微积分 A (1)

姚家燕

第 19 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

期中考试评讲

例 1. 设函数 $f:(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\to\mathbb{R}$ 在点 $x=1$ 处连续, 函数 $g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}$ 在 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\setminus\{1\}$ 内有界, 计算 $f(1)$.

解: 由题设可知, $\forall x\in(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\setminus\{1\}$, 我们有

$$f(x)=(x-1)g(x)+\frac{x-1}{\ln x}+2x.$$

由夹逼原理可知, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)g(x)=0$, 进而由函数 f 在点 $x=1$ 处的连续性可得

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\Big(\frac{x-1}{\ln x}+2x\Big)=3.$$

例 2. 设参数 $a > 0$. 讨论曲线 $y = a^x$ 与直线 $y = x$ 的交点的个数.

解: $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $f(x) = a^x - x$. 则 f 为初等函数且 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $f'(x) = a^x \log a - 1$.

下面分情况讨论:

情形 1: $0 < a \leqslant 1$. 则 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $f'(x) < 0$. 故 f 在 $\mathbb{R}$ 上严格递减. 注意到

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

由广义连续函数介值定理, 两曲线有唯一交点.

情形 2: $a>1$. 选定 $x_0=-\frac{\log\log a}{\log a}$. 则函数 f' 在 $(-\infty,x_0)$ 上为负, 而在 $(x_0,+\infty)$ 上为正, 故 f 在 $(-\infty,x_0)$ 上严格递减, 在 $(x_0,+\infty)$ 上严格递增, 从而 $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$, $f(x)>f(x_0)$.

(a): $a>e^{\frac{1}{e}}$. 此时 $f(x_0)=\frac{1+\log\log a}{\log a}>0$, 则题设两曲线没有交点.

(b): $a=e^{\frac{1}{e}}$. 此时 $f(x_0)=0$, 从而题设两曲线有唯一的交点.

(c): $1<a<e^{\frac{1}{e}}$. 则 $f(x_0)<0$. 又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a^x\left(1-\frac{x}{a^x}\right) = +\infty,$$

于是由广义连续函数介值定理可知道, 函数 f 在两区间 $(-\infty, x_0)$, $(x_0, +\infty)$ 内各自只有一个零点, 此时题设两曲线恰好有两个交点.

例 3. 设 $x_1 < 2$, $x_{n+1} = x_n + \ln(2 - x_n)$ $(n \geqslant 1)$. 讨论数列 $\{x_n\}$ 的收敛性. 若收敛, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解: $\forall x < 2$, 我们定义 $f(x) = x + \log(2 - x)$. 则 f 为初等函数, 从而连续可导并且 $\forall x < 2$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{x-2}.$$

于是 f' 在 $(-\infty, 1)$ 为正, 而在 $(1, 2)$ 上为负, 从而 $\forall x < 2$, 均有 $f(x) \leqslant f(1) = 1$. 又 $x_1 < 2$,

因此由题设递推关系式可定义一个数列 $\{x_n\}$, 且 $\forall n \geqslant 2$, 我们均有 $x_n \leqslant 1$, 从而

$$x_{n+1} - x_n = \log(2 - x_n) \geqslant 0,$$

也即数列 $\{x_n\}$ 从第 2 项开始单调递增且以 1 为上界, 于是由单调有界定理可知该数列收敛. 将其极限记作 A. 由递推关系得

$$A = A + \log(2 - A),$$

进而可得 $A = 1$.

期中考试到此结束!

第 18 讲回顾: Riemann 积分的概念

- 对于分割 $P: \ a = x_0 < \cdots < x_n = b$, 令

$$
\begin{aligned}
\Delta_i &= [x_{i-1}, x_i] \, (1 \leqslant i \leqslant n), \\
\Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \, (1 \leqslant i \leqslant n), \\
\lambda(P) &= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i \, (\text{称为 } P \text{ 的步长}).
\end{aligned}
$$

- 取点: $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, 其中 $\xi_i \in \Delta_i$. 此时我们称 (P, ξ) 为带点分割.

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为函数.

- Riemann 和: $\sigma(f;P,\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.
- Riemann 积分:

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f;P,\xi).$$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得对 $[a,b]$ 的任意带点分割 (P,ξ),

当 $\lambda(P)<\delta$ 时, 均有 $|\sigma(f;P,\xi)-I|<\varepsilon$.

- 记 $\mathscr{R}[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上可积函数的集合.

- 否定形式: 函数 f 在 $[a,b]$ 上不可积当且仅当 $\forall I \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, 存在 $[a,b]$ 的某个带点分割 (P,ξ) 满足 $\lambda(P) < \delta$, 但我们却有 $|\sigma(f;P,\xi) - I| \geqslant \varepsilon_0$.
- 常值函数可积且 $\forall c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$.
- 有限个点处不为零的函数可积且积分为零.
- Dirichlet 函数不可积.
- Riemann 可积的必要条件: 可积函数有界.

回顾: 判断函数可积的 Darboux 准则

- 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数, 而

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

为 $[a,b]$ 的分割. 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$, 令

$$m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x),$$

$$L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \inf_{\xi} \sigma(f;P,\xi),$$

$$U(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sup_{\xi} \sigma(f;P,\xi).$$

- 若 P_1, P_2 为 $[a,b]$ 的分割且 $P_1 \subseteq P_2$, 则

$$L(f;P_1) \leqslant L(f;P_2) \leqslant U(f;P_2) \leqslant U(f;P_1).$$

- 若 P_1, P_2 为 $[a,b]$ 的两个分割, 则

$$L(f;P_1) \leqslant U(f;P_2).$$

- 下积分: $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\limits_P L(f,P).$
- 上积分: $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\limits_P U(f,P).$
- $L(f,P) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant U(f,P).$

函数可积性判别准则 (Darboux 准则)

设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界, 则下述结论等价:

(1) $f\in\mathscr{R}[a,b]$;

(2) $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 P 使得

$$U(f;P)-L(f;P)<\varepsilon;$$

(3) $\displaystyle\lim_{\lambda(P)\to 0}\big(U(f;P)-L(f;P)\big)=0;$

(4) $\displaystyle\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=0;$

(5) $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$

回顾：一致连续函数

- 一致连续函数: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in X$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- 刻画: 函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 为一致连续当且仅当对于 X 当中的任意的两个数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 如果 $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, 则我们有
$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0.$$
- 非一致连续例子: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $\forall x \in (0, 1)$.
- 闭区间上的连续函数一致连续.

回顾: 典型的可积函数类

- 在闭区间上仅有限多个点间断点的有界函数可积. 特别地, 闭区间上的连续函数、逐段连续函数均可积.
- 闭区间上的单调函数可积.
- 闭区间上的有界函数为 Riemann 可积当且仅当其间断点集为零测度集.

回顾: 定积分的性质

- (线性性) 假设 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 而且 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则 $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}[a,b]$ 且

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 在有限多个点处改变函数的值, 既不会改变函数的可积性, 也不改变积分的大小.

- (积分区间的可加性) 假设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为函数而 $c\in(a,b)$, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当 f 分别在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上可积, 此时

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, 我们均有

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

- (保序性) 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ 且 $f \geqslant g$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, 若 $\exists m, M \in \mathbb{R}$ 使 $m \leqslant f \leqslant M$, 则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

- (保号性) 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 非负, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

- (严格保号性) 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 为非负函数，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 当且仅当 $f \equiv 0$.
- (严格保序性) 若 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 使 $f \geqslant g$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

且等号成立当且仅当 $f \equiv g$.

第 19 讲

例 2. 若 $f \in \mathscr{C}[a-1, b+1]$ (其中 $a < b$), 求证

$$\lim_{t \to 0} \int_a^b |f(x+t) - f(x)| \, \mathrm{d}x = 0.$$

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}[a-1, b+1]$, 则 f 一致连续, 从而 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ 使得 $\forall x, y \in [a-1, b+1]$, 当 $|x - y| < \delta_1$ 时, 我们有 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. 令 $\delta = \min(\delta_1, \frac{1}{2})$, 于是 $\forall x \in [a, b]$ 以及 $\forall t \in \mathbb{R}$, 当 $|t| < \delta$ 时, 均有 $|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, 故

$$\int_a^b |f(x+t) - f(x)| \, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

因此所证结论成立.

例 3. 求证: $\frac{2}{5} < \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{2}$.

证明: $\forall x \in [1,2]$, 定义 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. 那么 f 可导并且 $\forall x \in (1,2)$, 均有 $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0$. 因此函数 f 严格递减, 从而我们有

$$\frac{2}{5} = f(2) < \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < f(1) = \frac{1}{2}.$$

作业题: 第 5.2 节第 141 页第 5 题第 (3), (4) 题

补充题: 求证: $\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

命题 4. 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$ 且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明: 对于区间 $[a,b]$ 的任意分割

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

我们有 $0 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(|f|;\Delta_i)\Delta x_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i$,

于是由夹逼原理知 $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(|f|;\Delta_i)\Delta x_i = 0$,

从而我们有 $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$. 又 $\forall x \in [a,b]$, 均有

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

由此我们可立刻导出

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

因此所证结论成立.

作业题: 第 5.2 节第 141 页第 8 题.

命题 5. 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $fg \in \mathscr{R}[a,b]$.

证明: 定义 $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, 则 $\forall x, y \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}\left|(f(x))^2-(f(y))^2\right| &= \left|f(x)+f(y)\right|\cdot\left|f(x)-f(y)\right| \\ &\leqslant 2M\left|f(x)-f(y)\right|.\end{aligned}$$

于是对于区间 $[a,b]$ 的任意分割 P, 我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(f^2;\Delta_i)\Delta x_i \leqslant 2M\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i.$$

由于 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则由夹逼原理可知

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f^2; \Delta_i)\Delta x_i = 0,$$

故 $f^2 \in \mathscr{R}[a,b]$. 又 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则

$$f+g, f-g \in \mathscr{R}[a,b],$$

由此可得 $fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big) \in \mathscr{R}[a,b]$, 从而所证结论成立.

Cauchy 不等式

定理 1. 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x\right).$$

证明: $\forall t \in \mathbb{R}$, 令 $F(t) = \int_a^b \big(tf(x) - g(x)\big)^2 \mathrm{d}x$, 则

$$F(t) = t^2 \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x - 2t\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \big(g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

由于 F 为关于 t 的二次多项式且恒 $\geqslant 0$, 因此其判别式 $\leqslant 0$. 由此立刻可得所要结论.

作业题: 第 5.2 节第 141 页第 9 题.

经典的 Hölder 不等式

定理 2. 若 $x_k, y_k, p, q > 0\,(1 \leqslant k \leqslant n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}$, 并且等号成立当且仅当 $x_k^p y_k^{-q}$ 为不依赖 k 的常数.

积分 Hölder 不等式

定理 3. 若 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$, $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证明: 对 $[a,b]$ 的任意带点分割 (P,ξ), 我们有

$$\begin{aligned}
|\sigma(fg;P,\xi)| &= \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \left(|f(\xi_i)|(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}}\right)\cdot\left(|g(\xi_i)|(\Delta x_i)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

于是由经典的 Hölder 不等式可知

$$
\begin{aligned}
|\sigma(fg;P,\xi)| &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(|f(\xi_i)|(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}}\right)\cdot\left(|g(\xi_i)|(\Delta x_i)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|^p\Delta x_i\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|g(\xi_i)|^q\Delta x_i\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sigma(|f|^p;P,\xi)\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sigma(|g|^q;P,\xi)\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}
$$

由于 $f,g\in\mathscr{C}[a,b]$, 从而 $|f|^p,|g|^q\in\mathscr{C}[a,b]$, 进而由定积分定义及极限保序性可得所要不等式.

Minkowski 积分不等式

定理 4. 若 $p>1$, 而 $f,g\in\mathscr{C}[a,b]$, 求证:

$$\Big(\int_a^b(|f(x)|+|g(x)|)^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big(\int_a^b|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\int_a^b|g(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

证明: 若 f 或 g 恒为零, 则所证成立. 下设 f,g 均不恒为零. 令 $q=\frac{p}{p-1}$. 由 Hölder 不等式可知

$$\int_a^b(|f(x)|+|g(x)|)^p\,\mathrm{d}x=\int_a^b|f(x)|(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}\,\mathrm{d}x$$
$$+\int_a^b|g(x)|(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^{(p-1)q} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+ \left(\int_a^b |g(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^{(p-1)q} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}$$

由此立刻可得

$$\left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+ \left(\int_a^b |g(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

谢谢大家!