1 线性映射

1. （若当标准型证明II）我们继续讨论若当标准型的证明，上周的作业先用$T-\lambda I$作为新的T，这样就等价于考虑特征值为0的情形。我们还定义了$K=K_m$和$U=U_m$，其中K_m是T^m的核，U_m是T^m的像，并且$K_m=K_{m+1}$，$U_m=U_{m+1}$。$V=K\oplus U$而且K和U都是T的不变子空间。因为K的维度大于等于1，所以U的维度小于V的维度，根据归纳假设，T在U上可以分解为若当标准型。但是因为K的维度只是小于等于V的维度，所以我们还需要证明T在K上可以分解为若当标准型。为此，我们上次证明了T在K上是幂零的，也就是说，存在一个正整数l，使得T^l是$K\to K$的零映射。

   (a) 证明：K中的任何一个向量，都是T的特征值为0的广义特征向量（提示：对K中的向量v，考虑$T^l v$）。

   (b) 设$N=\mathrm{Ker}(T)$和$W=\mathrm{Im}(T)$是K的子空间。证明$N\neq\{0\}$而且W是T的不变子空间（提示：T是幂零的）。（也就是说$\mathrm{dim}W<\mathrm{dim}K$，所以$W$是$K$的真子空间，根据归纳假设$T$可以在$W$上写成若当块的形式。）

   (c) 假设$\{w_1,\cdots,w_r\}$是W中的向量，而且w_i是T的幂指数为e_i的广义特征向量，设$W_i=\mathrm{span}(\{w_i,Tw_i,\cdots,T^{e_i-1}w_i\})$。因为$T$在$W$上能写成若当块的形式，所以$W=W_1\oplus\cdots W_r$。证明：对每一个$w_i$，存在$v_i\in K$，使得$Tv_i=w_i$，且$v_i$是幂指数为$e_i+1$的广义特征向量。（提示：$W=\mathrm{Im}(T)$）

   (d) 设$V_i=\mathrm{span}(\{v_i,Tv_i,\cdots,T^{e_i}v_i\})$。证明：$TV_i=W_i$

   (e) 证明：$V_i\cap N\subset W_i$（提示：注意$e_i>0$，$N=\mathrm{Ker}(T)$）。

   (f) 设$U=V_1+V_2+\cdots+V_r$，证明：U是T的不变子空间（提示：先证明V_i是T的不变子空间）

   (g) 证明：如果$\tilde{w}_1+\tilde{w}_2+\cdots+\tilde{w}_r=0$且$\tilde{w}_i\in W_i$，则每一个$\tilde{w}_i=0$。（提示：不同的$W_i$之间的向量是线性无关的）

   (h) 证明：$\tilde{v}_1+\tilde{v}_2+\cdots+\tilde{v}_r=0$且$\tilde{v}_i\in V_i$，则每一个$\tilde{v}_i=0$。（提示：利用$T\tilde{v}_i=\tilde{w}_i$，并且证明如果$Tv_i=0$，则$v_i\in V_i\cap N\subset W_i$）这样我们就知道其实$U=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_r$，所以$T$在$U$上可以写成若当标准型。

   (i) 证明：$\forall\ v\in K$满足$Tv\in W$，存在$u\in U$，使得$Tv=Tu$，换句话说$u-v=z\in N$，所以$K=U+N$（提示：先证明$TU=W$）

   (j) 如果我们通过往U的基中添加N中线性无关的向量$\{z_1,\cdots,z_p\}$使之构成K的一组基，并且设$N'=\mathrm{span}(\{z_1,\cdots,z_p\})$。证明：$U\cap N'=\{0\}$，也就是说$K=U\oplus N'$。

   T在N'上的表示矩阵显然是0，T在U上的表示矩阵是若当标准型，又因为$K=U\oplus N'$，所以T在K上的表示矩阵是分块对角的，其中第一块是T在U上的表示矩阵，第二块是T在N'上的表示矩阵（0），所以T在K上可以写成若当标准型。这样我们就证明了T在原来的空间V上可以写成若当标准型。恭喜你，完成了若当标准型的证明！

2 复线性空间、内积空间

1. **测不准原理**在量子力学的框架里面，物理系统被一个波函数ψ来描述，而物理观测量f是被一个厄米算子来描述。一个重要的结论是，对应于一个给定的物理量H (比如能量)，对于一个一般量子系统的观测不会给我们确定的观测量。但是对一些特殊的量子态Φ_n，我们的观测会给出确定的物理 量E_n。这样的波函数称之为本征态(Eigenstate)， 而这样的确定的物理量称之为本征值 (Eigenvalue)。 数学的描述就是

$$H\Phi_n = E_n\Phi_n \tag{1}$$

这个方程被称为本征方程。我们可以把上述框架用我们学习的线性代数来描述，用我们矩阵的语言就是说: 一个物理量对应于一个厄米矩阵A, 一个一般的系统态被一个向量x描述。 它的本征态对应于一个特征向量x_n，它的本征值对应于特征值λ_n。 本征方程就是我们的特征方程:

$$Ax_n = \lambda_n x_n \tag{2}$$

我们用矩阵的语言学习一些量子力学的性质

(a) 考虑物理量f对应是$n\times n$厄米矩阵A。证明：存在一组正交归一基$\{x_1,\cdots,x_n\}$，使得A可以在这组基下对角化。内积取$\mathbb{C}^n$的标准内积（提示：借鉴实对称矩阵可以正交对角化的证明）

(b) 考虑一个归一化的复向量$x^\dagger x = 1$，它描述了一个量子力学系统。将x用上面的正交归一基展开$x = a_1x_1 + \cdots + c_nx_n$。证明：$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$。

(c) 一个物理量A在量子系统$x(x^\dagger x = 1)$上观测的期望值是$\overline{M} = x^\dagger Ax$。这个物理量的不确定度平方是$\sigma_A^2 = (A-\overline{A})^2$。证明:

$$\overline{\sigma_A^2} = \overline{M^2} - (\overline{M})^2 \tag{3}$$

(d) 对于什么样的系统x，$\overline{\sigma_A^2}$最小?

(e) 考虑两个物理量p和q，它们对应的矩阵满足$PQ+QP = I$。假设P和Q的期望都是0，证明:

$$\overline{\sigma_P^2\sigma_Q^2} \geq \frac{1}{4} \tag{4}$$

（提示：利用不等式$|(aQ+P)x|^2 \geq 0$，这里a是任意实数）。这个公式告诉我们如果P的不确定度很小，Q的不确定度必然很大。

3 张量

1. （量子纠缠）我们用张量理解量子纠缠。考虑两个粒子A和B，每个粒子对应的态空间是两维的线性空间H_A和H_B。假设$\{e_1^A, e_2^A\}$和$\{e_1^B, e_2^B\}$是它们各自的正交归一基。通常这些基有一些物理意义（比如它们是自旋的

本征态）。描述两个粒子的态空间就是张量空间$H_{AB} = H_A \otimes H_B$，它的基是

$$\alpha_1 = e_1^A \otimes e_1^B,\, \alpha_2 = e_1^A \otimes e_2^B,\, \alpha_3 = e_2^A \otimes e_1^B,\, \alpha_4 = e_2^A \otimes e_2^B \tag{5}$$

(a) 假设$\sigma_A : H_A \to H_A$是一个线性映射，且e_1^A和e_2^A分别是特征值为± 1的特征向量。写下σ_A在这组基下的表示矩阵

(b) 考虑$\sigma_A \otimes I_B$其中I_B是H_B上的恒等映射，求$\sigma_A \otimes I_B$在$\{\alpha_i\}$这组基上的表示矩阵（提示：$\sigma_A \otimes I_B$在$v_A \otimes v_B$上的作用是$\sigma_A(v_A) \otimes \sigma_B(v_B)$)

(c) 如果H_{AB}中的一个向量可以写成$v_A \otimes v_B$的形式，这个向量被称为非纠缠态。假设$v_A = a_1 e_1^A + a_2 e_2^A$，$v_B = b_1 e_1^B + b_2 e_2^B$。写下$v_A \otimes v_B$在$\{\alpha_i\}$这组基上的坐标。

(d) 证明：如果$|v_A| = |v_B| = 1$，则$|v_A \otimes v_B| = 1$。

(e) 写出一个纠缠态，也就是说，它不能写成上面的形式

(f) 假设$|v_A \otimes v_B| = 1$，用之前题目的定义，写下$\sigma_A \otimes I_B$在一个非纠缠态$v_A \otimes v_B$的期望值。观察一下结果对系数a_1, a_2, b_1, b_2的依赖。实际上对于非纠缠态，对B状态的了解得不到任何关于A的信息。

(g) 证明$\frac{1}{\sqrt{2}} e_1^A \otimes e_1^B + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2^A \otimes e_2^B$，计算$\sigma_A \otimes I_B$在它上面的期望。纠缠的意义是指，如果我们测量$\sigma_A$，如果得到$e_1^A$，则$B$一定处于$e_1^B$，反之亦然。

4 群

1. 证明下面集合在相应运算下构成一个群
   (a) 所有正实数，运算为实数乘法
   (b) 所有绝对值为1的复数，运算为复数乘法
2. 计算S_3的乘法表（提示：可以用$\{1, x, x^2, y, xy, x^2 y\}$和关系$x^3 = 1, y^2 = 1, yx = x^2 y$）