微积分 A (2)

姚家燕

第 26 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

第 25 讲回顾: 函数列与函数项级数

- 函数列的收敛性: 收敛点, 发散点, 收敛域, 极限函数, 一致收敛性.
- 一致收敛的连续函数列的极限函数连续.
- 函数项级数的收敛性: 收敛点, 发散点, 收敛域, 极限函数, 一致收敛性.
- 函数列理论、函数项级数理论、含参广义积分理论三者的 统一性.

- 判断函数项级数一致收敛的主要方法: 定义, Weierstrass 判别法, Abel-Dirichlet 判别准则.
- 函数项级数的性质:

  (1) 极限与级数求和可交换性,

  (2) 积分与级数求和可交换性,

  (3) 求导与级数求和可交换性.

回顾：幂级数

- **Abel 定理**：设 $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，而 $\{a_n\}$ 为常数项数列使得 $\{a_n x_0^n\}$ 有界，那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内绝对且内闭一致收敛.
- 幂级数的收敛域是一个区间，它在收敛域的内部为绝对收敛，在收敛域内部的任意闭子区间上为一致收敛.
- 幂级数的收敛半径与收敛域.

第 26 讲

定理 2. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R := \frac{1}{\rho}$,

其中 $\rho = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, 约定 $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有 $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = \rho|x|$.

故由根值判别法立刻可知, 当 $|x| < R$ 时, 级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 而当 $|x| > R$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

发散, 故 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

推论 1. 若极限 $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 收敛或为 $+\infty$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$.

再由 Stolz 定理立刻可得:

推论 2. 若极限 $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ 收敛或者为 $+\infty$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$.

作业题: 第 6.3 节第 291 页第 1 题第 (3), (8) 题.

例 1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域.

解: 由题设可知所求收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}}{(-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}.$$

在 $x=\frac{1}{2}$ 处, 幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 而由 Leibniz 判别法可知该级数收敛. 在 $x=-\frac{1}{2}$ 处, 幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, 该级数发散. 故收敛域为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

例 2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x-2)^n$ 的收敛域.

解: 由题设可知所求收敛半径为

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

在点 $x = 3$ 处, 幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 因此为收敛.

而在点 $x = 1$ 处, 幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, 该级数

也收敛. 故所求收敛域为 $[1, 3]$.

例 3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{3^n}$ 的收敛域.

解: $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x^{2n-1}}{3^n}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{2-\frac{1}{n}}}{3} = \dfrac{x^2}{3}$.

于是由根值判别法可知, 当 $|x| < \sqrt{3}$ 时, 幂级数收敛, 而当 $|x| > \sqrt{3}$ 时, 幂级数发散. 由此可得题设幂级数的收敛半径为 $\sqrt{3}$. 当 $x = \pm\sqrt{3}$ 时, 原幂级数的通项变为 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, 相应的常数项级数发散. 因此所求收敛域为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

定理 3. (Abel 第二定理) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R \in (0, +\infty)$ 并且在 $x = R$ 处收敛，则 $\forall r \in (0, R)$，幂级数在 $[-r, R]$ 上一致收敛.

证明: 固定 $r \in (0, R)$. $\forall x \in [r, R]$，定义

$$u_n(x) = a_n R^n, \;\; v_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n,$$

那么函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 关于 $x \in [r, R]$ 一致收敛，而函数列 $\{v_n\}$ 单调且我们还有 $|v_n| \leqslant 1$.

从而由 Abel 判别准则立刻可知, 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在 $[r, R]$ 上为一致收敛. 而又由 Abel 定理可知上述幂级数在 $[-r, r]$ 上一致收敛, 于是由一致收敛的定义立刻可得知, 该幂级数在 $[-r, R]$ 上一致收敛, 故所证结论成立.

推论. 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R \in (0, +\infty)$ 且在 $x = R$ 处收敛, 则

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n.$$

证明: 固定 $r \in (0, R)$. 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, R]$ 上一致收敛, 并且其通项为 $[-r, R]$ 上的连续函数, 因此它的和函数在 $[-r, R]$ 上也为连续, 特别地, 该函数在点 $x = R$ 处左连续. 故所证成立.

幂级数的性质

1. 幂级数的四则运算性质:

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $R_1 > 0$, $R_2 > 0$. 令 $R = \min(R_1, R_2)$. 则:

(1) 线性性: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 以及 $\forall x \in (-R, R)$,

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n.$$

右边的收敛半径在 $R_1 \neq R_2$, $\lambda\mu \neq 0$ 时等于 R, 但当 $R_1 = R_2$ 时, 却有可能严格大于 R.

证明: 不失一般性, 假设 $R_1 < R_2$ 并记右边那个幂级数的收敛半径为 R'. 由级数的线性性可知 $R' \geqslant R = R_1$. 若 $R' > R_1$, 则对于

$$R_1 < x < \min(R_2, R'),$$

常数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n$ 发散, 而常数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu b_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$$

均收敛, 这与级数的线性性矛盾! 故 $R' = R$.

(2) 乘法: $\forall x \in (-R, R)$, 均有

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k.$$

证明: $\forall x \in (-R, R)$, 由 Abel 定理可知幂级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

绝对收敛, 再由 Cauchy 乘法立刻可得所要结论.

右边幂级数的收敛半径可严格大于 R. 例如:

$$(1-x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = 1.$$

(3) 除法: 当 $b_0 \neq 0$ 时, 在原点的某个邻域内:

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i x^i} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j,$$

其中系数 c_j 由下式定义:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

也即 $\forall n \geqslant 0$, 我们有

$$a_n = \sum_{i+j=n} b_i c_j = \sum_{i=0}^{n} b_i c_{n-i}.$$

由此我们可以递归地确定 c_n:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{b_0}a_0, \\
c_1 &= \frac{1}{b_0}(a_1 - b_1c_0) = \frac{1}{b_0}a_1 - \frac{1}{b_0^2}a_0b_1, \\
&\vdots \\
c_n &= \frac{1}{b_0}\left(a_n - \sum_{i=1}^{n} b_ic_{n-i}\right), \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

2. 幂级数的分析性质:

定理 4. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 则其和函数 $S \in \mathscr{C}(-R, R)$ 且 $\forall x \in (-R, R)$, 均有

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

并且右边幂级数的收敛半径依然为 R.

证明: 任取 $x \in (-R, R)$, 于是 $\exists r \in (0, R)$ 使得 $x \in (-r, r)$. 由 Abel 定理可知, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, r]$ 上一致收敛, 并且其通项为连续函数,

则由极限与级数求和可交换性可知, 和函数 S 在 $[-r,r]$ 上连续, 特别地, 它也在点 x 处连续. 于是 $S\in\mathscr{C}(-R,R)$. 随后再由积分与级数求和可交换性立刻可得

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

由根值判别法, 右边幂级数收敛半径的倒数为

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\frac{|a_n|}{n+1}}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{|a_n|}}{\sqrt[n+1]{n+1}}=\frac{1}{R}.$$

定理 5. 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 那么其和函数 $S \in \mathscr{C}^{(\infty)}(-R, R)$, 并且 $\forall x \in (-R, R)$ 以及 $\forall k \geqslant 0$, 我们有

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

另外右边幂级数的收敛半径依然为 R.

证明: 我们将对 $k \geqslant 0$ 应用数学归纳法来证明: $S \in \mathscr{C}^{(k)}(-R, R)$ 并且 $S^{(k)}$ 满足上述等式. 由此我们立刻可得 $S \in \mathscr{C}^{(\infty)}(-R, R)$.

当 $k=0$ 时, 由前面定理可知此时所证成立.

假设所证结论对 $k \geqslant 0$ 成立. $\forall n \geqslant k$, 令

$$u_n(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

则 u_n 在 $\mathbb{R}$ 上可导并且 $u_k' \equiv 0$, 而当 $n > k$ 时,

$$u_n'(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)a_n x^{n-k-1}.$$

再注意到我们有

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty}\Big(n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)|a_n|\Big)^{\frac{1}{n-k-1}} \\ = &\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n-k-1]{|a_n|} = \frac{1}{R}, \end{aligned}$$

也即幂级数 $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} u_n'(x)$ 的收敛半径为 R, 从而由前面定理可知它的和函数在 $(-R, R)$ 上连续并且 $\forall x \in (-R, R)$, 我们均有

$$\int_0^x \Big(\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n'(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=k+1}^{\infty} \int_0^x u_n'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=k+1}^{\infty} \big(u_n(x) - u_n(0)\big) = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n(x).$$

于是由归纳假设可知右边等于 $S^{(k)}(x) - k!\,a_k$.

进而由连续函数变上限积分的可导性可知 $S^{(k)}$ 可导, 并且 $\forall x \in (-R, R)$, 我们均有

$$S^{(k+1)}(x) = \left(S^{(k)} - k!\, a_k\right)'(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n'(x).$$

由此可知要证的结论对 $k+1$ 成立, 进而由数学归纳法可知要证的结论对所有 $k \geqslant 0$ 均成立.

注: 上述两个定理表明: 幂级数在其收敛域的内部可进行任意多次积分和求导; 这些运算与级数求和运算可交换次序且不改变收敛半径.

例 4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(n+1)x^n$ 的收敛域以及和函数, 由此计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2^n}$.

解: 由根值判别法可知题设幂级数的收敛半径等于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)}}=1$. 而 $\forall x\in(-1,1)$, 我们有 $\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, 且该幂级数的收敛半径为 1. 于是由幂级数求导与求和可交换性可知

$$-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}.$$

由此我们立刻可得

$$\frac{x^2}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n+1},$$

两边对 x 求导可知所求和函数 $S(x)$ 为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(n+1) x^n = \frac{2x}{(1+x)^3},$$

由此可知该幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$. 此外

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{27}.$$

函数的幂级数展开–Taylor 级数

问题: 设 $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. 给定函数 f, 问何时 f 能在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上被展开成幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ ?}$$

若上述展式成立, 则称 f 在点 x_0 处解析, 并且将上述幂级数称为 f 在点 x_0 处的 Taylor 级数. 当 $x_0 = 0$ 时, 该幂级数也称为 Maclaurin 级数.

必要条件: 如果上述展式成立, 那么由幂级数的性质可知 $f \in \mathscr{C}^{(\infty)}(x_0 - R, x_0 + R)$, 且 $\forall k \geqslant 0$ 以及 $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, 我们均有

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot (n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}.$$

特别地, 我们有 $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$. 由此我们可知, 如果函数 f 在点 x_0 处有 Taylor 级数展开, 那么它的系数可由 f 来唯一确定.

但 f 在点 x_0 的邻域内为 $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 类并不意味着 f 在点 x_0 处有 Taylor 级数展开. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & 若\ x \neq 0, \\ 0, & 若\ x = 0. \end{cases}$$

该函数为 $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 类并且 $\forall n \geqslant 0$, 均有 $f^{(n)}(0) = 0$. 这表明 f 不能在原点处展开成 Taylor 级数.

若 f 在点 x_0 的邻域内为 $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 类, 形式地记

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

并将右边称为 f 在点 x_0 的 Taylor 级数.

我们关心的问题主要有两个:

1. Taylor 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 是否收敛?

2. 若 Taylor 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 收敛, 它的和函数是否就是 $f(x)$?

定理 6. 假设 $f \in \mathscr{C}^{(\infty)}(x_0 - R, x_0 + R)$. 那么 f 在点 x_0 处的 Taylor 级数在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内收敛到 f 当且仅当 f 在点 x_0 处的 Taylor 展式余项 $r_n(x)$ 随 $n \to \infty$ 而趋于 0.

$\forall n \geqslant 1$, 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知, 存在 ξ_{n+1} 介于 x_0, x 之间, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

推论 1. $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, 如果存在 $N > 0$ 及 $M > 0$ 使得 $\forall n > N$, $|f^{(n+1)}(\xi_{n+1})| \leqslant M$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

证明: 上式源于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

推论 2. 假设 $f \in \mathscr{C}^{(\infty)}(x_0 - R, x_0 + R)$. 若存在整数 $N > 0$ 以及 $M > 0$ 使得对任意整数 $n > N$ 以及对任意 $\xi \in (x_0 - R, x_0 + R)$, 均有

$$|f^{(n+1)}(\xi)| \leqslant M,$$

则 $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, 我们有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

常用函数的 Taylor 级数展开

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$

   $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$

   $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$

   $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

3. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, 其中

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1).$$

当 $\alpha \geqslant 0$ 为整数时, 其收敛域为 $\mathbb{R}$.

下面假设 α 不为整数或者 $\alpha < 0$.

(a) 若 $\alpha \leqslant -1$, 则收敛域为 $(-1,1)$;

(b) 若 $-1 < \alpha < 0$, 则收敛域为 $(-1,1]$;

(c) 若 $\alpha > 0$, 则收敛域为 $[-1,1]$.

特别地, 我们有

(1) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ \ x \in (-1, 1).$

(2) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \ \ x \in (-1, 1).$

(3) $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n, \ \ x \in [-1, 1].$

(4) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \ \ x \in (-1, 1].$

4. $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ x \in (-1, 1].$

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ x \in [-1, 1).$$

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in (-1, 1).$$

5. $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in [-1, 1].$

6. $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in [-1, 1].$

例 5. 计算和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

解: 由于题设当中的幂级数的收敛半径为 $+\infty$, 则 S 在 $\mathbb{R}$ 上无穷可导且 $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

进而得 $S''(x)=S(x)$, 于是 $S(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$, 其中 c_1,c_2 为常数. 但 $S(0)=1$, $S'(0)=0$, 从而 $c_1=c_2=\frac{1}{2}$, 故 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $S(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

例 6. 由于 $\forall x \in (-1,1]$, 我们有

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

特别地, 我们有 $\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. 另外, 我们有

$$\log 2 = \log \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}.$$

作业题: 第 6.3 节第 291 页第 2 题第 (4), (6) 题.

例 7. 求 $f(x)=\frac{x-1}{4-x}$ 在点 $x=1$ 的幂级数展式, 并对任意整数 $n\geqslant 0$, 计算 $f^{(n)}(1)$.

解: 定义 $t=x-1$, 则有 $f(x)=\frac{x-1}{3-(x-1)}=\frac{t}{3-t}$. 于是当 $|t|<3$, 也即当 $|x-1|<3$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{t}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=\frac{t}{3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^k \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(x-1)^n. \end{aligned}$$

由此立刻可知 $f(1)=0$, 且 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$f^{(n)}(1)=\frac{1}{3^n}\cdot n!=\frac{n!}{3^n}.$$

例 8. 寻求 $f(x)=\cos x$ 在点 $x_0=\frac{\pi}{4}$ 处的幂级数展式以及该幂级数的收敛域.

解: $\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $t=x-\frac{\pi}{4}$. 则我们有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos\Big(t+\frac{\pi}{4}\Big)=\cos t\cos\frac{\pi}{4}-\sin t\sin\frac{\pi}{4}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n+1}{2}]}\frac{t^n}{n!}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n+1}{2}]}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

由上述讨论可知该幂级数的收敛域为 $\mathbb{R}$.

例 9. 求函数 $f(x) = \log(1+x)$ 在点 $x_0 = 2$ 处的幂级数展式以及该幂级数的收敛域.

解: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $t = x - 2$. 当 $|t| < 3$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= \log\left(3+t\right) = \log 3 + \log(1+\frac{t}{3}) \\ &= \log 3 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{t}{3}\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= \log 3 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}. \end{aligned}$$

而该幂级数的收敛当且仅当 $-1 < \frac{1}{3}(x-2) \leqslant 1$, 故上述幂级数的收敛域为 $(-1, 5]$.

例 10. 寻求 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\mathrm{d}t$ 在点 $x_0=0$ 处的幂级数展式以及该幂级数的收敛域.

解: $\forall t\in(-1,1]$, 均有 $\frac{1}{\sqrt{1+t}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^n$. $\forall x\in(-1,1]$, 由积分与级数求和可交换性可得 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{(3n+1)\cdot(2n)!!}x^{3n+1}$, 且该幂级数的收敛半径为 1. 又 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\frac{(2n-1)!!}{(3n+1)\cdot(2n)!!}=\frac{\sqrt{(2n-1)!!\cdot(2n+1)!!}}{(3n+1)\sqrt{2n+1}\cdot(2n)!!}$$

$$=\frac{1}{(3n+1)\sqrt{2n+1}}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{(3n+1)\sqrt{2n+1}}.$$

由比较法则可知上述幂级数在点 $x=-1$ 收敛, 故该幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

例 11. 求 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 在点 $x=0$ 处的幂级数展式.

解: 当 $|x|<1$ 时, 我们有 $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$. 将等式两边对 x 求导, 由此可得 $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

作业题: 第6.3节第291页第3题第(8), (11), (13)题.

补充题: 设 $f(x)=\frac{x+2}{x^2-x-2}$. $\forall n\geqslant 0$, 求 $f^{(n)}(-2)$.

第 6 章小结

1. 函数列与函数项级数的收敛性:

- 函数列的收敛: 收敛点, 发散点, 收敛域, 极限函数, 一致收敛性.
- 函数项级数的收敛: 收敛点, 发散点, 收敛域, 和函数, 一致收敛性.
- 函数列、函数项级数、含参广义积分同一.
- 判断函数项级数为一致收敛的方法: 定义, Weierstrass 判别法, Abel-Dirichlet 判别准则.

2. 一致收敛的函数项级数的和函数的性质:

- 内闭一致收敛连续函数列的极限函数连续.
- 极限与级数求和可交换性: 通项连续, 级数内闭一致收敛, 则和函数连续.
- 积分与级数求和可交换性: 通项连续, 级数内闭一致收敛, 则积分与求和可交换.
- 求导与级数求和可交换性: 通项为连续可导, 导函数级数内闭一致收敛, 原级数在一点处收敛, 则和函数连续可导且求导与求和可交换.

3. 幂级数:

- 收敛半径的确定: 根值判别法, 比率判别法.
- Abel 定理: 幂级数在其收敛域的内部为绝对收敛且内闭一致收敛.
- Abel 第二定理: 幂级数在它的收敛域的任意闭子区间上一致收敛, 故在收敛域上连续.
- 四则运算性质: 线性性, 乘法, 除法.
- 分析运算性质: 幂级数在它的收敛域的内部无穷可导; 对之积分或求导均可与求和交换次序, 所得依然为幂级数且收敛半径不变.

4. 函数在一点处的幂级数展开–Taylor 级数:

- 必要条件: 在该点无穷可导.
- 唯一性: 若展式存在, 则唯一.
- 充要条件: Taylor 展式的余项趋于 0.
- 常用的充分条件: 各阶导数一致有界.
- 常用函数的 Taylor 级数展开.
- 将函数展成幂级数的方法: 直接法 (定义); 间接法 (从已知幂级数出发, 借助幂级数的四则运算与分析运算).

综合练习

例 1. 计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2+n+2)x^n$, 并求其收敛域.

解: 由根值判别法可知原幂级数的收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n^2+n+2)^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}\log(2n^2+n+2)}=1.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2+n+2)=+\infty$, 故收敛域为 $(-1,1)$.

$\forall x\in(-1,1)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$.

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$. 两边再次求导可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

进而可知, $\forall x \in (-1,1)$, 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2+n+2)x^n = 2x\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \frac{2x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} = \frac{3x^2-x+2}{(1-x)^3}.$$

注: 若 P_n 为 n 的多项式, 同理可求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n x^n$.

例 2. 假设 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{\log(n+2)}$ 在点 $x=-2$ 处条件收敛, 求证: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{(n+2)^2}$ 在点 $x=\frac{1}{2}$ 处发散.

证明: 由根值判别法可知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{\log(n+2)}$ 的收敛半径等于 $\lim_{n\to\infty}\big(\log(n+2)\big)^{\frac{1}{n}}=1$. 另外由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\log(n+2)}$ 发散, 而上述幂级数在点 $x=-2$ 处为条件收敛, 因此 $-2=a-1$, 也即 $a=-1$.

又 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{(n+2)^2}$ 的收敛半径为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+2)^2\right)^{\frac{1}{n}}=1$, 故上述幂级数的收敛域为 $[-2,0]$, 从而该幂级数在点 $x=\frac{1}{2}$ 处发散.

例 3. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在点 $x=2$ 处收敛, 求实数 a 的取值范围.

解: 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 的收敛域为 $[a-1,a+1)$, 从而 $a-1\leqslant 2<a+1$, 也即我们有 $1<a\leqslant 3$.

例 4. 求 $f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 的幂级数展开, 并求上述幂级数的收敛域.

解: 令 $t=x-1$, 则我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{t}{(2+t)^2}=\frac{t}{4\left(1+\frac{t}{2}\right)^2}=-\frac{t}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{2}}\right)' \\ &= -\frac{1}{2}t\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{2^n}\right)'=-\frac{1}{2}t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}t^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^{n+1}}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^{n+1}}(x-1)^n. \end{aligned}$$

由根值判别法可知上述幂级数的收敛半径为

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 2.$$

当 $|x-1| = 2$ 时，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n+1}}(x-1)^n\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = +\infty,$$

因此上述幂级数在点 $x = -1, 3$ 发散，由此立刻可知该幂级数的收敛域为 $(-1, 3)$.

例 5. 设 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^3}$, 求 $f^{(101)}(0)$.

解: $\forall x\in(-1,1)$, 我们有

$$f(x)=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+2}.$$

由此立刻可得

$$f^{(101)}(0)=(-1)^{33}\cdot 101!=-101!.$$

例 6. 寻求 $f(x)=\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ 在点 $x=0$ 处的幂级数展开.

解: $\forall x\in(-1,1)$, 我们有

$$f'(x)=\frac{(\frac{2x}{1-x^2})'}{1+(\frac{2x}{1-x^2})^2}=\frac{\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}}{1+(\frac{2x}{1-x^2})^2}=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2+4x^2}$$

$$=\frac{2}{1+x^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

由幂级数的性质可知, $\forall x\in(-1,1)$, 我们有

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

例 7. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$ 的收敛域, 并指出使之绝对收敛、条件收敛的 x 的范围.

解: 当 $|x|>1$ 时, 我们有 $\frac{1}{|1+x^n|}\sim\frac{1}{|x|^n}\ (n\to\infty)$, 于是由比较法则可知此时原级数绝对收敛.

当 $|x|<1$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}=1$, 此时原级数发散.

当 $x=1$ 时, $\forall n\geqslant 1$, 我们均有 $\frac{1}{1+x^n}=\frac{1}{2}$, 由此得原级数发散. 在 $x=-1$ 处, 原级数无定义.

综上可知所求收敛域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, 在它里面, 原函数项级数为绝对收敛.

例 8. 求 $f(x)=\sin^2(x^2)$ 在点 $x_0=0$ 处的幂级数展开, 并对任意整数 $n\geqslant 1$, 计算 $f^{(n)}(0)$.

解: $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有 $f(x)=\frac{1}{2}\big(1-\cos(2x^2)\big)$, 则

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x^2)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{4n}.$$

于是 $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $f^{(4n)}(0)=(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}(4n)!}{(2n)!}$, 对于不为 4 的倍数的正整数 m, 则 $f^{(m)}(0)=0$.

例 9. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x\ (p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

解: $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan x}{=\!=} \int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan x}{=\!=} \int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^1 \frac{t^n}{2}\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{2(n+1)}.$$

当 $n\to\infty$ 时, $\frac{1}{(n+1)n^p}\sim\frac{1}{n^{p+1}}$. 另外 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$ 收敛当且仅当 $p>0$. 于是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p>0$.

谢谢大家!