

数理方程与特殊函数

目录

第1章 偏微分方程定解问题

第2章 分离变量法

第3章 特殊函数及其应用

第4章 积分变换法

第5章 基本解方法

《数理方程与特殊函数.40420193》教学日历

教学主体内容顺序安排跟教材有所不同，此处仅供参考，会根据具体情况做适当调整；

所列次序为上课顺序课次而非自然周次。

课次	教 学 内 容	
1	第1章	本课程教学公告；课程简介； 三个典型方程导出
2	第1章	定解问题及适定性,一阶线性偏微分方程通解与特征线法,
3	第1章	波动方程行波解, 三维波动方程Poisson公式
4	第1章	降维法与二维波动方程Poisson公式； 二阶线性偏微分方程的标准化与分类
5	第1章 第2章	叠加原理与齐次化原理； 分离变量法及实例
6	第2章	Sturm-Liouville 定理，固有值与固有函数； 非齐次化问题处理
7	第2章第4章	非齐次边界条件的处理； Fourier变换法
8	第4章	Laplace变换法，其他变换介绍
9	第5章	δ -函数，广义函数介绍
10	第5章	$Lu=0$ 型方程的基本解
11	第5章	Green函数法
12	第5章	初值问题的基本解方法
13	第3章	Legendre函数
14	第3章	Bessel函数
15	第3章	特殊函数应用举例； 期末总结与考试安排



第1章 偏微分方程定解问题

§ 1.1 基本概念

§ 1.2 三大典型方程的导出

§ 1.3 定解问题及适定性

§ 1.4 一阶线性偏微分方程的通解与特征线法

§ 1.5 波动方程的行波解

§ 1.6 三维波动方程的Poisson公式

§ 1.7 二阶线性偏微分方程的分类与标准化

§ 1.8 叠加原理与齐次化原理

§ 1.1 基本概念

设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$u = u(X) = u(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

一个微分方程指的是联系未知函数 $u(X)$ 和它的（偏）导数的方程，一般具有下列形式：

$$F\left(X, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0$$

其中 $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

常微分方程（ODE）：未知函数为**单**变量函数

偏微分方程（PDE）：未知函数为**多**变量函数

线性方程：具有形式 $L[u] = f$

u 和其导数的线性组合

自由项
(只依赖独立变量)

方程阶数：出现的未知函数（偏）导数的**最高**阶数

齐次方程： $L[u] \equiv 0$

例： $u_{xy} + u^3 = 5u_x$

非线性 2阶 齐次

一些线性偏微分方程：

1 阶： $u_t + au_x + bu_y = 0$ (Transport equation)

2 阶： $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ (Wave equation)

$u_t - a^2 u_{xx} = 0$ (Heat equation)

$\nabla^2 u := u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplace equation)

$u_{tt} - a^2 u_{xx} + bu_t + cu = 0$ (Telegraph equation)

$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u + Vu$ (Schrödinger equation)

高阶： $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$ (Beam equation)

非线性偏微

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

(KdV equation)

$$u_t + uu_x = 0$$

(Hamilton-Jacobi equation)

方程组

$$\begin{cases} E_t = \text{rot } B \\ B_t = -\text{rot } E \\ \text{div } B = \text{div } E = 0 \end{cases}$$

(Maxwell's equations)

$$\begin{cases} \vec{u}_t + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \varepsilon \nabla^2 \vec{u} = -\nabla p / \rho \\ \text{div } \vec{u} = 0 \end{cases}$$

(Navier-Stokes equations)

§ 1.2 三大典型方程的导出

例：弦的横振动（d'Alembert, 1760's）

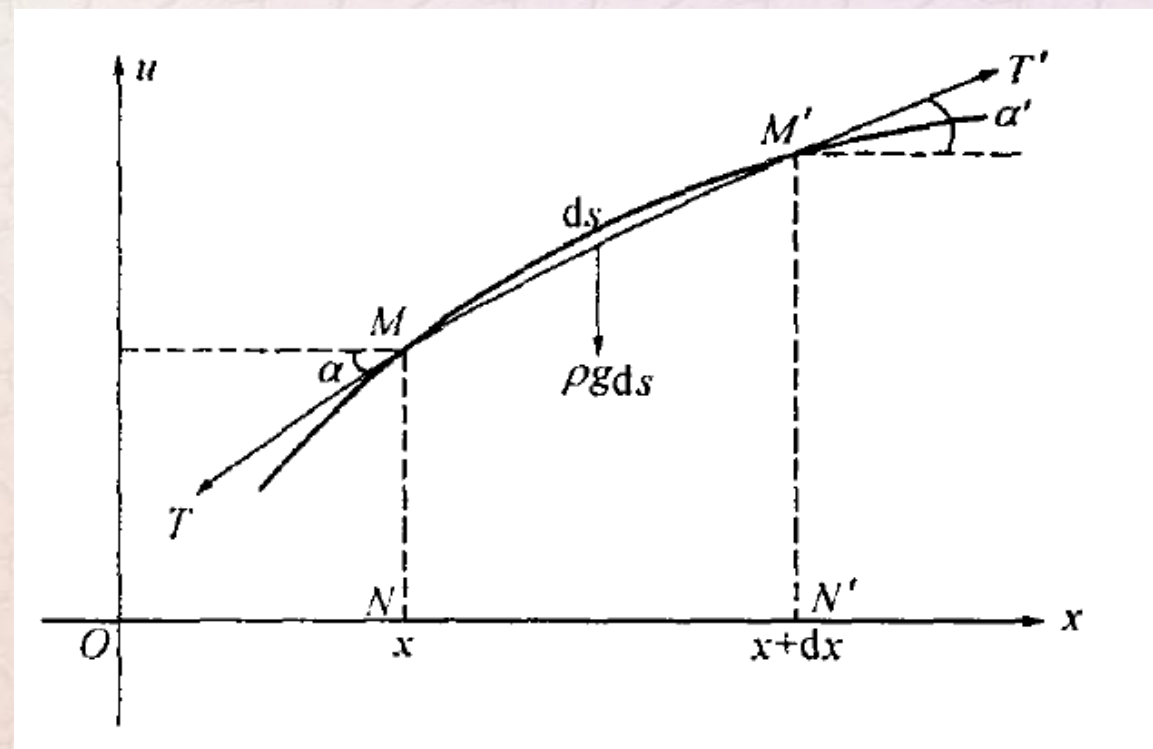
设有一根均匀柔软的细弦，平衡时沿直线拉紧，除受不随时间而变的张力作用及弦本身重力外，不受外力影响。

模型假设：

- （1）弦细、均匀且无弯曲阻力，平衡时沿直线拉紧
- （2）除张力、重力外不受其它外力；
- （3）只沿垂直平衡位置方向作微小平面运动

用微元法的思想，我们把弦上的点的运动看做是小弧段的运动，然后再考虑小弧段趋于 0 时的极限情况。

在弦上任取一弧段 MM' ，
其长为 ds ，设 ρ 是弦的线密度，
弧段 MM' 两端所受的张力记为 T
和 T' ，其方向为切线方向。



因为弦只有横振动，在 x 轴方向没有位移，由Hooke定律，张力 T 与时间无关。

合力在 x 方向上的分量为 0，即

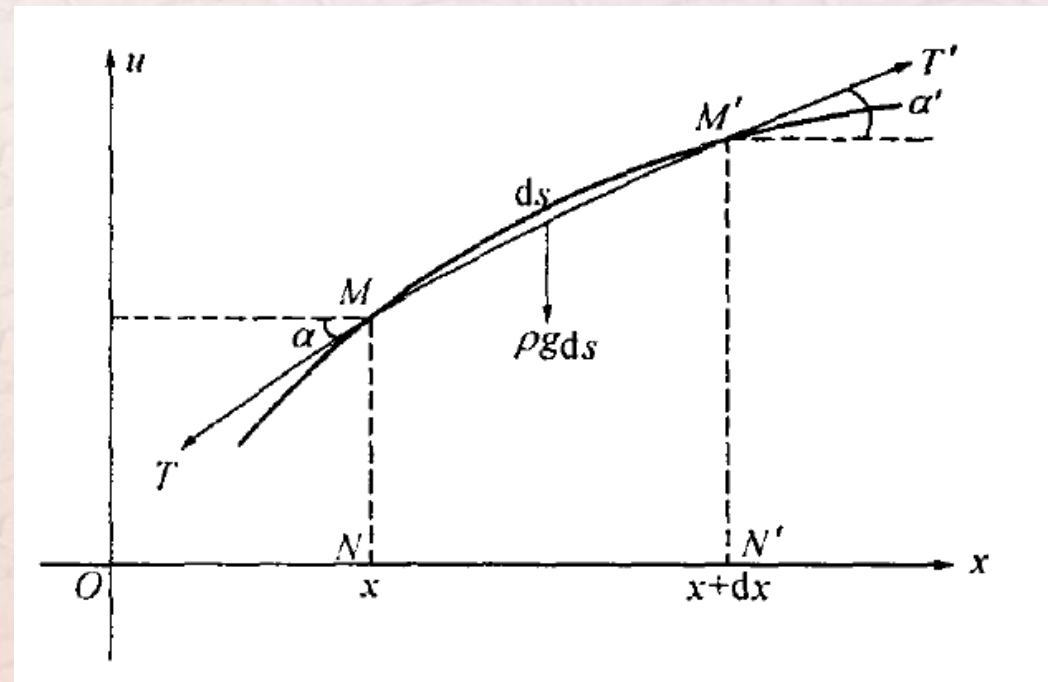
$$T' \cos \alpha' - T \cos \alpha = 0.$$

因为振动微小，我们可以假设：

$$\alpha \approx 0, \quad \alpha' \approx 0.$$

故有： $\cos \alpha \approx 1, \quad \cos \alpha' \approx 1.$

从而，近似地 $T = T'.$



在 u 轴方向弧段 MM' 受力总和为：

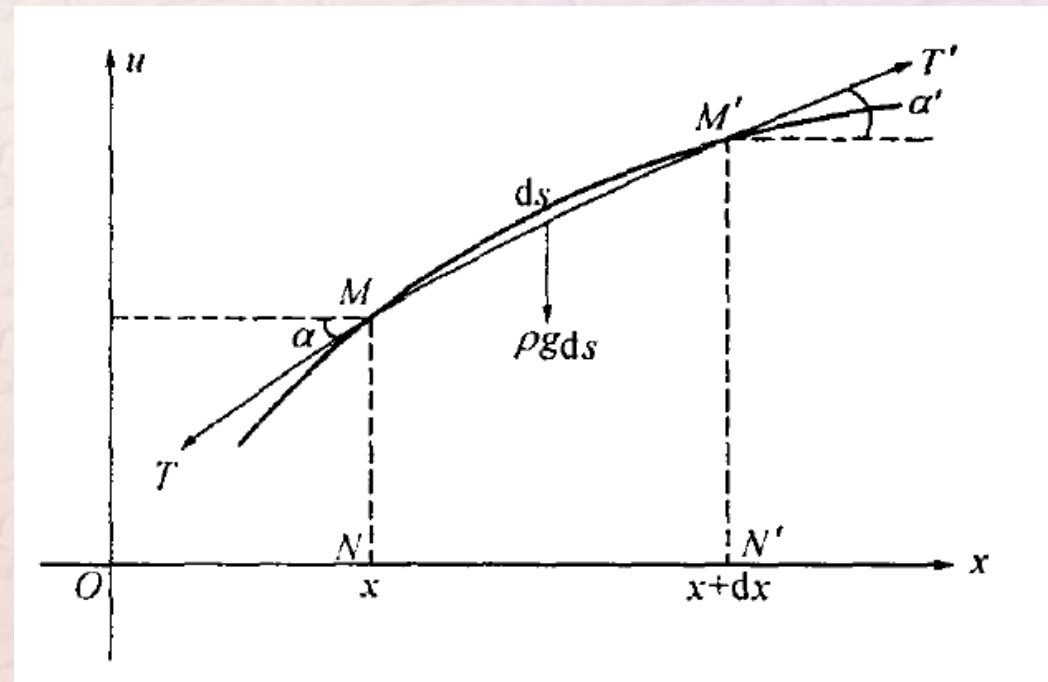
$$T' \sin \alpha' - T \sin \alpha - \rho g ds$$

因为 $\alpha \approx 0$, $\alpha' \approx 0$, 有

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

$$\sin \alpha' \approx \tan \alpha' = \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x},$$

$$ds = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2} dx \approx dx.$$



由Newton第二定律可得

$$T' \sin \alpha' - T \sin \alpha - \rho g ds = \rho ds \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2},$$

$$T \left(\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) - \rho g dx \approx \rho dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

$$\text{由于 } \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx,$$

$$\text{于是 } \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\rho g}{T} \right) dx = dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2},$$



或者
$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - g.$$

如果重力相对于张力忽略不计，我们可以得到弦的自由振动方程

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

其中 $a^2 = \frac{T}{\rho}.$

如果在振动过程中，弦上另外还受到一个与弦振动方向平行的外力，其在 t 时刻弦上 x 点处的外力密度（单位弦长所受外力）为 $F(x, t)$. 此时不难推得弦的强迫振动方程为

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t),$$

函数 $f(x, t) = F(x, t) / \rho$ 表示在 x 处单位质量上的外力。

上述方程称为**一维非齐次波动方程**。

类似地，可以推出均匀薄膜的横振动满足二维波动方程

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, y, t),$$

其中 $a^2 = \frac{T}{\rho}$ ， T 为张力， ρ 表示薄膜的面密度，

$f(x, t)$ 表示 t 时刻在 (x, y) 处单位质量上的外力。

例： 电磁场方程 (三维波动方程)

E : 电场强度

D : 电感应强度

H : 磁场强度

B : 磁感应强度

场的物质方程:

$$D = \varepsilon E$$

ε 为介电常数,

$$B = \mu H$$

μ 是导磁率,

$$J = \sigma E$$

σ 为导电率

其中 J 为传导电流的面密度。

假定介质是均匀且各向同性的, 此时, ε , μ , σ 均为常数。

Maxwell方程组：

Ampère方程：
$$\operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

Faraday方程：
$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Gauss方程：
$$\begin{cases} \operatorname{div} B = 0 \\ \operatorname{div} D = \rho. \end{cases}$$

其中 ρ 为电荷的体密度。

一方面,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} H &= \operatorname{rot} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) = \sigma \operatorname{rot} E + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} E \\ &= -\sigma \frac{\partial B}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \\ &= -\sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} H &= \operatorname{grad} \operatorname{div} H - \nabla^2 H \\ &= -\nabla^2 H, \quad \left(\because \operatorname{div} H = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} B = 0 \right) \end{aligned}$$

最后我们得到：

$$\nabla^2 H = \sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}.$$

若消去H则得到E满足的方程：

$$\nabla^2 E = \sigma\mu \frac{\partial E}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

若介质不导电($\sigma = 0$)，则上述两个方程简化为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \nabla^2 H, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \nabla^2 E,$$

它们都称为**三维波动方程**。

若将三维波动方程以标量函数的形式表达出来，则可写成：

$$u_{tt} = a^2 \nabla^2 u = a^2 \Delta u = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

其中 $a^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$, u 是 H (或 E) 的任意一个分量。

例： Poisson 方程

对于静电场而言，设 u 是电位，则

$$E = -\text{grad } u.$$

$$\Delta u = \text{div grad } u = -\text{div } E$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} D = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

$$\text{i.e. } \Delta u = f, \quad (f = -\frac{\rho}{\varepsilon})$$

此即为Poisson方程。

若是无源电场，即 $\rho = 0$,

则 $\Delta u = 0$,

这是Laplace方程或称为调和方程。

一般的， n 维Laplace方程为： $\Delta_n u = 0$,

$$\text{其中 } \Delta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

总结：波动方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f$$

(有外部作用)

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$$

(无外部作用)

静电场

$$\Delta u = f$$

(Poisson equation)

$$\Delta u = 0$$

(Laplace equation)

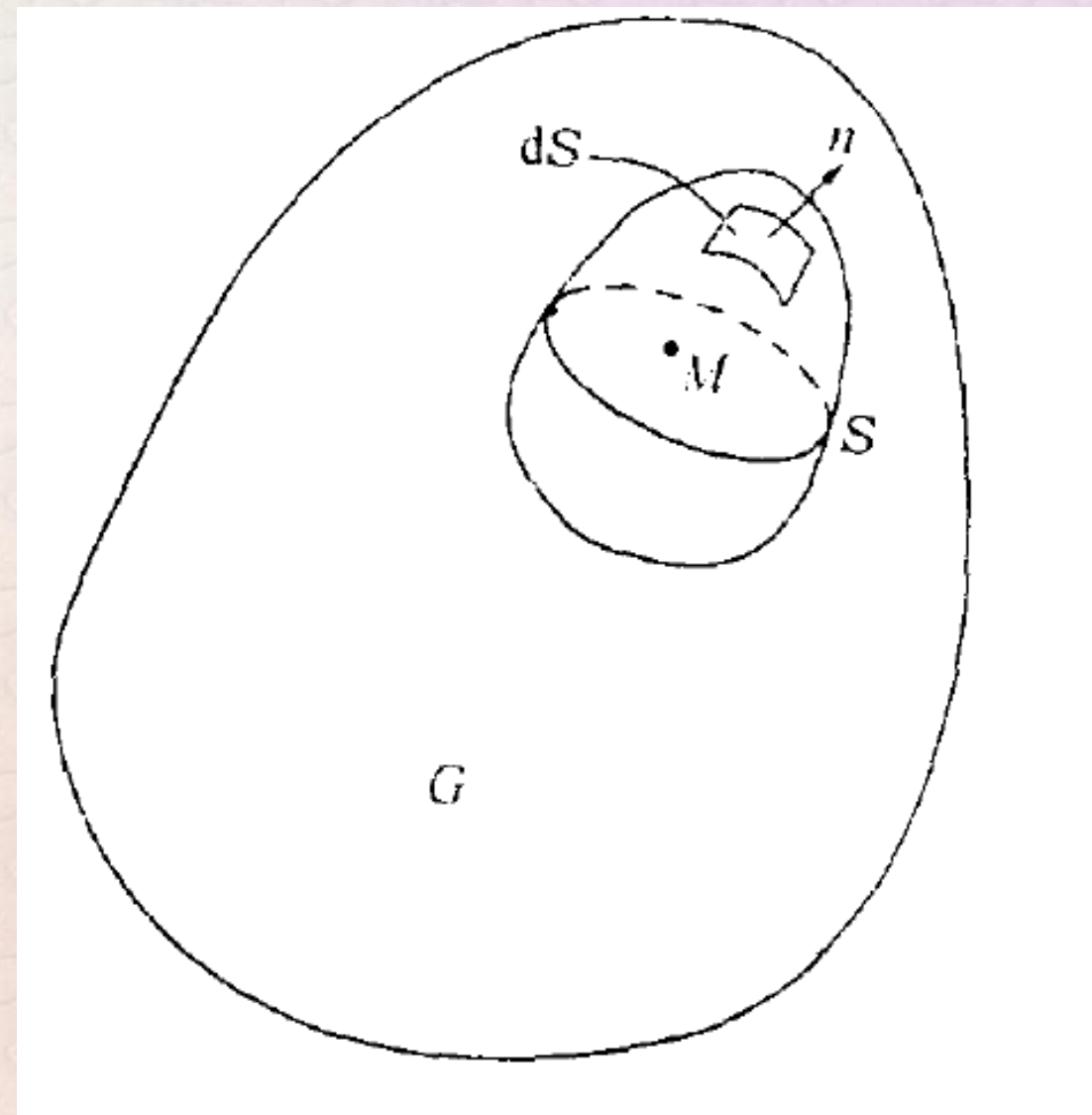
例：热传导方程（Fourier, 1850's）

由于物体内部温度分布的不均匀，热量要从温度较高的点处流向温度较低的点处，热传导问题归结为求物体内部温度分布规律。

现在考虑三维空间中一均匀、各向同性的物体 G ，假定它内部有热源，并且与周围介质有热交换，我们来研究物体内部温度的分布和变化。

我们先考虑物体中一个区域的温度，为此，在物体中任取一封闭曲面 S ，它所包围的区域为 V ，以 $u(x, y, z, t)$ 表示 t 时刻点 $M(x, y, z)$ 处的温度。

由 $Fourier$ 热传导定律，
物体在无穷小时间 dt 内，
流过一个无穷小面积 dS
的热量 dQ 与时间 dt ，
曲面面积 dS ，以及物体
温度 u 沿曲面 dS 的法线
方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$
三者成正比，



即
$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt,$$

其中 $k=k(x,y,z)$ 称为物体的热传导系数，这里为常数，外法线方向 n 所指的一侧为 dS 的正侧，上式中的负号的出现是由于热量由温度高的地方流向温度低的地方。

利用上面的关系，从时刻 t_1 到时刻 t_2 通过曲面 S 流入区域 V 的全部热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt,$$

内部热源发出的热量为

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V g dv dt,$$

这里 $g=g(x,y,z,t)$ 为热源密度，即热源在单位时间单位体积流出的热量。

设物体的比热为常数 c ，密度为常数 ρ ，则在区域 V 内，温度由 $u(x, y, z, t_1)$ 到 $u(x, y, z, t_2)$ 所需的热量为

$$Q_3 = \iiint_V c\rho [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dv = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv dt,$$

根据能量守恒，有

$$Q_3 = Q_1 + Q_2, \quad \text{即得}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv dt = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V g dv dt$$

(Gauss公式)

$$= \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V k \Delta u dv dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V g dv dt.$$

由于时间间隔 $[t_1, t_2]$ 及区域 V 是任意的，被积函数是连续的，因此在 G 内任意一点都有

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u + g.$$

令 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f = \frac{g}{c\rho}$, 则有

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, t) = a^2\Delta u + f,$$

它称为**热传导方程** 或者**扩散方程**。

总结：热传导方程

$$u_t - a^2 \Delta u = f \quad (\text{有内部热源})$$

$$u_t - a^2 \Delta u = 0 \quad (\text{无内部热源})$$

稳恒温度场

$$\Delta u = f \quad (\text{Poisson equation})$$

$$\Delta u = 0 \quad (\text{Laplace equation})$$

注：

(1) 流体反应扩散方程是热传导方程

(2) 三大典型 2 阶偏微分方程为：

波动、热传导和 Poisson 方程

对应：2 阶双曲、抛物和椭圆型方程



§ 1.3 定解问题及适定性

§ 1.3.1 通解与特解

假设在空间区域 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 内方程

$$F(X, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}) = 0$$

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

有解 $u = u(X)$ 且 u 具有方程中出现的各阶连续偏导数, 则称其为**古典解**。

例 求解一阶PDE: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, y).$

解 $u = f(y).$

对任意 $f \in C(\mathbb{R})$, u 都是方程在全平面上经典解。

例 求解2阶PDE: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, u = u(x, y).$

解 $u = f(x) + g(y).$

对任意 $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, u 都是方程在全平面上经典解。

定义: m 阶方程含有 m 个任意函数的解称为方程的**通解**。

不含任意函数或任意常数的解称为方程的一个**特解**。

例 2维平面上Laplace方程: $\Delta_2 u = 0.$

(1) 全平面上任意一个解析函数的实部或虚部都是它的解;

(2) $u = \ln \frac{1}{r}, r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 是其中心对称解($r \neq 0$).

例 n 维Laplace方程: $\Delta_n u = 0, \quad n \geq 3.$

$u = \frac{1}{r^{n-2}}$ 是其中心对称解 ($r \neq 0$).

§ 1.3.2 定解条件

一个偏微分方程配以一定的定解条件就构成一个**定解问题**。

定解条件一般有两类:

1. 初始条件
2. 边界条件。

1. 初始条件

例 弦振动方程初始条件: $u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x).$

2. 边界条件

先以弦振动为例，以 $x=0$ 表示其左端点。

(1) 第I类边界条件： $u|_{x=0} = f(t), t \geq 0.$

(2) 第II类边界条件： $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = f(t), t \geq 0.$

(3) 第III类边界条件： $(u_x + \sigma u)|_{x=0} = f(t), t \geq 0.$

其中 $\sigma = k / T$, k 为弹性系数。

若上述 $f(t)=0$ ，则上面的 (1) (2) (3) 分别称为第I，第II，第III类齐次边界条件。

再以热传导为例，以 ∂G 表示区域 G 的边界。

(1) 第I类边界条件，又称Dirichlet 条件：

$$u(x, y, z, t)|_{\partial G} = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in G, \quad t \geq 0.$$

(2) 第II类边界条件，又称Neumann 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial G} = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in G, \quad t \geq 0.$$

(3) 第III类边界条件，又称Robin 条件或混合边界条件：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)|_{\partial G} = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in G, \quad t \geq 0.$$

§ 1.3.3 定解问题及其适定性

三种定解问题：

- (1) 初值问题： 只有初始条件
- (2) 边值问题： 只有边界条件
- (3) 混合问题： 既有初始条件又有边界条件

定义： 如果一个定解问题的（古典）解**存在、唯一且稳定**，则称此定解问题是**适定的**。

定解问题：偏微分方程定解条件

(初)边值条件

解稳定性：定解条件微小变动蕴含解微小变动

例 (Hadamard, 1917) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, y > 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \\ u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = \frac{1}{n} \sin nx, \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \end{array} \right.$$

可以验证 (练习) 其有 (唯一) 解

$$\sinh ny = \frac{1}{2} (e^{ny} - e^{-ny})$$

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin nx \sinh ny$$

易见：当 $n \rightarrow \infty$ 时，（初始）条件 $\frac{1}{n} \sin nx \rightarrow 0$,

解 $\frac{1}{n^2} \sin nx \sinh ny$ ($y > 0$) **不趋于0**

此即表明该方程解**不稳定**

注：稳定性在数值（应用）处理时至关重要

适定性： 解存在性 + 解唯一性 + 解稳定性

§ 1.4 一阶线性偏微分方程的通解 与特征线法

§ 1.4.1 解法初探

例：求方程 $u_x(x, y) = 2xy$ 的通解.

解：方程两边关于 x 直接积分可得

$$u(x, y) = x^2 y + f(y).$$

这里 f 是关于 y 的任意函数.

注：(1) 对某一变量进行积分时，需加上一个关于其余变量的任意函数

(2) 此法称为“直接积分法”

思考：什么样的偏微方程可用此法求解？

一般偏微方程不能直接积分求解！

自然想法：

偏微方程 $\xrightarrow{?}$ 常微方程 $\xrightarrow{?}$ 求解

预备知识

1 阶常微

- 可分离: $f(y)y'(x) = g(x)$
 $\Rightarrow f(y)dy = g(x)dx$
 $\Rightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx$

$\int f(y)dy$ 表示 f 的不定积分

注: 方程未必线性

- 线性: $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$

两边同乘积分因子 $m(x) = e^{\int p(x)dx}$ 可得

$$\frac{d}{dx}(m(x)y(x)) = m(x)q(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{m(x)} \int m(x)q(x)dx$$

§ 1.4.2 两个自变量的一阶线性偏微分方程

$$au_x + bu_y + cu = f \quad (\text{A})$$

系数 a, b, c, f 均为区域 D 上关于 x, y 的连续函数, $D \subset \mathbb{R}^2$

Case 1. (不妨设) $a \equiv 0, b \neq 0$

$$\text{方程退化为: } u_y + \frac{c}{b}u = \frac{f}{b}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{m(x, y)} \left[\int m(x, y) \frac{f}{b} dy + g(x) \right]$$

$$\text{其中: } m(x, y) = e^{\int \frac{c}{b} dy}, \quad g \in C^1$$

Case 2. $ab \neq 0$ （无法用直接积分求解）

作待定自变量变换

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \quad J = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

为方便起见， u 作为新自变量的函数仍旧记为 $u(\xi, \eta)$.

由链式法则

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a\varphi_x + b\varphi_y)u_\xi + (a\psi_x + b\psi_y)u_\eta + cu = f \quad (1)$$

若 $\xi = \varphi(x, y)$ 满足一阶线性PDE:

$$a\varphi_x + b\varphi_y = 0 \quad (2)$$

则由 (1) 得: $(a\psi_x + b\psi_y)u_\eta + cu = f \quad (3)$

对 η 积分可求出通解。

考察一阶线性PDE: $\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)} \quad (4)$

我们发现 (2) 的解与 (4) 的解之间有下面的关系

定理 若 $\varphi(x, y) = h$ (常数) 是 (4) 在区域 D 上的隐式通解 (积分曲线族), 则 $\xi = \varphi(x, y)$ 是 (2) 在区域 D 上的一个解; 反之亦然。

Proof. 设 $\varphi(x, y) = h$ (常数) 是 (4) 在区域 D 上的隐式通解 (积分曲线族),

则有 $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$

结合 $\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)},$

$\Rightarrow a\varphi_x + b\varphi_y = 0.$

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)} \quad (4)$$

$$a\varphi_x + b\varphi_y = 0 \quad (2)$$

反过来, 证明类似。

定义 (4) 称作一阶线性偏微分方程 (A) 的特征方程,
其积分曲线称之为**特征曲线**。

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)} \quad (4)$$

例:
$$\begin{cases} au_x + bu_t = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \in C^1 \end{cases} \quad ab \neq 0$$

解: 特征方程为 $\frac{dx}{a} = \frac{dt}{b}$

特征线为 $bx - at = h$ (h 为常数)

令 $\xi = bx - at, \quad \eta = x$

则方程化为 $u_\eta = 0$.

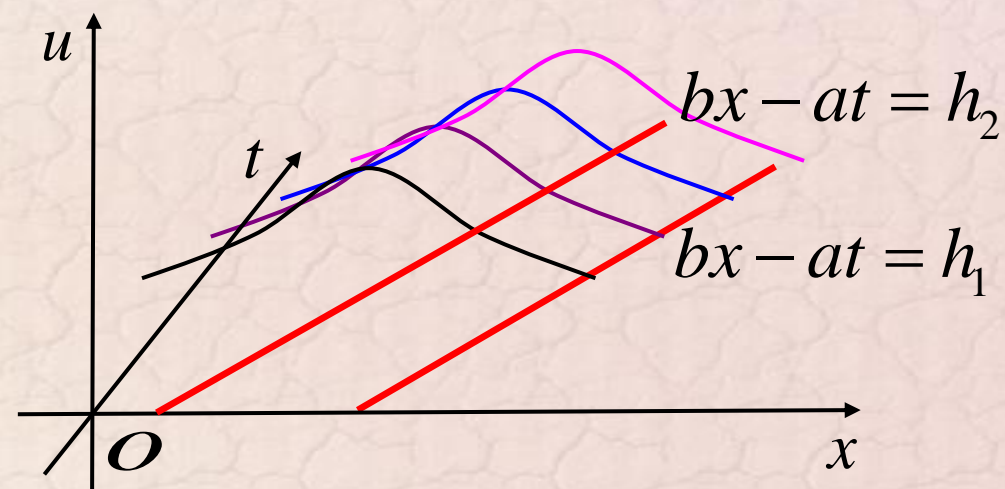
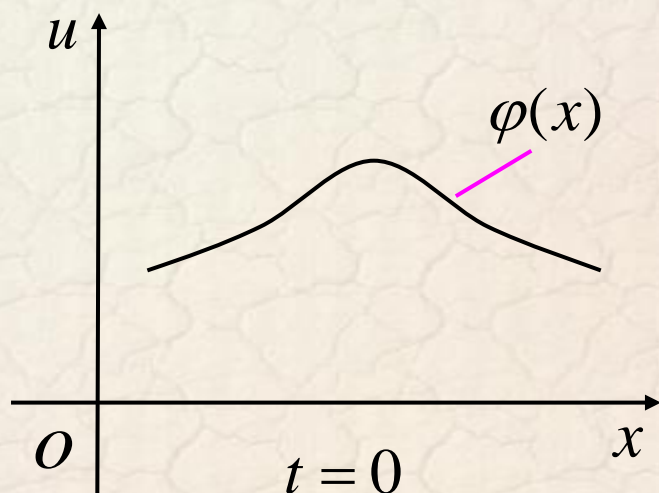
$$\Rightarrow u = g(\xi) = g(bx - at), \quad g(\xi) \in C^1.$$

由初始条件 $u(x, 0) = \varphi(x)$

$$\Rightarrow u(x, t) = \varphi\left(x - \frac{a}{b}t\right).$$

$$\frac{a}{b} < 0 \quad (> 0)$$

左(右)行单波



例：(变系数) 求方程 $-yu_x + xu_y = 0$ 的通解

解：特征方程为

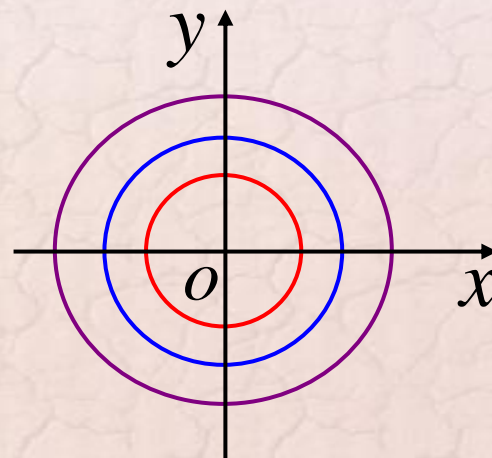
$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \quad \Rightarrow \quad \text{特征曲线 } x^2 + y^2 = h$$

$h > 0$ 为常数

从而通解为

$$u(x, y) = g(x^2 + y^2)$$

这里 $g \in C^1$.



合理的侧边条件可以确定解，这种求解定解问题的方法称之为**通解法**。

§ 1.4.3 n 个自变量的一阶线性偏微分方程 ($n \geq 2$)

一般的, n 个自变量的一阶线性PDE为:

$$\sum_{i=1}^n b_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(X)u = f(X), \quad X \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (\text{B})$$

其中 $b_i(X), C(X), f(X) \in C(D)$.

与 $n = 2$ 情形相似, 先考虑相应的齐次方程

$$\sum_j^n b_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0. \quad (1)$$

引入特征方程组

$$\frac{dx_1}{b_1} = \frac{dx_2}{b_2} = \dots = \frac{dx_n}{b_n}. \quad (2)$$

选定其中任何一个变量，如 x_n ，

特征方程(2)看成是一个常微分方程组

$$\frac{dx_j}{dx_n} = \frac{b_j}{b_n}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3)$$

它的解是 \mathbb{R}^n 中的曲线，称此积分曲线为方程(B)的**特征曲线**。

如果引入参数 t ，(3)可写成

$$\frac{dx_j}{dt} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

如能将方程组(2)中某些方程凑成一个全微分的方程

$$d\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j = 0,$$

则得到的积分 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = h$ (常数),

称作特征方程组 (2) 的一个首次积分。

$$\frac{dx_1}{b_1} = \frac{dx_2}{b_2} = \cdots = \frac{dx_n}{b_n} \quad (2)$$

由微分方程理论, 特征方程组(2)恰好存在 $n - 1$ 个独立的首次积分。这 $(n - 1)$ 个独立的首次积分联立起来以隐函数方式给出了特征方程组 (2) 的隐式通解 (积分曲线族)。

特别的, 当 $n=2$ 时, 正好有一个独立的首次积分, 即为积分曲线族。

与 $n=2$ 情形相似, 齐次方程(1)的解与特征方程组(2)的首次积分有下面的关系

$$\sum_j^n b_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

定理 若 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = h$ 是特征方程组 (2) 在区域 D 上的

一个首次积分, 则 $\xi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 (1) 在区域 D 上的一个解。

反之亦然。

假定我们找到特征方程组 (2) 的 $n - 1$ 个首次积分:

$$\xi_j = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

作如下自变量变换:

$$\begin{cases} \xi_j = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n), & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ \xi_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

其中 φ_n 任取, 只需满足, 在 D 上

$$J = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0.$$

为方便起见, u 作为新自变量的函数仍旧记为 $u(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

将 $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$

代入原方程(B) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu &= \sum_{i=1}^n b_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) + cu \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi_j} + cu = f \end{aligned}$$

由上面的定理可知: $\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi_n} + cu = f$$

特别的, 若 $c = 0, f = 0,$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi_n} = 0, \quad \Rightarrow$$

$$u = g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = g(\varphi_1(X), \varphi_2(X), \dots, \varphi_{n-1}(X)),$$

其中 $g \in C^1$ 为任意 $n-1$ 元函数。定出 g , 则可以得到特解。

例： 求下列方程的通解

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

解： 特征方程组为 $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n}.$

不难得到 $n-1$ 个首次积分：

$$\frac{x_j}{x_n} = h_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

\Rightarrow 通解为 $u = g\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$

其中 $g \in C^1$ 为任意 $n-1$ 元函数。

例： 求解下面的初值问题

$$\begin{cases} u_t = xu_x + yu_y + u - xye^{2t} \\ u|_{t=0} = h(x, y). \end{cases} \quad (h \in C^1)$$

解： 特征方程组为

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-x} = \frac{dy}{-y}.$$

\Rightarrow 两个首次积分 $\begin{cases} xe^t = c_1 \\ ye^t = c_2 \end{cases}$ 令 $\begin{cases} \xi = xe^t \\ \eta = ye^t \\ \tau = t \end{cases}$

$$\Rightarrow \text{原方程为 } \frac{\partial u}{\partial \tau} = u(\xi, \eta, \tau) - \xi\eta$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow u(\xi, \eta, \tau) &= e^{\tau} \left[\int e^{-\tau} (-\xi\eta) d\tau + g(\xi, \eta) \right] \\ &= \xi\eta + e^{\tau} g(\xi, \eta) = xye^{2t} + e^t g(xe^t, ye^t).\end{aligned}$$

利用初始条件

$$u|_{t=0} = xy + g(x, y) = h(x, y)$$

$$\Rightarrow g(x, y) = h(x, y) - xy$$

$$\Rightarrow u = xye^{2t} + e^t \left[h(xe^t, ye^t) - e^{2t} xy \right].$$

例： 求下列问题通解 ($u=u(x,y,z)$)

$$yu_x - xu_y + (x^2 - y^2)u_z = 0$$

解： 特征方程组为 $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{x^2 - y^2}$

\Rightarrow 两个首次积分 $\begin{cases} x^2 + y^2 = c_1 \\ 2z + (x + y)^2 = c_2 \end{cases}$? 如何得到的

\Rightarrow 通解为 $u = g(x^2 + y^2, 2z + (x + y)^2), \quad g \in C^1.$

§ 1.5 波动方程的行波解

§ 1.5.1 两个例子

例 求解方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

解: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [u_y - u] = 0$

可考虑等价方程组
$$\begin{cases} u_y - u = v \\ v_x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = f(y), \quad u_y - u = f(y),$$

$$\Rightarrow u(x, y) = e^y \left[\int e^{-y} f(y) dy + g(x) \right],$$

$$f \in C^0, \quad g \in C^1.$$

例 求解方程 $u_{yy} - u_y = h(x)$

解法1: $\frac{\partial}{\partial y}(u_y - u) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_y - u = v \\ v_y = h(x) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v(x, y) = \int h(x) dy + f_1(x) = yh(x) + f_1(x),$$
$$\Rightarrow u(x, y) = e^y \left[\int e^{-y} v(x, y) dy + f_2(x) \right]$$
$$= e^y \left\{ \int e^{-y} [yh(x) + f_1(x)] dy + f_2(x) \right\}$$
$$= yh(x) + e^y f(x) + g(x), \quad f, g \in C^0.$$

解法2: $\begin{cases} v_y - v = h(x) \\ u_y = v \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v(x, y) = e^y \left[\int e^{-y} h(x) dy + f(x) \right] = h(x) + e^y f(x)$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \int \left[h(x) + e^y f(x) \right] dy + g(x)$$

$$= yh(x) + e^y f(x) + g(x), f, g \in C^0.$$

解法3: 看做关于 y 的2阶常微分方程, 利用常数变易法 (略)。

§ 1.5.2 一维波动方程通解与d'Alembert公式

一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a > 0 \text{ 为常数})$$

可分解为
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = v & (1) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & (2) \end{cases}$$

方程(1)(2)各有一族独立的特征线, 分别是

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = v \quad (1)$$

$$x + at = h_1, \quad x - at = h_2.$$

引入新的自变量: $\xi = x + at, \quad \eta = x - at = h_2.$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ 左边} = au_{\xi} - au_{\eta} - a(u_{\xi} + u_{\eta}) = -2au_{\eta} = v,$$

$$(2) \text{ 左边} = av_{\xi} - av_{\eta} + a(v_{\xi} + v_{\eta}) = 2av_{\xi} = 0,$$

$$\Rightarrow u_{\xi\eta} = 0.$$

$$\Rightarrow u = f(\xi) + g(\eta), \quad f, g \in C^2.$$

$$\Rightarrow u(x, t) = f(x + at) + g(x - at). \quad (1)$$

$f(x+at)$ 为左行波, $g(x-at)$ 为右行波,
一维波动方程的解有速度为 a 的两列反向行进的波组成, 称为
行波解。

例: 无界长弦的自由振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

解 将初始条件带入公式(1)

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = a[f'(x) - g'(x)] = \psi(x).$$

积分第二个式子，得

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \text{const.}$$

解 $f(x)$, $g(x)$ 的联立方程组，得

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x) + \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \text{const.} \right]$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x) - \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi - \text{const.} \right]$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x + at) + \frac{1}{a} \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \text{const.} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\varphi(x - at) - \frac{1}{a} \int_0^{x-at} \psi(\xi) d\xi - \text{const.} \right]$$



$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

这就是著名的d'Alembert公式

注：

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x + at) + \frac{1}{a} \int_{z_0}^{x+at} \psi(z) dz \right) + \frac{1}{2} \left(\varphi(x - at) - \frac{1}{a} \int_{z_0}^{x-at} \psi(z) dz \right)$$

$$=: f(x + at) + g(x - at) \quad \longleftarrow \text{通解公式}$$

左行波

右行波

波速为 a

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

解的性质

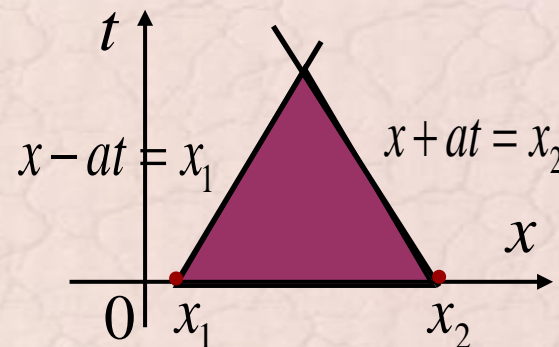
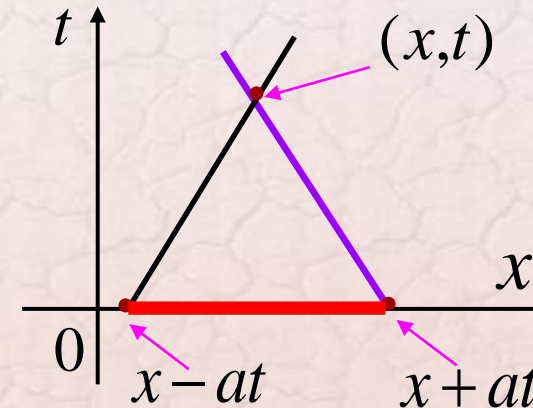
- (1) $\varphi \in C^2, \psi \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$ 为古典解, 且是唯一解
- (2) 有限传播速度 (波速为 a)

点 (x, t) 的依赖区间:

$$[x-at, x+at]$$

区间 $[x_1, x_2]$ 的决定区域:

图示阴影三角形区域

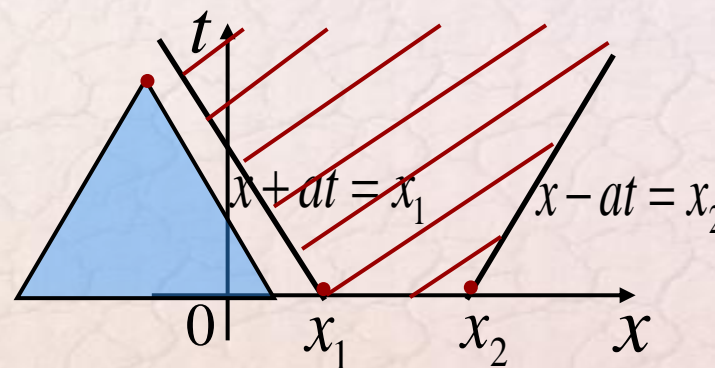


$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

解的性质

区间 $[x_1, x_2]$ 的影响区域:

图示阴影区域



(3) 奇 (偶) 初始数据产生

奇 (偶) 函数解

(4) 周期初始数据产生周期解

练习: 验证性质 (3)、(4)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

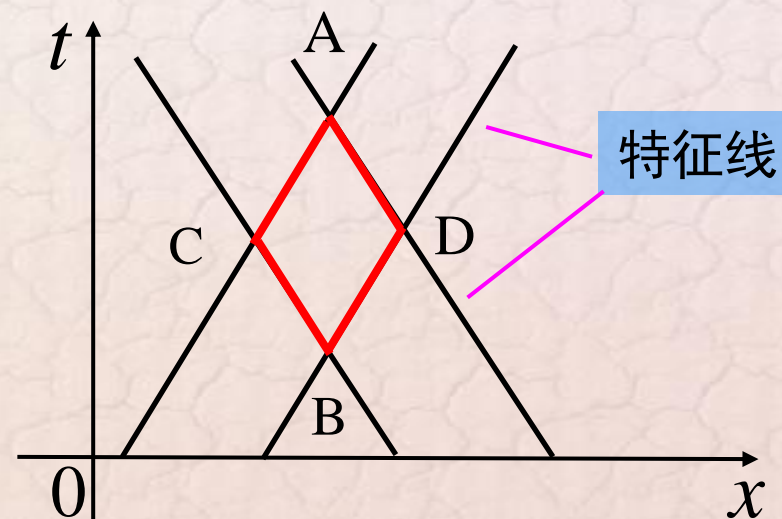
解的性质

(5) 特征平行四边形法则

$$\begin{aligned} &u(A) + u(B) \\ &= u(C) + u(D) \end{aligned}$$

证：运用d'Alembert公式

(练习)

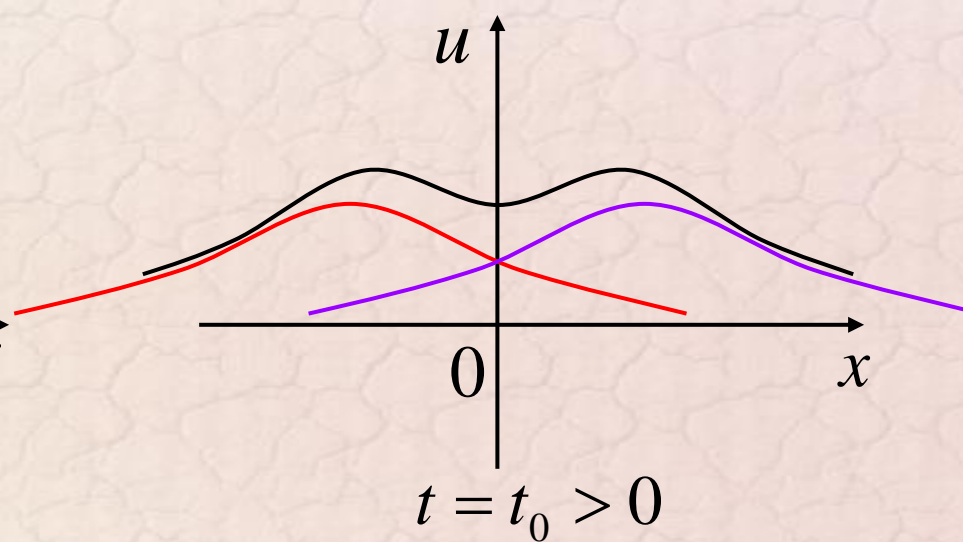
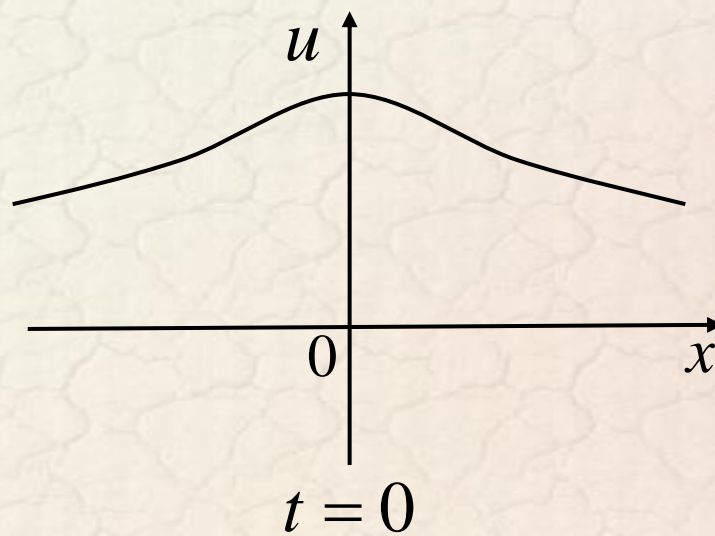


(6) 解是稳定的，即如果初值条件做微小的扰动，在有限时间内，解的误差可控制在一定的范围内，因而一维波动方程的初值问题是适定的。

例:
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad u_t(x,0) = 0, & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

解:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+(x+at)^2} + \frac{1}{1+(x-at)^2} \right)$$



$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

§ 1.5.3 d'Alembert 公式的应用

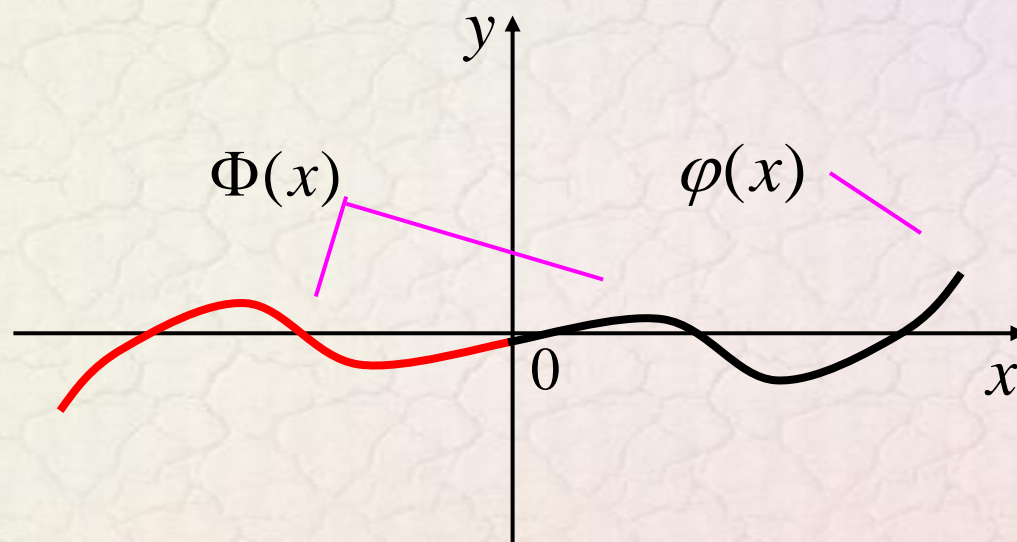
例1: 半无界弦问题 (固定端点)

$$\text{求解} \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

这里 $\varphi \in C^2, \psi \in C^1$ 且 $\varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$.

想法: 将初始条件适当延拓到整个 x 轴上,
然后运用 d'Alembert 公式

奇延拓



即

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

注：若要 $\Phi \in C^2, \Psi \in C^1$

则还必须假设 $\Phi''(0) = 0, \Psi'(0) = 0$

(练习)

相应的“延拓问题”为

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \Phi(x), \quad u_t(x, 0) = \Psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

根据 d'Alembert 公式, 此问题的解是

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\Phi(x + at) + \Phi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi$$

显然
$$u(0, t) = \frac{1}{2} (\varphi(at) + \varphi(-at)) = 0$$

容易验证: 上面所求得的 $u(x, t)$ 限制在 $x \geq 0$ 上,
是前述半无界弦问题的 (形式) 解

事实上

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\Phi(x + at) + \Phi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & t \leq \frac{x}{a}, \\ \frac{1}{2}(\varphi(x + at) - \varphi(at - x)) + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & t > \frac{x}{a}. \end{cases}$$

例2：半无界弦问题（自由端点，无弹性支撑）

$$\text{求解} \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

这里 $\varphi \in C^2, \psi \in C^1$ 且 $\varphi'(0) = 0$

这时需要将初始条件偶延拓到整个 x 轴上，

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0. \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

然后运用d'Alembert 公式，类似可得

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\Phi(x + at) + \Phi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & t \leq \frac{x}{a}, \\ \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(at - x)) + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \int_0^{at-x} \psi(\xi) d\xi \right], & t > \frac{x}{a}. \end{cases}$$



例3: 有界弦问题

$$\text{求解 } \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

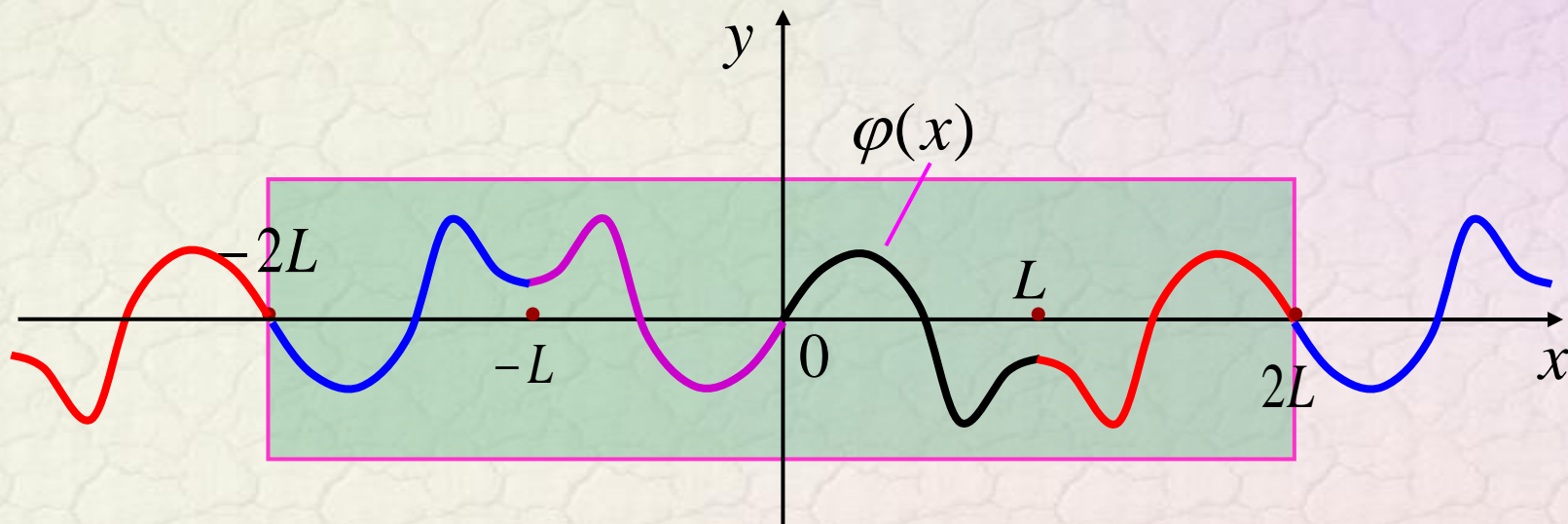
这里 $\varphi \in C^2$ 且 $\varphi(0) = 0, \varphi'(L) = 0$

注: 齐次 (第一、二类) 边界条件

左端点固定 右端点自由

想法: 将初始条件适当延拓到整个 x 轴上, 然后运用

d'Alembert 公式



固定端点奇延拓，自由端点偶延拓

进而得到以 $4L$ 为周期的延拓函数，记为 $\bar{\varphi}(x)$

根据 d'Alembert 公式，容易验证（练习）

所求有界弦问题的解是

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\bar{\varphi}(x + at) + \bar{\varphi}(x - at)) \quad (0 \leq x \leq L)$$

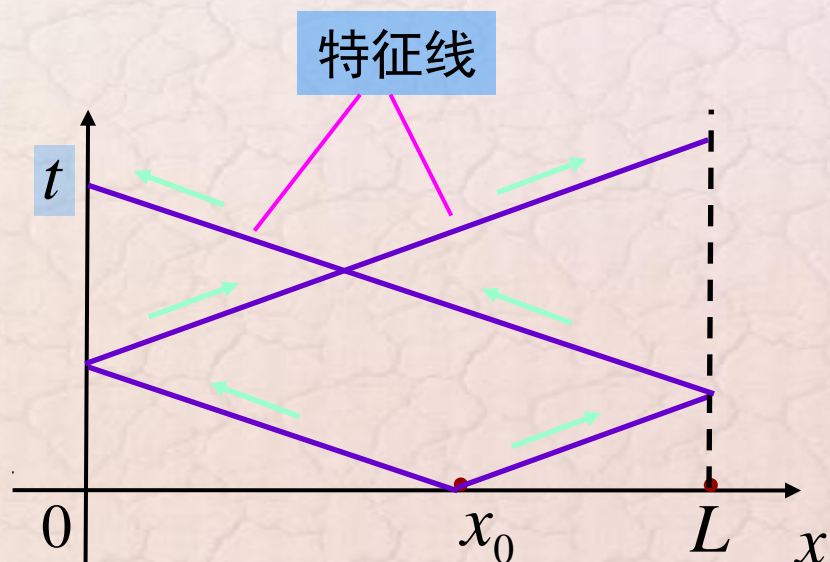
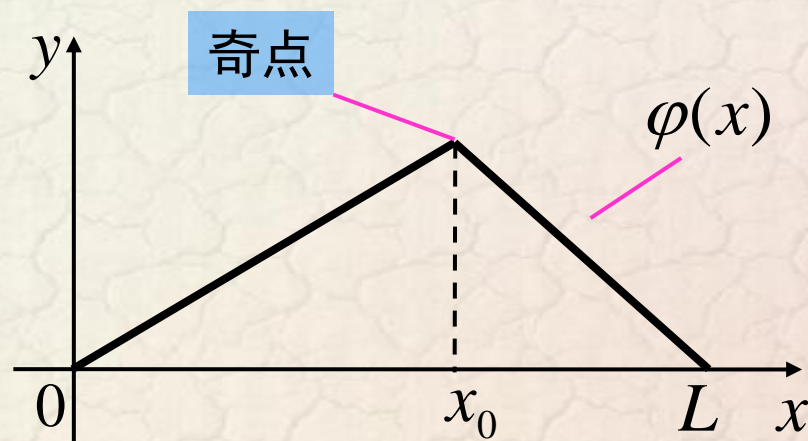
注：（1）对具有**固定或自由端点**的齐次波动方程
可以将初始条件**适当延拓**到整个 x 轴上，
然后运用 d'Alembert 公式求解（**镜像法**）

（2）可以定义波动方程的“**弱解**”，**适当降低**
初始条件的光滑性假设，d'Alembert 公式
依旧可用

例4: (被拨弄的弦)

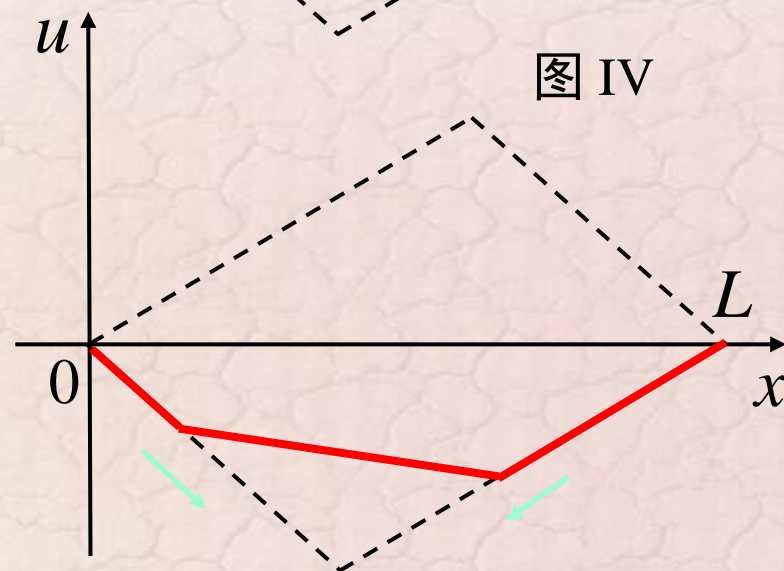
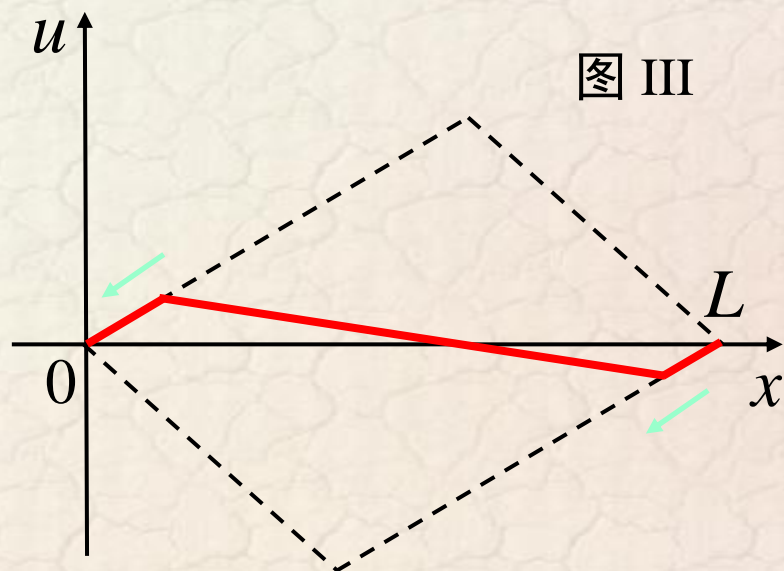
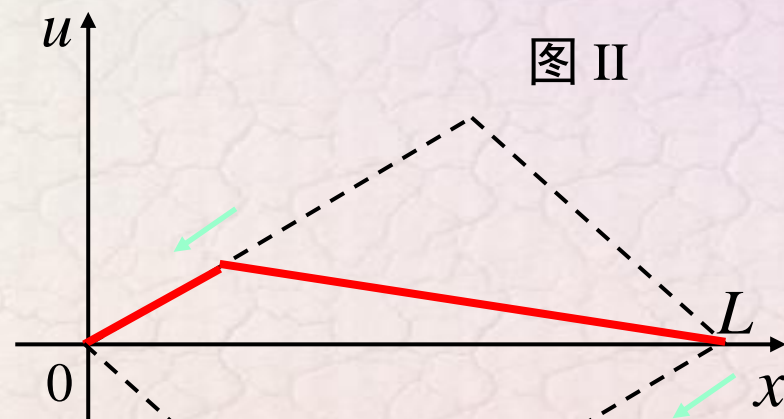
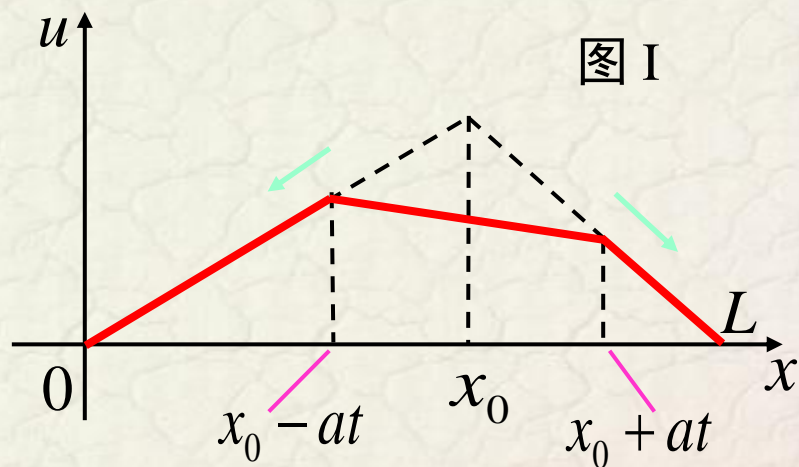
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

φ 如图所示



注: 此问题**没有** C^2 光滑解 ← **奇点沿特征线传播**

根据延拓问题的解公式可得弦的演化过程：(练习)



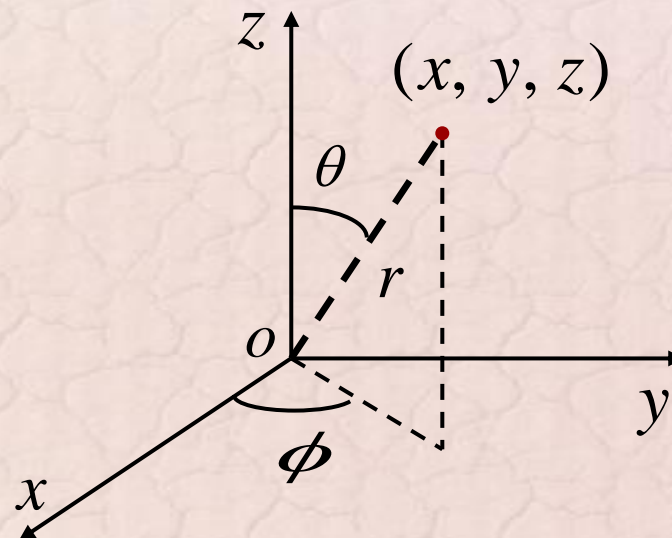
§ 1.5.4 中心对称的球面波

例： 3 维（中心对称）波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(r), \quad u_t|_{t=0} = \psi(r) & (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \end{cases} \quad (1)$$

回顾 球坐标： (r, ϕ, θ)

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ y = r \sin \theta \sin \phi & (0 \leq \phi < 2\pi) \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
\Delta_3 v &= \nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} \\
&= \frac{1}{r^2} (r^2 v_r)_r + \frac{1}{r^2} \left(v_{\theta\theta} + \cot \theta v_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} v_{\phi\phi} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} (r^2 v_r)_r + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta v_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} v_{\phi\phi} \right)
\end{aligned}$$

球面Laplace 算子

(练习)

由定解问题 (1) 中初始条件的球对称性, 利用球坐标, 可以设

$$u = u(r, t).$$

注: 一般情况波动方程的解不一定球面对称

$$\begin{aligned}\Rightarrow u_{tt} &= a^2 \Delta u = a^2 \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r \\ &= a^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) = a^2 \frac{1}{r} (ru)_{rr}\end{aligned}$$

$$u_x = u_r \frac{x}{r}$$

定解问题(1)化为

$$\Rightarrow \begin{cases} (ru)_{tt} = a^2 (ru)_{rr} & r > 0, t > 0 \\ (ru)|_{r=0} = 0, & t > 0 \\ ru(r, 0) = r\varphi(r), \quad (ru)_t(r, 0) = r\psi(r) & r \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

令 $v(r, t) = ru(r, t)$,

(2) 等同于下列半无界弦问题

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{rr} & r > 0, t > 0 \\ v|_{r=0} = 0, & t > 0 \\ v(r, 0) = r\varphi(r), \quad v_t(r, 0) = r\psi(r) & r \geq 0 \end{cases}$$

练习： 以 f_o, f_e 分别表示 f 的奇、偶延拓

则： $(f_e)' = (f')_o \quad (f_o)' = (f')_e$

注意到 对于函数 $f = f(r)$ 有

$$(rf)_o = rf_e \quad (rf)_e = rf_o$$

利用半无界弦奇延拓方法，可以得到

$$ru(r, t) = \frac{1}{2}[(r + at)\varphi_e(r + at) + (r - at)\varphi_e(r - at)] \\ + \frac{1}{2a} \int_{r-at}^{r+at} \rho \psi_e(\rho) d\rho \quad (r \geq 0)$$

\Rightarrow

$$u(r, t) = \begin{cases} \frac{1}{2r}[(r + at)\varphi(r + at) + (r - at)\varphi(r - at)] \\ + \frac{1}{2ar} \int_{r-at}^{r+at} \rho \psi(\rho) d\rho & (r \geq at) \\ \frac{1}{2r}[(r + at)\varphi(r + at) + (r - at)\varphi(at - r)] \\ + \frac{1}{2ar} \int_{at-r}^{r+at} \rho \psi(\rho) d\rho & (r < at) \end{cases}$$



问题：前面推导过程可以推广到一般维数中心对称的波动方程吗？

§ 1.6 三维波动方程的Poisson公式

例： 3 维波动方程初值问题

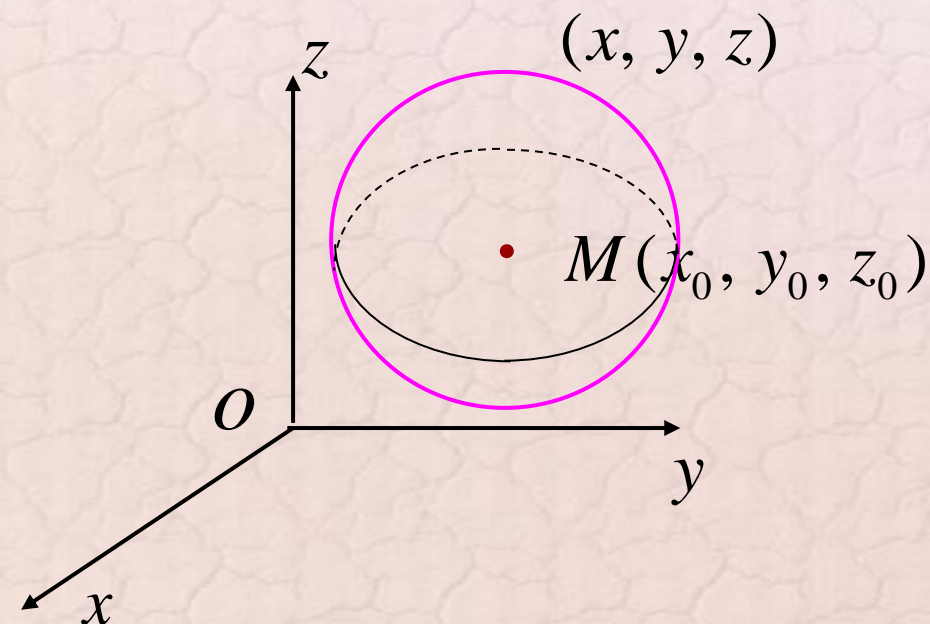
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z) & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (1)$$

一般情况下它的解**不一定**球面对称

任意给定一点 $M(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$,

$S_r(M)$ 表示以点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 为球心,

r 为半径的球面



下面我们用球面平均法来求解 (1)

定义 (球面平均)

$$\bar{u}(r, t; M) := \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(M)} u(x, y, z, t) dS$$

注: (1) M 点固定时, \bar{u} 仅是 r, t 的函数

(2) 对于连续函数 u

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \bar{u}(r, t; M) = u(M, t)$$

约定: M 点固定时, $\bar{u}(r, t; M)$ 简记为 $\bar{u}(r, t)$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\bar{u}(r, t) &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(M)} u(x, y, z, t) dS \\ \boxed{dS|_{S_r} = r^2 d\omega} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1(O)} u(M + r\vec{n}, t) d\omega \quad \boxed{|\vec{n}| \equiv 1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla u := (u_x, u_y, u_z)} \quad (\text{梯度})$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \bar{u}_r(r, t) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1(O)} \nabla u(M + r\vec{n}, t) \cdot \vec{n} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(M)} \nabla u(x, y, z, t) \cdot \vec{n} dS\end{aligned}$$

注： \vec{n} 是球面 $S_r(M)$ 在点 $M + r\vec{n}$ 处的单位外法向量

回忆散度定理 (Gauss 公式)

设 $\vec{X}(x, y, z) = (X^1(x, y, z), X^2(x, y, z), X^3(x, y, z))$

定义向量 \vec{X} 的散度

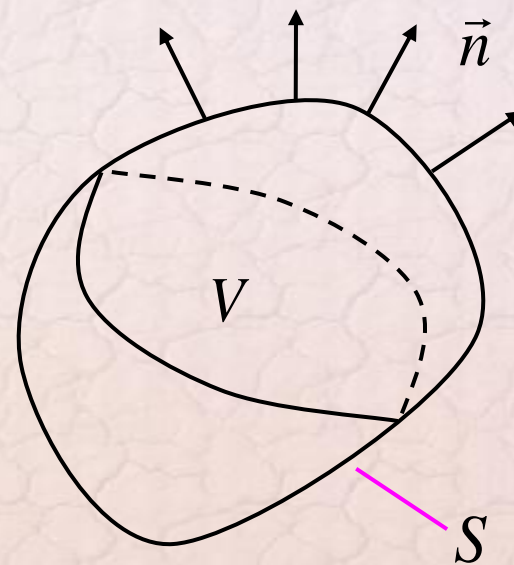
$$\operatorname{div} \vec{X} := X_x^1 + X_y^2 + X_z^3$$

则

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{X} dV = \iint_S \vec{X} \cdot \vec{n} dS$$

这里 $S = \partial V$ (区域 V 的边界)

\vec{n} 是曲面 S 的单位外法向量场



$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{X} dV = \iint_S \vec{X} \cdot \vec{n} dS$$

$$\bar{u}_r(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(M)} \nabla u(x, y, z, t) \cdot \vec{n} dS$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{B_r(M)} \operatorname{div}(\nabla u(x, y, z, t)) dV$$

$$\operatorname{div} \nabla u = \nabla^2 u$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{B_r(M)} \nabla^2 u(x, y, z, t) dV$$

$$u_{tt} = a^2 \nabla^2 u$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2 r^2} \iiint_{B_r(M)} u_{tt}(x, y, z, t) dV$$

$B_r(M)$ 表示以点 M 为球心, r 为半径的球。

$$\begin{aligned}\Rightarrow 4\pi a^2 r^2 \bar{u}_r(r, t) &= \iiint_{B_r(M)} u_{tt}(x, y, z, t) dV \\ &= \int_0^r \iint_{S_\rho(M)} u_{tt}(x, y, z, t) dS d\rho\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 4\pi a^2 \left(r^2 \bar{u}_r(r, t) \right)_r &= \iint_{S_r(M)} u_{tt}(x, y, z, t) dS \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint_{S_r(M)} u(x, y, z, t) dS\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(r, t) \\ = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(M)} u(x, y, z, t) dS\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 \left(r^2 \bar{u}_r(r, t) \right)_r = \left(r^2 \bar{u}(r, t) \right)_{tt}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_{tt} = a^2 \left(\bar{u}_{rr} + \frac{2}{r} \bar{u}_r \right) \quad (\text{球面对称波动方程})$$

易见 $\lim_{r \rightarrow 0^+} r\bar{u}(r, t) = 0$

从而得到

$$\begin{cases} (r\bar{u})_{tt} = a^2 (r\bar{u})_{rr} & r > 0, t > 0 \\ (r\bar{u})|_{r=0} = 0, & t > 0 \\ r\bar{u}(r, 0) = r\bar{\varphi}(r), \quad r\bar{u}_t(r, 0) = r\bar{\psi}(r) & r \geq 0 \end{cases}$$

其中 $\bar{\varphi}(r), \bar{\psi}(r)$ 分别表示 φ, ψ 在球面 $S_r(M)$ 上的平均

$$\begin{aligned} \Rightarrow r\bar{u}(r, t) &= \frac{1}{2a} \int_{r-at}^{r+at} \rho \bar{\psi}_e(\rho) d\rho \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[(r+at) \bar{\varphi}_e(r+at) + (r-at) \bar{\varphi}_e(r-at) \right] \\ &\quad (r \geq 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{u}(r, t) = \frac{1}{2ar} \int_{r-at}^{r+at} \rho \bar{\psi}_e(\rho) d\rho \quad (r > 0)$$

$$+ \frac{1}{2r} \left[(r+at) \bar{\varphi}_e(r+at) + (r-at) \bar{\varphi}_e(r-at) \right]$$

$$\Rightarrow u(M, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \bar{u}(r, t; M)$$

$$\boxed{\text{L'Hospital 法则}} = t \bar{\psi}_e(at) + \bar{\varphi}_e(at) + at \bar{\varphi}'_e(at)$$

$$= t \bar{\psi}(at) + \bar{\varphi}(at) + at \bar{\varphi}'(at) \quad (t \geq 0)$$

$$= t \bar{\psi}(at) + \frac{d}{dt} (t \bar{\varphi}(at))$$

$$u(M, t) = t\bar{\psi}(at) + \frac{d}{dt}(t\bar{\varphi}(at)) \quad (\text{Poisson 公式})$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}(M)} \psi(x, y, z) dS$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}(M)} \varphi(x, y, z) dS \right)$$

$$= \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1(O)} \psi(M + at\vec{n}) d\omega$$

$$|\vec{n}| \equiv 1$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi} \iint_{S_1(O)} \varphi(M + at\vec{n}) d\omega \right)$$

$$u(M, t) = t\bar{\psi}(at) + \frac{d}{dt}(t\bar{\varphi}(at))$$

注： $\varphi \in C^3, \psi \in C^2 \Rightarrow u \in C^2$ 为古典解

而且是唯一的，定解问题是适定的

- 问题：（1） 应用公式时是如何计算球面平均？
- （2） 前面推导过程可以推广到一般维数吗？

变化坐标表示, 可得

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}} \varphi(\xi, \eta, \zeta) dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}} \psi(\xi, \eta, \zeta) dS$$

应用公式时**关键**是如何计算球面平均, 可化成**球坐标**积分

3维波动方程Poisson公式化为

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t \varphi(\xi, \eta, \zeta) \sin \theta d\theta d\phi + \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi(\xi, \eta, \zeta) \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\begin{cases} \xi = x + at \sin \theta \cos \phi \\ \eta = y + at \sin \theta \sin \phi & (0 \leq \phi < 2\pi) \\ \zeta = z + at \cos \theta & (0 \leq \theta \leq \pi) \end{cases}$$

例：2 维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) & (x, y) \in R^2, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

想法： 2 维波动方程的解 $u(x, y, t)$

可看成 3 维波动方程与空间变量 z 无关的解

利用 3 维波动方程的解公式得到 (2) 的解

我们把 $\varphi(x, y)$ 和 $\psi(x, y)$ 分别看成三元函数

$$\Phi(x, y, z) = \varphi(x, y), \quad \Psi(x, y, z) = \psi(x, y)$$

那么容易得到3维波动方程初值问题

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(x, y, z), & U_t|_{t=0} = \Psi(x, y, z) \end{cases} \quad (3)$$

的解 U 与变量 z 无关，它正好是 (2) 的解。

这种利用高维波动方程的定解问题的解得出低维波动方程相应定解的解的方法称为**降维法**。

定理： 初值问题 (2) 的解 u 可以表示为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{D_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \frac{1}{2\pi a} \iint_{D_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}.$$

二维波动方程
Poisson公式

其中 $D_{at} = \{(\xi, \eta) | (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \leq a^2 t^2\}$

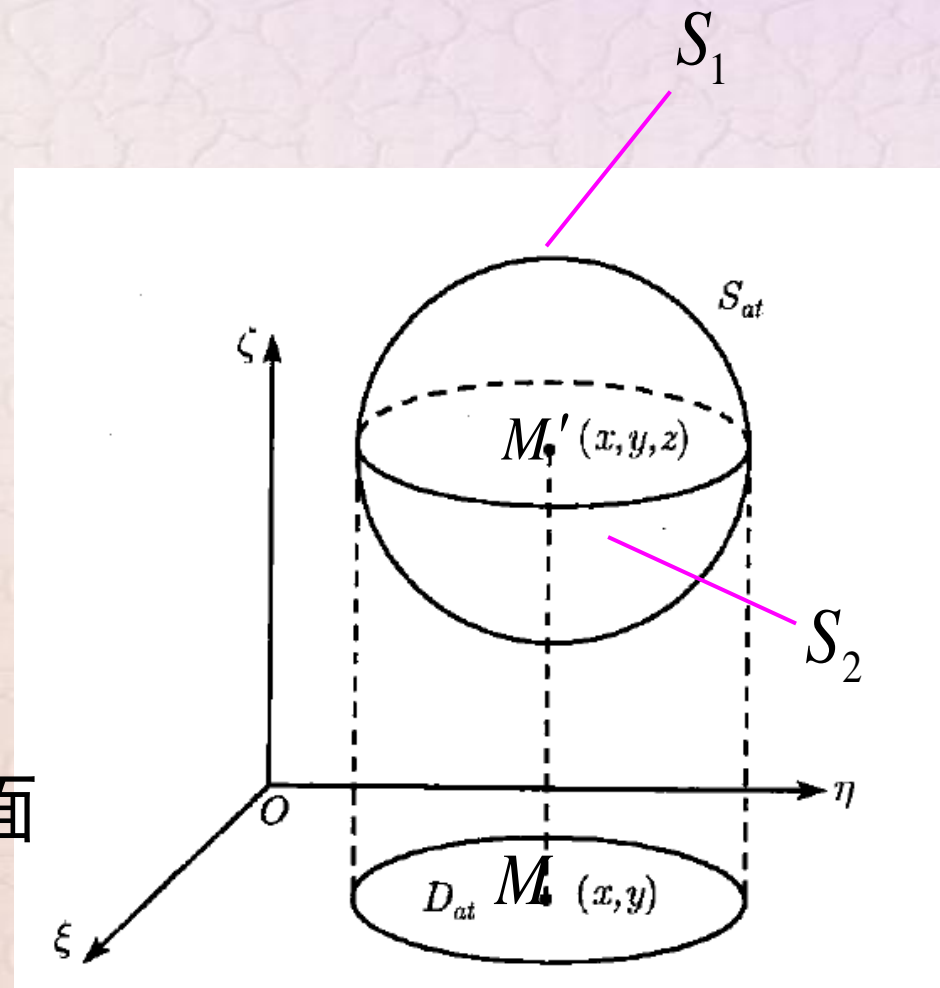
证：由3维波动方程Poisson公式

$$U(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}} \Phi(\xi, \eta, \zeta) dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}} \Psi(\xi, \eta, \zeta) dS$$

由于 Φ, Ψ 均与 z 无关,

因此在球面 S_{at} 上的积分可以化为其在 XOY 平面投影圆域 D_{at} 上的积分

其中 $S_{at} = \{(\xi, \eta, \zeta) | (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = a^2 t^2\}$



S_{at} 分成上下两个半球面 S_1, S_2 , Φ (或 Ψ) 在 S_1, S_2 上的积分是相同的

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2} dA = \frac{at}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} dA$$

$$dA = d\xi d\eta$$

$$\iint_{S_{at}} \Psi(\xi, \eta, \zeta) dS = 2 \iint_{S_{at}} \psi(\xi, \eta) dS = 2at \iint_{D_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta$$

$$\iint_{S_{at}} \Phi(\xi, \eta, \zeta) dS = 2 \iint_{S_{at}} \varphi(\xi, \eta) dS = 2at \iint_{D_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta$$

代入3维波动方程Poisson公式，即得2维波动方程的Poisson公式。

证毕

利用极坐标变换公式

$$\begin{cases} \xi = x + at \cos \theta \\ \eta = y + at \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

2维波动方程Poisson公式化为

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} r d\theta dr \\ & + \frac{1}{2\pi a} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} r d\theta dr \end{aligned}$$

练习：利用降维法推导d'Alembert 公式

3维波动方程Poisson公式

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}} \varphi(\xi, \eta, \zeta) dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}} \psi(\xi, \eta, \zeta) dS$$

2维波动方程Poisson公式

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{D_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \\ + \frac{1}{2\pi a} \iint_{D_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}.$$

以上公式有显著的区别：**三维解是在三维空间中的一个3维球面上积分，而二维解是在一个2维圆域上积分**

上述差别在物理上产生了截然不同的效果：

对三维情况，波的传播既有清晰的前阵面，也有清晰的后阵面，这称为**Huygens原理**（或**无后效现象**）；（用于传播各种信号）

对二维情况，波的传播有清晰的前阵面，但没有后阵面，这称为**波的弥漫**，或说这种波具有**后效现象**。（不适合于传播信号）

2维与3维空间波的传播因而是不同的，

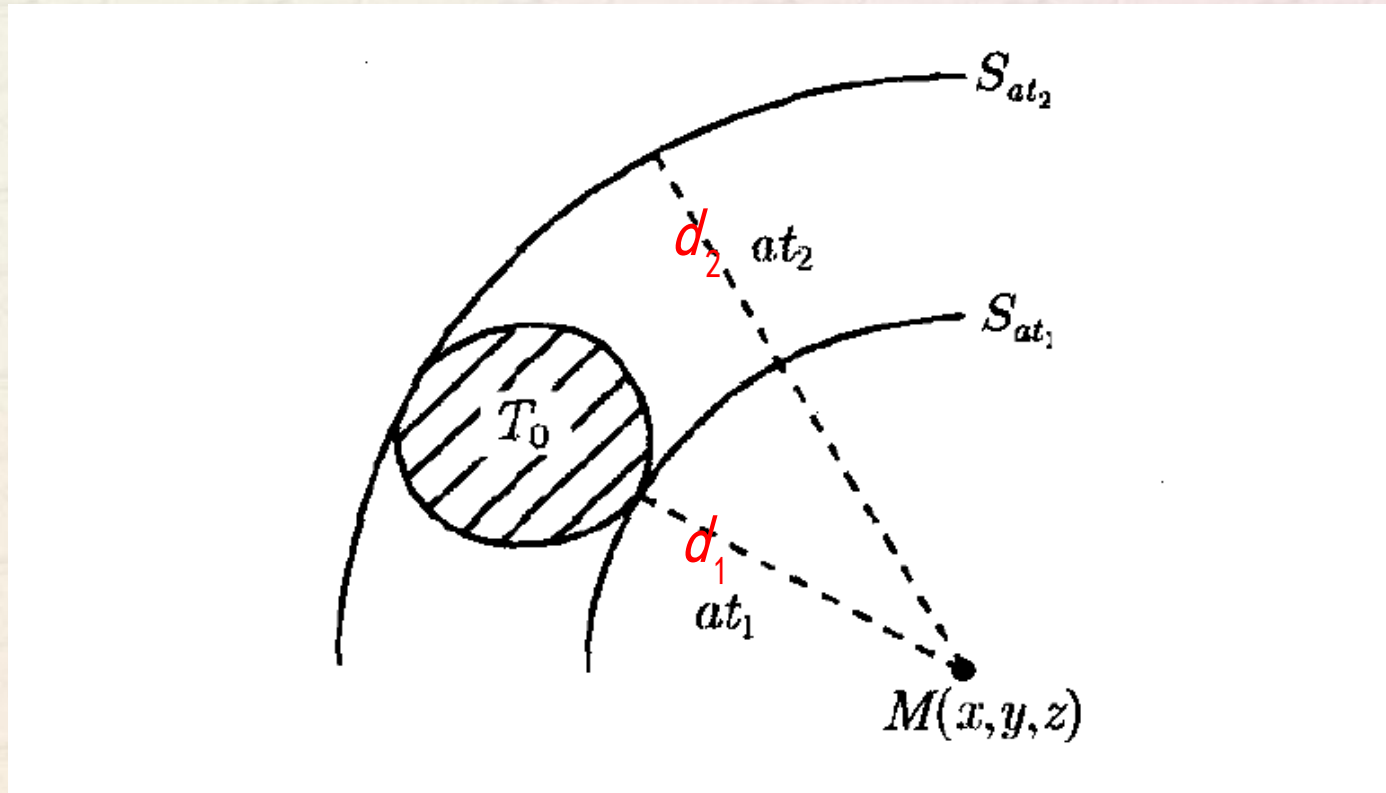
如果 $u(x, y, z, t)$ 的值在平行于 z 轴的直线上是常数，则可视作2维情形，称之为**柱面波**。柱面波不适用于传递信号。

具体的，假设初值 φ, ψ 只在某个区域 T_0 内非零。

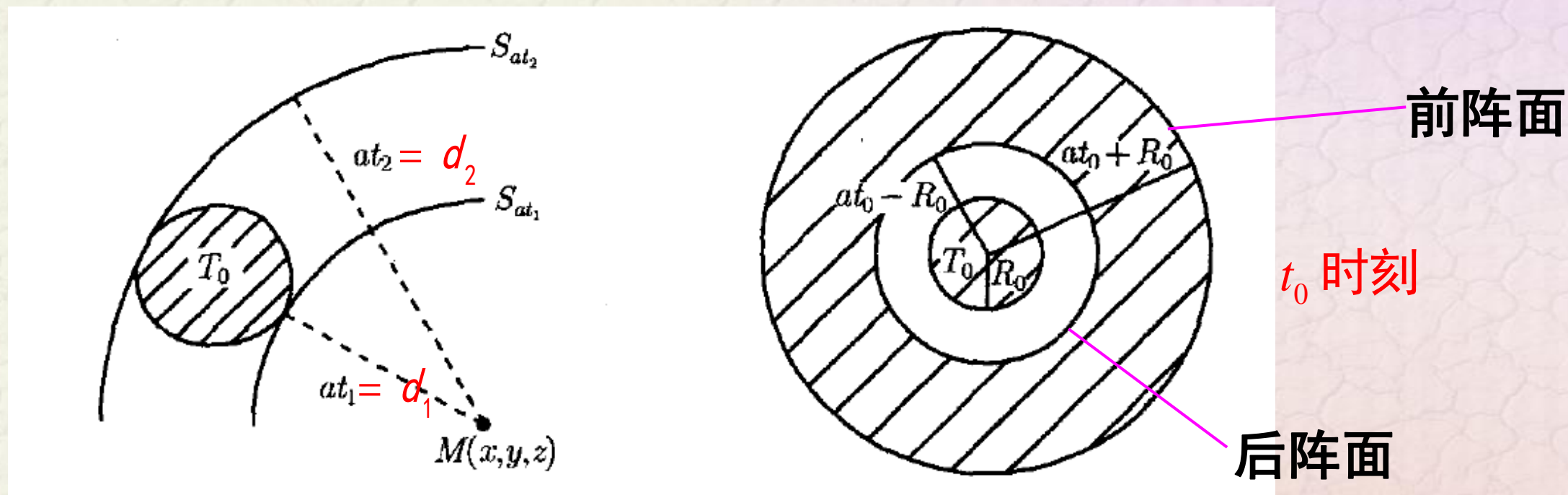
假设在该区域外考虑某点 M ，

令 d_1, d_2 分别为 T_0 到 M 点的最短和最长距离。

注意：波的传播速度为 a 。

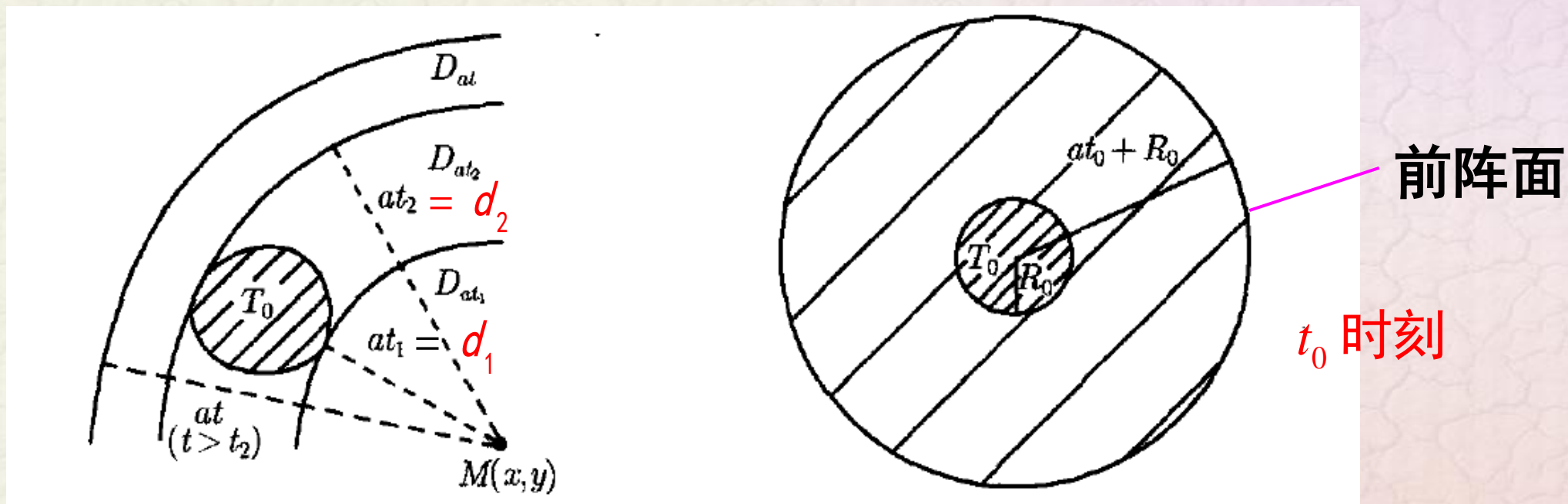


首先，对三维情况，波的传播不仅有清晰的波前，也有清晰的波后：



- (1) 当 $0 < t < \frac{d_1}{a} = t_1$ 时, $u(M, t) = 0$;
- (2) 当 $\frac{d_1}{a} < t < \frac{d_2}{a} = t_2$ 时, $u(M, t) \neq 0$; —— 受扰状态
- (3) 当 $t > \frac{d_2}{a} = t_2$ 时, $u(M, t) = 0$.

其次，对二维情况，波的传播只有清晰的波前，但没有波后：



(1) 当 $0 < t < \frac{d_1}{a} = t_1$ 时, $u(M, t) = 0$;

(2) 当 $\frac{d_1}{a} < t < \frac{d_2}{a} = t_2$ 时, $u(M, t) \neq 0$;

(3) 当 $t > \frac{d_2}{a} = t_2$ 时, $u(M, t) \neq 0$.

受扰状态

§ 1.7 二阶线性偏微分方程的分类与标准化

波动方程，扩散方程，Poisson方程都是二阶线性PDE。

一般的， n 个自变量的二阶线性PDE为：

$$\sum_{i,j}^n a_{ij}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i^n b_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(X)u = f(X).$$

本课程只考虑两个自变量（ $n=2$ ）二阶线性PDE：

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f, \quad (1)$$

其中 a_{11} , $a_{12}(=a_{21})$, a_{22} 不全为0.

想法：利用自变量的可逆变换简化二阶导数项，并利用方程类型在这样变换下的保持不变的性质对方程（1）进行分类。

这样的想法可以类比于二次型的规范化，可以将二次曲线进行分类。

作非奇异自变量变换

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \quad J = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

为方便起见, u 作为新自变量的函数仍旧记为 $u(\xi, \eta)$.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy},$$

将其代入原方程(1), 则有

$$A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta} + B_1u_\xi + B_2u_\eta + Cu = f \quad (2)$$

其中

$$A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$

$$A_{12} = A_{21} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

以及

$$B_1 = a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y,$$

$$B_2 = a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y,$$

$$C = c.$$

$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_x \end{pmatrix}^T$$

$$\Delta_A := - \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = J^2 \Delta, \quad \Delta := - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

在可逆自变量变换下, Δ 的符号是个不变量。

定义 Δ 称作方程(1)的判别式。

- (i) 若在 (x_0, y_0) 处, $\Delta > 0$, 则称方程(1)在点 (x_0, y_0) 处为双曲型的;
- (ii) 若在 (x_0, y_0) 处, $\Delta = 0$, 则称方程(1)在点 (x_0, y_0) 处为抛物型的;
- (iii) 若在 (x_0, y_0) 处, $\Delta < 0$, 则称方程(1)在点 (x_0, y_0) 处为椭圆型的。

§ 1.6.1 特征方程与特征曲线

$$A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$$

为化简方程, 选取适当的 φ (或 ψ) 函数, 使得其满足

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0, \quad (3)$$

$$A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2$$

则 A_{11} (或 A_{22}) 可化为0.

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (3)$$

类似于一阶线性PDE的讨论, (3)的求解可归结于求解下列一阶常微分方程:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0. \quad (4)$$

定理: 若 $\varphi(x, y) = h$ (常数) 是 (4) 的隐式通解 (积分曲线族), 则 $\xi = \varphi(x, y)$ 是 (3) 的解; 反之亦然。

Proof. 设 $\varphi(x, y) = h$ (常数) 是 (4) 的隐式通解 (积分曲线族), 则有 $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \quad (5)$$

$$(4) \Leftrightarrow a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0$$

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (3)$$

$$(5) \text{ 代入上式得 } a_{11} \left(\frac{-\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \frac{-\varphi_x}{\varphi_y} + a_{22} = 0$$

$$\Rightarrow a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0.$$

反过来，证明类似。

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0 \quad (4)$$

定义：(4) 称之为原方程 (1) 的特征方程，

特征方程的积分曲线称作 (3) 的特征曲线。

§ 1.6.2 方程的化简与标准形

为方便起见，以下一律假设自由项 $f=0$

Case I. $\Delta > 0$.

Subcase 1. $a_{11}^2 + a_{22}^2 \neq 0$. 故可不妨假设 $a_{11} \neq 0$.

由特征方程 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}} \quad (6)$

\Rightarrow 两族特征线: $\begin{cases} \varphi(x, y) = h_1 \\ \psi(x, y) = h_2 \end{cases} \quad \text{令} \quad \begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$

$\Rightarrow A_{11} = A_{22} = 0 \quad \Rightarrow$ 原方程化为

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2A_{12}}(B_1 u_{\xi} + B_2 u_{\eta} + Cu) = 0 \quad (7)$$

$$\Delta_A := A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = J^2 \Delta \quad \Rightarrow \quad J^2 = \frac{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}}{\Delta} = \frac{A_{12}^2}{\Delta}$$

$$\begin{cases} \frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{11}} \\ \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{11}} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \varphi_x \psi_y - \psi_x \varphi_y$$

$$= \varphi_y \psi_y \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} - \frac{\psi_x}{\psi_y} \right) = \varphi_y \psi_y \frac{-2\sqrt{\Delta}}{a_{11}} \neq 0$$

$\because a_{11} \neq 0 \Rightarrow \varphi_y \neq 0, \psi_y \neq 0$

$\Rightarrow \varphi, \psi$ 是两个独立的函数, 且 $A_{12} \neq 0$. 事实上, $A_{12} = \frac{-2\Delta}{a_{11}} \varphi_y \psi_y$

$$\text{令} \begin{cases} s = \frac{\xi + \eta}{2} \\ t = \frac{\xi - \eta}{2} \end{cases}$$

\Rightarrow 原方程化为

$$u_{ss} - u_{tt} + \frac{1}{A'_{11}} (B'_1 u_s + B'_2 u_t + C' u) = 0 \quad (8)$$

注: $A'_{11} = \frac{1}{4}, A'_{22} = -\frac{1}{4}$

Subcase 2. $a_{11}^2 + a_{22}^2 = 0. \Rightarrow a_{11} = a_{22} = 0, a_{12} \neq 0.$

此时方程形式如同(7), 形式(7)和(8)均称为**双曲型方程的标准形**。

Case II. $\Delta=0.$ 仍旧假设 $a_{11} \neq 0.$

由特征方程 $\Rightarrow -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{11}}.$

$$\Rightarrow a_{11}\varphi_x + a_{12}\varphi_y = 0 \Rightarrow \text{特征曲线: } \varphi(x, y) = h$$

任取二元函数: $\psi(x, y)$ 使得

$$J = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{令} \begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_{11} = 0, \quad A_{22} \neq 0 \quad (\because \psi(x, y) \text{ 非特征曲线})$$

$$\Delta_A = J^2 \Delta = A_{12}^2 - A_{11} A_{22} = A_{12}^2 = 0 \quad \Rightarrow A_{12} = 0$$

\Rightarrow 原方程化为

$$u_{\eta\eta} + \frac{1}{A_{22}}(B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu) = 0 \quad (9)$$

形式(9)称为**抛物型方程的标准形**。

Case III. $\Delta < 0$. 此时必有 $a_{11}a_{22} \neq 0$.

$$\text{由特征方程} \Rightarrow -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm i\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}$$

\Rightarrow 不存在实的特征曲线

不难验证, 特征方程的隐式通解为**一对共轭的复特征曲线**:

$$\begin{cases} G(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = h_1 \\ \bar{G}(x, y) = \varphi(x, y) - i\psi(x, y) = h_2 \end{cases} \quad \text{令} \quad \begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

$$-\frac{G_x}{G_y} = \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + i\sqrt{-\Delta}}{a_{11}} \quad \Rightarrow \quad a_{11}G_x = -(a_{12} + i\sqrt{-\Delta})G_y$$

$$i.e. \quad a_{11}(\varphi_x + i\psi_x) = -(a_{12} + i\sqrt{-\Delta})(\varphi_y + i\psi_y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_x = \frac{-1}{a_{11}}(a_{12}\varphi_y - \sqrt{-\Delta}\psi_y) \\ \psi_x = \frac{-1}{a_{11}}(\sqrt{-\Delta}\varphi_y + a_{12}\psi_y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y = \frac{\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}(\varphi_y^2 + \psi_y^2) \neq 0$$

否则 $\varphi_y = \psi_y = 0 \Rightarrow \varphi_x = \psi_x = 0 \Rightarrow G_x = G_y = 0$

但 $a_{11} \neq 0 \Rightarrow G_y \neq 0 \Rightarrow$ 矛盾。

注意 $G(x, y)$ 满足

$$a_{11}G_x^2 + 2a_{12}G_xG_y + a_{22}G_y^2 = 0.$$

$$i.e. \quad a_{11}(\varphi_x + i\psi_x)^2 + 2a_{12}(\varphi_x + i\psi_x)(\varphi_y + i\psi_y) + a_{22}(\varphi_y + i\psi_y)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 - (a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2) = 0 \\ 2a_{11}\varphi_x\psi_x + 2a_{12}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + 2a_{22}\varphi_y\psi_y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_{12} = 0, \quad A_{11} = A_{22} \neq 0.$$

⇒ 原方程化为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{A_{11}}(B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu) = 0 \quad (10)$$

形式(10)称为椭圆型方程的标准形。

例： $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 的两族特征线为
 $x \pm at \equiv c$ (c 为常数)

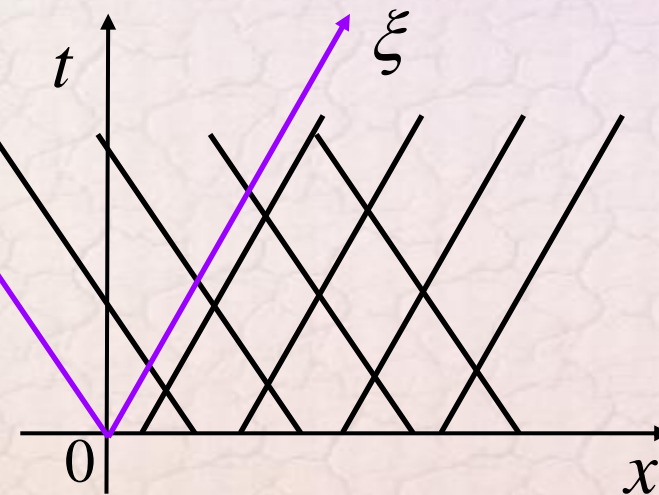
作变量替换 $\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$

$$\Rightarrow u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u_{\xi} = f(\xi)$$

$$\Rightarrow u = \int f(\xi) d\xi + G(\eta)$$

$$= F(\xi) + G(\eta)$$

$$= F(x + at) + G(x - at)$$



(通解公式)

这里 f 是任意单变量函数

根据初始条件同样可得到 d'Alembert 公式

问题：若 $a=a(x,t)$ 为一般函数，此方法有一般性吗？

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$	系数矩阵 特征值	特征线	类型	典型方程
> 0	异号	2 族	双曲 Hyperbolic	$u_{tt} = a^2 u_{xx}$ $u_{\xi\eta} = 0$
$= 0$	1 个 为零	1 族	抛物 Parabolic	$u_t = a^2 u_{xx}$
< 0	同号	0 族 (实) 2 族 (复)	椭圆 Elliptic	$u_{xx} + u_{yy} = 0$

例：空气动力学中Tricomi's Equation

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

易见 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$ (混合型)

下面求其标准形

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

特征方程为 $y(dy)^2 + (dx)^2 = 0$.

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$$

Case 1. $y < 0, \Delta > 0$, 方程为双曲型, 特征方程分解为

$$(dx + \sqrt{-y}dy)(dx - \sqrt{-y}dy) = 0.$$

两族特征曲线为 $x \mp \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = c$.

作变量代换
$$\begin{cases} \xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}, \\ \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

可得方程标准形为
$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_{\eta} - u_{\xi}) = 0$$

Case 2. $y > 0, \Delta < 0$, 方程为椭圆型, 特征方程分解为

$$(dx + i\sqrt{y}dy)(dx - i\sqrt{y}dy) = 0.$$

解得两族复特征曲线为

$$x \pm i \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = c.$$

作变量代换
$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

可得方程标准形为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta} u_{\eta} = 0.$$

Case 3. $y = 0, \Delta = 0$, 方程为抛物型。

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$$

在全平面上, Tricomi方程是**混合型**方程。

本例中, 尽管我们将方程化为了标准形, 但仍旧无法积分求得通解。

例： 求方程 $x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$ 通解。

解： $\Delta = (xy)^2 - x^2 y^2 = 0$, 方程为抛物型。

特征方程为

$$x^2 (dy)^2 + 2xy dx dy + y^2 (dx)^2 = (xdy + ydx)^2 = 0.$$

即 $xdy + ydx = 0$.

积分得到一族特征线: $xy = c$.

作变量代换
$$\begin{cases} \xi = xy, \\ \eta = y. \end{cases}$$

可得方程标准形为 $\eta u_{\eta\eta} + u_{\eta} = 0$.

令 $v = u_{\eta}$, 得 $\eta v_{\eta} + v = 0$.

解之得 $u_\eta = v = f(\xi)\eta^{-1}$.

$$\Rightarrow u = f(\xi)\ln|\eta| + g(\xi) = f(xy)\ln|y| + g(xy), y \neq 0,$$

其中 $f, g \in C^2$.

问题：原方程中具有对称性，但解表达式却没有对称性，
如何理解？

§ 1.8 叠加原理与齐次化原理

在物理、力学和工程技术中，许多现象具有叠加效应，即集中不同因素同时出现时所产生的效果等于各个因素分别单独出现时所产生的效果总和（叠加）。

例如，多个电荷所产生的总电势；又如，在力学中，力的独立作用原理也是一种叠加性。

这种叠加效应称为**线性叠加原理**，简称**叠加原理**。

§ 1.7.1 线性叠加原理

定义 从一个函数类（定义域）到另一个函数类的映射 T 称为一个**算子**。

如果定义域 V 与值域 V' 都是数域 F 上的线性函数空间，对 F 中任意两个数 a, b 以及 V 中任意两个**函数** u, v 有

$T(au + bv) = aTu + bTv$, 称 T 为线性算子。

例 一般的, n 个自变量的二阶线性PDE为:

$$L = \sum_{i,j}^n a_{ij}(X) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i^n b_i(X) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(X)$$

是 C^2 函数空间到连续函数空间的线性算子。

$Lu = f(X)$ 是 n 个自变量的二阶线性PDE。

Laplace算子: $\Delta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ 是其特殊情形。

例 Fourier变换

$$F[f](\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

Laplace变换

$$L[f](\xi) := \int_0^{\infty} e^{-\xi x} f(x) dx$$

为方便起见，将初始条件、初值条件可以表示为线性算子形式：

$$\text{如记： } L_1 = \lim_{t \rightarrow 0}, \quad L_2 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t}, \quad L_3 = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\alpha + \beta \frac{\partial}{\partial n} \right), \dots$$

则 $L_1 u = \varphi(X)$ 表示初始条件, ...

定理（叠加原理） 设 L 是关于 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的线性微分算子（常或偏），

（1）有限叠加原理 设 $Lu_j(X) = f_j(X), \quad j = 1, 2, \dots, m,$

则当 $u(X) = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j(X)$ 时，有 $Lu(X) = \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(X).$

（2）级数叠加原理 设 $Lu_j(X) = f_j(X), \quad j = 1, 2, \dots,$

则当 $u(X) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j u_j(X)$ 时，有 $Lu(X) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(X).$

(3) 积分叠加原理 设 $Lu(X, s) = f(X, s), \quad s \in S \subset \mathbb{R}^m,$

则当 $u(X) = \int_S \lambda(s) u(X, s) ds$ 时, 有 $Lu(X) = \int_S \lambda(s) f(X, s) ds,$

其中 $\lambda(s) \in \mathbb{F}, \quad s \in S.$ (这里 S 相当于一个指标集合)

级数积分叠加原理、与积分叠加原理分别要求函数项级数、含参变量积分收敛, 算子与求和、积分号可交换次序, 在经典意义下这些条件要求过强, 实际问题未必满足, 我们是在广义下, 认为这些交换总可行。

以后再运用这些叠加原理将不再受经典条件的限制。

一个定解问题, 可以通过叠加原理化成多个定解问题的叠加。

反映在物理上可以看做是多个源共同作用的结果等于各个源

独立作用的总和, 物理上称作独立作用原理。

例 平面上，求2维Poisson方程： $\Delta_2 u = x^2 - y^2$ 的通解。

解 易见 $v(x, y) = \frac{1}{12}(x^4 - y^4)$ 是方程的一个特解。

令 $u = v + w$ 则 w 满足 $\Delta_2 w = 0$.

因而 w 是平面上的调和函数， $w = \operatorname{Re} f(z)$,

$f(z)$ 是平面上任意整函数。

§ 1.7.2 齐次化原理（冲量原理）

例 一般弦振动方程（非齐次方程，非齐次初始条件）

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

(1)

利用叠加原理，方程的解可以看做下面两个方程解的叠加。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (3)$$

(2) 是非齐次边界条件的齐次方程，可以使用D'Alembert 公式，下面我们利用齐次化方法（冲量原理）求解（3）

物理背景：

由弦振动方程的推导可知 $f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho}$

ρ ——弦的（线）密度

$F(x,t)$ ——外力线密度

（单位长度所受作用力）

$u(x,t)$ ——由外力从初始时刻 $t=0$ 持续到
 t 时刻作用引起的位移，
可以看作前后相继的瞬间外力作用冲量
引起的位移的关于时间的叠加

1. 瞬时外力产生的冲量效应

固定时刻 $s \geq 0$, 考虑短时段 $[s - \Delta s, s]$,

在 $s - \Delta s$ 时刻**外力作用**, 在 s 时刻**外力作用结束**.

在 x 点附近, **仅由此**次外力作用引起的效应

所产生的冲量 $\approx F(x, s)\Delta x \cdot \Delta s$

所产生的瞬时速度 $\approx \frac{F(x, s)\Delta x \Delta s}{\rho \Delta x} = f(x, s)\Delta s$

$t \geq s$ 时的位移分布 (记为) $w(x, t; s)\Delta s$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial [w(x, t; s)\Delta s]}{\partial t} \right|_{t=s} = f(x, s)\Delta s$$

满足

$$\begin{cases} (w\Delta s)_{tt} = a^2 (w\Delta s)_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > s \\ w(x, t; s)\Delta s|_{t=s} = 0, & \frac{\partial [w(x, t; s)\Delta s]}{\partial t} \Big|_{t=s} = f(x, s)\Delta s, & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (4)$$

注： $w(x, t; s)$ 中的 s 不是变量，而是固定的参数.

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > s \\ w(x, t; s)|_{t=s} = 0, & \frac{\partial [w(x, t; s)]}{\partial t} \Big|_{t=s} = f(x, s), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (5)$$

2. 外力产生的总效应

将瞬时外力作用引起的位移分布 $w(x, t; s)\Delta s$
($0 \leq s \leq t$) 进行“累加”，得到总效应

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t; s) ds = \int_0^t \bar{w}(x, t - s; s) ds \quad (6)$$

其中 $\bar{w}(x, t; s) = w(x, t + s; s)$ 满足

$$\begin{cases} \bar{w}_{tt} = a^2 \bar{w}_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ \bar{w}(x, t; s)|_{t=0} = 0, & \frac{\partial [\bar{w}(x, t; s)]}{\partial t} \Big|_{t=0} = f(x, s), \quad -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (7)$$

我们可以从数学上验证 (6) 是 (3) 的解。

预备知识

含参变量积分的求导法则

$$\frac{d}{dy} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x, y) dx \\ + f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y)$$

验证 (6) 是 (3) 的解:

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t; s) ds$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial w(x, t; s)}{\partial t} ds + w(x, t; s) \Big|_{s=t} = \int_0^t \frac{\partial w(x, t; s)}{\partial t} ds,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 w(x, t; s)}{\partial t^2} ds + \frac{\partial w(x, t; s)}{\partial t} \Big|_{s=t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t).$$

由叠加原理，可以写出一般弦振动方程初值问题（1）的解

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\xi, s) d\xi \quad (8)$$

$$\frac{1}{2a} \int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\xi, s) d\xi \stackrel{r = a(t-s)}{=} \frac{1}{2a^2} \int_0^{at} dr \int_{x-r}^{x+r} f(\xi, t - \frac{r}{a}) d\xi$$

分析：纯外力引起的 x 点 t 时刻的位移因为 $[x-at, x+at]$ 内各点所受外力的影响，在 $[x-r, x+r]$ ($0 \leq r < at$) 上的外力是 $t - \frac{r}{a}$ 时刻的，物理上把这种现象称作**推迟势**。

将齐次化方法推广到一般发展方程的初值问题，有

定理（齐次化原理） 设 L 是关于 t 和 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的线性偏微分算子，其中关于 t 的最高阶导数不超过 $m-1$ 阶。若 $w(x, t, s)$ 满足齐次方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^m w}{\partial t^m} = Lw, & X \in \mathbb{R}^n, t > s, \\ w|_{t=s} = \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=s} = \dots = \frac{\partial^{m-2} w}{\partial t^{m-2}}\bigg|_{t=s} = 0, & X \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial^{m-1} w}{\partial t^{m-1}}\bigg|_{t=s} = f(x, s), & X \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (9)$$

则 $u(x, t) = \int_0^t w(x, t; s) ds$ 是非齐次方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^m u}{\partial t^m} = Lu + f(X, t), & X \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \dots = \frac{\partial^{m-2} u}{\partial t^{m-2}}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\bigg|_{t=0} = 0, & X \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (10) \quad \text{的解。}$$

练习：验证齐次化定理

当 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V \subset \mathbb{R}^n$,

如果方程(9), (10)中的分别增加相应齐次边界条件

$$L_1 w|_{\partial V} = 0, L_1 u|_{\partial V} = 0, \quad (L_1 \text{ 是关于 } X \text{ 的线性偏微分算子})$$

齐次化定理依然成立。

这就是混合问题的齐次化原理。

例：非齐次3 维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z) & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (11)$$

利用叠加原理与齐次化原理可得解为

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}} \varphi(\xi, \eta, \zeta) dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}} \psi(\xi, \eta, \zeta) dS \\ & + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t ds \iint_{S_{a(t-s)}} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, s)}{t-s} dS \quad \text{—— Kirchhoff公式} \\ & \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t ds \iint_{S_{a(t-s)}} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, s)}{t-s} dS \quad \begin{matrix} r = a(t-s) \\ \hline \hline \end{matrix} \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} dr \iint_{S_r} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r} dS \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{B_{at}^M} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r} d\xi d\eta d\zeta \quad \text{——— 推迟势}$$

$$\text{其中 } B_{at}^M := \{(\xi, \eta, \zeta) \mid (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \leq a^2 t^2\}$$

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} \leq at.$$

例： 2 维非齐次波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), & (x, y) \in R^2, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), & u_t|_{t=0} = \psi(x, y) \end{cases} \quad (12)$$

练习： 利用叠加原理与齐次化原理给出 (12) 的解