微积分 A (2)

姚家燕

第 2 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

主讲老师联系方式与答疑时间

欢迎大家平时到办公室来咨询或讨论问题，

拒绝在考试后以各种名目来要分数!

不建议网上提问，因为无法保证时效和准确!

- 地点：理科楼数学系 A 216
- 电话：62794494
- 时间：每周三下午 16:00-17:00

本学期的主要内容

- 多元微分学 (第 1 章)
- 含参积分以及广义含参积分 (第 2 章)
- 重积分 (第 3 章)
- 曲线积分与曲面积分 (第 4 章)
- 级数理论 (第 5, 6, 7 章)

期中考试时间与内容

考试时间

2021 年 4 月 17 日星期六下午 13:30-15:30

考试内容

- 多元微分学 (第 1 章)
- 含参积分以及广义含参积分 (第 2 章)

期末总评成绩计算方式

- 平时占 20%, 期中占 30%, 期末占 50%
- 每周五晚在网络学堂作业栏发布本周作业
- 将作业扫描成一个单独的 pdf 文件, 每周三上课前提交到网络学堂的作业栏, 下一周的周二网上发作业 (抄题, 用数学文稿纸!)
- 不接受补交作业!
- 拒绝修改上述规则的任何建议!

教学材料

- 刘智新 闫浩 章纪民编《高等微积分教程 (下)》清华大学数学科学系自编教材 (2014)
- 教学 ppt、作业题解答、习题课题目解答.

除课堂上所布置的作业外, 建议大家自己做完该书中所有习题! 对于喜欢做题目的同学, 可以自行解答所推荐的习题集当中的题目!

强力推荐的习题辅导书

- 吉米多维奇著, 数学分析习题集. 高等教育出版社 (1986)
- 华苏 扈志明 莫骄编, 微积分学习指导——典型例题精解. 科学出版社 (2004)
- 刘坤林 谭泽光编著, 大学数学: 概念, 方法与技巧. 清华大学出版社 (2001)

其它习题辅导书

- 李大华 胡适耕 林益编, 高等数学典型问题100 类. 华中工学院出版社 (1987).
- 高等数学辅导, 同济高数配套书. 机械工业出版社 (2002).
- 方企勤 林源渠著, 数学分析习题课教材. 北京大学出版社 (1990).
- 刘玉琏 杨奎元 刘伟 吕凤编, 数学分析讲义学习辅导书 (两册). 高教出版社 (2006).

数学专业学生常用教材

- 常庚哲 史济怀编, 数学分析教程.
  高等教育出版社 (2004)
- 张筑生著, 数学分析新讲.
  北京大学出版社 (1990)
- 卓里奇著, 数学分析. 高教出版社 (2006)

清华大学本科生学籍管理规定

第十条 学生应当参加学校教育计划规定的各项活动，自觉遵守课堂纪律，完成规定学业. 因故不能参加学校教育计划规定的活动，应当事先请假并获得批准，未经批准而缺席的，学校视情节轻重根据有关规定给予相应的批评教育，纪律处分. 未请假或者请假未获批准连续两周未参加教学计划规定的活动的，予以退学处理.

第十七条 含实验或者作业的课程，学生在按时完成课程实验 (包括实验报告) 和作业后，方可参加该课程考核.

选择适合自己的课程!

若选择本课程，请大家遵守下列纪律:

- 上课期间严禁使用与教学无关的电子产品
- 严禁以任何形式外传课堂内容
- 务必按时上交作业 (允许三次不交作业)
- 无故缺交平时作业 4 次及 4 次以上或无故缺席期中考试，取消参加期末考试的资格!
- 严禁以任何方式在考试后来要成绩

如何获取本讲义? 网络学堂

- 各个打印社以及清华大学主楼机房可上网.
- 仅在每次上完课后才上传讲义, 若需要提前预习的同学可以看教材《微积分 A (2)》.
- 当教材与讲义不一致时, 以讲义为准.

学习方法

- 千万不要松懈! 第一个月非常重要! 刚开始会遇到许多新知识, 可能会不适应, 但只要坚持下去, 等入了门, 一切都会容易起来.
- 用兴趣来推动学习.
- 关键在于课堂上的理解, 要学会听课, 不要指望老师在课堂上将所有知识都讲细讲透.

- 要勇敢、及时地提问, 不要担心问题太简单. 所提的问题都是对老师教学的反馈和有益补充, 让老师明白在教学过程中有哪些地方讲的不够清楚. 问题得不到及时解决而积累下来, 会为后面学习带来更大困难!
- 学的不好, 但却不知道如何来提问, 怎么办? 找老师! 在学习中遇到任何困难都要勇敢地找老师, 充分利用老师!

- 学习上要扎扎实实, 切忌不求甚解、因某些方法或思想很简单而掉以轻心, 要牢记复杂源于简单!
- 题目都会做, 但一做就错! 原因不在于所谓粗心, 而是基本功不扎实, 没真正掌握基本原理或方法!
- 要学会总结和寻找适合自己的学习方法!
- 如何适应 ppt 教学? 边听边记, 以听为主!

- 不要求课前预习, 但课后一定要先温习再做作业. 布置的作业涉及到课堂上所授内容的核心, 独立理解并完成作业会极大帮助消化课堂内容.
- 题目不在多, 而在于精, 要弄明白每道题的目的, 由此来有针对性的练习. 做题的目的在于掌握某种理论、方法或者技巧, 解题的数量应以此作为度量.

如何做作业? (不鼓励花过多时间!)

- 在做作业前, 一定要先温习讲义尤其是例题, 学习其解法 (特别是模仿其表述方式)!
- 若做作业时轻松流畅, 不用再做别的习题.
- 若做作业时不是太轻松, 请再仔细温习讲义, 尤其是相关例题. 做完作业后, 在教材以及推荐的习题集中找相应题目, 练熟为止.
- 若按上述方法还是不行, 找老师!

数学史

- 《数学文化》
  http://www.global-sci.org/mc/
- 《数学与人文》
  http://intlpress.sinaapp.com/mh/

第 1 讲回顾: n 维 Euclid 空间

- $\mathbb{R}^n$ 及其上的范数 $\|\cdot\|_n$ 与距离.
- 点 X_0 的 δ-邻域 $B(X_0, \delta)$, 也称为以点 X_0 为中心、以 δ 为半径的开球.
- 点 X_0 的去心 δ-邻域 $\mathring{B}(X_0, \delta)$.
- 内点, 外点, 边界点, 极限点, 开集, 闭集.

第 2 讲

- 内部: 由 S 的所有内点组成的集合称为它的内部, 记作 $\mathring{S}$, 也记作 $\operatorname{Int} S$. 这是一个开集.
- 外部: 由 S 的所有外点组成的集合称为它的外部, 记作 $\operatorname{Ext} S$. 这是一个开集.
- 边界: 由 S 的所有边界点组成的集合称为 S 的边界, 记作 ∂S, 这是一个闭集.

  注: $\mathbb{R}^n$ 为 $\operatorname{Int} S$, ∂S 和 $\operatorname{Ext} S$ 的不交并.
- 闭包: $\overline{S} := \partial S \cup S$ 为 S 的闭包, 它为闭集.

典型例子与基本性质

- $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ 既为开集, 也为闭集.
- 任意开球均为开集.
- 任意闭球为闭集.
- 注: 拓扑概念与空间 $\mathbb{R}^n$ 有关, 若改变空间, 则原有性质可能不成立. 例如开区间 $(0,1)$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子集为开集, 但不是 $\mathbb{R}^2$ 的开集.

命题 1. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集当且仅当它为开球并.

证明: 充分性. 假设 S 为开球的并, 则 $\forall X \in S$, 存在 $X_0 \in S$ 和 $\delta > 0$ 使得 $X \in B(X_0, \delta) \subseteq S$. 令 $\eta = \delta - d(X, X_0) > 0$. 则由三角不等式可得 $B(X, \eta) \subseteq S$. 故 S 为开集.

必要性. 若 S 为开集, 则 $\forall X \in S$, $\exists \delta_X > 0$ 使得 $B(X, \delta_X) \subseteq S$. 则 $S = \bigcup_{X \in S} B(X, \delta_X)$. 得证.

推论. 任意多个开集的并还是开集; 任意多个闭集的交还是闭集.

命题 2. 有限多个开集的交为开集.

证明: 设 $S=\bigcap_{j=1}^{k} S_j$, 其中 S_j 为开集. 对任意 $X\in S$ 以及任意 $1\leqslant j\leqslant k$, 因 $X\in S_j$ 且 S_j 为开集, 则 $\exists \delta_j>0$ 使得 $B(X,\delta_j)\subseteq S_j$. 令

$$\delta=\min_{1\leqslant j\leqslant k}\delta_j.$$

则 $B(X,\delta)=\bigcap_{j=1}^{k} B(X,\delta_j)\subseteq S$. 故所证成立.

推论. 有限多个闭集的并为闭集.

例 1. $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\forall \delta > 0$, 令 $B = B(X_0, \delta)$. 求 B 的内部, 外部, 边界和闭包.

解: 由于 B 为开集, 故 $\operatorname{Int} B = B$. 令

$$\begin{aligned} S &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| = \delta\}, \\ E &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| > \delta\}. \end{aligned}$$

$\forall X \in E$, 令 $\eta = \|X - X_0\| - \delta > 0$, 那么我们有 $B(X, \eta) \subseteq E$, 于是 $\operatorname{Int} E = E$, 故 $E \subseteq \operatorname{Ext} B$.

$\forall X \in S$ 以及 $\forall \eta > 0$, 由于 $B(X,\eta) \cap B \neq \emptyset$ 且 $B(X,\eta) \cap E \neq \emptyset$, 则 X 为 B 的边界点, 从而有 $S \subseteq \partial B$. 又 $\mathbb{R}^n \setminus S = B \cup E$, 则该集不含 B 的边界点, 因此 $\partial B = S$. 而 $\mathbb{R}^n \setminus E = B \cup S$, 于是此集不含 B 的外点, 因而 $\operatorname{Ext} B = E$. 最后

$$\overline{B} = B \cup S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| \leqslant \delta\}.$$

$\mathbb{R}^n$ 中集合的连通性

- 称集合 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 为连通集, 如果 $\forall X, Y \in D$, 均存在 D 中的折线将 X, Y 连接起来.
- 若集合 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 不连通, 则称为非连通集.
- 称 $\mathbb{R}^n$ 中非空的连通开集为开区域, 开区域的闭包称为闭区域. 比如说, $\mathbb{R}^n$ 中的任意开球为开区域, 而闭球为闭区域.

$\mathbb{R}^n$ 中的点列, 点列的收敛性以及收敛点列的性质

定义 1. 设 $\{X_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的点列, 而 $A \in \mathbb{R}^n$.

- 称 $\{X_k\}$ 收敛到 A, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\forall k > N$, 均有 $\|X_k - A\| < \varepsilon$. 此时记

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A.$$

注: $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$ 这等价于 $\lim\limits_{k\to\infty} \|X_k - A\| = 0$.

- 称 $\{X_k\}$ 为 Cauchy 序列, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\forall k, l > N$, 均有 $\|X_k - X_l\| < \varepsilon$.

记 $X_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)})$, $A = (a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$.

定理 1. $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$ 当且仅当对于任意的整数 $1 \leqslant j \leqslant n$, 均有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(j)} = a^{(j)}$.

证明: 必要性. 由题设知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\forall k > N$, 我们有 $\|X_k - A\| < \varepsilon$, 因而对任意的 $1 \leqslant j \leqslant n$, 我们有 $|x_k^{(j)} - a^{(j)}| \leqslant \|X_k - A\| < \varepsilon$, 也即我们有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(j)} = a^{(j)}$.

充分性. 由题设可得知, $\forall \varepsilon > 0$ 以及 $1 \leqslant j \leqslant n$, $\exists N_j \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\forall k > N_j$, 均有 $|x_k^{(j)} - a^{(j)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. 令 $N = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} N_j$. 则 $\forall k > N$, 我们有

$$\|X_k - A\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_k^{(j)} - a^{(j)}|^2} < \varepsilon.$$

故我们有 $\lim\limits_{k \to \infty} X_k = A$.

注: 借助上述结论, 我们可以将收敛数列与大小无关的性质推广到收敛的点列上.

同理可得

命题 3. $\{X_k\}$ 为 Cauchy 序列当且仅当对任意 $1 \leqslant j \leqslant n$, $\{x_k^{(j)}\}$ 均为 Cauchy 数列.

进而可知

定理 2. $\mathbb{R}^n$ 完备, 即 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 列必收敛.

证明: 该结论是 定理 1, 命题 3 以及空间 $\mathbb{R}$ 的完备性的直接推论.

定理 3. 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为闭集, 而 $\{X_k\}$ 为 Ω 中点列. 若该点列收敛到 $A \in \mathbb{R}^n$, 则 $A \in \Omega$.

证明: 用反证法, 假设 $A \notin \Omega$, 那么 $A \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. 由于 Ω 为闭集, 则 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 为开集, 于是 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $B(A, \varepsilon_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, 也即 $B(A, \varepsilon_0) \cap \Omega = \emptyset$. 然而 $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$, 于是 $\exists N > 0$ 使得 $\forall k > N$, 均有 $X_k \in B(A, \varepsilon_0)$. 矛盾! 故所证结论成立.

注: 反过来, 若 Ω 中任意收敛点列的极限依然属于 Ω, 则 Ω 为闭集.

命题 4. 设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^n$. 则 A 为 S 的极限点当且仅当 $S \backslash \{A\}$ 中有点列 $\{X_k\}$ 收敛到 A.

证明: 必要性. 若 A 为 S 的极限点, 则 $\forall k \geqslant 1$, $\exists X_k \in \mathring{B}(A, \frac{1}{k}) \cap S$, 即 $X_k \in S \backslash \{A\}$, $\|X_k - A\| < \frac{1}{k}$. 于是由夹逼原理可知点列 $\{X_k\}$ 收敛到 A.

充分性. 若 $S\backslash\{A\}$ 中有点列 $\{X_k\}$ 收敛到 A, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall k>N$, 我们均有

$$\|X_k-A\|<\varepsilon.$$

由于 $X_k\in S\backslash\{A\}$, 故 $X_k\in\mathring{B}(A,\varepsilon)\cap S$, 由此立刻可知 A 为 S 的极限点.

$\mathbb{R}^n$ 的其它性质

关于实数轴 $\mathbb{R}$, 我们有如下的结论: 确界定理, 单调有界定理, 区间套定理, 列紧性定理, 以及 Cauchy 准则. 由于 $\mathbb{R}^n$ 上没有序关系, 前面两个定理无法拓广到 $\mathbb{R}^n$ 上. 之前我们已经在 $\mathbb{R}^n$ 上建立了 Cauchy 准则, 下面将给出相应的区间套定理与列紧性定理.

定义 2. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集合.

- 令 $d(\Omega) = \sup\limits_{X,Y\in\Omega} \|X - Y\|$, 称为 Ω 的直径.
- 若 Ω 包含在某个 (有限) 球中, 则称 Ω 有界.
- 称 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{X_k\}$ 有界, 若它们组成的集合有界, 即 $\exists r > 0$ 使 $\forall k \geqslant 1$, $\|X_k\| < r$.

注: 集合有界当且仅当它包含在某个以原点为中心的球中; 集合有界当且仅当其直径有限.

谢谢大家!