第 3 次习题课　闭区间连续函数性质与导数计算

一、闭区间连续函数性质：

1. 开区间上的连续函数的值域必为开区间吗？若是，请给予证明；若否，请举反例。

解： 回答是否定的。开区间上的连续函数的值域有各种可能性。

例如 $I=(-1,1), f(x)=x, f(I)=(-1,1);$

$I=(-1,1), f(x)=x^2, f(I)=[0,1);$

$I=(0,2\pi), f(x)=\sin x, f(I)=[-1,1].$ □

2. 书上 P.64，第 10 题

设 $f\in C(\mathbb{R})$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上存在最小值。

证明： 因为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，所以 $\exists M>0, \forall x:|x|>M, f(x)>f(0)$。

又因为 $f\in C[-M,M]$，所以 $\exists x_0\in[-M,M], \forall x\in[-M,M], f(x)\ge f(x_0)$。

显然 $f(0)\ge f(x_0)$，所以 $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\ge f(x_0)$，即 f 在 $\mathbb{R}$ 上存在最小值 $f(x_0)$。□

3. 设 $f\in C[a,b]$，$m(x)=\inf\limits_{t\in[a,x]}\{f(t)\}, M(x)=\sup\limits_{t\in[a,x]}\{f(t)\}$，求证 $m(x), M(x)\in C[a,b]$。

证明： 只证 $m(x)\in C[a,b]$。$\forall x_0\in[a,b]$，不失一般性，只证明 $\lim\limits_{x\to x_0^+} m(x)=m(x_0)$。

因为 $f\in C[a,b]$，由最值定理知，$\exists \tilde{x}_0\in[a,x_0]$，使得 $m(x_0)=f(\tilde{x}_0)$。并且

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in(x_0,x_0+\delta), f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$$

当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，记 $m(x)=f(\tilde{x}), \tilde{x}\in[a,x]$，显然 $m(x)\le m(x_0)$。下面讨论 $\tilde{x}$ 的不同情况：

（I）若 $\tilde{x}\in[a,x_0]$，则 $m(x)=m(x_0)$；

（II）若 $\tilde{x}\in[x_0,x]$，则 $m(x_0)-\varepsilon\le f(x_0)-\varepsilon<m(x)\le m(x_0)$，

所以当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$m(x_0)-\varepsilon<m(x)\le m(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} m(x)=m(x_0)$。□

4. 设 $f\in C[a,b]$，且 $f([a,b])\subset[a,b]$，证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$。

证明： 记 $F(x)=f(x)-x$，则 $F\in C[a,b]$。

若 $F(a)\cdot F(b)=0$，则 $F(a)=0$ 或 $F(b)=0$，$\xi=a$ 或 b；

若 $F(a)\cdot F(b)\ne0$，则因为 $f([a,b])\subset[a,b]$，$F(a)>0, F(b)<0$，所以 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $F(\xi)=0, f(\xi)=\xi$.□

5. 设 $f \in C[a,b]$，且存在 $q \in (0,1)$，使得 $\forall x \in [a,b]$，$\exists y \in [a,b]$，满足 $|f(y)| \le q|f(x)|$。

证明：$\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi)=0$。

证明：因为 $f \in C[a,b]$，所以 $|f| \in C[a,b]$。

有界闭区间上的连续函数 $|f(x)|$ 有最小值，设 $|f(x_0)| = \min\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$。

若 $f(x_0) \ne 0$，由已知条件知，$\exists y_0 \in [a,b]$，满足 $|f(y_0)| \le q|f(x_0)| < |f(x_0)|$，与 $|f(x_0)| = \min\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ 矛盾。

所以 $f(x_0)=0$，可取 $\xi = x_0$，$f(\xi)=0$。

6．设 $f \in C[0,1], f(0)=0, f(1)=1, 2 \le n \in \mathbb{N}$, 则 $\exists \xi \in (0,1), s.t. f(\xi+\frac{1}{n}) = f(\xi)+\frac{1}{n}.$

证明：令 $g(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x) - \frac{1}{n}$, 则 $g \in C[0, \frac{n-1}{n}]$, 且

$$
\begin{aligned}
&g(0) = f(\frac{1}{n}) - f(0) - \frac{1}{n},\\
&g(\frac{1}{n}) = f(\frac{2}{n}) - f(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n},\\
&\cdots\\
&g(\frac{n-1}{n}) = f(1) - f(\frac{n-1}{n}) - \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

各式相加得, $$g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n}) = f(1)-f(0)-1=0.$$

于是 $g(0), g(\frac{1}{n}), \cdots, g(\frac{n-1}{n})$ 全为0, 或有两项异号. 由介值定理，$\exists \xi \in (0,1), s.t.$

$$g(\xi)=0, \quad 即 \quad f(\xi+\frac{1}{n}) = f(\xi)+\frac{1}{n}.\square$$

7. 设 $f \in C(-\infty,+\infty)$, f 以T为周期. 求证: $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \xi \in [0,\mathrm{T}], s.t. f(a+\xi) = f(\xi).$

证明： $f \in C[0,\mathrm{T}]$, 由连续函数的最大最小值定理, $\exists x_1, x_2 \in [0,\mathrm{T}], s.t.$

$$f(x_1) = \max_{0\le x\le \mathrm{T}} f(x), \quad f(x_2) = \min_{0\le x\le \mathrm{T}} f(x).$$

由 f 的周期性, $$f(x_1) = \max_{x\in\mathbb{R}} f(x), \quad f(x_2) = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x).$$

令 $g(x) = f(a+x) - f(x)$, 则

$$g(x_1) = f(a+x_1) - f(x_1) \le 0, \quad g(x_2) = f(a+x_2) - f(x_2) \ge 0.$$

由连续函数的介值定理，$\exists \xi \in [0,\mathrm{T}], s.t. g(\xi)=0$,即$f(a+\xi)=f(\xi)$.□

8. 设 $f(x)$ 在区间 I 上定义。一个点 $x_0 \in I$ 称作函数 $f(x)$ 的极大值（极小值）点，如果存在正数 $\delta>0$，使得 $f(x)\le f(x_0)$ （$f(x)\ge f(x_0)$），$\forall x\in I\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)$。

极大点和极小点都称作极值点。证明命题：设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $I:=[a,b]$ 上连续。若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上无极值点，则 $f(x)$ 在 I 上严格单调。

证明：根据最值定理可知，函数 $f(x)$ 在 I 上可取得最大值 M 和最小值 m，$m\le M$。 由于最大值点和最小值点都是极值点。 根据假设，$f(x)$ 在开区间 (a,b) 上无极值点。因此 $f(x)$ 在 I 上的最大值点和最小值点只能是区间端点 a 和 b。我们分两种情况讨论如下：

情形一：$f(a)=f(b)$。此时必有 $M=m$。即 $f(x)$ 是常数函数。于是开区间 (a,b) 上的每个点都是 $f(x)$ 的极值点。与假设相矛盾。不可能。

情形二：$f(a)\ne f(b)$。不妨设 $f(a)<f(b)$。 此时有 $m=f(a)$，$M=f(b)$。以下我们来证明 $f(x)$ 在 I 上严格单调上升。反证。假设 $f(x)$ 在 I 上不是严格单调上升。那么存在两点 $\mathrm{x}_1, x_2\in[a,b]$，$\mathrm{x}_1 < x_2$，使得 $f(x_1)\ge f(x_2)$。假设 $f(x_1)=f(x_2)$。应用上述情形一的结论于闭区间 $[x_1,x_2]$，可知这个情况不可能发生。因此必有 $f(x_1)>f(x_2)$

我们来考虑 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,b]$ 上的最小值。由于 $M=f(b)\ge f(x_1)>f(x_2)$，故 $x_2<b$。因此 $x_2\in(x_1,b)$。由此可断言，$f(x)$ 在闭区间 $[x_1,b]$ 上的最小值必在开区间 (x_1,b) 的某个点处取得。而这个点同时也是 $f(x)$ 在 $(a,b)\supset(x_1,b)$ 上的极值点。矛盾。证毕。

9. 证明：函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件是：对区间 I 上的任何两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$.

并证明 (1)函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续. （2）证明 $f(x)=\sin x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.

证明："$\Rightarrow$". 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续，即 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，对 $\forall x,y\in I$，当 $|x-y|<\delta$ 时，有 $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，对上述$\delta>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，对$\forall n>N$，都有$|x_n-y_n|<\delta$, 从而有$\left|f(x_n)-f(y_n)\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$.

“$\Leftarrow$”．用反证法.

假设$f(x)$在I上非一致连续，即$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x,y\in I$，满足$|x-y|<\delta$，但

$$\left|f(x)-f(y)\right|\ge\varepsilon_0 .$$

取$\delta=1, \exists x_1,y_1\in I,|x_1-y_1|<1,$有$\left|f(x_1)-f(y_1)\right|\ge\varepsilon_0$.

取$\delta=\dfrac{1}{2}, \exists x_2,y_2\in I,|x_2-y_2|<\dfrac{1}{2},$有$\left|f(x_2)-f(y_2)\right|\ge\varepsilon_0$.

……

取$\delta=\dfrac{1}{n}, \exists x_n,y_n\in I,|x_n-y_n|<\dfrac{1}{n},$有$\left|f(x_n)-f(y_n)\right|\ge\varepsilon_0$.

……

从而在区间I上构造出两个数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$．显然$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]\ne 0$, 与已知条件矛盾. 故函数$f(x)$在区间$I$上一致连续.

根据上述一致连续的充分必要条件，有：函数$f(x)$在区间I非一致连续的充要条件是在区间I上存在某两个数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$, 当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$时, 有$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]\ne 0$.

下面证明（1）函数$f(x)=e^x$在$(-\infty,+\infty)$上非一致连续.

证明：$\forall n\in\mathbb{N}$, 设$x_n=\ln(n+1), y_n=\ln n$．这样在$\mathbb{R}$上构造出两个数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$，有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}[\ln(n+1)-\ln n]=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n})=0,$ 但是$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=1\ne 0$.

故函数$f(x)=e^x$在$(-\infty,+\infty)$上非一致连续.

（2）证明：取$\varepsilon_0=1$，任给$\delta>0$，取$x_1=\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}, x_2=\sqrt{n\pi}$，其中正整数$n$充分大使得$|x_1-x_2|<\delta$，则有$\left|\sin x_1^2-\sin x_2^2\right|=1=\varepsilon_0$，所以$\sin x^2$在$[0,+\infty)$上不一致连续.

二．一阶导数

1. 设$y=f(x)$在$B(x_0)$有定义，则与$f'(x_0)$存在不等价的是(B)。

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+kx)-f(x_0)}{x}$ $(k\neq 0,1)$ 存在

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x^2)-f(x_0)}{x^2}$存在

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\left(f\left(x_0-\dfrac{1}{x}\right)-f(x_0)\right)\right]$存在

(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{\sin x}$ 存在

2. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2g(x) & x\leq 0\end{cases}$，其中$g(x)$是有界函数，则$f(x)$在$x=0$处有（ D ）。

(A) 极限不存在； (B)极限存在，但不连续

(C) 连续，但不可导； (D) 可导

解：首先考查$x=0$处的左右极限。

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2\sqrt{x}}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x^2g(x)=0\ (\text{因为}\ g(x)\ \text{有界})$$

因此$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，故$f(x)$在$x=0$处连续。

其次再考查$x=0$处的左右导数是否存在。

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}xg(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\cdot\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2x^{3/2}}=0,$$

因此$f'(0^+)$与$f'(0^-)$均存在，且相等。于是$f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=0$，答案为

(D)。□

3. 设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使$F(x)$在$x=0$处可导，则必有 (A)。

(A) $f(0)=0$， (B) $f'(0)=0$

(C) $f(0)+f'(0)=0$， (D) $f(0)-f'(0)=0$

解：$F(x)=f(x)+f(x)|\sin x|$，由于$f(x)$可导，若令$\varphi(x)=f(x)|\sin x|$，则只须使$\varphi(x)$在$x=0$处可导。

注意到$\varphi(0)=0$，只须使$\varphi'(0^-)=\varphi'(0^+)$。

$$\varphi'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-f(x)\sin x}{x}=-f(0)$$

$$\varphi'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=f(0),$$

因此应有$f(0)=-f(0)$，或$2f(0)=0$，即得到$f(0)=0$时才能使$\varphi(x)$在$x=0$处可导。

所以答案为(A)。□

4. 设函数$f(x)$在$x=0$处连续,且$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$,则（ C ）

(A) $f(0)=0$且$f'_-(0)$存在。 (B) $f(0)=1$且$f'_-(0)$存在

(C) $f(0)=0$且$f'_+(0)$存在。 (D) $f(0)=1$且$f'_+(0)$存在

解：令$x=h^2$，可得 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$。

于是 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=1\cdot 0=0=f(0)$

进一步有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'_+(0)=1$。

应选 C。□

5. 设函数$g(x)$在$(-1,1)$上连续。定义$f(x):=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$。

若函数$f(x)$在$x=0$连续,

(1) 求函数$g(x)$在点$x=0$处的值；

(2) 问函数$g(x)$在点$x=0$处是否可导？若可导，求出导数值。

解：(1) 由假设知$f(x)$在$x=0$连续,故有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=f(0)=2$。根据函数$g(x)$的连续性知 $g(0)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}\cdot x=0$。

(2) 由于$\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\dfrac{g(x)}{x}\to 2$，$x\to 0$。因此函数$g(x)$在点$x=0$处可导且$g'(0)=2$。□

6. 初等函数求导

$y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ ；$y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ ；$y=e^{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

解：$y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ ，$y'=\dfrac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ ，

$$y'=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}}\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}}\frac{\left(\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}}$$

$$=\frac{1-\cos x}{2(1+\cos x)}\frac{-\sin x(1-\cos x)-\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)^2}$$

$y=e^{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ ，　$y'=2xe^{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+e^{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\dfrac{-1}{(x+1)^2}$ □

7. 讨论 $f(x)=\begin{cases}x(1-x), & x\in\mathbb{Q};\\ x(1+x), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ 的连续性与可微性。

解：(1) 连续性讨论

在 $x_0=0$ 点，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$，当 $|x|<\delta$ 时，$1+|x|<2$，

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)|\le|x|(1+|x|)\le 2|x|<\varepsilon$$

所以 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 点连续。

在 $x_0\ne 0$ 点，取有理数列 $\{x_n\},x_n\in\mathbb{Q},\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(1-x_n)=x_0(1-x_0)$ ；

取无理数列 $\{x_n\},x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(1+x_n)=x_0(1+x_0)$ ；

而 $x_0\ne 0$，$x_0(1-x_0)\ne x_0(1+x_0)$，$f(x)$ 在 $x_0\ne 0$ 点不连续。

(2) 可微性讨论

在 $x_0\ne 0$ 点，$f(x)$ 不连续，所以不可微；

在 $x_0=0$ 点，

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-1\right|=\left|\frac{f(x)-x}{x}\right|=|x|\to 0,\quad x\to 0$$ 时，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$，$f'(0)=1$，

可微。□

8. $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，$f(a)\ne 0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x$

解：（1）先考虑情形：$f'(a)\neq 0$。此时我们可以断言，存在$\delta > 0$，使得$f(x)\neq f(a)$，

$\forall x\in(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$。因此当$x>0$充分大的时候，$f(a+\frac{1}{x})\neq f(a)$。于是我们

可以将函数$\left[\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)}\right]$表示为如下形式：

$$\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}\cdot\frac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{\frac{1}{x}}\frac{1}{f(a)}}。$$

注意到

$$\frac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{f(a)}(\neq 0)\to 0，\quad x\to+\infty，\text{以及}\ \frac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{\frac{1}{x}}\to f'(a)，\quad x\to+\infty，$$

我们就得到 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$。

（2） 再来考虑情形：$f'(a)=0$。记$\delta(x):=\frac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{f(a)}$，则

$$x\delta(\mathrm{x})=\frac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{\frac{1}{x}}\frac{1}{f(a)}\to\frac{f'(a)}{f(a)}=0，\quad x\to+\infty。$$

这表明$\delta(x)=o(\frac{1}{x})$，$x\to+\infty$。

另一方面，$\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=\left[1+\delta(x)\right]^x$。于是

$$\ln\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=\ln\left[1+\delta(x)\right]^x=x\ln(1+\delta(x))$$

$$=\mathrm{x}[\delta(x)+o(\delta(x))]=x\delta(x)+xo(\delta(x))\to 0,x\to+\infty.$$

因此$\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=\mathrm{e}^{\ln[1+\delta(x)]^x}\to e^0=1$，$x\to+\infty$。

以上两个情形可以统一写作 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$。$x\to-\infty$时，同理。□