微积分 A (2)

姚家燕

第 9 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

重要通知

- 希望大家认真温习第 1 章!
- 希望大家能重温上学期所学的广义积分!

第 8 讲回顾: 空间曲线及切线和法平面

(1) 空间曲线的参数表示法:

$$\Gamma: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \\ z = z(t), \end{cases}$$

若上述函数在点 $t = t_0$ 处可微, 则称曲线 Γ 在相应点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微, 相应切线方程为

$$\begin{cases} x - x_0 = x'(t_0)(t - t_0), \\ y - y_0 = y'(t_0)(t - t_0), \\ z - z_0 = z'(t_0)(t - t_0). \end{cases}$$

该切线也可表述成

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

这里要假设 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 不为零向量.

我们将过点 P_0 且与上述切线垂直的平面称为 Γ 在点 P_0 处的法平面, 其方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

(2) 空间曲线的隐函数表示法:

$$\Gamma: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

设 F_1, F_2 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微且 $\mathrm{grad}F_1(P_0)$, $\mathrm{grad}F_2(P_0)$ 不为零, 则曲线 Γ 在该点的切线为

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial F_1}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial F_1}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial F_2}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial F_2}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0. \end{cases}$$

该切线的方向为

$$\vec{T} = \mathrm{grad}F_1(P_0) \times \mathrm{grad}F_2(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(P_0) \\ \frac{D(F_1,F_2)}{D(z,x)}(P_0) \\ \frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}(P_0) \end{pmatrix}.$$

只有当 $\vec{T} \neq \vec{0}$ 时, 上述方程组才的确给出一条直线. 此时 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y,z)}(P_0)$ 的秩等于 2. 借助 $\vec{T}$, 我们也可得到切线的另外一个表述:

$$\frac{x - x_0}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(z,x)}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}(P_0)}.$$

回顾: Taylor 公式

- 一阶带 Lagrange 余项的 Taylor 公式:

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)(x_j - x_j^{(0)})$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_\theta)(x_i - x_i^{(0)})(x_j - x_j^{(0)})$$

$$= f(X_0) + J_f(X_0)\,\Delta X + \frac{1}{2!}(\Delta X)^T H_f(X_\theta)\,\Delta X,$$

其中 $\Delta X = X - X_0$, $H_f(X_\theta) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_\theta)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $X_\theta = X_0 + \theta(X - X_0)$, $\theta \in (0,1)$.

评注

- 该式为带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展式.
- 由于 f 为 $\mathscr{C}^{(2)}$ 类, 则 H_f 连续. 由夹逼原理与复合极限法则知, 当 $X \to X_0$ 时, 我们有

$$H_f(X_0 + \theta(X - X_0)) = H_f(X_0) + \vec{o}(1).$$

进而可得带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式:

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + J_f(X_0)\,\Delta X \\ &\quad + \frac{1}{2!}(\Delta X)^T H_f(X_0)\Delta X + o(\|\Delta X\|^2). \end{aligned}$$

- $H_f(X) = J_{\mathrm{grad} f}(X)$.
- 更一般地, 若 f 为 $\mathscr{C}^{(m+1)}$ 类, 则有

$$f(X) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \Big(\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)^k f(X_0)$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!} \Big(\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)^{m+1} f(X_\theta),$$

其中 $\theta \in (0,1)$, 并且 $X_\theta = X_0 + \theta(X - X_0)$.
人们通常将 $\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - x_j^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)^k f(X_0)$
称为 f 在点 X_0 处的 m 阶 Taylor 多项式.

回顾: 极值

- 极大值, 极小值, 严格极大值, 严格极小值, 最大值, 最小值.
- 必要条件: 极值点为驻点.
- 充分条件: 设 f 为 $\mathscr{C}^{(2)}$ 类, X_0 为其驻点, 若 $H_f(X_0)$ 正定, 则 X_0 为 f 的极小值点; 若 $H_f(X_0)$ 负定, 则 X_0 为 f 的极大值点; 若 $H_f(X_0)$ 不定, 则 X_0 不为 f 的极值点.
- 高维 Fermat 定理、微分中值定理及思想.

第 9 讲

条件极值

定义 2. 设 $n > k \geqslant 1$ 为整数, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k} : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得 $\forall X \in \Omega$, 矩阵 $\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-k})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(X)$ 的秩为 $n-k$. 令

$$S = \{X \in \Omega \mid \varphi_i(X) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n-k\}.$$

若 $S \neq \emptyset$, 则称 S 为 k 维曲面. 此时 S 为闭集.

注: $\forall X_0 \in S$, 由隐函数定理可知, 在 X_0 的某个邻域内, S 中的点可表示成 k 个变量的函数.

例 7. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, 定义

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

则 $J_\varphi(x,y) = (2x, 2y)$ 的秩为 1, 于是单位圆周 $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 为一维曲面.

例 8. $\forall (x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R}$, 定义 $\varphi(x,y) = y$. 则 $J_\varphi(x,y) = (0,1)$ 的秩为 1, 故 x 轴上的开区间

$$(0,1) \cong \big\{(x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R} \mid y = 0\big\}$$

为一维曲面, 但闭区间 $[0,1]$ 不是一维曲面.

定义 3. 假设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为 k 维曲面, $X_0 \in S$, 而 $f : S \to \mathbb{R}$ 为函数.

(1) 如果 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0, r) \cap S$, 均有 $f(X) \geqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为 f 在 S 上的 (条件) 极小值点, 而称 $f(X_0)$ 为 (条件) 极小值.

(2) 如果 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0, r) \cap S$, 均有 $f(X) \leqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为 f 在 S 上的 (条件) 极大值点, 称 $f(X_0)$ 为 (条件) 极大值.

(3) 如果$\forall X \in S$, 均有 $f(X) \geqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为 f 在 S 上的最小值点, 称 $f(X_0)$ 为最小值.

(4) 如果$\forall X \in S$, 均有 $f(X) \leqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为 f 在 S 上的最大值点, 称 $f(X_0)$ 为最大值.

注: 条件最值点必为条件极值点.

定理 4. (Lagrange 乘数法) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 而 $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k} : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类函数使得 $\forall X \in \Omega$, 矩阵 $\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ 的秩为 $n-k$. 令

$$S = \left\{ X \in \Omega \mid \varphi_i(X) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n-k \right\} \neq \emptyset.$$

$\forall X \in \Omega$ 及 $\forall \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$, 定义

(拉氏函数) $$L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \varphi_j(X).$$

如果点 $X_0 \in S$ 为函数 f 在 S 上的条件极值点, 则 $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{n-k}$ 使得 (X_0, λ) 为 L 的驻点.

评注

- 点 (X_0,λ) 为 L 的驻点当且仅当

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(X_0,\lambda)=0\ (1\leqslant i\leqslant n), \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(X_0,\lambda)=0\ (1\leqslant i\leqslant n-k). \end{cases}$$

  等价地, 我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)+\sum\limits_{j=1}^{n-k}\lambda_j\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(X_0)=0\ (1\leqslant i\leqslant n), \\ \varphi_i(X_0)=0\ (1\leqslant i\leqslant n-k). \end{cases}$$

- 即便 (X_0,λ) 为 L 的驻点, 点 X_0 也不一定为 f 在 S 上的条件极值点, 还需具体分析!

证明: 仅考虑 $k=n-1$ 的情形, 并假设

$$S=\{X\in\Omega\mid\varphi(X)=0\}.$$

由于 $J_\varphi(X_0)$ 的秩为 1, 于是 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(X_0)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 不全为零. 不失一般性, 假设 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(X_0)\neq 0$. 那么存在点 X_0 的邻域使得在该邻域内 $\varphi(X)=0$ 的解为 $x_n=g(x_1,\dots,x_{n-1})$, 其中点 $(x_1,\dots,x_{n-1})$ 属于点 $X_n^{(0)}=(x_1^{(0)},\dots,x_{n-1}^{(0)})$ 的某个邻域内. 令

$$F(x_1,\dots,x_{n-1})=f(x_1,\dots,x_{n-1},g(x_1,\dots,x_{n-1})).$$

由题设条件可知 $X_n^{(0)}$ 为 F 的 (无条件) 极值点, 于是对任意 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(X_n^{(0)}) = 0$, 也即

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(X_n^{(0)}) = 0.$$

由隐函数定理可知, 我们有 $\frac{\partial g}{\partial x_i}(X_n^{(0)}) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(X_0)}$, 从而对任意 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, 我们均有

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = -\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(X_n^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(X_0)}.$$

令 $\lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(X_0)}$. 则对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_0),$$

也即 $\frac{\partial L}{\partial x_i}(X_0, \lambda) = 0$. 又 $X_0 \in S$, 于是我们有

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(X_0, \lambda) = \varphi(X_0) = 0,$$

从而所证结论成立.

求曲面上的条件极值的典型方法

- 由于 Lagrange 乘数法只给出条件极值点的必要条件，于是为了确定条件极值点，首先需想办法将条件极值问题转化成最值问题，例如有界闭集上的连续函数的最值问题.
- 定义拉氏函数并求它的驻点，由此得到原来那个函数可能的条件极值点.
- 比较原来那个函数在上述驻点处值的大小，由此确定极值点.

例 9. 求空间椭圆

$$S:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\[2ex] lx+my+nz=0\end{cases}$$

的长、短半轴的长度, 其中 $l^2+m^2+n^2=1$.

解: $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 定义

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2.$$

椭圆的长、短半轴的长度也就是 $\sqrt{f}$ 在 S 上的最大值和最小值, 于是我们只需求 f 在 S 上的最大值和最小值. 又 S 为有界闭集并且 f 连续, 故 f 在 S 上有最值. $\forall(x, y, z, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^5$, 令

$$
\begin{aligned}
L(x, y, z, \lambda, \mu) &= x^2 + y^2 + z^2 \\
&+ \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) + \mu(lx + my + nz).
\end{aligned}
$$

由 Lagrange 乘数法知最值点 (x, y, z) 满足:

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + \frac{2\lambda x}{a^2} + \mu l, && (1)\\
0 = \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + \frac{2\lambda y}{b^2} + \mu m, && (2)\\
0 = \frac{\partial L}{\partial z} &= 2z + \frac{2\lambda z}{c^2} + \mu n, && (3)\\
0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1, && (4)\\
0 = \frac{\partial L}{\partial \mu} &= lx + my + nz. && (5)
\end{aligned}
$$

由关系式 (1), (2), (3) 立刻可得

$$2(x^2+y^2+z^2)+2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$+\mu(lx+my+nz)=0,$$

也即 $\lambda=-(x^2+y^2+z^2)$. 同时我们也有

$$x=-\frac{a^2l}{2(a^2+\lambda)}\mu,\ y=-\frac{b^2m}{2(b^2+\lambda)}\mu,\ z=-\frac{c^2n}{2(c^2+\lambda)}\mu.$$

由于原点不在 S 上, 则 $\mu \neq 0$, 从而我们有

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\mu}(lx + my + nz) \\ &= \frac{a^2l^2}{2(a^2+\lambda)} + \frac{b^2m^2}{2(b^2+\lambda)} + \frac{c^2n^2}{2(c^2+\lambda)}. \end{aligned}$$

出于简化记号, 定义

$$\begin{aligned} A &= a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2, \\ B &= \frac{1}{2}\left(a^2l^2(b^2+c^2) + b^2m^2(c^2+a^2) + c^2n^2(a^2+b^2)\right), \\ C &= a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

于是由前面的关系式可知 $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0.$

我们由此立刻可得

$$f(x, y, z) = -\lambda = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

拉氏函数的驻点所对应的 f 的值只有两个, 而 f 在 S 上有最值, 故椭圆的长、短半轴分别为

$$a^* = \Big(\frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad b^* = \Big(\frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

例 10. 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内接长方体的体积的最大值.

解: 由对称性, 只需要考虑椭球面内关于每一个坐标轴对称的内接长方体, 设它在第一卦限的顶点为 (x,y,z), 则其体积为 $8xyz$. 令

$$S=\left\{(x,y,z)\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x,y,z\geqslant 0\right\}.$$

$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 定义 $F(x,y,z)=8xyz$, 则 F 为初等函数, 因此为无穷可导. 由最值定理可知 F 在 S 上有最大值, 这个值也就是所求的最大值,

并且相应的最值点必定会落在第一卦限的内部.

$\forall x, y, z > 0$ 以及 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 定义

$$L(x, y, z, \lambda) = 8xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right),$$

由 Lagrange 乘数法可知最值点 (x, y, z) 满足:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2},\ 0 = \frac{\partial L}{\partial y} = 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2},$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial z} = 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2},\ 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

因此 $\lambda = -12xyz$, 进而 $x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$,
从而所求最大值为 $\frac{8}{9}\sqrt{3}abc$.

初等方法: 由对称性, 只需要考虑椭球面内关于每一个坐标轴对称的内接长方体, 设它在第一卦限的顶点为 (x, y, z), 则其体积为 $8xyz$. 又

$$\frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{b^2} \cdot \frac{z^2}{c^2} \leqslant \left(\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right)^3 = \frac{1}{27},$$

并且等号成立当且仅当 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$, 从而所求最大值为 $8 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{8}{9}\sqrt{3}abc$.

求有界闭区域上的最值的典型方法

- 极值或最值问题常可被转化有界闭区域上的连续函数的最值问题，由于问题的解一定存在，关键在于如何确定最值点.
- 求函数在区域内部的驻点并计算相应值.
- 将函数限制在边界上，求相应的拉氏函数的驻点，并计算原来那个函数的相应值.
- 比较上述值的大小，由此确定最值点.

例 11. 设 $P_1=(0,0)$, $P_2=(1,0)$, $P_3=(0,1)$, 而 D 为三角形 $\Delta P_1P_2P_3$ 所围区域. $\forall P=(x,y)\in D$, 令

$$f(P)=|PP_1|^2+|PP_2|^2+|PP_3|^2.$$

求 f 在 D 上的最大值和最小值.

解: $\forall (x,y)\in D$, 我们有

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+x^2+(y-1)^2 \\ &= 3x^2+3y^2-2x-2y+2. \end{aligned}$$

于是我们也可以将 f 看成是定义在整个 $\mathbb{R}^2$ 上的初等函数, 故 f 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类函数. 由于 D 为有界闭集, 故函数 f 在 D 上有最值.

(1) 如果 f 在 D 上的最值点在 D 的内部, 那么该点必为 f 的局部极值点, 在该点处, 我们有

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2,\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 2,$$

于是该点为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 并且 $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

(2) 若 f 在 D 上的最值点位于 D 的边界, 那么该点为 f 的条件极值点. 除了顶点以外, ∂D 由下述线段组成:

$$C_1: \ y=0,\ 0<x<1,$$

$$C_2: \ x=0,\ 0<y<1,$$

$$C_3: \ x+y=1,\ 0<x<1.$$

于是我们需要来分别考虑 f 在 C_1, C_2, C_3 上的条件极值, 相应的 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned}
L_1(x, y, \lambda_1) &= f(x, y) + \lambda_1 y, \\
L_2(x, y, \lambda_2) &= f(x, y) + \lambda_2 x, \\
L_3(x, y, \lambda_3) &= f(x, y) + \lambda_3 (x + y - 1).
\end{aligned}$$

拉氏函数 L_1 的驻点满足:

$$\begin{cases}
0 = \frac{\partial L_1}{\partial x} = 6x - 2, \\
0 = \frac{\partial L_1}{\partial y} = 6y - 2 + \lambda_1, \\
0 = \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1} = y,
\end{cases}$$

从而该点为 $(\frac{1}{3}, 0, 2)$, 并且 $f(\frac{1}{3}, 0) = \frac{5}{3}$.

拉氏函数 L_2 的驻点满足:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial L_2}{\partial x} = 6x - 2 + \lambda_2, \\ 0 = \frac{\partial L_2}{\partial y} = 6y - 2, \\ 0 = \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2} = x, \end{cases}$$

则该点为 $(0, \frac{1}{3}, 2)$, 并且我们有 $f(0, \frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$.

拉氏函数 L_3 的驻点满足:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial L_3}{\partial x} = 6x - 2 + \lambda_3, \\ 0 = \frac{\partial L_3}{\partial y} = 6y - 2 + \lambda_3, \\ 0 = \frac{\partial L_3}{\partial \lambda_3} = x + y - 1, \end{cases}$$

故该点为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$, 并且我们有 $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$.

另外, 在三个顶点处, 我们有

$$f(P_1) = 2, \ f(P_2) = 3, \ f(P_3) = 3.$$

由于 f 在 D 上有最值, 故 f 在 D 上的最值点必在上述点中, 通过比较 f 在这些点处的值知 f 在点 P_2, P_3 处取到最大值 3, 而在点 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 处取到最小值 $\frac{4}{3}$.

作业题: 第 1.9 节第 93 页第 4 题第 (2) 小题, 第 94 页第 7 题第 (2) 小题.

谢谢大家!