微积分 A (1)

姚家燕

第 20 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

期末考试内容、时间及地点

内容: 第 5、6、7 章

时间: 12 月 29 日星期二下午 14:30–16:30

地点: 六教 6B410、六教 6C300 (分组待定)

重要提示: 考试时需且只需带学生证和文具!

学生证上的照片必须清晰可辨, 否则逐出考场.

千万不要迟到或无故缺考!

考前答疑: 12 月 28 日星期一下午 14:00–20:00

考前答疑地点: 理科楼数学科学系 A 216

第 19 讲回顾: 积分不等式

- 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$ 且
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$
- 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $fg \in \mathscr{R}[a,b]$.
- (Cauchy 不等式) 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则
$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big)^2 \leqslant \Big(\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x\Big).$$
- (Hölder) 若 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, 则
$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \Big(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

第 20 讲

定理 5. (积分第一中值定理)

若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得我们有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明: 令 $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 那么 $m \leqslant f \leqslant M$, 由此可得 $m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$.

由最值定理知 $\operatorname{Im} f = [m, M]$, 故 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 5′. (广义积分第一中值定理) 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, $g \in \mathscr{R}[a,b]$ 且 g 不变号, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 由于 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $fg \in \mathscr{R}[a,b]$. 设 f 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M, m. 又 g 在 $[a,b]$ 上不变号, 不失一般性, 由此我们可以假设 $g \geqslant 0$, 否则考虑 $-g$. 则 $\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x),$$

进而我们就有

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

如果 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 此时 $\forall \xi \in [a,b]$, 所证结论成立. 若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, 则

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant M.$$

由连续函数最值定理与介值定理知, $\exists \xi \in [a,b]$ 使得 $\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} = f(\xi)$. 故所证结论成立.

例 4. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=0$.

证明: $\forall x\geqslant 1$, 定义 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则 f 连续, 从而 $\forall n\geqslant 1$, 由积分中值定理知 $\exists\xi_n\in[n,n+\pi]$ 使得

$$\Big|\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\Big|=\Big|\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\pi\Big|\leqslant\frac{\pi}{\xi_n}\leqslant\frac{\pi}{n},$$

于是由夹逼原理可知所证结论成立.

作业题: 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}}}=1$.

§3. 微积分基本定理

定义 1. 假设 J 为区间, 而 $F, f: J \to \mathbb{R}$ 为函数. 若 F 在 J 上连续, 在 J 的内部可导且 $F' = f$, 则称 F 为 f 的一个原函数.

定理 1. 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$. $\forall x \in [a,b]$, 定义

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

那么 $F \in \mathscr{C}[a,b]$. 如果 f 在点 $x_0 \in [a,b]$ 连续, 那么 F 在点 x_0 处可导且 $F'(x_0) = f(x_0)$.

证明: 由于 f 可积, 则 $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| < +\infty$, 于是 $\forall x, y \in [a,b]$, 我们均有

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$= \left|\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_y^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M|x-y|.$$

从而由夹逼原理可知, $\forall x_0 \in [a,b]$, 我们有

$$\lim_{x\to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0,$$

进而可知函数 F 在 $[a,b]$ 上连续.

假设 f 在点 x_0 处连续, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall t \in [a,b]$, 当 $|t - x_0| < \delta$ 时, $|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是 $\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 均有

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leqslant \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

故 F 在点 x_0 处可导且 $F'(x_0) = f(x_0)$.

注: 若 f 在点 x_0 仅有单侧连续, 则 F 在点 x_0 有相应的单侧导数. 在跳跃间断点处亦如此.

推论 1. 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $F \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$ 并且 $F' = f$, 也即 F 为 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

推论 2. 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $\varphi, \psi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ 可导. $\forall u \in [\alpha,\beta]$, 令 $G(u) = \int_{\psi(u)}^{\varphi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t$. 那么函数 G 可导且 $\forall u \in [\alpha,\beta]$, 我们均有

$$G'(u) = f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u) - f\big(\psi(u)\big)\psi'(u).$$

证明: $\forall u \in [\alpha,\beta]$, 我们有

$$G(u) = \int_a^{\varphi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{\psi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t = F\big(\varphi(u)\big) - F\big(\psi(u)\big).$$

于是由复合函数求导法则可知 G 可导且

$$\begin{aligned} G'(u) &= F'\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u) - F'\big(\psi(u)\big)\psi'(u) \\ &= f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u) - f\big(\psi(u)\big)\psi'(u), \end{aligned}$$

因此所证结论成立.

例 1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sin 3t}{t}\,\mathrm{d}t$.

解: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sin 3t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3.$

作业题: 第 5.3 节第 145 页第 1 题第 (4), (5) 题, 第 2, 3, 4 题, 第 146 页第 5 题, 其中 $x \in \mathbb{R}$.

例 2. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$.

解: $\forall x>0$, 我们有 $\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant x$, 于是由夹逼原理可得知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t=+\infty$, 进而我们由 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t)e^{x^2}}{e^{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t)}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

作业题: 第 5.3 节第 146 页第 8 题第 (3), (4) 题.

例 3. 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, $f(x) > 0$. $\forall x \in [a,b]$, 令 $G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$. 求证: 函数 G 在 $[a,b]$ 上有且仅有一个零点.

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 因而 G 在 $[a,b]$ 上可导, 从而连续. 又 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $f(x) > 0$, 那么

$$G(a) = \int_b^a \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} < 0,\ G(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0,$$

由连续函数介值定理可知 G 在 $[a,b]$ 上有零点. $\forall x \in [a,b]$, $G'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$, 则 G 为严格递增, 从而为单射, 故在 $[a,b]$ 上仅有一个零点.

例 4. 如果 $f:[0,1]\to(0,1)$ 为可积函数, 求证: 存在唯一的 $\xi\in(0,1)$ 使得 $2\xi-\int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

证明: $\forall t\in[0,1]$, 令 $F(t)=2t-\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-1$, 则 $F\in\mathscr{C}[0,1]$. 由严格保序性可得

$$F(1)=1-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (1-f(x))\,\mathrm{d}x>0,$$

而且 $F(0)=-1$, 于是由连续函数介值定理可知 $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $F(\xi)=0$, 即 $2\xi-\int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

与此同时, 对任意 $0 \leqslant s < t \leqslant 1$, 我们还有

$$\begin{aligned}
F(t) - F(s) &= \left(2t - \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right) - \left(2s - \int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_0^t (2 - f(x))\,\mathrm{d}x - \int_0^s (2 - f(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_s^t \big(2 - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant t - s > 0,
\end{aligned}$$

于是 F 为单射, 从而所求函数方程的解唯一.

例 5. 设 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 若\ x\in[0,1) \\ 1, & 若\ x\in[1,2] \end{cases}$. $\forall x\in[0,2]$, 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 计算 F'.

解: 因为 f 在 $[0,2]\setminus\{1\}$ 上连续, 由此立刻可知 $\forall x\in[0,2]\setminus\{1\}$, 我们有 $F'(x)=f(x)$. 而 $x=1$ 为 f 的跳跃间断点, 于是我们有

$$F'_-(1)=f(1-0)=2,\ F'_+(1)=f(1+0)=1,$$

因此函数 F 在点 $x=1$ 处不可导.

作业题: 第 5.3 节第 146 页第 7 题.

命题 1. 有跳跃间断点的函数没有原函数.

证明: 用反证法, 假设函数 f 有原函数且它在点 x_0 跳跃. 不失一般性, 设 $f(x_0+0)>f(x_0-0)$, 否则考虑 $-f$. 选取 $\alpha \in \big(f(x_0-0), f(x_0+0)\big)$ 使得 $\alpha \neq f(x_0)$. 因 $f(x_0-0) < \alpha$, 由函数极限保序性知存在 $c < x_0$ 使 $\forall x \in [c, x_0)$, $f(x) < \alpha$. 同理可知存在 $d > x_0$ 使 $\forall x \in (x_0, d]$, $f(x) > \alpha$. 又因 $\alpha \neq f(x_0)$, 于是 f 在 $[c, d]$ 上不会取到 α, 这与 Darboux 定理矛盾! 故所证结论成立.

例 6. 设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$. $\forall x \in [a,b]$, 定义

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

计算 F''.

解: $\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$F(x) = x\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x tf(t)\,\mathrm{d}t,$$

于是 $F'(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 从而 $F''(x) = f(x)$.

作业题: 第 5.3 节第 146 页第 11 题. 提示: 模仿第 17 讲第 87 页, 考虑 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

补充题: (加强的积分第一中值定理)

若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 在 (a,b) 内连续, 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

微积分基本定理

定理 2. (Newton-Leibniz 公式) 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $G \in \mathscr{C}[a,b]$ 为 f 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G\Big|_a^b := G(b) - G(a).$$

证明: $\forall u \in [a,b]$, 定义 $F(u) = \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$. 则 F 可导且 $\forall x \in (a,b)$, $F'(x) = f(x) = G'(x)$. 于是 $\exists C \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, $F(x) = G(x) + C$, 从而

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) = F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

评注

- 因为 $G' = f$, 故 $\mathrm{d}G(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$. 出于简便, 人们常将 Newton-Leibniz 公式写成:

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}G(x) = G\Big|_a^b = G(b) - G(a).$$

- 设 $G : (a,b) \to \mathbb{R}$ 可导并且 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $G'(x) = f(x)$. 若 $G(a+0)$, $G(b-0)$ 均存在且有限, 则我们有

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G\Big|_a^b := G(b-0) - G(a+0).$$

例 7. 计算 $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \,\mathrm{d}(-\cos x) = -\cos x\Big|_0^\pi$

$$= -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

例 8. 计算 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x \ (0 < r < 1)$.

解: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)\,\mathrm{d}x}{1-2r\cos x+r^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \,\mathrm{d}\Big(2\arctan\big(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\big)\Big)$

$$= 2\arctan\Big(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot\big(-\frac{\pi}{2}\big) = 2\pi.$$

例 9. 设 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 若\ x\in[0,1) \\ 1, & 若\ x\in[1,2] \end{cases}$. $\forall x\in[0,2]$, 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 计算 F'.

解: $\forall x\in[0,2]$, 当 $x\leqslant 1$ 时, 我们有

$$F(x)=\int_0^x 2t\,\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^x=x^2,$$

故 $\forall x<1$, $F'(x)=2x$. 当 $x\geqslant 1$ 时, 我们则有

$$F(x)=\int_0^1 2t\,\mathrm{d}t+\int_1^x 1\,\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^1+t\Big|_1^x=x,$$

则 $\forall x>1$, $F'(x)=1$. 而 $F'_-(1)=2$, $F'_+(1)=1$, 因此函数 F 在点 $x=1$ 处不可导.

例 10. 若 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 求证:

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)| \leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 因此 $|f|$ 连续, 从而由最值定理知, $\exists \xi \in [a,b]$ 使 $|f(\xi)| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

又由积分中值定理, $\exists \eta \in [a,b]$ 使得我们有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\eta),$$

由此我们立刻可以导出

$$|f(\xi)-f(\eta)|=\left|\int_{\eta}^{\xi} f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{\eta}^{\xi}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{a}^{b}|f'(x)|\,\mathrm{d}x,$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\max_{x\in[a,b]}|f(x)| &= |f(\xi)| \leqslant |f(\eta)|+|f(\xi)-f(\eta)| \\ &\leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\int_{a}^{b}|f'(x)|\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此所证结论成立.

例 11. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

解: $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

于是由夹逼原理立刻可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

例 12. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$.

解: $\forall n\geqslant 1$, 令 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$. 则 $I_n\geqslant 0$, 且

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\,\mathrm{d}x=I_{n+1}.$$

于是由单调有界定理可知数列 $\{I_n\}$ 收敛. 设其极限为 I. 则由数列极限的保号性可知 $I\geqslant 0$.

注意到 $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall \varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, 我们有

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x \, \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right)^n \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

则由极限保序性可得 $0 \leqslant I \leqslant \varepsilon$, 再由 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ 可任意小立刻可得 $I = 0$.

作业题: 第 5.2 节第 141 页第 7 题第 (2) 小题.

例 13. 令 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x)\,\mathrm{d}x$. 比较 I_1, I_2 的大小.

证明: $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 我们有 $\sin x < x$. 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上, 正弦函数严格递增, 余弦函数严格递减, 故

$$\sin(\sin x) < \sin x,\ \cos(\sin x) > \cos x.$$

从而 $I_1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. 另外,

$$I_2 > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

于是我们有 $I_2 > I_1$.

例 14. 若 $f \in \mathscr{C}[0,1]$, 求证: $\exists \xi \in [0,1]$ 使得

$$\int_0^1 f(x)x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f(\xi).$$

证明: $\forall x \in [0,1]$, 定义 $g(x) = x^2$, 则 g 连续并且非负. 由积分第一中值定理知, $\exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)x^2\,\mathrm{d}x &= f(\xi)\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= f(\xi)\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}f(\xi).\end{aligned}$$

§4. 不定积分的概念与积分法

定义 1. 将定义在区间上的函数 f 的原函数的一般表达式称为 f 的不定积分, 记作 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

评注: (1) $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 是以 x 为自变量的函数.

(2) 若 F, G 均为 f 的原函数, 则 $F' = G'$, 于是存在常数 C 使得 $G - F = C$, 故

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \text{ (其中 } C \text{ 为常数)}.$$

(3) 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$.

不定积分与导数、微分的关系

- 若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, 则 $F'(x) = f(x)$,

$$\Big(\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big)' = F'(x) = f(x),$$

$$\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}\Big(\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

- (线性性) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

基本的不定积分公式

- $\int \mathrm{d}x = x + C.$
- $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1),$
  $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \log|x| + C.$
- $\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + C \ (a > 0,\ a \neq 1),$
  $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C.$
- $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C,$
  $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C.$

- $\int \operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$, $\int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$.
- $\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$.
- $\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$.

计算不定积分的基本方法

例 1. 计算 $\int |x-1|\,\mathrm{d}x$.

解: 当 $x \geqslant 1$ 时, 我们有

$$\int |x-1|\,\mathrm{d}x = \int (x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - x + C_1.$$

当 $x < 1$ 时, 我们则有

$$\int |x-1|\,\mathrm{d}x = \int (1-x)\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}x^2 + C_2.$$

由于原函数在点 $x=1$ 处连续, 则 $C_1 = 1 + C_2$,

故 $\int |x-1|\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + 1 + C, & 若\ x \geqslant 1, \\ x - \frac{1}{2}x^2 + C, & 若\ x < 1. \end{cases}$

例 2. 计算 $\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$= 2\int \mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$= 2x - 2\arctan x + C$.

例 3. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\cos^2 x)(\sin^2 x)}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\cos^2 x)(\sin^2 x)} = \int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos^2 x)(\sin^2 x)}\mathrm{d}x$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$

$= \tan x - \cot x + C$.

例 4. 计算 $\int\left(3x^2-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

解: $\int\left(3x^2-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int \mathrm{d}\left(x^3-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+\log|x|+\arctan x\right)$$

$$=x^3-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+\log|x|+\arctan x+C.$$

例 5. 计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}\ (a\neq 0)$.

解: $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}=\int\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2a}\Big(\log|x+a|-\log|x-a|\Big)+C$$

$$=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C.$$

例 6. 计算 $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$.

解: $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int(1+\sin x)\mathrm{d}x$

$=x-\cos x+C$.

例 7. 计算 $\int e^{|x|}\mathrm{d}x$.

解: 当 $x\geqslant 0$, $\int e^{|x|}\mathrm{d}x=\int e^{x}\mathrm{d}x=e^{x}+C_1$.

当 $x<0$ 时, $\int e^{|x|}\mathrm{d}x=\int e^{-x}\mathrm{d}x=-e^{-x}+C_2$.

由于原函数在点 $x=0$ 连续, 从而 $C_2=2+C_1$.

故 $\int e^{|x|}\mathrm{d}x=\begin{cases} e^{x}+C, & 若\ x\geqslant 0,\\ 2-e^{-x}+C, & 若\ x<0. \end{cases}$

1. 第一换元积分法 (凑微分):

若 $F'(y) = f(y)$, 而 u 为可导函数, 则

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x).$$

故 $\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = F(u(x)) + C$. 通常也将左式写成 $\int f(u(x))\mathrm{d}u(x)$, 则我们有

$$\begin{aligned}\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x &= \int f(u(x))\mathrm{d}u(x) \\ &= F(u(x)) + C.\end{aligned}$$

例 8. 计算 $\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x$.

解: $\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x = \int e^{x^2}\mathrm{d}(x^2) = \int \mathrm{d}(e^{x^2}) = e^{x^2} + C$.

例 9. 设 $a \neq 0$. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\int \mathrm{d}\Big(\arctan\frac{x}{a}\Big)$

$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$.

例 10. 设 $a > 0$. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解: $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int\mathrm{d}(\arcsin\frac{x}{a}) = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

例 11. 计算 $\int \tan x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int \tan x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}$
$= -\int \mathrm{d}\big(\log|\cos x|\big) = -\log|\cos x| + C.$

例 12. 计算 $\int \cot x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int \cot x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} = \log|\sin x| + C.$

例 13. 计算 $\int \tan^2 x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int \tan^2 x \, \mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1) \mathrm{d}x$
$= \int \mathrm{d}(\tan x - x) = \tan x - x + C.$

例 14. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+4x^2)(\arctan 2x+1)^2}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+4x^2)(1+\arctan 2x)^2}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2x)}{(1+(2x)^2)(1+\arctan 2x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\arctan 2x)}{(1+\arctan 2x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+\arctan 2x)}{(1+\arctan 2x)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\Big(\frac{1}{1+\arctan 2x}\Big)$$

$$= -\frac{1}{2(1+\arctan 2x)} + C.$$

例 15. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

解: 方法 1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$

$= \int \frac{\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$

方法 2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1-\cos^2 x}$

$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos x-1} - \frac{1}{\cos x+1}\right)\mathrm{d}(\cos x) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + C$

$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{(\cos x-1)^2}{\cos^2 x-1}\right| + C = \log\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C$

$= \log|\csc x - \cot x| + C.$

例 16. 计算 $\int \frac{x}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{x}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x$

$$= \int \Big(-\frac{1}{2}\frac{(3+2x-x^2)'}{\sqrt{3+2x-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\Big)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(3+2x-x^2)}{\sqrt{3+2x-x^2}} + \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\mathrm{d}x$$

$$= -\sqrt{3+2x-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x-1}{2})^2}}\mathrm{d}\big(\frac{x-1}{2}\big)$$

$$= -\sqrt{3+2x-x^2} + \arcsin\frac{x-1}{2} + C.$$

例 17. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = -\int \frac{\mathrm{d}(e^{-x})}{e^{-x}+1} = -\log(1+e^{-x}) + C.$

例 18. 计算 $\int \sec x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int \sec x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}$

$= \log\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| + C$

$= \log\left|\sec x + \tan x\right| + C.$

作业题: 第 5.4 节第 156 页第 2 题第 (1), (2) 题, 第 3 题第 (1), (6), (7), (9) 小题, 第 4 题第 (3), (4), (9), (11) 题, 其中 $\sinh = \mathrm{sh}$.

补充题: 计算 $\int \sec x \, \mathrm{d}x$ (模仿例 15).

2. 第二换元积分法:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=} \int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= F(t)+C \overset{t=t(x)}{=} F(t(x))+C.$$

例 19. 计算 $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x}}{=} \int \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}(t^2) = \int \frac{\sin t}{t}\cdot(2t)\,\mathrm{d}t$

$$= \int 2\sin t\,\mathrm{d}t = -2\cos t + C$$

$$= -2\cos\sqrt{x}+C.$$

例 20. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{1+x}}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{1+x}} \overset{u=\sqrt[3]{1+x}}{=\!=} \int \frac{\mathrm{d}(u^3-1)}{1+u}$

$= \int \frac{3u^2\,\mathrm{d}u}{1+u} = 3\int \left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$

$= 3\left(\frac{1}{2}u^2 - u + \log|1+u|\right) + C$

$= 3\left(\frac{1}{2}(1+x)^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{1+x} + \log\left|1+\sqrt[3]{1+x}\right|\right) + C.$

例 21. 计算 $\int \frac{x-2}{1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{x-2}{1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x \overset{u=\sqrt{x+1}}{=\!=} \int \frac{u^2-3}{1-u}\mathrm{d}(u^2-1)$

$= \int \left(-2u^2 - 2u + 4 - \frac{4}{1-u}\right)\mathrm{d}u$

$= -\frac{2}{3}u^3 - u^2 + 4u + 4\log|1-u| + C_1$

$= -\frac{2}{3}(x-5)\sqrt{x+1} - x + 4\log|1-\sqrt{1+x}| + C.$

注: 当被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ 时,

常用三角函数代换法.

例 22. 计算 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \ (a > 0)$.

解: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\overset{x=a\sin t}{\underset{|t|\leqslant\frac{\pi}{2}}{=}} \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}(a\sin t)$$

$$= \int (a\cos t)\cdot(a\cos t)\,\mathrm{d}t = a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int \tfrac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{a^2}{2}\Big(t + \tfrac{\sin 2t}{2}\Big) + C$$

$$= \tfrac{a^2}{2}\big(t + \sin t\cos t\big) + C$$

$$= \tfrac{a^2}{2}\arcsin\tfrac{x}{a} + \tfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

例 23. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a > 0)$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \overset{x=a\tan t}{\underset{|t|<\frac{\pi}{2}}{=\!=}} \int \frac{\mathrm{d}(a\tan t)}{\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}}$

$$= \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$$

$$= \log|\sec t + \tan t| + C_1 \text{ (见例 18)}$$

$$= \log\left|\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{x}{a}\right| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

例 24. 计算 $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}\,\mathrm{d}x$

$$\overset{x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t}{\underset{|t|\leqslant\frac{\pi}{2}}{=}} \int \frac{1-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t)+(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t)^2}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2-(\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t)^2}}\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t\Big)$$

$$= \int (\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{4}\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \int (\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{4}\tfrac{1-\cos 2t}{2})\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{11}{8}t - \frac{5}{16}\sin 2t + C = \frac{11}{8}t - \frac{5}{8}\sin t\cos t + C$$

$$= \frac{11}{8}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}(x-\frac{1}{2}) - \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}(x-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{5}}(x-\frac{1}{2}))^2}+C$$

$$= \frac{11}{8}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}(x-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})\sqrt{1+x-x^2}+C.$$

例 25. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}\ (a>0)$.

解: 被积函数的定义域为 $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$.

当 $x>a$ 时, 考虑变换 $x=a\sec t\ (0<t<\frac{\pi}{2})$,

则 $\mathrm{d}x=a\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$, 由此可得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{1}{a\tan t}\cdot a\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$$

$$=\log|\sec t+\tan t|+C_1=\log\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C_1'.$$

当 $x < -a$ 时, 考虑变换 $u = -x$, 则有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 - a^2}} = -\log\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C_2$$
$$= \log\left|\frac{1}{-x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right| + C_2 = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C_2'.$$

于是我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \begin{cases} \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C_1', & \text{若 } x > a, \\ \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C_2', & \text{若 } x < -a. \end{cases}$$

因为原函数的定义域由两个不相交的区间组成, 故常数 C_1' 和 C_2' 可以不同, 但计算不定积分的目的只是为了得到一个原函数, 因此人们通常将上式合并成一个统一的表达式:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C.$$

作业题: 第 5.4 节第 157 页第 6 题第 (1), (2), (3), (5) 题.

谢谢大家!