第 3 次习题课　闭区间连续函数性质与导数计算

一、闭区间连续函数性质：

零点定理

介值定理

有界性定理

最大值最小值定理

一致连续性

1. 开区间上的连续函数的值域必为开区间吗？若是，请给予证明；若否，请举反例。

2. 书上 P.64，第 10 题

设 $f \in C(\mathbb{R})$，且 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$，证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上存在最小值。

3. 设 $f \in C[a,b]$，$m(x) = \inf\limits_{t \in [a,x]} \{f(t)\}, M(x) = \sup\limits_{t \in [a,x]} \{f(t)\}$，求证 $m(x), M(x) \in C[a,b]$。

4. 设 $f \in C[a,b]$，且 $f([a,b]) \subset [a,b]$，证明：$\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \xi$。

5. 设 $f \in C[a,b]$，且存在 $q \in (0,1)$，使得 $\forall x \in [a,b]$，$\exists y \in [a,b]$，满足 $|f(y)| \le q\,|f(x)|$。

证明：$\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = 0$。

6. 设$f \in C[0,1], f(0) = 0, f(1) = 1, 2 \le n \in \mathbb{N}$, 则$\exists \xi \in (0,1), s.t. f(\xi + \frac{1}{n}) = f(\xi) + \frac{1}{n}.$

7. 设$f \in C(-\infty, +\infty), f$ 以T为周期. 求证: $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \xi \in [0, \mathrm{T}], s.t. f(a + \xi) = f(\xi).$

8. 设 $f(x)$ 在区间 I 上定义。一个点 $x_0 \in I$ 称作函数 $f(x)$ 的极大值（极小值）点，如果存在正数 $\delta > 0$，使得 $f(x) \le f(x_0)$　（$f(x) \ge f(x_0)$），$\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$。

极大点和极小点都称作极值点。证明命题：设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $I := [a,b]$ 上连续。若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上无极值点，则 $f(x)$ 在 I 上严格单调。

9. 证明：函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件是：对区间 I 上的任何两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$，当 $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n - y_n) = 0$ 时，有 $\lim\limits_{n \to \infty}[f(x_n) - f(y_n)] = 0$.

并证明 (1) 函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致连续.　(2) 证明 $f(x) = \sin x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续.

二．一阶导数

导数定义：导数，左、右导数

求导法则：四则运算，链式法则，反函数求导，隐函数求导，参数函数求导

常用函数的导数

$c' = 0,\qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$

$(\sin x)' = \cos x,\qquad (\cos x)' = -\sin x,$

$(\tan x)' = \sec^2 x,\qquad (\cot x)' = -\csc^2 x,$

$(\sec x)' = \sec x \tan x,\qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \operatorname{arc}\cot x = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$(a^x)' = a^x \ln a,\qquad (e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a},\qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

1. 设 $y = f(x)$ 在 $B(x_0)$ 有定义，则与 $f'(x_0)$ 存在不等价的是（　）。

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+kx)-f(x_0)}{x}$　$(k \neq 0,1)$ 存在

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x^2)-f(x_0)}{x^2}$ 存在

(C) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left[\left(f\left(x_0-\dfrac{1}{x}\right)-f(x_0)\right)\right]$ 存在

(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{\sin x}$　存在

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ x^2 g(x) & x \le 0 \end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有（　）。

(A) 极限不存在；　　(B) 极限存在，但不连续

(C) 连续，但不可导；　　(D) 可导

3. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有（ ）。

(A) $f(0)=0$， (B) $f'(0)=0$

(C) $f(0)+f'(0)=0$， (D) $f(0)-f'(0)=0$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$,则（ ）

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在。 (B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在。 (D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

5. 设函数 $g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上连续。定义 $f(x):=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$。

若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,

(1) 求函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的值；

(2) 问函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处是否可导？若可导，求出导数值。

6. 初等函数求导

$$y=\sqrt{x+\sqrt{x}}\ ;\ y=\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\ ;\ y=e^{x^2}\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

7. 讨论 $f(x)=\begin{cases}x(1-x), & x\in\mathbb{Q};\\ x(1+x), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ 的连续性与可微性。

8. $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，$f(a)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x$