

➤ 上节回顾：

- ▣ 液滴模型与结合能的半经验公式
- ▣ 核力的特性——强、饱和/短程、电荷无关、排斥芯、自旋相关、非中心、自旋-轨道耦合
- ▣ 势垒——对于带电粒子的出射和入射，都是个“障碍”；中子无势垒，但进入核并不易，这与核力的短程性有关

比结合能半经验公式：

$$\varepsilon = a_v - \frac{a_s}{A^{1/3}} - \frac{a_c Z^2}{A^{4/3}} - \frac{a_{sym} (A/2 - Z)^2}{A^2} + \frac{\delta a_p}{A^{3/2}} \quad (MeV)$$

$a_v$	$a_s$	$a_c$	$a_{sym}$	$a_p$
15.835	18.33	0.714	92.80	11.2

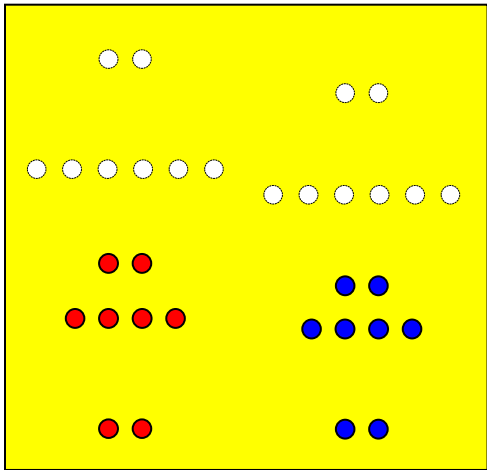
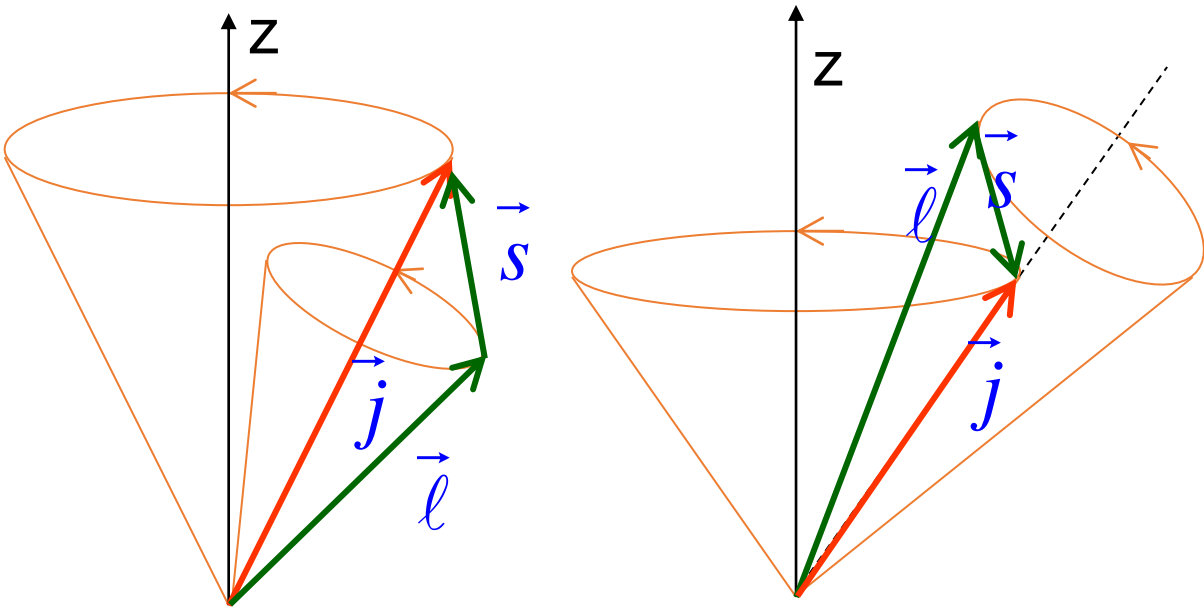
➤ 本节提要：

- ▣ 当你知道了核内各核子的波函数，原则上你就可以知道关于原子核的很多表征，例如：
  - 核自旋、核磁矩、核电矩
  - 统计性——原子核是服从泡利不相容原理的费米子？还是能够玻色爱因斯坦凝聚的玻色子？
  - 宇称——波函数是偶对称的，还是奇对称的？原子核整体波函数的对称性听上去复杂，实际上只由各核子轨道角动量的算术和的奇偶性决定。

实验发现:

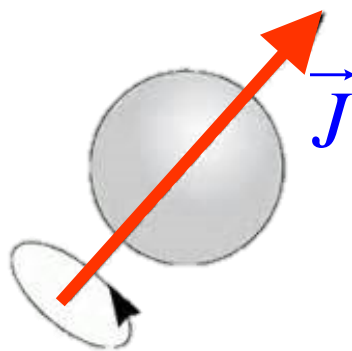
- 所有奇A核的自旋都是半整数倍 $\hbar$ ;
- 所有偶A核 (偶偶、奇奇) 的自旋都是整数倍 $\hbar$ ;
- 所有偶偶核基态的自旋都是零;

核素	A	Z	N	I	描述
<sup>3</sup> He	3	2	1	1/2	奇A核
<sup>17</sup> F	17	9	8	5/2	奇A核
<sup>23</sup> Na	23	11	12	3/2	奇A核
<sup>6</sup> Li	6	3	3	1	奇奇核
<sup>18</sup> F	18	9	9	1	奇奇核
<sup>4</sup> He	4	2	2	0	偶偶核
<sup>16</sup> O	16	8	8	0	偶偶核



$$\vec{J} = \sum_{i=1}^A \vec{L}_i + \sum_{i=1}^A \vec{S}_i$$

整数半整/整数



核自旋  $\vec{J}$  是量子化的，数值为：

$$J = \sqrt{I(I+1)}\hbar$$

$I$  为原子核的 **自旋量子数**，取 **整数** 或 **半整数**：

$$I = 0, 1, 2, \dots$$

或

$$I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

$I$	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3
$J(\hbar)$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{15}/2$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{35}/2$	$\sqrt{12}$

$$[\ell^2, \ell_z] = 0$$

$$\Delta \ell_z \Delta \phi \geq \frac{\hbar}{2}$$

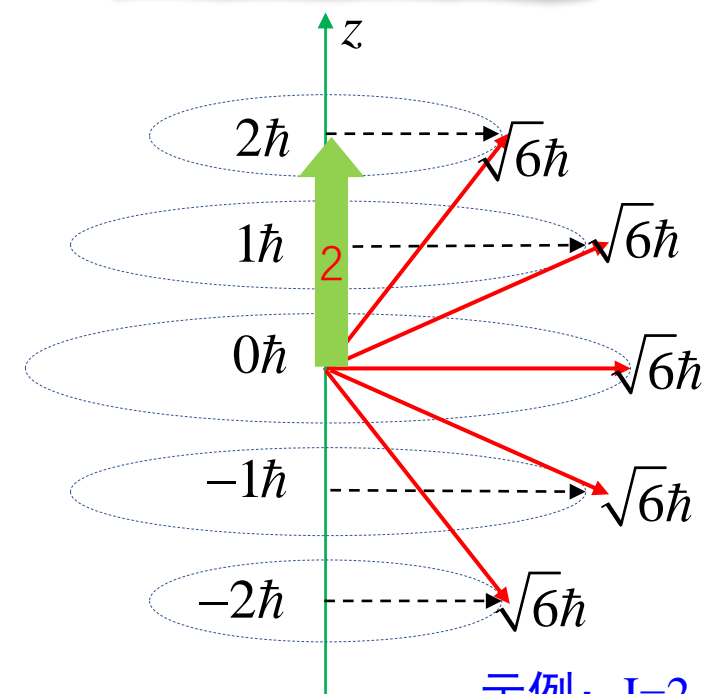
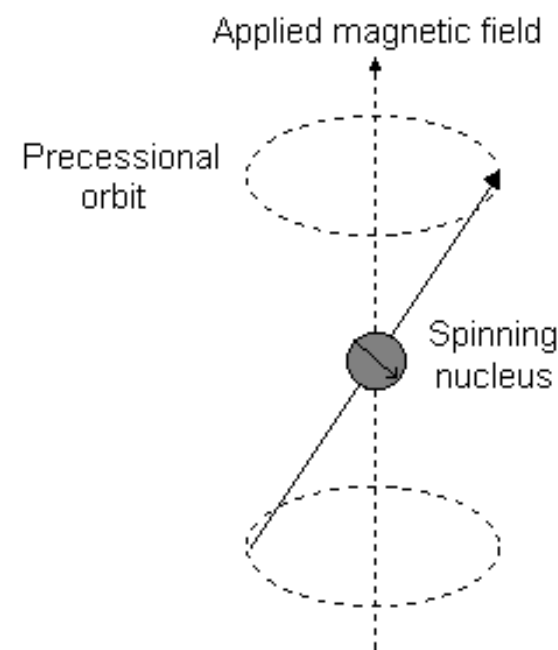
**J在z轴上的投影为:**  $J_z = m_I \hbar$

核的**自旋磁量子数**

共有 **$2I+1$** 个取值:

$$m_I = \begin{cases} I \\ I-1 \\ \vdots \\ -(I-1) \\ -I \end{cases}$$

取 **$m_I$** 的最大值 **$I$** 来  
作为**核的自旋**。

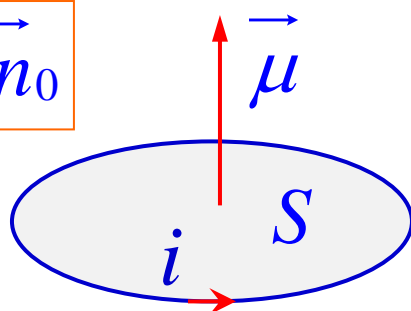


示例:  $I=2$

原子核是一个带电体系，而且具有自旋，可以推测原子核**应该有磁矩**。

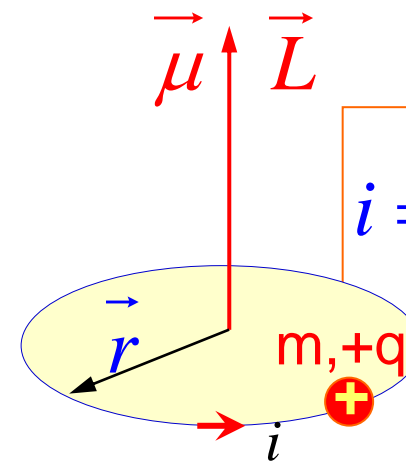
环形电流  $i$  产生的磁偶极矩：

$$\vec{\mu} = Si\vec{n}_0$$



- $S$  为环形电流包围面积
- $i$  为电流大小
- 磁矩与电流满足右手螺旋关系

质量  $m$ ，带电荷  $+q$  的粒子作速度为  $v$  的圆周运动，相当于环形电流  $i$ ，所产生的磁矩为：



$$i = q \cdot \frac{v}{2\pi r}$$

粒子的角动量为：

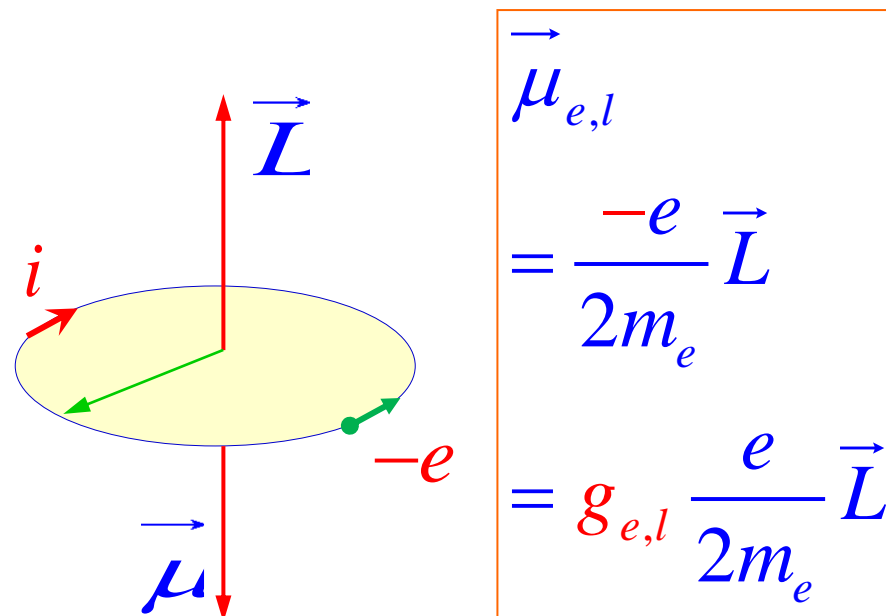
$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

磁矩与角动量满足：

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= Si\vec{n}_0 \\ &= (\pi r^2) \frac{qv}{2\pi r} \vec{n}_0 \\ &= \frac{qvr}{2} \vec{n}_0 \\ &= \frac{qmv r}{2m} \vec{n}_0 \end{aligned}$$

原子中运动的电子，轨道角动量对应的磁矩为：



$$\begin{aligned}\vec{\mu}_{e,l} &= \frac{-e}{2m_e} \vec{L} \\ &= g_{e,l} \frac{e}{2m_e} \vec{L}\end{aligned}$$

还要考虑电子自旋带来的磁矩

自旋角动量量子数  $s=1/2$

电子自旋角动量对应的磁矩：

$$\vec{\mu}_{e,s} = g_{e,s} \mu_B \vec{S}$$

$$g_{e,s} = -2$$

由  $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$

定义：玻尔磁子  $\mu_B$

$$\begin{aligned}\mu_{e,l} &= g_{e,l} \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} \\ &= g_{e,l} \mu_B \sqrt{l(l+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_B &= \frac{e\hbar}{2m_e} \\ &\approx 9.274 \times 10^{-24} \left( \frac{J}{T} \right)\end{aligned}$$

$g_{e,l} = -1$ ，为回旋磁比率或朗德因子，或g因子

考虑电子的轨道角动量和自旋后，磁矩为：

$$\vec{\mu}_e = (g_{e,l} \vec{L} + g_{e,s} \vec{S}) \mu_B$$

这是总磁矩，实际表现出的磁矩是它在z轴的投影值。

回顾了电子，下面我们看看核子（中子和质子）……

实验表明：**核子也有磁矩。**

质子、中子的反常磁矩

质子自旋磁矩

$$\vec{\mu}_{p,s} = g_{p,s} \mu_N \vec{S}$$

中子自旋磁矩

$$\vec{\mu}_{n,s} = g_{n,s} \mu_N \vec{S}$$

定义： $\mu_N$ 为核的玻尔磁子，或核磁子

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05078 \times 10^{-27} \left( \frac{J}{T} \right)$$

$g_{p,s}$ 和 $g_{n,s}$ 分别为质子和中子的朗德因子

质子、中子  
分别带+e、0  
电荷，类比  
电子，应有：

质子朗德因子

$$g_{p,s} = +2$$

中子朗德因子

$$g_{n,s} = 0$$

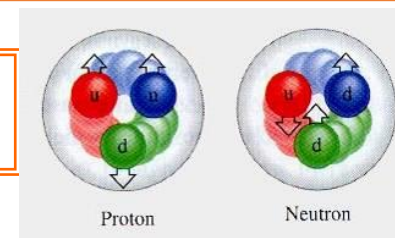
**事实  
并非  
如此!**

$$\mu_{p,s} = 2.7928456 \mu_N$$

$$\mu_{n,s} = -1.9130428 \mu_N$$

可以算出质子和中子的 $g$ 因子

$$g_{p,s} = 5.5857$$



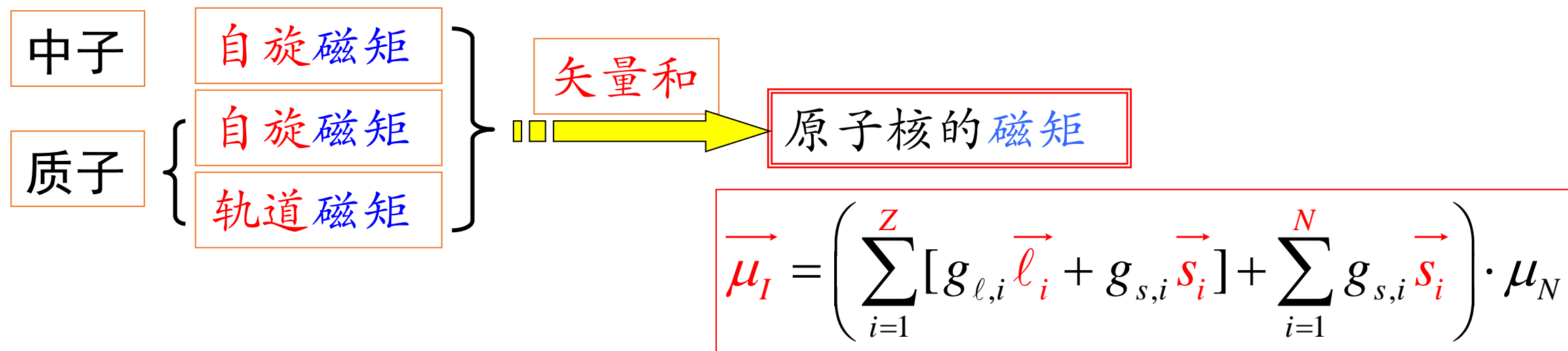
$$g_{n,s} = -3.8262$$

中子、质子还有内部  
结构，由u、d夸克组  
成，**不是点粒子**

理想的Dirac电子  
是**点粒子**，自旋  
为1/2， $g_s = -2$

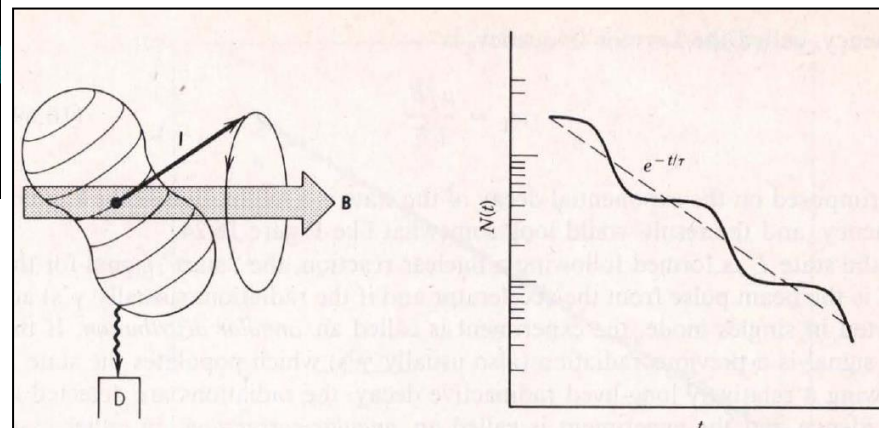
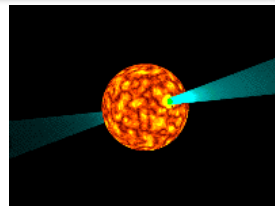
电子似乎可以这么认为，直到 $10^{-16}$ cm还没有发现其存在结构

$$g_s = 2.002319304386 \pm 0.0000000000008$$



- 通常情况下，据此式**难**以求得 $\mu_I$
- 在考虑**壳层**模型的**独立粒子运动**时，情况较为**简单**，计算剩余核子的轨道、自旋耦合即可。但**多数**情况下较为**复杂**……
- 对磁矩的测量，可以让我们了解核的结构信息





Larmor frequency

$$\omega_L = \frac{\mu_I B}{I_i \hbar}$$

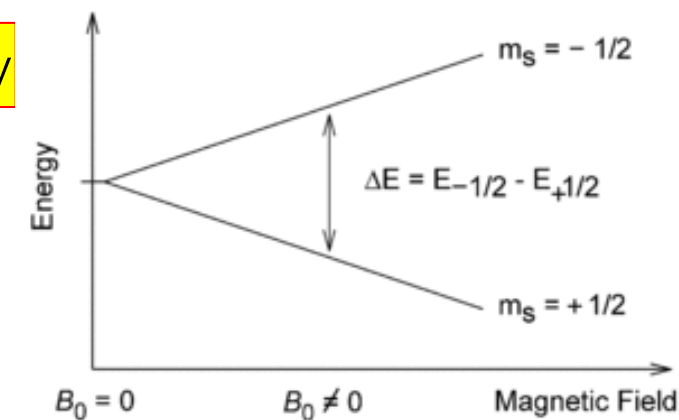
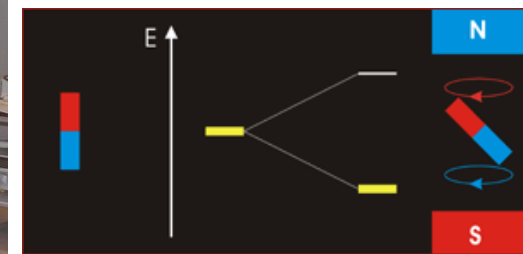
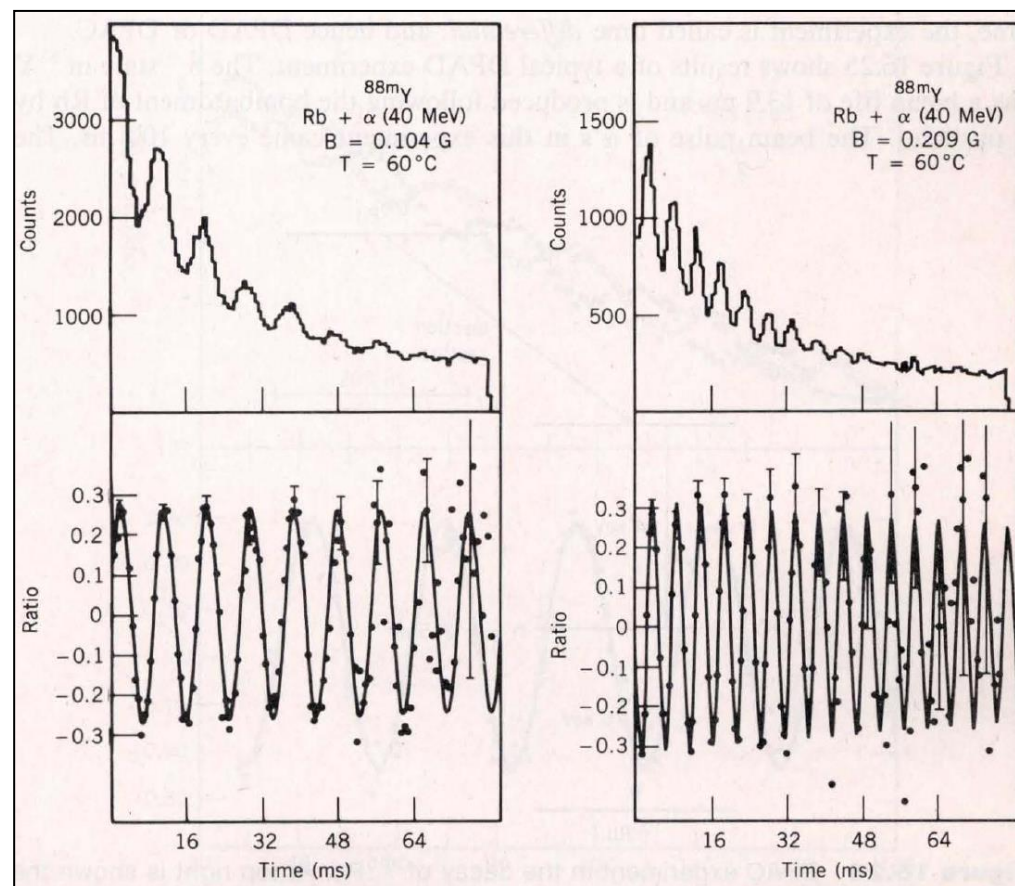


Photo from the Nobel Foundation archive.

Isidor Isaac Rabi

Prize share: 1/1

The Nobel Prize in Physics 1944 was awarded to Isidor Isaac Rabi "for his resonance method for recording the magnetic properties of atomic nuclei"



氘<sup>2</sup>H核基态

磁矩

$\mu_D = 0.85748\mu_N$

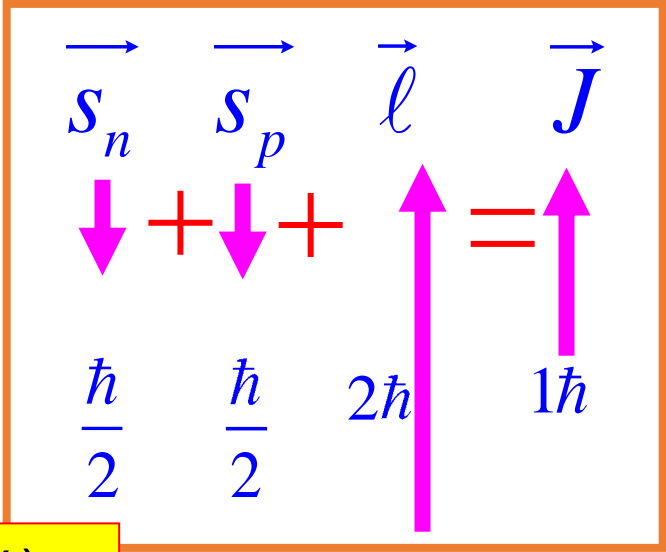
核自旋

$I = 1$

$\vec{J} = \vec{s}_n + \vec{s}_p + \vec{\ell}$

$2s+1l_I$

<sup>3</sup>D<sub>1</sub>态



(4%)

实测氘核磁矩

$\mu_D = 0.85748\mu_N$

质子自旋磁矩

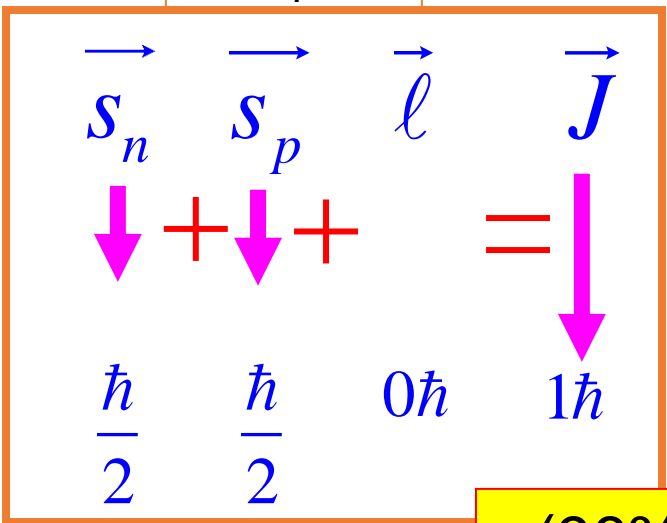
$\mu_{p,s} = 2.7928456\mu_N$

中子自旋磁矩

$\mu_{n,s} = -1.9130428\mu_N$

$\mu_{n,s} = 0.87981\mu_N$

<sup>3</sup>S<sub>1</sub>态



(96%)

氘核非球对称，有电四极矩！

？ 本页讨论有什么“问题”吗？



✓ $^2\text{H}$ 核基态磁矩 $\neq$ 中子与质子自旋磁矩之和, 可推断质子的轨道运动也贡献了磁矩——**轨道磁矩**。

? 但为何n和p的相对运动的轨道角动量大小为 **$l=0, 2\hbar$** , 而非 **$l=1\hbar$** 呢? 难道当轨道角动量为 **$l=1\hbar$** 时,

$^2\text{H}$ 核的基态自旋就不能满足 **$I=1\hbar$** 吗?

- 从角动量矢量和的角度而言,  $l=0,1,2\hbar$ 都是被允许的, 之所以选择了 **$l=0, 2\hbar$** , 是因为 $^2\text{H}$ 核的**基态宇称是“+”**, 即波函数偶对称, **而 **$l=1\hbar$** 的后果是“-”**, 这个我们在**7<sup>th</sup>节**再仔细讨论。
- 质子的轨道运动, 使得原子核的电荷分布在**S波**( $l=0\hbar$ ) 的基础上,增加了**D波**( $l=2\hbar$ ) , 这导致了原子核的形状偏离球形, 因此, **电四极矩**也就产生了。

- 原子核近似为球形，但并不严格为球形。
- 大多数核的形状是偏离球形不多的轴对称椭球。
- 原子核带电荷 $+Ze$ ，核内不同的电荷分布会产生不同的电势。

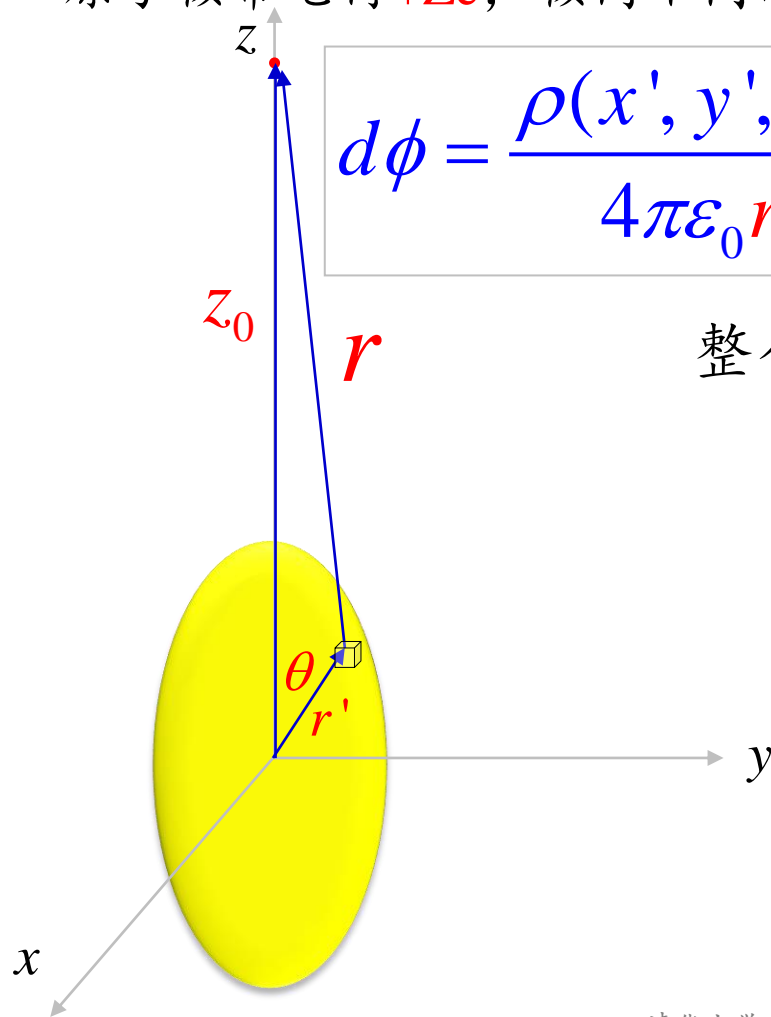
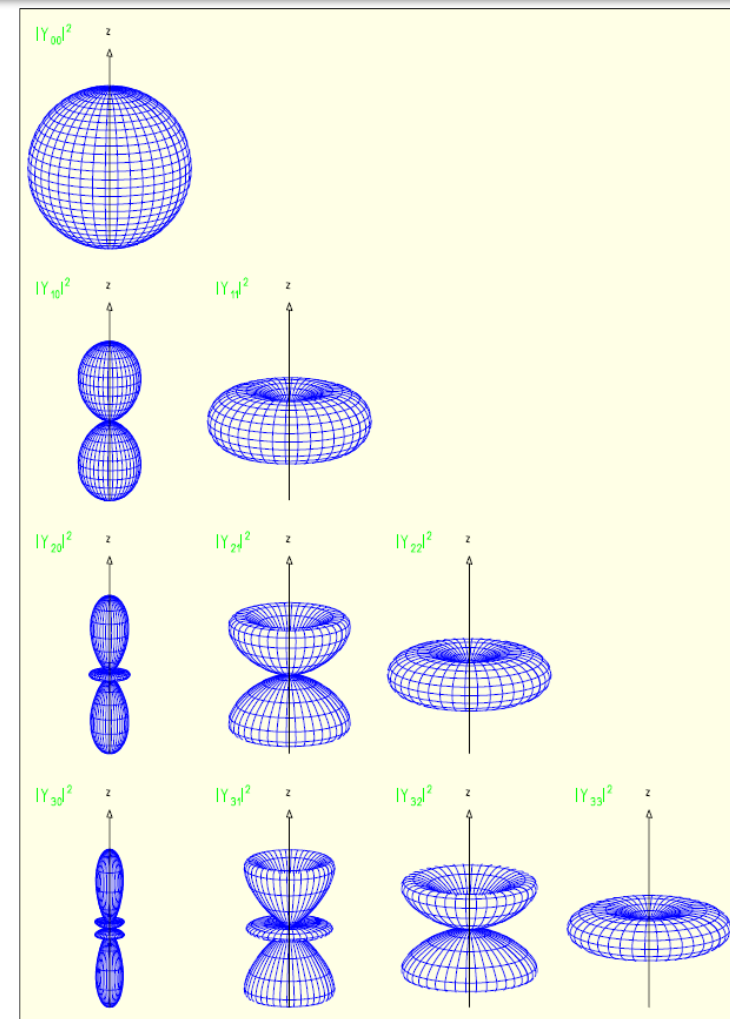
$$d\phi = \frac{\rho(x', y', z')}{4\pi\epsilon_0 r} d\tau$$

整个原子核在 $z_0$ 点上产生的电势为

$$\phi = \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} d\tau$$

对 $1/r$ 用勒让德多项式展开

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{z_0^2 + r'^2 - 2z_0 r' \cos \theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{z_0^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$



$$\frac{1}{r} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{z_0^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

假设核电荷均匀分布,  $\rho$ 为常数,  $V$ 为核体积。

$$\phi = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \cdot d\tau \quad \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{1}{r} \cdot \psi^* Ze\psi \cdot d\tau$$

波函数是对称分布的, 即有确定的宇称

勒让德多项式

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (x^2 - 1)^n \right]$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

奇偶性与 $n$ 有关:  $n$ 奇则奇,  $n$ 偶则偶

对距离的敏感性不同

$$= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \begin{aligned} & \frac{1}{z_0^{0+1}} \int_V r^{0} \cdot P_0(\cos \theta) d\tau \\ & + \frac{1}{z_0^{1+1}} \int_V r^{1} \cdot P_1(\cos \theta) d\tau \\ & + \frac{1}{z_0^{2+1}} \int_V r^{2} \cdot P_2(\cos \theta) d\tau \\ & + \frac{1}{z_0^{3+1}} \int_V r^{3} \cdot P_3(\cos \theta) d\tau \\ & \vdots \\ & + \frac{1}{z_0^{n+1}} \int_V r^{n} \cdot P_n(\cos \theta) d\tau \\ & \vdots \end{aligned} \right)_{n \rightarrow \infty}$$

单 ( $2^0$ ) 电荷电势  $>0$

偶 ( $2^1$ ) 极电势  $=0$

四 ( $2^2$ ) 极电势 ?

八 ( $2^3$ ) 极电势  $=0$

$2^n$  极电势 ?  
or  $=0$



$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots$$

$$= \text{+} + \text{+} + \text{+} + \dots$$

$$+Ze = +Ze + "0" + \text{+} + \dots$$

电偶极势一定是0

四极子电势与原子核的形状有关!

单电荷电势  $n=0$

$$\phi_0 = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z_0} \int_V d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze}{z_0}$$

偶极子电势  $n=1$

$$\phi_1 = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z_0^2} \int_V z' d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{D}{z_0^2}$$

四极子电势  $n=2$

$$\phi_2 = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2z_0^3} \int_V (3z'^2 - r'^2) d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{eQ}{2z_0^3}$$

电偶极矩

$$D = \rho \int_V z' d\tau = 0$$

电四极矩

预告：  
电偶极矩为0，  
但是在第三章的 $\gamma$ 跃迁时，电偶极跃迁却最为“强大”

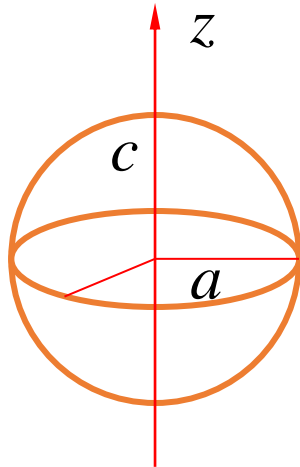
**定义：核的电四极矩Q**

$$Q = \frac{1}{e} \int_V \rho (3z'^2 - r'^2) d\tau' \quad [\text{单位: b, } 10^{-24} \text{cm}^2]$$

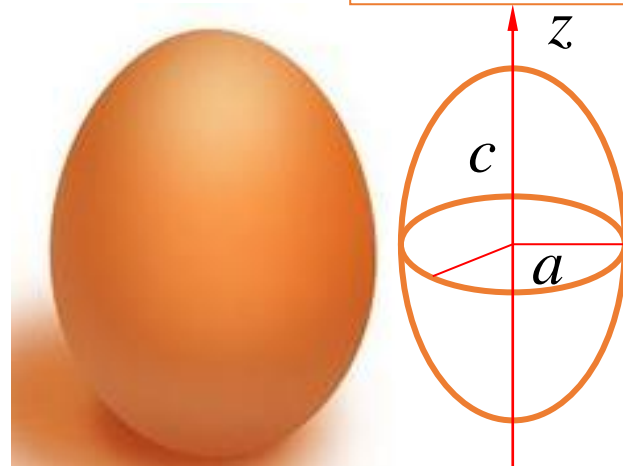
设椭球对称轴z半轴为 $c$ ,  
垂直于对称轴的两半轴为 $a$

$$Q = \frac{Z}{V} \int_V (2z'^2 - x'^2 - y'^2) d\tau' = \frac{2}{5} Z (c^2 - a^2)$$

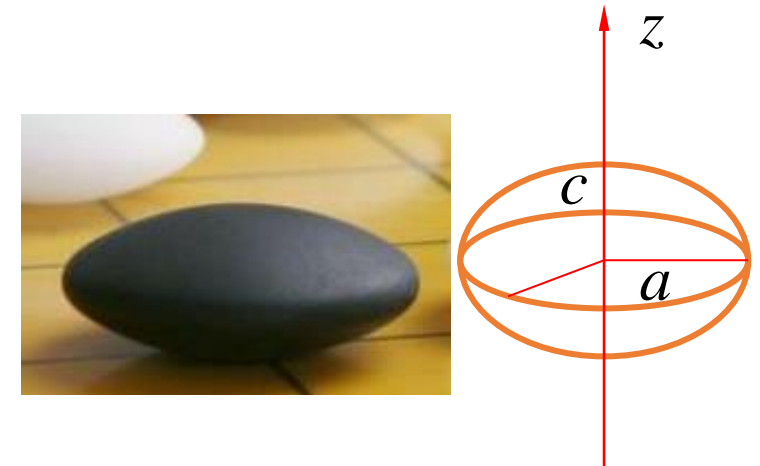
$Q = 0, c = a$ ,  
球形核



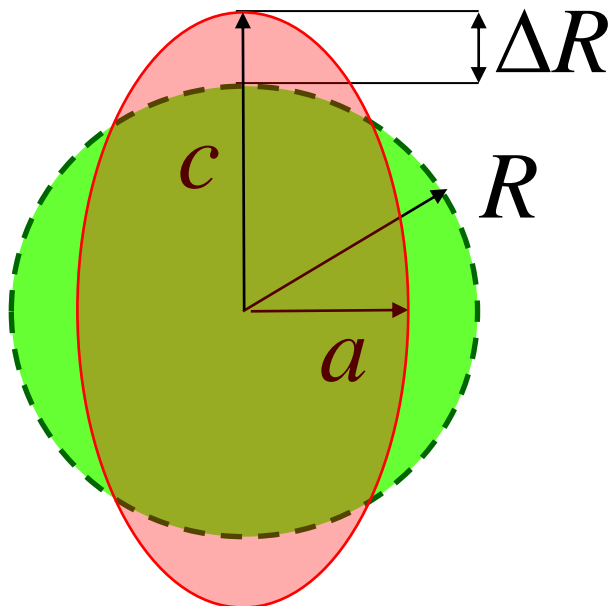
$Q > 0, c > a$ ,  
长椭球形



$Q < 0, c < a$ ,  
扁椭球形



**定义：形变参数 $\varepsilon$**



$$\varepsilon = \frac{\Delta R}{R}$$

与椭球体  
积相同球  
的半径

其中

$$\Delta R = c - R$$

$$c = R(1 + \varepsilon)$$

由

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 c$$

$$a = \frac{R}{\sqrt{1 + \varepsilon}}$$

将c和a代入

$$Q = \frac{2}{5} \cdot Z(c^2 - a^2)$$

$$Q = \frac{2}{5} \cdot ZR^2(1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - \frac{1}{1 + \varepsilon})$$

$$Q \approx \frac{2}{5} \cdot ZR^2[1 + 2\varepsilon - (1 - \varepsilon)]$$

$$Q \approx \frac{6}{5} \cdot ZR^2\varepsilon$$

$$Q = \frac{6}{5} \cdot Zr_0^2 A^{\frac{2}{3}} \varepsilon$$

实验测得电四极矩 $Q$ 后，即可算得**形变参数 $\varepsilon$** 。



实验结果表明：

- 核的电四极矩Q有正有负，多数核的 $Q>0$ ， $\epsilon >0$ ，即多数核为长椭球形。
- 大多数原子核的形变参量 $\epsilon$ 不等于零，一般为百分之几。说明大多数核的形状是非球形的，但偏离球形的程度都不大。
- 只有少数核，如 $^{176}\text{Lu}$ ， $^{163}\text{Er}$ 的 $Q$ 很大( $\sim 5\text{b}$ ， $2.55\text{b}$ )，形变参量 $\epsilon \sim 0.2 \sim 0.3$ 。
- 当 $Z=28, 50, 82$ 时， $Q=0$ 。
- 自旋为0和1/2的原子核,  $Q=0$ （证明见右→）。

核 素	自旋( $\hbar$ )	磁矩( $\mu_N$ )	电四极矩(b)
$n$	1/2	-1.19131	0
$^1\text{H}$	1/2	2.7927	0
$^2\text{H}$	1	0.8574	0.00282
$^3\text{H}$	1/2	2.9789	0
$^3\text{He}$	1/2	-2.1275	0
$^4\text{He}$	0	0	0
$^7\text{Li}$	3/2	3.2563	-0.045
$^{176}\text{Lu}$	7	3.1800	$\sim 5$
$^{235}\text{U}$	7/2	-0.35	4.1
$^{241}\text{Pu}$	5/2	-0.730	5.600

When  $I = 0$ , the nucleus has no preferred axis, the charge distribution appears spherically symmetric, and  $Q = 0$ . We shall now use quantum mechanics to prove that  $Q = 0$  also when  $I = 1/2$ .

In quantum mechanics we must replace  $z'$  by  $\mathbf{r}' \cdot \frac{\mathbf{e}_I}{|\mathbf{I}|} = \mathbf{r}' \cdot \frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{I}|}$

$$z' = \frac{1}{|\mathbf{I}|} (x' I_x + y' I_y + z' I_z)$$
$$z'^2 = \frac{1}{I(I+1)} \left( x'^2 I_x^2 + y'^2 I_y^2 + z'^2 I_z^2 + 2x'y'(I_x I_y + I_y I_x) + \dots \right)$$

But because of the commutation relations for  $I$ , the three terms of the form

$$I_x I_y + I_y I_x = 0 ;$$

also

$$I_x^2 = I_y^2 = I_z^2 = 1/4$$
$$I(I + 1) = 3/4$$

therefore

$$z'^2 = \frac{4}{3} \frac{1}{4} (x'^2 + y'^2 + z'^2) + 0$$
$$= \frac{r'^2}{3}$$

so

$$Q = 0 \quad \text{by I.21}$$

原子核的电某极矩，可能取0，也可能取+或-，则它有可能是下面哪极矩？

- ☐ A 电单极矩
- ☐ B 电偶极矩
- ☒ C 电四极矩
- ☐ D 电八极矩

提交

- 原子核是个带电体系，因此当然会在空间产生电势；电势可分解为单 ( $2^0$ )、偶 ( $2^1$ )、四 ( $2^2$ )、八 ( $2^3$ ) ..... ( $2^n$ ) 极势，其中单极势是最主要的构成。
  - 若原子核是球形，则只有单极势，后面的那些势都是0；
  - 原子核是对称的（波函数是宇称算符的本征态），所以偶极势（以及n为奇数的多极势）总是0；
  - 若原子核不是球状，电四极势就出现了，电四极矩是“+”还是“-”，取决于它是长椭球还是扁椭球形。
- 单、偶、四、八.....极势，与r的关系分别是 $r^{-1}$ ,  $r^{-2}$ ,  $r^{-3}$ ,  $r^{-4}$ , ...次方。所以越往后，越小，越不重要。对于第三章要讨论的 $\gamma$ 跃迁来说，八极跃迁比四极跃迁慢的道理也就在这里了。

## 绪论

§ 1.1 原子核的组成、质量及半径

§ 1.2 原子核稳定性的实验规律

§ 1.3 原子核的结合能

§ 1.4 核力及核势垒

§ 1.5 原子核的矩（自旋、磁矩和电四极矩）

✓ **§ 1.6 原子核的统计性质**

§ 1.7 原子核的宇称

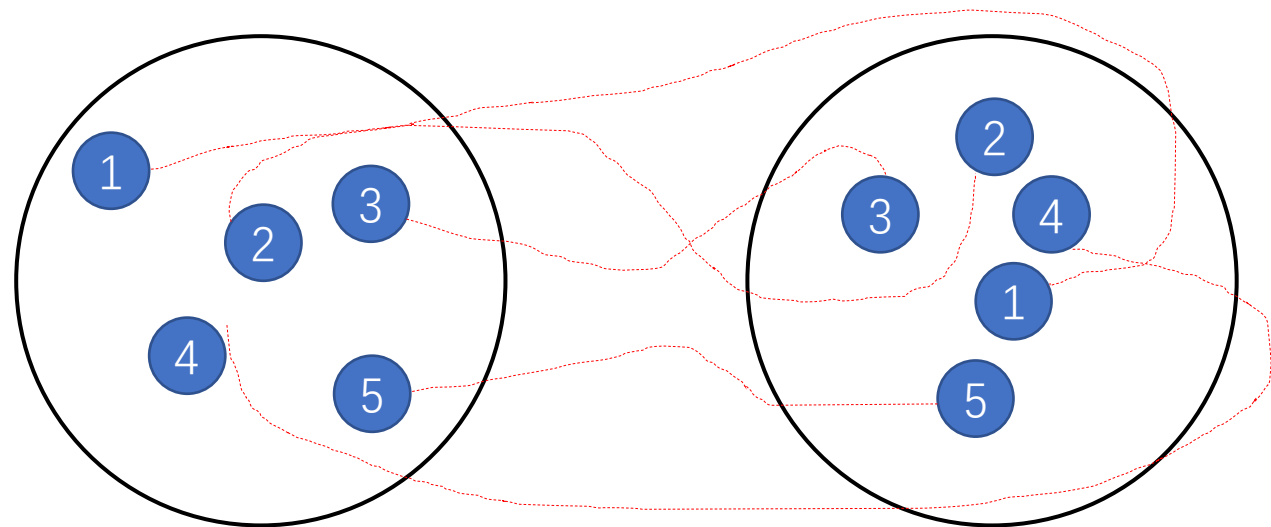
§ 1.8 原子核的能态和核的壳层模型

### 经典粒子体系：

- 每个粒子都是**可辨识的**，（时间、位置、速度……）可**“任意精确”**
- 通过求解运动方程，可以确定其运动轨迹

### 量子力学体系：

- 微观粒子的波函数只反映了出现的**概率密度**，无法**“任意精确”**
- **全同性**：同类微观粒子间无法区分（谁的波函数呢？）
- 只能用**统计的方法**来描述**多个全同粒子组成的体系**（如原子核）



由**同类微观粒子**组成的**多粒子体系**，  
可以用一**波函数**来描述

$$\Psi(x_1, x_2, \cdots x_i, \cdots x_j, \cdots, x_n)$$

$x_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ )表示第 **$i$** 个粒子的状态：  
**空间坐标, 自旋**

可阅读: Landau. *QUANTUM MECHANICS Non-relativistic Theory, Third edition, revised and enlarged.* p205

如果将体系中的第*i*个粒子和第*j*个粒子交换 $P_{ij}$

交换后的波函数为:

? 交换后的变化是什么?

全同粒子: 波函数的几率分布没有变

将粒子*i*, *j*再次交换,

全同粒子体系的波函数经过粒子交换后, 只有两种可能性:

①波函数反对称——费米子

②波函数对称——玻色子

没有mixed symmetry!

$$P_{ij}\Psi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$$

$$= \Psi(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$

最多增加一个常数 $\lambda$

$$= \lambda \Psi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$$

$$P_{ji}P_{ij}\Psi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$$

$$= \lambda^2 \Psi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$$

$$= \Psi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$$

$$\lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm 1$$

- 自旋为**半整数** $\hbar$ 的粒子被称为**费米子(Fermion)**
- 由**费米子**组成的全同粒子体系, 服从**费米-狄拉克统计**, 波函数交换**反对称**

$$e^{i \cdot 2\pi \cdot S_{pin} / \hbar}$$

- 自旋为**整数** $\hbar$ 的粒子被称为**玻色子(Boson)**
- 由**玻色子**组成的全同粒子体系, 服从**玻色-爱因斯坦统计**, 波函数交换**对称**

$$\Psi(x_1, \cdots x_i, \cdots x_j, \cdots, x_n) \\ = -\Psi(x_1, \cdots x_j, \cdots x_i, \cdots, x_n)$$

$$\Psi(x_1, \cdots x_i, \cdots x_j, \cdots, x_n) \\ = \Psi(x_1, \cdots x_j, \cdots x_i, \cdots, x_n)$$

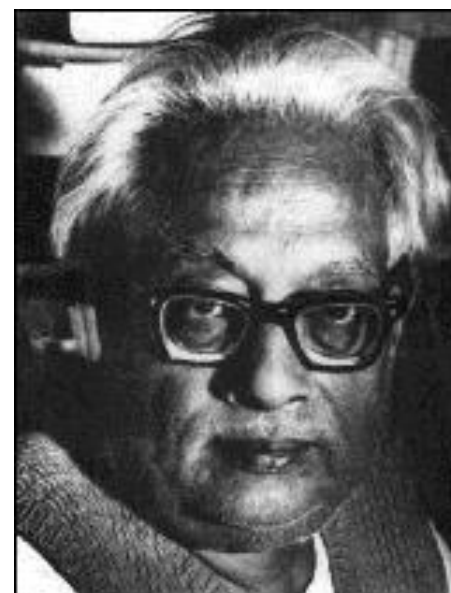


**半整数 $\hbar$**

电子  
质子  
中子  
中微子  
 $\mu$  子  
奇A核

.....

Enrico Fermi won the Nobel Prize for Physics in 1938.



**整数 $\hbar$**

光子  
 $\pi$ 介子  
偶A核 ( $\alpha$ 粒子)  
.....

Satyendra Nath Bose (1894-1974) was professor of physics at the University of Calcutta 1945-58.

## 原子核是玻色子还是费米子？

➤ 原子核由数目不等的费米子（核子）组成

- 它可能是费米子，服从费米—狄拉克统计
- 也可能是玻色子，服从玻色—爱因斯坦统计

## 明确的实验结果

奇A核：

自旋是半整数 $\hbar \rightarrow$ 费米子

$^1\text{H}$ :  $1/2\hbar$

$^{11}\text{B}$ :  $3/2\hbar$

$^{23}\text{Na}$ :  $3/2\hbar$

偶A核：

自旋是整数 $\hbar \rightarrow$ 玻色子

$^4\text{He}$ :  $0\hbar$

$^{10}\text{B}$ :  $3\hbar$

$^{18}\text{F}$ :  $1\hbar$

## 结论推广

- 由奇数个费米子组成的粒子仍然是费米子；
- 由偶数个费米子组成的粒子是玻色子；
- 由任意个玻色子组成的粒子总是玻色子。

## 为什么原子核的统计性质由A决定？

由核子数 $A=Z+N$ 的两个相同原子核组成体系的波函数为：

$$\Psi(x_1, x_2, \cdots x_A, x_{A+1}, x_{A+2}, \cdots, x_{2A})$$

互换两个原子核互换，将A对核子逐对交换，

费米子交换A次

$$\Psi(x_1, x_2, \cdots x_A, x_{A+1}, x_{A+2}, \cdots, x_{2A})$$

$$= (-1)^A \Psi(x_{A+1}, x_{A+2}, \cdots, x_{2A}, x_1, x_2, \cdots x_A)$$

$$(-1)^A \begin{cases} A\text{偶}: 1, \text{玻色子} \\ A\text{奇}: -1, \text{费米子} \end{cases}$$

原子核的统计性质取决于原子核核子数的奇偶性！



$n+X\rightarrow Y+\gamma$ ，是一种常见的中子反应，叫辐射俘获，如果在液滴模型中X的对能项取0，则可以肯定Y是？

- ☒ A 玻色子
- ☐ B 费米子
- ☐ C 要看X是偶偶核，还是奇奇核
- ☐ D 说不清 or 没有正确答案

## 绪论

§ 1.1 原子核的组成、质量及半径

§ 1.2 原子核稳定性的实验规律

§ 1.3 原子核的结合能

§ 1.4 核力及核势垒

§ 1.5 原子核的矩（自旋、磁矩和电四极矩）

§ 1.6 原子核的统计性质

✓ **§ 1.7 原子核的宇称**

§ 1.8 原子核的能态和核的壳层模型

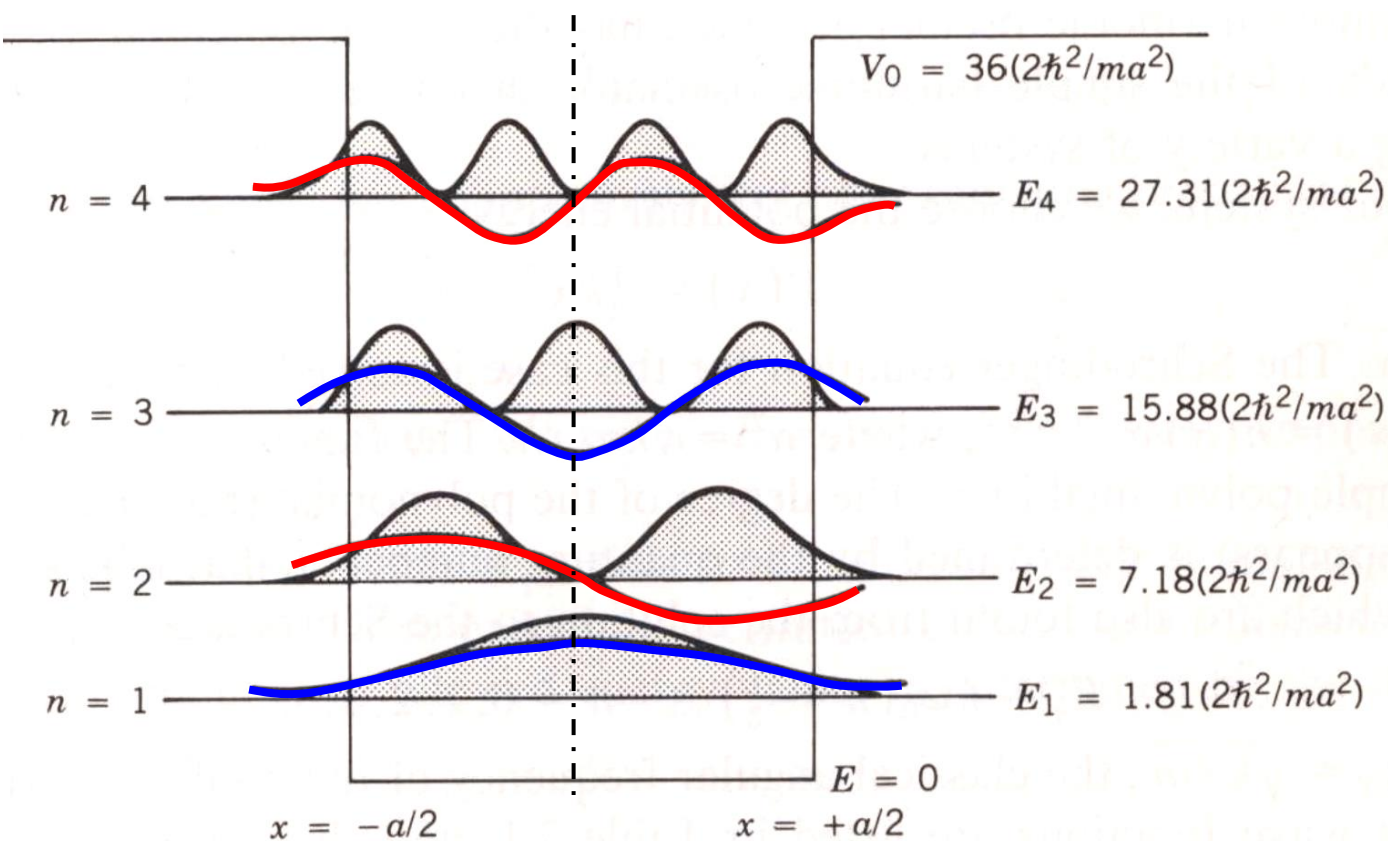
一. 什么是**宇称**?

二. **宇称守恒**与**空间反演不变性**

三. 原子**核**的**宇称**

- **Parity**——An **intrinsic symmetry property** of subatomic particles that is characterized by the behavior of the **wave function** of such particles **under reflection through the origin of spatial coordinates**.

宇称: 简单地讲, 就是波函数的对称性。



## 1963诺贝尔物理奖

(1902~1995)

"for his contributions to the theory of the atomic nucleus and the elementary particles, particularly through the discovery and application of fundamental symmetry principles"

1927年E.P.Wigner提出宇称概念, 宇称是描述空间反演运算的物理量。他断言: 自然界有永恒的左右对称性, 即如果一个事件在实际中发生了, 那么它的镜像事件也同样会发生。

## 宇称算符的本征值

空间反演算符在**本征态**  $\psi(r)$  上:

$$\hat{P}\psi(r) = \psi(-r)$$

空间反演算符**作用两次**:

$$\hat{P}^2\psi(r) = \hat{P}\psi(-r) = \psi(r)$$

若  $\psi(r)$  是反演算符的**本征态**, 则有**本征值**  $\pi$ :

$$\hat{P}^2\psi(r) = \hat{P}\pi\psi(r) = \pi^2\psi(r)$$

比较两式有:

$$\pi^2 = 1$$



$$\pi = \pm 1$$

## 奇偶宇称态

波函数在空间反演下有**两种情况**

$$\hat{P}\psi(r) = \psi(-r) = \pm\psi(r)$$

本征值  $\pi = +1$ ,  
本征态为**偶宇称态**

本征值  $\pi = -1$ , 本  
征态为**奇宇称态**

$$\psi(-r) = \psi(r)$$

$$\psi(-r) = -\psi(r)$$

如:  $\psi = A\cos kx$

如:  $\psi = A\sin kx$

- 宇称可能**守恒**——反应前后的“**波函数的对称性**”**不变**, 奇还是奇, 偶还是偶
- 宇称也可能**不守恒**——“**奇偶对称性**”不再恒定, 初态=? 末态

补充说明: 有的波函数没有确定的宇称, **不是**空间反演算符的**本征**波函数

$$\psi(r) = c \cdot e^{ikr}$$

- 空间反演不变性**——在空间反演条件下，将所有实验条件都取镜像，镜像过程将和实际过程一样，遵守相同的物理规律。

在**空间反演**下，波函数为

$$\hat{P}\psi(r) = \psi(-r)$$

微观粒子的物理规律由

**Schödinger方程**描述：

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r)}{\partial t} = H(r)\psi(r)$$

空间反演下**物理规律不变**

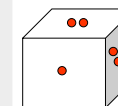
$$i\hbar \frac{\partial \psi(-r)}{\partial t} = H(r)\psi(-r)$$

$$H(r) = H(-r)$$

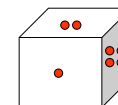
$$i\hbar \frac{\partial \psi(r)}{\partial t} = H(-r)\psi(r)$$

**势函数是对称的！**

## 镜像变换



$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$$

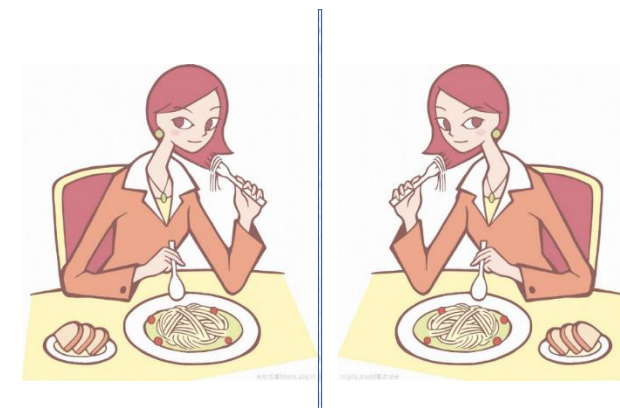
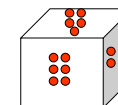


?  $\equiv$

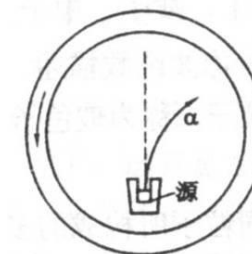
**宇称变换**  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$$

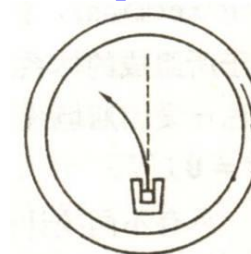
180度



$\alpha$  粒子受力：  
 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{H}$



运动轨迹曲率半径：  
 $\rho = \frac{mv}{qH}$



空间反演下物理规律不变

 $\equiv$ 

$$H(r) = H(-r)$$

$\therefore \hat{P}$  与  $H$  对易, 宇称量子数  $\pi$  是**好量子数**——**守恒量, 不随时间改变** (初态为本征态, 则保持)。

于是有:

$$\begin{aligned}
 & \hat{P}H(r)\psi(r) \\
 &= \hat{P}[H(r)\psi(r)] \\
 &= H(-r)\psi(-r) \\
 &= H(-r)\hat{P}\psi(r) \\
 &= H(r)\hat{P}\psi(r)
 \end{aligned}$$

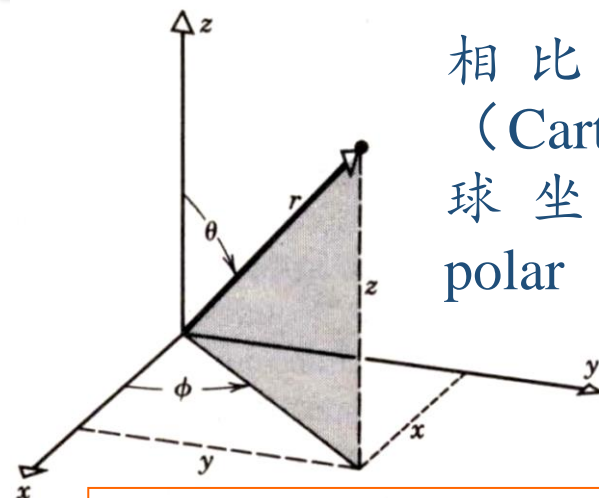
$$\hat{P}H(r) = H(r)\hat{P}$$

即:

$$[\hat{P}, H] = 0$$

宇称守恒定律:

- 若  $H(r)=H(-r)$ , 微观体系的宇称保持不变, 体系变化前后宇称相同。
- 反之, 若宇称不守恒, 则说明  $H(r)=H(-r)$  这个前提不存在了。



相比笛卡尔坐标系 (Cartesian coordinate), 球坐标系 (spherical polar system) 更为合适:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = N \cdot R(r) \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi}$$

**连带勒让德多项式**

(associated Legendre polynomial)

$$\xi = \cos \theta$$

$$P_l^m(\xi) = \frac{1}{2^l l!} (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2 - 1)^l$$

原子核是由**中子**和**质子**组成的微观体系, 由于原子核近似为球形, 其状态可以用有心场中**各核子波函数的乘积**来描述。

$$R(r) \rightarrow R(r)$$

$$P_l^m(\xi) \rightarrow (-1)^{l+m} P_l^m(\xi)$$

$$e^{im\varphi} \rightarrow e^{im(\pi+\varphi)} = (-1)^m e^{im\varphi}$$

空间反演

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$$

球坐标下

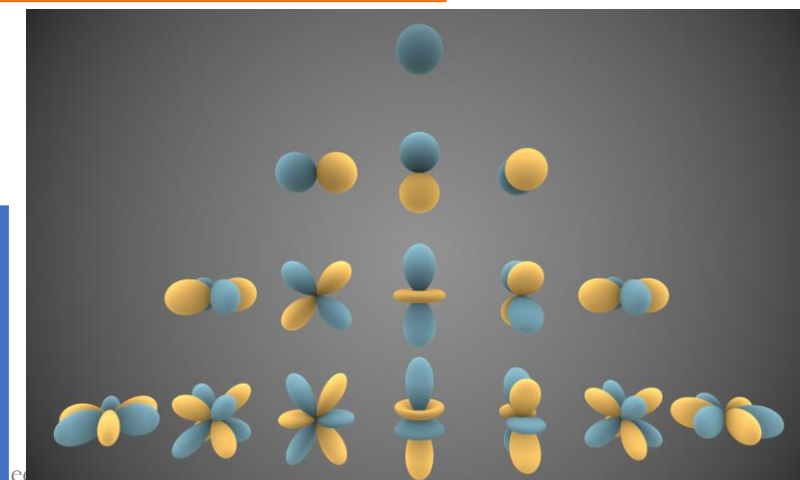
$$r \rightarrow r$$

$$\theta \rightarrow \pi - \theta$$

$$\varphi \rightarrow \pi + \varphi$$

$$\hat{P}\psi(r, \theta, \varphi) \rightarrow (-1)^l \psi(r, \theta, \varphi)$$

**重要结论:** 核子**轨道运动波函数的宇称**与其轨道角动量  $l$  的奇偶性相同, 称为**轨道宇称**。





核子的宇称=内禀宇称×轨道宇称

微观粒子的  
内禀宇称  
 $\pi = \pm 1$

 $\pi = +1$ : 核子、电子..... $\pi = -1$ : 光子、 $\pi$ 介子.....

原子核波函数为各核子波函数的乘积

$$\pi_N = \prod_{i=1}^A \pi_i \prod_{i=1}^A (-1)^{l_i} = \prod_{i=1}^A (-1)^{l_i} = (-1)^{\sum_{i=1}^A l_i}$$

核宇称为各核子宇称之积

一定的原子核状态具有确定不变的自旋和宇称，表示为： $I^\pi$

- $^{57}\text{Fe}$ 基态： $I^\pi = 1/2^-$
- $^{57}\text{Fe}$ 第一激发态： $I^\pi = 3/2^-$
- $^4\text{He}$ 基态： $I^\pi = 0^+$
- $^4\text{He}$ 第二激发态： $I^\pi = 0^-$
- $^2\text{H}$ 核基态： $I^\pi = 1^+$

- 宇称描述的是波函数的对称性。
- 所有核子的波函数构成了整个原子核的波函数, 因此所有核子波函数的宇称也就决定了原子核波函数的宇称。
- 原子核波函数的宇称由所有核子轨道角动量大小的总和的奇偶性来决定, 奇则“-”, 偶则“+”。
- 宇称可以守恒, 也可以不守恒, 这反映的实际是势函数的问题。势函数对称, 宇称就守恒, 否则就不守恒。强作用、电磁作用, 势函数对称; 在弱作用中, 不对称。

1956年之前的  $\theta - \tau$  疑难:

衰变方式	质量/ $m_e$	K介子衰变百分比
$\theta^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$	966.7	29%
$\tau^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$	966.3	6%

$\theta^+$ 、 $\tau^+$ 、 $\pi$ 的自旋为0,  $\pi$ 的宇称为-1。

$$\begin{aligned}
 &\text{对 } \theta^+ \text{ 衰变,} & \text{对 } \tau^+ \text{ 衰变,} \\
 &\pi_f = \pi_{\pi^+} \pi_{\pi^0} (-1)^l & \pi_f = \pi_{\pi^+} \pi_{\pi^+} \pi_{\pi^-} (-1)^l \\
 &= (-1)(-1)(-1)^0 & = (-1)(-1)(-1)(-1)^0 \\
 &= +1 & = -1
 \end{aligned}$$

宇称守恒,  $\theta^+$ 、 $\tau^+$ 不同?



$\theta^+$ 、 $\tau^+$ 相同, 宇称守恒

为了验证李-杨的猜想, 吴健雄对 $^{60}\text{Co}$ 出射 $\beta$ 粒子

- 空间反演不变 $\Rightarrow$ 镜子内外都可以发生 $\rightarrow \beta$ 出射方向
- $\beta$ 出射方向与自旋有关 $\rightarrow$ 镜子内外并不等价 $\rightarrow$

Now to return to the  $\vartheta - \tau$  puzzle. In 1953, Dalitz and Fabri<sup>7</sup> pointed out that in the decay of the  $\vartheta$  and  $\tau$  mesons

$$\vartheta \rightarrow \pi + \pi$$

$$\tau \rightarrow \pi + \pi + \pi$$

参考阅读材料71

yang-lecture\_The law of parity conservation and other symmetry laws of physics

some information about the spins and parities of the  $\tau$  and  $\vartheta$  mesons can be obtained. The argument is very roughly as follows. It has previously been determined that the parity of a  $\pi$  meson is odd (i.e. = -1). Let us first neglect the effects due to the relative motion of the  $\pi$  mesons. To conserve parity in the decays, the  $\vartheta$  meson must have the total parity, or in other words, the product parity, of two  $\pi$  mesons, which is even (i.e. = +1). Similarly, the  $\tau$  meson must have the total parity of three  $\pi$  mesons, which is odd. Actually because of the relative motion of the  $\pi$  mesons the argument was not as simple and unambiguous as we just discussed. To render the argument conclusive and definitive it was necessary to study experimentally the momentum and angular distribution of the  $\pi$  mesons. Such studies were made in many laboratories, and by the spring of 1956 the accumulated experimental data seemed to unambiguously indicate, along the lines of reasoning discussed above, that  $\vartheta$  and  $\tau$  do not have the same parity, and consequently are not the same particle. This conclusion, however, was in marked contradiction with other experimental results which also became definite at about the same time. The contradiction was known as the  $\vartheta - \tau$  puzzle and was widely discussed. To recapture the atmosphere of that time allow me to quote a paragraph concerning the conclusion that  $\vartheta$  and  $\tau$  are not the same