第 1 次习题课题目

第 1 部分 课堂内容回顾

1. n **维欧氏空间**

(1) **基本概念:** δ-邻域, 去心 δ-邻域, 内点, 外点, 边界点, **极限点**, 开集, 闭集, 内部, 外部, 边界, 闭包.

(2) **开集与闭集的性质:**

(a) $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ 既为开集, 也为闭集.

(b) 任意开球均为开集, 任意闭球均为闭集.

(c) $\mathbb{R}^n$ 中的集合为开集当且仅当它为开球的并.

(d) 任意多个开集的并是开集, 任意多个闭集的交是闭集.

(e) 有限多个开集的交为开集, 有限多个闭集的并为闭集.

(3) **折线连通:** 连通集, 非连通集, 开区域, 闭区域.

(4) n **维欧氏空间** $\mathbb{R}^n$ **中的点列极限:**

(a) $\mathbb{R}^n$ 中点列收敛当且仅当其坐标分量组成的数列均收敛.

(b) $\mathbb{R}^n$ 中点列为 Cauchy 列当且仅当其坐标分量组成的数列为 Cauchy 列.

(c) $\mathbb{R}^n$ 完备, 也即 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 列收敛.

(d) $\mathbb{R}^n$ 中的子集为闭集当且仅当该集中的任意收敛点列的极限属于该集合.

(e) **闭集套定理:** $\mathbb{R}^n$ 中的直径趋于零的递降的闭集列的交集为单点集.

(f) **列紧性定理:** $\mathbb{R}^n$ 中有界点列必有收敛子列.

2. 多元函数的极限

(1) **多元向量值函数的定义与性质:**

(a) **多元向量值函数的运算:** 线性组合; 向量值函数与数量值函数之间的乘、除; 向量值函数的复合运算.

(b) **多元向量值函数的表示:** 在 $\mathbb{R}^m$ 中取值的 n 元向量值函数等同于 m 个 n 元数量值函数.

(2) **多元函数的极限及其性质:**

(a) **函数极限的定义:** 称 X 在 Ω 内趋于 X_0 时向量值函数 $\mathbf{f}(X)$ 以 A 为极限, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall X \in \Omega$, 当 $0 < \|X - X_0\|_n < \delta$ 时, 我们有

$$\|\mathbf{f}(X) - A\|_m < \varepsilon.$$

(b) 多元向量值函数极限存在当且仅当它的每个坐标分量函数的极限存在.

(c) 多元向量值函数极限若存在, 则唯一.

(d) 多元数量值函数极限满足保序性、保号性、夹逼原理、四则运算.

(e) 多元向量值函数满足复合极限法则、Cauchy 准则.

(f) 点列极限与多元向量值函数极限之间的关系.

(g) **多元函数极限的计算方法:** 通过复合函数极限法则 (变量替换)、四则运算法则、夹逼原理等方法转化为单变量的情形.

(h) **二重极限与累次极限:** 若二重极限与某个累次极限同时收敛, 则二者必相等; 若两个累次极限均收敛但不相等, 则二重极限发散.

3. 多元连续函数的性质

(1) **多元连续函数:**

(a) 多元连续函数的定义, 连续函数空间: $\mathscr{C}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ 和 $\mathscr{C}(\Omega)$.

(b) 多元数量值连续函数经过四则运算后仍为连续函数.

(c) 多元向量值连续函数经过加、减、数乘与复合运算后仍连续.

(d) 多变元的初等函数在 **其定义区域内** 连续.

(e) **弧连通集:** 任意两点可用连续曲线连接的集合.

(2) **多元连续函数的整体性质:**

(a) **最值定理:** 定义在有界闭集上的数量值连续函数有最大值和最小值.

(b) **连通性定理:** 定义在弧连通集上的向量值连续函数的像集为弧连通集.

(c) **介值定理:** 定义在弧连通集上的数量值连续函数满足介值性质.

第 2 部分 习题课题目解答

1. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 定义 $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. 求证:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=0,$$

而二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

证明: $\forall y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 由题设知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$, 进而可得 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$, 再由对称性可知 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$. 又注意到

$$\lim_{x\to 0}f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{x^2\cdot x^2}=1,\quad \lim_{x\to 0}f(x,0)=0,$$

则由复合函数极限法则可知二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$,

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\log(x^2+y^2)$,

(3) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ x^2+y\neq 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$,

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}$.

解: (1) 由复合极限法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}} &\xlongequal{u=x+y-1} \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{u+2}{u}}\\ &= e^{\lim\limits_{u\to 0}(1+\frac{2}{u})\log(1+u)}\\ &= e^{\lim\limits_{u\to 0}(1+\frac{2}{u})\cdot u}=e^2.\end{aligned}$$

(2) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 我们有

$$\begin{aligned}|(x+y)\log(x^2+y^2)| &\leqslant (|x|+|y|)\cdot|\log(x^2+y^2))|\\ &\leqslant \sqrt{2(x^2+y^2)}\cdot|\log(x^2+y^2))|.\end{aligned}$$

而由复合函数极限法则可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{2(x^2+y^2)}\log(x^2+y^2)\xlongequal{\rho=\sqrt{x^2+y^2}}\lim_{\rho\to 0}\sqrt{2}\rho\log\rho^2=0,$$

于是由夹逼原理可得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\log(x^2+y^2)=0$.

(3) 因 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+(x^4-x^2)^3}{x^2+(x^4-x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x^3(x^2-1)^3}{x}=\infty$, 而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+(x^2)^3}{x^2+x^2}=0$, 于是由复合函数极限法则可知所求极限不存在.

(4) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 我们均有 $0<\frac{(xy)^2}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{4}(x^2+y^2)$, 于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(xy)^2}{x^2+y^2}=0$, 进而可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(xy)}{\frac{1}{2}(xy)^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}(xy)^2}{x^2+y^2}=0.$$

3. 判断下列函数在原点 $(0,0)$ 处的连续性:

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(2) $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

解: (1) $\forall (x,y)\neq(0,0)$, 由 Cauchy 不等式可知

$$\begin{aligned}|\sin(x^3+y^3)| &\leqslant |x^3+y^3|\leqslant|x|^3+|y|^3\\ &\leqslant (x^2+y^2)(|x|+|y|)\leqslant\sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

于是 $0\leqslant\frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{2(x^2+y^2)}$, 进而由夹闭原理可知 f 在原点处连续.

(2) 因 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\frac{1}{k},\frac{1}{k})=1\neq f(0,0)$, 由复合函数极限法则知 f 在原点间断.

(3) $\forall (x,y)\neq(0,0)$, 由算术-几何平均不等式可知,

$$0<\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\leqslant\frac{\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}},$$

于是由夹闭原理可知 f 在原点处连续.

(4) 因 $\lim\limits_{y\to\infty}f(y^2,y)=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$, 由复合函数极限法则知 f 在原点间断.

4. 若 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^2)$ 且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$, 求证: f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值点.

证明: 由函数极限的定义知 $\exists R>0$ 使得 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 当 $\sqrt{x^2+y^2}>R$ 时, 均有 $f(x,y)>f(0,0)$. 定义 $B=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$, 则 B 为有界闭集. 又 f 连续, 由最值定理知 f 在 B 上有最小值 m, 相应最小值点记作 (x_0,y_0). $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 若 $(x,y)\in B$, 由 m 的定义可知 $f(x,y)\geqslant m$. 若 $(x,y)\notin B$, 则

$$f(x,y)>f(0,0)\geqslant m.$$

故 m 为 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值. 因此所证结论成立.

5. 假设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为连续函数且满足下列性质:

(1) $\forall X\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$, 均有 $f(X)>0$,

(2) $\exists k>0$ 使得 $\forall c>0$ 以及 $\forall X\in\mathbb{R}^n$, 均有 $f(cX)=c^kf(X)$,

求证: 存在 $a,b>0$ 使得 $\forall X\in\mathbb{R}^n$, 均有 $a\|X\|^k\leqslant f(X)\leqslant b\|X\|^k$.

证明: 令 $S=\{X\in\mathbb{R}^n:\|X\|=1\}$, 则 S 为有界闭集. 又函数 f 连续, 因此在 S 上有最小值和最大值, 记作 a,b. 由题设 (1) 可知 $b\geqslant a>0$.

$\forall X\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$, 由题设 (2) 可得

$$\begin{aligned} f(X) &= \|X\|^kf\Big(\frac{X}{\|X\|}\Big)\geqslant a\|X\|^k, \\ f(X) &= \|X\|^kf\Big(\frac{X}{\|X\|}\Big)\leqslant b\|X\|^k, \end{aligned}$$

即 $a\|X\|^k\leqslant f(X)\leqslant b\|X\|^k$. 由连续性知该不等式在 $X=\mathbf{0}$ 也成立. 得证.

6. 设 $q\in(0,1)$ 而向量值函数 $\vec{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 使得 $\forall X,Y\in\mathbb{R}^n$, 均有

$$\|\vec{f}(X)-\vec{f}(Y)\|\leqslant q\|X-Y\|.$$

求证: $\exists!A\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\vec{f}(A)=A$.

证明: **唯一性.** 设 $\exists A_1,A_2\in\mathbb{R}^n$ 使 $\vec{f}(A_1)=A_1$, $\vec{f}(A_2)=A_2$, 则我们有

$$\|A_1-A_2\|=\|\vec{f}(A_1)-\vec{f}(A_2)\|\leqslant q\|A_1-A_2\|.$$

但 $0<q<1$, 由此立刻可得 $A_1=A_2$.

存在性. 任取 $X_1\in\mathbb{R}^n$. $\forall k\geqslant1$, 递归定义 $X_{k+1}=\vec{f}(X_k)$. 则 $\forall k\geqslant2$,

$$\|X_{k+1}-X_k\|=\|\vec{f}(X_k)-\vec{f}(X_{k-1})\|\leqslant q\|X_k-X_{k-1}\|,$$

于是 $\forall k\geqslant1$, 均有 $\|X_{k+1}-X_k\|\leqslant q^{k-1}\|X_2-X_1\|$, 进而知 $\{X_k\}$ 为 Cauchy 序列, 从而收敛. 设其极限记 A. 则 $\forall k\geqslant1$, 我们有

$$\|X_{k+1}-\vec{f}(A)\|=\|\vec{f}(X_k)-\vec{f}(A)\|\leqslant q\|X_k-A\|.$$

由夹逼原理知 $\vec{f}(A)$ 为 $\{X_{k+1}\}$ 的极限, 从而也为 $\{X_k\}$ 的极限, 故 $\vec{f}(A)=A$.

7. 设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 为非空集合, 而 $X\in\mathbb{R}^n$. 定义

$$\rho(X,\Omega)=\inf_{Y\in\Omega}\|X-Y\|,$$

并称之为点 X 到集合 Ω 的距离.

(1) 给定 Ω, 求证: $\rho(X,\Omega)$ 是以 $X\in\mathbb{R}^n$ 为变量的 n 元连续函数.

(2) 给定 $X\in\mathbb{R}^n$, 而 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集, 求证: $\exists X_0\in\Omega$ 使得

$$\rho(X,\Omega)=\|X-X_0\|.$$

证明: (1) 固定 $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$. 则 $\forall Y \in \Omega$, 我们有

$$\rho(X_1, \Omega) \leqslant \|X_1 - Y\| \leqslant \|X_1 - X_2\| + \|X_2 - Y\|.$$

对 $Y \in \Omega$ 取下确界可得 $\rho(X_1, \Omega) \leqslant \|X_1 - X_2\| + \rho(X_2, \Omega)$, 也即

$$\rho(X_1, \Omega) - \rho(X_2, \Omega) \leqslant \|X_1 - X_2\|,$$

进而由对称性可知 $\rho(X_2, \Omega) - \rho(X_1, \Omega) \leqslant \|X_1 - X_2\|$, 从而我们有

$$|\rho(X_1, \Omega) - \rho(X_2, \Omega)| \leqslant \|X_1 - X_2\|.$$

于是 $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\forall \varepsilon > 0$, 若令 $\delta = \varepsilon$, 则 $\forall X \in B(X_0, \delta)$, 我们有

$$|\rho(X, \Omega) - \rho(X_0, \Omega)| \leqslant \|X - X_0\| < \varepsilon,$$

故 $\rho(X, \Omega)$ 为关于变量 X 的连续函数.

(2) 固定 $X \in \mathbb{R}^n$. $\forall Y \in \Omega$, 令 $F(Y) = \|X - Y\|$.

$\forall Y_1, Y_2 \in \Omega$, 由三角不等式可知 $\|X - Y_1\| \leqslant \|Y_1 - Y_2\| + \|X - Y_2\|$. 也即

$$\|X - Y_1\| - \|X - Y_2\| \leqslant \|Y_1 - Y_2\|.$$

再由对称性可得 $\|X - Y_2\| - \|X - Y_1\| \leqslant \|Y_1 - Y_2\|$. 综合上述两个不等式可知

$$|F(Y_1) - F(Y_2)| \leqslant \|Y_1 - Y_2\|.$$

于是 F 为连续函数. 由于 Ω 为有界闭集, 由最值定理知, $\exists X_0 \in \Omega$ 使得

$$\rho(X, \Omega) = \inf_{Y \in \Omega} F(Y) = F(X_0) = \|X - X_0\|.$$

8. 设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, 而 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空闭集. 求证: $\exists Y_0 \in \Omega$ 使得

$$\inf_{Y \in \Omega} \|X_0 - Y\| = \|X_0 - Y_0\|.$$

证明: 将等式左边记作 R. $\forall Y \in \Omega$, 令 $f(Y) = \|X_0 - Y\|$. 则 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ 且

$$R = \inf_{Y \in \Omega} f(Y) = \inf_{Y \in \bar{B}(X_0, R+1) \cap \Omega} f(Y).$$

但 $\bar{B}(X_0, R+1) \cap \Omega$ 为有界闭集, 于是由最值定理可知, $\exists Y_0 \in \bar{B}(X_0, R+1) \cap \Omega$ 使得 $R = \|X_0 - Y_0\|$.

9. 设 $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集合. 定义

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \inf_{\substack{X \in \Omega_1 \\ Y \in \Omega_2}} \|X - Y\|,$$

并将之称为集合 Ω_1, Ω_2 之间的距离. 若 Ω_1 为有界闭集而 Ω_2 为闭集, 求证: $\exists X_0 \in \Omega_1$, $Y_0 \in \Omega$ 使得 $\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \|X_0 - Y_0\|$.

证明: 首先证明 $\rho(\Omega_1,\Omega_2)=\inf\limits_{\substack{X\in\Omega_1\\ Y\in\Omega_2}}\|X-Y\|=\inf\limits_{X\in\Omega_1}\inf\limits_{Y\in\Omega_2}\|X-Y\|$.

$\forall X\in\Omega_1,\ Y\in\Omega_2$, $\rho(\Omega_1,\Omega_2)\leqslant\|X-Y\|$, 故 $\rho(\Omega_1,\Omega_2)\leqslant\rho(X,\Omega_2)$, 于是

$$\rho(\Omega_1,\Omega_2)\leqslant\inf_{X\in\Omega_1}\rho(X,\Omega_2)=\inf_{X_1\in\Omega_1}\inf_{X_2\in\Omega_2}\|X_1-X_2\|.$$

反过来, $\forall X\in\Omega_1,\ Y\in\Omega_2$, 我们有

$$\inf_{X_1\in\Omega_1}\inf_{X_2\in\Omega_2}\|X_1-X_2\|\leqslant\inf_{X_2\in\Omega_2}\|X-X_2\|\leqslant\|X-Y\|.$$

由此立刻可得 $\inf\limits_{X_1\in\Omega_1}\inf\limits_{X_2\in\Omega_2}\|X_1-X_2\|\leqslant\rho(\Omega_1,\Omega_2)$. 于是我们有

$$\rho(\Omega_1,\Omega_2)=\inf_{X_1\in\Omega_1}\inf_{X_2\in\Omega_2}\|X_1-X_2\|=\inf_{X_1\in\Omega_1}\rho(X_1,\Omega_2).$$

由于 $\rho(X_1,\Omega_2)$ 关于 X_1 连续而 Ω_1 为有界闭集, 由最值定理, $\exists X_0\in\Omega_1$ 使得

$$\rho(\Omega_1,\Omega_2)=\rho(X_0,\Omega_2),$$

进而由 Ω_2 为闭集可知, $\exists Y_0\in\Omega_2$ 使得

$$\rho(\Omega_1,\Omega_2)=\rho(X_0,\Omega_2)=\|X_0-Y_0\|.$$