第 4 次作业题解答

1. 求函数 $f(x,y)=xy(4-x-y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 6,\ y\geqslant 0,\ x\geqslant 1\}$ 上的最值.

解: 由于 f 为初等函数, 故连续, 而 D 为有界闭集, 则 f 在 D 上有最值.

(1) 若 f 在 D 上的最值点位于 D 的内部, 则该点必为 f 的局部极值点, 从而在该点处, 我们均有

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}=y(4-x-y)-xy,\quad 0=\frac{\partial f}{\partial y}=x(4-x-y)-xy.$$

由上式并注意该点位于 D 的内部, 则该点为 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ 且 $f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}$.

(2) 若 f 在 D 上的最值点位于 D 的边界上, 则该点为 f 的条件极值点. 除去顶点外, 边界 ∂D 由下述三条线段组成:

$$\begin{aligned} C_1:&\qquad y=0,\ 1<x<6,\\ C_2:&\qquad x=1,\ 0<y<5,\\ C_3:&\qquad x+y=6,\ 1<x<6. \end{aligned}$$

又 f 在 C_1 上为零, 故只需考虑 f 在 C_2,C_3 上的条件极值, 相应拉氏函数为

$$\begin{aligned} L_2(x,y,z,\lambda_2) &= f(x,y)+\lambda_2(x-1),\\ L_3(x,y,z,\lambda_3) &= f(x,y)+\lambda_3(x+y-6). \end{aligned}$$

拉氏函数 L_2 的驻点满足:

$$\begin{cases} 0=\frac{\partial L_2}{\partial x}=y(4-x-y)-xy+\lambda_2,\\ 0=\frac{\partial L_2}{\partial y}=x(4-x-y)-xy,\\ 0=\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2}=x-1, \end{cases}$$

故该点为 $\left(1,\frac{3}{2},-\frac{3}{4}\right)$ 且 $f\left(1,\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$.

拉氏函数 L_3 的驻点满足:

$$\begin{cases} 0=\frac{\partial L_3}{\partial x}=y(4-x-y)-xy+\lambda_3,\\ 0=\frac{\partial L_3}{\partial y}=x(4-x-y)-xy+\lambda_3,\\ 0=\frac{\partial L_3}{\partial \lambda_3}=x+y-6, \end{cases}$$

故该点为 $(3,3,15)$ 且 $f(3,3)=-18$.

在三个顶点处, 我们有 $f(1,0)=0$, $f(6,0)=0$, $f(1,5)=-10$. 于是通过函数 f 在上述点处的值可知该函数在 D 上的最大值为 $\frac{64}{27}$, 相应的最大值点为 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$; 它在 D 上的最小值为 -18, 相应的最小值点为 $(3,3)$.

2. 求函数 $f(x,y,z)=x-2y+2z$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的条件极值.

解: $\forall(x,y,z,\lambda)\in\mathbb{R}^4$, 定义 $L(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$. 由 Lagrange 乘数法可知所求极值点 (x,y,z) 满足:

$$\begin{aligned}0=\frac{\partial L}{\partial x} &= 1+2\lambda x,\\ 0=\frac{\partial L}{\partial y} &= -2+2\lambda y,\\ 0=\frac{\partial L}{\partial z} &= 2+2\lambda z,\\ 0=\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2+y^2+z^2-1,\end{aligned}$$

由此可得 $x=-\frac{1}{2\lambda}$, $y=\frac{1}{\lambda}$, $z=-\frac{1}{\lambda}$, $(-\frac{1}{2\lambda})^2+(\frac{1}{\lambda})^2+(-\frac{1}{\lambda})^2-1=0$, 故 $\lambda=\pm\frac{3}{2}$, 相应点为 $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$, $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, 且

$$f\Big(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\Big)=-3,\ f\Big(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\Big)=3.$$

由于 f 为初等函数, 从而连续. 又球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 为有界闭集, 则函数 f 在该球面上有最大值和最小值, 它们也是 f 在球面上的条件极大值和条件极小值, 因而由 Lagrange 乘数法可知相应点是上述拉氏函数的驻点, 而该拉氏函数只有两个驻点, 故反过来这些驻点正好是 f 在球面上的最大值点和最小值点, 故所求极大值为 3, 极小值为 -3.

3. 求椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的点到直线 $x+y=4$ 的距离的最值.

解: 令 $P_0=(0,4)$, 则 P_0 为直线 $x+y=4$ 上的点, 且该直线的单位法向量为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. 设 $P(x,y)$ 为椭圆上的任意一点, 则点 P 到该直线的距离就是向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 在法线上的投影, 也即该距离等于

$$f(x,y)=\left|\begin{pmatrix} x\\ y-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|x+y-4|.$$

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 令 $F(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-4)^2$, 则 F 为初等函数, 从而连续. 又椭圆为有界闭集, 则 F 在该椭圆上有最值, 从而 f 在该椭圆上也有最值, 相应点也为 F 在椭圆上的条件极大值点和条件极小值点.

$\forall(x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3$, 定义 $L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x+y-4)^2+\lambda(x^2+\frac{y^2}{4}-1)$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) &= x+y-4+2\lambda x,\\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) &= x+y-4+\frac{1}{2}\lambda y,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= x^2+\frac{y^2}{4}-1,\end{aligned}$$

从而拉氏函数的驻点为 $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}, 2\sqrt{5}-\frac{5}{2})$, $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}, -2\sqrt{5}-\frac{5}{2})$. 由前面可知 F 在椭圆上有条件极大值点和条件极小值点, 由 Lagrange 乘数法, 这些点可给出拉氏函数相应驻点, 从而 f 的最值点为 $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5})$, $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5})$, 且

$$f\Big(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4-\sqrt{5}),\ f\Big(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4+\sqrt{5}),$$

于是所求最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}(4+\sqrt{5})$, 最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}(4-\sqrt{5})$.

注: 也可以将问题转化为求函数 $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$ 在约束条件 $x_1^2 + \frac{y_1^2}{4} = 1$, $x_2 + y_2 = 4$ 下的最值 (极值). 但前述解法更为简单.