第 7 次习题课　　Riemann 积分概念、性质

第一部分：回顾

1. Riemann 积分的存在性

（1）定义（定积分）:

设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数，I 是一个实数。若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当区间 $[a,b]$ 的分割 T：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 满足 $|T|=:\max_{1\le i\le n}\{x_i-x_{i-1}\}<\delta$ 时，对 $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，都有 $\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\mathrm{I}\right|<\varepsilon$，则称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积，记作 $f\in R[a,b]$；称 I 为函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分，记作 $\mathrm{I}=\int_a^b f(x)dx$.

（2）可积的必要条件：

若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上是可积，则 f 在 $[a,b]$ 有界。

（3）可积的充分必要条件：

设 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数，对 $\left[a,b\right]$ 的一个分割 T：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，分别记 M_i 与 m_i 为 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 的上确界与下确界 $(i=1,2,\cdots,n)$，记 $U(f,T)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$，$L(f,T)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$，分别称 $U(f,T)$ 与 $L(f,T)$ 为函数 f（在[a, b]）关于分割 T 的 Darboux 大和与 Darboux 小和；分别称 $\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\{U(f,T)\,|\,T\text{为}[a,b]\text{的分割}\}$，$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup\{L(f,T)\,|\,T\text{为}[a,b]\text{的分割}\}$ 为 f 在 $\left[a,b\right]$ 上的上积分与下积分。

设 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数，则下陈述等价：

- $f \in R[a,b]$;
- $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当区间$[a,b]$ 的分割T 满足$|T| < \delta$ 时，就有$U(f,T) - L(f,T) < \varepsilon$;
- $\forall \varepsilon > 0$，存在区间$[a,b]$ 的分割T，使得$U(f,T) - L(f,T) < \varepsilon$;
- $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$

（4）可积的充分条件：

- 若$f \in C[a,b]$，则$f \in R[a,b]$
- 若f是定义在$[a,b]$上的单调函数，则$f \in R[a,b]$.
- 若f是定义在$[a,b]$上的有界且至多存在有限个间断点函数，则$f \in R[a,b]$.

2. Riemann 积分的性质

（1）线性性:

若$f, g \in R[a,b]$，α, β为常数，则$\alpha f + \beta g \in R[a,b]$，且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

（2）区域可加性:

设$c \in (a,b)$，则$f \in R[a,b]$充分必要条件$f \in R[a,c]$，$f \in R[c,b]$,此时

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

（3）保序性:

若$f, g \in R[a,b]$，且$f(x) \le g(x) (\forall x \in [a,b])$，则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

特别

- 若$f\in R[a,b]$，且$f(x)\ge 0(\forall x\in[a,b])$，则$\int_a^b f(x)dx\ge 0.$
- 若$f\in R[a,b]$，且$m\le f(x)\le M(\forall x\in[a,b])$，则$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$
- 若$f\in R[a,b]$，则$|f|\in R[a,b]$，且$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx.$

（4）相乘、相除、平方和再开方的函数可积性:

若 $f,g\in R[a,b]$，则 $f\cdot g,\sqrt{f^2+g^2}\in R[a,b]$； 且当$|g(x)|\ge M>0(\forall x\in[a,b])$时，

$\frac{1}{g}\in R[a,b]$

（5）积分中值公式：

若$f,g\in R[a,b]$，且$\mathrm{m}\le f(x)\le M,g(x)\ge 0(\forall x\in[a,b])$，则$\exists\mu\in[m,M]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx,$$

特别当 $f\in C[a,b]$时，则 $f\in C[a,b]$，$\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

（6）Newton-Leibnitz 公式(微积分基本公式)：

设 $f\in R[a,b]$，且存在$[a,b]$上连续函数F满足$F'(x)=f(x)(\forall x\in(a,b))$，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

3.变上限积分

（1）定义（变上限积分）：

设 $f\in R[a,b]$，则由积分的区域可加性知，$f\in R[a,x](\forall x\in(a,b])$，称函数

$F(x)=\int_a^x f(t)dt(\forall x\in[a,b])$为在区间$[a,b]$上的变上限积分。

（2）变上限积分性质:

设$f\in R[a,b]$，$F(x)=\int_a^x f(t)dt(\forall x\in[a,b])$，则

- $F\in C[a,b]$：
- 若函数f在$x_0\in[a,b]$处连续，则F在x_0处可导，且$F'(x_0)=f(x_0)$

特别若$f\in C[a,b]$，则F是f在区间$[a,b]$上的一个原函数。

第二部分：习题

一、定积分的概念

1．设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，求证函数$e^{f(x)}$在区间$[a,b]$上可积。

证：因为函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，所以$f(x)$在$[a,b]$上有界，设

$M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)|\}$.

对于区间$[a,b]$的任意划分$T=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，记

$$M_k=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\}，\quad m_k=\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\}，\quad \omega_k=M_k-m_k .$$

对于$\forall\ u,v\in[x_{k-1},x_k]$，有

$$\left|e^{f(u)}-e^{f(v)}\right|=e^{\xi}\left|f(u)-f(v)\right|\leqslant\bar{M}\omega_k ,$$

其中ξ介于$f(u)$与$f(v)$之间，$\bar{M}=e^M$.

所以 $\omega_k^{e^f}\leqslant\bar{M}\omega_k$，从而

$$0\leqslant\sum_{k=1}^n\omega_k^{e^f}\Delta x_k\leqslant\bar{M}\sum_{i=1}^n\omega_k\cdot\Delta x_k .$$

因为函数$f(x)$可积，所以$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^n\omega_k\cdot\Delta x_k=0$，于是

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^n\omega_k^{e^f}\Delta x_k=0 .$$

故函数$e^{f(x)}$在$[a,b]$上可积。

二、利用 Riemann 积分计算某些数列极限

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$，这里 $p>0$.

解：我们将 $\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ 写作如下形式

$$\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

上式右边可看作是函数 x^p 在区间 $[0,1]$ 上的一个 Riemann 和。因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}.$$

三、积分估值

3. 记 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx$，确定 I_1 与 I_2 的大小关系。

解：当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时 $\sin x<x$，且 $\sin x$ 严格单调增。

所以 $\sin(\sin x)<\sin x$，$I_1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=1$.

而 $\cos x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 严格单调减，所以 $\cos(\sin x)>\cos x$，$I_2>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=1$.

因此 $I_1<I_2$.

4. 计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ 近似值，使误差小于 10^{-6}.

解：
$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{\sin\xi}{7!}x^6\right]dx$$
$$\approx\int_0^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\right]dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{144}+\frac{1}{9600}=0.5-0.006\dot{9}\dot{4}+0.0001041\dot{6}$$
$$\approx 0.5-0.006944+0.000104=0.493160$$

公式误差：$\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sin\xi}{7!}x^6dx\right|\le\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{7!}x^6dx=\dfrac{1}{4515840}<\dfrac{1}{4}\times10^{-6}$

计算误差 $<5\times10^{-7}+2\times10^{-7}$

总误差 $<\dfrac{1}{4}\times10^{-6}+5\times10^{-7}+2\times10^{-7}<10^{-6}$

四、积分不等式与零点问题

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且恒正即 $f(x)>0,\ \forall x\in[a,b]$. 证明函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x[f(t)]^{-1}dt$$

在 $[a,b]$ 上有且仅有一个零点。

证明：由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且恒大于零，我们得到 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导且

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0.$$

这表明 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增。 又由于

$$F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt<0,\quad F(b)=\int_a^b f(t)dt>0,$$

并且函数 $F(x)$ 是严格单调增加的，根据连续函数的介值定理可知， 函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有且仅有一个零点。

6.（课本第五章总复习题第 17 题，p. 188）已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调上升。证明：$\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

证法 1：（利用变上限定积分，利用单调性）（课堂已讲了一般情形！）

令 $F(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$， $x\in[a,b]$.

因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)$ 可导，且

$$\begin{aligned}F'(x)&=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}f(x)\\&=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_a^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

又因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增，所以 $F'(x)\geqslant 0$，即函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增。又 $F(a)=0$，所以

$$F(b) \geqslant F(a) = 0，\text{即} \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

证法 2：（利用定积分的性质）

因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增，所以 $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \ge 0$，从而

$$\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)dx \ge 0 .$$

又因为 $\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx=0$，所以 $\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx \ge 0$，即有 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证法 3：（利用积分中值定理）

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-\frac{a+b}{2})f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)\mathrm{d}x \\ &= f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x + f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x ,\end{aligned}$$

其中 $a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b$.

因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增，且 $\xi_1>\xi_2$，所以

$$f(\xi)_1 \geqslant f(\xi)_2 .$$

又因为 $\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x = \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x = \frac{1}{8}(b-a)^2$，所以

$$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}[f(\xi_1)-f(\xi_2)](b-a)^2 \geqslant 0 ,$$

即 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证法 4： 因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增，所以对 $\forall t$， $x\in[a,b]$，都有

$$(t-x)[f(t)-f(x)] \geqslant 0 .$$

固定 x，对 t 积分，得

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t - x\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + xf(x)(b-a) - f(x)\int_a^b t\mathrm{d}t \geqslant 0 ,$$

即 $\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t - x\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + xf(x)(b-a) - f(x)\frac{1}{2}(b^2-a^2) \geqslant 0$.

再对 x 积分，得

$$(b-a)\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}(b^2-a^2)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+(b-a)\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(b^2-a^2)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0 .$$

因为定积分的值与积分变量所用字母无关的性质，所以

$$2(b-a)\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-(b^2-a^2)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0 ,$$

即 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微。证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx .$$

证明： 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取得最大值和最小值。

设 $|f(\xi)|=\max_{a\le x\le b}|f(x)|,\xi\in[a,b]$， $|f(\eta)|=\min_{a\le x\le b}|f(x)|$， $\eta\in[a,b]$.

于是

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|-\min_{a\le x\le b}|f(x)|=|f(\xi)|-|f(\eta)|\le|f(\xi)-f(\eta)|=\left|\int_\eta^\xi f'(x)dx\right|\le\int_a^b|f'(x)|dx .$$

另一方面，由积分中值定理，$\exists\varsigma\in[a,b]$，使 $f(\varsigma)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，于是

$$\min_{a\le x\le b}|f(x)|\le|f(\varsigma)|=\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| .$$

所以

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|=\min_{a\le x\le b}|f(x)|+(\max_{a\le x\le b}|f(x)|-\min_{a\le x\le b}|f(x)|)\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx .$$

证毕。

8. （Hadamard 不等式）设函数 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 可导且下凸。证明

$$f(\tfrac{a+b}{2})(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \qquad (*)$$

注：本题可看作是习题 5.2 第 10 题（p. 141）的一般化。

证明：根据假设我们有

$$f(x)=f(tb+(1-t)a)\le tf(b)+(1-t)f(a) ,\quad \forall t\in[0,1]$$

于是对积分 $\int_a^b f(x)dx$ 作变量替换 $x=ta+(1-t)b$ 得

$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 f(tb+(1-t)a)(b-a)dt\le(b-a)\int_0^1[tf(b)+(1-t)f(a)]dt=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

即式（*）的第二个不等式成立。

五、积分与极限

9.（课本习题 5.2 第 7 题，p. 141）证明

(i). $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x}=0$.

(ii). $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}=1$.

证明：（i）对积分$\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x}$，利用积分中值定理得

$\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x}=\frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n dx\le\frac{1}{n+1}\to 0$，这里$\xi_n\in[0,1]$。

由此立刻可知极限(i)成立。

注意 1：直接用积分中值定理是错的，$\exists\xi_n\in(0,1)$，使得$\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x}=\frac{\xi_n^n}{1+\xi_n}\to 0, n\to+\infty$

注意 2：由于函数x^n和$\frac{1}{1+x}$于区间$[0,1]$都是非负的。因此还有另一种可能性，关于积分$\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x}$利用积分中值定理。这就是 $\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x}=\eta_n^n\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\eta_n^n\ln 2$，这里 $\eta_n\in(0,1)$.

由于$\eta_n\in(0,1)$的位置不确定，因此极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\eta_n^n$的存在性和极限值的确定有困难。

(ii) 极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}=1$，当且仅当$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x^n}=0$.

由于$\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x^n}<\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}\to 0$，当$n\to+\infty$时。由此可见积分(ii)成立。

10. 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续。证明$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1)$.

证明：注意我们可以将$f(1)$表示为 $f(1)=(n+1)\int_0^1 x^n f(1)dx$. 于是我们要证

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]dx=0.$$

根据函数$f(x)$的连续性可知，$f(x)$有界，及存在正数$M>0$，使得$|f(x)|\le M$，$\forall x\in[0,1]$.

再根据函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的左连续性可知，对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得

$$|f(x)-f(1)|<\varepsilon,\quad \forall x\in(1-\delta,1].$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\ (n+1)\int_0^1 x^n\big[f(x)-f(1)\big]dx\ \right| &\le (n+1)\int_0^1 x^n\big|f(x)-f(1)\big|dx\\ &\le (n+1)\int_0^{1-\delta} x^n\big|f(x)-f(1)\big|dx+(n+1)\int_{1-\delta}^1 x^n\big|f(x)-f(1)\big|dx\\ &\le 2M(n+1)\int_0^{1-\delta} x^n dx+(n+1)\int_{1-\delta}^1 x^n\big|f(x)-f(1)\big|dx\\ &\le 2M(1-\delta)^{n+1}+\varepsilon\big[1-(1-\delta)^{n+1}\big]\le 2M(1-\delta)^{n+1}+\varepsilon.\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\delta)^{n+1}=0$ 可知，对于上述 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n\ge N$ 时，$2M(1-\delta)^{n+1}<\varepsilon$.

于是我们就证明了对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n\ge N$ 时，

$$\left|\ (n+1)\int_0^1 x^n\big[f(x)-f(1)\big]dx\ \right|<\varepsilon.$$

此即 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1)$.

注：类似可证，若 f 连续，则 $\lim\limits_{h\to0}\int_0^1\dfrac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\dfrac{\pi f(0)}{2}$.

六、变限积分

11. 设 $f(x),g(x)\in C[0,+\infty)$，$f(x)>0$，$g(x)$ 单调增加，则 $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$，

求 $\phi'(x)$ 并判断 $\phi(x)$ 的单调性。

解：由于

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x f(t)g(t)dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}=\frac{f(x)\int_0^x f(t)[g(x)-g(t)]dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}>0,$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加。

12. 求常数 a,b,c，使得极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\ne0.$　答案：$a=1,b=0,c=\dfrac{1}{2}$

13. 设$F(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^8\right)dt$，求$F^{(17)}(0)$. 答案：$\dfrac{-16!}{2}$

14. 设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$，则当 $x\to 0$ 时，

$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$是多少阶无穷小量？

解：$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt = x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$

设$F(x)$是k阶无穷小量,

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)dt+x^2 f(x)-x^2 f(x)}{kx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)dt}{kx^{k-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{k(k-2)x^{k-3}}=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{k(k-2)(k-3)x^{k-4}}$$

$k=4$时级极限存在且非零. 故$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$是 4 阶无穷小量。

15. 求函数$f(x)=\int_0^{x^2}(t-1)e^{-t}dt$的极大值点。 答案：$x=0.$

16. 设曲线$y=f(x)$由$x(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{t-u}\sin\dfrac{u}{3}du$及$y(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{t-u}\cos 2udu$确定， 求该曲线当$t=\dfrac{\pi}{2}$时的法线方程.

解：$x'(t)=\dfrac{d}{dt}\left(e^t\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{-u}\sin\dfrac{u}{3}du\right)=e^t\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{-u}\sin\dfrac{u}{3}du+\sin\dfrac{t}{3}.$

$y'(t)=\dfrac{d}{dt}\left(e^t\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{-u}\cos 2udu\right)=e^t\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{-u}\cos 2udu+\cos 2t.$

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-2$, 法线为 $y=\dfrac{x}{2}$.