聚变能源概论

高 喆
gaozhe@tsinghua.edu.cn

2022-23春季学期

第四讲：

聚变堆的功率平衡（稳态）

上节回顾

- 通常而言，束靶反应不能作为聚变能源的可行形式
- 需要热运动→热核聚变

- 需要细致考虑功率的得失相当，提出对等离子体体系的参数要求

上节回顾

- 聚变反应功率密度 $S_{\mathrm{f}} = E_{\mathrm{f}} n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle E_f$
- 功率损失
  - 辐射
  - 传导

$$S_{\mathrm{B}} = \left(\frac{2^{1/2}}{3\pi^{5/2}} \right) \left(\frac{e^6}{\varepsilon_0^3 c^3 h \, m_{\mathrm{e}}^{3/2}} \right) Z_{\mathrm{eff}} \, n_{\mathrm{e}}^2 \, T_{\mathrm{e}}^{1/2} \quad \mathrm{W/m^3}$$

$$S_\kappa = \frac{1}{V} \oint \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} = \frac{W}{\tau_E}$$

聚变能源的条件

可以从两个层面考虑

- 聚变系统的稳态运行
- 聚变系统可以获得的净功率（更大的能源系统）

聚变能源的条件

可以从两个层面考虑

- 聚变系统的稳态运行

✓ 要求系统**功率损失**和**功率输入**应该平衡　【等式】

- 聚变系统可以获得的净功率（更大的能源系统）

✓ **系统输出的（有效）功率**应该大于维持系统稳态运行所需的**功率输入**　【不等式】

稳态零维功率平衡模型

研究对象：聚变燃料组分形成的等离子体

“稳态”：各种成分的燃料粒子均处于平衡态（即既达到力学平衡，也达到热力学平衡）。

“零维”：描述平衡的方程是一个标量方程（体积平均！）

$$\frac{3}{2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{3}{2}\nabla \cdot p\mathbf{v} + p\nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q} = S$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{V}\int \left[\frac{3}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot p\mathbf{v}\right) + p\nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q} - S\right] \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

稳态零维功率平衡模型

$$\frac{1}{V}\int\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\cancel{\nabla\cdot p\mathbf{v}}\right)+\cancel{p\nabla\cdot\mathbf{v}}+\nabla\cdot\mathbf{q}-S\right]\mathrm{d}\mathbf{r}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{dt}=0\ (稳态)$$

$$-S_\kappa \qquad -S_B+S_h$$

稳态零维功率平衡模型

$$\frac{1}{V}\int\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\cancel{\nabla\cdot p\mathbf{v}}\right)+\cancel{p\nabla\cdot\mathbf{v}}+\nabla\cdot\mathbf{q}-S\right]\mathrm{d}\mathbf{r}=0$$

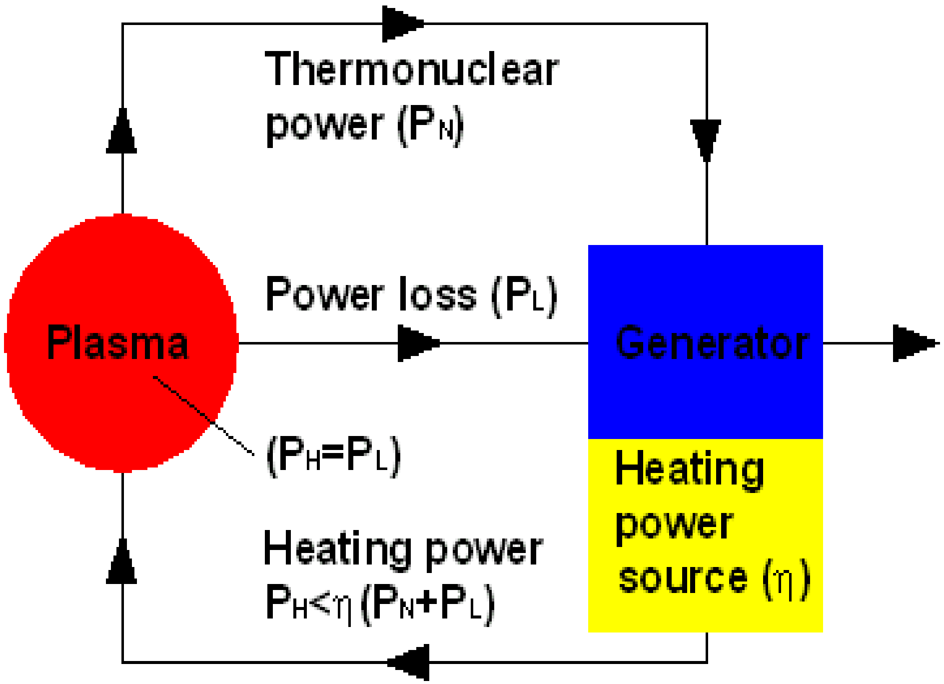
$$\frac{\mathrm{d}W}{dt}=0\ (\text{稳态})$$

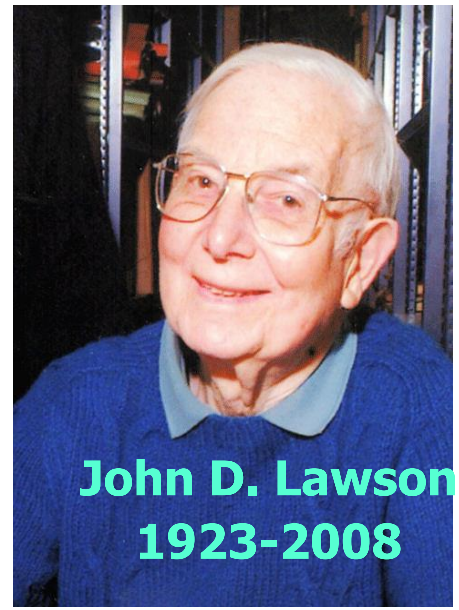
$$-S_\kappa \qquad -S_B+S_h$$

$$\boxed{S_h=S_\kappa+S_B}$$

$$\boxed{S_h=\mathbf{k}\,S_f+S_{h\,ext}}$$

Lawson 判据（1957）-零功率堆判据





S_f 完全离开聚变体系

$$S_{out} = S_f + S_B + S_\kappa$$

$$S_{out\ eff} = \eta(S_f + S_B + S_\kappa)$$

$$S_h = S_\kappa + S_B$$

$$\Rightarrow h\left(S_f + S_B + S_k\right)^3\ S_B + S_k$$

J. D. Lawson, *Proc. Phys. Soc.* **B70**, 1957, 6

回顾聚变能源的条件

可以从两个层面考虑

- 聚变系统的稳态运行

✓ 要求系统功率损失和功率输入应该平衡　【等式】

$S_\kappa + S_B$　　　S_h

- 聚变系统可以获得的净功率（更大的能源系统）

✓ 系统输出的（有效）功率应该大于维持系统稳态运行所需的功率输入　【不等式】

$\eta\left(S_f + S_B + S_\kappa\right)$

Lawson 判据（1957）

$$\eta\left(\frac{1}{4}n^2\langle\sigma v\rangle E_{\mathrm{f}}+\frac{3nT}{\tau_{\mathrm{E}}}+S_{\mathrm{B}}\right)\geq\frac{3nT}{\tau_{\mathrm{E}}}+S_{\mathrm{B}}$$

$$\Downarrow$$

$$n\tau_{\mathrm{E}}\geq\frac{3T_{\mathrm{e}}(1-\eta)}{\eta\frac{1}{4}\langle\sigma v\rangle E_{\mathrm{f}}-(1-\eta)\frac{S_{\mathrm{B}}}{n^2}}$$

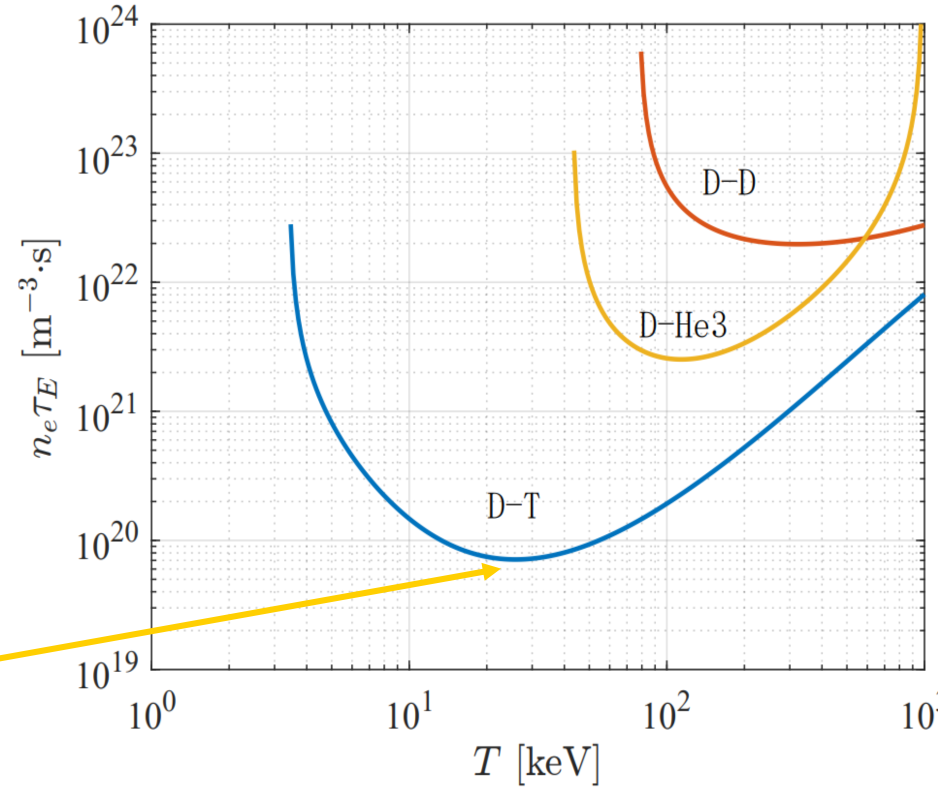
Lawson 判据（1957）

$$h\left(\frac{1}{4}n^2\langle s v\rangle E_f + \frac{3nT}{t_E} + S_B\right) \geq \frac{3nT}{t_E} + S_B$$

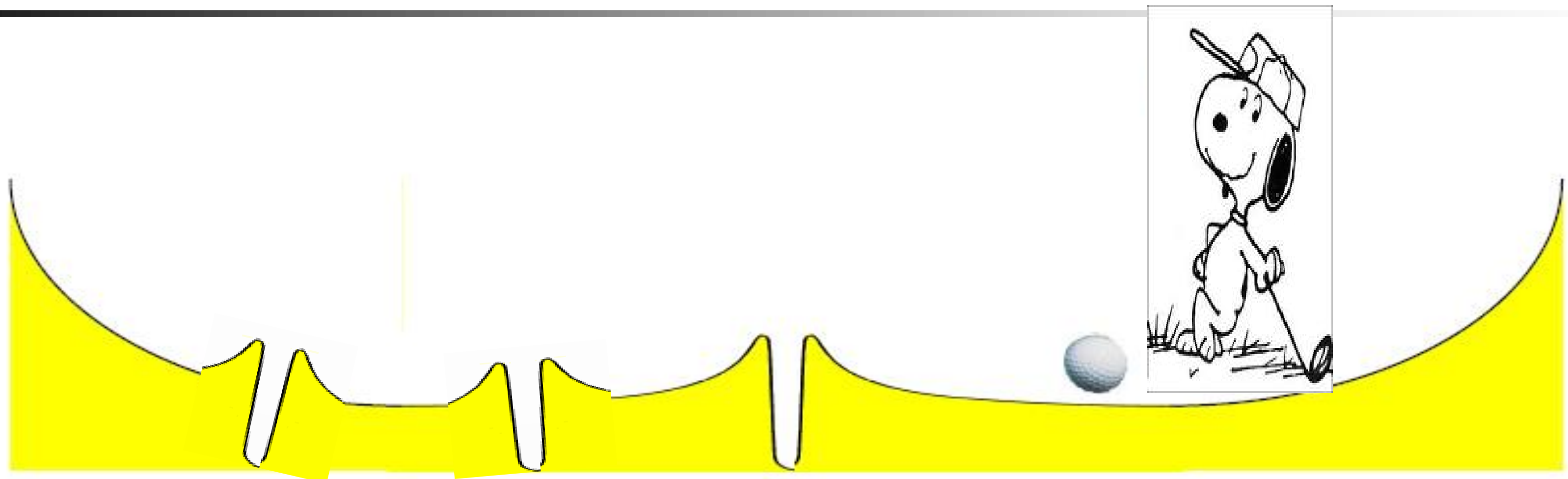
$$n t_E \ 3 \ \frac{3T_e(1-h)}{h\frac{1}{4}\langle s v\rangle E_f - (1-h)\frac{S_B}{n^2}}$$

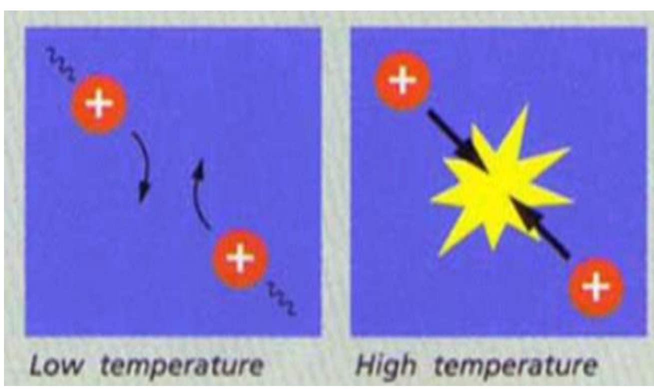
$$n_e\tau_E \geq 0.7\times10^{20}\ \mathrm{m^{-3}s}$$

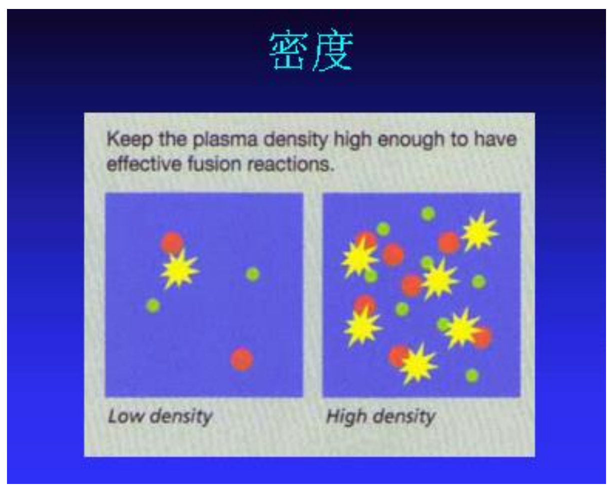
at T_i~20 keV

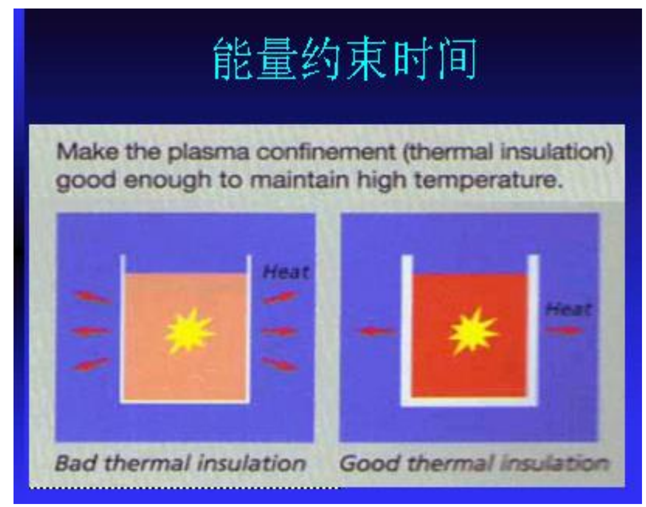


和基于简单图像的分析是吻合的

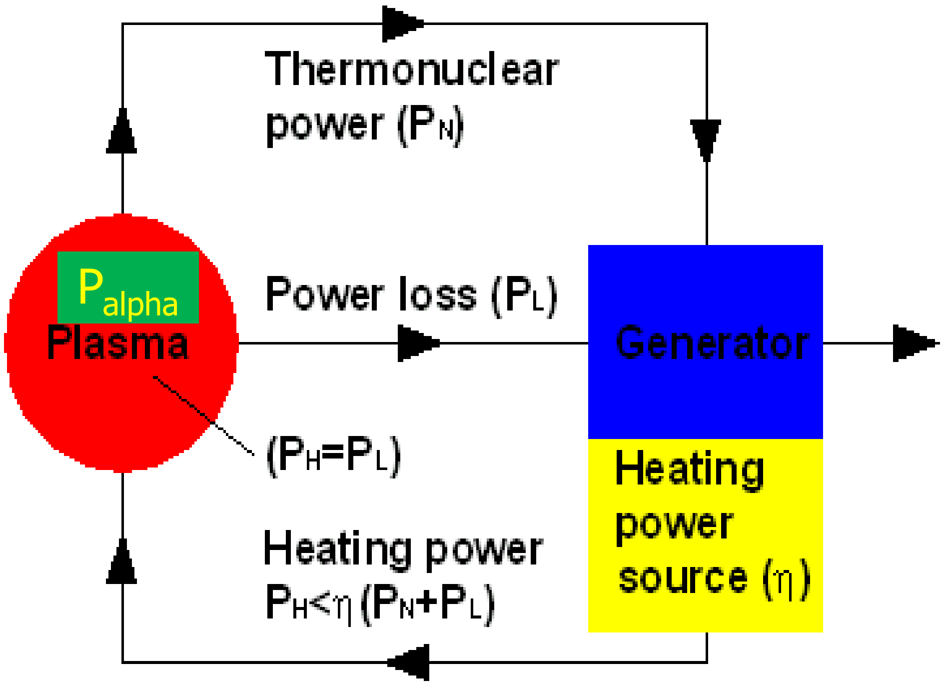








磁约束聚变中，考虑 α 粒子加热后的零功率堆判据（修正的Lawson判据）



单选题 1分

设置

你认为考虑alpha粒子加热修正后的Lawson判据要求的$n\tau_E$值比原有的判据

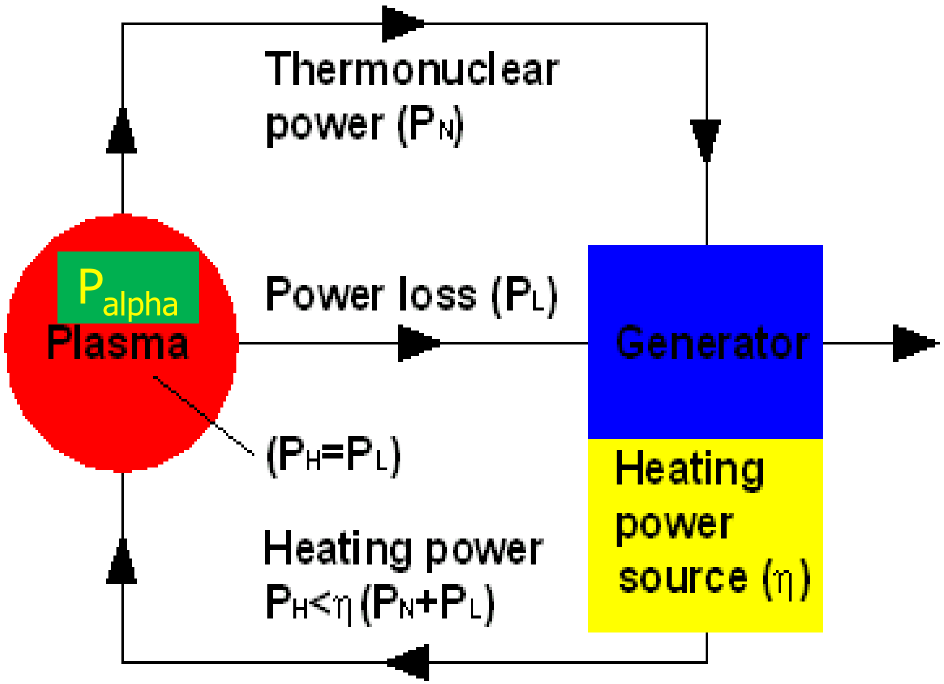
A 更高

B 更低

C 更高或更低依赖于具体的效率

提交

磁约束聚变中，考虑 α 粒子加热后的零功率堆判据（修正的Lawson判据）



$$S_{out\ eff} = \eta\left(\frac{4}{5}S_f + S_B + S_\kappa\right)$$

$$S_{h\ ext} = S_\kappa + S_B - \frac{1}{5}S_f$$

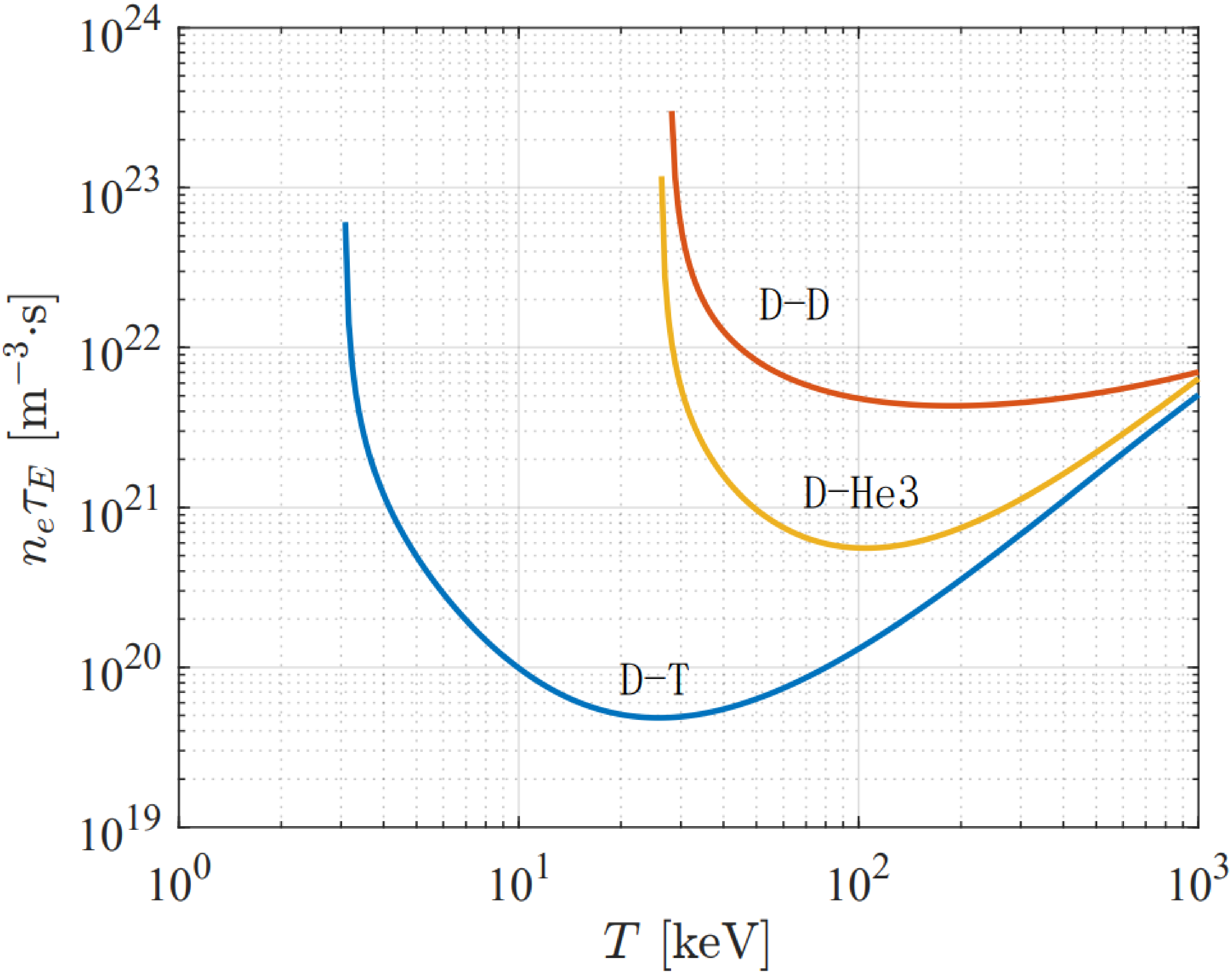
磁约束聚变中，考虑 α 粒子加热后的零功率堆判据（修正的Lawson判据）

$$S_{out\ eff} = \eta\left(\frac{4}{5}S_f + S_B + S_\kappa\right) \geq S_{h\ ext} = S_\kappa + S_B - \frac{1}{5}S_f$$

$$\frac{1}{5}S_f + h\left(\frac{4}{5}S_f + \frac{3nT}{t_{\mathrm{E}}} + S_{\mathrm{B}}\right) \geq \frac{3nT}{t_{\mathrm{E}}} + S_{\mathrm{B}}$$

$$n_e\tau_{\mathrm{E}} \geq \frac{3T(1-\eta)}{\frac{1}{4}\langle\sigma v\rangle_{\mathrm{DT}}E_{\mathrm{DT}}\left(\frac{1}{5}+\frac{4\eta}{5}\right) - \frac{1-\eta}{n_{\mathrm{e}}^2}S_{\mathrm{B}}}$$

略低于Lawson判据



10^{24}
10^{23}
10^{22}
10^{21}
10^{20}
10^{19}
$n_e \tau_E$ [$m^{-3}\cdot s$]
D−D
D−He3
D−T
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
T [keV]

点火（自持燃烧）条件

$$S_{h\ ext} = S_{\kappa} + S_B - \frac{1}{5} S_f = 0$$

是否能够达到$S_{h\ ext}$=0，甚至，alpha粒子的能量也不需要全部留在体系内

单选题 1分

设置

你认为考虑磁约束聚变点火条件要求的$n\tau_E$值比原有Lawson判据要求的要

A 更高

B 更低

C 更高或更低依赖于具体的效率

提交

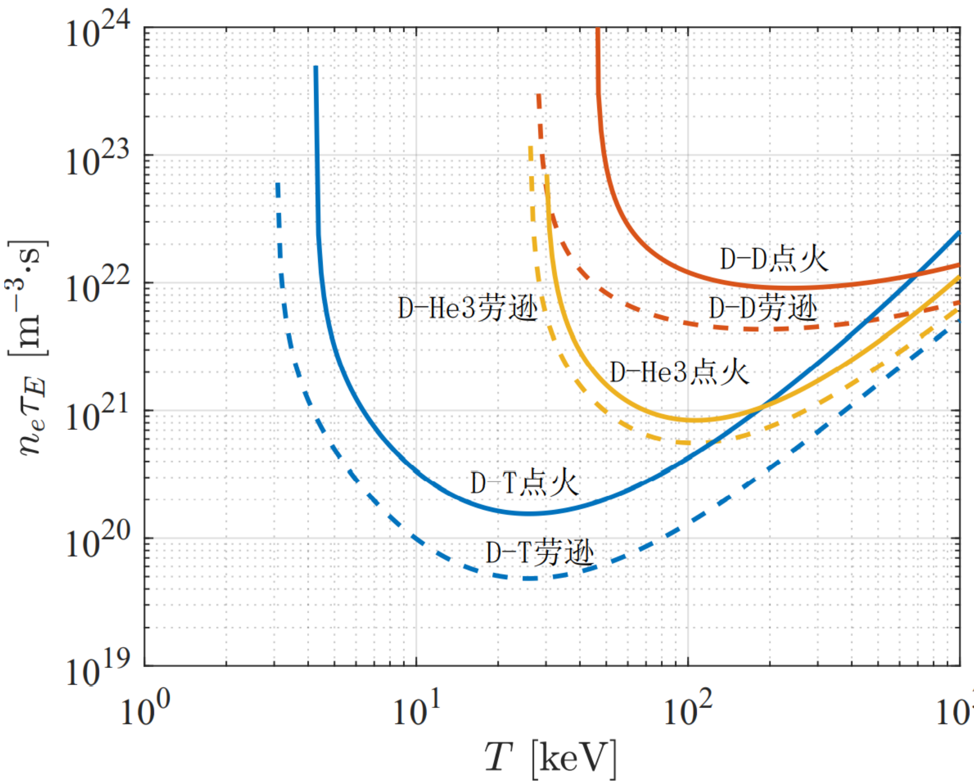
点火（自持燃烧）条件

$$S_{h\ ext} = S_{\kappa} + S_B - \frac{1}{5} S_f \leq 0$$

$$\frac{1}{5} S_{\mathrm{DT}} \geq \frac{3 n_e T}{\tau_{\mathrm{E}}} + S_{\mathrm{B}}$$

$$n\tau_{\mathrm{E}} \geq \frac{3T}{\frac{1}{20}\langle \sigma v \rangle_{\mathrm{DT}} E_{\mathrm{DT}} - \frac{S_B}{n^2}}$$

$$n\tau \geq 1.5 \times 10^{20} m^{-3} s$$



点火（自持燃烧）条件的简化（1）

$$\frac{1}{5}S_{\mathrm{DT}} \geq \cancel{\frac{3n_eT}{\tau_{\mathrm{E}}}} + S_{\mathrm{B}}$$

对密度和能量约束时间的限制将不再存在

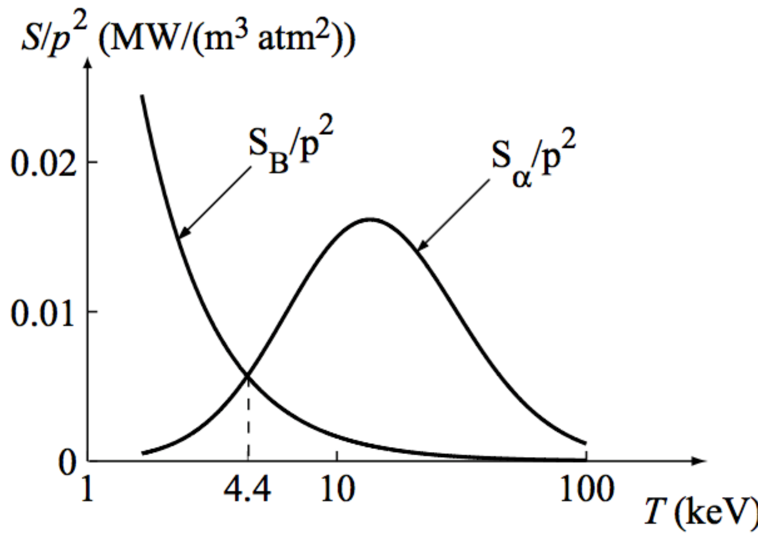
点火（自持燃烧）条件的简化（1）

$$\frac{1}{5}S_{\mathrm{DT}} \geq \cancel{\frac{3n_eT}{\tau_{\mathrm{E}}}} + S_{\mathrm{B}}$$

$$\frac{1}{20}n^2\langle\sigma v\rangle E_{\mathrm{DT}} \geq 1.625\times 10^{-38}n^2Z_{eff}^2\sqrt{T[\mathrm{eV}]}$$

⇩

$$T \geq 4.4\ \mathrm{keV}$$



理想点火条件：给出聚变等离子体工作温度的下限

点火（自持燃烧）条件的简化（2）

$$\frac{1}{5}S_{\mathrm{DT}} \;3\; \frac{3n_eT}{t_{\mathrm{E}}}+\cancel{S_{\mathrm{B}}}$$

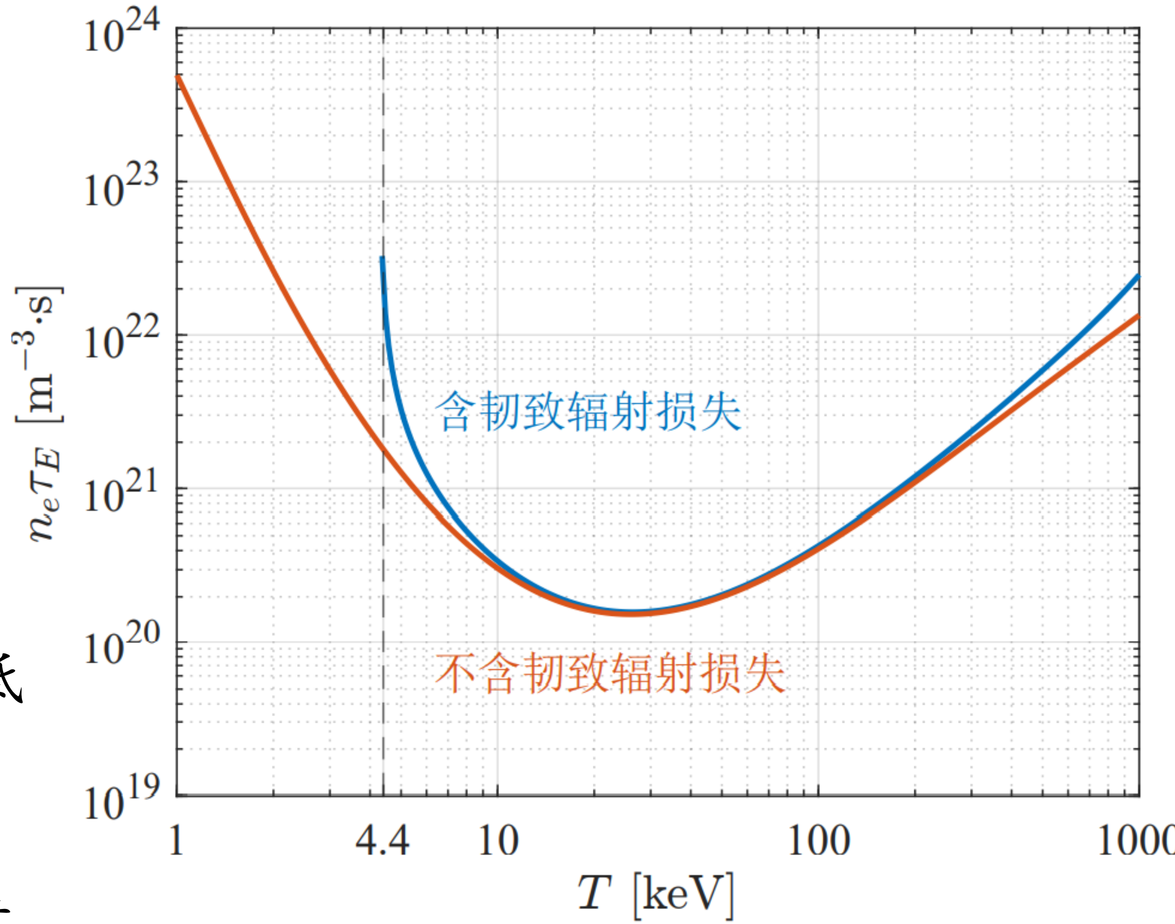
点火（自持燃烧）条件的简化（2）

$$\frac{1}{5}S_{\mathrm{DT}} \geq \frac{3n_e T}{\tau_{\mathrm{E}}} + \cancel{S_{\mathrm{B}}}$$

$$n\tau_{\mathrm{E}} \geq \frac{3T}{\frac{1}{20}\langle \sigma v\rangle_{\mathrm{DT}} E_{\mathrm{DT}} - \cancel{\frac{S_B}{n^2}}}$$

和点火条件相比，$n\tau_E$最小值基本不变，而只是在温度较低的区间降低了要求

原因：韧致辐射随温度增长呈平方根关系，弱于聚变功率热传导损失随温度增长而增长的速率



点火（自持燃烧）条件的简化（2）

$$\frac{1}{5} S_{\mathrm{DT}} \geq \frac{3 n_e T}{\tau_{\mathrm{E}}} + \cancel{S_{\mathrm{B}}}$$

$$n\tau_{\mathrm{E}} \geq \frac{3T}{\frac{1}{20}\langle\sigma v\rangle_{\mathrm{DT}} E_{\mathrm{DT}} - \cancel{\frac{S_B}{n^2}}}$$

当温度处于 10—20 keV 时

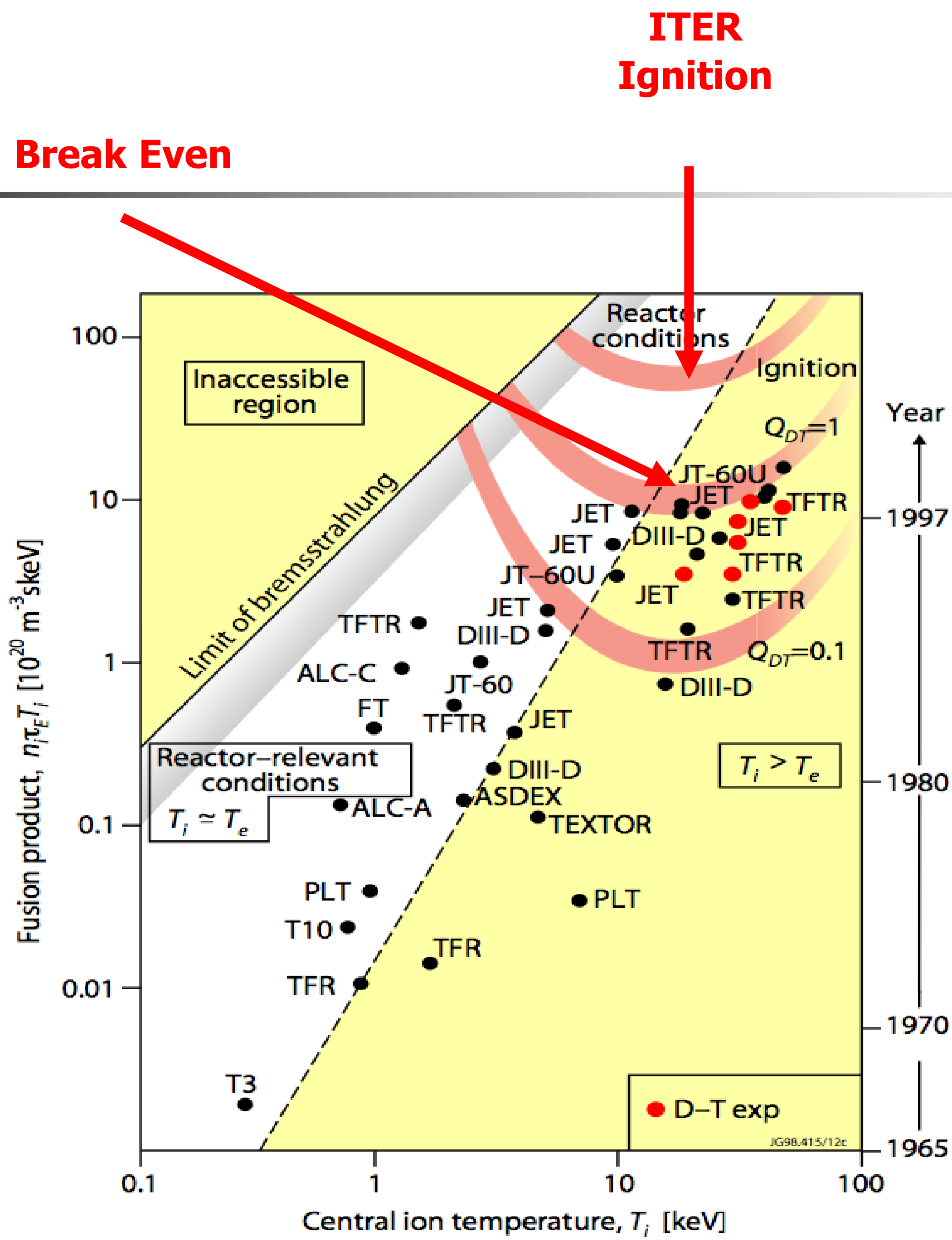
$$\langle\sigma v\rangle \approx 1.1\times 10^{-30} T^2 \quad [\mathrm{m^3 s^{-1}}], \quad T \ \text{in eV}$$

$$\boxed{nT\tau_{\mathrm{E}} \geq \frac{3T^2}{\frac{1}{20}\langle\sigma v\rangle_{\mathrm{DT}} E_{\mathrm{DT}}} \sim 3\times 10^{21}\, keV\ m^{-3} s \quad \sim 8\ \mathrm{atm\ s}}$$

三乘积 Triple Product

聚变物理研究进展的标志

应当指出，上述公式是针对平坦分布的，如果密度、温度均取抛物线分布（更接近实际），则峰值处点火条件稍高，但在同一量级。



ITER
Ignition
Break Even
Reactor conditions
Ignition
Inaccessible region
Limit of bremsstrahlung
Year
Q_{DT}=1
JT-60U
JET
TFTR
JET
JET
DIII-D
JET
JET
TFTR
JT–60U
JET
TFTR
TFTR
JET
DIII-D
TFTR
Q_{DT}=0.1
ALC-C
DIII-D
JT-60
FT
TFTR
JET
Reactor–relevant conditions
$T_i \simeq T_e$
DIII-D
$T_i > T_e$
ASDEX
ALC-A
TEXTOR
PLT
PLT
T10
TFR
TFR
T3
D–T exp
JG98.415/12c
100
10
1
0.1
0.01
Fusion product, $n_i \tau_E T_i$ [10^{20} m^{-3}skeV]
0.1
1
10
100
Central ion temperature, T_i [keV]
1997
1980
1970
1965

能量增益

- 之前的讨论总体上基于维持聚变体系持续运行的角度考虑；现在换个角度，从最后得到的净功率来考虑
- （热功率）物理增益因子Q

$$Q = \frac{\text{net thermal power out}}{\text{heating power in}} = \frac{P_{\text{out}} - P_{\text{in}}}{P_{\text{in}}}$$

几个判据下的物理增益因子Q

- 劳逊判据下：$S_{out} = S_f + S_B + S_\kappa$

$$S_{in} = S_h = S_{h\,ext} = S_B + S_\kappa$$

$$Q = \frac{S_{out} - S_{in}}{S_{in}} = \frac{S_f}{S_{h\,ext}}$$

~3

几个判据下的物理增益因子Q

- 劳逊判据下：$S_{out} = S_f + S_B + S_\kappa$

$$S_{in} = S_h = S_{h\,ext} = S_B + S_\kappa$$

$$Q = \frac{S_{out} - S_{in}}{S_{in}} = \frac{S_f}{S_{h\,ext}}$$

~3

- 修正的劳逊判据下：

$$S_{out} = \frac{4}{5}S_f + S_B + S_\kappa \qquad Q = \frac{S_{out} - S_{in}}{S_{in}} = \frac{S_f}{S_{h\,ext}}$$

$$S_{in} = S_{h\,ext} = S_B + S_\kappa - \frac{1}{5}\,S_\mathrm{f}$$

几个判据下的物理增益因子Q

- 劳逊判据下：$S_{out} = S_f + S_B + S_\kappa$

  $S_{in} = S_h = S_{h\ ext} = S_B + S_\kappa$

  $$Q = \frac{S_{out} - S_{in}}{S_{in}} = \frac{S_f}{S_{h\ ext}}$$

  ~3

- 修正的劳逊判据下：

  $$S_{out} = \frac{4}{5} S_f + S_B + S_\kappa$$

  $$S_{in} = S_{h\ ext} = S_B + S_\kappa - \frac{1}{5} S_\mathrm{f}$$

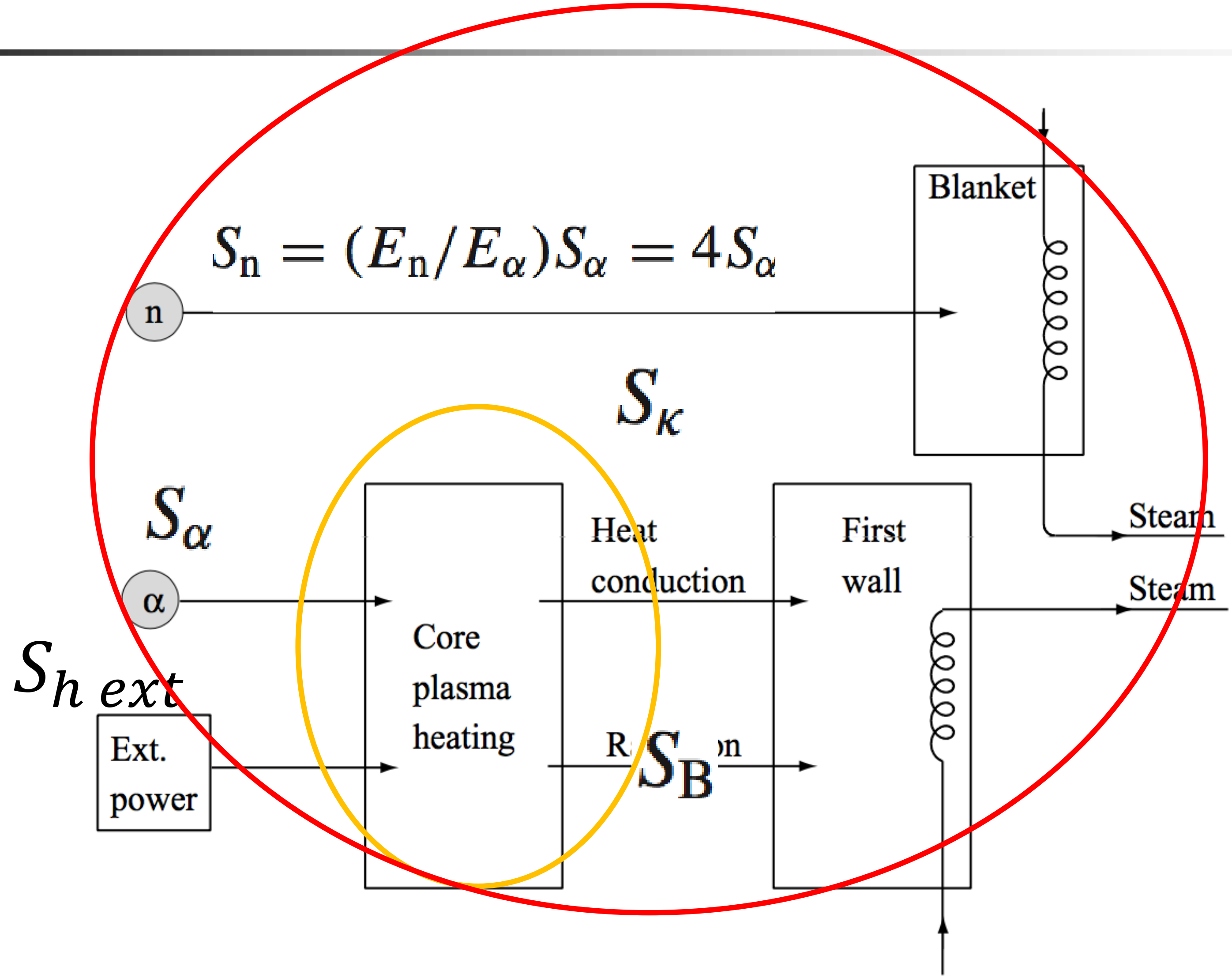
  $$Q = \frac{S_{out} - S_{in}}{S_{in}} = \frac{S_f}{S_{h\ ext}}$$

- 点火条件下：

  $$S_{out} = \frac{4}{5} S_f + S_B + S_\kappa$$

  $$S_{in} = S_{h\ ext} = S_B + S_\kappa - \frac{1}{5} S_\mathrm{f} = 0$$

  $$Q = \frac{S_f}{S_{h\ ext}} = +\infty$$


$S_n = (E_n/E_\alpha)S_\alpha = 4S_\alpha$
Blanket
n
S_κ
S_α
α
Heat
conduction
First
wall
Steam
Steam
Core
plasma
heating
$S_{h\ ext}$
Ext.
power
S_B

物理增益因子Q

$$Q = \frac{S_f}{S_{h\ ext}}$$

- 对于磁约束聚变，$S_{\mathrm{h\ ext}}$为外部注入的加热功率（如微波或中性束加热功率）
- 对于激光聚变， $S_{\mathrm{h\ ext}}$ 为外部注入的激光功率
- 这也是被国际聚变届所公认的Q的定义。

物理增益因子Q

$$Q = \frac{S_f}{S_{h\ ext}}$$

- 对于磁约束聚变，$S_{\mathrm{h\ ext}}$为外部注入的加热功率（如微波或中性束加热功率）
- 对于激光聚变， $S_{\mathrm{h\ ext}}$ 为外部注入的激光功率
- 这也是被国际聚变届所公认的Q的定义

令$F = nT\tau_E, F_I = (nT\tau_E)_{Ignition}$， $Q = \dfrac{5F}{F_I - F}$

无聚变反应时，Q=0；点火条件下，Q=无穷

聚变等离子体的功率平衡→聚变电站功率平衡

- **物理增益因子Q**

$$Q = \frac{\text{net thermal power out}}{\text{heating power in}} = \frac{P_{\text{out}} - P_{\text{in}}}{P_{\text{in}}}$$

- **工程增益因子Q_E**

$$Q_{\text{E}} = \frac{\text{net electric power out}}{\text{electric power in}}$$

一个简化的考虑

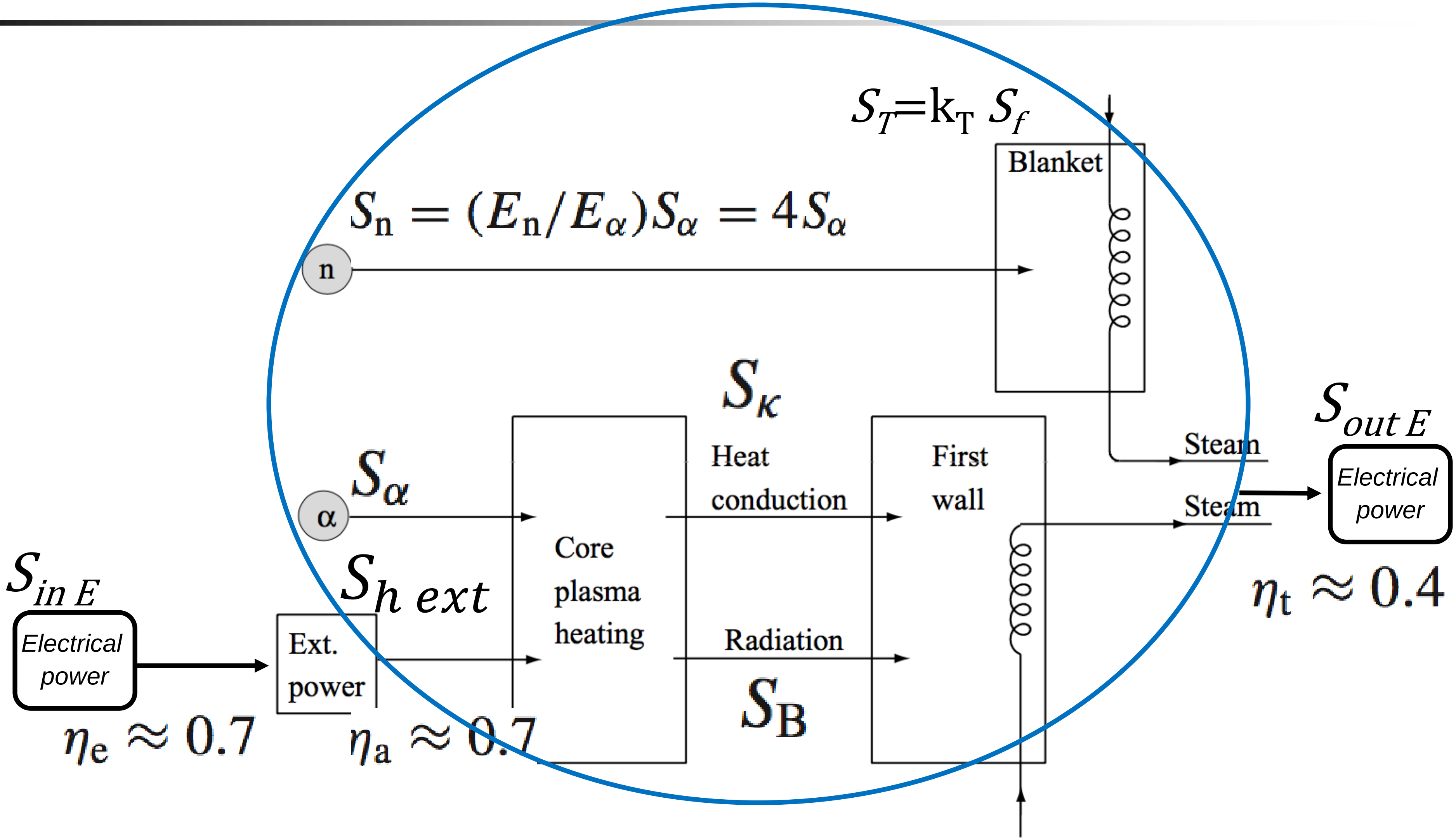
$$S_{out\ \mathrm{E}} = \eta S_{out\ eff} = \eta\left(S_f + S_B + S_\kappa\right)$$

$$S_{in\ \mathrm{E}} = S_{h\ ext} = S_B + S_\kappa$$

$$Q_{\mathrm{E}} = \frac{S_{out\ E} - S_{in\ E}}{S_{in\ E}} = 0$$ （劳逊判据）

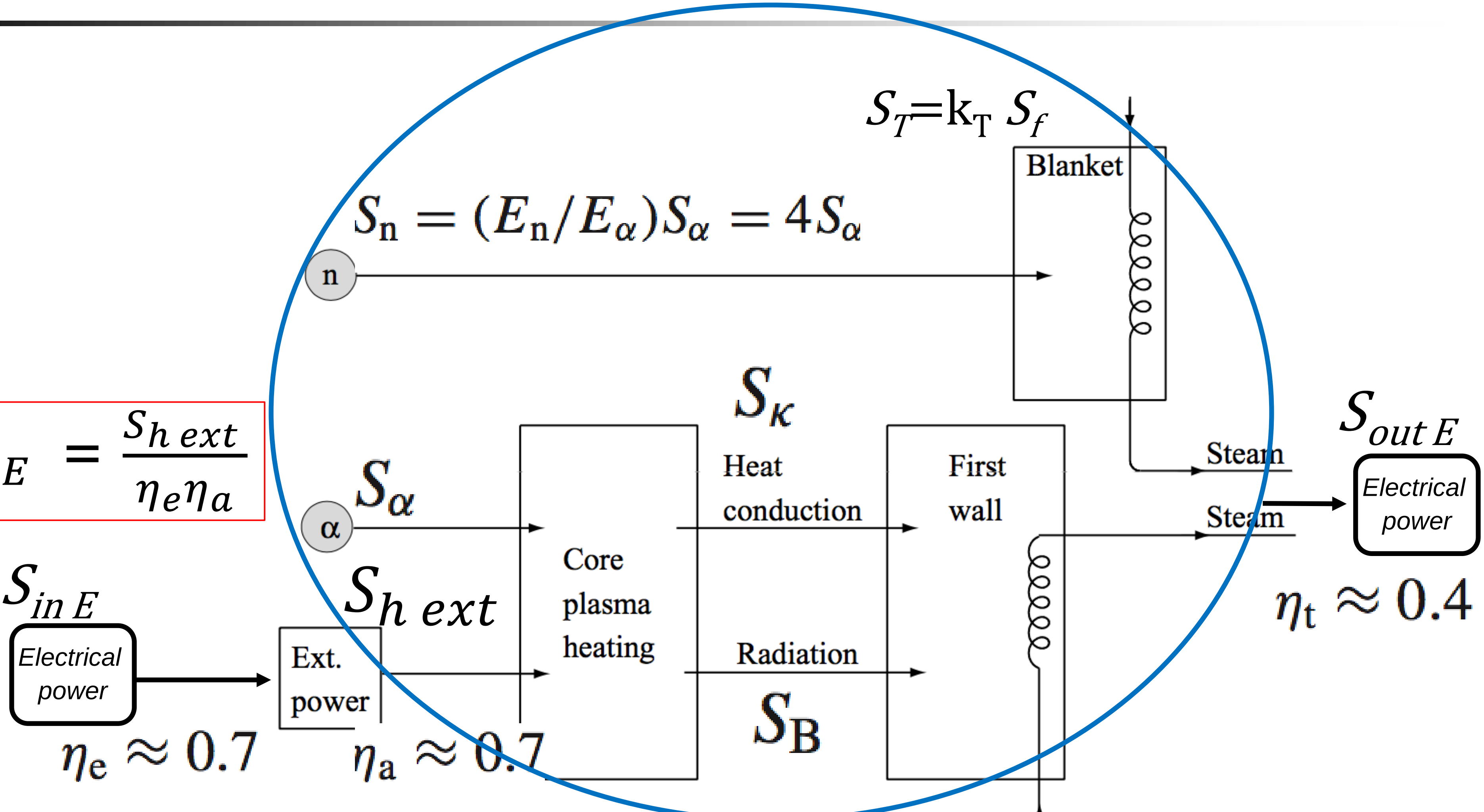
这也是劳逊判据被称为零功率堆判据的原因

稍复杂的DT反应堆模型



稍复杂的DT反应堆模型

$$S_{in\ E} = \frac{S_{h\ ext}}{\eta_e \eta_a}$$



$$S_{out\ E} = \eta\left[\left(\frac{4}{5} + k_T\right) S_f + S_B + S_\kappa + \frac{(1-\eta_a)}{\eta_a} S_{h\ ext}\right]$$

$$S_{in\,E} = \frac{S_{h\,ext}}{\eta_e \eta_a}$$

$$S_{out\,E} = \eta \left[\left(\frac{4}{5} + k_T \right) S_f + S_B + S_\kappa + \frac{(1-\eta_a)}{\eta_a} S_{h\,ext} \right]$$

$$Q_E = \frac{\eta \eta_e \eta_a [(4/5 + k_T) S_f + S_B + S_\kappa] - [1 - (1-\eta_a)\eta \eta_e] S_{h\,ext}}{S_{h\,ext}}$$

将点火条件 $S_{h\,ext} = S_B + S_\kappa - S_f/5$ 代入，并令$k_T = E_T/E_n = 0.27$

$$Q_E = \frac{(6.4\eta\eta_e\eta_a + 1 - \eta\eta_e)F - (1 - \eta\eta_e)F_I}{F_I - F} \approx \frac{2F - 0.72F_I}{F_I - F}$$

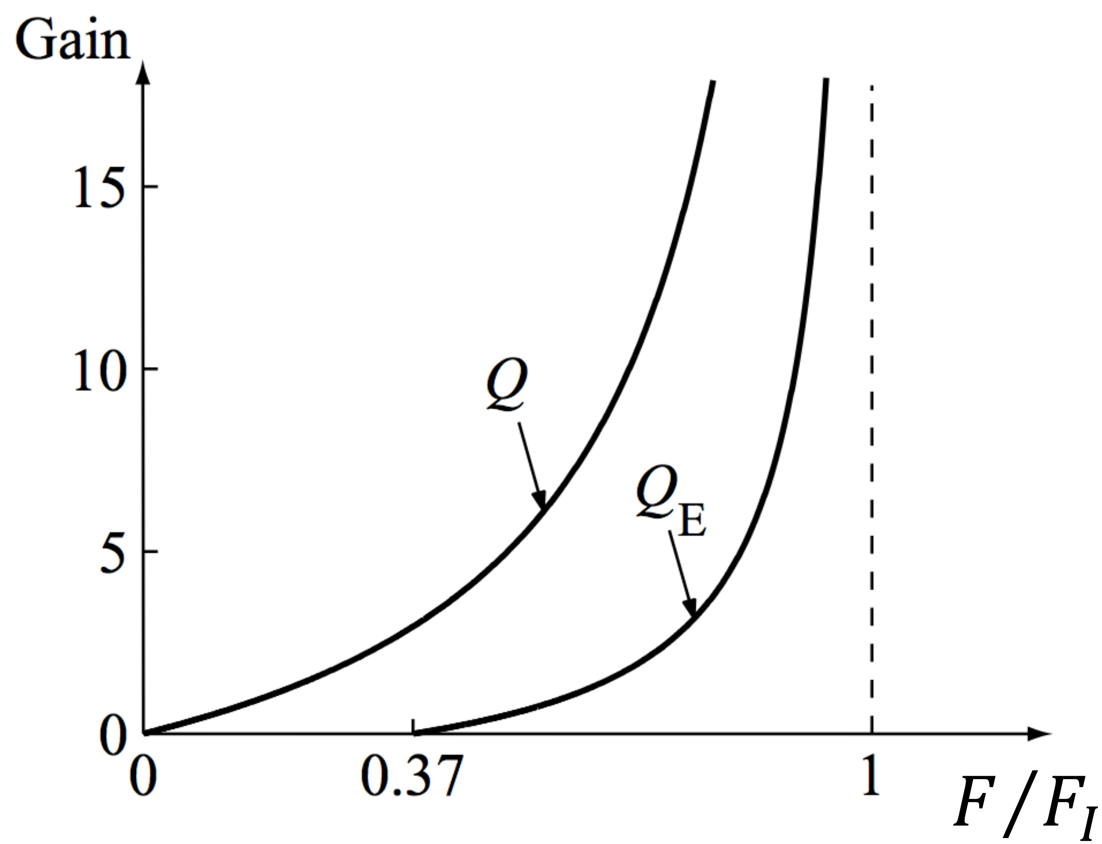
典型效率： $\eta = 0.4$，$\eta_e = 0.7$，$\eta_a = 0.7$

聚变等离子体的功率平衡→聚变电站功率平衡

- **物理增益因子Q**
- **工程增益因子Q_E**

$$Q = \frac{5F}{F_I - F}$$

$$Q_E \approx \frac{2F - 0.72F_I}{F_I - F}$$



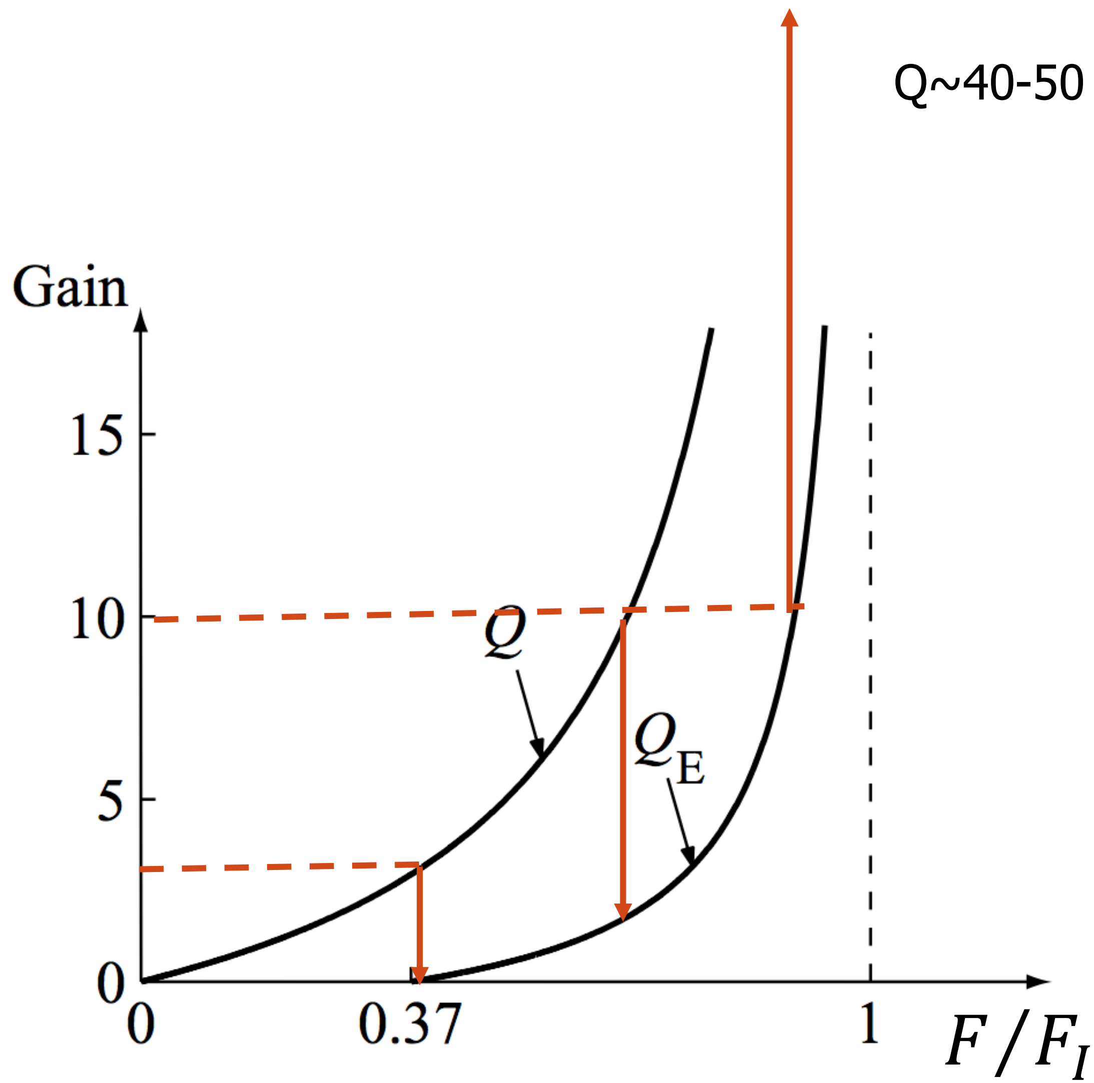
聚变等离子体的功率平衡→聚变电站功率平衡

- 物理增益因子Q
- 工程增益因子Q_E

$$Q = \frac{5F}{F_I - F}$$

$$Q_E \approx \frac{2F - 0.72F_I}{F_I - F}$$

$$Q_E \approx \frac{Q}{4} - 0.72$$



作业（网络学堂）

- 1. 不同的热电效率对应不同的劳逊判据，请分别画出$\eta=$ 0.3和0. 5时$n\tau_E$对T的曲线，并在同一个图中画出点火条件，说明点火条件相当于η等于多少时的劳逊判据。
- 2. 对于不含催化反应的D-D聚变和完全催化的D-D聚变反应，分别计算其点火条件。
- 3. 假定alpha粒子功率只有一小部分能量份额k沉积在等离子体中，其余的1 - k 流向第一壁并转化为热量。不计氚增值产生的热量，在典型效率： $\eta=0.4$，$\eta_e=0.7$，$\eta_a=0.7$ 下，推导工程增益因子 Q_E与 k及等离子体参数$nT\tau_E$的解析关系式，并分别画出k=0，0. 5，1时Q_E对$nT\tau_E$的曲线。