# 微积分 A (2)

姚家燕

第 30 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

# 关于本学期期末成绩查询及复议

接数学科学系教学秘书通知，在本学期期末考试成绩公布以后，如果有同学对考试成绩有异议，请务必在下学期开学第一周周五前将成绩复议申请表 (网上直接下载) 送到数学科学系教务科，后者会在第二周周五前上报到注册中心，逾期学校不予受理.

# 期末考试时间与地点

时间: 2021 年 6 月 15 日星期二 8:00–10:00

地点: 二教 401 (核 01-02, 共 40 人)

二教 402 (机械, 共 49 人)

二教 403 (所有其他同学, 共 58 人)

重要提示: 考试时需且只需带学生证和文具!

千万不要迟到或无故缺考!

考前答疑: 2021 年 6 月 14 日 14:00-21:00

答疑地点: 理科楼数学科学系 A 216

# 第 30 讲

# 期末综合练习

例 1. 设函数 $f:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ 单调下降. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(f(n)-\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\right)$ 收敛.

证明: $\forall n\geqslant 1$, 定义 $a_n=f(n)-\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x$. 由于 $f$ 单调下降, 则我们有

$$f(n+1)\leqslant\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(n).$$

从而 $0\leqslant a_n\leqslant f(n)-f(n+1)$. 进而可知

$$\begin{aligned}S_n &:= \sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}\big(f(k)-f(k+1)\big)\\ &= f(1)-f(n+1)\leqslant f(1).\end{aligned}$$

于是由单调有界定理可知所证结论成立.

例 2. 假设 $\{u_n\}$ 为 $[a,b]$ 上的非负连续函数列. 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $[a,b]$ 上收敛到和函数 $S$, 求证: 和函数 $S$ 在 $[a,b]$ 上有最小值.

证明: $\forall n \geqslant 1$, 定义 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. 则 $S_n \in \mathscr{C}[a,b]$ 并且非负. 由于函数列 $\{S_n\}$ 单调递增趋于 $S$. 故 $S$ 非负, 从而由确界定理可知 $S$ 在 $[a,b]$ 上有下确界, 设为 $A$. 由下确界的定义知, $\forall k \geqslant 1$, $\exists x_k \in [a,b]$ 使得 $S(x_k) < A + \frac{1}{k}$. 由列紧性可知数列 $\{x_k\}$ 有收敛子列 $\{x_{k_m}\}$, 其极限记作 $\alpha$.

于是由极限保序性可知 $\alpha \in [a,b]$. 我们在下面将证明 $A = S(\alpha)$. 由此可知所证结论成立.

事实上, $\forall n, m \geqslant 1$, 我们有

$$S_n(x_{k_m}) \leqslant S(x_{k_m}) < A + \frac{1}{k_m}.$$

注意到 $S_n \in \mathscr{C}[a,b]$ 并让 $m \to \infty$, 则 $S_n(\alpha) \leqslant A$. 让 $n \to \infty$ 得 $S(\alpha) \leqslant A$. 但 $A$ 为 $S$ 在 $[a,b]$ 上的下确界, 因此 $S(\alpha) = A$.

例 3. 假设 $\Omega$ 是由光滑锥面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$ 与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所围成的圆锥体, 该锥体的顶点为原点. 求证:

$$|\Omega| = \frac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{r}\cdot\vec{n}^0 \,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{3}Sh,$$

其中 $\vec{r}=(x,y,z)^T$, $\vec{n}^0$ 为 $\Omega$ 的边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $S$ 为圆锥的底面积, $h$ 为圆锥的高.

证明: (1) 由 Gauss 公式立刻可知

$$\frac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{r}\cdot\vec{n}^0 \,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}\,\vec{r}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = |\Omega|.$$

(2) $\partial\Omega$ 由两个部分所组成: 锥面 $\Sigma$ 以及平面 $\Sigma_1$. 又锥面的顶点为原点, 于是 $\forall P=(x,y,z)\in\Sigma$, $\vec{r}(P)\perp\vec{n}^0(P)$, 故 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\vec{r}\cdot\vec{n}^0\,\mathrm{d}\sigma=0$. 另外,

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\vec{r}\cdot\vec{n}^0\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\Sigma_1}\left|\frac{(x,y,z)^T\cdot(A,B,C)^T}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{|-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}|\Sigma_1|,$$

其中 $|\Sigma_1|$ 为锥体的底面积, 而 $h=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 为原点到 $\Sigma_1$ 的距离, 即锥体的高, 故所证成立.

例 4. 计算 Gauss 积分 $\oiint\limits_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $S$ 是不经过原点的分片光滑闭曲面, $\vec{n}$ 为 $S$ 的单位外法向量, $\vec{r}=(x,y,z)^T$, 而 $r=\|\vec{r}\|$.

解: 设 $\Omega$ 为曲面 $S$ 所围成的空间立体.

(1) 若原点不属于 $\Omega$, 则由 Gauss 公式可知

$$\begin{aligned}\oiint\limits_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,\mathrm{d}\sigma &= \oiint\limits_S \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \iiint\limits_\Omega \vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.\end{aligned}$$

(2) 如果原点属于 $\Omega$ 的内部, 那么 $\exists\delta>0$ 使得 $\bar{B}(\vec{0},\delta)\subset\mathring{\Omega}$. 设 $S_1=\partial\bar{B}(\vec{0},\delta)$, 而 $\vec{n}$ 为其单位外法向量. 令 $D=\Omega\setminus B(\vec{0},\delta)$. 由 Gauss 公式可知

$$\oiint\limits_{S}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,\mathrm{d}\sigma-\oiint\limits_{S_1}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint\limits_{D}\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{S}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,\mathrm{d}\sigma &= \oiint\limits_{S_1}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,\mathrm{d}\sigma\\ &= \frac{1}{\delta^2}\oiint\limits_{S_1}1\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{\delta^2}|S_1|=4\pi.\end{aligned}$$

例 5. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n+1)x \cdot \cos(n-1)x}{n^p}$ 是否为绝对收敛或条件收敛?

解: 当 $x \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ 时, 原级数的通项恒等于 0, 此时原级数绝对收敛. 下面假设 $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

若 $p \leqslant 0$, 原级数的通项不趋于 0, 故级数发散.

若 $p > 1$, 则 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $\frac{|\sin(n+1)x \cdot \cos(n-1)x|}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^p}$. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 由比较法则知原级数绝对收敛.

当 $0 < p \leqslant 1$ 时, $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\frac{\sin(n+1)x \cdot \cos(n-1)x}{n^p} = \frac{\sin(2nx)}{2n^p} + \frac{\sin(2x)}{2n^p}.$$

再注意到 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(2kx)\right| &= \left|\operatorname{Im}\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{i(2kx)}\Big)\right| \\
&= \left|\operatorname{Im}\Big(\frac{e^{2ix} - e^{2(n+1)ix}}{1 - e^{2ix}}\Big)\right| \\
&= \left|\operatorname{Im}\Big(\frac{e^{i(n+2)x}(e^{-inx} - e^{inx})}{e^{ix}(e^{-ix} - e^{ix})}\Big)\right| \\
&= \left|\frac{\sin(n+1)x \cdot \sin nx}{\sin x}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin x|},
\end{aligned}$$

而 $\{\frac{1}{2n^p}\}$ 单调趋于 0, 于是由 Dirichlet 判别准则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n^p}$ 收敛, 但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 发散, 故原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cdot\cos(n-1)x}{n^p}$ 发散.

综上所述可知, 当 $x\in\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ 时, 原级数绝对收敛; 当 $x\notin\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ 时, 若 $p\leqslant 1$, 则原级数发散; 若 $p>1$, 则原级数绝对收敛.

例 6. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散, 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})x_n$ 发散.

证明: 用反证法, 假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$ 为收敛.

由于数列 $\left\{\frac{n}{1+n}\right\}$ 单调有界, 则由 Abel 判别准则

可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n \cdot \frac{n}{1+n}$ 也收敛,

矛盾! 故所证结论成立.

例 7. 设正项数列 $\{a_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)=\rho>0,$$

求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

证明: 方法 1. 由数列极限的保号性知, $\exists N>0$ 使得 $\forall n\geqslant N$, 均有 $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>0$, 故 $a_n>a_{n+1}$. 则数列 $\{a_n\}$ 从第 $N$ 开始单调递减, 从而收敛, 设其极限为 $a$. 下证 $a=0$. 用反证法, 假设 $a>0$,

则我们由题设立刻可得

$$\rho = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(a_n - a_{n+1})}{a},$$

也即当 $n\to\infty$ 时, 我们有 $a_n - a_{n+1} \sim \frac{\rho a}{n}$. 于是由比较法则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 发散, 但该级数等于

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{k\to\infty}(a_1 - a_{k+1}) = a_1 - a,$$

矛盾! 于是 $a=0$, 从而数列 $\{a_n\}$ 从第 $N$ 开始单调递减趋于 0, 进而由 Leibniz 判别准则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

方法 2. 令 $\alpha = \frac{\rho}{2}$. 因 $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big((1+\frac{1}{n})^{\alpha} - 1\Big) = \alpha$,

则由极限的保序性知, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n \geqslant N$,

$$n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) > n\Big((1+\frac{1}{n})^{\alpha} - 1\Big) > 0,$$

由此知正项数列 $\{a_n\}$ 从第 $N$ 开始单调递减.

另外, $\forall n \geqslant N$, 我们有 $\frac{a_n}{a_{n+1}} > (1+\frac{1}{n})^{\alpha}$, 也即

$$n^{\alpha} a_n > (n+1)^{\alpha} a_{n+1}.$$

于是我们由单调有界定理知数列 $\{n^\alpha a_n\}$ 收敛, 设其极限为 $A$. 则我们有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha a_n}{n^\alpha} = 0,$$

从而数列 $\{a_n\}$ 从第 $N$ 开始单调递减且趋于 0, 由 Leibniz 判别准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

例 8. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{a}{1+a^n}$ $(a>0)$ 是否为绝对收敛或条件收敛?

解: 当 $a>1$ 时, 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{a}{1+a^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{a}<1$, 从而由根值判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{a}{1+a^n}$ 绝对收敛.

当 $a\leqslant 1$ 时, 由 Leibniz 判别准则立刻可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛. 注意到数列 $\{\frac{a}{1+a^n}\}$ 单调有界,

则由 Abel 判别准则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{a}{1+a^n}$ 收敛.

当 $n\to\infty$ 时, $\frac{1}{n}\cdot\frac{a}{1+a^n}\sim\frac{a}{n}$ (若 $0<a<1$), 或

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{a}{1+a^n}\sim\frac{1}{2n}\ (\text{若 } a=1),$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{a}{1+a^n}$ 条件收敛.

综上所述可知, 当 $a>1$ 时, 原级数为绝对收敛;

而当 $0<a\leqslant 1$ 时, 原级数为条件收敛.

注: 该题不能直接应用 Leibniz 判别法.

例 9. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ 是否绝对收敛或条件收敛?

解: 当 $a = 0$ 时, 级数的通项恒等于 0, 故原级数绝对收敛. 下面假设 $a \neq 0$. 则我们有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{|a|}{e}.$$

于是由比率判别法可知, 当 $|a| < e$ 时, 原级数为绝对收敛, 而当 $|a| > e$ 时, 原级数发散.

当 $|a| = e$ 时, 由于 $\forall n \geqslant 1$, $(1+\frac{1}{n})^n < e$, 则

$$\left|\frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}}\right| = \frac{|a|}{(1+\frac{1}{n})^n} > \frac{|a|}{e} = 1,$$

于是正项数列 $\{\frac{|a|^n n!}{n^n}\}$ 严格单调递增, 故不可能趋于 0, 因此原级数发散.

综上所述可知, 当 $|a| < e$ 时, 原级数绝对收敛; 而当 $|a| \geqslant e$ 时, 原级数发散.

例 10. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ $(p>0)$ 是否为绝对收敛或条件收敛?

解: 当 $n\to\infty$ 时, 我们有 $|\log(1+\frac{(-1)^n}{n^p})| \sim \frac{1}{n^p}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛当且仅当 $p>1$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log(1+\frac{(-1)^n}{n^p})$ 绝对收敛当且仅当 $p>1$.

下面假设 $0<p\leqslant 1$. $\forall n\geqslant 1$, 令

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^p} - \log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right).$$

则当 $n \to \infty$ 时, 成立 $u_n = \frac{1}{2n^{2p}}(1+o(1)) \sim \frac{1}{2n^{2p}}$.
而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2p}}$ 收敛当且仅当 $p > \frac{1}{2}$, 故由比较法则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛当且仅当 $p > \frac{1}{2}$. 由 Leibniz 判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 收敛, 于是原级数在 $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ 时条件收敛, 而在 $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ 时发散.

综上所述可知, 原级数在 $p > 1$ 时为绝对收敛;

在 $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ 时条件收敛, 在 $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ 时发散.

**例 11.** 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛而且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1$, 请问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 是否收敛?

**解:** 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 不一定收敛. 例如, $\forall n \geqslant 1$, 令

$$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \quad y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1$. 由 Leibniz 判别准则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散.

例 12. 设正项数列 $\{u_n\}$ 单调下降趋于实数 $a$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 发散, 求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n$ 收敛.

证明: 由题设及 Leibniz 判别法可知 $a>0$. 又

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+a}<1,$$

则由根值判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n$ 收敛.

**例 13.** 假设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛而且数列 $\{x_n\}$ 单调递减, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 0$.

**证明:** 由题设以及 Cauchy 判别准则知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 > 0$ 使 $\forall n \geqslant m > N_0$, 均有 $0 < \sum\limits_{k=m}^{n} x_k < \frac{\varepsilon}{2}$. 令 $N = 2N_0 + 1$. 那么 $\forall n > N$, $[\frac{n}{2}] > N_0$, 从而 $\frac{\varepsilon}{2} > \sum\limits_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} x_k > \frac{n}{2} \cdot x_n > 0$, 由此可得 $0 < nx_n < \varepsilon$. 于是由极限的定义可知所证结论成立.

**例 14.** 求证: $\forall n \geqslant 1$, 多项式 $x^n + nx - 1$ 拥有唯一正根, 记作 $x_n$ 并判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 的敛散性.

**解:** $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x > 0$, 令 $f_n(x) = x^n + nx - 1$, 则 $f_n$ 可导且 $f_n'(x) = nx^{n-1} + n > 0$, 于是 $f_n$ 为单射. 又 $f_n(\frac{1}{n}) = (\frac{1}{n})^n > 0$, $f_n(\frac{1}{2n}) = (\frac{1}{2n})^n - \frac{1}{2} < 0$, 从而由连续函数介值定理知, $\exists x_n \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n})$ 使得 $f_n(x_n) = 0$, 进而可知多项式 $x^n + nx - 1$ 有唯一正根 $x_n$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛当且仅当 $\alpha > 1$, 于是由比较法则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛当且仅当 $\alpha > 1$.

**例 15.** 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

**证明:** 由级数的性质知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 与级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ 同敛散, 其中 $a_k = \sum\limits_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{n}$. $\forall k \geqslant 2$,

$$a_k \leqslant \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{k^2-1}^{(k+1)^2-1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log \frac{(k+1)^2-1}{k^2-1},$$

$$a_k \geqslant \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log \frac{(k+1)^2}{k^2},$$

由此可得 $a_{k+1} \leqslant \log \frac{(k+2)^2-1}{(k+1)^2-1} < \log \frac{(k+1)^2}{k^2} \leqslant a_k$.

于是数列 $\{a_k\}$ 从第二项开始单调递减并且由

夹逼原理可知 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, 进而由 Leibniz 判别

准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ 收敛, 从而原级数收敛.

例 16. 假设 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, 而 $L$ 为光滑的封闭平面曲线. 求证: $\displaystyle\oint_{L^+} f(x^2+y^2)\,(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) = 0.$

证明: 由于 $f$ 为连续函数, 故有原函数, 设它的一个原函数为 $F$. 则 $F$ 为连续可导且 $F' = f$. 固定 $A \in L$, 则我们有

$$\oint_{L^+} f(x^2+y^2)\,(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) = \frac{1}{2}\oint_{L^+} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x^2+y^2)$$
$$= \frac{1}{2}\oint_{L^+} \mathrm{d}\big(F(x^2+y^2)\big) = \frac{1}{2}F(x^2+y^2)\Big|_A^A = 0.$$

**例 17.** 求证: $\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{1}{R^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}[\sqrt{x^2+y^2+z^2}]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi$.

证明: $\forall R>0$, 定义

$$I(R)=\frac{1}{R^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}[\sqrt{x^2+y^2+z^2}]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{R^4}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{R}[r]r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi}{R^4}\int_0^{R}[r]r^2\,\mathrm{d}r.$$

由此我们立刻可得

$$\pi=\frac{4\pi}{R^4}\int_0^{R}r^3\,\mathrm{d}r\geqslant I(R)\geqslant\frac{4\pi}{R^4}\int_0^{R}(r-1)r^2\,\mathrm{d}r=\pi-\frac{4\pi}{3R}.$$

于是由夹逼原理可知所证结论成立.

例 18. 设 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 连续使得 $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 均有 $F(x,y,z)=F(\sqrt{x^2+y^2+z^2},0,0)$. $\forall t\in\mathbb{R}$, 定义 $f(t)=F(t,0,0)$. 求证:

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4\pi\int_0^1 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明: 由题设并利用球坐标系立刻可得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 f(\rho)\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi = 4\pi\int_0^1 \rho^2 f(\rho)\,\mathrm{d}\rho.$$

例 19. 设 $D \subset \mathbb{R}^3$ 为面单连通区域, $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^3$ 为连续可导. 则 $\operatorname{div}\vec{F} \equiv 0$ 当且仅当对于 $D$ 内的任意定向光滑封闭曲面 $S$, 均有 $\oiint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \, \mathrm{d}\sigma = 0$, 其中 $\vec{n}^0$ 为曲面 $S$ 的单位外法向量.

证明: 必要性. 设 $\operatorname{div}\vec{F} \equiv 0$. 对于 $D$ 内任意的定向有界光滑闭曲面 $S$, 我们将 $S$ 所围的区域记作 $D_0$, 则由 Gauss 公式可得

$$\oiint\limits_{\partial D_0} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \, \mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{D_0} \operatorname{div}\vec{F} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

充分性. 设 $X_0 \in D$. 由于 $D$ 为开集, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $B(X_0, \delta) \subset D$. $\forall \varepsilon \in (0, \delta)$, 由题设可知

$$\iiint\limits_{\bar{B}(X_0,\varepsilon)} \mathrm{div}\vec{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\partial\bar{B}(X_0,\varepsilon)} \vec{F}\cdot\vec{n}^0\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

则由积分中值定理可知, $\exists X_0(\varepsilon) \in \bar{B}(X_0, \varepsilon)$ 使得 $\mathrm{div}\vec{F}(X_0(\varepsilon)) = 0$. 再由函数 $F$ 的连续可导性与复合函数极限法则可得

$$\mathrm{div}\vec{F}(X_0) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{div}\vec{F}(X_0(\varepsilon)) = 0,$$

最后由 $X_0$ 的任意性可知所证结论成立.

例 20. 假设 $f$ 在 $D=\bar{B}((0,0);1)\subset\mathbb{R}^2$ 上连续, 在其内部连续可导且在边界上恒为零. 求证:

(1) $$\iint\limits_D\left(f(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0;$$

(2) $$\iint\limits_D\left(f(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0;$$

(3) $$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi}{3}M,$$ 其中

$$M=\max_{(x,y)\in D}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}.$$

证明: (1) 方法 1. 由题设可知

$$\iint\limits_D \left(f(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\left(yf(x,y)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\right.$$

$$\left.-\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=0.$$

方法 2. 由 Green 公式可得

$$
\begin{aligned}
& \iint\limits_D \left( f(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
= & \iint\limits_D \frac{\partial \big( yf(x,y) \big)}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
= & -\oint\limits_{\partial D^+} yf(x,y)\,\mathrm{d}x \\
= & \ 0.
\end{aligned}
$$

(2) 在证明 (1) 的过程中交换 $x, y$ 的作用, 我们立刻可得所要结论.

(3) 由 (1), (2) 立刻可得

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| = \frac{1}{2}\left|\iint\limits_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\iint\limits_D \left|x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \frac{M}{2}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{M}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{3}M.$$

例 21. $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 定义

$$\vec{V}(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2, xy+yz+zx, xyz)^T.$$

计算 $\mathrm{div}\vec{V}$.

解: $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 由定义可得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{V}(x,y,z) &= \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x} \\ &\quad +\frac{\partial(xy+yz+zx)}{\partial y}+\frac{\partial(xyz)}{\partial z} \\ &= 2x+(x+z)+xy=3x+xy+z.\end{aligned}$$

例 22. 计算 $I=\oint\limits_{L^+}(y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$，其中 $L^+$ 为圆周

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ y=x\tan\alpha \end{cases} \quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right),$$

其中从 $x$ 轴正向看，$L^+$ 的方向为逆时针方向.

解：令 $S: y=x\tan\alpha\ (x^2+y^2+z^2\leqslant a^2)$，取其正方向的单位法向量为 $\vec{n}^0=(\sin\alpha,-\cos\alpha,0)^T$，该圆盘的边界为 $L^+$，二者满足右手螺旋法则.

于是由 Stokes 公式可知

$$\begin{aligned}I &= \iint\limits_{S^+}(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x-\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\\&\quad-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)\\&=\iint\limits_{S^+}(-2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\&=-\iint\limits_{S}(2,2,2)^T\cdot\vec{n}^0\,\mathrm{d}\sigma=2(\cos\alpha-\sin\alpha)\iint\limits_{S}1\,\mathrm{d}\sigma\\&=2(\cos\alpha-\sin\alpha)|S|=2\pi a^2(\cos\alpha-\sin\alpha).\end{aligned}$$

例 23. 设 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$, 而 $f:D\to\mathbb{R}$ 为连续可导函数使得 $\forall t>0$ 以及 $\forall(x,y)\in D$, 均有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 求证: 对于 $D$ 内的任意分段光滑有向简单闭曲线 $L^+$, 成立

$$\oint_{L^+} yf(x,y)\,\mathrm{d}x - xf(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

证明: 由于 $\forall t>0$ 以及 $\forall(x,y)\in D$, 我们均有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$, 将之对 $t$ 求导可得

$$x\partial_1 f(tx,ty)+y\partial_2 f(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y).$$

特别地, 当 $t=1$ 时, 我们有

$$x\partial_1 f(x,y)+y\partial_2 f(x,y)=-2f(x,y).$$

对于 $D$ 内的任意分段光滑有向简单闭曲线 $L^+$, 将其所围成的区域记为 $\Omega$, 则由 Green 公式知

$$\begin{aligned}
&\oint_{L^+} yf(x,y)\,\mathrm{d}x-xf(x,y)\,\mathrm{d}y\\
&=\pm\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial y}\big(yf(x,y)\big)+\frac{\partial}{\partial x}\big(xf(x,y)\big)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\pm\iint_{\Omega}\left(f(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+f(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=0.
\end{aligned}$$

例 24. 设 $S$ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 计算

$$\oiint_S (x+1)^2 \,\mathrm{d}\sigma.$$

解: 由对称性可得

$$\begin{aligned}
\oiint_S (x+1)^2 \,\mathrm{d}\sigma &= \oiint_S (x^2+2x+1) \,\mathrm{d}\sigma \\
&= \oiint_S x^2 \,\mathrm{d}\sigma + \oiint_S 2x \,\mathrm{d}\sigma + \oiint_S 1 \,\mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{3}\oiint_S (x^2+y^2+z^2) \,\mathrm{d}\sigma + |S| = \frac{4}{3}|S| = \frac{16}{3}\pi.
\end{aligned}$$

**例 25.** 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 条件收敛.

解: $\forall n \geqslant 1$, 令 $u_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 则 $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$, 因此数列 $\{u_n\}$ 单调递减. 又 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\Big(\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, 由 Leibniz 判别准则可得原级数收敛. 又 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $u_n = \frac{1}{2n}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)}{2k} \geqslant \frac{1}{2n}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散, 由比较法则知原级数条件收敛.

**例 26.** 假设 $L \subset \mathbb{R}^2$ 为分段光滑的简单闭曲线，而 $f$ 为 $L$ 上的连续函数. $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus L$, 令

$$F(u,v) = \oint_L f(x,y) \log \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}\, \mathrm{d}\ell.$$

求证: $\lim\limits_{u^2+v^2 \to +\infty} F(u,v) = 0$ 当且仅当 $\oint_L f(x,y)\, \mathrm{d}\ell = 0$.

**证明:** 由题设可知曲线 $L$ 有界, 则 $\exists R > 0$ 使得 $L \subset B((0,0); R)$. $\forall (x,y) \in L$ 以及 $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, 当 $u^2 + v^2 > R^2$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{|-2ux + x^2 - 2vy + y^2|}{u^2+v^2} &\leqslant \frac{2|ux| + x^2 + 2|vy| + y^2}{u^2+v^2} \\ &\leqslant \frac{2R(|u|+|v|) + R^2}{u^2+v^2} \leqslant \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{R^2}{u^2+v^2}. \end{aligned}$$

由此可知, 当 $u^2+v^2\to+\infty$ 时, 我们有

$$\frac{(u-x)^2+(v-y)^2}{u^2+v^2}-1=\frac{-2ux+x^2-2vy+y^2}{u^2+v^2}$$

关于 $(x,y)\in L$ 一致趋于 0. 于是由积分与极限次序可交换性可知

$$\lim_{u^2+v^2\to+\infty}\oint_L f(x,y)\log\frac{\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\mathrm{d}\ell$$

$$=\oint_L f(x,y)\lim_{u^2+v^2\to+\infty}\log\frac{\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\mathrm{d}\ell=0.$$

**充分性.** 若 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}\ell = 0$, 则我们有

$$\lim_{u^2+v^2\to+\infty} F(u,v) = \lim_{u^2+v^2\to+\infty} \left( F(u,v) - \oint_L f(x,y)\log\sqrt{u^2+v^2}\,\mathrm{d}\ell \right)$$

$$= \lim_{u^2+v^2\to+\infty} \oint_L f(x,y)\log\frac{\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\mathrm{d}\ell = 0.$$

**必要性.** 若 $\lim\limits_{u^2+v^2\to+\infty} F(u,v) = 0$, 则我们有

$$\lim_{u^2+v^2\to+\infty} \left(\log\sqrt{u^2+v^2}\right) \oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}\ell$$

$$= \lim_{u^2+v^2\to+\infty} \left( \oint_L f(x,y)\log\sqrt{u^2+v^2}\,\mathrm{d}\ell - F(u,v) \right)$$

$$= -\lim_{u^2+v^2\to+\infty} \oint_L f(x,y)\log\frac{\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\mathrm{d}\ell = 0.$$

由此立刻可得 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}\ell = 0$.

**例 27.** $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 定义

$$f(x,y,z)=\sin(x^2+y^2+z^2),$$

计算 $\operatorname{grad} f$ 和 $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$.

**解:** 由定义可知, $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 我们有

$$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\begin{pmatrix}\partial_1 f(x,y,z)\\ \partial_2 f(x,y,z)\\ \partial_3 f(x,y,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\cos(x^2+y^2+z^2)\\ 2y\cos(x^2+y^2+z^2)\\ 2z\cos(x^2+y^2+z^2)\end{pmatrix}.$$

而由梯度与旋度的关系可得

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)(x,y,z)=0.$$

例 28. 求解方程 $(\cos x + \frac{1}{y})\,\mathrm{d}x + (\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2})\,\mathrm{d}y = 0$.

解: 由题设可知

$$
\begin{aligned}
0 &= \cos x\,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y\right) + \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{d}\left(\sin x + \frac{x}{y} + \log|y|\right),
\end{aligned}
$$

于是所求常微分方程的解满足

$$
\sin x + \frac{x}{y} + \log|y| = C,
$$

其中 $C$ 为任意常数.

祝大家期末考试获得圆满成功!