第 2 次作业题

1. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ 且 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{1+a_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. $\forall n \geqslant 1$, 令 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. 求证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛. 我们将该极限记作 γ, 称为 Euler 常数.

3. 若 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $0 < a_n < 1$ 且 $(1 - a_n)a_{n+1} > \frac{1}{4}$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}\right)$.

5. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

6. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2}$.

7. 若 $\{a_n\}$ 递增而 $\{b_n\}$ 递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. 求证: 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均收敛且其极限相等.

8. 利用 Cauchy 收敛原理证明下列数列 $\{a_n\}$ 的极限存在:

(1) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)}$; (2) $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.

9. $\forall n \geqslant 1$, 设 $v_n = (1 + \frac{\sin 1}{2}) + \cdots + (\frac{1}{n} + \frac{\sin n}{2^n})$. 求证: 数列 $\{v_n\}$ 发散.

10. 若数列 $\{a_n\}$ 单调且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.