第 5 次作业题

1. 如果 $f \in \mathscr{C}(0,+\infty)$ 使得 $\forall x, y > 0$, 均有 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 求证: 或者 $f \equiv 0$, 或者 $\exists a > 0$ $(a \neq 1)$ 使得 $\forall x > 0$, $f(x) = \log_a x$.

2. 如果 $f \in \mathscr{C}(0,+\infty)$ 使得 $\forall x, y > 0$, 均有 $f(xy) = f(x)f(y)$, 求证: 或者 $f \equiv 0$, 或者 $\exists a \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x > 0$, 均有 $f(x) = x^a$.

3. 设 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ 使得 $a_1 + \cdots a_n = 0$, 求证: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin\sqrt{x+k} = 0$.

4. 利用极限来定义函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n^x \big(\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1} - \big(1+\frac{1}{n}\big)^n\big)$. 求函数 f 的定义域与表达式.

5. 如果 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in (-1,1)$, 均有 $\big|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin kx\big| \leqslant |\sin x|$, 求证: $\big|\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k\big| \leqslant 1$.

6. 假设极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \big((x^3+x^2)^c - x\big)$ 存在 (有限), 求常数 c 以及极限值.

7. 研究下列函数在点 $x_0 = 0$ 处的连续性与可导性. 若可导, 求 $f'(x_0)$.

$$(1)\ f(x) = |x-3|, \quad (2)\ f(x) = \begin{cases} x, & 若\ x < 0, \\ \log(1+x), & 若\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

8. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & 若\ x \leqslant 1 \\ ax+b, & 若\ x > 1 \end{cases}$. 问 a, b 取何值时 f 在点 $x = 1$ 可导.

9. 当 a 为何值时, 曲线 $y = ax^2$ 与 $y = \log x$ 相切? 并求切点与切线方程.

10. 求 $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ 的导数.

11. 求下列函数的导函数:

(1) $y = x\big(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3x^{\frac{2}{3}}\big)$,

(2) $y = 2^x(\sec x + \csc x) + \log_2(3x) + \log_{10} x^2$,

(3) $y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$,

(4) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,

(5) $y = (x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2} \cdots (x-a_n)^{a_n}$,

(6) $y = x + x^x + x^{x^x}$.

12. 设 f 为可微函数, 求 $f(f(f(x)))$ 的导函数.

13. 求函数 $y = x + e^x$ 的反函数的导数.

14. 设方程 $xy = 1 + xe^y$ 确定了 y 是 x 的函数, 求 $y'(x)$.

15. 求曲线 $xy + \log y = 1$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程.

16. 对参数方程 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ ，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.