第 14 次作业题

1. 将下列函数展成指定周期的 Fourier 级数并求其和函数:

(1) $T=2\pi$, $f(x)=\begin{cases} x+\pi, & 若\ x\in[-\pi,0) \\ \pi-x, & 若\ x\in[0,\pi] \end{cases}$;

(2) $T=2\pi$, $f(x)=|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$;

(3) $T=2$, f 为奇函数且 $f(x)=x(1-x)$, $x\in(0,1)$, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-3)^3}$;

(4) 将 $f(x)=\begin{cases} 1-x, & 若\ x\in[0,1] \\ 0, & 若\ x\in(1,2] \end{cases}$ 展成以 4 为周期的正弦级数.

2. 设 $f(x)=x-1$.

(1) 将 f 在 $(0,2\pi)$ 上展成以 2π 为周期的 Fourier 级数并求其和函数;

(2) 将 f 在 $(0,\pi)$ 上展成以 2π 为周期的正弦级数并求其和函数;

(3) 将 f 在 $(0,1)$ 上展成以 4 为周期的余弦级数并求其和函数: 如何展开, 展法是否唯一?

3. 证明下列等式:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ $(0<x<2\pi)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 进而求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n}=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ $(0<x<\pi)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$ $(0<x<\pi)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=\frac{x}{2}$ $(|x|<\pi)$.