微积分 A (1)

姚家燕

第 30 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

期末考试时间与地点

时间: 2020 年 12 月 29 日星期二 14:30–16:30

地点: 六教 6 B 410 (核 01, 27 人)

六教 6 C 300 (所有其他同学, 128 人)

线上腾讯会议 (1 人)

重要提示: 考试时需且只需带学生证和文具!

千万不要迟到或无故缺考!

考前答疑: 2020 年 12 月 28 日 14:00-21:00

答疑地点: 理科楼数学科学系 A 216

期末考试内容

- 第 5 章 黎曼积分
- 第 6 章 广义黎曼积分
- 第 7 章 常微分方程

期末考试要求

- 所有解答必须写在专门答卷纸的指定位置(共两页, 每页均有正反面), 每页均需要在指定位置填写个人信息.
- 严禁在试卷上打草稿! 会发专门草稿纸.
- 期末附加题不计入成绩, 仅用于评判 A+.
- 请携带清晰的学生证, 否则逐出考场!
- 缺交作业 4 次及以上者严禁参加考试!
- 请严格遵守考场纪律, 不做让人怀疑的行为!
- 考试结束后严禁打听成绩!

关于本学期期末成绩查询及复议

接数学科学系教学秘书通知，在本学期期末考试成绩公布以后，如果有同学对考试成绩有异议，请务必在下学期开学第一周周五前将成绩复议申请表 (网上直接下载) 送到数学科学系教务科，后者会在第二周周五前上报到注册中心，逾期学校不予受理.

第 30 讲

期末综合练习

例 1. 假设当 $x > -1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

且 $f(0) = 1$. 证明:

(I) 函数 $y = f(x)$ 满足 $(x+1)y'' + (x+2)y' = 0$.

(II) 当 $x \geqslant 0$ 时, 均有 $e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

证明: (I) 由题设立刻可得

$$(x+1)f'(x) + (x+1)f(x) - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

将上式两边对 x 求导可得

$$
\begin{aligned}
&f'(x)+(x+1)f''(x)+f(x)\\
&+(x+1)f'(x)-f(x)=0,
\end{aligned}
$$

由此可知 $(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0.$

(II) 由 (I) 可知, $\forall x>-1$, 均有

$$
f'(x)=Ce^{-\int\frac{x+2}{x+1}\mathrm{d}x}=\frac{C}{(x+1)e^{x}}.
$$

在题设方程中选取 $x=0$, 则 $f'(0)+f(0)=0$.

由于 $f(0)=1$, 于是 $f'(0)=-1$, 从而 $C=-1$,

则 $\forall x\geqslant 0$, 均有 $-e^{-x}\leqslant f'(x)=-\frac{e^{-x}}{(x+1)}<0$, 故

$$\begin{aligned} f(x)-f(0) &= \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0, \\ f(x)-f(0) &= \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-x}-1, \end{aligned}$$

由此我们可立刻导出 $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

例 2. 设函数 f 在实轴上连续且使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $f(x) = x + \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$. 求函数 f 的表达式.

解: 由于 f 连续并且满足题设方程, 则 f 连续可导且 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $f'(x) = 1 + f(x)$, 故

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\int \mathrm{d}x}\Big(C + \int e^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big) = e^x\Big(C + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\Big) \\ &= e^x\Big(C - e^{-x}\Big) = Ce^x - 1. \end{aligned}$$

又 $f(0) = 0$, 于是 $C = 1$, 故 $f(x) = e^x - 1$.

例 3. 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续且满足积分方程

$$f(x) = 4e^x + \int_0^x (x-s)f(s)\,\mathrm{d}s, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

求函数 f 的表达式.

解: 由于 f 连续且 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有

$$f(x) = 4e^x + x\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^x sf(s)\,\mathrm{d}s,$$

则 f 连续可导且 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有

$$f'(x) = 4e^x + \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s,$$

进而可知 f' 连续可导且 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有

$$f''(x) = 4e^x + f(x).$$

该方程的特征方程为 $\lambda^2 = 1$, 由此可知特征根为 $\lambda = \pm 1$. 故非齐次方程有特解形如 $z_0 = Axe^x$, 带入非齐次方程可得

$$2Ae^x + Axe^x = 4e^x + Axe^x,$$

于是 $A = 2$, 从而 $f(x) = 2xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x}$.

注意到 $f(0)=f'(0)=4$, 由此可得

$$C_1+C_2=4, \quad 2+C_1-C_2=4,$$

进而可知 $C_1=3$, $C_2=1$. 故 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有

$$f(x)=2xe^x+3e^x+e^{-x}.$$

例 4. 设 f 为连续函数且使得

$$f(x) = \sin x + \int_0^x e^t f(x-t)\,\mathrm{d}t,$$

求 f 的表达式.

解: 由变量替换可得

$$f(x) = \sin x + e^x \int_0^x e^{-u} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

又 f 连续, 则由上式可知 f 为连续可导.

再对之求导可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x + e^x \int_0^x e^{-u} f(u)\,\mathrm{d}u + e^x(e^{-x} f(x)) \\ &= 2f(x) + \cos x - \sin x, \end{aligned}$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\int 2\,\mathrm{d}x}\left(C + \int (\cos x - \sin x) e^{\int(-2)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{2x}\left(C + \int (\cos x - \sin x) e^{-2x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= Ce^{2x} + \frac{1}{5}(3\sin x - \cos x), \end{aligned}$$

但 $f(0) = 0$, 故 $f(x) = \frac{1}{5}(e^{2x} + 3\sin x - \cos x)$.

例 5. 若 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 非负使得 $\forall x \in [0,1]$, 均有

$$(f(x))^2 \leqslant 1 + 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

求证: $\forall x \in [0,1]$, 均有 $f(x) \leqslant 1 + x$.

证明: 方法 1. $\forall x \in [0,1]$, 令 $F(x) = f(x) - 1 - x$.

由于 F 在 $[0,1]$ 上连续, 则由最值定理可知 F 在 $[0,1]$ 上有最大值 A, 相应最大值点记作 x_0.

于是由题设可知

$$\begin{aligned}
\big((f(x_0)\big)^2 &\leqslant 1 + 2\int_0^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + 2\int_0^{x_0} (F(t) + 1 + t)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant 1 + 2\int_0^{x_0} (A + 1 + t)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant 1 + 2\Big(At + t + \frac{1}{2}t^2\Big)\Big|_0^{x_0} \\
&= 1 + 2(A+1)x_0 + x_0^2.
\end{aligned}$$

但 $f(x_0) = A + 1 + x_0$, 由此我们立刻可得

$$(A + 1 + x_0)^2 \leqslant 1 + 2(A + 1)x_0 + x_0^2,$$

即 $(A+1)^2+2(A+1)x_0+x_0^2 \leqslant 1+2(A+1)x_0+x_0^2$. 从而 $(A + 1)^2 \leqslant 1$, 进而可知 $-1 \leqslant A + 1 \leqslant 1$, 故 $-2 \leqslant A \leqslant 0$. 于是 $\forall x \in [0, 1]$, 均有

$$f(x) = F(x) + 1 + x \leqslant A + 1 + x \leqslant 1 + x.$$

方法 2. $\forall x \in [0,1]$, 定义 $G(x) = \frac{f(x)}{1+x}$. 由于 G 在 $[0,1]$ 上连续, 由最值定理可知 G 在 $[0,1]$ 上有最大值 M, 相应最大值点记作 x_0. 由题设知

$$\begin{aligned}
\big(f(x_0)\big)^2 &\leqslant 1+2\int_0^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 1+2\int_0^{x_0} (1+t)G(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant 1+2\int_0^{x_0} (1+t)M\,\mathrm{d}t \\
&= 1+(2x_0+x_0^2)M.
\end{aligned}$$

但 $f(x_0) = (1 + x_0)M$, 由此我们立刻可得

$$(1 + x_0)^2 M^2 \leqslant 1 + (2x_0 + x_0^2)M,$$

也即有 $(1 + 2x_0 + x_0^2)M^2 \leqslant 1 + (2x_0 + x_0^2)M$,

从而可知 $(M - 1)(M + 1 + (2x_0 + x_0^2)M) \leqslant 0$.

又 $M \geqslant 0$, 故 $M \leqslant 1$, 于是 $\forall x \in [0, 1]$, 我们有

$$f(x) = (1 + x)G(x) \leqslant (1 + x)M \leqslant 1 + x.$$

方法 3. $\forall x \in [0,1]$, 我们定义

$$H(x) = \sqrt{1 + 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t} - 1 - x.$$

由于 f 在 $[0,1]$ 上连续, 则 H 在 $[0,1]$ 上可导且 $\forall x \in [0,1]$, 由题设条件可知

$$H'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}} - 1 \leqslant 0.$$

则 H 递减, 则 $\forall x \in [0,1]$, $H(x) \leqslant H(0) = 0$, 从而 $f(x) \leqslant \sqrt{1 + 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant 1 + x$.

方法 4. $\forall x \in [0,1]$, 令 $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 因 f 在 $[0,1]$ 上连续, 则 g 在 $[0,1]$ 上可导且由题设可知, $\forall x \in [0,1]$, $g'(x) = f(x) \leqslant \sqrt{1+2g(x)}$.

由此可知 $\forall x \in [0,1]$, 我们有

$$\left(\sqrt{1+2g(t)}\right)\Big|_0^x = \int_0^x \frac{g'(t)}{\sqrt{1+2g(t)}}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{d}t = x.$$

从而 $\sqrt{1+2g(x)} - 1 \leqslant x$, 进而可得

$$f(x) \leqslant \sqrt{1+2g(x)} \leqslant 1+x.$$

例 6. 设 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 是齐次线性常微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

的 n 个解, 其中 $a_0, \ldots, a_{n-1}, f \in \mathscr{C}(I)$. 令

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

求证: $W'(x) = -a_{n-1}(x)W(x)$.

证明: 由题设以及行列式的性质可得

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ -\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y_1^{(j)}(x) & \cdots & -\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y_n^{(j)}(x) \end{vmatrix}
$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ -a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & -a_{n-1}(x)y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= -a_{n-1}(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \\
&= -a_{n-1}(x)W(x).
\end{aligned}
$$

于是所证结论成立.

例 7. 设函数 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[0,2]$ 使得 $f(0)=f(2)=1$ 且 $|f'(x)| \leqslant 1$. 求证: $1 \leqslant \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3$.

证明: 方法 1. $\forall x \in [0,1]$, 我们有

$$|f(x)-f(0)| = \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant x.$$

由此可得 $1-x \leqslant f(x) \leqslant 1+x$. 于是

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 (1+x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$$

同样地, $\forall x \in [1,2]$, 我们有

$$|f(2)-f(x)| = \left|\int_x^2 f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^2 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (2-x).$$

由此可得 $x-1 \leqslant f(x) \leqslant 3-x$. 于是

$$\frac{1}{2} = \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 (3-x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$$

将上述两个不等式加起来可得

$$1 \leqslant \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3.$$

方法 2. $\forall x \in [0,2]$, 我们定义

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

则 $F \in \mathscr{C}^{(2)}[0,2]$ 且 $F' = f$. 于是由带 Lagrange 余项的 Taylor 展式可知, $\exists \xi_1, \xi_2 \in [0,2]$ 使得

$$\begin{aligned} F(1) &= F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\xi_1), \\ F(1) &= F(2) - F'(2) + \frac{1}{2}F''(\xi_2). \end{aligned}$$

注意到 $F(0)=0$, $f(0)=f(2)=1$, 于是

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-1+\frac{1}{2}f'(\xi_2)=1+\frac{1}{2}f'(\xi_1),$$

进而可得 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2+\frac{1}{2}\big(f'(\xi_1)-f'(\xi_2)\big)$.

又 $\forall x\in[0,2]$, 均有 $|f'(x)|\leqslant 1$, 故

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant 2+\frac{1}{2}\big(|f'(\xi_1)|+|f'(\xi_2)|\big)\leqslant 3,\\ \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant 2-\frac{1}{2}\big(|f'(\xi_1)|+|f'(\xi_2)|\big)\geqslant 1.\end{aligned}$$

方法 3. 由分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= (x-1)f(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 (x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2 - \int_0^2 (x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又 $\forall x \in [0,2]$, 均有 $|f'(x)| \leqslant 1$, 从而

$$\left|\int_0^2 (x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^2 |(x-1)f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = 1.$$

由此可知所证结论成立.

例 8. 若广义积分 $\int_1^{+\infty}(f(x))^2\,\mathrm{d}x$ 收敛, 求证: 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

证明: $\forall M\geqslant 1$, 由 Cauchy 不等式可知

$$\begin{aligned}\int_1^M\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_1^M\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right)^{1/2}\left(\int_1^M(f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\\ &\leqslant \left(\int_1^{+\infty}(f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

于是由单调有界定理可知所证结论成立.

例 9. 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{x}$ 及其过点 $(-1,0)$ 的切线及 x 轴围成的平面有界区域

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕着直线 $x=3$ 旋转一周后所形成的旋转体的体积.

解: (1) 设曲线 $y=\sqrt{x}$ 过点 $(-1,0)$ 处的切线在该曲线上的切点为 $(x_0,\sqrt{x_0})$, 则切线方程为

$$y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0).$$

因切线过点 $(-1,0)$, 故 $-\sqrt{x_0}=-\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(1+x_0)$,
由此可得知 $x_0=1$, 于是切线方程为 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.
进而可知区域 D 的面积为

$$S=\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{2}\,\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

(2) 所求体积为

$$V=2\pi\int_{-1}^{1}(3-x)\frac{x+1}{2}\,\mathrm{d}x-2\pi\int_{0}^{1}(3-x)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{32}{15}\pi.$$

例 10. 设 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 使 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = A \in \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $g(x) = \int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$. 求 g' 并讨论它在原点的连续性.

解: 因 f 在原点处连续且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = A \in \mathbb{R}$, 则

$$f(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot x = 0.$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $x \neq 0$ 时, 我们有

$$g(x) = \int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t \overset{u=xt}{=\!=} \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u,$$

而当 $x=0$ 时, $g(0)=f(0)=0$. 则当 $x\neq 0$ 时,
$g'(x)=\frac{1}{x^2}\left(xf(x)-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u\right)$. 而当 $x=0$ 时,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u}{t^2} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{2t}=\frac{1}{2}A. \end{aligned}$$

再注意到

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} g'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(xf(x) - \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2x} \\
&= A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A = g'(0).
\end{aligned}
$$

因此导函数 g' 在原点处连续.

例 11. 解常微分方程组的初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + y - 3 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x - y + 1 \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

解: 由题设可知 $y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x + 3$, 带入第 2 式得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x - 3 + 1,$$

也即 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-4x=-2$. 于是齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-4=0$, 即 $\lambda=\pm 2$. 非齐次方程有特解形如 $x_0=A$, 带入方程可得 $A=\frac{1}{2}$. 由此知非齐次方程的通解为 $x=\frac{1}{2}+C_1e^{-2t}+C_2e^{2t}$, 进而可得 $y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x+3=\frac{5}{2}-3C_1e^{-2t}+C_2e^{2t}$. 再带入初值条件可得 $C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=-1$. 于是

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{2t}, \\ y &= \frac{5}{2}-\frac{3}{2}e^{-2t}-e^{2t}. \end{cases}$$

例 12. 计算不定积分 $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}+\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x$.

解:
$$\begin{aligned}
&\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}+\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x \\
=\ & \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{e^x+1}-\sqrt{e^x-1}\right)e^x\,\mathrm{d}x \\
=\ & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}\right)+C \\
=\ & \frac{1}{3}\left((e^x+1)^{\frac{3}{2}}-(e^x-1)^{\frac{3}{2}}\right)+C,
\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

例 13. 求实数 p 使得积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

解: 由定义可知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x.$$

当 $x \to 0^+$ 时, 我们有 $\frac{\ln(1+x)}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}}$. 另外广义积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{p-1}}$ 收敛当且仅当 $p<2$, 故 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p < 2$.

当 $p \leqslant 1$ 时, $\forall x \geqslant 1$, 均有 $\frac{\log(1+x)}{x^p} \geqslant \frac{\log 2}{x}$, 而广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\log 2}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 则由比较法则可知广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 也发散. 下设 $p > 1$, 那么

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\log(1+x)}{x^p}}{\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^{\frac{p-1}{2}}} = 0,$$

而广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 于是由比较法则可知广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

因此题设广义积分收敛当且仅当 $1 < p < 2$.

例 14. 设 $f \in \mathscr{C}[0,+\infty)$. $\forall x \geqslant 0$, 定义

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(1) $\forall A, B \in (0,+\infty)$, 求证:

$$\int_A^B \frac{(g(x))^2}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{(g(A))^2}{A} - \frac{(g(B))^2}{B} + 2\int_A^B \frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

(2) 如果广义积分 $\int_0^{+\infty}(f(x))^2\,\mathrm{d}x$ 收敛, 求证: 广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{(g(x))^2}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$\int_0^{+\infty}\frac{(g(x))^2}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^{+\infty}(f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

证明: (1) $\forall A, B \in (0,+\infty)$, 由分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_A^B \frac{(g(x))^2}{x^2}\mathrm{d}x &= -\int_A^B (g(x))^2\mathrm{d}\Big(\frac{1}{x}\Big)\\ &= -\frac{(g(x))^2}{x}\Big|_A^B + 2\int_A^B \frac{g(x)g'(x)}{x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{(g(A))^2}{A} - \frac{(g(B))^2}{B} + 2\int_A^B \frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) $\forall A, B \in (0,+\infty)$ 使得 $B > A$, 由 (1) 可得

$$\begin{aligned}\int_A^B \frac{(g(x))^2}{x^2}\mathrm{d}x &= \frac{(g(A))^2}{A} - \frac{(g(B))^2}{B} + 2\int_A^B \frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{(g(A))^2}{A} + 2\int_A^B \frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{(g(A))^2}{A} + 2\Big(\int_A^B (f(x))^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_A^B \frac{(g(x))^2}{x^2}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

由于 f 连续, 则 g 连续可导且 $g(0)=0$. 于是由 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(g(x))^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{x}\cdot g(x)=0.$$

因此广义积分 $\int_0^B \frac{(g(x))^2}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 进而可得

$$\int_0^B \frac{(g(x))^2}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant 2\Big(\int_0^B (f(x))^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^B \frac{(g(x))^2}{x^2}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

由于 $\int_0^B \frac{(g(x))^2}{x^2}\mathrm{d}x \geqslant 0$, 则由上式可知我们总有

$$\int_0^B \frac{(g(x))^2}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^B (f(x))^2\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^{+\infty} (f(x))^2\mathrm{d}x.$$

于是由单调有界定理知广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{(g(x))^2}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 并且我们还有

$$\int_0^{+\infty} \frac{(g(x))^2}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^{+\infty} (f(x))^2\mathrm{d}x.$$

例 15. 求函数 $y = y(x)$ 使得 $y'''' - y'' = 0$, 并且当 $x \to 0$ 时, $y(x) \sim x^3$.

解: 所求 4 阶线性常系数齐次方程的特征方程为 $\lambda^4 - \lambda^2 = 0$, 由此得其特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -1$. 从而该方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x},$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 为任意常数.

方法 1. 当 $x \to 0$ 时，由 Taylor 展式可知

$$
\begin{aligned}
y &= C_1 + C_2 x + C_3\Big(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big) \\
&\quad + C_4\Big(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big) \\
&= (C_1 + C_3 + C_4) + (C_2 + C_3 - C_4) \\
&\quad + \frac{1}{2}(C_3 + C_4)x^2 + \frac{1}{6}(C_3 - C_4)x^3 + o(x^3).
\end{aligned}
$$

由此可得 $C_1 + C_3 + C_4 = 0$, $C_2 + C_3 - C_4 = 0$,

$$C_3 + C_4 = 0,\ C_3 - C_4 = 6,$$

故 $C_3 = 3$, $C_4 = -3$, $C_2 = -6$, $C_1 = 0$. 从而

$$y = -6x + 3e^x - 3e^{-x}.$$

方法 2. 由带 Peano 余项的 Taylor 展式得

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = C_1 + C_3 + C_4, \\ 0 &= y'(0) = C_2 + C_3 - C_4, \\ 0 &= y''(0) = C_3 + C_4, \\ 6 &= y'''(0) = C_3 - C_4. \end{aligned}$$

故 $C_3 = 3$, $C_4 = -3$, $C_2 = -6$, $C_1 = 0$. 从而

$$y = -6x + 3e^x - 3e^{-x}.$$

例 16. $\forall x \geqslant 0$, 令 $F(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$. 求证:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$;

(2) 函数 F 在 $[0, +\infty)$ 单调递减.

证明: (1) 由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-e^{-\frac{x^2}{2}}}{-xe^{-\frac{x^2}{2}}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.
\end{aligned}$$

(2) $\forall x \geqslant 0$, 均有 $F'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t - 1$.

方法 1. 由此立刻可得

$$\begin{aligned} F'(x) &\leqslant e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t - 1 = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}\left(\frac{t^2}{2}\right) - 1 \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} \left(- e^{-\frac{t^2}{2}} \right)\Big|_x^{+\infty} - 1 = 0. \end{aligned}$$

方法 2. $\forall x > 0$, 令 $G(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$,

则有 $G'(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2} > 0$,

于是 G 递增. 又 $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 0$, 因此 $\forall x > 0$,

均有 $G(x) < 0$, 进而 $F'(x) < 0$. 故所证成立.

例 17. 设 L 是连接 $A(0,1)$, $B(1,0)$ 的一条连续上凸曲线, $P(x,y)$ 为 L 上任意一点. 已知上凸曲线 L 与弦 AP 所围成的平面有界区域的面积等于 x^4, 求曲线 L 的函数表达式 $y=f(x)$.

解: 弦 AP 的方程为 $v=1+\frac{f(x)-1}{x}u$. 由题设得

$$\begin{aligned} x^4 &= \int_0^x \left(f(u)-\left(1+\frac{f(x)-1}{x}u\right)\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - \left(u+\frac{f(x)-1}{2x}u^2\right)\Big|_0^x \\ &= \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - \frac{f(x)+1}{2}x. \end{aligned}$$

由于函数 f 连续, 则上式两边在 $(0,1]$ 上可导, 将之对 x 求导得 $4x^3 = f(x) - \frac{f(x)+1}{2} - \frac{f'(x)}{2}x$, 故 $f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = -8x^2 - \frac{1}{x}$. 由此立刻可得

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}\left(C - \int (8x^2 + \frac{1}{x})e^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}\mathrm{d}x\right) \\ &= x(C - 4x^2 + \frac{1}{x}) = Cx - 4x^3 + 1. \end{aligned}$$

由 $f(1) = 0$, 则 $C = 3$. 再由 f 的连续性可得

$$f(x) = 1 + 3x - 4x^3,\ \forall x \in [0,1].$$

例 18. 求广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x.$

解: 由分部积分可得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}(e^x) \\
= &-\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{1+e^x}\Big) = -\frac{x}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} \\
= &\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{e^{-x}+1} = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(e^{-x})}{e^{-x}+1} \\
= &-\log(e^{-x}+1)\Big|_0^{+\infty} = \log 2.
\end{aligned}
$$

例 19. 求 $f(x)=\int_x^{x^2}\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ 在 $x\to 0$ 时的阶.

解: 由 L'Hospital 法则可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} f'(x) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(2x\cos(x^4)-\cos(x^2)\right) \\
&= -1,
\end{aligned}
$$

于是所求阶等于 1.

例 20. 设 $f'(\arctan x) = x^2$, 求函数 f 的表达式.

解: 令 $y = \arctan x$, 则我们有 $x = \tan y$, 从而 $f'(y) = \tan^2 y$, 于是

$$\begin{aligned} f(y) &= \int \tan^2 y \, \mathrm{d}y = \int (\sec^2 y - 1) \, \mathrm{d}y \\ &= \tan y - y + C, \end{aligned}$$

其中 C 为任意常数. 故函数 f 的表达式为

$$f(x) = \tan x - x + C.$$

例 21. 计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解: 做变量替换可得

$$\int_0^1 \frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \int_{+\infty}^1 \frac{\arctan t}{1+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}(\frac{1}{t})$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+\frac{1}{t^2})t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^{+\infty} \arctan t\,\mathrm{d}(\arctan t) = \frac{1}{2}(\arctan t)^2\Big|_1^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}) = \frac{3\pi^2}{32}.$$

例 22. 求函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 在点 $x_0=0$ 处的带 Peano 余项的 $2n+1$ 阶 Taylor 公式.

解: 由带 Peano 余项 Taylor 公式可知

$$f'(x)=e^{x^2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x^2)^k}{k!}+o(x^{2n})\ (x\to 0),$$

又 $f(0)=0$, 再由带 Peano 余项 Taylor 公式得,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\cdot k!}+o(x^{2n+1})\ (x\to 0).$$

例 23. 设 $h > 0$, $f \in \mathscr{C}^{(\infty)}[0, h]$ 使得 $\forall x \in [0, h]$ 以及 $\forall n \in \mathbb{N}$, 均有 $f^{(n)}(x) \geqslant 0$. 令

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

求证: $\forall x \in (0, h)$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

证明: 由带积分余项的 Taylor 公式知, $\forall x \in [0, h]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x).$$

特别地, 由题设知 $r_n(h) \leqslant f(h)$ 且 $f^{(n+1)}$ 递增. 又 $\forall x \in (0,h)$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{r_n(x)}{x^{n+1}} &= \frac{1}{x^{n+1}} \cdot \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\xlongequal[0\leqslant u\leqslant 1]{t=(1-u)x} \frac{1}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}\big((1-u)x\big)\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{1}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}\big((1-u)h\big)\,\mathrm{d}u = \frac{r_n(h)}{h^{n+1}}. \end{aligned}$$

由此得 $0 \leqslant r_n(x) \leqslant (\frac{x}{h})^{n+1} r_n(h) \leqslant (\frac{x}{h})^{n+1} f(h)$. 进而由夹逼原理可知所证结论成立.

例 24. 设 $n \geqslant 1$ 为整数而 $p(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ 为实系数多项式. 若 $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有 $p(x) \geqslant 0$, 求证: $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $\sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x) \geqslant 0$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x)$. 则我们有

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k+1)}(x) = f(x) - p(x).$$

方法 1. 因 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{x^n}=1$, 而 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $p(x)\geqslant 0$, 因此 $\lim\limits_{x\to\infty}x^n=+\infty$, 则 n 为偶数. 又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n}=1$, 从而有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. 由于 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 有最小值, 相应最小值点记作 x_0. 该点也为 f 的极小值点, 从而由 Fermat 定理可知 $f'(x_0)=0$. 由此我们立刻可得

$$f(x_0)=p(x_0)+f'(x_0)=p(x_0)\geqslant 0,$$

进而可知 $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有 $f(x)\geqslant f(x_0)\geqslant 0$.

方法 2. $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $F(x) = e^{-x} f(x)$. 由题设得

$$F'(x) = \big(f'(x) - f(x)\big)e^{-x} = -p(x)e^{-x} \leqslant 0.$$

从而 F 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减. 再由单调有界定理以及多项式比指数函数增长慢可知

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} F(x) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 0.$$

即 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $F(x) \geqslant 0$, 进而可知所证成立.

祝大家期末考试取得圆满成功!