# 电磁场数值计算

邢庆子

**Tel: 62781684(o), 13661226717**

**E-mail: xqz@tsinghua.edu.cn**

清华大学工物系加速器实验室 刘卿楼**309**

# 第11周课堂练习答案

$$K=\left(\begin{array}{cc:ccccccc} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -0.5 & 2 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 2 & 0 & -0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 2 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi_1 = 3.571, \quad \Phi_2 = 4.286$$

# 上节内容

## 第3章 有限元法基础

### 3.7 有限元法计算实例

### 3.8.1 有限元素的自动剖分——直线内插法

# 本节内容

## 3.3 平行平面场中拉普拉斯方程与泊松方程的有限元方程组

### 3.3.3 $\mu$ 不等于常数时的有限元方程组

## 3.4 轴对称场中泊松方程的有限元方程组

### 3.4.1 泊松方程的等价变分问题

### 3.4.2 等价变分问题离散化

### 3.4.3 对称轴的处理

## 3.5 定态时变场的有限元分析

## 3.3.3 $\mu$ 不等于常数时的有限元方程组

对于二维恒定非线性场，矢量磁位满足准泊松方程，它们的边值问题表示为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\dfrac{\partial A_z}{\partial y}\right)=-J_z \\ A_z\Big|_{L_1}=A_{z_0} \\ \gamma\dfrac{\partial A}{\partial n}\Big|_{L_2}=-H_t \end{cases} \qquad (3.99)$$

对应于一类边值问题，等价变分问题为：

$$
\begin{cases}
F(A) = \iint_D \left( \int_0^B \gamma B \mathrm{d}B - JA \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = F_{\min} \\
A_z \big|_{L_1} = A_{z_0}
\end{cases}
$$

每个三角形单元中泛函：

$$F^{(e)}(A)=\iint_e\left(\int_0^B \gamma B\mathrm{d}B-JA\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

线性插值： $F\left(\overline{A}\right)=\sum_{e=1}^{N_e}F^{(e)}\left(\overline{A}\right)$ （$N_e$为单元数）

把泛函的变分变为多元函数求极值问题：

$$\frac{\partial F\left(\overline{A}\right)}{\partial A_t}=\sum_{e=1}^{N_e}\frac{\partial F^{(e)}\left(\overline{A}\right)}{\partial A_t}=0 \qquad t=1,2\cdots,N_p$$

注意：在每个单元中，$\gamma$ 认为是常数，但由于媒质的非线性，各单元中 $\gamma$ 互不相同。

$$F^{(e)}(A)=\iint_e\left(\int_0^B \gamma B\mathrm{d}B-JA\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial F^{(e)}\left(\bar{A}\right)}{\partial A_i}=\iint_e\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\int_0^B\gamma B\mathrm{d}B-J\bar{A}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_e\frac{\partial}{\partial B}\left(\int_0^B\gamma B\mathrm{d}B\right)\frac{\partial B}{\partial A_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial}{\partial A_i}\iint_e J\bar{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_e\gamma B\frac{1}{2B}\left[2\frac{\partial\bar{A}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\frac{\partial\bar{A}}{\partial x}\right)+2\frac{\partial\bar{A}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\frac{\partial\bar{A}}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_e JN_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $R_i^{(e)} = \iint_e J N_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y$　可得

$$\frac{\partial F^{(\mathrm{e})}\left(\overline{A}\right)}{\partial A_{\mathrm{i}}} = \frac{\gamma}{4\Delta}\left[\left(b_i^2 + c_i^2\right)A_i + \left(b_i b_j + c_i c_j\right)A_j + \left(b_i c_m + c_i c_m\right)A_m\right] - R_i^{(e)}$$

同理

$$\frac{\partial F^{(\mathrm{e})}\left(\overline{A}\right)}{\partial A_j} = \frac{\gamma}{4\Delta}\left[\left(b_j b_i + c_j c_i\right)A_i + \left(b_j^2 + c_j^2\right)A_j + \left(b_j b_m + c_j c_m\right)A_m\right] - R_j^{(e)}$$

$$\frac{\partial F^{(\mathrm{e})}\left(\overline{A}\right)}{\partial A_m} = \frac{\gamma}{4\Delta}\left[\left(b_m b_i + c_m c_i\right)A_i + \left(b_m b_j + c_m c_j\right)A_j + \left(b_m^2 + c_m^2\right)A_m\right] - R_m^{(e)}$$

## 3.3.3 $\mu$ 不等于常数时的有限元方程组

$$
\begin{bmatrix} \vdots \\ \dfrac{\partial F^{(e)}(\bar{A})}{\partial A_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F^{(e)}(\bar{A})}{\partial A_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F^{(e)}(\bar{A})}{\partial A_m} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{ii}^{(e)} & \cdots & K_{ij}^{(e)} & \cdots & K_{im}^{(e)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{ji}^{(e)} & \cdots & K_{jj}^{(e)} & \cdots & K_{jm}^{(e)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{mi}^{(e)} & \cdots & K_{mj}^{(e)} & \cdots & K_{mm}^{(e)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vdots \\ R_i^{(e)} \\ \vdots \\ R_j^{(e)} \\ \vdots \\ R_m^{(e)} \\ \vdots \end{bmatrix} = 0
$$

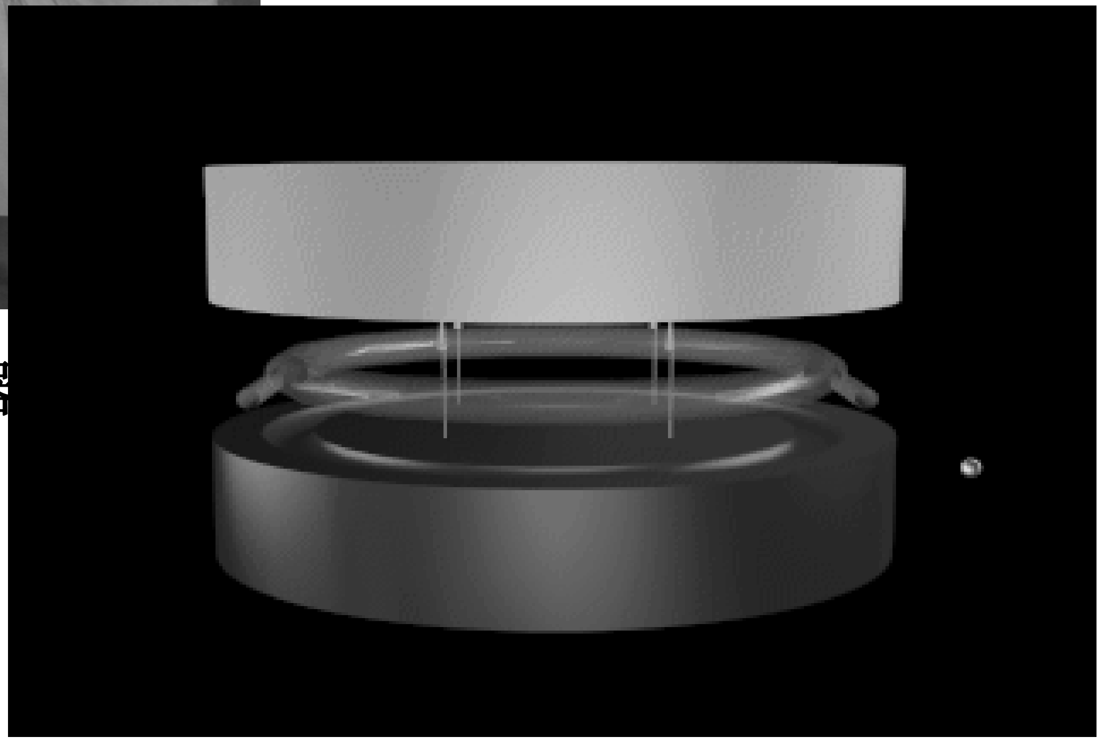
总体合成后得： $\boldsymbol{K}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{R} = 0$ 其中： $\boldsymbol{K} = \sum_{\boldsymbol{e}=1}^{\boldsymbol{N_e}} \boldsymbol{K}^{(e)}$ $\boldsymbol{R} = \sum_{\boldsymbol{e}=1}^{\boldsymbol{N_e}} \boldsymbol{R}^{(e)}$

（非线性方程组）

## 3.4 轴对称场中泊松方程的有限元方程组

- 分析方法和步骤与平面恒定磁场计算时相同，只是在偏微分方程的形式、泛函的形式以及单元的“贡献”的算式上与平面恒定磁场有所不同。


我国第一台回旋加速器



电子感应加速器示意图

## 3.4.1 泊松方程的等价变分问题

研究对象：圆柱坐标系，**(*r*,*z*)** 平面上的轴对称恒定磁场。

线性媒质：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2}+\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r}\right)=-\dfrac{J_\theta}{\gamma} \\
A_\theta\Big|_{L_1}=A_{\theta_0} \\
\left.\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial n}\right|_{L_2}=-\dfrac{H_t}{\gamma}
\end{cases}
$$

非线性媒质：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\gamma\dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\gamma}{r}\dfrac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r}\right)=-J_\theta \\
A_\theta\Big|_{L_1}=A_{\theta_0} \\
\left.\dfrac{\gamma}{r}\dfrac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial n}\right|_{L_2}=-H_t
\end{cases}
$$

- 思路：将轴对称恒定磁场的偏微分方程化为与平面恒定磁场相同的形式！

对于非线性媒质：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\gamma \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\gamma}{r}\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r}\right) = -J_\theta \\ A_\theta\big|_{L_1} = A_{\theta_0} \\ \dfrac{\gamma}{r}\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial n}\Big|_{L_2} = -H_t \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\gamma' = \frac{\gamma}{r}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\gamma' \dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\gamma' \dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r}\right) = -J_\theta \\ rA_\theta\big|_{L_1} = rA_{\theta_0} \\ \gamma' \dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial n}\Big|_{L_2} = -H_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\gamma' \dfrac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\gamma' \dfrac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r}\right) = -J_\theta \\ rA_\theta \Big|_{L_1} = rA_{\theta_0} \\ \gamma' \dfrac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial n}\Bigg|_{L_2} = -H_t \end{cases}$$

- 将 $rA_\theta$ 作为求解量，与平面恒定磁场的方程具有同样形式，只是 $\gamma'$ 是坐标的函数，但在 $\gamma'$ 为变数条件下，变分原理同样成立！

对于二类齐次边界条件，对应变分问题：

$$\begin{cases} F(u) = \iint_D \left( \int_0^C \gamma' C \mathrm{d}C - uJ_\theta \right) \mathrm{d}r\mathrm{d}z = F_{\min} \\ u\big|_{L_1} = u_0 \end{cases} \tag{3.114}$$

式中 $u = rA_\theta$，

$$C = \sqrt{\left( \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} \right)^2} = \sqrt{(-rB_r)^2 + (rB_z)^2} = rB$$

- 式 **(3.114)** 是在非线性条件下得到的，它也适用于线性情况。

## 3.4.2 等价变分问题离散化

- 思路：在分析平面磁场的基础上进行轴对称场分析。
- 进行剖分和插值，只要将式 **(3.43)** 中的 $x$ 用 $r$ 替代，$y$ 用 $z$ 替代，便变成 $r$ - $z$ 轴对称面上的基函数。

三节点三角形的基函数为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{N}_i(r,z)=\dfrac{1}{2\Delta}(a_i+b_ir+c_iz) \\ \boldsymbol{N}_j(r,z)=\dfrac{1}{2\Delta}(a_j+b_jr+c_jz) \\ \boldsymbol{N}_m(r,z)=\dfrac{1}{2\Delta}(a_m+b_mr+c_mz) \end{cases}$$

- 对于每个三角形单元， $\gamma$ 近似做为常数处理：

$$F^{(\mathrm{e})}(\bar{u})=\iint_e\left(\int_0^C\gamma C\mathrm{d}C\frac{1}{r}-\bar{u}J_\theta\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$=\iint_e\left(\gamma\frac{C^2}{2}\frac{1}{r}-\bar{u}J_\theta\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$=\iint_e\left[\frac{\gamma}{2r}\left(\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2\right)-\bar{u}J_\theta\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$\bar{u}=N_iu_i+N_ju_j+N_mu_m \Longrightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial u_i}\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right)=\dfrac{b_i}{2\Delta}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial u_i}\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)=\dfrac{c_i}{2\Delta}\end{cases}$$

$$\frac{\partial F^{(e)}(\overline{u})}{\partial u_i}$$

$$=\iint_e \frac{\gamma}{r}\left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial r}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial r}\right)+\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)-J_\theta\frac{\partial \overline{u}}{\partial u_i}\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$=\iint_e \frac{\gamma}{4r\Delta^2}\left[(b_iu_i+b_ju_j+b_mu_m)b_i+(c_iu_i+c_ju_j+c_mu_m)c_i\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$-\iint J_\theta N_i\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

同理可求出 $\frac{\partial F^{(e)}(\overline{u})}{\partial u_j}$ 和 $\frac{\partial F^{(e)}(\overline{u})}{\partial u_m}$ 对应的表达式！

讨论：与平面恒定磁场推导公式的不同？

$$\iint_e \frac{1}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \frac{1}{r'}\iint \mathrm{d}r\mathrm{d}z = \frac{1}{r'}\Delta$$

$$\frac{1}{r'} \approx \frac{2}{3}\left(\frac{1}{r_j + r_m} + \frac{1}{r_m + r_i} + \frac{1}{r_i + r_j}\right)$$

$$\frac{\partial F^{(e)}(\overline{u})}{\partial u_i}$$

$$= \frac{\gamma}{4\Delta r'}\left[\left(b_i^2 + c_i^2\right)u_i + \left(b_i b_j + c_i c_j\right)u_j + \left(b_i b_m + c_i c_m\right)u_m\right] - \frac{J_\theta \Delta}{3}$$

$$= K_{ii}u_i + K_{ij}u_j + K_{im}u_m - R_i^{(e)}$$

$$\int_0^1\int_0^{1-N_i}\frac{\mathrm{d}N_i\mathrm{d}N_j}{r_iN_i+r_jN_j+r_m\left(1-N_i-N_j\right)}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{r_j-r_m}\mathrm{In}\left[\frac{r_iN_i+r_j\left(1-N_i\right)}{r_iN_i+r_m\left(1-N_i\right)}\right]\mathrm{d}N_i$$

$$\int_0^{1-N_i}\frac{\mathrm{d}N_j}{r_iN_i+r_jN_j+r_m\left(1-N_i-N_j\right)}$$

$$=\left.\frac{\mathrm{In}\left[r_iN_i+r_jN_j+r_m\left(1-N_i-N_j\right)\right]}{r_j-r_m}\right|_0^{1-N_i}$$

$$=\frac{\mathrm{In}\left[r_iN_i+r_j\left(1-N_i\right)\right]-\mathrm{In}\left[r_iN_i+r_m\left(1-N_i\right)\right]}{r_j-r_m}$$

$$=\frac{1}{r_j-r_m}\mathrm{In}\left[\frac{r_iN_i+r_j\left(1-N_i\right)}{r_iN_i+r_m\left(1-N_i\right)}\right]$$

$$\int_0^1\mathrm{In}\left[r_iN_i+r_j\left(1-N_i\right)\right]\mathrm{d}N_i$$

$$=\left\{N_i\mathrm{In}\left[r_iN_i+r_j\left(1-N_i\right)\right]\right\}\Big|_0^1-\int_0^1N_i\frac{r_i-r_j}{r_iN_i+r_j\left(1-N_i\right)}\mathrm{d}N_i$$

$$=\mathrm{In}r_i-\left(r_i-r_j\right)\underline{\underline{\int_0^1\frac{N_i}{\left(r_i-r_j\right)N_i+r_j}\mathrm{d}N_i}}$$

$$=\mathrm{In}r_i-1+\frac{r_j}{r_i-r_j}\left(\mathrm{In}r_i-\mathrm{In}r_j\right)$$

$$\int_0^1\mathrm{In}\left[r_iN_i+r_m\left(1-N_i\right)\right]\mathrm{d}N_i$$

$$=\mathrm{In}r_i-1+\frac{r_m}{r_i-r_m}\left(\mathrm{In}r_i-\mathrm{In}r_m\right)$$

$$\int_0^1\frac{N_i}{\left(r_i-r_j\right)N_i+r_j}\mathrm{d}N_i$$

$$=\frac{1}{r_i-r_j}\int_0^1\frac{N_i\left(r_i-r_j\right)+r_j-r_j}{\left(r_i-r_j\right)N_i+r_j}\mathrm{d}N_i$$

$$=\frac{1}{r_i-r_j}\left[\int_0^1\mathrm{d}N_i+\int_0^1\frac{-r_j}{\left(r_i-r_j\right)N_i+r_j}\mathrm{d}N_i\right]$$

$$=\frac{1}{r_i-r_j}\left\{1+\left\{\frac{-r_j}{r_i-r_j}\mathrm{In}\left[\left(r_i-r_j\right)N_i+r_j\right]\right\}\Big|_0^1\right\}$$

$$=\frac{1}{r_i-r_j}\left\{1+\frac{-r_j}{r_i-r_j}\left(\mathrm{In}r_i-\mathrm{In}r_j\right)\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^1\int_0^{1-N_i}\frac{\mathrm{d}N_i\mathrm{d}N_j}{r_iN_i+r_jN_j+r_m\left(1-N_i-N_j\right)}$$

$$=\frac{1}{r_j-r_m}\left[\frac{r_j}{r_i-r_j}\mathrm{In}\frac{r_i}{r_j}-\frac{r_m}{r_i-r_m}\mathrm{In}\frac{r_i}{r_m}\right]$$

$$=\frac{r_j\left(r_i-r_m\right)\mathrm{In}\frac{r_i}{r_j}-r_m\left(r_i-r_j\right)\mathrm{In}\frac{r_i}{r_m}}{\left(r_i-r_j\right)\left(r_j-r_m\right)\left(r_i-r_m\right)}$$

同理可得
$$\frac{\partial F^{(e)}(\overline{u})}{\partial u_j} = K_{ji}u_i + K_{jj}u_j + K_{jm}u_m - R_j^{(e)}$$
$$\frac{\partial F^{(e)}(\overline{u})}{\partial u_m} = K_{mi}u_i + K_{mj}u_j + K_{mm}u_m - R_m^{(e)}$$

式中

$$\begin{cases} K_{ii} = \dfrac{\gamma}{4\Delta r'}\left[b_i^2 + c_i^2\right] \\ K_{jj} = \dfrac{\gamma}{4\Delta r'}\left[b_j^2 + c_j^2\right] \\ K_{mm} = \dfrac{\gamma}{4\Delta r'}\left[b_m^2 + c_m^2\right] \\ K_{ij} = K_{ji} = \dfrac{\gamma}{4\Delta r'}\left[b_i b_j + c_i c_j\right] \\ K_{jm} = K_{mj} = \dfrac{\gamma}{4\Delta r'}\left[b_j b_m + c_j c_m\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{e})} = \dfrac{\Delta}{3} J_\theta \\ R_{\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{e})} = \dfrac{\Delta}{3} J_\theta \\ R_{\boldsymbol{m}}^{(\boldsymbol{e})} = \dfrac{\Delta}{3} J_\theta \end{cases}$$

总体合成，并导出有限元方程组为：

$$\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}$$

总结：用 $rA_\theta$ 求解时，轴对称恒定磁场导出有限元方程组的基本分析方法，与平面恒定磁场是相同的，只是单元分析结果中的系数中多除了$r'$！

## 3.4.2 等价变分问题离散化

- 在三角形单元中 的 $B$ 值：

$$B=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(\overline{rA_\theta})}{\partial r}e_z-\frac{\partial(\overline{rA_\theta})}{\partial z}e_r\right)$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}e_z-\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}e_r\right)$$

$$=\frac{1}{r}\frac{1}{2\Delta}\left[\left(b_iu_i+b_ju_j+b_mu_m\right)e_z-\left(c_iu_i+c_ju_j+c_mu_m\right)e_r\right]$$

可取三角形重心处的 $B$ 值作为单元中的平均值：

$$B=\frac{1}{2\Delta r'}\left[\left(b_iu_i+b_ju_j+b_mu_m\right)e_z-\left(c_iu_i+c_ju_j+c_mu_m\right)e_r\right]$$

## 3.4.3 对称轴的处理

$$\iint_e \frac{1}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$ 在对称轴 $r$=0 处无意义！

- 若部分边界落在对称轴上，或很靠近对称轴时：

$$r' = \frac{1}{3}\left(r_i + r_j + r_m\right)$$

- 对于落在对称轴上的节点：

$$u = rA_\theta = 0$$

为第一类齐次边界条件。

# 3.5 定态时变场的有限元分析

- 波导问题
- 谐振腔问题

## 3.5.1 波导问题的有限元分析

波导问题的求解均可归结为求解相应的场的纵向分量***H*z**或 ***E*z**（用 *Φ*标记）所描述的定解问题：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+k^2\Phi=0$$

对 **TM** 波有： $\Phi=E_z$ 对 **TE** 波有： $\Phi=H_z$

$$\Phi\big|_L=0 \qquad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_L=0$$

对应的等价变分问题：

$$F(\Phi)=\frac{1}{2}\iint_{S}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2-k^2\Phi^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=F_{\min}$$

$$\bar{\Phi}(x,y)=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\Phi}^{(e)}=\begin{bmatrix}N_i & N_j & N_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_i\\ \Phi_j\\ \Phi_m\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$F^{(e)}(\Phi)\approx F^{(e)}(\bar{\Phi})=\frac{1}{2}\iint_e\left[\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}\right)^2-k^2\bar{\Phi}^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_e\left(\frac{1}{2\Delta}\boldsymbol{\Phi}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\frac{1}{2\Delta}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{(e)}+\frac{1}{2\Delta}\boldsymbol{\Phi}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{c}\frac{1}{2\Delta}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{(e)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\frac{k^2}{2}\int_e\left(\boldsymbol{N}\boldsymbol{\Phi}^{(e)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{N}\boldsymbol{\Phi}^{(e)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^{(e)}\boldsymbol{\Phi}^{(e)}-\frac{k^2}{2}\boldsymbol{\Phi}^{(e)\mathrm{T}}\boldsymbol{t}^{(e)}\boldsymbol{\Phi}^{(e)}$$

其中：

$$k_{st}^{(e)} = k_{ts}^{(e)} = \frac{1}{4\Delta}\left(b_s b_t + c_s c_t\right) \qquad s,t = i,j,m$$

$$\boldsymbol{t}^{(e)} = \int_e \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} t_{ii}^{(e)} & t_{ij}^{(e)} & t_{im}^{(e)} \\ t_{ji}^{(e)} & t_{jj}^{(e)} & t_{jm}^{(e)} \\ t_{mi}^{(e)} & t_{mj}^{(e)} & t_{mm}^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$t_{st}^{(e)} = t_{ts}^{(e)} = \int_e N_s N_t \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\Delta}{12}\left(1+\delta_{st}\right) \qquad s,t = i,j,m$$

总体编号：

$\boldsymbol{\Phi}^{(e)}$、$\boldsymbol{k}^{(e)}$、$\boldsymbol{t}^{(e)}$ $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{\Phi}^{(e)}$、$\boldsymbol{K}^{(e)}$、$\boldsymbol{T}^{(e)}$

$$F^{(e)}\left(\bar{\Phi}\right)=\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{(e)}\bar{\boldsymbol{\Phi}}-\frac{k^2}{2}\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{(e)}\bar{\boldsymbol{\Phi}}$$

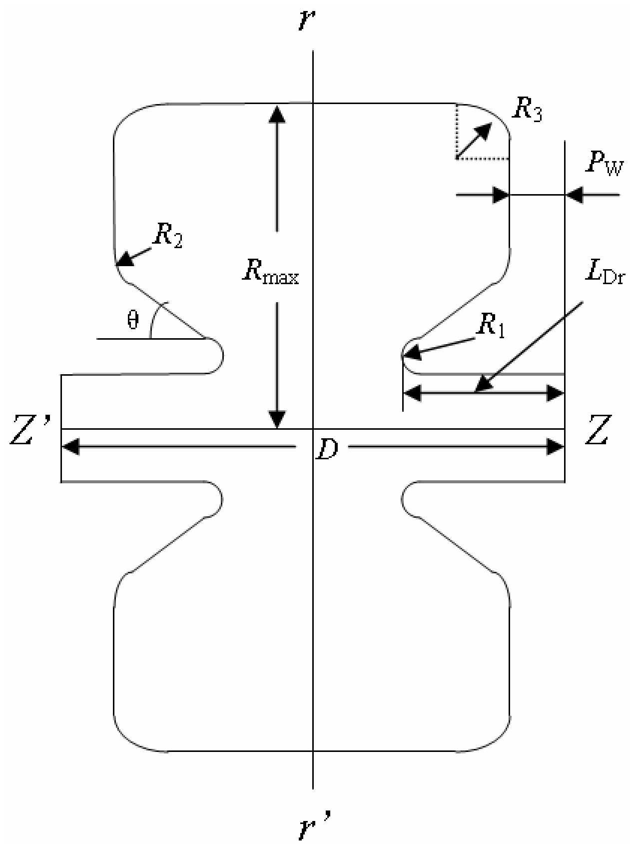
总体合成：

$$F\left(\Phi\right)\approx\sum_{e=1}^{N_e}F^{(e)}\left(\bar{\Phi}\right)=\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{\Phi}}-\frac{k^2}{2}\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\Phi}}$$

形成有限元方程组：

$$\boldsymbol{K\Phi}=k^2\boldsymbol{T\Phi}$$

## 3.5.2 谐振腔问题的有限元分析




**$TM_{010}$**模式：磁场 ***H*** 只有辐向 ***Φ***分量。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_{\Phi}}{\partial r}\right)-\frac{H_{\Phi}}{r^{2}}+\frac{\partial^{2} H_{\Phi}}{\partial z^{2}}+k^{2}H_{\Phi}=0$$

对应变分问题：

$$F(H_{\Phi})=\iint_{D} r\left[\left(\frac{\partial H_{\Phi}}{\partial z}\right)^{2}+\left(\frac{\partial H_{\Phi}}{\partial r}+\frac{H_{\Phi}}{r}\right)^{2}-k^{2}H_{\Phi}^{2}\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}z=F_{\min}$$

## 3.5.2 谐振腔问题的有限元分析

$$F(H_\Phi)=\iint_D r\left[\left(\frac{\partial H_\Phi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial H_\Phi}{\partial r}+\frac{H_\Phi}{r}\right)^2-k^2H_\Phi^2\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}z=F_{\min}$$

$$\bar{H}_{\boldsymbol{\Phi}}=N_iH_{\Phi i}+N_jH_{\Phi j}+N_mH_{\Phi m}$$

$$\frac{\partial F\left(\bar{H}_\Phi\right)}{\partial H_{\Phi P}}=\sum_{e=1}^{N_e}\frac{\partial F^{(e)}\left(\bar{H}_\Phi\right)}{\partial H_{\Phi P}}$$

$$=\sum_{e=1}^{N_e}\frac{\partial}{\partial H_{\Phi P}}\iint_e r\left[\left(\frac{\partial H_\Phi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial H_\Phi}{\partial r}+\frac{H_\Phi}{r}\right)^2-k^2H_\Phi^2\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}z=0$$

$$\sum_{e=1}^{N_e}\iint_e r\left[\frac{\partial H_\Phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial H_{\Phi P}}\left(\frac{\partial H_\Phi}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial H_\Phi}{\partial r}+\frac{H_\Phi}{r}\right)\frac{\partial}{\partial H_{\Phi P}}\left(\frac{\partial H_\Phi}{\partial r}+\frac{H_\Phi}{r}\right)\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$=\sum_{e=1}^{N_e}k^2\iint rH_\Phi\frac{\partial H_\Phi}{\partial H_{\Phi P}}\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

形成有限元方程组：

$$\boldsymbol{KH} = k^2\boldsymbol{TH}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nn} \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} H_{\Phi 1} \\ H_{\Phi 2} \\ \vdots \\ H_{\Phi n} \end{bmatrix}$$

在求 ***K***、***T*** 过程中可进行近似：

$$\begin{cases} r \approx r_c = (r_i + r_j + r_m)/3 \\ z \approx z_c = (z_i + z_j + z_m)/3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$(a_k + b_k r + c_k z)/2 \approx \left(a_k + b_k r_c + c_k z_c\right)/2 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\Delta$$

$$\begin{cases} K_{l,kt}^{(e)} = \dfrac{r_\mathrm{c}}{\Delta_\mathrm{t}}\left[c_l c_k + \left(b_l + \dfrac{2\Delta_t}{3r_c}\right)\left(b_k + \dfrac{2\Delta_\mathrm{t}}{3r_c}\right)\right] \quad l,k = i,j,m \\ \mathrm{T}_{l,kt}^{(e)} = \dfrac{4}{9} r_\mathrm{c} \Delta_\mathrm{t} \end{cases}$$

# ● 讨论：

➢ $\gamma$ =常数和 $\gamma \neq$常数两种情况，有限元方程组的系数矩阵在形式上和本质上有何异同？在解法上有何原则区别？有何联系？

➢ 轴对称恒定磁场的有限元方程组如何推导？（用标量磁位求解）

- 本节无作业。