微积分 A (2)

姚家燕

第 3 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

主讲老师联系方式与答疑时间

欢迎大家平时到办公室来咨询或讨论问题,

拒绝在考试后以各种名目来要分数!

不建议网上提问, 因为无法保证时效和准确!

- 地点: 理科楼数学系 A 216
- 电话: 62794494
- 时间: 每周三下午 16:00-17:00

清华大学本科生学籍管理规定

第十条 学生应当参加学校教育计划规定的各项活动, 自觉遵守课堂纪律, 完成规定学业. 因故不能参加学校教育计划规定的活动, 应当事先请假并获得批准, 未经批准而缺席的, 学校视情节轻重根据有关规定给予相应的批评教育, 纪律处分. 未请假或者请假未获批准连续两周未参加教学计划规定的活动的, 予以退学处理.

第十七条 含实验或者作业的课程, 学生在按时完成课程实验 (包括实验报告) 和作业后, 方可参加该课程考核.

规则制度

若选择本课程, 请大家遵守下列纪律:

- 上课期间严禁使用与教学无关的电子产品
- 严禁以任何形式外传课堂内容
- 务必按时上交作业 (允许三次不交作业)
- 无故缺交平时作业 4 次及 4 次以上或无故缺席期中考试, 取消参加期末考试的资格!
- 严禁以任何方式在考试后来要成绩

第 2 讲回顾: n 维 Euclid 空间

- $\mathbb{R}^n$ 及其上的范数 $\|\cdot\|_n$ 与距离.
- 点 X_0 的 δ-邻域 $B(X_0,\delta)$, 也称为以点 X_0 为中心、以 δ 为半径的开球.
- 点 X_0 的去心 δ-邻域 $\mathring{B}(X_0,\delta)$.
- 内点, 外点, 边界点, 极限点, 开集, 闭集, 内部, 外部, 边界, 闭包.

回顾: 基本性质

- $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ 既为开集, 也为闭集.
- 任意开球均为开集, 任意闭球均为闭集.
- 拓扑概念与空间 $\mathbb{R}^n$ 有关.
- $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集当且仅当它为开球的并.
- 任意多个开集的并是开集, 任意多个闭集的交是闭集; 有限多个开集的交为开集, 有限多个闭集的并为闭集.
- 连通集, 非连通集, 开区域, 闭区域.

回顾：重要的例子

例 1. $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\forall \delta > 0$, 我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Int} B(X_0, \delta) &= B(X_0, \delta), \\
\operatorname{Ext} B(X_0, \delta) &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| > \delta\}, \\
\partial B(X_0, \delta) &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| = \delta\}, \\
\overline{B(X_0, \delta)} &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| \leqslant \delta\}.
\end{aligned}$$

作业题: 第 1.1 节第 7 页第 2 题, 第 8 页第 4 题第 (3) 小题 (其中将 n 个点改为 k 个点).

回顾: $\mathbb{R}^n$ 中的点列与性质

- 概念: $\mathbb{R}^n$ 中的点列的极限, Cauchy 序列.
- $\mathbb{R}^n$ 中点列收敛当且仅当其坐标分量组成的数列均收敛.
- $\mathbb{R}^n$ 中点列为 Cauchy 序列当且仅当它的坐标分量组成的数列均为 Cauchy 数列.
- $\mathbb{R}^n$ 完备, 也即 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 序列必收敛.

- $\mathbb{R}^n$ 中子集为闭集当且仅当该集合中的任意收敛点列的极限依然属于该集合.
- 概念: 直径, 有界集, 有界点列.
- 闭集套定理: $\mathbb{R}^n$ 中的直径趋于零的递降的闭集列的交集为单点集.
- 列紧性定理: $\mathbb{R}^n$ 中有界点列必有收敛子列.

第 3 讲

定理 4. **(闭集套定理)** 设 $\{F_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭集组成的集列使得 $F_1 \supseteq F_2 \cdots \supseteq F_k \supseteq \cdots$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty} d(F_k) = 0$, 则交集 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ 为单点集.

证明思想: 利用 $\mathbb{R}^n$ 的完备性 (Cauchy 准则).

定理 5. **(Weierstrass 定理)** $\mathbb{R}^n$ 中有界点列必有收敛子点列.

证明思想: 对点列的每个分量应用列紧性定理.

§2. n 元函数与 n 元向量值函数

回顾: 设 X, Y 为非空集合. 若其元素之间存在一个对应规则 f 使得对任意的 $x \in X$, 在 Y 中有唯一确定元素 y (记作 $y = f(x)$) 与之对应, 则称 f 为 X 到 Y 的一个映射 (或函数), 称 y 为 x 的像, x 为 y 的原像. 记作 $f : X \to Y$.

定义 1. 设 $m, n \geqslant 1$ 为整数, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集. 称任意映射 $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为 Ω 上的 n 元向量值函数, 当 $m = 1$ 时, 简称为 n 元 (数量值) 函数.

向量值函数的运算与表示

- 线性组合: 设 $\vec{f}, \vec{g} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数, 而 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $\forall X \in \Omega$, 定义

$$(\lambda\vec{f} + \mu\vec{g})(X) = \lambda\vec{f}(X) + \mu\vec{g}(X).$$

- 乘、除法: 假设 $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数, 而 $g : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数. $\forall X \in \Omega$, 定义

$$(g\vec{f})(X) := g(X)\vec{f}(X),$$

$$\left(\frac{\vec{f}}{g}\right)(X) := \frac{\vec{f}(X)}{g(X)} \ (若\ g(X) \neq 0).$$

- 复合运算: 假设 $l, m, n \geqslant 1$ 为整数, $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, $\vec{f}: \Omega_1 \to \Omega_2$, $\vec{g}: \Omega_2 \to \mathbb{R}^l$ 为向量值函数. $\forall X \in \Omega_1$, 令 $(\vec{g} \circ \vec{f})(X) := \vec{g}(\vec{f}(X))$.
- 向量值函数的表示: 设 $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为 n 元向量值函数. 则 $\forall X = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, 均有 $\vec{f}(X) \in \mathbb{R}^m$, 记作 $Y = (y_1, \ldots, y_m)^T$, 每个 y_j 为 X 的函数: $y_j = f_j(X) = f_j(x_1, \ldots, x_n)$. 故 $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 与 m 个 n 元函数 $f_j: \Omega \to \mathbb{R}$ 等价. 此时记作 $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T$.

§3. 极限与连续

定义 1. 设 $m, n \geqslant 1$ 为整数, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集, $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 为 Ω 的极限点, $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数, $A \in \mathbb{R}^m$. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall X \in \Omega$, 当 $0 < \|X - X_0\|_n < \delta$ 时, $\|\vec{f}(X) - A\|_m < \varepsilon$, 则称 X 在 Ω 内趋于 X_0 时, $\vec{f}(X)$ 以 A 为极限 (或收敛到 A), 记作 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} \vec{f}(X) = A$.

评注

- $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} \vec{f}(X) = A$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall X \in \mathring{B}(X_0, \delta) \cap \Omega$, 有 $\vec{f}(X) \in B(A, \varepsilon)$.
- 若记 $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T$, $A = (a_1, \ldots, a_m)^T$, 则 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} \vec{f}(X) = A$ 当且仅当对于任意的 $1 \leqslant j \leqslant m$, 均有 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} f_j(X) = a_j$.
- 如果点 X_0 为 $\Omega \cup \{X_0\}$ 的内点, 我们通常将 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} \vec{f}(X)$ 简记作 $\lim\limits_{X \to X_0} \vec{f}(X)$.

(数量值函数) 极限的基本性质

- 唯一性: 极限若存在, 则唯一.
- 保序性, 保号性, 夹逼原理.
- 四则运算: 设 $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} f(X) = A$, $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} g(X) = B$ 存在.

  (a) $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} (\lambda f + \mu g)(X) = \lambda A + \mu B$.

  (b) $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} (fg)(X) = AB$.

  (c) $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} \frac{f}{g}(X) = \frac{A}{B}$ (若 $B \neq 0$).

- 复合法则: 假设 $l, m, n \geqslant 1$ 为整数, $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ 为非空, 而 $\vec{f}: \Omega_1 \to \Omega_2$, $\vec{g}: \Omega_2 \to \mathbb{R}^l$ 为向量值函数. 若 $\lim\limits_{\Omega_1 \ni X \to X_0} \vec{f}(X) = Y_0$ 且 $\vec{f}$ 在 X_0 的某一个去心邻域内不等于 Y_0, 而且 $\lim\limits_{\Omega_2 \ni Y \to Y_0} \vec{g}(Y) = A$, 则我们有

$$\lim_{\Omega_1 \ni X \to X_0} (\vec{g} \circ \vec{f})(X) = A.$$

证明思想: 同单变量函数的情形一样, 直接利用函数极限的定义.

- 点列与函数极限: 设 $m,n\geqslant 1$ 为整数, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 非空, $\vec{f}:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 为向量值函数, 而 $X_0\in\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^m$. 那么 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\vec{f}(X)=A$ 当且仅当对 $\Omega\setminus\{X_0\}$ 中收敛到 X_0 的任意点列 $\{X_k\}$, 均有 $\lim\limits_{k\to\infty}\vec{f}(X_k)=A$.
- Cauchy 准则: $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\vec{f}(X)$ 收敛当且仅当 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得 $\forall X', X''\in\mathring{B}(X_0,\delta)\cap\Omega$, 均有 $\|\vec{f}(X')-\vec{f}(X'')\|_m<\varepsilon$.

二重极限

计算多变量函数的极限通常很复杂，目前唯一有效方法是将之转化成单变量函数极限. 出于简便记号，后面我们将只讨论两个变量的函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$，称为二重极限. 我们也可考虑极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$. 由此我们还可以考虑单侧极限以及 x_0 或 y_0 为无穷的情形，比如说，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to\infty}} f(x,y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y)$ 等.

典型例题 (转化为单变量的情形)

例 1. 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

解: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \overset{\rho=\sqrt{x^2+y^2}}{=} \lim\limits_{\rho\to0^+} \frac{\sin\rho^2}{\rho^2} = 1.$

例 2. 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 均有 $0 \leqslant \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

例 3. 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$, 其中 $a\in\mathbb{R}$.

解: $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\log\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{x^2}{x+y}\log\left(1-\frac{1}{2x}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{x^2}{x+y}\cdot\frac{-1}{2x}=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{y}{x}}=-\frac{1}{2}.$$

于是 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

例 4. 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

解: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, 定义 $g(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

用反证法. 假设极限存在且等于 A. $\forall k, x \in \mathbb{R}$,

令 $f_k(x) = (x, kx)$. 则我们有 $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = (0,0)$,

并且 f_k 在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上不等于 $(0,0)$. 于是由复合

函数极限法则得 $A = \lim\limits_{x\to 0} g(x, kx) = \frac{2k}{1+k^2}$, 由此

可知极限不唯一. 矛盾! 故所求极限不存在.

谢谢大家!