

第 11 次作业题

1. 验证 $\frac{1}{x^2}(yz \, dx - zx \, dy - xy \, dz)$ 为某个三元函数 u 的全微分并求该函数.
2. 证明曲线积分 $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,1)} (y+z) \, dx + (z+x) \, dy + (x+y) \, dz$ 与路径无关, 并求积分值.
3. 已知标量函数 u , 向量值函数 $\vec{V}, \vec{A}, \vec{B}$ 为 \mathbb{R}^3 中的光滑函数, 证明:
 - (1) $\operatorname{div}(u\vec{V}) = u \operatorname{div}\vec{V} + \operatorname{grad}u \cdot \vec{V}$;
 - (2) $\operatorname{rot}(u\vec{A}) = u \operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{grad}u \times \vec{A}$;
 - (3) $\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot}\vec{B}$;
 - (4) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u) = \vec{0}$;
 - (5) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = 0$.