微积分 A (1)

姚家燕

第 23 讲

在听课过程中，

严禁使用任何电子产品！

第 22 讲回顾: 两类无理函数的不定积分

设 $R(x,y)$ 是关于变量 x,y 的有理分式.

(1) $$\int R\Big(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}{=} \int R\Big(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\Big)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,\mathrm{d}t,$$

(2) $$\int R\Big(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\Big)\,\mathrm{d}x=\int R\Big(x,\sqrt{a\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}\Big)\,\mathrm{d}x,$$

再进行适当的三角代换.

回顾: 定积分的计算

- 利用求不定积分的方法 (分段积分等等).
- 换元公式: $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- 分部积分公式: 若 $u, v \in \mathscr{C}^{(1)}[a, b]$, 则

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = uv\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

- 对称性: (1) 若 f 为奇函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

  (2) 若 f 为偶函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- 若 f 以 T 为周期, 则 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.

回顾: 定积分与数列极限

- 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 而 $\{P_n\}$ 为 $[a,b]$ 的一列分割使 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(P_n) = 0$. 记 $P_n = (x_i^{(n)})_{0\leqslant i\leqslant k_n}$. 那么对任意的点 $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ $(1 \leqslant i \leqslant k_n)$,
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\xi_i^{(n)} \in [a + \frac{b-a}{n}(i-1), a + \frac{b-a}{n}i]$.

回顾: Jensen 不等式

- 假设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, $m, M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, 我们均有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$. 若 $\varphi \in \mathscr{C}[m,M]$ 为凸函数, 则我们有

$$\varphi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

注: 若 φ 为凹函数, 上述不等式依然成立, 只是此时应该将 "$\leqslant$" 改为 "$\geqslant$".

回顾: 带积分余项的 Taylor 公式

假设 $n \in \mathbb{N}$. 如果 $f \in \mathscr{C}^{(n+1)}[a,b]$, 而 $x_0 \in [a,b]$, 则 $\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u.$$

通常将 $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u$ 称为积分余项. 令 $u = x_0 + t(x-x_0)$, 则

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + t(x-x_0))\,\mathrm{d}t.$$

评注

- 由加强的积分第一中值定理得 Cauchy 余项:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),\ \ \theta \in (0,1).$$

- 由广义积分第一中值定理得 Lagrange 余项:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)) \int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),\ \ \theta \in [0,1]. \end{aligned}$$

回顾：直角坐标系下平面区域的面积

典型问题：设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$. 则由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 所围平面区域的面积等于

$$S = \int_a^b \big|f(x) - g(x)\big| \, \mathrm{d}x.$$

回顾：直角坐标系下由参数表示的曲线所围成的平面区域的面积

设曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$，其中 x, y 连续，$y \geqslant 0$，$x(t)$ 为严格递增，则存在连续反函数 $t = t(x)$。定义 $a = x(\alpha)$，$b = x(\beta)$。由 Γ，$x = a$，$x = b$ 及 x 轴所围区域的面积等于

$$S = \int_a^b y(t(x))\,\mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=\!=} \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

回顾: 极坐标系下平面区域面积

设曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的极坐标方程为

$$\rho = \rho(\theta)\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

其中 $\rho(\theta)$ 为连续函数. 那么曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 所围成的区域的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \big(\rho(\theta)\big)^2 \, \mathrm{d}\theta.$$

第 23 讲

曲线的弧长问题

1. 若在直角坐标系下曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中 $x(t), y(t)$ 为连续可导并且导数不同时为零，这样的曲线称为光滑曲线. 则 Γ 的弧微分为

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t,$$

其弧长为 $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$

2. 若在直角坐标系下曲线 Γ 的方程为

$$y = f(x)\ (a \leqslant x \leqslant b),\ 其中\ f\ 连续可导,$$

则其弧微分为 $\mathrm{d}\ell = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$, 弧长为

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. 若曲线 Γ 的极坐标方程为

$$\rho = \rho(\theta)\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),\ 其中\ \rho(\theta)\ 连续可导,$$

其参数表示为 $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta, y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta,$

由此我们立刻可得

$$
\begin{aligned}
x'(\theta) &= \rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta, \\
y'(\theta) &= \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta,
\end{aligned}
$$

则 $\big(x'(\theta)\big)^2 + \big(y'(\theta)\big)^2 = \big(\rho(\theta)\big)^2 + \big(\rho'(\theta)\big)^2$, 于是弧微分 $\mathrm{d}\ell = \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$, 故弧长为

$$
L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.
$$

4. 若在直角坐标系下空间曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, x, y, z 为连续可导,

且其导数不全为零, 则其弧微分为

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t,$$

于是曲线的弧长为

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

例 6. 求圆 $x^2+y^2=R^2$ 的周长.

解: 方法 1. 由对称性, 所求周长为圆周在第一象限内的 4倍, 而圆周在第一象限内的方程为

$$y=\sqrt{R^2-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant R).$$

故所求周长为

$$L=4\int_0^R\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=4\int_0^R\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=4R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=2\pi R.$$

方法 2. 圆周的参数方程为

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

从而所求圆周的周长为

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}t = 2\pi R. \end{aligned}$$

例 7. 求心脏线 $\rho = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$的弧长.

解: 所求弧长为

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1+\cos\theta))^2 + (a(-\sin\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2a\int_0^{2\pi} |\cos\frac{\theta}{2}|\,\mathrm{d}\theta$$

$$\overset{t=\frac{\theta}{2}}{=} 2a\int_0^{\pi} |\cos t|\,\mathrm{d}(2t) = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t - 4a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= 4a\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4a\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 8a.$$

例 8. 求旋轮线的一拱

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ \ a > 0)$$

的弧长.

解: $$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\,\mathrm{d}t = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$
$$= -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

例 9. 求空间螺旋线

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ct\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

的弧长.

解: 所求弧长为

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + c^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + c^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{a^2 + c^2}. \end{aligned}$$

作业题: 第 5.7 节第 185 页第 3 题第 (1), (5) 题.

曲线的曲率

假设曲线 Γ 的参数表示 $x(t), y(t)$ 关于 t 二阶连续可导, 将它在点 (x, y) 处的切线与 x 轴的正向的夹角记为 α, 那么 $\tan\alpha$ 为切线的斜率, 故 $\tan\alpha = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, 从而 $\alpha = \arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} \cdot \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' = \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2 + (y')^2}.$$

曲线 Γ 在点 (x,y) 处的曲率为 $\kappa := \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\ell}\right|$. 则

$$\kappa = \left|\frac{\alpha'(t)}{\ell'(t)}\right| = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

特别地, 如果在直角坐标系下曲线 Γ 的方程为

$y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, 且 f 二阶连续可导, 则

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

如果 Γ 的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$, 其中 $\rho(\theta)$ 二阶连续可导, 则 $\kappa=\frac{|\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+(\rho')^2)^{\frac{3}{2}}}$.

例 10. 求圆 $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的曲率.

解: 所求圆在点 (x,y) 处的曲率为

$$\kappa=\frac{|x'y''-x''y'|}{\left((x')^2+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|(-R\sin t)^2-(-R\cos t)(R\cos t)|}{\left((-R\sin t)^2+(R\cos t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{R^2}{R^3}=\frac{1}{R}.$$

注: 若曲线 Γ 在点 (x, y) 处的曲率等于 κ, 则称 $R = \frac{1}{\kappa}$ 为曲线 Γ 在点 (x, y) 的曲率半径.

例 11. 求抛物线 $x = y^2$ 上任意一点处的曲率与曲率半径.

解: 所求抛物线在点 (x, y) 的曲率为

$$\kappa = \frac{|x''(y)|}{((x'(y))^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(4y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

相应的曲率半径为 $R = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2}(4y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$.

作业题:

1. 证明极坐标下的曲率公式,

2. 求下列曲线的曲率半径:

(1) $y^2 = 2px \ (p > 0)$,

(2) $x = a\cos t,\ y = b\sin t \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a, b > 0)$,

(3) 心脏线 $\rho = a(1+\cos\theta) \ (a > 0)$.

由平面截面积求立体体积

典型问题: 将一个物体置于平面 $x=a$ 与 $x=b$ 之间 $(a<b)$. $\forall x \in [a,b]$, 用垂直于 x 轴的平面去截此物体所得到的截面的面积为 $S(x)$, 并且假设 $S \in \mathscr{R}[a,b]$, 则该物体的体积为

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

旋转体的体积

问题的表述: 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 并且 $f \geqslant 0$. 求由 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ $(b > a \geqslant 0)$ 及 x 轴所围区域分别绕 x 轴和 y 轴生成的旋转体的体积.

绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积

解: 用垂直 x 轴的平面截旋转体所得的截面是半径为 $f(x)$ 的圆盘, 则 $S(x) = \pi(f(x))^2$. 于是所求旋转体的体积为 $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$.

绕 y 轴旋转生成的旋转体的体积

解: 设由 $y = f(x)$, $x = a$, $x = z$, x 轴所围区域绕 y 轴旋转得到的体积为 $V(z)$. 当 $h \to 0$ 时,

$$\begin{aligned} V(z+h) - V(z) &= \pi(z+h)^2 y - \pi z^2 y + o(h) \\ &= 2\pi z y h + o(h), \end{aligned}$$

故 $V'(z) = 2\pi z f(z)$. 则所求旋转体的体积为

$$V = V(b) = \int_a^b V'(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

评注

如果 Γ 的方程为 $x = g(y) \geqslant 0$ $(0 \leqslant c \leqslant y \leqslant d)$, 在前面的讨论中须交换 x, y 的作用. 具体来说, 由 Γ 与直线 $y = c$, $y = d$ 及 y 轴所围平面图形绕 y 轴旋转一周后所产生的旋转体的体积为

$$V = \pi \int_c^d \left(g(y)\right)^2 \mathrm{d}y,$$

上述图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_c^d y g(y)\,\mathrm{d}y.$$

例 12. 计算球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 的体积.

解: 题设球体由上半圆 $x^2+y^2=R^2\ (y \geqslant 0)$ 与 x 轴所围区域绕 x 轴旋转生成. 因上半圆方程为 $y=\sqrt{R^2-x^2}\ (-R \leqslant x \leqslant R)$, 故球体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^{R} y^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-R}^{R} (R^2-x^2) \,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

例 13. 求曲线 $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 绕 x 旋转所得到的旋转体的体积.

解: 所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} y^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \Big(x - \frac{1}{2} \sin 2x\Big) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \pi^2. \end{aligned}$$

例 14. 求旋轮线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ a > 0)$$

绕 x 旋转所得到的旋转体的体积.

解: $\forall t \in (0, 2\pi)$, 均有 $x'(t) = a(1 - \cos t) > 0$, 故 $x(t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上严格递增, 从而有连续反函数 $t = t(x)$, 则 $y = y(t(x))$, 故所求体积为

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 \,\mathrm{d}x \overset{x = x(t)}{=} \pi \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t))^2 \cdot a(1 - \cos t) \,\mathrm{d}t$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \,\mathrm{d}t = 5a^3\pi^2.$$

更一般的旋转体的体积

问题表述: 假设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$, 并且 $f \geqslant g \geqslant 0$. 求由 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ 所围成的区域 $(b > a \geqslant 0)$ 分别绕着 x 轴以及 y 轴旋转所生成的旋转体的体积 V_x 与 V_y.

解: 设由 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ 以及 x 轴所围区域绕 x 轴旋转而生成的旋转体的体积为 V_1, 而由 $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ 以及 x 轴所围区域绕 x 轴旋转而生成的旋转体的体积为 V_2, 于是所求体积为夹在上述两旋转体之间部分, 故

$$V_x=V_1-V_2=\pi\int_a^b\left(\big(f(x)\big)^2-\big(g(x)\big)^2\right)\mathrm{d}x.$$

设由 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ 以及 x 轴所围成的区域绕 y 轴旋转而生成的旋转体的体积为 V_1, 由 $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ 以及 y 轴所围得区域绕 y 轴旋转而生成的旋转体的体积为 V_2, 那么所求体积为夹在上述两旋转体之间的部分, 故

$$V_y=V_1-V_2=2\pi\int_a^b x\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

例 15. 求由圆弧 $y=\sqrt{2-x^2}$, 抛物线 $y=\sqrt{x}$ 及 y 轴所围平面图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转生成的旋转体的体积.

解: 圆弧与抛物线的交点为 $(1,1)$. 则所围区域绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积为

$$V_x=\pi\int_0^1\left((\sqrt{2-x^2})^2-(\sqrt{x})^2\right)\mathrm{d}x$$
$$=\pi\int_0^1(2-x^2-x)\,\mathrm{d}x=\pi\left(2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{7}{6}\pi.$$

所围区域绕 y 轴旋转生成的旋转体的体积为

$$\begin{aligned}
V_y &= 2\pi\int_0^1 x(\sqrt{2-x^2}-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\int_0^1 (x\sqrt{2-x^2}-x^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{20\sqrt{2}-22}{15}\pi.
\end{aligned}$$

作业题: 第 5.7 节第 185 页第 7 题第 (1), (2) 题.

旋转体的侧面积

问题的表述: 求光滑曲线 Γ 绕 x 轴或 y 轴旋转生成的曲面的面积.

绕 x 轴旋转生成的曲面的侧面积

解: 面积微元为 $\mathrm{d}\sigma = 2\pi|y|\,\mathrm{d}\ell$.

1. 若在直角坐标系下曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中 x, y 连续可导, 则所求侧面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)|\, \mathrm{d}\ell(t) \\ &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

2. 如果曲线 Γ 的方程为 $y=f(x)\ (a\leqslant x\leqslant b)$, 其中 f 连续可导, 则所求侧面积为

$$S=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. 若曲线 Γ 的极坐标方程为

$$\rho=\rho(\theta)\ (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta),$$

其中 $\rho(\theta)$ 连续可导, 则所求侧面积为

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta|\rho(\theta)\sin\theta|\sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

绕 y 轴旋转生成的曲面的侧面积

解: 侧面积的面积微元为 $\mathrm{d}\sigma = 2\pi|x|\,\mathrm{d}\ell$. 于是在前面的参数方程表示下, 所求侧面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_\alpha^\beta |x(t)|\,\mathrm{d}\ell(t) \\ &= 2\pi \int_\alpha^\beta |x(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

若曲线 Γ 的方程为 $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, 其中 f 为连续可导, 则所求侧面积为

$$S = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x.$$

若曲线 Γ 的极坐标方程为

$$\rho = \rho(\theta) \ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

其中 $\rho(\theta)$ 连续可导, 则所求侧面积为

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\rho(\theta) \cos\theta| \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} \, \mathrm{d}\theta.$$

例 16. 求椭圆

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi],\ a > b > 0)$$

绕长轴旋转生成的旋转体的侧面积.

解: 令 $\varepsilon = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}$. 由题设知所求旋转体由椭圆上半部分绕 x 轴旋转生成, 故其侧面积为

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^\pi |y(t)|\,\mathrm{d}\ell(t) \\
&= 2\pi \int_0^\pi b \sin t \sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi b \int_0^\pi \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t}\,\mathrm{d}(-\cos t) \\
&\overset{u=\cos t}{=} 2\pi ab \int_1^{-1} \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2}\,\mathrm{d}(-u) \\
&= 2\pi ab \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 4\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\pi ab \int_0^1 \sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,\mathrm{d}u \\
&\overset{u=\frac{1}{\varepsilon}\sin\theta}{=} 4\pi ab \int_0^{\arcsin\varepsilon} \cos\theta\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\sin\theta\Big) \\
&= \frac{4\pi ab}{\varepsilon}\int_0^{\arcsin\varepsilon} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\int_0^{\arcsin\varepsilon} (1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\Big(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\Big)\Big|_0^{\arcsin\varepsilon} \\
&= 2\pi ab\Big(\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}+\sqrt{1-\varepsilon^2}\Big).
\end{aligned}
$$

例 17. 求心脏线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 围绕极轴旋转生成的旋转面的面积.

解: 所求旋转面由心脏线上半部分绕极轴旋转生成, 故所求面积为

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} |\rho \sin\theta| \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, \mathrm{d}\theta$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)\sin\theta \cdot \cos\frac{\theta}{2}\, \mathrm{d}\theta$$

$$= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2}\, \mathrm{d}\theta = -\frac{32}{5}\pi a^2 \cos^5\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

例 18. 求曲线 $y = \frac{1}{3}x^3\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$ 围绕着 x 轴旋转生成的旋转面的面积.

解: 所求面积为

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^1 |y|\, \mathrm{d}\ell(x) = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3}x^3 \sqrt{1+(x^2)^2}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{6} \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\, \mathrm{d}(1+x^4) \\
&= \frac{\pi}{9}(1+x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{9}(\sqrt{8}-1).
\end{aligned}
$$

例 19. 求曲线 $y = x\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$ 围绕 x 轴旋转生成的旋转体的侧面积.

解: 所求侧面积为

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^1 |y| \mathrm{d}\ell(x) = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2}\pi x^2 \Big|_0^1 = \sqrt{2}\pi.
\end{aligned}
$$

注: 如果曲线由若干光滑弧组成, 可以分别计算每段弧旋转后生成的侧面积, 然后求和.

作业题: 第 5.7 节第 186 页第 8 题第 (1), (4) 题.

谢谢大家!