微积分 A (1)

姚家燕

第 5 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

重要通知

9 月 27 日周日布置的作业, 同 9 月 30 日的作业一起, 均为 10 月 7 日提交

第 4 讲回顾: 收敛数列的性质

- 唯一性: 若数列收敛, 则其极限唯一.
- 有限韧性: 改变有限项不改变敛散性.
- 均匀性: 数列收敛当且仅当它的任意子列均收敛到同一个值 (常用于证明某数列发散).
- 有界性: 收敛的数列有界.

- 局部保序: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

(1) 若 $A > B$, 则 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n > b_n$.

(2) 若 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n \geqslant b_n$, 则 $A \geqslant B$.

- 局部保号: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

(1) 若 $A > 0$, 则 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n > 0$.

(2) 若 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n \geqslant 0$, 则 $A \geqslant 0$.

(3) 若 $A \neq 0$, 则 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $a_n \neq 0$.

回顾: 四则运算法则

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, 则

(1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = AB$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$ (若 $B \neq 0$).

回顾：典型例子

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+2}{n^2-3} = 2.$
- 数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+e^{-n^2}}{n+\cos n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_0+\cdots+a_k n^k}{b_0+\cdots+b_\ell n^\ell} = \begin{cases} 0, & \text{若 } k < \ell, \\ \frac{a_\ell}{b_\ell}, & \text{若 } k = \ell, \end{cases}$ $\ell \geqslant k \geqslant 0$ 为整数, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ 且 $b_\ell \neq 0$.

回顾: 夹逼原理

假设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}$ 满足:

(1) $\exists n_0 > 0$ 使得 $\forall n > n_0$, 均有 $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

则数列 $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

回顾：夹逼原理的典型应用

- 若 $\{a_n\}$ 非负且收敛于 A, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{A}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^n\Big)^{\frac{1}{n}}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}a_k$, 其中 $a_k\geqslant 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$.

回顾：典型的极限关系

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\log n} = 0.$

  对数函数比常数增长得更快!

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n^\alpha} = 0$ (其中 $\alpha > 0$).

  幂函数比对数函数增长得更快!

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$ (其中 $\alpha \in \mathbb{R},\ a > 1$).

  指数函数比幂函数增长得更快!

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \ (a \in \mathbb{R})$.

  连乘积比指数函数增长得更快!

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$

- 平均性: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

第 5 讲

§4. 单调数列

定义 1. 设 $\{a_n\}$ 为数列.

- 称该数列递增, 若 $\forall n \geqslant 1$, $a_n \leqslant a_{n+1}$;
- 称该数列严格递增, 若 $\forall n \geqslant 1$, $a_n < a_{n+1}$;
- 称该数列递减, 若 $\forall n \geqslant 1$, $a_n \geqslant a_{n+1}$;
- 称该数列严格递减, 若 $\forall n \geqslant 1$, $a_n > a_{n+1}$.
- 递增数列与递减数列合称单调数列.

定理 1. (单调有界定理)

- 单调递增有上界的数列必收敛;
- 单调递减有下界的数列必收敛.

证明: 假设数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界. 那么由确界定理可知该数列有上确界 A, 于是 $\forall n \geqslant 1$, $a_n \leqslant A$, 并且 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $a_N > A - \varepsilon$. 从而 $\forall n > N$, 均有 $a_n \leqslant A < a_N + \varepsilon \leqslant a_n + \varepsilon$, 也即 $|a_n - A| < \varepsilon$, 因此我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

如果 $\{a_n\}$ 单调递减有下界, 则 $\{-a_n\}$ 单调递增有上界, 因此收敛, 进而可知 $\{a_n\}$ 收敛.

注: (1) 可能数列不是从第一项, 而是从某一项开始单调有界. 由于改变数列的有限项不改变其敛散性, 故此时单调有界定理依然成立.

(2) 单调递增有上界数列的极限就是其上确界; 单调递减有下界数列的极限就是其下确界.

超越数 e 的定义

例 1. $\forall n \geqslant 1$, 定义

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

求证: 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛到同一极限.

注: 该极限就是著名的超越数 e. 上述这两数列实际上给出了 e 的上、下“有理逼近”.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 由定义立刻得 $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. 另外由几何平均小于算术平均可知

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \\
&\leqslant \left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= a_{n+1}.
\end{aligned}$$

同样地, 我们也有

$$
\begin{aligned}
b_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1} \\
&\geqslant \frac{1}{\left(\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)(n+1)+1}{n+2}\right)^{n+2}} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = b_{n+1}.
\end{aligned}
$$

于是 $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $a_1 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$. 由单调有界定理可知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛. 设其极限分别为 a, b. 注意到 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$b_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)a_n.$$

两边取极限可得 $b = a$, 因此所证成立.

注: 我们事实上证明了, $\forall n \geqslant 1$, 均有

$$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

特别地, 我们有 $2 = a_1 < e < b_5 < 3$.

例 2. $\forall n \geqslant 1$, 令 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. 求证: $\{a_n\}$ 收敛.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2} > a_n$, 故数列 $\{a_n\}$ 递增. 又 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

于是由单调有界定理可知 $\{a_n\}$ 收敛.

应用单调有界定理的基本思想

- 单调有界定理时常应用于由递归关系定义的数列. 此时先假设极限存在, 由此计算极限, 然后再比较该极限与数列最初的值的大小. 若极限大, 则该数列理应递增, 否则递减.
- 利用各种手段 (通常是数学归纳法) 来证明数列的单调性和有界性.

例 3. 设 $c > 0$, $a_1 = \sqrt{c}$, 而 $\forall n \geqslant 1$, 归纳定义

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}.$$

(1) 利用数学归纳法证明: $\forall n \geqslant 1$, $a_n < 1 + \sqrt{c}$.

(2) 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并计算其极限.

证明: (1) 当 $n = 1$ 时, 成立 $a_1 = \sqrt{c} < 1 + \sqrt{c}$. 现假设所要结论对 $n \geqslant 1$ 成立, 则我们有

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c} + 1.$$

于是由数学归纳法可知所证结论成立.

(2) 对 $n \geqslant 1$ 运用数学归纳法来证明 $a_n \leqslant a_{n+1}$.

当 $n = 1$ 时, 我们有

$$a_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}} > \sqrt{c} = a_1.$$

现假设所要结论对 $n \geqslant 1$ 成立, 则

$$a_{n+2} = \sqrt{c + a_{n+1}} \geqslant \sqrt{c + a_n} = a_{n+1}.$$

从而由数学归纳可知上述结论成立.

由于数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 则由单调有界定理可知其极限存在, 设为 A. 又 $\forall n \geqslant 1$, 均有

$$a_{n+1}^2 = c + a_n,$$

于是由极限的四则运算法则可得 $A^2 = c + A$. 但 $\{a_n\}$ 非负, 由极限的保号性可知 $A \geqslant 0$, 故

$$A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4c}).$$

例 4. 设 $b_1 \geqslant a_1 \geqslant 0$. $\forall n \geqslant 1$, 归纳定义

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\ \ b_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n).$$

求证: 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛到同一个极限.

证明: 对 $n \geqslant 1$ 用数学归纳法证明 $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

当 $n = 1$ 时, 所证结论就是题设条件.

现假设所证结论对 $n \geqslant 1$ 成立. 由归纳定义知

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \geqslant \sqrt{a_n b_n} = a_{n+1} \geqslant 0.$$

从而由数学归纳法可知所要结论成立.

进而可知, $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{a_n^2} = a_n, \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n) \leqslant b_n. \end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 单调递增且 $\{b_n\}$ 单调递减, 进而

$$\forall n \geqslant 1,\ a_n \leqslant b_n \leqslant b_1,\ b_n \geqslant a_n \geqslant a_1.$$

于是 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 而 $\{b_n\}$ 单调递减有下界, 故它们均收敛. 设其极限分别为 a, b.

再注意到 $\forall n \geqslant 1$, 我们均有 $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, 在等号两边取极限, 由此立刻可得

$$b = \frac{1}{2}(a+b),$$

也即 $a = b$. 故所证结论成立.

作业题: 第 1.4 节第 18 页第 5 题第 (4) 小题, 第 19 页第 17 题, 第 24 页第 5, 11 题.

§5. Stolz 定理

定义 1. 设 $\{a_n\}$ 为数列.

(1) 称该数列趋向于 $+\infty$, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 若 $\forall M > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, $a_n > M$.

(2) 称该数列趋向于 $-\infty$, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 若 $\forall M > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, $a_n < -M$.

(3) 称该数列趋向于 ∞, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 如果 $\forall M > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, $|a_n| > M$.

例 1. 由上述定义立刻可得

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty, \ \lim_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty.$$

注: **(1)** 正项数列 $\{a_n\}$ 趋近于 0 当且仅当 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 趋于$+\infty$. **(2)** $\{a_n\}$趋于0当且仅当$\{\frac{1}{a_n}\}$趋于 ∞. **(3)** $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 当且仅当 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

定理 1. (Stolz 定理) 假设数列 $\{b_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$. 如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 则我们有 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

Stolz 定理的逆命题不成立

$\forall n \geqslant 1$, 令 $a_n = (-1)^n$, $b_n = n$, 则我们有

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = (-1)^n - (-1)^{n-1} = 2(-1)^n,$$

由此立刻可知极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

不存在, 但与此同时, 我们却有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

“有极限”与“收敛”的差别

假设 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$.

- 若 $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, 则称 $\{x_n\}$ 有极限 A, 也称数列 $\{x_n\}$ 趋向于 A 或趋近于 A.
- 若 $A \in \mathbb{R}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛到 A.
- 关于数列极限的许多结论仅对收敛数列成立. 比如说唯一性、四则运算等等对无穷极限不成立, 但保序性、夹逼原理等依然成立.

例 2. 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = A \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = A.$$

证明: $\forall n \geqslant 1$, 令 $a_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $b_n = n$. 由题设可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} x_n = A,$$

而 $\{n\}$ 严格递增趋向于 $+\infty$, 则由 Stolz 定理可知所证结论成立.

例 3. 证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1.$

证明: 因 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 收敛于 1, 由 Stolz 定理可得.

例 4. 设 $k \geqslant 0$ 为整数. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

证明: $\forall n \geqslant 1$, 令 $a_n = \sum\limits_{m=1}^{n} m^k$, $b_n = n^{k+1}$. 则

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}} = \frac{(n+1)^k}{\sum\limits_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}n^j}$$

$$= \frac{(n+1)^k}{\binom{k+1}{k}n^k + \sum\limits_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}n^j} = \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{\binom{k+1}{k} + \sum\limits_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}n^{j-k}}.$$

而当 $0 \leqslant j < k$ 时, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-j}} = 0$, 于是由四则运算法则可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{1}{k+1}.$$

而 $\{b_n\}$ 严格递增趋向于 $+\infty$, 则由 Stolz 定理可知所要结论成立.

作业题: 第 1.4 节第 18 页第 12 题第 (2) 小题, 第 19 页第 13 题.

例 5. 假设 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $x_n > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a$.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 我们均有

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

如果 $a=0$, 那么 $0 \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$,

于是由 Stolz 定理以及夹逼原理可知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = 0 = a.$$

若 $a \neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$, 从而由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} = \frac{1}{a},$$

进而由夹逼原理可得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a.$$

例 6. 假设 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $x_n > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$.
求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = a$.

证明: 令 $y_1 = x_1$, $y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}\,(n \geqslant 2)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.
于是由前面的例子立刻可得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n = a. \end{aligned}$$

§6. 关于实数系的几个基本定理

定理 1. (区间套定理) 设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个递降且区间长度趋于 0 的闭区间列, 也就是说

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, 并且 c 是上述所有闭区间的唯一公共点, 也即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}.$$

证明: 由题设可知, $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$a_1 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_1.$$

于是由单调有界定理可知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛. 设其极限分别为 a, b. 那么我们有

$$0 = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = b - a.$$

故 $a = b =: c$. 下证: $\forall m \geqslant 1$, 均有 $c \in [a_m, b_m]$.

事实上, $\forall n \geqslant m$, $a_m \leqslant a_n \leqslant b_m$. 再让 $n \to \infty$, 则由数列极限的保序性立刻可得 $a_m \leqslant c \leqslant b_m$.

任取 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. 则 $\forall n \geqslant 1$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$. 于是由夹逼原理可知 $x = c$. 故所证结论成立.

作业题: 假设数列 $\{a_n\}$ 递增而数列 $\{b_n\}$ 递减且 $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$. 求证: 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均收敛且其极限相等. (参见第 18 页第 2 题)

关于区间套定理的评注

- 区间套定理实际上建立了实轴上的点与实数之间的一一对应.
- 区间套定理是单调有界定理的特殊情形. 其实我们也可证明由区间套定理可导出单调有界定理.
- 对于开区间列, 区间套定理一般不成立. 例如开区间 $\{(0, \frac{1}{n})\}$ 的交集为空集.

定理 2. (列紧性) 有界数列必有收敛子列.

证明: 假设 $\{x_n\}$ 有界并且 a_0, b_0 为其下、上界. 将闭区间 $[a_0, b_0]$ 两等分, 于是其中一个子区间 (记作 $[a_1, b_1]$) 必会包含该数列中的无穷多项, 再将 $[a_1, b_1]$ 两等分, 那么其中也有一个子区间 (记作 $[a_2, b_2]$) 必包含该数列当中的无穷多项.

如此下去可得如下递降闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足:

(1) $\forall n \geqslant 1$, $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$;

(2) $\forall k \geqslant 1$, $[a_k, b_k]$ 包含着 $\{x_n\}$ 中的无穷多项.

由区间套定理可知 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 收敛到同一个极限, 记作 c. 而由 (2), 我们可以构造 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\forall k \geqslant 1$, 我们有 $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$. 于是由夹逼原理可知子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 c.

定义 1. 称 $\{x_n\}$ 为 Cauchy (柯西、哥西) 数列, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall m, n > N$, 均有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

注: 由上可知数列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 数列当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$ 以及 $\forall p > 0$, 均有

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

命题 1. 收敛的数列为 Cauchy 数列.

证明: 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是 $\forall m, n > N$,

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leqslant |x_m - a| + |x_n - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 数列.

命题 2. Cauchy 数列为有界数列.

证明: 假设 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 数列. 那么 $\exists N > 0$ 使得 $\forall m, n > N$, 我们均会有 $|x_m - x_n| < 1$. 选取 $M = 1 + |x_{N+1}| + \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i|$. 那么 $\forall n \geqslant 1$, 当 $n \leqslant N$ 时, 均有 $|x_n| \leqslant M$; 而当 $n > N$ 时, 则

$$\begin{aligned} |x_n| &\leqslant |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| \\ &< 1 + |x_{N+1}| \leqslant M. \end{aligned}$$

因此数列 $\{x_n\}$ 有界.

定理 3. (Cauchy 判别准则) 数列收敛当且仅当它为 Cauchy 数列.

证明: 由前面讨论可知, 我们只需证明充分性. 假设 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 数列, 则该数列有界, 从而由列紧性定理可知它拥有收敛的子列 $\{x_{k_n}\}$. 令 $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$ 使得 $\forall n > N_1$,

$$|x_{k_n} - a| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

又由于 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 数列, 则 $\exists N_2 > 0$ 使得 $\forall m, n > N_2$, 我们均有 $|x_m - x_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. 令

$$N = \max(N_1, N_2).$$

则 $\forall n > N$, 我们有 $k_n \geqslant n > N$, 于是

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - a| < \varepsilon.$$

故数列 $\{x_n\}$ 收敛到 a.

Cauchy 准则的应用

例 1. 假设 $a > 0$, $0 < q < 1$, 而数列 $\{x_n\}$ 使得 $\forall n \geqslant 1$, $|x_{n+1} - x_n| \leqslant aq^n$. 求证: $\{x_n\}$ 收敛.

证明: $\forall n, p > 0$, 我们有

$$|x_{n+p} - x_n| = \Big|\sum_{j=n}^{n+p-1}(x_{j+1} - x_j)\Big| \leqslant \sum_{j=n}^{n+p-1}|x_{j+1} - x_j|$$

$$\leqslant \sum_{j=n}^{n+p-1} aq^j = \frac{a(1-q^p)q^n}{1-q} < \frac{aq^n}{1-q}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 若我们选取

$$N = \left| \left[\frac{\log \frac{\varepsilon(1-q)}{a}}{\log q} \right] \right| + 1.$$

则 $\forall n > N$ 以及 $\forall p > 0$, 我们有

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{aq^n}{1-q} < \varepsilon.$$

故 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 数列, 从而收敛.

谢谢大家!