微积分 A (2)

姚家燕

第 22 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

第 22 讲

综合练习 (续)

例 7. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为有界闭区域, $u\in\mathscr{C}(D)$ 在 D 的内部二阶连续可导且 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 求证:

(1) $\forall(x_0,y_0)\in\mathrm{Int}\,D$, 均有

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D}\Big(u\frac{\partial(\log r)}{\partial n}-(\log r)\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\,\mathrm{d}\ell,$$

其中 $\vec{n}$ 为 ∂D 在点 $(x,y)\in\partial D$ 处的单位外法向量, 而 $\vec{r}=(x-x_0,y-y_0)^T$.

(2) $\forall(x_0,y_0)\in\mathrm{Int}\,D$, 均有 $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi R}\oint_L u(x,y)\,\mathrm{d}\ell$, 其中 L 是以 (x_0,y_0) 为中心、以 R 半径的任意圆周使得它所围成的圆盘包含在 D 中.

证明: 固定 $(x_0, y_0) \in \mathrm{Int}\, D$. 设 $R > 0$ 使以 (x_0, y_0) 为中心、以 R 半径的圆盘 D_R 包含于 D, 同样记 $\vec{n}^0$ 为 ∂D_R 的单位外法向量. 令 $\Omega = D \setminus \mathrm{Int}\, D_R$. $\forall (x, y) \in \Omega$, 我们有 $\vec{\nabla}(\log r) = \left(\frac{x - x_0}{r^2}, \frac{y - y_0}{r^2}\right)^T$, 则

$$\begin{aligned}
\Delta(\log r) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x - x_0}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y - y_0}{r^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2(x - x_0)^2}{r^4}\right) + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2(y - y_0)^2}{r^4}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

于是由 Green 公式立刻可知

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\partial\Omega}\Big(u\frac{\partial(\log r)}{\partial n}-(\log r)\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\,\mathrm{d}\ell=\oint_{\partial\Omega}\Big(u\vec{\nabla}(\log r)-(\log r)\vec{\nabla}u\Big)\cdot\vec{n}^0\,\mathrm{d}\ell\\
&=\oint_{\partial\Omega}\Big(u\frac{\partial(\log r)}{\partial x}-(\log r)\frac{\partial u}{\partial x},u\frac{\partial(\log r)}{\partial y}-(\log r)\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^T\cdot\vec{n}^0\,\mathrm{d}\ell\\
&=\iint\limits_{\Omega}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big(u\frac{\partial(\log r)}{\partial x}-(\log r)\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(u\frac{\partial(\log r)}{\partial y}-(\log r)\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big)\,\mathrm{d}\sigma\\
&=\iint\limits_{\Omega}\Big(u\frac{\partial^2(\log r)}{\partial x^2}-(\log r)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\frac{\partial^2(\log r)}{\partial y^2}-(\log r)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)\,\mathrm{d}\sigma\\
&=\iint\limits_{\Omega}\Big(u\Delta(\log r)-(\log r)\Delta u\Big)\,\mathrm{d}\sigma\\
&=0.
\end{aligned}
$$

由此以及 Green 公式立刻可得

$$
\begin{aligned}
& \oint_{\partial D} \left(u\frac{\partial(\log r)}{\partial n} - (\log r)\frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}\ell \\
= & \oint_{\partial D_R} \left(u\frac{\partial(\log r)}{\partial n} - (\log r)\frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}\ell \\
= & \oint_{\partial D_R} \left(\frac{u}{r} - (\log r)\frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}\ell = \oint_{\partial D_R} \left(\frac{u}{R} - (\log R)\frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}\ell \\
= & \frac{1}{R}\oint_{\partial D_R} u\,\mathrm{d}\ell - (\log R)\oint_{\partial D_R} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}^0\,\mathrm{d}\ell \\
= & \frac{1}{R}\oint_{\partial D_R} u\,\mathrm{d}\ell - (\log R)\iint\limits_{D_R} \Delta u\,\mathrm{d}\sigma \\
= & \frac{1}{R}\oint_{\partial D_R} u\,\mathrm{d}\ell = \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}
$$

由积分中值定理可知 $\exists \varphi_0 \in [0, 2\pi]$ 使得

$$\oint_{\partial D} \left(u \frac{\partial (\log r)}{\partial n} - (\log r) \frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}\ell = 2\pi u(x_0 + R\cos\varphi_0, y_0 + R\sin\varphi_0).$$

让 $R \to 0^+$ 并由 u 的连续性可知

$$\oint_{\partial D} \left(u \frac{\partial (\log r)}{\partial n} - (\log r) \frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}\ell = 2\pi u(x_0, y_0).$$

由前面讨论可得 $u(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2\pi R} \oint_L u(x, y)\, \mathrm{d}\ell,$

其中 L 是以 (x_0, y_0) 为中心、以 R 半径的任意圆周使其所围圆盘包含于 D.

例 8. 设 $P, Q \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2)$ 使得对于 $\mathbb{R}^2$ 上的任意上半圆周 Γ, 我们有 $\int_{\Gamma^+} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$. 求证: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 均有 $P(x,y) = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$.

证明: 固定 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. $\forall r > 0$, 将以 (x_0, y_0) 为中心、以 r 为半径的上半圆记作 D_r. 那么由题设条件以及 Green 公式可知

$$\begin{aligned}\int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x &= \oint_{\partial D_r^+} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D_r} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

则由积分中值定理知, 存在 $x_r \in (x_0 - r, x_0 + r)$ 以及 $(x(r), y(r)) \in D_r$ 使得我们有

$$2rP(x_r, y_0) = \frac{1}{2}\pi r^2 \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x(r), y(r)) - \frac{\partial P}{\partial y}(x(r), y(r))\Big),$$

由此我们立刻可得

$$P(x_r, y_0) = \frac{1}{4}\pi r \big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x(r), y(r)) - \frac{\partial P}{\partial y}(x(r), y(r))\big).$$

让 $r \to 0^+$ 并利用连续性得 $P(x_0, y_0) = 0$. 再由点 (x_0, y_0) 的任意性知 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $P(x, y) = 0$.

注意到 $\forall r > 0$, 我们均有

$$2rP(x_r, y_0) = \frac{1}{2}\pi r^2\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x(r), y(r)) - \frac{\partial P}{\partial y}(x(r), y(r))\Big),$$

由此立刻可得 $\frac{\partial Q}{\partial x}(x(r), y(r)) = 0$. 再让 $r \to 0^+$ 并利用函数连续性得 $\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. 最后再由点 (x_0, y_0) 的任意性可知 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 均有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0.$$

例 9. 求整数 $k \geqslant 1$ 使得对于上半平面内的任意分段光滑闭曲线 L, 均有 $\oint_{L^+} \frac{x^k\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0$.

解: 由于上半平面为单连通区域, 于是由第二类平面曲线积分与路径无关的充分必要条件可知, 在上半平面内有 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^k}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$, 也即

$$\frac{kx^{k-1}(x^2+y^2) - 2x^{k+1}}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

令 $x = y = 1$, 则 $k = 1$. 此时题设条件的确成立.

例 10. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为区域, $\Omega_0\subset\Omega$ 为有界闭域, $u,v\in\mathscr{C}^{(2)}(\Omega)$, 并且 $\vec{n}^0$ 为 $\partial\Omega_0$ 的单位外法向量, $\frac{\partial u}{\partial n},\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别为 u,v 沿 $\vec{n}^0$ 的方向导数. 求证:

(1) $$\oint\!\!\!\!\oint_{\partial\Omega_0}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint_{\Omega_0}(\Delta u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

(2) $$\oint\!\!\!\!\oint_{\partial\Omega_0}v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint_{\Omega_0}\Big(v(\Delta u)+(\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v)\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

(3) $$\oint\!\!\!\!\oint_{\partial\Omega_0}\Big(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\,\mathrm{d}\sigma=\iiint_{\Omega_0}\Big(u(\Delta v)-v(\Delta u)\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

其中 $\Delta u=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}u)=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$.

证明: (1) 由 Gauss 公式可得

$$\oiint\limits_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = \oiint\limits_{\partial\Omega_0} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}^0\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\Omega_0} \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega_0} (\Delta u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(2) 由 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned}
&\oiint\limits_{\partial\Omega_0} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = \oiint\limits_{\partial\Omega_0} \left(v\frac{\partial u}{\partial x}, v\frac{\partial u}{\partial y}, v\frac{\partial u}{\partial z}\right)^T \cdot \vec{n}^0\,\mathrm{d}\sigma \\
=& \iiint\limits_{\Omega_0} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
=& \iiint\limits_{\Omega_0} \left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

由此立刻可知所证成立.

(3) 由 (2) 可知

$$\oiint\limits_{\partial\Omega_0} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\Omega_0} \left(v(\Delta u) + (\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\oiint\limits_{\partial D_0} u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\Omega_0} \left(u(\Delta v) + (\vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} u)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

然后再用第二式减去第一式立刻可得

$$\oiint\limits_{\partial\Omega_0}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\Omega_0}\left(u(\Delta v) - v(\Delta u)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

例 11. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为区域, $\Omega_0 \subset \Omega$ 为有界闭区域, 而 $\vec{n}^0$ 为 $\partial\Omega_0$ 的单位外法向量, $u \in \mathscr{C}^{(2)}(\Omega)$ 使得 $\Delta u \equiv 0$, 而 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为 u 沿 $\vec{n}^0$ 的方向导数. 求证:

(1) $\displaystyle\oiint_{\partial\Omega_0} u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega_0} \Big(\big(\frac{\partial u}{\partial x}\big)^2 + \big(\frac{\partial u}{\partial y}\big)^2 + \big(\frac{\partial u}{\partial z}\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$

(2) 若 $u\Big|_{\partial\Omega_0} = 0$, 则 u 在 Ω_0 上恒为零.

其中 $\Delta u = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

注: 若 $\Delta u \equiv 0$, 则称 u 为 Ω 上的调和函数.

证明: (1) 由 Gauss 公式可得

$$\iint\limits_{\partial\Omega_0} u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\partial\Omega_0} \left(u\frac{\partial u}{\partial x}, u\frac{\partial u}{\partial y}, u\frac{\partial u}{\partial z}\right)^T \cdot \vec{n}^0\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_0} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega_0}\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_0}\left(u(\Delta u) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

由此立刻可得所证成立.

(2) 若 $u\Big|_{\partial\Omega_0}=0$, 则由 (1) 立刻可得

$$\iiint\limits_{\Omega_0}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\partial\Omega_0}u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma=0,$$

再由非负连续函数的积分的严格保号性可得知, 在 Ω_0 上, 我们有 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=0$, 于是 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$, 进而由 Lagrange 中值定理知 u 在 Ω_0 上为常值函数, 从而再由 $u\Big|_{\partial\Omega_0}=0$ 可知 u 在 Ω_0 上恒为零.

例 12. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为开集, 而 $u \in \mathscr{C}^{(2)}(\Omega)$ 使得 $\Delta u = 0$. $\forall \vec{r}_0 \in \Omega$, 求证:

(1) $$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{\partial D} \left(\frac{\cos\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}^0 \rangle}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^2} u + \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} \frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}\sigma,$$

其中 $D \subset \Omega$ 为有界闭区域使得 $\vec{r}_0 \in \mathrm{Int} D$ 且 ∂D 为分片光滑曲面, $\vec{r} \in \partial D$, 而 $\vec{n}^0$ 为 ∂D 的单位外法向量, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为 u 沿 $\vec{n}^0$ 的方向导数.

(2) $$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint\limits_{\partial D_R} u(x, y, z) \mathrm{d}\sigma,$$ 其中 $D_R \subset \mathrm{Int}\, \Omega$ 是以 $\vec{r}_0$ 为中心、以 R 为半径的任意闭球.

证明: (1) $\forall (x,y,z)\in\Omega$, 记 $\vec{r}=(x,y,z)^T$. 因 $\vec{r}_0$ 为 D 的内点, 因此 $\exists \delta>0$ 使得有 $B(\vec{r}_0,\delta)\subset D$. $\forall \varepsilon\in(0,\delta)$, 定义 $\Omega_0=D\setminus B(\vec{r}_0,\varepsilon)$, 则 u, $\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}$ 均为 Ω_0 上的调和函数, 并且我们还有

$$\vec{\nabla}\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}=-\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^3}.$$

$\partial B(\vec{r}_0,\varepsilon)$ 的单位外法向量也记为 $\vec{n}^0$. $\forall \vec{r}\in\partial\Omega_0$,

$$\begin{aligned}\frac{\cos\langle\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{n}^0\rangle}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^2}&=\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^3}\cdot\vec{n}^0\\ =\ &-\Big(\vec{\nabla}\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\Big)\cdot\vec{n}^0=-\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\Big).\end{aligned}$$

由此并借助 Gauss 公式立刻可得

$$
\begin{aligned}
&\oiint\limits_{\partial\Omega_0}\Big(\frac{\cos\langle\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{n}^0\rangle}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^2}u+\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\mathrm{d}\sigma\\
=&\oiint\limits_{\partial\Omega_0}\Big(-u\frac{\partial}{\partial n}\big(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\big)+\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\mathrm{d}\sigma\\
=&\iiint\limits_{\Omega_0}\Big(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\Delta u-u\Delta\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=&\,0.
\end{aligned}
$$

注意到 $\partial\Omega_0^+ = \partial D^+ \cup \partial B(\vec{r}_0, \varepsilon)^-$, 因此我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\oiint_{\partial D}\Big(\frac{\cos\langle\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{n}^0\rangle}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^2}u+\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\mathrm{d}\sigma \\
=\ &\frac{1}{4\pi}\oiint_{\partial B(\vec{r}_0,\varepsilon)}\Big(\frac{\cos\langle\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{n}^0\rangle}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^2}u+\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\mathrm{d}\sigma \\
=\ &\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\pi}\Big(\frac{u}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\Big)(\vec{r}_0+\varepsilon\vec{X})\cdot\varepsilon^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\Big)\mathrm{d}\varphi \\
=\ &\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\pi}\Big(u(\vec{r}_0+\varepsilon\vec{X})+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}(\vec{r}_0+\varepsilon\vec{X})\Big)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\Big)\mathrm{d}\varphi,
\end{aligned}
$$

其中 $\vec{X} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)^T$.

让 $\varepsilon \to 0^+$, 并利用极限与积分可交换性可得

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{\partial D} \left(\frac{\cos\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}^0 \rangle}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^2} u + \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} \frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}\sigma \\
= \quad & \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(u(\vec{r}_0 + \varepsilon \vec{X}) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} (\vec{r}_0 + \varepsilon \vec{X}) \right) \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi \\
= \quad & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} u(\vec{r}_0) \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi \\
= \quad & u(\vec{r}_0).
\end{aligned}
$$

故所证结论成立.

(2) 由 (1) 以及 Gauss 公式立刻可得

$$
\begin{aligned}
u(\vec{r}_0) &= \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\partial D_R}\left(\frac{\cos\langle\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{n}^0\rangle}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^2}u+\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\partial D_R}\left(\frac{1}{R^2}u+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{4\pi R^2}\oiint\limits_{\partial D_R}u\,\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{4\pi R}\oiint\limits_{\partial D_R}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{4\pi R^2}\oiint\limits_{\partial D_R}u\,\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{4\pi R}\iiint\limits_{D_R}\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4\pi R^2}\oiint\limits_{\partial D_R}u\,\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$

定义. 称 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为面单连通集, 若 Ω 中的任意闭曲面所围成的区域也包含于 Ω 中.

例. 单位球为面单连通集, 而去心球则不是.

例 13. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为面单连通区域, $u \in \mathscr{C}^{(2)}(\Omega)$. 则 $\Delta u \equiv 0$ 当且仅当对于 Ω 内的任意有界定向光滑封闭曲面 S, 均有 $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = 0$, 其中 $\vec{n}^0$ 为闭曲面 S 朝外的单位法向量, 而 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为函数 u 沿单位外法向量 $\vec{n}^0$ 的方向导数.

证明: 必要性. 设 $\Delta u \equiv 0$. 对于 Ω 内任意定向有界光滑闭曲面 S, 将 S 所围成的区域记作 Ω_0, 由 Gauss 公式得 $\displaystyle\oiint\limits_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\Omega_0} \Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$.

充分性. 设 $X_0 \in \Omega$. 由于 Ω 为开集, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $B(X_0, \delta) \subset \Omega$. $\forall \varepsilon \in (0, \delta)$, 由题设可知

$$\iiint\limits_{\bar{B}(X_0,\varepsilon)} \Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\partial\bar{B}(X_0,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

由积分中值定理可知, $\exists X_0(\varepsilon) \in \bar{B}(X_0, \varepsilon)$ 使得 $\Delta u(X_0(\varepsilon)) = 0$, 再由函数连续性得 $\Delta u(X_0) = 0$. 最后由 X_0 的任意性可知所证结论成立.

例 14. 计算 $\oiint\limits_{S^+} x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

其中 S^+ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

解: 设 S 所围椭球体为 Ω, 则由 Gauss 公式得

$$
\begin{aligned}
&\oiint\limits_{S^+} x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
= \ &\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}(x,y,z)^T\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
= \ &3\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3|\Omega| = 4\pi abc.
\end{aligned}
$$

例 15. 设 $L(x,y,z)$ 为原点 $O(0,0,0)$ 到椭球面 $S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $P(x,y,z)$ 的切平面的距离, 计算 $\oiint\limits_S L(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$.

解: 方法 1. 由题设可知椭球面 S 在点 P 处的法向量为 $\vec{n}=(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})^T$, 则我们有

$$L(x,y,z)=(x,y,z)^T\cdot\frac{\vec{n}}{\|n\|}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

记 S_1 为椭球面 S 的上半部分. 由对称性可得

$$I=\oiint\limits_S L(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{S_1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

曲面 S_1 的方程为 $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\ (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1)$,
于是曲面 S_1 的面积微元为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma &= \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{1+\left(\frac{-\frac{cx}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\right)^2+\left(\frac{-\frac{cy}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})+\frac{c^2x^2}{a^4}+\frac{c^2y^2}{b^4}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{c\sqrt{\frac{z^2}{c^4}+\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

由此我们立刻可得

$$
\begin{aligned}
I &= 2\iint_{S_1} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} = 2\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} \frac{c\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \\
&\overset{\substack{x=a\rho\cos\varphi \\ y=b\rho\sin\varphi}}{=} 2\iint_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant 1 \\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \frac{c(ab\rho)\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}} \\
&= 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{c(ab\rho)\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\pi abc\left(-\sqrt{1-\rho^2}\right)\Big|_0^1 \\
&= 4\pi abc.
\end{aligned}
$$

方法 2. 设椭球面 S 在点 P 处的单位外法向量为 $\vec{n}^0$, 则 $L(x,y,z)=(x,y,z)^T\cdot\vec{n}^0$. 将 S 所围的椭球体记作 Ω, 则由 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned} I &= \oiint_S L(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = \oiint_S (x,y,z)^T\cdot\vec{n}^0\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \iiint_\Omega \mathrm{div}(x,y,z)^T\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 3\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 3|\Omega| = 4\pi abc. \end{aligned}$$

例 16. 求连续可导函数 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 使得对 $\{(x,y,z)\,|\,x>0\}$ 中任意定向光滑闭曲面 S, 均有

$$\oiint_{S^+} xf(x)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - xyf(x)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - e^{2x}z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 0.$$

解: 取 $x_0,y_0,z_0\in\mathbb{R}$ $(x_0>0)$. $\forall\varepsilon\in(0,x_0)$, 令

$$\Omega_\varepsilon = \bar{B}\big((x_0,y_0,z_0);\varepsilon\big),$$

并取其边界 $\partial\Omega_\varepsilon$ 的外侧为正侧.

由题设以及 Gauss 公式可知

$$
\begin{aligned}
0 &= \oiint_{\partial\Omega_\varepsilon^+} xf(x)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - xyf(x)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - e^{2x}z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= \iiint_{\Omega_\varepsilon} \left(f(x)+xf'(x)-xf(x)-e^{2x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint_{\Omega_\varepsilon} \left(xf'(x)+(1-x)f(x)-e^{2x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

由于被积函数连续, 于是由积分中值定理可知, $\exists X(\varepsilon)=(x(\varepsilon),y(\varepsilon),z(\varepsilon))\in\Omega_\varepsilon$ 使得我们有

$$
0=\left(x(\varepsilon)f'(x(\varepsilon))+(1-x(\varepsilon))f(x(\varepsilon))-e^{2x(\varepsilon)}\right)|\Omega_\varepsilon|.
$$

由此立刻可得

$$x(\varepsilon)f'(x(\varepsilon))+(1-x(\varepsilon))f(x(\varepsilon))-e^{2x(\varepsilon)}=0.$$

让 $\varepsilon\to 0^+$, 并由 f 的连续可导性可知

$$x_0f'(x_0)+(1-x_0)f(x_0)-e^{2x_0}=0.$$

再由 x_0 的任意性可知 $\forall x>0$, 我们有

$$f'(x)+\frac{1-x}{x}f(x)-\frac{1}{x}e^{2x}=0.$$

该常微分方程的通解为

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-\int \frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}\left(C+\int \frac{1}{x}e^{2x}e^{\int \frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= e^{x-\log x}\left(C+\int \frac{1}{x}e^{2x}e^{\log x-x}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{e^x}{x}(C+e^x).
\end{aligned}
$$

再由 f 在点 $x=0$ 处的连续性可得

$$
0=\lim_{x\to 0^+} xf(x)=C+1,
$$

故 $C=-1$, 进而 $f(0)=1$. 则所求函数 f 满足

$$
f(x)=\begin{cases} \frac{e^x}{x}(e^x-1), & 若\ x>0, \\ 1, & 若\ x=0. \end{cases}
$$

例 17. 假设 $f:[-1,1]\to(0,+\infty)$ 为连续可导, 而 D 是原点以为圆心的单位圆盘, 边界 ∂D 的正向为逆时针方向. 求证:

(1) $\displaystyle\oint_{\partial D^+} xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\oint_{\partial D^+}-yf(x)\,\mathrm{d}x+\frac{x}{f(y)}\,\mathrm{d}y.$

(2) $\displaystyle\oint_{\partial D^+} xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x\geqslant 2\pi.$

注: 若不用 Green 公式, 这里只需假设 f 连续, 再由圆周的参数方程以及变量替换可得结论.

证明: (1) 由 Green 公式可知

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D^+} x f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \iint_D \left(\frac{\partial(xf(y))}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{f(x)}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left(f(y) + \frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\
\oint_{\partial D^+} -y f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{x}{f(y)}\,\mathrm{d}y &= \iint_D \left(\frac{\partial(yf(x))}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{f(y)}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left(f(x) + \frac{1}{f(y)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

由对称性立刻可知所证结论成立.

(2) 因 f 非负, 由 Green 公式可知

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D^+} xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \iint\limits_D \left(\frac{\partial(xf(y))}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{f(x)}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint\limits_D \left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint\limits_D f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint\limits_D f(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint\limits_D \left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\geqslant \iint\limits_D 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2|D|=2\pi.\end{aligned}$$

例 18. 设 $\varphi \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ 使得对于环绕原点的任意分段光滑平面简单闭曲线 L, 第二类曲线积分 $\oint_{L^+} \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{x^2+y^4}$ 不依赖路径 L 的选取.

(1) 求证: 对于右半平面 $x > 0$ 内的任意的分段光滑简单闭曲线 C, 均有

$$\oint_{C^+} \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{x^2+y^4} = 0.$$

(2) 求函数 φ.

解: (1) 在曲线 C 上任意取两个不同的点 A, B, 随后作连接 A, B 且环绕原点的分段光滑的简单曲线 L_1. 记 L_2 是从点 B 出发沿 C 逆时针方向到点 A 的部分, 而 L_3 则是从点 B 出发沿 C 顺时针方向到点 A 的部分. 将 A, B 适当编号, 我们可假设从点 A 出发沿 L_1 到点 B 为逆时针方向, 而 $L_1 \cup L_2$ 与 $L_1 \cup L_3$ 均为环绕原点并且方向为逆时针方向的简单闭曲线.

于是由题设可知

$$\oint_{L_1 \cup L_2} \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{x^2+y^4} = \oint_{L_1 \cup L_3} \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{x^2+y^4},$$

由此我们立刻可以导出

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{x^2+y^4} = \oint_{L_2} \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{x^2+y^4} - \oint_{L_3} \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{x^2+y^4} = 0.$$

(2) 因右半平面 $x > 0$ 为单连通区域, 由 (1) 可知在此区域内, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\varphi(y)}{x^2+y^4}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{2xy}{x^2+y^4}\Big),$$

由此我们立刻可得

$$\frac{\varphi'(y)(x^2+y^4)-\varphi(y)\cdot(4y^3)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2y(x^2+y^4)-2xy\cdot(2x)}{(x^2+y^4)^2},$$

进而得 $\varphi'(y)(x^2+y^4)-4y^3\varphi(y) = 2y^5-2x^2y,$

于是我们有

$$x^2\big(\varphi'(y)+2y\big)=2y^5+4y^3\varphi(y)-y^4\varphi'(y),$$

由此可知 $\varphi'(y)+2y=0$, 否则让 $x\to+\infty$ 立刻可得矛盾, 进而得 $2y^5+4y^3\varphi(y)-y^4\varphi'(y)=0$. 将 $\varphi'(y)=-2y$ 带入上式得 $y^3\varphi(y)=-y^5$. 于是当 $y\neq 0$ 时, 我们有 $\varphi(y)=-y^2$. 又 $\varphi\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$, 则 $\forall y\in\mathbb{R}$, 均有 $\varphi(y)=-y^2$. 可验证该函数的确满足题设条件.

例 19. 寻求函数 $f \in \mathscr{C}^{(2)}(\mathbb{R})$ 使得 $f'(0)=0$, 而 $\big(f(x)+y(x-f(x))\big)\,\mathrm{d}x+f'(x)\,\mathrm{d}y$ 为全微分且该全微分沿从 $A(0,0)$ 到 $B(\frac{\pi}{2},\pi)$ 的任意的分段光滑曲线 L 的积分等于 $\frac{\pi^2}{8}$.

解: 由题设可知 $\frac{\partial}{\partial y}\big(f(x)+y(x-f(x))\big)=\frac{\partial f'(x)}{\partial x}$, 故 $f''(x)+f(x)=x$. 方程 $f''(x)+f(x)=0$ 的通解为 $f_0(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$, 其中 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ 为任意的常数.

又非齐次常微分方程 $f''(x)+f(x)=x$ 有特解形如 $f_1(x)=C+Dx$, 带入方程得 $C+Dx=x$, 从而我们有 $C=0$, $D=1$, 进而可得 $f_1(x)=x$. 于是非齐次方程 $f''(x)+f(x)=x$ 的通解为

$$f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x.$$

注意到 $0=f'(0)=c_2+1$, 故 $c_2=-1$, 从而

$$f(x)=c_1\cos x-\sin x+x.$$

对从 A 到 B 的任意分段光滑曲线 L, 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{8} &= \int_{L(A)}^{(B)} \big(f(x) + y(x - f(x))\big)\,\mathrm{d}x + f'(x)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{L(A)}^{(B)} \big(c_1\cos x - \sin x + x + y(x - c_1\cos x + \sin x - x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + (-c_1\sin x - \cos x + 1)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{L(A)}^{(B)} \big(c_1\cos x - \sin x + x + y(-c_1\cos x + \sin x\big)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + (-c_1\sin x - \cos x + 1)\,\mathrm{d}y \\
&= \left(c_1\sin x + \cos x + \frac{1}{2}x^2 + (-c_1\sin x - \cos x + 1)y\right)\Bigg|_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},\pi)} \\
&= \left(c_1 + \frac{1}{8}\pi^2 + (-c_1 + 1)\pi\right) - 1 = c_1(1-\pi) + (\pi - 1) + \frac{1}{8}\pi^2,
\end{aligned}$$

故 $c_1 = 1$, 从而我们有 $f(x) = \cos x - \sin x + x$.

例 20. $\forall t>0$, 令 $D_t=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2\leqslant t^2\right\}$.

假设 $f\in\mathscr{C}(D_1)$ 在 D_1 的内部连续可导且满足

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}f$, $f(0,0)=1$. 计算

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial n}\,\mathrm{d}\ell,$$

其中 $\vec{n}^0$ 为 ∂D_t 的向外的单位法向量, $\frac{\partial f}{\partial n}$ 为 f

沿 $\vec{n}^0$ 的方向导数.

解: 由于 $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \vec{n}^0$, 于是由 Green 公式以及题设条件可知, $\forall t \in (0,1)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial D_t} \frac{\partial f}{\partial n}\,\mathrm{d}\ell &= \oint_{\partial D_t} \nabla f \cdot \vec{n}^0\,\mathrm{d}\ell \\
&= \oint_{\partial D_t} \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big)^T \cdot \vec{n}^0\,\mathrm{d}\ell \\
&= \iint\limits_{D_t} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D_t} \frac{1}{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\overset{\substack{x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi}}{=} \int_0^t \Big(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\varphi\Big)\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}
$$

于是由 L'Hospital 法则, 函数 f 的连续性以及极限与积分次序的可交换性知

$$\begin{aligned}
& \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-\cos t} \oint_{\partial D_t} \frac{\partial f}{\partial n}\, \mathrm{d}\ell \\
= & \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-\cos t} \int_0^t \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\rho \\
= & \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sin t} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) t\, \mathrm{d}\varphi \\
= & \lim_{t\to 0^+} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} f(t\cos\varphi, t\sin\varphi)\, \mathrm{d}\varphi \\
= & \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} f(0,0)\, \mathrm{d}\varphi = \pi.
\end{aligned}$$

例 21. 设曲线 L 为函数 $y=e^{x^2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的图像, 其起点为 $(0,1)$, 终点为 $(1,e)$. 求第二型曲线积分 $\int_{L^+} x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y$.

解: 由题立刻可知

$$\begin{aligned}\int_{L^+} x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y &= \int_{L^+}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\big(x^2+y^2\big)\\ &= \frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big|_{(0,1)}^{(1,e)}\\ &= \frac{1}{2}e^2.\end{aligned}$$

例 22. 求第二型曲线积分 $I=\int_{\Gamma^+} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$, 其中 Γ^+ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1\ (z\geqslant 0)$ 与柱面 $x^2+y^2=x$ 的交线, 逆着正 z 轴朝下看, 定向曲线 Γ^+ 的正向是逆时针方向.

解: 方法 1. 设 Γ 在上半球面上所围成的较小部分为 S, 其正向朝外. 由 Stokes 公式可知

$$I=\iint_{S^+} 2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

曲面 S 在 xy 平面上的投影是半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆盘 $x^2+y^2\leqslant x$, 其面积为 $\frac{\pi}{4}$, 故 $I=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

方法 2. 定向曲线 Γ^+ 的参数方程为

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin t, \\ z(t) = \sqrt{1 - x(t)}, \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma^+} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t\big) \cdot \frac{1}{2}\cos t + \big(\frac{1}{2}\sin t\big)^2\Big)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos t\Big)\mathrm{d}t \\ &= \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sin t\Big)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\pi. \end{aligned}$$

例 23. 计算第二型曲面积分

$$I = \iint_{S^+} x^2 y \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - xy^2 \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + 3z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

其中定向曲面 S^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 在平面 $z = 1$ 下方的部分, 正法向向下.

解: 记 S_1^+ 为平面 $z = 1$ 上闭圆盘 $x^2 + y^2 \leqslant 1$, 其正法向向上. 记 Ω 为 S 和 S_1 所围成的下半球体. 则由 Gauss 公式可知

$$\begin{aligned} & \iint_{S^+ \cup S_1^+} x^2 y \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - xy^2 \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + 3z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ = & \iiint_{\Omega} (2xy - 2xy + 3) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3|\Omega| = 2\pi. \end{aligned}$$

再注意到我们有

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{S_1^+} x^2y\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - xy^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + 3z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
=\ &\iint\limits_{S_1^+} 3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} 3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=\ &3\pi.
\end{aligned}
$$

由此立刻可得

$$I = 2\pi - 3\pi = -\pi.$$

例 24. 设 $f \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R})$, 曲面 S^+ 为锥面

$$(y-3)^2+(z-3)^2-x^2=0\ (x>0)$$

与两个球面

$$(y-3)^2+(z-3)^2+x^2=1,$$

$$(y-3)^2+(z-3)^2+x^2=4$$

所围成的立体表面的外侧. 计算

$$I = \iint\limits_{S^+} x^3\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+(y-3)^3\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$
$$+\left(\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+(z-3)^3\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

解: 设 S 所围的立体为 Ω, 则由 Gauss 公式得

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{\Omega} \left(3x^2 + \left(\frac{1}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right) + 3(y-3)^2\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right) + 3(z-3)^2\right)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 3\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 3\int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} r^2(r^2\sin\theta)\right) \mathrm{d}\varphi\right) \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= 6\pi\left(\int_1^2 r^4\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right) \\ &= 6\pi\cdot\frac{31}{5}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{93}{5}(2-\sqrt{2})\pi, \end{aligned}$$

其中我们对空间立体 Ω 采用了如下球坐标系:

$$\begin{cases} y = 3 + r\sin\theta\cos\varphi, \\ z = 3 + r\sin\theta\sin\varphi, \\ x = r\cos\theta, \end{cases}$$

其中 $1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$.

例 25. 试求 $f \in \mathscr{C}^{(2)}(\mathbb{R})$ 使得对于 $\mathbb{R}^3$ 中的任意定向光滑闭曲面 S^+, 均有

$$\oiint_{S^+} f'(x)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + yf(x)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - 2ze^x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0.$$

解: 固定 $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. $\forall r > 0$, 将以 P_0 为中心以 r 为半径的闭球记为 D_r. 则我们立刻由 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned} 0 &= \oiint_{\partial D_r^+} f'(x)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + yf(x)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - 2ze^x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \iiint_{D_r} \big(f''(x) + f(x) - 2e^x\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

由于 $f \in \mathscr{C}^{(2)}(\mathbb{R})$, 因此被积函数为连续, 从而由积分中值定理可知 $\exists (x_r, y_r, z_r) \in D_r$ 使得

$$0 = (f''(x_r) + f(x_r) - 2e^{x_r})|D_r|,$$

从而 $f''(x_r) + f(x_r) - 2e^{2x_r} = 0$. 又由夹逼原理可知 $\lim\limits_{r \to 0^+} x_r = x_0$, 于是由连续性可得

$$f''(x_0) + f(x_0) - 2e^{x_0} = 0.$$

再由 x_0 的任意性可知, $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有

$$f''(x) + f(x) - 2e^x = 0.$$

该常微分方程的特征方程为

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

故特征根为 $\lambda = \pm i$. 又 $y = e^x$ 为非齐次方程的一个特解, 从而我们有

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 可以验证该函数的确满足题设条件.

例 26. 求 $\oint_{L^+} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$, 其中曲线 L 为球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限中与坐标平面相交的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ 连接而成的闭曲线.

解: 方法 1. 由于圆弧 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ 在每点的切向量均垂直于该点与原点的连线, 则

$$\oint_{L^+} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{a^2}\oint_{L^+} (x, y, z)^T \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0.$$

方法 2. 由全微分的性质立刻可得

$$\oint_{L^+} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2a^2}\oint_{L^+} \mathrm{d}(x^2+y^2+z^2) = 0.$$

例 27. 假设 D 为单位闭圆盘, 而 $f \in \mathscr{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2)$ 使得 $\forall (x,y) \in D$, 我们均有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

求证:

$$\iint\limits_D \Big(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2e}.$$

证明: $\forall r \in [0,1]$, 定义

$$D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant r\}.$$

由极坐标变换与 Green 公式可得

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_D \Big(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=\ &\int_0^1\Big(\int_0^{2\pi}\Big(r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\\
&+r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\Big)r\,\mathrm{d}\theta\Big)\mathrm{d}r\\
=\ &\int_0^1 r\Big(\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}(r\sin\theta)\\
&-\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}(r\cos\theta)\Big)\mathrm{d}r\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 r\Big(\int_{\partial D_r^+} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 r\Big(\iint\limits_{D_r} \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 r\Big(\iint\limits_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 r\Big(\int_0^r \big(\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\varphi\big)\mathrm{d}\rho\Big)\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\int_0^1 r\Big(\int_0^r e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\Big)\mathrm{d}r \\
&= \pi\int_0^1 r(1-e^{-r^2})\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2}\Big(r^2+e^{-r^2}\Big)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2e}.
\end{aligned}
$$

例 28. 求证: $y\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$ 不能为全微分.

证明: 由于 $\mathbb{R}^2$ 为单连通区域, 则微分形式

$$y\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$$

为全微分当且仅当

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial x^2}{\partial x},$$

也即 $1 = 2x$. 矛盾! 故所证结论成立.

例 29. 设 $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为可微函数使得

$$u(x)\,\mathrm{d}y + v(y)\,\mathrm{d}x = 0$$

为全微分方程, 求该方程的解.

解: 由于题设中的方程为全微分方程, 则我们有 $u'(x) = v'(y)$. 由此立刻可得

$$u'(x) = v'(0) = u'(0) = v'(y).$$

令 $c = u'(0)$, 则 $u(x) = cx + a$, 且 $v(y) = cy + b$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 为任意常数.

于是原常微分方程变为

$$\begin{aligned}
0 &= (cx+a)\,\mathrm{d}y+(cy+b)\,\mathrm{d}x \\
&= c(x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x)+\mathrm{d}(ay+bx) \\
&= \mathrm{d}(cxy+ay+bx),
\end{aligned}$$

从而原常微分方程的解为

$$cxy+ay+bx=C,$$

其中 $a,b,c,C\in\mathbb{R}$ 为任意常数.

谢谢大家!