第 1 次作业题解答

1. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 证明: $\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$, $\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

证明: 不失一般性, 我们可以假设 $a \geqslant b$ (否则可交换 a, b 的作用). 则

$$\begin{aligned} \frac{a+b+|a-b|}{2} &= \frac{a+b+a-b}{2} = a = \max\{a,b\}, \\ \frac{a+b-|a-b|}{2} &= \frac{a+b-(a-b)}{2} = b = \min\{a,b\}. \end{aligned}$$

注: 上述二式等价. 比如说由第一式可导出第二式. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} \min\{a,b\} &= -\max\{-a,-b\} \\ &= -\frac{-a-b+|-a+b|}{2} \\ &= \frac{a+b-|a-b|}{2}. \end{aligned}$$

2. 设 A, B 为非空有界数集且 $A \cap B$ 非空, 证明:

$$\inf(A \cap B) \geqslant \max\{\inf A, \inf B\}.$$

证明: $\forall x \in A \cap B$, 我们有 $x \geqslant \inf A$ 且 $x \geqslant \inf B$, 故

$$x \geqslant \max\{\inf A, \inf B\},$$

于是由下确界的定义可知 $\inf(A \cap B) \geqslant \max\{\inf A, \inf B\}$.

3. 设 A, B 均为非空有界数集, 定义 $A+B = \{x+y \mid x \in A,\ y \in B\}$. 证明:

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

证明: **方法 1.** 首先证明 $\inf(A+B) \geqslant \inf A + \inf B$.

$\forall x \in A$ 以及 $\forall y \in B$, 我们有 $x \geqslant \inf A$, $y \geqslant \inf B$, 故 $x+y \geqslant \inf A + \inf B$, 则由下确界的定义知 $\inf(A+B) \geqslant \inf A + \inf B$.

其次证明 $\inf(A+B) \leqslant \inf A + \inf B$.

$\forall y \in B$ 以及 $\forall x \in A$, 我们有 $\inf(A+B) \leqslant x+y$. 于是 $\inf(A+B) - y \leqslant x$, 从而由下确界的定义可知 $\inf(A+B) - y \leqslant \inf A$, 也即 $\inf(A+B) - \inf A \leqslant y$. 再由下确界的定义可得 $\inf(A+B) - \inf A \leqslant \inf B$.

综上所述可知 $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

方法 2. 令 $\eta_1 = \inf A$, $\eta_2 = \inf B$. 则 $\forall x \in A$ 以及 $\forall y \in B$, 我们有 $x \geqslant \eta_1$, $y \geqslant \eta_2$, 于是 $x+y \geqslant \eta_1 + \eta_2$, 也即 $\eta_1 + \eta_2$ 为 $A+B$ 的下界.

$\forall \varepsilon > 0$, 由下确界的性质知, $\exists x \in A$ 使得 $x < \eta_1 + \frac{\varepsilon}{2}$, 同时 $\exists y \in B$ 使得 $y < \eta_2 + \frac{\varepsilon}{2}$, 则 $x+y < \eta_1 + \eta_2 + \varepsilon$. 故 $\eta_1 + \eta_2$ 为 $A+B$ 的下确界. 得证.

4. 利用极限的定义证明以下极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-1}{n^3-n+1}=2$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+4})=0$.

证明: (1) $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=[(1+\frac{2}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}]$, 则 $\forall n>N$, 均有 $n>(1+\frac{2}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}$, 从而 $n^2-1>\frac{2}{\varepsilon}$, 于是 $\left|\frac{2n^3-1}{n^3-n+1}-2\right|=\frac{2n-3}{n^3-n+1}<\frac{2n}{n(n^2-1)}=\frac{2}{n^2-1}<\varepsilon$. 故所证成立.

(2) $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=[\frac{5}{\varepsilon}]+1$, 则 $\forall n>N$, 我们有

$$|\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+4}|=\frac{5}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+4}}\leqslant\frac{5}{n}<\varepsilon.$$

因此所证结论成立.

5. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A 等价于它的子列 $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n-1}\}$ 均收敛于 A.

证明: **必要性.** 若 $\{x_n\}$ 收敛于 A, 则该数列的任意子列收敛到 A, 特别地, 其偶数项子列与奇数项子列收敛到 A.

充分性. 假设 $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n-1}\}$ 均收敛于 A. 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1>0$ 使得 $\forall n>N_1$, 均有 $|x_{2n}-A|<\varepsilon$. $\exists N_2>0$ 使得 $\forall n>N_2$, 均有 $|x_{2n-1}-A|<\varepsilon$. 令 $N=2N_1+2N_2$. $\forall n>N$, 当 n 为偶数时, $\frac{n}{2}>N_1$, 则 $|a_n-A|=|a_{2\cdot\frac{n}{2}}-A|<\varepsilon$. 当 n 为奇数时, $\frac{n+1}{2}>N_2$, 故 $|x_n-A|=|x_{2\cdot\frac{n+1}{2}-1}-A|<\varepsilon$. 综上所述可知, $\forall n>N$, 总有 $|a_n-A|<\varepsilon$, 因此数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A.

6. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-2n^2-n-1}{3n^3+n^2+2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+n-2})$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2})$.

解: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-2n^2-n-1}{3n^3+n^2+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}=\frac{2}{3}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+n-2})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n-2}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{3}{n}}{2+\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-1\right)+\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}-1\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{3}{n}}{2+\frac{-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}+\frac{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}+1}}=\frac{-2}{2}=-1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n(n+1)}{2(n+2)}-\frac{n}{2})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{2(1+\frac{2}{n})}=-\frac{1}{2}$.

7. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin^2 n+\cos^2 n)^{\frac{1}{n}}$.

解: (1) $\forall n\geqslant 1$, 均有 $0\leqslant\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{n+1}{n^2}$, 进而由夹逼原理得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}=0.$$

(2) $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}<1$. 于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1$.

(3) $\forall n\geqslant 1$, $1\leqslant(2\sin^2 n+\cos^2 n)^{\frac{1}{n}}=(1+\sin^2 n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{2}$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, 则由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin^2 n+\cos^2 n)^{\frac{1}{n}}=1$.

8. 证明不等式: $\frac{1}{2n}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}}$.

解: (1) $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n} &= \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}\\ &= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(2k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}=\frac{1}{2n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{2k}\geqslant\frac{1}{2n},\\ \Big(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\Big)^2 &= \frac{\big(\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)\big)\big(\prod\limits_{k=1}^{n-1}(2k+1)\big)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)^2}\\ &= \frac{1}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}<\frac{1}{2n+1}.\end{aligned}$$

由此立刻可得所要不等式.

(2) 由 (1) 可知, $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2n}}\leqslant\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[2n]{2n+1}}<1.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}}=1$.

思考题 (不用交):

9. 下列说法中, 哪些与 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 等价. 如果等价, 请证明. 如果不等价, 请举出反例.

(1) 对于无限多个 $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n \geqslant N$, 就有 $|a_n - A| < \varepsilon$;

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n \geqslant N$, 就有 $|a_n - A| < \varepsilon$;

(3) $\forall \varepsilon \in (0,1)$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - A| < \varepsilon$;

(4) $k > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - A| < k\varepsilon$;

(5) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - A| < \varepsilon^{\frac{2}{3}}$;

(6) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists N_k \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N_k$, 就有 $|a_n - A| < \frac{1}{2^k}$;

(7) $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - A| < \frac{1}{n}$;

(8) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{n}$;

(9) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - A| < \sqrt{n}\varepsilon$.

解: (1) 不等价. 数列 $\{(-1)^n\}$ 发散, 但 $\forall \varepsilon > 1$ 以及 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $|(-1)^n| < \varepsilon$.

(2) 等价. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$ 使 $\forall n > N_1$, $|a_n - A| < \varepsilon$. 令 $N = N_1 + 1$, 则 $\forall n \geqslant N > N_1$, 我们有 $|a_n - A| < \varepsilon$.

反过来, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n \geqslant N$, 就有 $|a_n - A| < \varepsilon$, 则 $\forall n > N$, 我们也有 $|a_n - A| < \varepsilon$.

(3) 等价. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 则我们由极限定义立刻知 $\forall \varepsilon \in (0,1)$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|a_n - A| < \varepsilon$.

反过来, $\forall \varepsilon > 0$, 若令 $\bar{\varepsilon} = \min(\varepsilon, \frac{1}{2}) \in (0,1)$, 则由题设立刻可知 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|a_n - A| < \bar{\varepsilon} < \varepsilon$.

(4) 等价. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 可令 $\bar{\varepsilon} = k\varepsilon$, 并由极限定义立刻可知 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|a_n - A| < \bar{\varepsilon} = k\varepsilon$.

反过来, $\forall \varepsilon > 0$, 若令 $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{k}\varepsilon$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, $|a_n - A| < k\bar{\varepsilon} = \varepsilon$.

(5) 等价. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 可令 $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{\frac{2}{3}}$, 并由极限定义立刻可知 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|a_n - A| < \bar{\varepsilon} = \varepsilon^{\frac{2}{3}}$.

反过来, $\forall \varepsilon > 0$, 若令 $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{\frac{3}{2}}$, 则 $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, $|a_n - A| < \bar{\varepsilon}^{\frac{2}{3}} = \varepsilon$.

(6) 等价. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 则 $\forall k \in \mathbb{N}^*$, 可令 $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, 并由极限定义立刻可知 $\exists N_k > 0$ 使得 $\forall n > N_k$, 均有 $|a_n - A| < \varepsilon = \frac{1}{2^k}$.

反过来, $\forall \varepsilon > 0$, 若令 $k = |[\frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}]| + 1$, 则由题设知 $\exists N_k > 0$ 使得 $\forall n > N_k$, 均有 $|a_n - A| < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$.

(7) 不等价. 数列 $\{\frac{2}{n}\}$ 收敛到 0, 但 $\forall n \geqslant 1$, 却有 $\frac{2}{n} > \frac{1}{n}$.

(8) 不等价. 数列 $\{\frac{2}{n}\}$ 收敛到 0, 但对于 $\varepsilon = 1$ 以及 $\forall n \geqslant 1$, 却有 $\frac{2}{n} > \frac{\varepsilon}{n}$.

(9) 不等价. 数列 $\{(-1)^n\}$ 发散, 但 $\forall \varepsilon > 0$, 若令 $N = [\frac{1}{\varepsilon^2}]+1$, 则 $\forall n > N$, 我们有 $|(-1)^n| = 1 < \sqrt{n}\varepsilon$.

10. 用 $\varepsilon - N$ 语言叙述: "$\{a_n\}$ 不收敛于 A", 并讨论下列哪些说法与"$\{a_n\}$ 不收敛于 A" 等价:

(1) $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon_0$;

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n \geqslant N$, 就有 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon$;

(3) $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使得 $\{a_n\}$ 中除有限项外, 都满足 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon_0$;

(4) $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使得 $\{a_n\}$ 中有无穷多项满足 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon_0$.

解: (1) 不等价. 数列 $\{(-1)^n\}$ 发散, 但是 $\forall N \in \mathbb{N}^*$, 却有 $|(-1)^{2N} - 1| = 0$, 也即数列 $\{(-1)^n\}$ 不满足 (1).

(2) 不等价. 事实上, (2) 比 (1) 条件更强, 故 $\{(-1)^n\}$ 发散但不满足 (2).

(3) 与 (1) 完全等价, 因此也不与"$\{a_n\}$ 不收敛于 A" 等价.

(4) 等价. 事实上, "有无穷多项满足 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon_0$" 等价于说"$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\exists n > N$ 使得 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon_0$".