第 8 次作业题

1. 计算下列曲线积分:

(1) $\displaystyle\int_L (x+y)\,\mathrm{d}\ell$, 其中 L 是以 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形的边;

(2) $\displaystyle\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\ell$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=2x$.

2. 求曲线 $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$ 从原点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(3,3,2)$ 的弧长.

3. 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于曲面 $z=a+\frac{x^2}{a}$ 与 $z=0$ 之间的面积 $(a>0)$.

4. 计算下列第一类曲面积分:

(1) $\displaystyle\iint_S (x+y+z)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$;

(2) $\displaystyle\iint_S \left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)\mathrm{d}\sigma$, 其中 S 是平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分.

5. 计算 $\displaystyle\int_{L^+} \frac{x^2\,\mathrm{d}y-y^2\,\mathrm{d}x}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$, 其中 L^+ 为星形线在第一象限的部分

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases} \quad \left(0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

其正向为从 $(0,a)$ 到 $(a,0)$.

6. 计算下列第二类曲线积分:

(1) $\displaystyle\oint_{L^+} \frac{(x+y)\,\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$, 逆时针为正向;

(2) $\displaystyle\oint_{L^+} \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$, 其中 L^+ 是以 $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ 为顶点的正方形, 其正方向为逆时针方向.

7. 平面力场 $\vec{F}$, 大小等于点 (x,y) 到坐标原点的距离, 方向指向坐标原点.

(1) 求单位质量的质点在 $\vec{F}$ 的作用下沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限的部分从点 $(a,0)$ 移动到点 $(0,b)$ 所做的功;

(2) 求单位质量的质点在 $\vec{F}$ 的作用下沿上述椭圆逆时针绕一圈时所做的功.