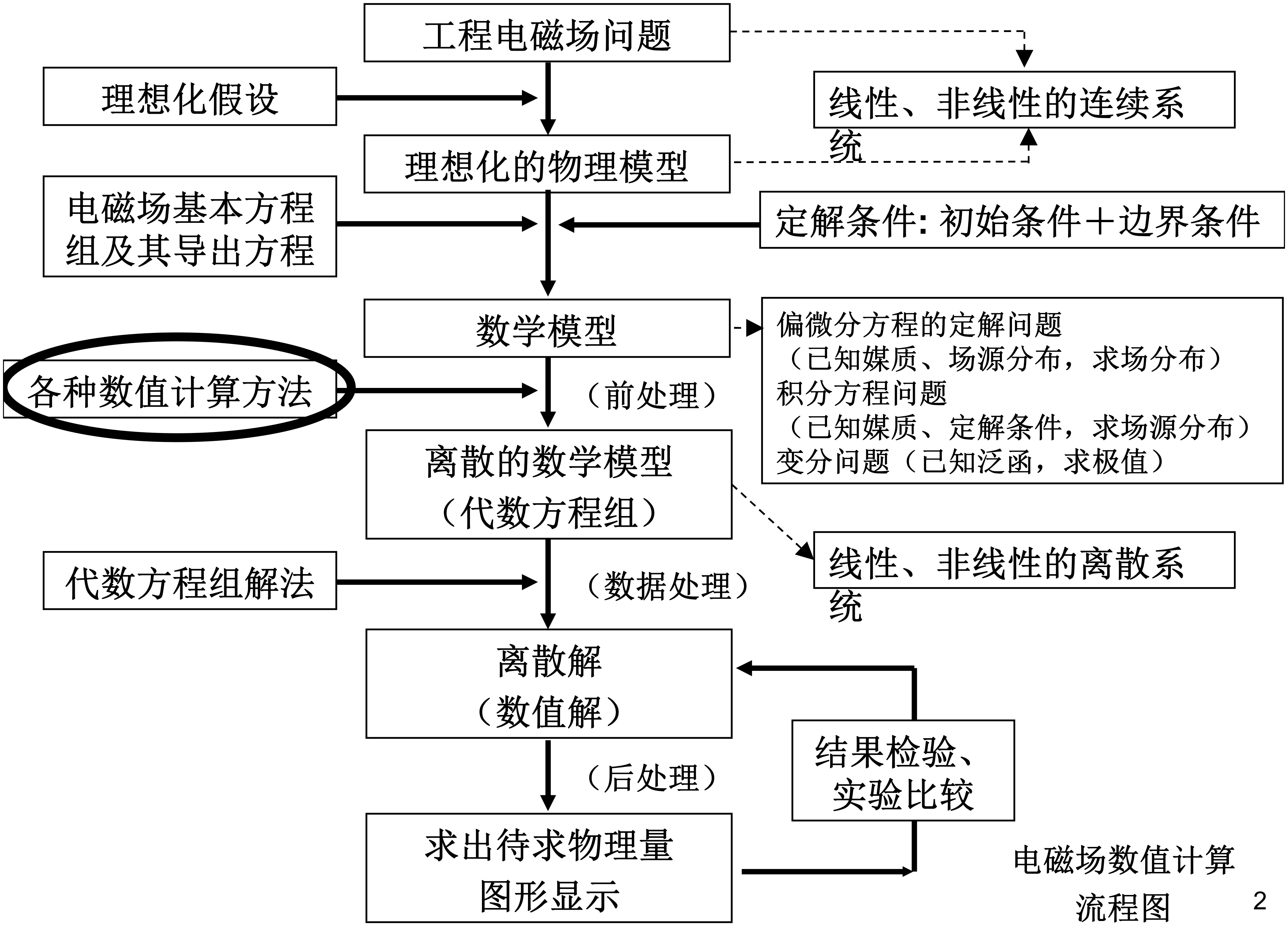
电磁场数值计算

邢庆子

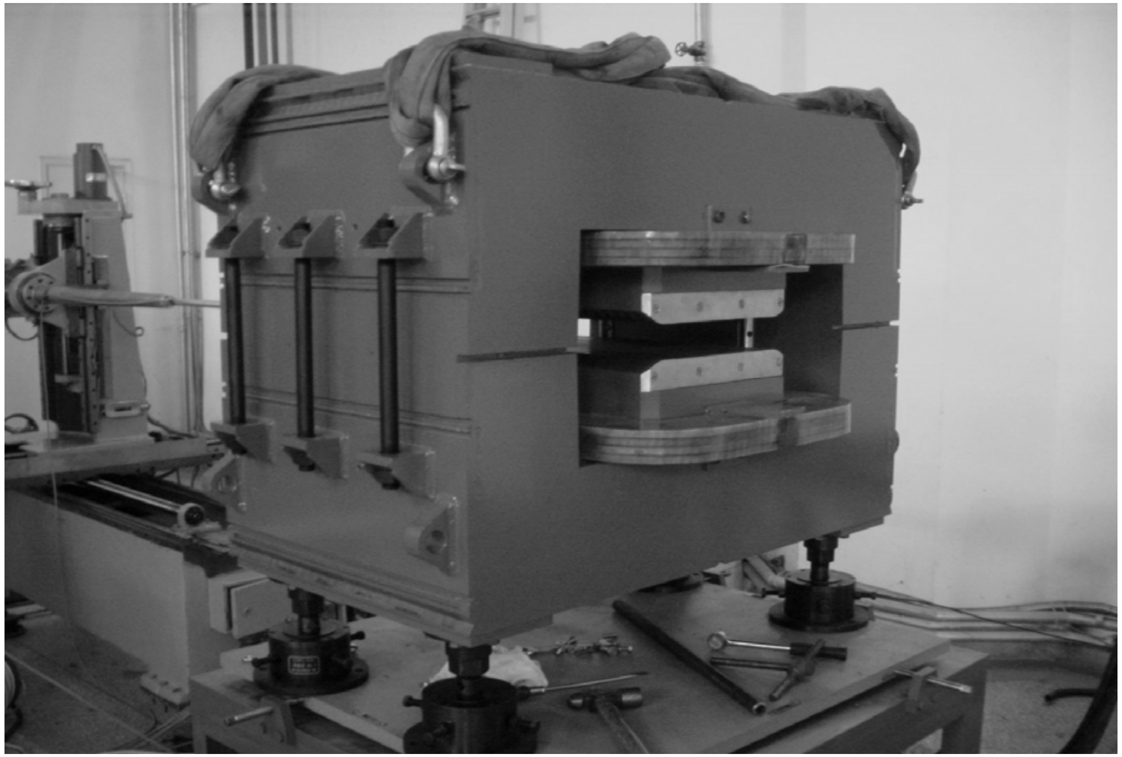
Tel: **62781684(o), 13661226717**

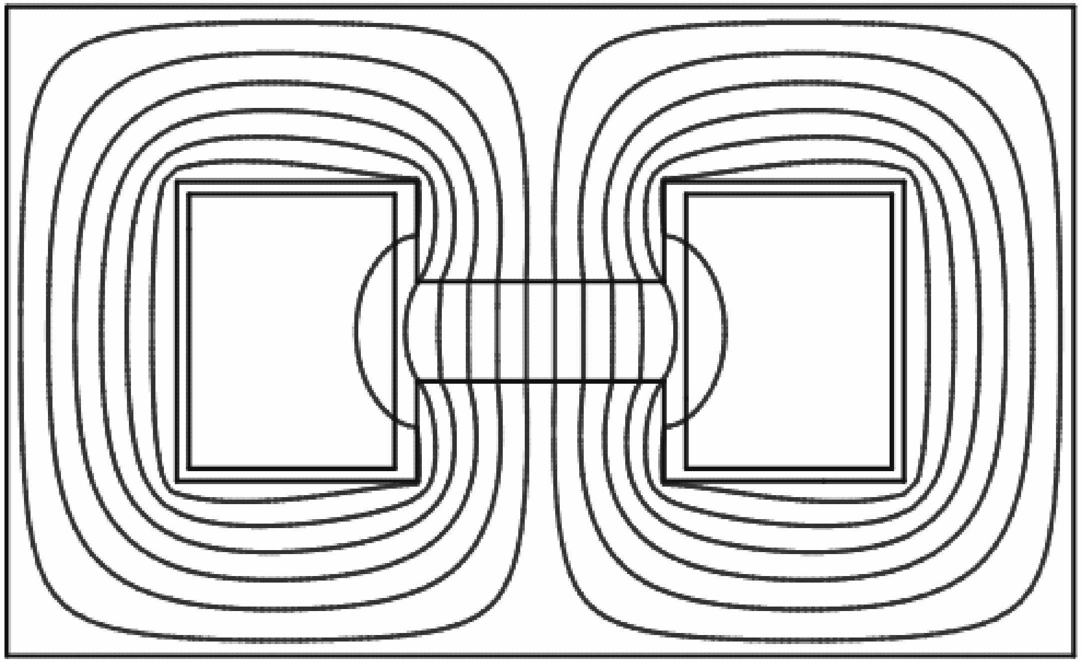
E-mail: **xqz@tsinghua.edu.cn**

清华大学工物系加速器实验室 刘卿楼**309**


工程电磁场问题
理想化假设
线性、非线性的连续系统
理想化的物理模型
电磁场基本方程组及其导出方程
定解条件: 初始条件＋边界条件
数学模型
偏微分方程的定解问题
（已知媒质、场源分布，求场分布）
积分方程问题
（已知媒质、定解条件，求场源分布）
变分问题（已知泛函，求极值）
各种数值计算方法
（前处理）
离散的数学模型
（代数方程组）
线性、非线性的离散系统
代数方程组解法
（数据处理）
离散解
（数值解）
结果检验、实验比较
（后处理）
求出待求物理量
图形显示

电磁场数值计算流程图





问题：

1. 什么条件下可以简化为二维模型？

2. 进一步如何进行简化？

第1章 电磁场的基本理论

- 电磁场的基本定律和基本方程
- 标量位及其微分方程
- 矢量位及其微分方程
- 波动方程
- 边界条件与边值关系

第1章 电磁场的基本理论

1.1 电磁场的基本定律和基本方程

电磁场计算问题实际上是针对所给定的边界条件、媒质成分方程，求解麦克斯韦方程组的问题，因此麦克斯韦方程组是求解电磁场问题的理论基础。

1.1.1 麦克斯韦方程组的积分形式与微分形式

	积分形式	微分形式
连续性方程：	$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \,\mathrm{d}V$	$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
高斯定律：	$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \,\mathrm{d}V$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$
电磁感应定律：	$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
磁通连续定律：	$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$
全电流定律：	$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_s \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

1.1 电磁场的基本定律和基本方程

连续性方程：$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \,\mathrm{d}V$

物理意义：从封闭曲面流出的电流，必然等于封闭曲面内正电荷的减少率，反之亦然。

高斯定律：$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \,\mathrm{d}V$

物理意义：穿过任何闭合曲面的电通量等于该闭合曲面所包围的净电荷。

电磁感应定律：$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

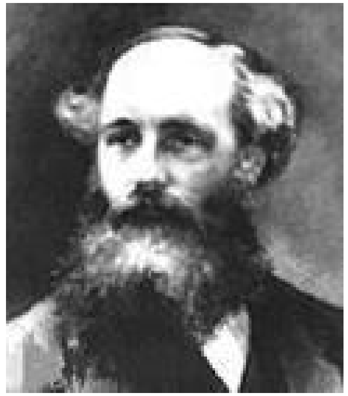
物理意义：变化的磁场产生电场。即电场不仅由电荷源产生，也可由时变的磁场产生。

磁通连续定律：$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$

物理意义：通过任何闭合曲面的磁通量恒为零。磁力线总是连续的，它不会在闭合曲面内积累或中断，故称磁通连续性原理。

全电流定律：$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_s \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

物理意义：表明磁场不仅由传导电流产生，也能由随时间变化的电场，即位移电流产生。



麦克斯韦方程组包含着丰富的内容和深刻的含义。爱因斯坦曾这样评价麦克斯韦方程组：

“这个方程组的提出是牛顿时代以来物理学上一个重要的事情，这是关于场定律的定量的描述。方程中所包含的内容比我们所指出的要丰富得多。在它们简单的形式下隐藏着深奥的内容。这些内容只有靠仔细的研究才能显示出来。它是描述场的结构的定律，它不像牛顿定律那样把此处发生的事件与彼处的条件联系起来，而是此处此刻的场只与最近的刚过去的场发生联系。假使我们知道此处此刻所发生的事件，这些方程便可帮助我们预测在空间上稍远一些，在时间上稍迟一些将会发生什么。”

1.1.2 恒定电磁场方程

场量不随时间变化时：

连续性方程： $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ $\Longrightarrow$ $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$

高斯定律： $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ $\Longrightarrow$ $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$

电磁感应定律： $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ $\Longrightarrow$ $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$

磁通连续定律： $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ $\Longrightarrow$ $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$

全电流定律： $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ $\Longrightarrow$ $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$

掌握直角坐标系和圆柱坐标系中恒定电场、恒定磁场满足的方程的展开式：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{J}$$

直角坐标系

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{r}\boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\theta & \dfrac{1}{r}\boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\theta & H_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{J}$$

圆柱坐标系

1.1.3 时谐场

本节内容自学。

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + j\omega \boldsymbol{D}$$

了解 $\nabla \times \boldsymbol{E} = \text{-}j\omega \mathrm{B}$ 的推导过程。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -j\omega\rho$$

1.1.4 成分方程

$$\left.\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\
\nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0\\
\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho\\
\nabla\cdot\boldsymbol{J} &= -\frac{\partial\rho}{\partial t}
\end{aligned}\right\}$$

方程中共有 **5** 个未知矢量（$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 、$\boldsymbol{D}$ 、$\boldsymbol{J}$ ）和一个未知标量 ρ 。实际上要求 **16** 个未知标量。

而独立的标量方程只有 **7** 个，所以还必须补充 **9** 个独立的标量方程，这就是媒质的结构方程，又称为状态方程或成分方程。

对静止的各向同性介质，电场和磁场各量之间的关系为：

$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$　　ε — 介电常数，**F/m**

$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H}$　　μ — 磁导率，**H/m**

$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$　　σ — 电导率，**S/m**

这三个方程与前面五个方程称为完整的麦克斯韦方程组，全面表述了电磁场的基本规律。

任何一种电磁场边值问题的求解，必须依据麦克斯韦方程组、媒质的成分方程和边界条件。

1.2 标量位及其微分方程

- 位函数的引入

目的：1）减少未知数个数，简化问题；

2）使物理概念更加清晰。

引入的辅助计算量： 标量电位 Φ、标量磁位 Φ_m 、矢量磁位 $\boldsymbol{A}$

辅助量的定义及附加条件：

如 静态磁场中的库仑规范： $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$

时变场中的洛伦兹规范： $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$

旋度场和无旋场：物理量的旋度是否为零？（是否载流区？）

标量位和矢量位：引入条件不同。根据是否是旋度场来引入。

- 标量位及其微分方程

引入条件：无旋场

如 静电场（$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$）中 $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$，

静磁场（$\nabla\times\boldsymbol{H}=0$）中 $\boldsymbol{H}=-\nabla\Phi_m$。

数学依据： $\nabla\times\left(\nabla\Phi\right)\equiv 0$

静电场、电源以外区域的恒定电流场、或非载流区的静磁场，都是无旋的，可以引入标量电位Φ或标量磁位Φ_m

1.2.1 标量电位

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla \Phi$$

本节内容自学。

1.2.2 标量磁位

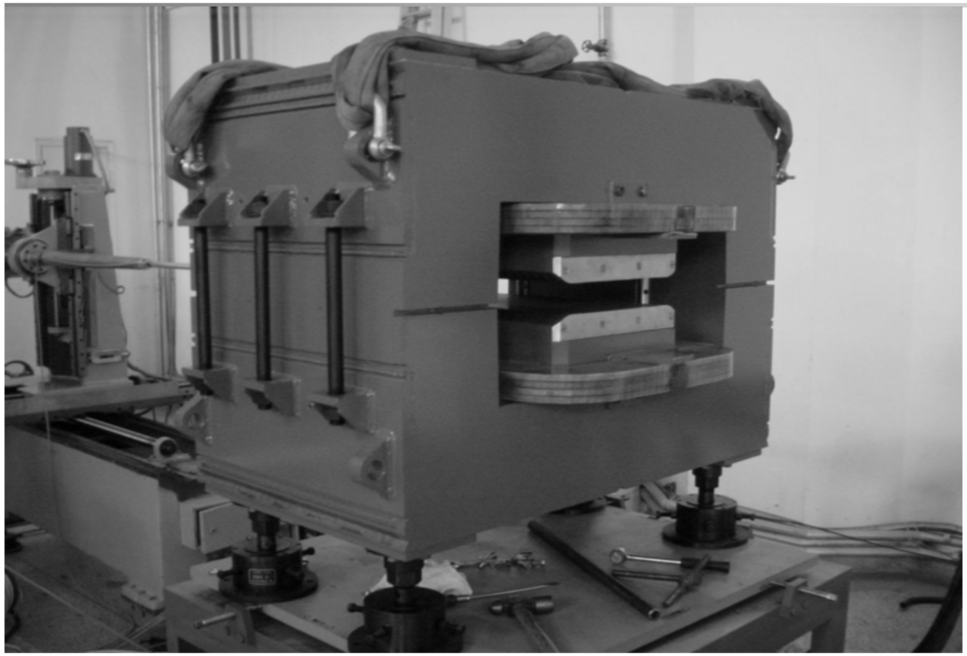
在静电场或是无源恒定电流场中，$\nabla\times \boldsymbol{E}=0$ 是无旋场，因此 $\boldsymbol{E}=-\nabla \Phi$。

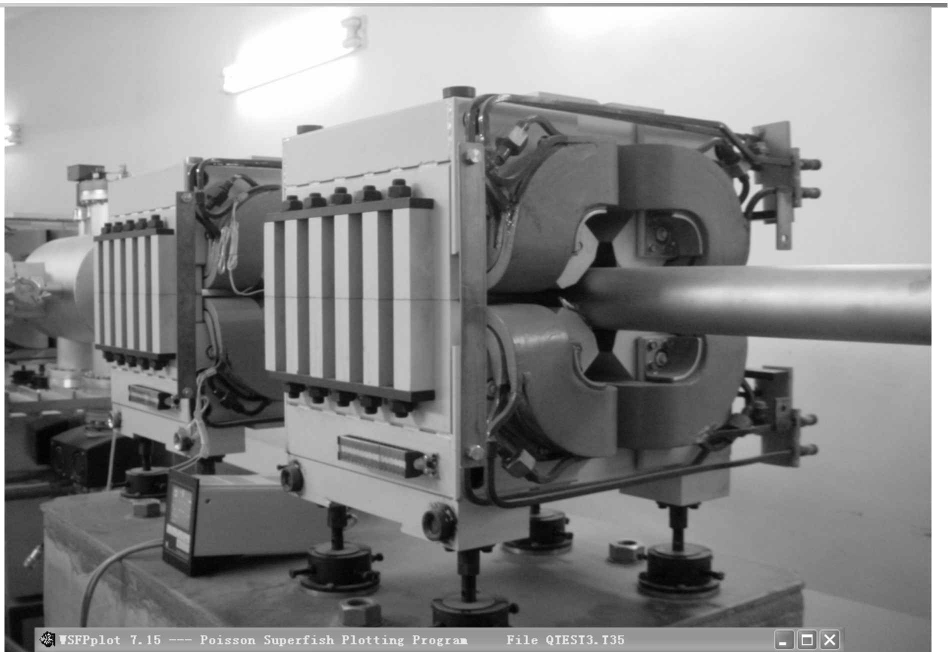
标量电位有明显的物理意义，即是将单位正电荷自该点移到无限远处时电场力所作的功。

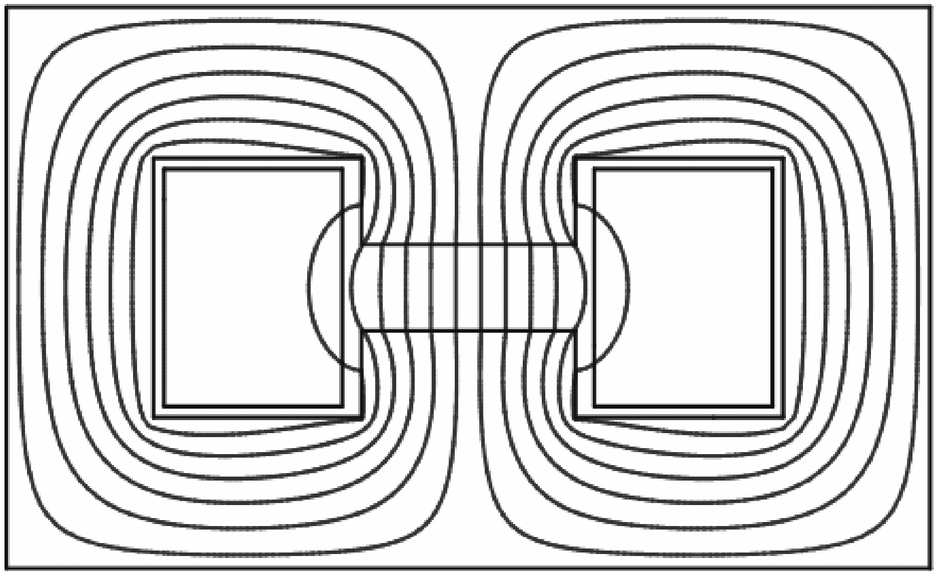
在静磁场中，$\nabla\times \boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$，当 $\boldsymbol{J}=0$ 时，$\nabla\times \boldsymbol{H}=0$。与静电场对比，可引入标量磁位：$\boldsymbol{H}=-\nabla \Phi_m$。

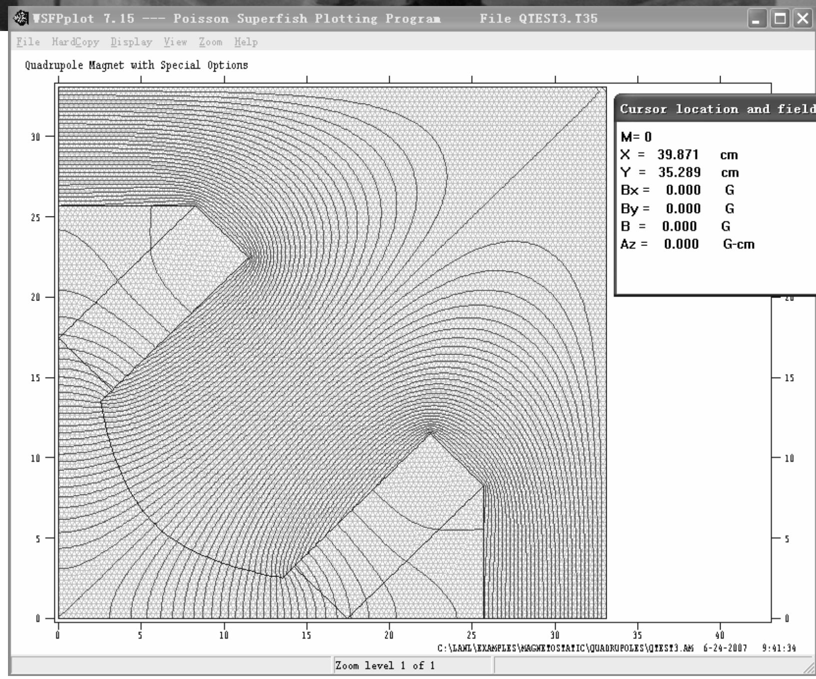
标量磁位的引入只是为了计算方便，无物理意义，它与磁场力作功无关。

1.2 标量位及其微分方程









1.2 标量位及其微分方程

标量磁位 Φ_m 的等位面方程为： $\Phi_m(x, y, z) =$ 常数。

- Φ_m 与 $\boldsymbol{H}$ 的关系 $\boldsymbol{H} = -\nabla\Phi_m$

直角坐标系中：

$$H_x = -\frac{\partial\Phi_m}{\partial x} \qquad H_y = -\frac{\partial\Phi_m}{\partial y} \qquad H_z = -\frac{\partial\Phi_m}{\partial z}$$

圆柱坐标系中：

$$H_r = -\frac{\partial\Phi_m}{\partial r} \qquad H_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\theta} \qquad H_z = -\frac{\partial\Phi_m}{\partial z}$$

1.2 标量位及其微分方程

- **标量磁位满足的方程：** $\nabla\cdot\mu\nabla\Phi_{\mathrm{m}}=0$ **(直角和圆柱坐标系)**

$\mu\neq$**常数：**

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\mu\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{m}}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\mu\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{m}}}{\partial \mathrm{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{m}}}{\partial z}\right)=0$$ **(直角坐标系)**

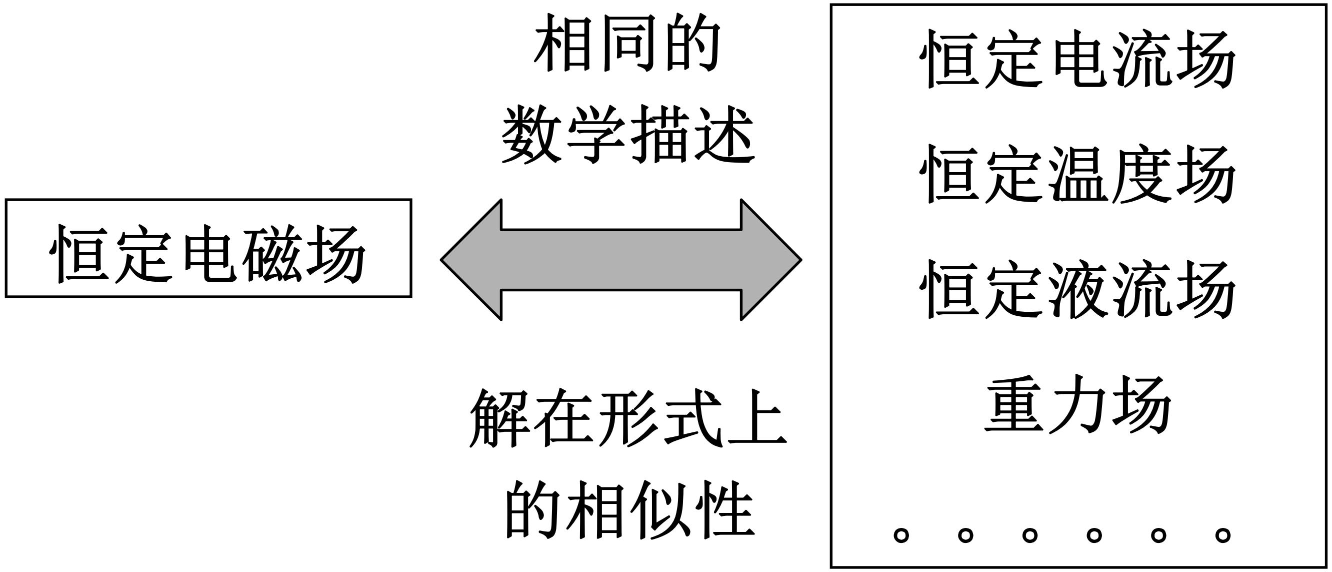
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{m}}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{m}}}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{m}}}{\partial z}\right)=0$$ **(圆柱坐标系)**

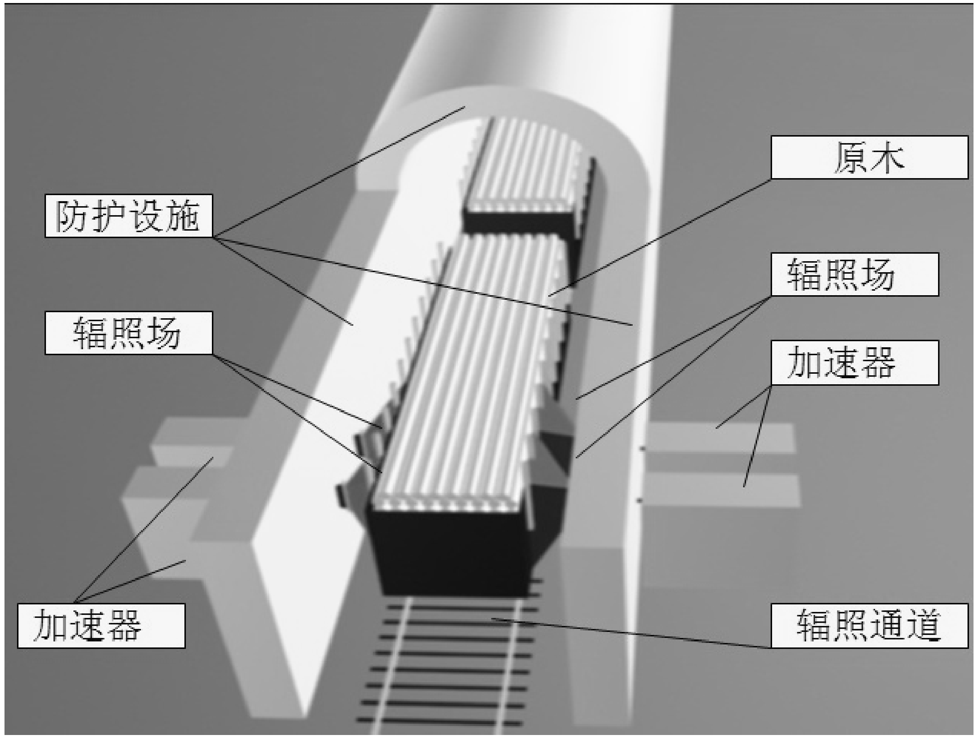
$\mu=$**常数：**

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{m}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{m}}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{m}}}{\partial z^2}=0$$ **(直角坐标系)**

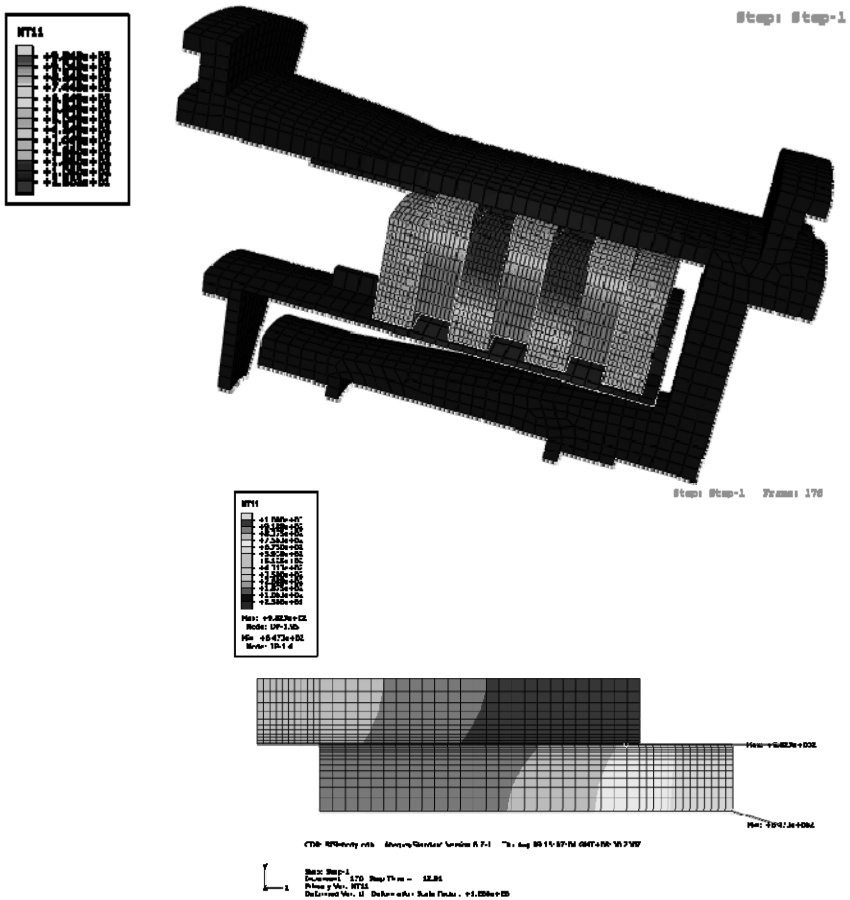
$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{m}}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{m}}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{m}}}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{m}}}{\partial z^2}=0$$ **(圆柱坐标系)**

● 各种标量位场中的相似量

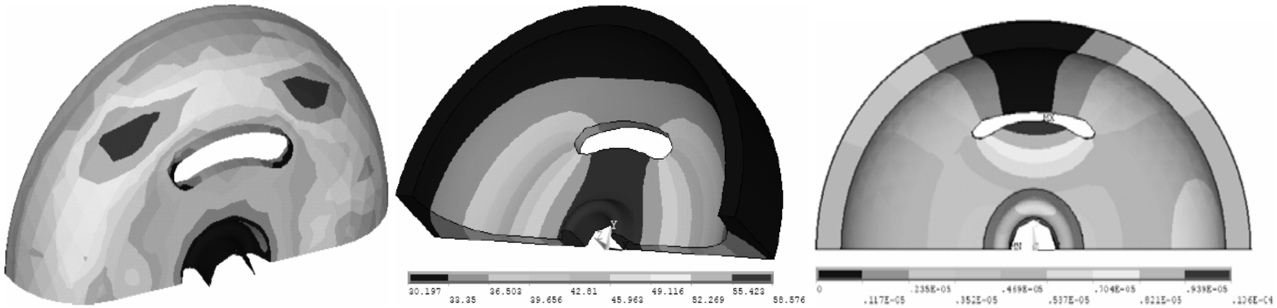




大功率辐照加速器进行原木检疫辐照处理



航空机轮温度场
有限元分析



（1）加速腔内表面微波功率损耗分布；（2）加速腔体温度分布；（3）加速腔体热形变分布。

（温升**41℃/kW**，形变频偏**1MHz/kW**）

1.2 标量位及其微分方程

● 各种标量位场中的相似量

	静电场	电流场	恒定磁场	温度场	液流场
标量位	电位 Φ	电位 V	磁位 Φ_m	温度 T	速度位
位的梯度	电场强度 $\boldsymbol{E}$	电场强度 $\boldsymbol{E}$	磁场强度 $\boldsymbol{H}$	温度梯度	速度
媒质常数	介电常数 ε	电导率 σ	磁导率 μ	热导率 λ	密度
通量密度	电位移矢量 $\boldsymbol{D}$	电流密度 $\boldsymbol{J}$	磁通密度 $\boldsymbol{B}$	热流密度 $\mathbf{q}$	流率

1.3 矢量位及其微分方程

标量磁位 Φ_m 的局限： 只能在 $\boldsymbol{J}=0$ 的区域使用

矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的引入： 对于 $\boldsymbol{J}=0$ 和 $\boldsymbol{J}\neq 0$ 的区域均可使用

为了求出场量与场源之间的关系，引入辅助量 $\boldsymbol{A}$，其原则为：使用此量后应仍能满足麦克斯韦方程组。

选取： $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$

因为： $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\nabla\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right)\equiv 0$

矢量磁位 (直角坐标系) μ =常数：

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \qquad \text{(取库仑规范：} \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \text{)}$$

直角坐标系：

$$\nabla^2 A_{\mathrm{x}} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu J_x$$

$$\nabla^2 A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu J_y$$

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu J_z$$

二维平面场：

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_z$$

对于二维场的计算，用标量磁位只能求解无旋区，用矢量磁位 ***A*** 不仅能求解有旋区，也可以求解无旋区，而且只要解一个方程即可。

矢量磁位 (圆柱坐标系) μ =常数：

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \qquad \text{(取库仑规范)}$$

圆柱坐标系：

$$\left(\nabla^2 \boldsymbol{A}\right)_r = \nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}$$

$$\left(\nabla^2 \boldsymbol{A}\right)_\theta = \nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}$$

$$\left(\nabla^2 A\right)_z = \nabla^2 A_z = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$$

二维(r, θ)平面：

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} = -\mu J_z$$

轴对称平面场：(r,z)平面

$$\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2}A_\theta + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} = -\mu J_\theta$$

矢量磁位 (直角坐标系) $\mu \neq$常数：

$$\nabla\left(\frac{1}{\mu}\right)\times(\nabla\times\boldsymbol{A})-\frac{1}{\mu}\nabla^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}$$ (取库仑规范：$\nabla\cdot\boldsymbol{A})=0$

直角坐标系：

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-\frac{1}{\mu}\left(\nabla^2\boldsymbol{A}\right)_x=J_x$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{1}{\mu}\left(\nabla^2\boldsymbol{A}\right)_y=J_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)-\frac{1}{\mu}\left(\nabla^2\boldsymbol{A}\right)_z=J_z$$

二维平面场(x,y)：
$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}-\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial A_z}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)=-\mu J_z$$

矢量磁位 (圆柱坐标系) $\mu \neq$常数：

$$\nabla\left(\frac{1}{\mu}\right)\times(\nabla\times\boldsymbol{A})-\frac{1}{\mu}\nabla^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}$$ (取库仑规范)

圆柱坐标系：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)-\frac{1}{\mu}(\nabla^2\boldsymbol{A})_r=J_r$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial z}\left(rA_\theta\right)\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\right]-\frac{1}{\mu}\left(\nabla^2\boldsymbol{A}\right)_\theta=J_\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial z}\right)-\frac{1}{\mu}\left(\nabla^2\boldsymbol{A}\right)_z=J_z$$

轴对称平面场 (r,z)：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(rA_\theta\right)+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)+\frac{1}{\mu}\left(\nabla^2\boldsymbol{A}\right)_\theta=-J_\theta$$

- 矢量磁位与磁感应强度的关系： $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$

直角坐标系

$$\left.\begin{aligned}B_x&=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\\B_y&=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\\B_z&=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\end{aligned}\right\}$$

二维平面场：

$$A=A_z e_z \qquad A_x=A_y=0 \qquad \begin{cases}B_x=\dfrac{\partial A_z}{\partial y}\\B_y=-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\end{cases}$$

圆柱坐标系

$$\left.\begin{aligned}B_r&=\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\\B_\theta&=\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\\B_z&=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\end{aligned}\right\}$$

轴对称平面场：

$$\mathbf{A}=A_\theta e_\theta \qquad A_r=A_z=0 \qquad \begin{cases}B_r=-\dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\\B_z=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\end{cases}$$

1.4 波动方程

在均匀各向同性媒质中，从麦克斯韦方程组可导出场量的波动方程和亥姆霍兹方程。

引入动态位：$\boldsymbol{A}$ 和 φ，用以描述、分析和计算电磁场，它们是空间坐标和时间的函数。

$$\begin{cases} \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \end{cases} \xrightarrow[\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}]{\text{洛伦兹规范}} \begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{J} \\ \nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

达朗贝尔方程

自学：教材 **2.1~2.3** 节。（自学提纲）

作业：

习题 **1.3，1.4，2.1，2.2**