微积分 A (1)

姚家燕

第 16 讲

在听课过程中，

严禁使用任何电子产品!

期中考试内容、时间及地点

内容: 第 1、2、3、4 章

时间: 11 月 14 日星期六晚 19:20–21:20

地点: 见网络学堂

重要提示: 考试时需且只需带学生证和文具!

学生证上的照片必须清晰可辨, 否则逐出考场.

千万不要迟到或无故缺考!

考前答疑: 11 月 13 日星期五晚 18:00-20:00

考前答疑地点: 理科楼数学科学系 A 216

第 15 讲回顾: Taylor 公式

- (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

  设 $n \geqslant 1$ 为整数, $x_0 \in \mathbb{R}$, $B(x_0)$ 为点 x_0 的邻域, 函数 $f : B(x_0) \to \mathbb{R}$ 为 $n-1$ 阶可导且在点 x_0 为 n 阶可导. 则当 $x \to x_0$ 时,

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big).$$

  注: 定理条件等价于 f 在点 x_0 处 n 阶可导.

- 主要应用: 计算函数极限.

带 Peano 余项的基本 Taylor 公式

当 $x \to 0$ 时，我们有

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
- $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$, $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$.
- $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$.
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$,

  $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

- (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式) 设 $n \geqslant 1$ 为整数, $f \in \mathscr{C}^{(n)}[a,b]$ 在 (a,b) 上 $n+1$ 阶可导. 则 $\forall x_0, x \in [a,b]$, 存在 ξ 严格介于 x_0, x 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

通常也将 ξ 写成 $x_0 + \theta(x-x_0)$, $\theta \in (0,1)$.

- 主要应用: 证明等式或不等式.
- 若 $f \in \mathscr{C}^{(n)}[a,b]$ 在 (a,b) 上的 $n+1$ 阶导数恒为零, 则 f 为次数不超过 n 的多项式.

带 Lagrange 余项的基本 Taylor 公式 $(0 < \theta < 1)$

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$
- $\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos \theta x}{(2n+3)!} x^{2n+3}.$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$
- $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$
- $$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}.$$

回顾: 函数的单调性

- 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 则

  (1) f 递增当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \geqslant 0$;

  (2) f 递减当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \leqslant 0$.

- 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 则 f 为严格递增当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \geqslant 0$ 并且 f' 在 (a,b) 的任意子区间上不恒为零.

- 常利用单调性证明不等式.

如何研究 (初等) 函数的单调性?

- 函数 f 的导数为零的点称为 f 的驻点.
- 驻点和导数不存在的点称为临界点.

确定 (初等) 函数单调性的具体步骤

- 计算导数, 找出临界点.
- 以临界点为端点来分割函数的定义域.
- 判断导函数在每个子区间的符号, 由此确定函数在每个子区间的单调性.

第 16 讲

例 4. 求证: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 均有 $e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$.

证明: $\forall y \in \mathbb{R}$, 令 $f(y) = (1+y)e^{-y} - 1$. 则 f 为初等函数, 因此可导. 又 $\forall y > 0$, 均有

$$f'(y) = e^{-y} - (1+y)e^{-y} = -ye^{-y} < 0,$$

因而 f 在 $[0, +\infty)$ 上为严格递减, 从而 $\forall y > 0$, 我们有 $f(y) < f(0) = 0$, 也即 $e^{-y} < \frac{1}{1+y}$. 于是 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 均有 $e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$.

例 5. 求证: 当 $x > -1$ 时, $\frac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$, 且等号成立当且仅当 $x = 0$.

证明: $\forall x > -1$, 令 $f(x) = x - \log(1+x)$. 则 f 可导, 且我们有 $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, 于是 f' 在 $(0, +\infty)$ 上取正号, 同时在 $(-1, 0)$ 上取负号, 于是 f 在 $[0, +\infty)$ 上严格递增, 而在 $(-1, 0]$ 上严格递减, 从而 $\forall x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$, 我们均有 $f(x) > f(0) = 0$. 也即当 $x > -1$ 时, 我们总有 $\log(1+x) \leqslant x$, 且等号成立当且仅当 $x = 0$.

$\forall x > -1$, 令 $g(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$. 则 g 可导且 $\forall x > -1$, 均有 $g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$. 故 g' 在 $(0, +\infty)$ 上取正号, 同时在 $(-1, 0)$ 上取负号. 因此 g 在 $[0, +\infty)$ 上严格递增, 而在 $(-1, 0]$ 上严格递减. 从而 $\forall x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$, 我们有 $g(x) > g(0) = 0$. 也即当 $x > -1$ 时, 我们均有 $\log(1+x) \geqslant \frac{x}{1+x}$ 且等号成立当且仅当 $x = 0$.

作业题: 第 4.4 节第 114 页第 4 题第 (3), (7) 题, 第 5 题第 (5) 题.

函数的极值

定理 1. 假设 $x_0 \in (a,b)$, 并且函数 $f \in \mathscr{C}(a,b)$ 在 $(a,b) \setminus \{x_0\}$ 上可导.

(1) 若 f' 在 (a,x_0) 上非负而在 (x_0,b) 上非正, 则 x_0 为 f 的最大值点, 也为极大值点.

(2) 若 f' 在 (a,x_0) 上非正而在 (x_0,b) 上非负, 则 x_0 为 f 的最小值点, 也为极小值点.

证明: (1) 由于 f 在 $(a,x_0]$ 上递增, 在 $[x_0,b)$ 上递减, 故所证成立. 由 (1) 立刻可得 (2).

注: 两侧单调性不同的点必为极值点.

定理 2. 假设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 可导, 而 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f'(x_0)=0$, 且 $f''(x_0)$ 存在.

(1) 若 $f''(x_0)<0$, 则 x_0 为 f 的极大值点.
(2) 若 $f''(x_0)>0$, 则 x_0 为 f 的极小值点.
(3) 若 $f''(x_0)=0$, 无法判断.

证明: (1) 由带 Peano 余项的 Taylor 的公式以及题设条件, 我们立刻可得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}=1>0,$$

于是由函数极限的保序性可得知, $\exists\delta > 0$ 使得 $\forall x \in (a, b)$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 我们均有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2} > 0,$$

故 $f(x) < f(x_0)$, 因此 x_0 为 f 的极大值点.

(2) 对 $-f$ 应用 (1) 中结论可知所证结论成立.

(3) 选取 $f(x) = x^3$, 则 $f''(0) = 0$, 但 0 不是 f 的极值点. 再取 $g(x) = x^4$, 则 0 为 g 的极小值点且 $g''(0) = 0$. 上述例子表明所证结论成立.

作业题: 假设函数 f 在点 x_0 处 n 阶可导使得 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 但 $f^{(k)}(x_0) = 0\ (1 \leqslant k \leqslant n-1)$.

(1) 若 n 为偶数, 则点 x_0 为 f 的极小值点,

(2) 若 n 为奇数, 则点 x_0 不是 f 的极值点.

提示: 考虑带 Peano 余项的 Taylor 展式.

例 6. 求函数 $f(x)=|x|^{\frac{2}{3}}(x-1)$ 的极值点.

解: 由于 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x-1)$, 则 f 为连续函数, 它在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上可导且 $f'(x)=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$. 于是 f 的临界点为 $0, \frac{2}{5}$, 且 f' 在 $(-\infty,0)$ 和 $(\frac{2}{5},+\infty)$ 上取正号, 而在 $(0,\frac{2}{5})$ 上取负号, 故 f 在点 $x=0$ 取极大值 0, 而在点 $x=\frac{2}{5}$ 取极小值 $-\frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{\frac{2}{3}}$.

最大值与最小值

回顾: 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 上可导, 则 f 的最值点或者为端点, 或者为 f 的驻点.

确定最值的具体方法

- 求函数 f 在临界点处的值以及端点处的值, 比较大小以便确定最值.
- 若已知最值存在且在内部取到, 并且函数又只有一个临界点 (驻点), 则该点为所求解.

例 7. 求函数 $V(x) = x(50-2x)^2$ 在 $[0,25]$ 上的最大值.

解: 由于 V 为初等函数, 故连续, 则在 $[0,25]$ 上有最大值. 又 $V(1) > 0$, 并且 $V(0) = V(25) = 0$, 于是 V 的最大值在 $(0,25)$ 内取到. 但

$$\begin{aligned} V'(x) &= (50-2x)^2 + x \times 2(50-2x) \times (-2) \\ &= (50-2x)(50-6x). \end{aligned}$$

则 $\frac{25}{3}$ 为 V 在 $(0,25)$ 内的唯一驻点, 因此它是 V 的最大值点, 故最大值为 $V(\frac{25}{3}) = \frac{250000}{27}$.

例 8. 求函数 $f(x) = xe^{-2x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最值.

解: 由于 f 为初等函数, 因此为无穷可导, 并且 $f'(x) = (1-4x^2)e^{-2x^2}$. 于是知 f 的驻点为 $\pm\frac{1}{2}$, 并且 f' 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上取负号, 而在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上取正号, 从而知 f 在 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上递减, 而在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上递增, 因此:

(1) 函数 f 在 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 上没有最大值, 且它的上确界为 0, 最小值为 $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$;

(2) 函数 f 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上没有最小值, 并且它的下确界为 0, 最大值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$;

(3) f 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上的最小值为 $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, 最大值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

因此 f 在 $\mathbb{R}$ 上的最大值点为 $\frac{1}{2}$, 相应最大值为 $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$; 最小值点为 $-\frac{1}{2}$, 相应最小值为 $-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

作业题: 第 4.4 节第 115 页第 6 题第 (2) 小题.

§5. 凸函数

定义 1. 设 I 为区间, 而 $f: I \to \mathbb{R}$ 为函数.

- 若 $\forall x, y \in I$ 以及 $\forall \lambda \in (0, 1)$, 均有

  $$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

  则称 f 为 I 上的下凸函数, 简称凸函数.

- 若 $\forall x, y \in I$ $(x \neq y)$ 以及 $\forall \lambda \in (0, 1)$, 均有

  $$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

  则称 f 为 I 上严格下凸函数, 也称严格凸.

- 若 $\forall x, y \in I$ 以及 $\forall \lambda \in (0,1)$, 均有

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

则称 f 为 I 上的上凸函数, 也称凹函数.

- 若 $\forall x, y \in I$ $(x \neq y)$ 以及 $\forall \lambda \in (0,1)$, 均有

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

则称 f 为 I 上严格上凸函数, 也称严格凹.

注: f 凹当且仅当 $-f$ 凸. 故下面仅讨论凸性.

定理 1. 函数 f 为区间 I 上的凸函数当且仅当对任意整数 $n \geqslant 1$, 对任意的 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, 对任意 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, 若 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, 则

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

证明: 充分性. 取 $n = 2$ 即得到凸函数的定义.

必要性. 下面对 $n \geqslant 1$ 应用数学归纳法来证明: 对任意 $x_1, \ldots, x_n \in I$ 以及对任意 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, 若 $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, 则 $f\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

当 $n=1$ 时, 所证为恒等式.

当 $n=2$ 时, 所证源于凸函数定义.

现假设所证结论对 $n \geqslant 2$ 成立. 那么对任意的

$x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ 以及对任意的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \geqslant 0$,

当 $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$ 时, 若 $\lambda_{n+1}=1$, 则 $\lambda_k=0\,(1 \leqslant k \leqslant n)$,

此时所证为恒等式.

下面假设 $\lambda_{n+1} < 1$. 则我们有

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\Big) = f\Big(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\Big)$$

$$\leqslant \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1}) f\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\Big)$$

$$\leqslant \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} f(x_k)$$

$$= \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

综上所述可知所证结论对所有 $n \geqslant 1$ 均成立.

定理 2. 函数 f 为区间 I 上的凸函数当且仅当 $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$, 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时, 均有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

证明: **充分性.** $\forall x, y \in I\ (x < y)$ 以及 $\lambda \in (0,1)$, 令 $x_1 = x$, $x_2 = \lambda x + (1-\lambda)y$, $x_3 = y$. 由题设可知 $\frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)}{\lambda x+(1-\lambda)y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, 也即我们有

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leqslant (1-\lambda)(f(y) - f(x)) + f(x) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned}$$

必要性. $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$, 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时, 令 $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$, 则 $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$. 于是

$$\begin{aligned} f(x_2) &\leqslant \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot f(x_1) + \left(1 - \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) \cdot f(x_3) \\ &= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot (f(x_3) - f(x_2)) \\ &\quad + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot f(x_2), \end{aligned}$$

故 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$, 进而可得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

定理 3. 如果函数 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 上可导, 则 f 为凸函数当且仅当 f' 在 (a,b) 上递增.

证明: 充分性. $\forall x, y \in [a,b]$, 不失一般性, 可设 $x<y$. $\forall \lambda \in (0,1)$, 定义 $z=\lambda x+(1-\lambda)y$. 于是由 Lagrange 中值定理可得知, $\exists \xi_1 \in (x,z)$ 使得 $f'(\xi_1)=\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$. 同样也可知 $\exists \xi_2 \in (z,y)$ 使得 $f'(\xi_2)=\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$. 又由题设可知 $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$,

故$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$, 即$f(z) \leqslant \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y)$, 由此立刻可知 f 为凸函数.

必要性. 对于 $a < x < z < y < b$, 由定理 2 得

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

于是由函数极限的保序性可知

$$f'(x) = f'_+(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'_-(y) = f'(y),$$

因此 f' 为单调递增函数.

定理 4. 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 上二阶可导, 则 f 为凸函数当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, 均有

$$f''(x) \geqslant 0.$$

证明: 由前面定理可知 f 为凸函数当且仅当 f' 在 (a,b) 上递增, 而在题设条件下, 这等价于说 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f''(x) \geqslant 0$.

定理 5. 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 上二阶可导, 则 f 为严格凸函数当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, 均有

$$f''(x) \geqslant 0,$$

且 f'' 在 (a,b) 的任意子区间上不恒为零.

证明: 由定义可知, 函数 f 为严格凸函数当且仅当函数 f 为凸函数, 并且其图像不含直线段, 也即 f' 为严格递增, 由此可知所证结论成立.

如何研究 (初等) 函数的凸凹性?

定义 2. 函数图像凸凹性发生改变的点为拐点.

命题 1. 若函数 f 可导且点 $(x_0, f(x_0))$ 为 f 的图像的拐点, 则 x_0 为 f' 的极值点.

证明: 由题设可知 f 在点 x_0 的两侧有不同的凸凹性, 则 f' 在点 x_0 的两侧有不同的单调性, 从而该点为 f' 的极值点.

推论. 若 f 在点 x_0 处二阶可导且点 $(x_0, f(x_0))$ 为 f 的函数图像的拐点, 则 $f''(x_0) = 0$.

注: 该结论的逆命题不成立. 考虑 $f(x) = x^4$.

确定 (初等) 函数凸凹性的具体步骤

- 计算二阶导数, 找出二阶导数为零的点.
- 以这些点为端点来分割函数的定义域.
- 判断二阶导数在每个子区间上的符号, 由此确定函数的凸凹性, 并判别拐点.

例 1. 确定 $f(x)=3x^4-16x^3+24x^2-x+2$ 的凸凹区间.

解: 由于 f 为初等函数, 故二阶可导且

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3-48x^2+48x-1, \\ f''(x) &= 36x^2-96x+48=12(3x-2)(x-2), \end{aligned}$$

从而 f'' 的零点为 $\frac{2}{3},2$. 又函数 f'' 在 $(-\infty,\frac{2}{3})$, $(2,+\infty)$ 上取正号, 则 f 在这些区间上严格凸; 而 f'' 在 $(\frac{2}{3},2)$ 上取负号, 因此 f 在该区间上为严格凹; 从而 f 的拐点为 $(\frac{2}{3},\frac{212}{27}),(2,16)$.

例 2. 确定旋轮线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$的凸凹性, 其中 $a > 0$.

解: 函数 $x(t), y(t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上均为连续, 另外, 当 $t \in (0, 2\pi)$ 时, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'}{x'} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1 - \cos t}\right) \cdot \frac{1}{x'} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2} < 0,$$

因此旋轮线在 $t \in [0, 2\pi]$ 时为严格凹.

作业题: 第 4.5 节第 119 页第 1 题第 (4) 小题, 第 120 页第 4 题 (将 y 表示成 x 的函数).

例 3. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, 求证:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

证明: $\forall x > 0$, 定义 $f(x) = \log x$, 那么 f 为初等函数, 因此无穷可导且 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, 于是 f 为凹函数, 从而 $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, 均有

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k\Big) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_k),$$

由此立刻可得 $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$.

作业题: 第 4.5 节第 120 页第 5 题第 (2) 小题.

§6. 函数作图

定义 1. 设曲线 Γ 由方程 $y = f(x)$ 给出.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, 则称 $y = L$ 为曲线 Γ 的水平渐近线, 其中 $L \in \mathbb{R}$.

(2) 若 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$, 则称 $x = x_0$ 为曲线 Γ 的竖直渐近线.

(3) 若 $\exists k, b \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - kx - b\big) = 0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x) - kx - b\big) = 0$, 称 $y = kx + b$ 为曲线 Γ 的斜渐近线, 其中假设 $k \neq 0$.

评注

由斜渐近线的定义，曲线 $y = f(x)$ 有斜渐近线 $y = kx + b$ (其中 $k \neq 0$) 当且仅当我们有

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0,\ b = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - kx\big),$$

或者我们有

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0,\ b = \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - kx\big).$$

例 1. 求函数 $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的渐近线.

解: 由题设可知 f 为初等函数, 其自然定义域为 $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. 因为 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \infty$, 由此知曲线 $y = f(x)$ 没有水平渐近线. 又 $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \infty$, 则上述曲线有竖直渐近线 $x = -1$. 最后

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \ \lim_{x \to \infty} \big(f(x) - x\big) = -5,$$

故该曲线的斜渐近线为 $y = x - 5$.

函数作图的步骤

- 确定函数的定义域.
- 确定函数的奇偶性, 对称性, 周期性等.
- 求曲线的渐近线 (水平, 竖直, 斜渐近线).
- 求导数, 确定临界点, 单调区间, 极值点.
- 计算二阶导数, 确定凸凹区间和拐点.
- 指出特殊点 (端点与坐标轴的交点等).

例 2. 研究 $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x}$ 的性态, 并作示意图.

解: 由题设可知 f 为初等函数, 其自然定义域为 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 且 $f(-1)=0$. 由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, 故曲线 $y=f(x)$ 无水平渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, 则上述曲线有竖直渐近线 $x=0$. 最后

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2,$$

因此该曲线有斜渐近线 $y=x+2$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 我们有

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2}{x}\Big(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}\Big) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2},$$

故函数 f 的驻点为 -1 和 1, 临界点为 $-1, 0, 1$. 又函数 f' 在 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ 上取正号, 而在 $(-1, 0)$, $(0, 1)$ 上取负号, 由此可得知函数 f 在 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ 上严格递增, 在 $(-1, 0)$, $(0, 1)$ 上严格递减, 于是 f 的极值点为 -1 和 1, f 在点 -1 取极大值 0, 在点 1 取极小值 4.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 我们有 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, 从而

$$f''(x) = \frac{2}{x^3},$$

于是 f'' 在 $(0, +\infty)$ 上取正号, 而在 $(-\infty, 0)$ 上取负号, 由此可得知 f 在 $(0, +\infty)$ 上为严格凸, 在 $(-\infty, 0)$ 上为严格凹, 故函数 f 没有拐点.

例 3. 研究 $f(x)=3x^5-5x^3-2$ 在 $[-2,2]$ 上的性态, 并作出示意图.

解: $\forall x\in[-2,2]$, 均有 $f(-x)+2=-(f(x)+2)$, 故函数曲线关于点 $(0,-2)$ 成中心对称. 又 f 为初等函数在 $[-2,2]$ 上的限制, 故 f 无穷可导且

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 15x^2(x+1)(x-1), \\
f''(x) &= 30x(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1).
\end{aligned}
$$

于是 f 的驻点为 $0, -1, 1$, 端点为 $-2, 2$, 相应地

$$f(0) = -2,\ f(-1) = 0,\ f(1) = -4,$$
$$f(-2) = -58,\ f(2) = 54.$$

由于 f 为连续, 因此在 $[-2, 2]$ 上有最值, 它在点 -2 处取最小值 -58, 在点 2 处取最大值 54. 又 f' 在 $(-2, -1)$, $(1, 2)$ 上为正, 而在 $(-1, 1)$ 上为负, 故 f 在前两区间上严格递增, 而在后一区间上严格递减, 则 f 在点 1 处取极小值 -4,

而在点 -1 取极大值 0. 另外, 可注意到 f'' 在 $(-2,-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 上负, 在 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},2)$ 上正, 因此 f 在前两个区间上为严格凹, 而在后两个区间上为严格凸, 故函数 f 拐点为

$$\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{7\sqrt{2}}{8}-2\Big),\ (0,-2),\ \Big(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{7\sqrt{2}}{8}-2\Big).$$

最后我们还有 $f(-1)=0$.

作业题: 第 4.6 节第 123 页第 2 题第 (6) 小题.

例 4. 设 $f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^2}$, 求它的单调区间与极值、凸凹区间与拐点以及渐近线.

解: 由题设可知 f 为 $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ 上的初等函数, 故无穷可导. 另外, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3x^2}{(1+x)^2}-\frac{2x^3}{(1+x)^3}=\frac{x^2(x+3)}{(1+x)^3},\\
f''(x) &= \frac{x^2(x+3)}{(1+x)^3}\Big(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+3}-\frac{3}{1+x}\Big)=\frac{6x}{(1+x)^4}.
\end{aligned}
$$

于是 f' 在 $(-\infty,-3)$ 和 $(-1,+\infty)$ 上取正号,

而在 $(-3,-1)$ 上取负号, 从而 f 在 $(-\infty,-3]$ 和 $(-1,+\infty)$ 上为严格递增, 而在 $[-3,-1)$ 上为严格递减, 因此 f 的极值点为 -3, 它在该点取极大值 $f(-3)=-\frac{27}{4}$.

函数 f'' 在 $(0,+\infty)$ 上正, 在 $(-\infty,0)\backslash\{-1\}$ 上取负号, 则 f 在 $(0,+\infty)$ 上严格凸, 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,0)$ 上严格凹, 故 f 的拐点为 $(0,0)$.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, 因此曲线 $y=f(x)$ 没有水平渐近线. 由于 f 在 $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ 上连续, 并且 $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$, 则上述曲线 $y=f(x)$ 的竖直渐进线为 $x=-1$.

最后因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, 且

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x(1+2x)}{(1+x)^2}=-2,$$

于是上述曲线有斜渐近线 $y=x-2$.

第 4 章总复习

- 基本定理: Fermat 定理, Darboux 定理, Rolle 定理, Lagrange 中值定理, Cauchy 中值定理.
- 重要应用: 常值函数的刻画, 不等式, 单调性, 反函数定理, 含导数的函数方程解的存在性 (零点或不动点), L'Hospital 法则.
- Taylor 公式: 定理内容, 基本 Taylor 展式.

- 极值与最值: 定义, 极值与最值之间的关系, 驻点, 临界点, 极值存在的必要条件 (Fermat), 极值存在的充分条件 (两侧的单调性不相同, 驻点处的二阶导数不为零), 最值的确定.
- 凸凹性: 定义, 借助于多个变量的等价表述, 借助三条割线斜率的刻画, 借助一阶导数的刻画, 借助二阶导数的刻画.

- 作图: 定义域; 奇偶性, 对称性, 周期性等等; 水平渐近线, 竖直渐近线, 斜渐近线; 一阶导数, 驻点, 临界点, 单调性区间, 极值点; 二阶导数, 凸凹区间, 拐点; 特殊点.

期中综合练习

例 1. 计算 $\lim\limits_{x\to0^+}(1-\cos x)^{\frac{1}{\log x}}$.

解: $$\lim_{x\to0^+}\log(1-\cos x)^{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1-\cos x)}{\log x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2,$$

于是我们有 $\lim\limits_{x\to0^+}(1-\cos x)^{\frac{1}{\log x}}=e^2$.

例 2. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-e^{-x}}{x}, & 若\ x\neq 0\\ a, & 若\ x=0\end{cases}$, 其中 g 为二阶连续可微, $g(0)=1$, $g'(0)=-1$.

(1) 问 a 为何值时 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续;

(2) 问 f 连续时, 它是否可微, 若可微, 求 f'.

解: (1) 由题设知 f 在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上二阶连续可微, 故 f 连续当且仅当 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, 也即

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}(g'(x)+e^{-x})$$
$$=g'(0)+1=0.$$

(2) 设 f 连续, 则 $a=0$. 由题设知 f 在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上二阶连续可微, 且 $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 均有

$$f'(x)=\frac{x(g'(x)+e^{-x})-(g(x)-e^{-x})}{x^2}.$$

又由导数的定义可知

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(g''(0)-1). \end{aligned}$$

例 3. 设 f 在 $[0,1]$ 上可导使 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 且 $f(x)$ 不恒等于 x. 求证: $\exists \xi \in (0,1)$ 使 $f'(\xi)>1$.

证明: 方法 1. 因为 $f(0)=0$, $f(1)=1$ 且 $f(x)$ 不恒等于 x, 因此 $\exists x_0 \in (0,1)$ 使得 $f(x_0) \neq x_0$. 如果 $f(x_0)>x_0$, 则由 Lagrange 中值定理可知, $\exists \xi \in (0,x_0)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0}>1$. 如果 $f(x_0)<x_0$, 同理可知 $\exists \xi \in (x_0,1)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{1-f(x_0)}{1-x_0}>1.$$

故所证结论成立.

方法 2: 用反证法. 假设所证结论不成立, 那么 $\forall x \in (0,1)$, 我们有 $f'(x) \leqslant 1$. $\forall x \in [0,1]$, 定义 $F(x) = f(x) - x$. 则 F 可导, 并且 $\forall x \in (0,1)$, 均有 $F'(x) = f'(x) - 1 \leqslant 0$. 于是 F 在 $[0,1]$ 上单调递减, 从而 $\forall x \in [0,1]$, 我们均有

$$0 = F(0) \geqslant F(x) \geqslant F(1) = 0,$$

即 $f(x) = x$ 恒成立. 矛盾! 故所证结论成立.

谢谢大家!