微积分 A (1)

姚家燕

第 14 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

第 13 讲回顾: 导数的应用

- 设 X 为数集, $x_0 \in X$, 而 $f: X \to \mathbb{R}$ 为函数. 若 $\exists \delta > 0$ 使 $B(x_0, \delta) \subseteq X$ 且 $\forall x \in B(x_0, \delta)$, $f(x) \geqslant f(x_0)$, 则称点 x_0 为 f 的极小值点, 而称 $f(x_0)$ 为 f 的极小值. 相应地, 也可以定义极大值点和极大值.
- 极小值点和极大值点统称极值点. 极小值和极大值统称极值.
- 函数是否在一点取极值属于“局部性质”.

- 极值点不一定会是最值点. 最值点为极值点当且仅当该点为内点.
- 若 f 在极值点 x_0 可导, 则 $f'(x_0) = 0$.
- 导数为零的点称为驻点. 如果函数在极值点可导, 则该点为驻点. 但逆命题不成立.
- 设 f 在 $[a, b]$ 上可导, μ 严格介于 $f'_+(a)$, $f'_-(b)$ 之间, 则 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = \mu$. 故 $\mathrm{Im} f'$ 为区间. 若 f' 恒不为零, 则 f' 恒正或恒负.

第 14 讲

定理 2. (Darboux, 导数介值定理)

若 f 在 $[a,b]$ 上可导而 μ 严格介于 $f'_+(a), f'_-(b)$ 之间, 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \mu$.

证明: 不妨设 $f'_+(a) < \mu < f'_-(b)$ (否则我们可以考虑 $-f$). $\forall x \in [a,b]$, 定义 $F(x) = f(x) - \mu x$. 则 F 在 $[a,b]$ 上可导, 并且我们有

$$\begin{aligned} F'_+(a) &= f'_+(a) - \mu < 0, \\ F'_-(b) &= f'_-(b) - \mu > 0. \end{aligned}$$

由导数的定义, 我们有

$$\begin{aligned} F'_+(a) &= \lim_{x\to a^+} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} < 0, \\ F'_-(b) &= \lim_{x\to b^-} \frac{F(x)-F(b)}{x-b} > 0, \end{aligned}$$

于是由函数极限的保号性可知, $\exists c \in (a,b)$ 使得 $\frac{F(c)-F(a)}{c-a} < 0$, 同样 $\exists d \in (a,b)$ 使 $\frac{F(d)-F(b)}{d-b} > 0$.

综上所述可知我们有 $F(c) < F(a)$, $F(d) < F(b)$.

由于 F 在 $[a,b]$ 上可导, 因此连续, 于是由最值定理可知 F 有最小值点 $\xi \in [a,b]$. 再注意到

$$F(\xi) \leqslant F(c) < F(a), \ F(\xi) \leqslant F(d) < F(b),$$

因此 ξ 为 F 的极小值点, 从而由 Fermat 定理可得 $F'(\xi)=0$, 也即我们有 $f'(\xi)=\mu$.

推论. 若 f 在某个区间上可导, 则其导函数的像集为区间. 若 f' 恒不为零, 则它恒正或恒负.

定理 3. (Rolle) 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导且 $f(a)=f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

证明: 由题设可知 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 于是由最值定理立刻可得, $\exists c, d \in [a,b]$ 使得 $f(c)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(d)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. 若 $f(c)=f(d)$, 则 $f \equiv f(c)$, 故 $\forall \xi \in (a,b)$, 均有 $f'(\xi)=0$. 如果 $f(c)<f(d)$, 由 $f(a)=f(b)$ 可知 c, d 当中必有点属于 (a,b), 记作 ξ, 而该点为 f 的极值点, 从而 $f'(\xi)=0$.

定理 4. (Lagrange, 拉格朗日中值定理)

如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明: $\forall x \in [a,b]$, 我们定义

$$F(x) = f(x) - \Big(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\Big),$$

则 $F \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 并且我们还有 $F(a) = F(b) = 0$. 于是由 Rolle 定理立刻可得知 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$. 由此可得所要结论.

评注

- 上述定理可由 Rolle 定理导出, 而 Rolle 定理其实是该定理特殊的情形: 当 $f(a) = f(b)$ 时, Lagrange 中值定理等价于说 $f'(\xi) = 0$. 因此 Lagrange 中值定理与 Rolle 定理等价.

- 上述定理中的等式也可表述成

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

这就解释了为何称之为中值定理. 人们通常将 ξ 表述成 $\xi = a + (b - a)\theta,\ \theta \in (0, 1)$.

- 上述等式将自变量增量与因变量增量通过导数联系在一起, 因此也常被称为拉格朗日有限增量定理.

推论 1. 设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 则 f 为常值函数当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) = 0$.

证明: 必要性. 若 f 为常值函数, 那么由导数的定义立刻可知, $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) = 0$.

充分性. 如果 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) = 0$, 那么 $\forall x \in (a,b]$, 由 Lagrange 中值定理知 $\exists \xi \in (a,x)$ 使得 $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) = 0$. 得证.

推论 2. 假设函数 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导. 如果 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) = g'(x)$, 则存在常数 $C \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $f(x) = g(x) + C$.

证明: $\forall x \in [a,b]$, 定义 $F(x) = f(x) - g(x)$, 那么 $F \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 并且 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $F'(x) = 0$. 于是 $\exists C \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $F(x) = C$. 故所证结论成立.

推论 3. (反函数定理) 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导且 f' 恒不为零, 则 f 为单射且反函数可导.

证明: $\forall x, y \in [a,b]$, 如果 $x \neq y$, 则由 Lagrange 中值定理可知, 存在 ξ 严格介于 x, y 之间使得

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) \neq 0,$$

于是 f 为单射. 又 f 连续, 则其反函数也连续, 从而由反函数求导可知其反函数可导.

注: 在题设条件下, 函数 f 为严格单调.

定理 5. (Cauchy 中值定理) 假设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(\xi) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(\xi).$$

证明: $\forall x \in [a,b]$, 我们定义

$$\begin{aligned} F(x) &= \big(f(b)-f(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big) \\ &\quad -\big(g(b)-g(a)\big)\big(f(x)-f(a)\big). \end{aligned}$$

则 $F \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 并且我们还有 $F(a)=F(b)=0$. 于是由 Rolle 定理立刻可得知 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$. 由此可得所要结论.

评注

- 如果 $\forall x \in [a,b]$, $g(x) = x$, 此时 Cauchy 中值定理为 Lagrange 中值定理. 因此 Rolle 定理, Lagrange 中值定理, Cauchy 中值定理等价.
- 若 g' 恒不为零, 由 Lagrange 中值定理可知 $g(a) \neq g(b)$, 于是 Cauchy 中值定理变为

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

该式正是参数表示下的 Lagrange 中值定理.

事实上, 如果定义 $x = g(t)$, $y = f(t)$, 那么由于 g' 在 (a, b) 上恒不为零, 因此 g 的反函数可导, 于是有 $t = g^{-1}(x)$, 从而 $y = f(t(x))$, 进而可由 Lagrange 中值定理可得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x(\xi)) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例 1. 如果 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 并且 $f(a) = f(b) = 0$, 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0.$$

证明: $\forall x \in [a,b]$, 定义 $F(x) = f(x)e^{g(x)}$, 那么有 $F \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导且 $F(a) = F(b) = 0$, 于是 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 也即我们有

$$0 = f'(\xi)e^{g(\xi)} + f(\xi)e^{g(\xi)}g'(\xi),$$

由此立刻可知所证结论成立.

例 2. 试证明: 方程 $x^4+3x^3+6x^2-4x-8=0$ 恰好有两个实根.

证明: 我们定义 $f(x)=x^4+3x^3+6x^2-4x-8$, 则 f 连续并且 $f(0)=-8<0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, 因此方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ 上均有实根. 若该方程还有其它实根, 由 Rolle 定理知 f' 至少有两个实根, 故 f'' 至少有一个实根. 但 $f''(x)=12x^2+18x+12$, 其判别式等于 -252, 因此 f'' 无实根. 矛盾! 于是所证结论成立.

例 3. $\forall x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$, 求证:

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x.$$

证明: $\forall x > -1$, 定义 $f(x) = \log(1+x)$, 则 f 为初等函数, 从而可导. $\forall x > -1$, 借助 Lagrange 中值定理可知, $\exists \theta \in (0,1)$ 使得

$$\log(1+x) = f(x) - f(0) = f'(\theta x)x = \frac{x}{1+\theta x}.$$

但当 $x \neq 0$ 时, 我们也有 $\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\theta x} < x$, 由此可知所证结论成立.

例 4. $\forall x, y \in [-1, 1]$, 求证:

$$|\arcsin x - \arcsin y| \geqslant |x - y|.$$

证明: $\forall x \in [-1, 1]$, 定义 $f(x) = \arcsin x$. 那么 f 连续并且 $\forall x \in (-1, 1)$, 我们均有 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\forall x, y \in [-1, 1]$, 由 Lagrange 中值定理可知存在 ξ 介于 x, y 之间使得 $\arcsin x - \arcsin y = \frac{x-y}{\sqrt{1-\xi^2}}$, 故 $|\arcsin x - \arcsin y| = \frac{|x-y|}{\sqrt{1-\xi^2}} \geqslant |x - y|$.

例 5. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 求证: $e^x > 1 + x$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = e^x - 1 - x$. 则 f 连续可导并且 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 借助 Lagrange 中值定理可知, 存在 ξ 严格介于 $0, x$ 之间使得我们有

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)x = (e^{\xi} - 1)x.$$

若 $x > 0$, 那么 $\xi > 0$, 于是 $f(x) > 0$. 若 $x < 0$, 则 $\xi < 0$, 此时也有 $f(x) > 0$. 故所证成立.

例 6. 求证: 如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可导使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=f(x)$, 则 $\exists c\in\mathbb{R}$ 使 $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ce^x$.

证明: $\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $F(x)=f(x)e^{-x}$. 则 F 在 $\mathbb{R}$ 上可导并且 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $F'(x)=0$. 从而 $\exists c\in\mathbb{R}$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $F(x)=c$, 也即 $f(x)=ce^x$.

作业题: 第 4.1 节第 94 页第 2, 5 题, 第 95 页第 9 题第 (4) 题, 第 13 题, 第 14 题 (不用交), 第 124 页第 7 题.

例 7. 设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内二阶可导且有相同最大值. 若 $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

证明: $\forall x \in [a,b]$, 令 $F(x)=f(x)-g(x)$. 则 $F \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内为二阶可导. 假设 f, g 在 (a,b) 内的最大值点分别为 α, β, 则 $f(\alpha)=g(\beta)$, 并且由函数连续性知这也是 f, g 在 $[a,b]$ 上的最大值.

若 $\alpha=\beta$, 令 $\eta=\alpha$, 此时 $F(\eta)=0$. 若 $\alpha\neq\beta$, 则

$$F(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=g(\beta)-g(\alpha)\geqslant 0,$$
$$F(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=f(\beta)-f(\alpha)\leqslant 0,$$

于是由连续函数介值定理可知, $\exists\eta\in(a,b)$ 使得 $F(\eta)=0$. 又 $F(a)=F(b)=0$, 则由 Rolle 定理可知, $\exists\xi_1\in(a,\eta)$, $\exists\xi_2\in(\eta,b)$ 使得 $F'(\xi_1)=0$, $F'(\xi_2)=0$. 再由 Rolle 定理可得知, $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $F''(\xi)=0$, 也即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

例 8. 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可导且使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=e$, 求 c 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^x$.

解: 当 $c=0$ 时, 成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^x=1$. 当 $c\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{-2c}{x+c}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{-2c}{x+c}=-2c.\end{aligned}$$

于是我们总有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=e^{-2c}$.

由 Lagrange 中值定理, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists\xi(x)\in(x,x+1)$ 使得 $f(x+1)-f(x)=f'(\xi(x))$, 则由夹逼原理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi(x)=+\infty$. 于是由题设条件与复合函数极限法则可得

$$\begin{aligned} e^{-2c} &= \lim_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} f'(\xi(x)) = \lim_{y\to+\infty} f'(y) = e, \end{aligned}$$

进而我们立刻可知 $c=-\frac{1}{2}$.

例 9. 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导且 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) \neq 0$, 求证: $\exists \xi, \eta \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} e^{-\eta}.$$

证明: 方法 1. 由 Lagrange 中值定理知 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$. $\forall x \in [a,b]$, 令 $g(x) = e^x$. 由 Cauchy 中值定理, $\exists \eta \in (a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$, 即 $f(b) - f(a) = (e^b - e^a)e^{-\eta} f'(\eta)$. 由此可得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} e^{-\eta}$.

方法 2. 由 Lagrange 中值定理知 $\exists \eta \in (a, b)$ 使得

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^\eta,$$

进而可得

$$\frac{f'(\eta)}{f'(\eta)} = 1 = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}.$$

因此所证结论成立.

例 10. 若 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导且 $f(1)=0$, 求证: $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证明: $\forall x \in [0,1]$, 令 $F(x)=x^2 f(x)$, 则 $F \in \mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导, 并且有 $F(0)=F(1)=0$. 于是由 Rolle 定理可知, $\exists \xi \in (0,1)$ 使得

$$0=F'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi),$$

但 $\xi \neq 0$, 由此立刻可得 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

§2. L'Hospital 法则

定理 1. 设 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, 另外假设函数 $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ 可导, 而 g' 恒不为零且

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

若 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$ 或 $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \infty$, 则我们有 $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$.

证明: 由于 g' 恒不为零, 则 g 在 (a,b) 上为严格单调, 故由题设可知 $\exists c \in (a,b)$ 使得 $\forall x \in (a,c)$, 均有 $g(x) \neq 0$. $\forall x, y \in (a,c)$, 借助 Cauchy 中值定理可知, $\exists \xi \in (a,c)$ 使得

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

由此我们立刻可以导出

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right).$$

在题设条件下, 可选取 $y = y(x) \in (a,b)$ 使得

$$\lim_{x\to a^+} y(x) = a,\ \lim_{x\to a^+} \frac{f(y)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{g(y)}{g(x)} = 0,$$

进而我们可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a^+} \Big(\frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(1 - \frac{g(y)}{g(x)})\Big) \\ &= \lim_{x\to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \alpha.\end{aligned}$$

评注

- 在定理中，可将极限过程“$x \to a^+$”换成“$x \to a^-$”或“$x \to a$”.
- 定理中的条件均无法去掉且逆命题不成立.
- 在计算函数极限时，无法确定的情形包括:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

但这些均可以转化成第一种情形.

谢谢大家!