐近线 (如果存在的话), 并画出草图.

解: 由于 f 为初等函数, 故无穷可导且

$$f'(x)=\frac{x\cdot\frac{1}{x}-\log x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1-\log x).$$

则 f' 在 $(0,e)$ 上取正号, 在 $(e,+\infty)$ 上取负号, 故 f 在 $(0,e)$ 上严格递增, 在 $(e,+\infty)$ 上严格递减, 从而 e 为 f 的唯一极值点且为极大值点, 相应的极大值为 $\frac{1}{e}$.

与此同时, 我们也有

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}(1-\log x) + \frac{1}{x^2}(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^3}(2\log x - 3).$$

则 f'' 在 $(0, e^{\frac{3}{2}})$ 上为负, 而在 $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ 上为正, 因此 f 在 $(0, e^{\frac{3}{2}})$ 上严格凹, 而在 $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ 上严格凸, 故 $(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$ 为 f 的唯一拐点. 注意到

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0,$$

于是 f 只有两条渐近线: 竖直渐进线 $x = 0$ 和水平渐近线 $y = 0$. 草图略.

例 44. 假设 $x, y, p, q \in (0, +\infty)$, 并且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 求证: (Young 不等式) $x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y$, 且等号成立当且仅当 $x = y$.

证明: $\forall x > 0$, 定义 $f(x) = \log x$, 那么 f 为二阶可导, 并且 $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. 故 f 为严格凹, 从而 $\forall x, y > 0$, 当 $x \neq y$ 时, 我们有

$$f\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) > \frac{1}{p}f(x) + \frac{1}{q}f(y),$$

故 $x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} < \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y$. 若 $x = y$, 不等式变成等式.

例 45. 设函数 f 在点 x_0 处可导. 求证:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=(\alpha+\beta)f'(x_0).$$

证明: $\forall\theta\in\mathbb{R}$, 若 $\theta=0$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\theta h)-f(x_0)}{h}=0=\theta f'(x_0).$$

若 $\theta\neq 0$, 由导数定义及复合函数极限法则知,

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\theta h)-f(x_0)}{h}\\ =\ &\lim_{h\to 0}\theta\cdot\frac{f(x_0+\theta h)-f(x_0)}{\theta h}=\theta f'(x_0).\end{aligned}$$

于是 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0-\beta h)}{h} \\
= & \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{h} \\
& - \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-\beta h) - f(x_0)}{h} \\
= & \alpha f'(x_0) - (-\beta) f'(x_0) \\
= & (\alpha+\beta) f'(x_0).
\end{aligned}
$$

例 46. 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 可导且在 (a,b) 内二阶可导. 如果 $f(a)=f(b)$ 且 $f'_+(a)f'_-(b)>0$, 求证: $\exists\rho\in(a,b)$ 使得 $f''(\rho)=0$.

证明: 由于 $f'_+(a)f'_-(b)>0$, 不失一般性, 我们可以假设 $f'_+(a)>0$, $f'_-(b)>0$ (否则考虑 $-f$). 于是由导数的定义以及函数极限的保号性可知 $\exists c,d\in(a,b)$ 使得 $\forall x\in(a,c]$, 均有 $f(x)>f(a)$, 而 $\forall x\in[d,b)$, 则有 $f(x)<f(b)=f(a)$. 特别地,

我们有 $c < d$, 且还有 $f(c) > f(a)$, $f(d) < f(a)$. 由于 f 在 $[a, b]$ 上可导, 因此连续, 从而由连续函数介值定理知, $\exists \lambda \in (c, d)$ 使得 $f(\lambda) = f(a)$. 又因为 f 可导, 并且 $f(a) = f(\lambda) = f(b)$, 于是由 Rolle 定理可知, $\exists \xi_1 \in (a, \lambda)$, $\exists \xi_2 \in (\lambda, b)$ 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. 再因 f 在 (a, b) 上二阶可导, 那么 f' 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上可导, 故由 Rolle 定理可知, $\exists \rho \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得 $f''(\rho) = 0$.

例 47. 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 有 n 个不同的零点: $x_1<x_2<\cdots<x_n$. 问:

(1) f' 有多少个零点, 各位于什么区间?

(2) f'' 有多少个零点? $f^{(n-1)}$ 有多少个零点?

解: (1) 由于 f 是次数不大于 n 的多项式且有 n 个零点, 故 $a_n\neq 0$. $\forall k\in\mathbb{N}$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$, 因为 $f(x_k)=f(x_{k+1})=0$, 则由 Rolle 定理可知,

$\exists \xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ 使得 $f'(\xi_k) = 0$. 又因函数 f' 是次数为 $n-1$ 的多项式, 于是 $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ 就是导函数 f' 的所有零点.

(2) 援用与 (1) 中同样推理可知 f'' 有 $n-2$ 个零点, 如此递推下去可知 $f^{(n-1)}$ 只有一个零点, 事实上, $f^{(n-1)}$ 是次数为 1 的多项式.

例 48. 若 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导、严格单调且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 求证: 对任意整数 $n \geqslant 1$, 存在 n 个不同的 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in (0,1)$ 使得

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} + \cdots + \frac{1}{f'(\xi_n)} = n.$$

证明: 由题设可知 f 严格递增, 并且由最值定理以及连续函数介值定理可得 $\mathrm{Im} f = [0,1]$. 于是对任意整数 k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, $\exists x_k \in [0,1]$ 使得

$$f(x_k) = \frac{k}{n}.$$

由于 f 为严格单调, 因此我们有

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1,$$

则对任意整数 k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 由 Lagrange 中值定理可知 $\exists \xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ 使得

$$f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(x_k) - f(x_{k-1}) = \frac{1}{n}.$$

由此我们立刻可以导出

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(\xi_k)} = n \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = n(x_n - x_0) = n.$$

例 49. 设$1<x_1<5$且$\forall n\geqslant 1$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n(5-x_n)}$. 求证数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并计算该极限.

解: $\forall n\geqslant 2$ 应用数学归纳法证明 $0<x_n\leqslant\frac{5}{2}$. 当 $n=2$ 时, 由于 $1<x_1<5$, 因此我们有

$$0<x_2=\sqrt{x_1(5-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+5-x_1)=\frac{5}{2}.$$

现假设所证结论对 n 成立, 则 $0<x_n\leqslant\frac{5}{2}$, 从而

$$0<x_{n+1}=\sqrt{x_n(5-x_n)}\leqslant\frac{1}{2}(x_n+5-x_n)=\frac{5}{2}.$$

故由数学归纳法知所证结论对 $n\geqslant 2$ 均成立.

于是 $\forall n \geqslant 2$, 均有 $5 - x_n \geqslant x_n > 0$, 从而

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n}(\sqrt{5 - x_n} - \sqrt{x_n}) \geqslant 0.$$

则数列 $\{x_n\}$ 从第 2 项开始递增且以 $\frac{5}{2}$ 为上界, 于是由单调有界定理知该数列收敛. 设其极限为 A. 那么由极限保序性可知 $0 < x_2 \leqslant A \leqslant \frac{5}{2}$. 最后由题设递归关系式可得

$$A = \sqrt{A(5 - A)},$$

进而可知所求极限 $A = \frac{5}{2}$.

例 50. 在曲线 $y=x^2$ 上求一个点 (x_0,y_0) 使得过此点的切线与 $x=8$, $y=0$ 所围成的位于第一象限的三角形的面积最大, 其中 $x_0\in[0,8]$.

解: 曲线 $y=x^2$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$. 该切线与直线 $x=8$ 的交点为 $(8,16x_0-x_0^2)$, 与 x 轴的交点为 $(\frac{x_0}{2},0)$, 故该切线与与 $x=8$, $y=0$ 所围成的位于第一象限的三角形的面积为

$$S(x_0)=\frac{1}{2}(8-\frac{x_0}{2})\big(16x_0-x_0^2\big)=\frac{1}{4}(x_0^3-32x_0^2+256x_0).$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned} S'(x_0) &= \frac{1}{4}(3x_0^2 - 64x_0 + 256) \\ &= \frac{1}{4}(3x_0 - 16)(x_0 - 16). \end{aligned}$$

于是函数 S 在 $[0, \frac{16}{3}]$ 上严格递增, 而在 $[\frac{16}{3}, 8]$ 上严格递减, 从而它在点 $x_0 = \frac{16}{3}$ 处取到最大值, 进而可知所求点为 $(\frac{16}{3}, \frac{256}{9})$.

例 51. 设 f 在 $[a,b]$ 上可导且 $\exists x_0 \in (a,b]$ 使得 $f'(x_0)=0$. 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}.$$

证明: $\forall x \in [a,b]$, 令 $F(x) = e^{-\frac{x-a}{b-a}}(f(x)-f(a))$. 则 F 在 $[a,b]$ 可导且 $F(a)=0$. 下证 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$, 此时我们有

$$0 = F'(\xi) = e^{-\frac{\xi-a}{b-a}}\Big(f'(\xi) - \frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}\Big),$$

由此立刻可得所要结论.

下面分情况讨论:

1) 若 $F(b)=0$, 则 $F(a)=F(b)$, 由 Rolle 定理可知所证结论成立.

2) 若 $F(b)\neq 0$, 不失一般性, 可假设 $F(b)>0$, 否则将 f 换成 $-f$. 用反证法, 假设 $\forall x\in(a,b)$, 均有 $F'(x)\neq 0$. 则 F 为严格单调. 又 $F(a)<F(b)$, 故 F 严格递增且 $\forall x\in(a,b)$, 均有 $F'(x)>0$. 注意到 $\forall x\in[a,b]$, 我们有

$$f(x)=e^{\frac{x-a}{b-a}}F(x)+f(a),$$

从而 f 也为严格递增. 由于 F 递增, 则我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant F'(x_0) \\ &= e^{-\frac{x_0-a}{b-a}}\left(f'(x_0)-\frac{f(x_0)-f(a)}{b-a}\right) \\ &= e^{-\frac{x_0-a}{b-a}}\left(\frac{f(a)-f(x_0)}{b-a}\right)<0. \end{aligned}$$

矛盾! 故所证结论此时成立.

例 52. 设 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=k$, 其中 k 为常数. 求证: $\forall t>0$, 均有 $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+t)-f(x)\big)=kt$.

证明: $\forall t,x>0$, 由 Lagrange 中值定理可得知, $\exists\xi(x)\in(x,x+t)$ 使得我们有

$$f(x+t)-f(x)=f'\big(\xi(x)\big)t.$$

于是由夹逼原理以及复合函数极限法则可知

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+t)-f(x)\big)=\lim_{x\to+\infty}f'\big(\xi(x)\big)t=kt.$$

例 53. 求 $y = \sin x \cos(2x)$ 在点 $x = 0$ 处的一般 Taylor 多项式.

解: 由于 $y = \sin x \cos(2x) = \frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin x)$, 则该函数点 $x = 0$ 处的一般 Taylor 多项式为

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} \left((3x)^{2k-1} - x^{2k-1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}(3^{2k-1} - 1)}{2 \cdot (2k-1)!} x^{2k-1}. \end{aligned}$$

例 54. 设 f 在 $[a,b]$ 上三阶可导且 $\exists M>0$ 使得 $\forall x\in[a,b]$, 均有 $|f'''(x)|\leqslant M$. $\forall h\in(0,b-a)$, 令 $E(h)=f(a+h)-f(a)-f'(a+\frac{h}{2})h$. 求证: $\forall h\in(0,b-a)$, 均有 $|E(h)|\leqslant\frac{7}{24}Mh^3$.

证明: 方法 1. 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知存在 $\xi_1\in(a,a+h)$, $\xi_2\in(a,a+\frac{h}{2})$ 使得

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)h^3, \\ f'(a+\frac{h}{2}) &= f'(a)+f''(a)\frac{h}{2}+\frac{1}{2!}f'''(\xi_2)(\frac{h}{2})^2, \end{aligned}$$

故 $|E(h)|\leqslant(\frac{1}{6}|f'''(\xi_1)|+\frac{1}{8}|f'''(\xi_2)|)h^3\leqslant\frac{7}{24}Mh^3$.

方法 2. 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知

存在 $\xi_1 \in (a, a+\frac{h}{2})$, $\xi_2 \in (a+\frac{h}{2}, a+h)$ 使得

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a+\frac{h}{2}) - f'(a+\frac{h}{2})\frac{h}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2!}f''(a+\frac{h}{2})(\frac{h}{2})^2 - \frac{1}{3!}f'''(\xi_1)(\frac{h}{2})^3, \\ f(a+h) &= f(a+\frac{h}{2}) + f'(a+\frac{h}{2})\frac{h}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2!}f''(a+\frac{h}{2})(\frac{h}{2})^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi_2)(\frac{h}{2})^3, \end{aligned}$$

故 $|E(h)| \leqslant \frac{h^3}{48}(|f'''(\xi_1)| + |f'''(\xi_2)|) \leqslant \frac{Mh^3}{24} < \frac{7Mh^3}{24}$.

方法 3. 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知存在 $\xi_1 \in (a, a+\frac{h}{2})$, $\xi_2 \in (a+\frac{h}{2}, a+h)$ 使得

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a+\frac{h}{2}) - f'(a+\frac{h}{2})\frac{h}{2} + \frac{1}{2!}f''(\xi_1)(\frac{h}{2})^2, \\ f(a+h) &= f(a+\frac{h}{2}) + f'(a+\frac{h}{2})\frac{h}{2} + \frac{1}{2!}f''(\xi_2)(\frac{h}{2})^2, \end{aligned}$$

故 $E(h) = \frac{h^2}{8}(f''(\xi_2) - f''(\xi_1))$. 于是由 Lagrange 中值定理可知 $\exists \eta \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得我们有

$$|E(h)| = \frac{h^2}{8}|f'''(\eta)|(\xi_2 - \xi_1) \leqslant \frac{Mh^3}{8} < \frac{7}{24}Mh^3.$$

例 55. 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$.

解: $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\log x-x+1}{(x-1)\log x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\log x+\frac{x}{x}-1}{\log x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\log x}{x\log x+x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\log x+1}{\log x+2}=\frac{1}{2}.$$

例 56. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x-x^2}{\sin(x^2)}$.

解:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x-x^2}{\sin(x^2)}\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-x-x^2}{x^2}\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}\\
=\ &-\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

例 57. 设函数 f 在原点处二阶可导，并且满足

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3,$$ 试求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$,

并计算 $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解: 由题设可知 $\lim_{x\to 0}\log\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=3$, 故

$$\lim_{x\to 0}\log\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}3x=0,$$ 进而我们有

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=1,$$ 也即 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

由于 f 在原点为二阶可导, 则 f' 在原点的某个邻域内存在且可导, 故 f 在原点连续, 于是

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,$$

从而我们有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.$

由带 Peano 余项的 Taylor 展式, 当 $x\to 0$ 时,

$$f(x)=\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2).$$

将之带入题设条件可得

$$\begin{aligned} 3 &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(x + \frac{f(x)}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(x + \frac{f''(0)}{2!}x + o(x)\right) = 1 + \frac{f''(0)}{2!}, \end{aligned}$$

因此我们有 $f''(0) = 4$, 进而可得

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2!} = 2,$$

从而我们有 $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2$.

例 58. 当 $n \to \infty$ 时, 求 $a_n = 1 - n\sin\frac{1}{n}$ 的等价无穷小量.

解: 当 $n \to \infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - n\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{3!}\frac{1}{n^3} + o\big(\frac{1}{n^3}\big)\Big) \\ &= \frac{1}{6n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big). \end{aligned}$$

因此当 $n \to \infty$ 时, 我们有 $a_n \sim \frac{1}{6n^2}$.

例 59. 当 $x \to 0$ 时, 求无穷小量

$$\ln(1+\sin x^2) + \alpha(\sqrt[3]{2-\cos x} - 1)$$

的阶.

解: 当 $x \to 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} & \ln(1+\sin x^2) + \alpha(\sqrt[3]{2-\cos x} - 1) \\ = \ & \sin x^2 - \frac{\sin^2 x^2}{2}\big(1+o(1)\big) \\ & + \frac{\alpha}{3}(1-\cos x) - \frac{\alpha}{9}(1-\cos x)^2\big(1+o(1)\big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin x^2 - \frac{\sin^2 x^2}{2}\big(1+o(1)\big) \\
&\quad + \frac{\alpha}{3}(1-\cos x) - \frac{\alpha}{9}(1-\cos x)^2\big(1+o(1)\big) \\
&= x^2 - \frac{x^6}{6}(1+o(1)) - \frac{x^4}{2}\big(1+o(1)\big) \\
&\quad + \frac{\alpha}{3}\Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\big(1+o(1)\big)\Big) - \frac{\alpha}{36}x^4\big(1+o(1)\big) \\
&= (1+\frac{\alpha}{6})x^2 - (\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{24})x^4 + o(x^4).
\end{aligned}
$$

于是当 $\alpha \neq -6$ 时, 所求阶等于 2. 若 $\alpha = -6$, 则所求阶等于 4.

例 60. 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 在 $(-1,1)$ 内有界, 且存在 $a>0$, $b>1$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有

$$f(ax)=bf(x).$$

求证: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

证明: 由题设可知, $\exists M>0$ 使得 $\forall x\in(-1,1)$, 均有 $|f(x)|<M$. 由于 $b>1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M}{b^n}=0$, 从而 $\forall\varepsilon>0$, $\exists n>0$ 使得 $\frac{M}{b^n}<\varepsilon$. 令 $\delta=\frac{1}{a^n}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时, 我们有 $|a^n x| < 1$,

从而 $|f(a^n x)| < M$. 进而由题设可知

$$|f(x)| = \frac{|f(ax)|}{b} = \cdots = \frac{|f(a^n x)|}{b^n} < \frac{M}{b^n} < \varepsilon.$$

于是由函数极限的定义可知

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

例 61. 假设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为单调递增函数. 求证: $\exists\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi)=\xi$.

证明: 方法 1. 首先我们借助数学归纳法构造满足下列性质的闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$:

(1) $\forall n\geqslant 1$, 均有 $f(a_n)\geqslant a_n$, $f(b_n)\leqslant b_n$.

(2) $\forall n\geqslant 1$, 均有 $b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$.

当 $n=1$ 时, 令 $a_1=0$, $b_1=1$. 则由题设可知

$$a_1=0\leqslant f(a_1)\leqslant f(b_1)\leqslant 1=b_1.$$

对于 $n \geqslant 1$, 假设我们已经构造了满足条件的闭区间套的前 n 项. 设 c 为 $[a_n, b_n]$ 的中点.

若 $f(c) \geqslant c$, 则令 $a_{n+1} = c$, $b_{n+1} = b_n$.

若 $f(c) < c$, 则令 $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c$.

由上述定义立刻可得

(3) $f(a_{n+1}) \geqslant a_{n+1}$, $f(b_{n+1}) \leqslant b_{n+1}$.

(4) $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^n}$.

进而由数学归纳法可知存在所求的闭区间套.

由闭区间套定理可知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 收敛并且有公共的极限. 我们将该极限记作 ξ. 则 $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$. 进而由 f 的单调性可知

$$a_n \leqslant f(a_n) \leqslant f(\xi) \leqslant f(b_n) \leqslant b_n.$$

于是由夹逼原理可得 $f(\xi) = \xi$.

方法 2. 令 $A=\{x\in[0,1]\mid f(x)\geqslant x\}$. 由题设知 $f(0)\geqslant 0$, 故 $0\in A$. 又 1 为集合 A 的上界, 由确界定理知 A 有上确界, 记作 ξ, 则 $\xi\in[0,1]$. $\forall n\geqslant 1$, 由上确界的定义, $\exists x_n\in A$ 使得我们有

$$\xi\geqslant x_n>\xi-\frac{1}{n}.$$

此时还有 $f(x_n)\geqslant x_n$, 进而由 f 的单调性可知

$$f(\xi)\geqslant f(x_n)\geqslant x_n.$$

又由夹逼原理可知数列 $\{x_n\}$ 收敛到 ξ, 从而由数列极限保序性可得 $f(\xi) \geqslant \xi$.

下面分情况讨论:

情形 1: $\xi = 1$. 由题设知 $f(\xi) \leqslant \xi$, 则 $f(\xi) = \xi$.

情形 2: $\xi < 1$. 则 $\forall x \in (\xi, 1]$, 我们均有 $x \notin A$, 故 $f(x) < x$, 从而由 f 的单调性可得

$$f(\xi) \leqslant f(x) < x.$$

进而 $f(\xi) \leqslant \lim\limits_{x \to \xi^+} x = \xi$. 于是 $f(\xi) = \xi$.

方法 3. 令 $A=\{x\in[0,1]\mid f(x)\geqslant x\}$. 由题设知 $f(0)\geqslant 0$, 故 $0\in A$. 又 1 为集合 A 的上界, 由确界定理知 A 有上确界, 记作 ξ, 则 $\xi\in[0,1]$. 首先证明 $\xi\in A$. 否则 $f(\xi)<\xi$. 则由上确界的定义, $\exists x_1\in A$ 使得 $x_1>f(\xi)$. 又 $f(x_1)\geqslant x_1$, 故 $f(x_1)>f(\xi)$, 从而由 f 的单调性知 $x_1>\xi$. 这与 ξ 为 A 的上确界矛盾.

最后证明 $f(\xi)=\xi$. 否则 $f(\xi)>\xi$. 此时

$$x_2=\frac{1}{2}(\xi+f(\xi))\in(\xi,f(\xi)).$$

由 f 的单调性知 $f(x_2)\geqslant f(\xi)>x_2$, 故 $x_2\in A$. 这与 ξ 为 A 的上确界矛盾. 故所证结论成立.

例 62. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x-x^2}{\sin(x^2)}$.

解: 由 L'Hospital 法则可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x-x^2}{\sin(x^2)}\\
=\;&\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x-x^2}{x^2}\\
=\;&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1-2x}{2x}\\
=\;&\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-2}{2}=-\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

谢谢大家!