微积分 A (1)

姚家燕

第 27 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

第 7 章 常微分方程

§1. 常微分方程的基本概念

- 含有自变量 x, 未知函数 y 及其直到 n 阶的导数的等式 $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ 被称为常微分方程. 方程中的导数的最高阶被称为方程的阶. 若 F 关于 $y, y', \ldots, y^{(n)}$ 为线性函数, 则称之为线性常微分方程. 例如方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0$ 的阶为 1, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = 0$ 的阶为 2.

- 含有多个未知函数及其导数的方程组称为常微分方程组. 出现在上述方程组中的未知函数的导数的最高阶称为方程组的阶.
- 在区间 I 上满足 $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ 的函数 $y = y(x)$ 称为该方程在 I 上的一个解, 称 I 为解的存在区间. 当不加注明时, I 是使方程的解有意义的最大区间. 如果该解含 n 个独立常数, 也即有 $y = f(x, C_1, \ldots, C_n)$, 则称为方程的通解. 若不含常数, 则称之为特解. 例如 $y = Ce^{-x}$ 是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0$ 的通解.

- 所谓两个常数独立, 粗略说, 就是不能将之合并成为一个常数. 比如说 $y = C_1 e^{-x+C_2}$ 是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0$ 的解, 但 C_1, C_2 不独立.
- 一般而言, 当通解中的任意常数取遍所有的允许取的实数时, 应该能得到常微分方程的所有的解. 但也有例外. 例如方程 $y' = \sqrt{y}$, $y = \frac{1}{4}(x+C)^2$ 为它的通解, 并且 $y \equiv 0$ 也为上述方程的一个特解, 但这个特解并没有被包含在上述通解中, 该解被称为 “奇解” .

- 求解常微分方程: 求方程的通解, 同时寻求那些不能用通解表示的 “奇解” (若存在).
- 定解条件 (初始条件): 用来确定通解当中的任意的常数的附加条件. n 阶的常微分方程一般需要有 n 个条件. 这类条件一般被称为定解条件, 有些也被称为初始条件.
- 初值问题 (Cauchy 问题):

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ \qquad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

§2. 一阶常微分方程的初等解法

一阶常微分方程的一般形式为 $F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$.

一阶线性常微分方程的典型形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x),$$

其中 y 为待求解函数, $P(x), Q(x)$ 为已知函数.

如果 $Q(x) \equiv 0$, 则称之为一阶线性齐次常微分方程, 否则称为一阶线性非齐次常微分方程.

定理 1. 一阶线性非齐次常微分方程的通解为方程的一个特解与相应齐次方程的通解之和.

证明: 考虑一阶常微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$. 设 y_0 为其特解, y 为通解. 令 $z = y - y_0$. 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x), \quad \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x} + P(x)y_0 = Q(x),$$

则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + P(x)z = 0$, 也即 z 为相应齐次方程的通解. 又 $y = y_0 + z$, 故所证结论成立.

一阶线性齐次常微分方程的解

定理 2. 设 f 为 P 的任意一个原函数, 则一阶线性齐次常微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 的通解为 $y=Ce^{-f(x)}$, 也常被写作 $y=Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$.

注: 约定用 $\int P(x)\,\mathrm{d}x$ 来表示 P 的一个原函数, 因此在其表达式中无需出现常数.

证明: 令 $C(x)=ye^{f(x)}$, 则 $y=C(x)e^{-f(x)}$, 故

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y \\
&= C'(x)e^{-f(x)}-C(x)e^{-f(x)}f'(x)+P(x)y \\
&= C'(x)e^{-f(x)}-yP(x)+P(x)y \\
&= C'(x)e^{-f(x)},
\end{aligned}$$

由此得 $C'(x)=0$, 于是 $C(x)\equiv C$ 为常值函数.

因此原常微分方程的通解为 $y=Ce^{-f(x)}$.

一阶线性非齐次常微分方程的解 (常数变易法)

定理 3. 一阶线性非齐次常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

的通解为

$$y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right),$$

其中 C 为任意的常数.

证明: 设 f 为 P 的一个原函数, $C(x) = ye^{f(x)}$,

则 $y = C(x)e^{-f(x)}$, 于是我们有

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y \\
&= C'(x)e^{-f(x)} - C(x)e^{-f(x)}f'(x) + P(x)y \\
&= C'(x)e^{-f(x)} - yP(x) + P(x)y \\
&= C'(x)e^{-f(x)},
\end{aligned}
$$

从而 $C'(x)=Q(x)e^{f(x)}$, 故

$$C(x)=C+\int Q(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x.$$

则原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-f(x)}C(x)=e^{-f(x)}\left(C+\int Q(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(C+\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right), \end{aligned}$$

其中 C 为任意的常数.

例 1. 求解常微分方程 $xy' - 2y = x^3$.

解: 当 $x \neq 0$ 时, 我们有 $y' - \frac{2}{x}y = x^2$. 因此所求常微分方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x}\left(C + \int x^2 e^{\int (-\frac{2}{x})\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{2\log|x|}\left(C + \int x^2 e^{-2\log|x|}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= x^2\left(C + \int x^2 \cdot \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right) = x^2(C + x). \end{aligned}$$

由连续性可知上式对任意 $x \in \mathbb{R}$ 均成立.

例 2. 求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\cot x = 2x\sin x, \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$

解: 所求方程的通解为

$$y = e^{\int \cot x\,\mathrm{d}x}\left(C + \int 2x\sin x \cdot e^{\int(-\cot x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= e^{\log|\sin x|}\left(C + \int 2x\sin x \cdot e^{-\log|\sin x|}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= |\sin x| \cdot \left(C + \int 2x\sin x \cdot \frac{1}{|\sin x|}\,\mathrm{d}x\right) = (C + x^2)\sin x,$$

其中 C 为任意常数. 又 $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, 则 $C = -\frac{\pi^2}{4}$,

故所求初值问题的解为 $y = (x^2 - \frac{\pi^2}{4})\sin x$.

例 3. 假设质点从原点出发沿横轴运动, 其速度为 $v(t) = v_0 + at$. 求时刻 t 时的位移 $S(t)$.

解: 因 $S'(t) = v(t) = v_0 + at$, 则方程的通解为

$$S(t) = C + \int (v_0 + at)\,\mathrm{d}t = C + v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

其中 C 为任意的常数. 又 $S(0) = 0$, 则 $C = 0$, 从而我们有 $S(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

作业题: 第 7.2 节第 220 页第 2 题第 (2), (4) 题.

可分离变量的一阶常微分方程

考虑方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$, 其中 f, g 为连续函数.
当 $g(y) \neq 0$ 时, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

故 $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$, 由此可得 y 的隐函数方程. 若 $g(y_0) = 0$, 则 $y \equiv y_0$ 也为方程的解.

例 4. 求解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky$, 其中 k 为常数.

解: 当 $y \neq 0$ 时, $\frac{\mathrm{d}y}{y} = k\,\mathrm{d}x$, 则 $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int k\,\mathrm{d}x + C_1$, 故 $\log|y| = kx + C_1$, 也即 $|y| = e^{kx+C_1} = e^{C_1}e^{kx}$. 从而由连续性可知 $y = Ce^{kx}$, 其中 $C \neq 0$.

$y \equiv 0$ 也是方程的解, 故所求通解为 $y = Ce^{kx}$, 其中 C 为任意的常数.

注: 以后遇到类似情形, 可由 $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int k\,\mathrm{d}x + C_1$ 直接过渡到 $y = Ce^{kx}$ 而无需取绝对值.

例 5. (Logistic 方程) 假设树生长的最大高度为 $H>0$, 在 t 时的高度为 $h(t)$, 则我们有

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=kh(t)(H-h(t)),$$

其中 $k>0$ 为常数. 当 $h(t)\neq 0$ 或 H 时,

$$\frac{\mathrm{d}h}{h(H-h)}=k\,\mathrm{d}t,$$

故 $\int\frac{\mathrm{d}h}{h(H-h)}=\int k\,\mathrm{d}t+C_1=kt+C_1$.

由此我们可立刻导出

$$kt + C_1 = \int \frac{\mathrm{d}h}{h(H-h)} = \frac{1}{H}\int (\frac{1}{h} + \frac{1}{H-h})\,\mathrm{d}h,$$

于是 $\frac{1}{H}\log\frac{h}{H-h} = kt + C_1$, 从而 $h(t) = \frac{H}{1+Ce^{-kHt}}$, 其中 $C = e^{-C_1 H} > 0$ 为常数. 另外, $h(t) \equiv 0$ 和 $h(t) \equiv H$ 也为原常微分方程的解.

作业题: 第 7.2 节第 220 页第 1 题 (1), (5), (7), (8) 小题, 第 2 题第 (3) 小题.

可转化成一阶线性方程的一阶方程

下面将介绍几种能通过初等变换转化成一阶线性常微分方程的一阶方程.

例 6. 求解一阶常微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c)$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 为常数.

解: 若 $b = 0$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + c)$, 于是

$$y = \int f(ax + c)\,\mathrm{d}x + C.$$

若 $b \neq 0$, 令 $u = ax + by + c$, 则我们有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a + bf(u),$$

故 $\int \frac{\mathrm{d}u}{a+bf(u)} = \int \mathrm{d}x + C = x + C$, 由此得到 u, 进而得 y. 若 $\exists u_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $a + bf(u_0) = 0$, 则

$$ax + by + c = u_0$$

也为方程的解, 即 $y = \frac{1}{b}(u_0 - ax - c)$.

齐次型一阶常微分方程

齐次型一阶常微分方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(\frac{y}{x})$.

解: 定义 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, 从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u$,

带入原常微分方程可立刻导出 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = F(u)$.

若 $F(u) = u$, 则 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0$, 从而 $u \equiv C$, 也即

$$y = Cx.$$

下面假设 $F(u) \neq u$. 则我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{F(u)-u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + C = \log|x| + C,$$

由此可得到 u 的隐函数方程, 进而可得出 y.

如果 $\exists u_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $F(u_0) = u_0$, 则 $u = u_0$ 也为上述方程的解, 也即 $y = u_0 x$ 为原方程的解.

例 7. 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x^2+y^2}{3xy}$.

解: 由题设可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{3(\frac{y}{x})}$. 令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = -\frac{1+u^2}{3u},$$

于是 $\frac{3u\,\mathrm{d}u}{1+4u^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$, 从而我们有

$$\frac{3}{8}\log(1+4u^2) + \log|x| = C_1,$$

也即 $x(1+4u^2)^{\frac{3}{8}} = C$, 故 $x\left(\frac{x^2+4y^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{8}} = C$.

例 8. 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{x}{y}+e^{-\frac{x}{y}}}$.

解: 令 $u = \frac{x}{y}$, 则 $x = uy$, 从而可知

$$1 = y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{u}{u+e^{-u}},$$

即 $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{u+e^{-u}}{ue^{-u}}\,\mathrm{d}u = \left(e^u + \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \mathrm{d}\left(e^u + \log|u|\right)$,

则 $e^u + \log|u| = \log|x| + C$, 故 $e^{\frac{x}{y}} = \log|y| + C$.

作业题: 第 7.2 节第 221 页第 3 题 (1), (5), (7).

可化为齐次型的一阶常微分方程

典型例子: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$.

解: 分情况讨论. 如果 $a_1b_2 \neq a_2b_1$, 则下述直线

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

有唯一的交点, 设为 (x_0, y_0). 定义 $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, 则原方程变为齐次型方程

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right).$$

现在假设 $a_1b_2 = a_2b_1$. 若 $(a_2, b_2) = (0, 0)$, 那么 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1}{c_2}x + \frac{b_1}{c_2}y + \frac{c_1}{c_2}\right)$ 为已求解过的方程.

若 $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$, 则由 (a_1, b_1) 与 (a_2, b_2) 线性相关可知 $\exists k \in \mathbb{R}$ 使得 $(a_1, b_1) = k(a_2, b_2)$, 故

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(k + \frac{c_1 - kc_2}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \\
&= F(a_2x + b_2y + c_2)
\end{aligned}
$$

也为已求解过的方程.

例 9. 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$.

解: 两直线 $x - y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 的交点为 $(1, 2)$. 我们由此作变换

$$X = x - 1, \quad Y = y - 2.$$

原方程变为 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{X-Y}{X+Y} = \frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$. 定义 $u = \frac{Y}{X}$, 则

$$u + X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{1-u}{1+u}.$$

也即 $\frac{(1+u)\,\mathrm{d}u}{1-2u-u^2} = \frac{\mathrm{d}X}{X}$, 由此可得

$$-\frac{1}{2}\log|1-2u-u^2| = \log|X| + C_1,$$

从而 $1-2u-u^2 = \frac{C_2}{X^2}$. 又由于

$$X = x-1, \quad u = \frac{y-2}{x-1},$$

带入上述方程并整理后可得

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C.$$

Bernoulli 方程

Bernoulli 方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$, 其中 α 为常数且不等于 0 或 1.

解: 当 $y\neq 0$ 时, 则有 $y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y^{1-\alpha}=q(x)$.
令 $z=y^{1-\alpha}$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 从而可得

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+p(x)z=q(x),$$

也即我们有 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x)$.

若 $\alpha>0$, 则 $y\equiv 0$ 也为方程的解.

例 10. 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = -2xy^{-1}$.

解: 由题设可得 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y^2 = -2x$. 令 $z = y^2$, 则 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - z = -2x$, 也即 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - 2z = -4x$. 从而

$$\begin{aligned} z &= e^{\int 2\,\mathrm{d}x}\left(C + \int (-4x)e^{\int(-2)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{2x}\left(C + \int (-4x)e^{-2x}\,\mathrm{d}x\right) = Ce^{2x} + 2x + 1. \end{aligned}$$

于是原方程的通解为 $y^2 = Ce^{2x} + 2x + 1$.

作业题:第 7.2 节第 221 页第 3 题第 (11), (14) 题.

例 11. 假设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $y=y(x)$ 满足

$$\begin{cases} y'=x^2+y^2 \\ y(0)=0 \end{cases}.$$

讨论其单调性, 凸凹性以及在无穷远处的性态.

解: $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, 我们有 $y'>0$, 于是 $y=y(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增. 因为 $y(0)=0$, 所以 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上取负号, 而在 $(0,+\infty)$ 上取正号. 又因 $\forall x\in\mathbb{R}$, $y''=2x+2yy'=2x+2y(x^2+y^2)$, 于是 y'' 在 $(-\infty,0)$ 上为负, 在 $(0,+\infty)$ 上为正,

则 y 在 $(-\infty, 0]$ 上为严格凹, 而在 $[0, +\infty)$ 上为严格凸, 故点 $(0,0)$ 为其唯一的拐点.

当 $x \geqslant 0$ 时, 我们有 $y'(x) \geqslant x^2$, 从而

$$y(x) = \int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{3}x^3.$$

当 $x \leqslant 0$, 我们有 $y'(x) \geqslant x^2$, 由此可得

$$y(x) = \int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 y'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{3}x^3.$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$, 并且题设函数没有水平渐进线和斜渐进线.

最简单的情形: $y^{(n)} = f(x)$

此时只需求 n 次原函数, 就可求解出 y.

例 1. 求解方程 $y''' = e^x + x$.

解: 由题设可得 $y'' = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C_1$, 从而我们有 $y' = e^x + \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2$, 进而可得

$$y = e^x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

不显含未知量 y 的方程

现考虑常微分方程 $y^{(n)} = F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n-1)})$, 其中 $k \geqslant 1$. 令 $p(x) = y^{(k)}$, 则我们有

$$p^{(n-k)} = F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k-1)}),$$

由此可以求解出 $p = p(x)$, 进而再对 $y^{(k)} = p(x)$ 求 k 次原函数就可求解出 y.

例 2. 求解方程 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 0$.

解: 令 $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 则原方程变为 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - p^2 = 0$.

若 $p \equiv 0$, 此时 $y \equiv C$, 其中 C 为任意常数.

若 $p \neq 0$, 那么 $\frac{\mathrm{d}p}{p^2} = \mathrm{d}x$, 由此可得 $-\frac{1}{p} = x + C_1$,

也即 $p = -\frac{1}{x+C_1}$. 于是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x+C_1}$, 从而

$$y = -\log|x + C_1| + C_2,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

不显含自变量 x 的方程: $F\left(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$

将 y 看成自变量, 并令 $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则我们有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

原方程变为 $F(y, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}) = 0$, 由此可求 $p = p(y)$, 进而对 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)$ 应用分离变量法就可以得到原来那个常微分方程的解.

例 3. 求解方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=0$.

解: 将 y 看成自变量, 令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 原方程变为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0$, 于是 $p\equiv 0$ 或 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p$. 如果 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p$, 则 $p=C_1e^y$. 该解也包含 $p\equiv 0$ 的情形. 由于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1e^y$, 则 $e^{-y}\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x$, 从而

$$-e^{-y}=C_1x+C_2,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

作业题: 第 7.3 节第 223 页第 (1), (4), (6) 小题.

谢谢大家!