微积分 A (1)

姚家燕

第 8 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

第 7 讲回顾: 映射的定义与性质

- 映射 $f: X \to Y$ 为对应规则使得 $\forall x \in X$, 有唯一确定 $y \in Y$ 与之对应, 记 y 为 $f(x)$.
- 称 X 为 f 的定义域, Y 为 f 的取值范围, 并将 X 记为 $D(f)$.
- 我们称 $R(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$ 为映射 f 的值域, 也叫 f 的像集, 记作 $f(X)$ 或 $\mathrm{Im} f$.
- 定义域与值域为数集的映射被称为函数.

- 对于由表达式 $y = f(x)$ 所定义的函数, 使得表达式有意义的所有 x 组成的集合被称为函数 f 的自然定义域, 而由所有取值组成的集合则被称为 f 的值域.
- 数列恰好就是定义在 $\mathbb{N}^*$ 上的函数.
- 函数的四则运算: 线性组合, 乘法, 除法.
- 映射的复合.

- 单射: 不同元有不同像; 像同则原像同.
- 满射: 取值范围与值域重合.
- 双射: 既是单射也是满射, 也称可逆映射.
- 双射有逆映射, 反之亦然.
- 函数的基本性质: 有界性 (像集的有界性), 周期性, 奇偶性.

第 8 讲

单调性

设 X 为非空数集, 而 $f : X \to \mathbb{R}$ 为函数.

- 称 f 在 X 上为单调递增, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
- 称 f 在 X 上为严格递增, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$.

- 称 f 在 X 上为单调递减, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
- 称 f 在 X 上为严格递减, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) > f(x_2)$.
- 递增函数和递减函数合称为单调函数; 严格递增和严格递减函数合称为严格单调函数.

命题 1. 严格单调函数为单射.

证明: 假设 $f: X \to \mathbb{R}$ 为严格单调. 不失一般性, 可假设 f 严格增, 否则则考虑 $-f$. $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则不妨设 $x_1 > x_2$ (否则重新编号). 因 f 严格增, 故 $f(x_1) > f(x_2)$, 从而 f 为单射.

注: 如果 f 在 X 上严格单调, 则 $f: X \to R(f)$ 为双射, 从而存在反函数 $f^{-1}: R(f) \to X$. 值得一提是, 有反函数的函数不一定严格单调.

命题 2. 严格单调函数的反函数与原来的函数有同样的单调性.

证明: 假设 f 为 X 上的严格递增函数 (对严格递减函数可以类似证明), 而 $f^{-1}: R(f) \to X$ 为 f 的反函数. $\forall y_1, y_2 \in R(f)$, 定义 $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. 于是 $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. 假设 $y_1 > y_2$, 则 $x_1 \neq x_2$. 若 $x_2 > x_1$, 由严格递增性可知 $y_2 > y_1$, 矛盾! 故 $x_1 > x_2$, 由此得证.

基本初等函数

- 常值函数;
- 幂函数: $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{R})$;
- 指数函数: $y = a^{x}\ (a > 0, a \neq 1)$;
- 对数函数: $y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1, x > 0)$;
  自然对数函数: $y = \ln x = \log x\ (x > 0)$;
- 三角函数: $y = \sin x$, $y = \cos x$;
- 反三角函数: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.

初等函数

由上述基本初等函数经过有限多次四则运算和复合运算后得到的函数, 称为初等函数.

常用的其它初等函数: 多项式, 有理函数,

- 正切: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 余切: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$;
- 双曲正弦: $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

  双曲余弦: $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$,

  双曲正切: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

  双曲余切: $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

§2. 函数极限的概念 ($\varepsilon - \delta$ 语言)

在下面, 固定 X 为非空数集.

有限点处的邻域与去心邻域:

定义 1. 设 $a \in \mathbb{R}$, 而 $\varepsilon > 0$. 定义:

- $B_X(a,\varepsilon) = \{x \in X : |x-a| < \varepsilon\}$, 称为点 a 在 X 中的 ε-邻域.
- $\mathring{B}_X(a,\varepsilon) = \{x \in X : 0 < |x-a| < \varepsilon\}$, 称为点 a 在 X 中的 ε-去心邻域.

无穷远点处的邻域与去心邻域:

定义 2. 设 $\varepsilon > 0$. 定义:

- $B_X(+\infty, \varepsilon) = \mathring{B}_X(+\infty, \varepsilon) = \{x \in X \ : \ x > \frac{1}{\varepsilon}\}$, 称为 $+\infty$ 在 X 中的 ε-(去心) 邻域.
- $B_X(-\infty, \varepsilon) = \mathring{B}_X(-\infty, \varepsilon) = \{x \in X \ : \ x < -\frac{1}{\varepsilon}\}$, 称为 $-\infty$ 在 X 中的 ε-(去心) 邻域.
- $B_X(\infty, \varepsilon) = \mathring{B}_X(\infty, \varepsilon) = \{x \in X \ : \ |x| > \frac{1}{\varepsilon}\}$, 称为 ∞ 在 X 中的 ε-(去心) 邻域.

评注

设 $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{\pm\infty\}$, 而 $\varepsilon > 0$.

- $B_X(x_0, \varepsilon) = \mathring{B}_X(x_0, \varepsilon)$ 当且仅当 $x_0 \notin X$.
- 常将 $B_X(x_0, \varepsilon)$ 和 $\mathring{B}_X(x_0, \varepsilon)$ 简记为 $B_X(x_0)$ 和 $\mathring{B}_X(x_0)$, 称为 x_0 的邻域和去心邻域.
- 点 x_0 处的任意两个邻域总可以比较大小.

- 当 $X=\mathbb{R}$ 时, 通常省略下标 X. 例如, 常将 $B_X(x_0,\varepsilon)$ 简记作 $B(x_0,\varepsilon)$. 则对一般数集 X,

$$\begin{aligned} B_X(x_0,\varepsilon) &= B(x_0,\varepsilon)\cap X, \\ \mathring{B}_X(x_0,\varepsilon) &= \mathring{B}(x_0,\varepsilon)\cap X. \end{aligned}$$

定义 3. 设 X 为非空数集, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\infty,\pm\infty\}$. 如果 $\forall\varepsilon>0$, $\mathring{B}_X(x_0,\varepsilon)\neq\emptyset$, 则称点 x_0 为 X 的极限点. 注: 这里并不要求 $x_0\in X$.

典型的极限点

- 设 $\eta > 0$, $a \in \mathbb{R}$. 那么点 a 为 $(a-\eta, a+\eta)$, $(a-\eta, a)$, $(a, a+\eta)$ 的极限点.
- 自然数集 $\mathbb{N}$ 的极限点为 $+\infty = \infty$.
- 整数集 $\mathbb{Z}$ 的极限点为: $+\infty$, $-\infty$, ∞.
- 任意实数以及 $\pm\infty$, ∞ 均为有理数集 $\mathbb{Q}$ 和实数集 $\mathbb{R}$ 的极限点.

命题 1. 设 X 为非空数集, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$. 则 a 为 X 的极限点当且仅当 $X \backslash \{a\}$ 中存在着收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$.

证明: 这里只考虑 $a \in \mathbb{R}$ 的情形. 至于其它的情形可以类似证明.

必要性. 如果 a 为 X 的极限点, 那么 $\forall n \geqslant 1$, $\exists x_n \in \mathring{B}_X(a, \frac{1}{n})$. 也即 $x_n \in X \backslash \{a\}$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. 于是由夹逼原理可知数列 $\{x_n\}$ 收敛到 a.

充分性. 假设 $X\backslash\{a\}$ 中有数列 $\{x_n\}$ 收敛到 a. 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N$, 我们均有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

由于 $x_n\in X\backslash\{a\}$, 故 $x_n\in\mathring{B}_X(a,\varepsilon)$, 由此立刻可知 a 为 X 的极限点.

定义 4. 设 X 为非空数集, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$ 为 X 的极限点, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, $f : X \to \mathbb{R}$ 为函数. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, $f(x) \in B(a, \varepsilon)$, 那么称当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 趋近到 a (或以 a 为极限), 并将 a 记为

$$\lim_{X \ni x \to x_0} f(x).$$

在不会产生歧义的情况下, 我们有时也将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

评注

- 若 $X=\mathbb{N}^*$ 且 $x_0=\infty$, 函数极限为数列极限: "$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得 $\forall n\in\mathring{B}_{\mathbb{N}^*}(\infty,\delta)$, 我们均有 $f(n)\in B(a,\varepsilon)$". 这等价于说 "$\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N$, 均有 $|f(n)-a|<\varepsilon$".
- 函数极限的存在性只与 f 在点 x_0 的邻域内的性态有关, 但与 f 在该点的取值无关.

- 假设 点 x_0 为数集 X 的极限点是为了保证: $\forall\delta > 0$, 我们均有 $\mathring{B}_X(x_0, \delta) \neq \emptyset$.
- 仅仅当 $a \in \mathbb{R}$ 时, $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$ 才被称为当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 收敛到 a.
- 函数极限定义的否定表述:
  当 x 在 X 内趋近 x_0 时, $f(x)$ 不趋近于 a 当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, $\exists x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$ 满足 $f(x) \notin B(a, \varepsilon_0)$.

几种常见的极限

情形 I: $x_0, a \in \mathbb{R}$

(1) $\exists \eta > 0$ 使得 $X \supseteq (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \setminus \{x_0\}$, 则 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0, \eta)$ 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - a| < \varepsilon$.

此时我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

(2) 右极限: $\exists \eta > 0$ 使得 $X = (x_0, x_0 + \eta)$, 那么 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0, \eta)$ 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - a| < \varepsilon$. 此时我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$.

(3) 左极限: $\exists \eta > 0$ 使得 $X = (x_0 - \eta, x_0)$, 那么 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0, \eta)$ 使得当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - a| < \varepsilon$. 此时我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$.

情形 II: $x_0 \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$

(1) $\exists \eta > 0$ 使得 $X \supseteq (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, 则我们有 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = +\infty$ 当且仅当 $\forall M > 0$, $\exists \delta \in (0, \eta)$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 我们有 $f(x) > M$.

此时我们将上述极限简记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

(2) 右极限: $\exists \eta > 0$ 使得 $X = (x_0, x_0 + \eta)$, 那么 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = +\infty$ 当且仅当 $\forall M > 0$, $\exists \delta \in (0, \eta)$ 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 我们均有 $f(x) > M$. 我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.

(3) 左极限: $\exists \eta > 0$ 使得 $X = (x_0 - \eta, x_0)$, 那么 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = +\infty$ 当且仅当 $\forall M > 0$, $\exists \delta \in (0, \eta)$ 使得当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 我们均有 $f(x) > M$. 我们将上述极限简记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

类似地, 我们还可以考虑如下情形的极限:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$,
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$,
- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$.

命题 2. 假设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, 而 $f : \mathring{B}(x_0, \rho) \to \mathbb{R}$ 为函数. 那么 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ 当且仅当 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$.

证明: **必要性.** 假设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0, \rho)$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}(x_0, \delta)$, $f(x) \in B(a, \varepsilon)$. 因此 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, 均会有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$; 同时 $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 也将有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$. 于是我们有 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$.

充分性. 假设我们有 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = a$, 则 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta_1 \in (0, \rho)$ 使得 $\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$, 我们均有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$; 同时 $\exists\delta_2 \in (0, \rho)$ 使得 $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$, 也将有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$. 由此令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 则我们有

$$\mathring{B}(x_0, \delta) \subseteq (x_0 - \delta_1, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_2),$$

于是 $\forall x \in \mathring{B}(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$. 故

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

情形 III: $x_0 = \pm\infty$ 或 ∞, 而 $a \in \mathbb{R}$.

(1) $x_0 = +\infty$ 且 $\exists \eta > 0$ 使得 $X \supseteq (\eta, +\infty)$:

$\lim\limits_{X \ni x \to +\infty} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > \eta$ 使得 $\forall x > M$, 均有 $|f(x) - a| < \varepsilon$. 此时我们将上述极限简记作 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

(2) $x_0 = -\infty$ 且 $\exists \eta > 0$ 使得 $X \supseteq (-\infty, -\eta)$:

$\lim\limits_{X \ni x \to -\infty} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > \eta$ 使得 $\forall x < -M$, 我们有 $|f(x) - a| < \varepsilon$. 此时我们将该极限简记作 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.

(3) $x_0 = \infty$, $X = \mathbb{R}$: $\lim\limits_{X \ni x \to \infty} f(x) = a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ 使 $|x| > M$ 时, $|f(x) - a| < \varepsilon$. 该极限简记作 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$. 类似地, 可考虑:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$,
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$,
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

命题 3. 假设 $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, 而 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为函数. 则 $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ 当且仅当

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = a.$$

证明: 必要性. 假设 $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$. 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ 使得 $|x| > M$ 时, 均有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$. 也即 $\forall x < -M$ 以及 $\forall x > M$, $f(x) \in B(a, \varepsilon)$. 由此可知 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = a$.

充分性. 假设 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = a$, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M_1 > 0$ 使 $\forall x < -M_1$, $f(x) \in B(a,\varepsilon)$; 同样地 $\exists M_2 > 0$ 使得 $\forall x > M_2$, $f(x) \in B(a,\varepsilon)$. 令 $M = \max(M_1, M_2)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $|x| > M$ 时, 我们总有 $f(x) \in B(a,\varepsilon)$. 故 $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$.

思考题 (不用交): 写出 24 种典型极限的定义.

典型例题

例 1. 证明: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

分析: $\forall \varepsilon > 0$, 要找 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时, 均有 $|x^2| < \varepsilon$, 为此只需取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, 那么当 $0 < |x| < \delta$ 时, 我们有 $|x^2| < \delta^2 = \varepsilon$. 从而所证结论成立.

例 2. 求证: 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ 不存在.

证明: 由于当 $x>0$ 时, 我们均有 $\operatorname{sgn} x=1$, 而当 $x<0$ 时, 则有 $\operatorname{sgn} x=-1$, 于是

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn} x=1,\quad \lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn} x=-1,$$

也就是说左、右极限不相等, 由此我们立刻可知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ 不存在.

例 3. 求证: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

证明: $\forall\varepsilon > 0$, 我们可选取 $\delta = \varepsilon$, 那么 $\forall x \in \mathbb{R}$,

当 $0 < |x| < \delta$ 时, 我们均有

$$|x\sin\frac{1}{x}| \leqslant |x| < \varepsilon.$$

故所证结论成立.

作业题: 求证: $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}] = 1$.

例 4. 求证: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}=-1.$

分析: $\forall\varepsilon>0$, 找 $\delta>0$ 使得 $0<|x-1|<\delta$ 时, 均有 $|\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}+1|<\varepsilon$. 注意到

$$|\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}+1|=|\frac{2x^2-4x+2}{x(x-1)}|=2\frac{|x-1|}{|x|}.$$

要使之“很小”, 须使 $\frac{1}{|x|}$ 有上界, 从而由 $|x-1|$ 可以“很小”而让上式变得“小”. 让 $\frac{1}{|x|}$ 有上界, 就是让 x 远离原点. 由于极限只涉及到点 1 的小邻域, 因此可假设 $|x-1|<\frac{1}{2}$, 从而 $x>\frac{1}{2}$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\}$. 由此立刻可知当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 我们有 $|x-1| < \frac{1}{2}$, 从而我们有 $x > \frac{1}{2}$, 进而可知

$$\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2-x} + 1\right| = \left|\frac{2x^2-4x+2}{x(x-1)}\right|$$

$$= \ 2\frac{|x-1|}{|x|} < 4|x-1| < \varepsilon.$$

故所证结论成立.

例 5. 固定 $x_0 \in \mathbb{R}$. 求证: $\lim\limits_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$.

分析: $\forall \varepsilon > 0$, 求 $\delta > 0$ 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 均有 $|e^x - e^{x_0}| < \varepsilon$.

(1) 若 $x > x_0$, 那么 $|e^x - e^{x_0}| = e^{x_0}(e^{x-x_0} - 1)$. 要使 $|e^x - e^{x_0}| < \varepsilon$, 需 $x - x_0 < \log(1 + \varepsilon e^{-x_0})$. 也即取 $\delta = \log(1 + \varepsilon e^{-x_0})$.

(2) 若 $x < x_0$, 则我们有

$$|e^x - e^{x_0}| = e^x(e^{x_0 - x} - 1) < e^{x_0}(e^{x_0 - x} - 1).$$

因此也只需 $x_0 - x < \delta = \log(1 + \varepsilon e^{-x_0})$.

证明: $\forall\varepsilon>0$, 选取 $\delta=\log(1+\varepsilon e^{-x_0})$. $\forall x\in\mathbb{R}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 分情况讨论:

(1) 若 $0<x-x_0<\delta$, 则我们有

$$|e^x-e^{x_0}|=e^{x_0}(e^{x-x_0}-1)<e^{x_0}(e^\delta-1)=\varepsilon.$$

(2) 若 $0<x_0-x<\delta$, 此时我们也有

$$\begin{aligned}|e^x-e^{x_0}| &= e^x(e^{x_0-x}-1)<e^{x_0}(e^{x_0-x}-1)\\ &< e^{x_0}(e^\delta-1)=\varepsilon.\end{aligned}$$

故所证结论成立.

例 6. 固定 $x_0 > 0$. 求证: $\lim_{x \to x_0} \log x = \log x_0$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 定义 $\delta = \min\left(x_0(1 - e^{-\varepsilon}), x_0(e^{\varepsilon} - 1)\right)$.

则 $\forall x > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 我们有

$$-x_0(1 - e^{-\varepsilon}) \leqslant -\delta < x - x_0 < \delta \leqslant x_0(e^{\varepsilon} - 1),$$

也即 $x_0 e^{-\varepsilon} < x < x_0 e^{\varepsilon}$, 则 $-\varepsilon < \log x - \log x_0 < \varepsilon$,

从而 $|\log x - \log x_0| < \varepsilon$. 故所证结论成立.

例 7. 固定 $x_0 \in \mathbb{R}$. 求证: $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 我们可选取 $\delta = \varepsilon$, 那么 $\forall x \in \mathbb{R}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 我们均有

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos x_0| &= \left|2 \sin \frac{x + x_0}{2} \cdot \sin \frac{x - x_0}{2}\right| \\ &\leqslant 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \\ &\leqslant |x - x_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

故所证结论成立.

注: 同理可证明 $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

例 8. 证明: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

证明: 由熟知的不等式

$$\sin x < x < \tan x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}),$$

立刻可得 $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, 于是我们有

$$\begin{aligned} 0 \ &< \ 1-\frac{\sin x}{x} < 1-\cos x \\ &= \ 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x. \end{aligned}$$

由此可知 $|1-\frac{\sin x}{x}|<|x|\ (0<x<\frac{\pi}{2})$. 由于该式两边函数为偶函数, 则当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时, 我们有 $|1-\frac{\sin x}{x}|<|x|$. $\forall\varepsilon>0$, 如果选取 $\delta=\min(\varepsilon,\frac{\pi}{2})$, 则 $\forall x\in\mathbb{R}$, 当 $0<|x|<\delta$ 时, 我们有

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<|x|<\varepsilon.$$

故所证结论成立.

例 9. 证明: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

分析: $\forall\varepsilon>0$, 要找 $M>0$ 使得当 $|x|>M$ 时, 均有 $|\frac{1}{x^2}|<\varepsilon$, 为此只需取 $M=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

证明: $\forall\varepsilon>0$, 选取 $M=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 则当 $|x|>M$ 时, 我们有 $|\frac{1}{x^2}|<\frac{1}{M^2}=\varepsilon$. 从而所证结论成立.

例 10. 设 $a>1$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x}=0$.

证明: $\forall\varepsilon>0$, 令 $M=|\log_a\frac{1}{\varepsilon}|+1$. 则 $\forall x>M$, 均有 $x>\log_a\frac{1}{\varepsilon}$, 从而 $|\frac{1}{a^x}|<\varepsilon$. 故所证成立.

例 11. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log(x+1)-\log x\big)=0.$

证明: $\forall\varepsilon>0$, 令 $M=\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}$, 则 $\forall x>M$, 我们有 $x>\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}$, 也即 $1+\frac{1}{x}<e^{\varepsilon}$, 从而

$$|\log(x+1)-\log x|=\log(1+\tfrac{1}{x})<\varepsilon.$$

故所证结论成立.

例 12. 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=+\infty\ (\alpha>0).$

证明: $\forall M>0$, 令 $K=M^{\frac{1}{\alpha}}$, 则 $\forall x>K$, 我们有 $x^{\alpha}>K^{\alpha}=M$. 因此所证结论成立.

例 13. 求证: $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=1$.

证明: $\forall x\in\mathbb{R}$, 当 $|x|>1$ 时, 我们有

$$\left|\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}-1\right|=\frac{2}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 我们令 $M=\max\left(\sqrt{2},\frac{2}{\varepsilon}\right)$, 那么 $\forall x\in\mathbb{R}$, 当 $|x|>M\geqslant\sqrt{2}$ 时, 均有 $\left|\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}-1\right|<\frac{2}{|x|}<\varepsilon$. 故所证结论成立.

作业题: 第 2.2 节第 42 页第 3 题第 (1), (7) 题, 第 43 页第 5 题第 (2) 题.

例 14. 设 $a > 1$, $\alpha > 0$. 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$.

证明: 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{(n+1)^\alpha} = +\infty$, 从而 $\forall M > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $\frac{a^n}{(n+1)^\alpha} > M$. 于是 $\forall x > N+1$, 我们有 $[x] \geqslant N+1$, 进而可知

$$\frac{a^x}{x^\alpha} > \frac{a^{[x]}}{([x]+1)^\alpha} > M.$$

故所证结论成立. **注:** 该结论对 $\alpha \leqslant 0$ 也成立.

作业题: 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

§3. 函数极限的性质

函数极限与数列极限的关系:

定理 1. 设 X 为非空数集, x_0 为 X 的极限点, $f: X \to \mathbb{R}$ 为函数, 而 $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$. 那么

$$\lim_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$$

当且仅当对于 $X \setminus \{x_0\}$ 中以 x_0 为极限的任意数列 $\{a_n\}$, 均有 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = a$.

证明: 必要性. $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$, 那么 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) \in B(a, \varepsilon)$.

假设 $X \backslash \{x_0\}$ 中的数列 $\{a_n\}$ 趋近到 x_0, 那么 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 我们均有 $a_n \in \mathring{B}(x_0, \delta)$, 从而可知 $f(a_n) \in B(a, \varepsilon)$, 进而可得

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = a.$$

充分性. 现在用反证法. 假设当 $X \ni x \to x_0$ 时, $f(x)$ 不趋近到点 a. 那么 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, $\exists x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$ 满足 $f(x) \notin B(a, \varepsilon_0)$. 从而可知 $\forall n \geqslant 1$, $\exists a_n \in \mathring{B}_X(x_0, \frac{1}{n})$ 使得 $f(a_n) \notin B(a, \varepsilon_0)$. 因此 $\{f(a_n)\}$ 不趋近到 a. 然而 $a_n \in \mathring{B}_X(x_0, \frac{1}{n})$, 于是由夹逼原理可知 $X \backslash \{x_0\}$ 中的数列 $\{a_n\}$ 趋近到 x_0. 这与题设矛盾! 故所证结论成立.

评注

- 在上述定理中, 我们必须假设 a_n 不等于 x_0. 例如我们可考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \neq 0, \\ 1, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

则 $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. 令 $a_n \equiv 0$, 则 $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = 1$.

- 函数极限问题与数列极限问题等价!

该定理通常用来证明函数极限不存在

为此只需下述两条之一成立:

- 在 $X\backslash\{x_0\}$ 中构造以 x_0 为极限的数列 $\{a_n\}$ 使得数列 $\{f(a_n)\}$ 的极限不存在.
- 在 $X\backslash\{x_0\}$ 中构造以 x_0 为极限的两个不同数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得 $\{f(a_n)\}$ 和 $\{f(b_n)\}$ 趋近到不同的极限.

例 1. 求证: 极限 $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ 不存在.

证明: 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}\frac{1}{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1,$$

故所求极限不存在.

作业题: 求证: 极限 $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ 不存在.

性质 1. 函数极限若存在且有限, 必唯一.

性质 2. (局部有界性) 设 X 为非空数集, x_0 为该集的极限点, $a \in \mathbb{R}$, 而函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$, 则 $\exists \delta, M > 0$ 使 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $|f(x)| < M$.

证明: 由定义可知, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有 $|f(x) - a| < 1$. 故 $|f(x)| < 1 + |a|$.

性质 3. (局部保序性) 设 X 为非空数集, x_0 为其极限点, 而 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 为函数使得

$$\lim_{X \ni x \to x_0} f(x) = a, \quad \lim_{X \ni x \to x_0} g(x) = b.$$

- 如果 $a > b$, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) > g(x)$.
- 如果 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) \geqslant g(x)$, 则 $a \geqslant b$.

注: 同数列情形完全一样, 即便 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 均有 $f(x) > g(x)$, 一般也不能推出 $a > b$.

证明: (1) 方法 1. 现用反证法. 我们假设 $a > b$, 但却 $\forall \delta > 0$, $\exists x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$ 使得 $f(x) \leqslant g(x)$. 则 $\forall n \geqslant 1$, $\exists a_n \in \mathring{B}_X(x_0, \frac{1}{n})$ 使得 $f(a_n) \leqslant g(a_n)$. 又由夹逼原理可知 $\{a_n\}$ 在 $X \backslash \{x_0\}$ 中趋于 x_0, 于是由数列极限的保序性可得

$$a = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} g(a_n) = b,$$

矛盾! 故所证结论成立.

方法 2. 假设 $a, b \in \mathbb{R}$, 其它的情形会更为简单. 令 $\varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$. 则 $\exists \delta_1 > 0$ 使 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta_1)$, $|f(x) - a| < \varepsilon$. 同时 $\exists \delta_2 > 0$ 使 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta_2)$, $|g(x) - b| < \varepsilon$. 令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 那么

$$\mathring{B}_X(x_0, \delta) = \mathring{B}_X(x_0, \delta_1) \cap \mathring{B}_X(x_0, \delta_2),$$

于是 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有

$$f(x) > a - \varepsilon = b + \varepsilon > g(x).$$

(2) 同数列极限的情形一样, 由 (1) 可导出 (2).

推论. (局部保号性) 设 X 为非空的数集, x_0 为其极限点, 而 $f: X \to \mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$.

- 如果 $a > 0$, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) > 0$.
- 如果 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathring{B}_X(x_0, \delta)$, 我们均有 $f(x) \geqslant 0$, 则 $a \geqslant 0$.

注: (1) 由局部保序 (号) 性可导出极限唯一性.
(2) 若 $a \neq 0$, 则 f 在某个 $\mathring{B}_X(x_0)$ 上不为零.

谢谢大家!