微积分 A (1)

姚家燕

第 24 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

第 23 讲回顾：光滑曲线的弧长

- 参数方程: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$
- 函数图像: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$
- 极坐标方程: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$
- 空间曲线参数方程:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

回顾：曲线的曲率与曲率半径

- 参数方程：$\kappa = \frac{|x'y''-x''y'|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- 函数图像：$\kappa = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- 极坐标方程：$\kappa = \frac{|\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+(\rho')^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- 曲率半径：$R = \frac{1}{\kappa}$.

回顾：由平面截面积求立体体积

典型问题: 将一个物体置于平面 $x = a$ 与 $x = b$ 之间 $(a < b)$. $\forall x \in [a, b]$, 用垂直于 x 轴的平面去截此物体所得到的截面的面积为 $S(x)$, 并且假设 $S \in \mathscr{R}[a, b]$, 则该物体的体积为

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

回顾: 旋转体的体积

假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 且 $f \geqslant 0$. 由 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b\,(b > a \geqslant 0)$ 以及 x 轴所围区域分别绕 x 轴和 y 旋转所生成的旋转体体积为:

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x, \; V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \,\mathrm{d}x.$$

注: 同样可求由 $x = g(y) \geqslant 0$ $(0 \leqslant c \leqslant y \leqslant d)$, $y = c$, $y = d$ 以及 y 轴所围图形绕 x 轴或 y 轴旋转得到的旋转体体积: 交换 x, y 的作用.

回顾: 更一般的旋转体的体积

假设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 且 $f \geqslant g \geqslant 0$. 则由 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ $(b > a \geqslant 0)$ 所围的区域分别绕 x 轴与 y 轴旋转所生成的旋转体体积:

$$V_x = \pi \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) \mathrm{d}x,$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\big(f(x) - g(x)\big) \mathrm{d}x.$$

回顾: 绕 x 轴旋转生成的曲面侧面积

面积微元为 $\mathrm{d}\sigma = 2\pi|y|\,\mathrm{d}\ell$.

- 参数方程:
$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$
- 函数图像: $S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$
- 极坐标方程:
$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\rho(\theta)\sin\theta|\sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

回顾: 绕 y 轴旋转生成的曲面侧面积

面积微元为 $\mathrm{d}\sigma = 2\pi|x|\mathrm{d}\ell$.

- 参数方程:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |x(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

- 函数图像: $S = 2\pi \int_a^b |x|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$

- 极坐标方程:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\rho(\theta)\cos\theta|\sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

第 24 讲

平面光滑曲线的质心

设曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中 x, y 为连续可导. 设其线密度为 $\mu(t)$, 那么质量微元为 $\mathrm{d}M(t) = \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)$, 故其质量为

$$M = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}M(t) = \int_\alpha^\beta \mu(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

曲线关于 y 轴的静力矩微元为

$$\mathrm{d}M_y(t) = x(t)\,\mathrm{d}M(t) = x(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t),$$

故曲线关于 y 轴的静力矩为

$$M_y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}M_y(t) = \int_\alpha^\beta x(t)\mu(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

同理, 曲线关于 x 轴的静力矩为

$$M_x = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}M_x(t) = \int_\alpha^\beta y(t)\mu(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

曲线的质心 $(\overline{x}, \overline{y})$ 的坐标公式为:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_\alpha^\beta x(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)},$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_\alpha^\beta y(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}.$$

若 Γ 为均匀 (即 μ 为常数), 且其弧长为 L, 则

$$\overline{y} = \frac{1}{L}\int_\alpha^\beta y(t)\,\mathrm{d}\ell(t),$$

由此可得 $2\pi\overline{y}L = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\,\mathrm{d}\ell(t)$.

若曲线 Γ 的方程为 $y=f(x)\ (a\leqslant x\leqslant b)$, 那么该曲线的质心坐标公式为:

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_a^b x\mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x},$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\int_a^b f(x)\mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}.$$

作业题: 求密度均匀抛物线 $y=\frac{x^2}{2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的质心.

例 20. 求密度均匀半圆周 $x^2+y^2=R^2\,(y\geqslant 0)$ 的质心.

解: 由题设可知上半圆周的参数方程为

$$x=R\cos t,\ \ y=R\sin t\ (0\leqslant t\leqslant \pi),$$

从而其弧长为 $L=\pi R$, 故所求质心 $(\overline{x},\overline{y})$ 满足:

$$\overline{x}=\frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi}R\cos t\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\,\mathrm{d}t=0,$$
$$\overline{y}=\frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi}R\sin t\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2R}{\pi},$$

因此所求质心为 $(0,\frac{2R}{\pi})$.

第 5 章总复习

- 定积分: 分割, 步长, 带点分割, Riemann 和, Riemann 积分 (也被称为定积分), 可积函数, 不可积函数 (Dirichlet 函数不可积).
- 可积函数的基本性质: 可积函数有界.
- 可积性判断准则: Darboux 判别准则, 振幅判别准则, Lebesgue 判别准则.

- 可积函数类: 仅仅有有限多个间断点的有界连续函数 (逐段连续函数), 单调函数.
- 一致连续性: 定义, 刻画, 闭区间上的连续函数为一致连续以及该结论的拓广.
- 定积分的性质: 线性, 关于积分区间可加性, 有限韧性, (严格) 保序性、保号性, 绝对值不等式, 乘积的可积性, 积分第一中值定理, Cauchy、Hölder、Jensen 不等式.

- 定积分的理论计算: 变上、下限积分及求导, 原函数, Newton-Leibniz 公式.
- 不定积分: 定义, 不定积分与导数、微分的关系, 基本的不定积分公式.
- 计算不定积分的基本方法: 分段法, 线性性, 降低三角函数的幂等, 换元法, 分部积分法, 有理函数的不定积分 (有理函数标准分解), 三角有理函数的不定积分, 两类特殊的无理函数的不定积分.

- 计算定积分的基本方法: 分段法, 线性性, 降低三角函数的幂等, 换元法, 分部积分法, 有理函数的定积分 (有理函数的标准分解), 三角有理函数的定积分, 两特殊无理函数的定积分, 定积分的对称性 (奇偶性), 周期的连续函数的定积分.
- 定积分与数列极限: 某些复杂数列极限可以转换成 Riemann 和, 再利用定积分来计算.

直角坐标系下平面区域的面积

假设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$. 则由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 所围平面区域的面积等于

$$S = \int_a^b \big|f(x) - g(x)\big| \, \mathrm{d}x.$$

直角坐标系下由参数表示的曲线所围成的平面区域的面积

设曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 其中 x, y 连续可导, $y \geqslant 0$, 而 $x(t)$ 为严格递增, 则有连续反函数 $t = t(x)$. 令 $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$. 由 Γ, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围区域的面积为

$$S = \int_a^b y(t(x))\,\mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=} \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

极坐标系下平面区域的面积

设曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的极坐标方程为

$$\rho = \rho(\theta)\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

其中 $\rho(\theta)$ 为连续函数. 那么曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 所围成的区域的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \big(\rho(\theta)\big)^2 \,\mathrm{d}\theta.$$

光滑曲线的弧长

- 参数方程: $L=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$
- 函数图像: $L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$
- 极坐标方程: $L=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$
- 空间曲线参数方程:

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

曲线的曲率与曲率半径

- 参数方程: $\kappa = \frac{|x'y''-x''y'|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- 函数图像: $\kappa = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- 极坐标方程: $\kappa = \frac{|\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+(\rho')^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- 曲率半径: $R = \frac{1}{\kappa}$.

由平面截面积求立体体积

典型问题: 将一个物体置于平面 $x = a$ 与 $x = b$ 之间 $(a < b)$. $\forall x \in [a, b]$, 用垂直于 x 轴的平面去截此物体所得到的截面的面积为 $S(x)$, 并且假设 $S \in \mathscr{R}[a, b]$, 则该物体的体积为

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

旋转体的体积

假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 且 $f \geqslant 0$. 由 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b\,(b>a\geqslant 0)$ 以及 x 轴所围区域分别绕 x 轴和 y 旋转所生成的旋转体体积为:

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x,\ V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \,\mathrm{d}x.$$

注: 同样可求由 $x=g(y)\geqslant 0\ (0\leqslant c\leqslant y\leqslant d)$, $y=c$, $y=d$ 以及 y 轴所围图形绕 x 轴或 y 轴旋转得到的旋转体体积: 交换 x,y 的作用.

更一般的旋转体的体积

假设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 且 $f \geqslant g \geqslant 0$. 则由 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ $(b > a \geqslant 0)$ 所围的区域分别绕 x 轴与 y 轴旋转所生成的旋转体体积:

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) \mathrm{d}x, \\ V_y &= 2\pi \int_a^b x\big(f(x) - g(x)\big) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

绕 x 轴旋转生成的曲面的侧面积

面积微元为 $\mathrm{d}\sigma = 2\pi|y|\,\mathrm{d}\ell$.

- 参数方程:

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

- 函数图像: $S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$
- 极坐标方程:

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta |\rho(\theta)\sin\theta|\sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

绕 y 轴旋转生成的曲面的侧面积

面积微元为 $\mathrm{d}\sigma = 2\pi|x|\mathrm{d}\ell$.

- 参数方程:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |x(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

- 函数图像: $S = 2\pi \int_a^b |x|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$
- 极坐标方程:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\rho(\theta)\cos\theta|\sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

参数方程表示的平面光滑曲线的质心

设线密度为 $\mu(t)$, 则质心 $(\overline{x}, \overline{y})$ 的坐标公式为:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_\alpha^\beta x(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)},$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_\alpha^\beta y(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}.$$

若曲线 Γ 的方程为 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 则

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_a^b x\mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x},$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\int_a^b f(x)\mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}.$$

典型例子: 均匀半圆周 $x^2+y^2=R^2\,(y\geqslant 0)$ 的质心为 $(0,\frac{2R}{\pi})$.

综合练习

例 1. 若 $f \in \mathscr{C}[-1,1]$, 求证:

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{hf(x)}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi f(0).$$

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}[-1,1]$, 因此存在 $M > 0$ 使得 $\forall x \in [-1,1]$, 均有 $|f(x)| \leqslant M$. 又 f 在原点处连续, 于是 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0,1)$ 使得 $\forall x \in [-\delta,\delta]$, $|f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$. 令 $\eta = \frac{\varepsilon\delta^2}{8M+1}$. 则 $\forall h \in (0,\eta)$,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{-1}^{-\delta} \frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{1} \frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2Mh}{\delta^2}(1-\delta) + \frac{2Mh}{\delta^2}(1-\delta) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-\delta}^{\delta} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{\pi}\arctan\frac{\delta}{h} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

由此可得 $\lim\limits_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h(f(x)-f(0))}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$, 再注意到

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0^+}\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{1} = \lim_{h\to 0^+} 2\arctan\frac{1}{h} = \pi,$$

由此可知所证结论成立.

例 2. 若 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, 求证: $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x \Big(\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}u.$$

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $F(x) = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$, 则 F 连续可导且 $F' = f$, 从而 $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \Big(\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}u = \int_0^x F(u)\,\mathrm{d}u \\
=\ & uF(u)\Big|_0^x - \int_0^x u\,\mathrm{d}F(u) = xF(x) - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u \\
=\ & \int_0^x f(u)(x-u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

例 3. 若 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导并且 $f(\frac{a+b}{2})=0$,

求证: $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

证明: 方法 1. 令 $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. 由于 f 为二阶可导, 则由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知, $\forall x \in [a,b]$, 存在 $\xi(x)$ 介于 $x, \frac{a+b}{2}$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2}) \\ &\quad + \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x - \frac{a+b}{2})^2, \end{aligned}$$

由此我们立刻可以导出

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\int_a^b \Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)\,\mathrm{d}x\right.\\
&\qquad \left.+\int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2!}\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2\,\mathrm{d}x\right|\\
&= \left|f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\cdot\frac{1}{2}\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2\Big|_a^b+\int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2!}\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2\,\mathrm{d}x\right|\\
&= \left|\int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2!}\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \frac{|f''(\xi(x))|}{2!}\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{M}{2}\int_a^b \Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{3}\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^3\Big|_a^b = \frac{(b-a)^3}{24}M,
\end{aligned}
$$

故所证结论成立.

方法 2. $\forall t\in[a,b]$, 定义 $F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 那么 $F'=f$. 由于 f 为二阶可导, 故 F 为三阶可导. 于是由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知存在 $\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$ 以及 $\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$ 使得

$$\begin{aligned}
F(a) &= F(\frac{a+b}{2})+F'(\frac{a+b}{2})(a-\frac{a+b}{2}) \\
&\quad +\frac{1}{2!}F''(\frac{a+b}{2})(a-\frac{a+b}{2})^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)(a-\frac{a+b}{2})^3, \\
F(b) &= F(\frac{a+b}{2})+F'(\frac{a+b}{2})(b-\frac{a+b}{2}) \\
&\quad +\frac{1}{2!}F''(\frac{a+b}{2})(b-\frac{a+b}{2})^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_2)(b-\frac{a+b}{2})^3.
\end{aligned}$$

又由于 $F(a)=0$, $f(\frac{a+b}{2})=0$, $F'=f$, $F''=f'$, $F'''=f''$, 由此我们立刻可得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)=\frac{(b-a)^3}{24}\cdot\frac{1}{2}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2)).$$

因为 $\frac{1}{2}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))$ 介于 $f''(\xi_1)$, $f''(\xi_2)$ 之间, 则由 Darboux 定理可知, 存在 ξ 介于 ξ_1,ξ_2 之间使得 $f''(\xi)=\frac{1}{2}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))$, 故

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{(b-a)^3}{24}|f''(\xi)|\leqslant\frac{(b-a)^3}{24}\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|,$$

因此所证结论成立.

例 4. 若 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$ 使得 $f(a)=0$, 求证:

$$\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b (f'(x))^2(x-a)^2\,\mathrm{d}x.$$

证明: $\forall t \in [a,b]$, 定义

$$F(t) = \frac{(t-a)^2}{2}\int_a^t (f'(x))^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^t (f'(x))^2(x-a)^2\,\mathrm{d}x - \int_a^t (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

则 F 连续可导且 $F(a)=0$, 而 $\forall t \in [a,b]$, 均有

$$F'(t) = (t-a)\int_a^t (f'(x))^2\,\mathrm{d}x - (f(t))^2,$$

由 Cauchy 不等式可知 $F'(t) \geqslant 0$. 下面我们将介绍该结论的另外一个证明.

于是 $F'(a)=0$, 并且 $\forall t\in[a,b]$, 均有

$$
\begin{aligned}
F''(t) &= \int_a^t (f'(x))^2\,\mathrm{d}x + (t-a)(f'(t))^2 - 2f(t)f'(t) \\
&= \int_a^t (f'(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_a^t (f'(t))^2\,\mathrm{d}x - 2\int_a^t f'(x)f'(t)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^t \left((f'(x))^2 + (f'(t))^2 - 2f'(x)f'(t)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^t \left(f'(x) - f'(t)\right)^2\mathrm{d}x \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

故 F' 递增, 于是 $\forall t\in[a,b]$, $F'(t)\geqslant F'(a)=0$, 则 F 递增, 从而 $F(b)\geqslant F(a)=0$, 由此得证.

例 5. 若 $f \in \mathscr{C}[0,2\pi]$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 由积分第一中值定理可知,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}} |\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k),\end{aligned}$$

其中 $\xi_k \in [\frac{2(k-1)\pi}{n}, \frac{2k\pi}{n}]$. 由定积分的定义得证.

注: 同样可证, $\forall f \in \mathscr{C}[0,2\pi]$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 6. 设 $R>0$. 求证:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}\,\mathrm{d}x < \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}).$$

证明: $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2}]$, 定义 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. 则函数 f 可导且 $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$, 我们均有
$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)<0,$$
于是 $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2}]$, 我们均有 $f(x)\geqslant f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$. 进而由定积分的严格保序性可知
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}\,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}Rx}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}).$$

例 7. 若 $f \in \mathscr{C}[0,\pi]$ 使得

$$\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

求证: 函数 f 在 $(0,\pi)$ 上至少有两个零点.

证明: $\forall t \in [0,\pi]$, 我们现定义 $F(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$, $G(t) = \int_0^t F(x)\sin x\,\mathrm{d}x$, 则 F, G 均为连续可导函数且 $F(0) = F(\pi) = G(0) = 0$, 于是

$$G(\pi) = -F(x)\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = 0,$$

从而由 Rolle 定理可知, $\exists\xi \in (0, \pi)$ 使得

$$0 = G'(\xi) = F(\xi)\sin\xi,$$

于是 $F(\xi) = 0$. 对 F 分别在 $[0, \xi]$, $[\xi, \pi]$ 上应用 Rolle 定理可知, 存在 $\xi_1 \in (0, \xi)$, $\xi_2 \in (\xi, \pi)$ 使得

$$0 = F'(\xi_1) = f(\xi_1),\ 0 = F'(\xi_2) = f(\xi_2),$$

因此所证结论成立.

例 8. 若已知 $f'(x)=\frac{\cos x}{x}$, $f(\frac{\pi}{2})=a$, $f(\frac{3\pi}{2})=b$, 计算 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

解: 由题设可知

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x &= f(x)x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f'(x)x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3\pi b}{2} - \frac{\pi a}{2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}(3b-a)+2.\end{aligned}$$

例 9. 问 a, b, c 何值时 $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ 为有理函数.

解: 由于 $\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2}$, 则不定积分 $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ 为有理函数当且仅当 $A_1 = B_1 = 0$, 而这则等价于关于 A_2, A_3, B_2 的方程组 $A_2+B_2 = 0$, $A_3-2A_2 = a$, $A_2-2A_3 = b$, $A_3 = c$ 有解, 这又等价于 $a+2b+3c = 0$. 于是不定积分 $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ 为有理函数当且仅当

$$a + 2b + 3c = 0.$$

例 10. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(\int_0^{u^2}\arcsin(1-t)\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

解: 由 L'Hospital 法则可得

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\int_0^{u^2}\arcsin(1-t)\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)} \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\int_0^{u^2}\arcsin(1-t)\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}u}{\frac{1}{2}x^3} \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arcsin(1-t)\,\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(1-x^2)\cdot(2x)}{3x} \\
= & \frac{2}{3}\arcsin 1 = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

例 11. 寻求无穷小量 $f(x)=\int_0^{\sin^2 x}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t$ 在 $x\to 0$ 时的阶.

解: 由题设可知

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^8} &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t}{x^8}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos(\sin^2 x)\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(2\sin x\cos x)}{8x^7}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}(\sin^2 x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}x^4\right)^{\frac{3}{2}}}{4x^6}=\frac{1}{8\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

由此可知所求阶为 8.

例 12. 若函数 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导, 并且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 求证:

(1) $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $\int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x = -\xi f(\xi)$.

(2) $\exists \eta \in (0,1)$ 使得 $2f(\eta) + \eta f'(\eta) = 0$.

证明: (1) $\forall t \in [0,1]$, 我们令 $F(t) = t\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 F 可导且 $F(0) = F(1) = 0$. 由 Rolle 定理知, $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $0 = F'(\xi) = \int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + \xi f(\xi)$, 由此立刻可得所要结论.

(2) $\forall t \in [0,1]$, 我们有

$$F'(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + tf(t).$$

于是 $F' \in \mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导. 注意到

$$F'(0) = F'(\xi) = 0,$$

则由 Rolle 定理可知 $\exists \eta \in (0,\xi)$ 使得

$$0 = F''(0) = 2f(\eta) + \eta f'(\eta).$$

故所证结论成立.

例 13. 若 $f \in \mathscr{C}[0,1]$, 求证:

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: $\forall x \in [0,1]$, 定义 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 F 连续可导且 $F' = f$, 于是由分部积分可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 (F(\sqrt{x}) - F(x^2))\,\mathrm{d}x \\
&= x(F(\sqrt{x}) - F(x^2))\Big|_0^1 - \int_0^1 x(F(\sqrt{x}) - F(x^2))'\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 x\left(\frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - 2xf(x^2) \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^1 x\left(\frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - 2xf(x^2)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 2x^2 f(x^2)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x f(x^2)\,\mathrm{d}(x^2) - \int_0^1 x f(\sqrt{x})\,\mathrm{d}(\sqrt{x}) \\
&= \int_0^1 \sqrt{x} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

例 14. 计算 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 因 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^4 x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x \overset{x=-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}\sin^4(-t)}{e^{-t}+1}\,\mathrm{d}(-t)$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}\sin^4 t}{e^{-t}+1}\,\mathrm{d}t,$$

于是 $I=\frac{1}{2}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-x}\sin^4 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x\Big)$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}.$$

例 15. 若 $f \in \mathscr{C}[1, +\infty)$ 使得 $\forall x \geqslant 1$, 均有

$$f(x) = \log x - \int_1^e f(t)\,\mathrm{d}t,$$

求 $\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $a = \int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x$. $\forall x \geqslant 1$, $f(x) = \log x - a$, 故

$$\begin{aligned} a &= \int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^e (\log x - a)\,\mathrm{d}x \\ &= x(\log x - 1 - a)\Big|_1^e = e(-a) + 1 + a, \end{aligned}$$

由此立刻可得 $a = \frac{1}{e}$.

例 16. 设 f 连续可导且其反函数 f^{-1} 也为连续可导. 若 $F' = f$, 求 $\int f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$.

解: $\int f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y \overset{y=f(x)}{=} \int x\,\mathrm{d}f(x)$

$= xf(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x$

$= xf(x) - F(x) + C$

$= f^{-1}(y)y - F \circ f^{-1}(y) + C.$

例 17. 计算 $\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\,\mathrm{d}x \overset{x=\sqrt{\frac{3}{2}}\tan t}{\underset{|t|<\frac{\pi}{2}}{=\!=}} \int \frac{\sqrt{3}\sec t}{\sqrt{\frac{3}{2}}\tan t}\cdot\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

$= \int \frac{\sqrt{3}}{(\sin t)(\cos^2 t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\int\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{1}{\sin t}\right)\mathrm{d}t$

$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\cos t}+\log|\csc t-\cot t|\right)+C$

$= \sqrt{2x^2+3}+\sqrt{3}\log\frac{\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}|x|}+C.$

例 18. 计算 $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{x=\tan t}{\underset{|t|<\frac{\pi}{2}}{=}} \int \frac{e^t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\,\mathrm{d}t$

$$= \int e^t \cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\Big(\int e^{t+it}\,\mathrm{d}t\Big) = \mathrm{Re}\Big(\frac{e^{t+it}}{1+i}\Big) + C$$

$$= \mathrm{Re}\Big(\tfrac{1}{2}e^{t+it}(1-i)\Big) + C = \tfrac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) + C$$

$$= \tfrac{1}{2}e^{\arctan x}\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} + C = \frac{(1+x)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$

例 19. 计算 $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,\mathrm{d}x$.

解: $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,\mathrm{d}x \overset{x=\log t}{=} \int\frac{t-1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$

$$= \int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t - \int\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t - \int\frac{1}{t^2\sqrt{1-t^{-2}}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t + \int\frac{1}{\sqrt{1-t^{-2}}}\,\mathrm{d}(t^{-1})$$

$$= \log\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + \arcsin(t^{-1}) + C$$

$$= \log(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin(e^{-x}) + C.$$

例 20. 计算 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 由于 $I_1 = \int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}$

$$= \arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right) + C_1,$$

$I_2 = \int \frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}$

$= \log\left|\sin x + \cos x + \sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}\right| + C_2,$

由此可导出 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)$

$-\frac{1}{2}\log\left|\sin x + \cos x + \sqrt{2+\sin 2x}\right| + C.$

例 21. 计算 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} e^x \, \mathrm{d}x$

$= \int (\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}) e^x \, \mathrm{d}x$

$= \int \left(e^x \, \mathrm{d}(\tan\frac{x}{2}) + \tan\frac{x}{2} \, \mathrm{d}(e^x) \right)$

$= e^x \tan\frac{x}{2} + C$.

例 22. 计算 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x \overset{y=\sqrt{e^x-1}}{=} \int_0^1 y\,\mathrm{d}\big(\log(1+y^2)\big)$$

$$= \int_0^1 \frac{2y^2\,\mathrm{d}y}{1+y^2} = 2 - \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}y}{1+y^2}$$

$$= 2 - 2\arctan y\Big|_0^1$$

$$= 2 - \frac{\pi}{2}.$$

例 23. 计算定积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.

解: 方法 1.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{(\cos^2 x-\sin^2 x)^2+2\cos^2 x\sin^2 x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(2x)+\frac{1}{2}\sin^2(2x)} \overset{u=2x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}u}{\cos^2 u+\frac{1}{2}\sin^2 u} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}u}{(1+\frac{1}{2}\tan^2 u)\cos^2 u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan u)}{1+(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan u)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan u\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.
\end{aligned}
$$

方法 2.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{(\frac{1+\cos 2x}{2})^2+(\frac{1-\cos 2x}{2})^2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\,\mathrm{d}x}{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)+1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2(2x)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\,\mathrm{d}x}{(\frac{1}{\cos^2(2x)}+1)\cos^2(2x)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(\tan(2x))}{(1+\tan^2(2x)+1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(2x)\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

例 24. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续且 $\forall x\in[0,1]$, 均有 $f(x)>0$. 求证:

$$e^{\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: $\forall x\in\mathbb{R}$, 定义 $\varphi(x)=e^x$, 则 φ 为凸函数, 于是由 Jensen 不等式可得

$$\begin{aligned} e^{\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x} &= \varphi\Big(\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x\Big) \leqslant \int_0^1 \varphi\big(\ln f(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

例 25. 若 $f \in \mathscr{R}[a-1,b+1]$ 在点 a,b 连续, 则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

证明: $\forall t \in [a-1,b+1]$, 定义

$$F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

则 $F(a)=0$, 并由题设知 F 在 $[a-1,b+1]$ 上连续, 在点 a,b 可导且 $f(a)=F'(a)$, $f(b)=F'(b)$.

于是我们就有

$$
\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x \\
= & \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x - F(b)\Big) \\
= & \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\int_{a+h}^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - F(b)\Big) \\
= & \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(F(b+h)-F(a+h)-F(b)\Big) \\
= & \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(F(b+h)-F(b)\Big) - \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(F(a+h)-F(a)\Big) \\
= & F'(b)-F'(a) = f(b)-f(a).
\end{aligned}
$$

例 26. 如果函数 $f \in \mathscr{C}[0,\pi]$ 使得

$$\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = 0,$$

求证: 函数 f 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点.

证明: 用反证法, 假设函数 f 在 $(0,\pi)$ 内至多有一个零点. 由于 $f \in \mathscr{C}[0,\pi]$, 于是由积分中值定理可知, $\exists \xi \in (0,\pi)$ 使得

$$0 = \int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = f(\xi)\sin\xi,$$

从而 $f(\xi)=0$, 进而可知 ξ 为 f 在 $(0,\pi)$ 内的唯一零点. 再由连续函数介值定理知 f 在 $(0,\xi)$ 和 (ξ,π) 内取常号. 又 $\forall x\in(0,\pi)$, $\sin x>0$, 而

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=0,$$

故 f 在 $(0,\xi)$, (ξ,π) 内的符号相反.

不失一般性, 设 f 在 $(0,\xi)$ 内取负号, 在 (ξ,π) 内取正号, 否则我们可以考虑函数 $-f$.

则 $\forall x \in (0,\pi)$, 均有 $f(x)\sin(x-\xi) \geqslant 0$, 但

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin(x-\xi)\,\mathrm{d}x &= \cos\xi\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \sin\xi\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= 0,\end{aligned}$$

于是由定积分的严格保号性可得知, $\forall x \in [0,\pi]$, 我们均有 $f(x)\sin(x-\xi) = 0$, 矛盾! 故假设条件不成立, 从而所证结论成立.

例 27. 若 $f \in \mathscr{C}(a,b)$ 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 均存在且有限, 求证: 函数 f 在 (a,b) 上一致连续. 注: 区间 (a,b) 可以是无限区间.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 由于极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在且有限, 由 Cauchy 准则, $\exists c \in (a,b)$ 使得 $\forall x, y \in (a,c)$, 均有 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 同样由 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在且有限知, $\exists d \in (a,b)$ 使得 $\forall x, y \in (d,b)$, 我们均有 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

现选取 $a_1 \in (a,c)$, $b_1 \in (d,b)$ 使得 $a_1 < b_1$. 因为 $f \in \mathscr{C}(a,b)$, 故 f 在 $[a_1,b_1]$ 上连续, 从而一致连续, 于是 $\exists \delta_1 > 0$ 使得 $\forall x,y \in [a_1,b_1]$, 当 $|x-y| < \delta_1$ 时, 我们均有 $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 由此令 $\delta = \min(\delta_1, \frac{1}{2}(b_1-a_1))$. $\forall x,y \in (a,b)$, 当 $|x-y| < \delta$ 时, 不失一般性, 可假设 $x < y$.

下面分情况讨论:

(1) 若 x,y 同属于 $(a,a_1]$, $[a_1,b_1]$, $[b_1,b)$ 当中的一个, 则 $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

下设 x,y 不同属于 $(a,a_1]$, $[a_1,b_1]$, $[b_1,b)$.

(2) 若 $x \in (a, a_1)$, 因 $|x-y| < \delta \leqslant \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$, 则 $y \in [a_1, b_1]$, 于是 $|a_1 - y| \leqslant |x-y| < \delta$, 故

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &\leqslant |f(x)-f(a_1)| + |f(a_1)-f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(3) 若 $x \in [a_1, b_1]$, 则我们有 $y \in (b_1, b)$, 进而知 $|x-b_1| \leqslant |x-y| < \delta$. 又 $b_1, y \in (d, b)$, 故

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &\leqslant |f(x)-f(b_1)| + |f(b_1)-f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

综上所述可知 f 在 (a, b) 上一致连续.

例 28. 若 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 为一致连续, 而 $\{x_n\}$ 为开区间 (a,b) 中的 Cauchy 数列, 则 $\{f(x_n)\}$ 也为 Cauchy 数列.

证明: $\forall\varepsilon>0$, 因 f 一致连续, 则 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 当 $|x-y|<\delta$ 时, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 又数列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 数列, 则 $\exists N>0$ 使得 $\forall m,n>N$, 我们均有 $|x_m-x_n|<\delta$, 进而可知 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$, 故 $\{f(x_n)\}$ 为 Cauchy 数列.

例 29. 设 $a,b\in\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{C}(a,b)$. 则 f 在 (a,b) 上一致连续当且仅当且极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 均存在且有限.

证明: 充分性. 假设 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 收敛. 将上述极限定义为 $f(a), f(b)$, 则 $f\in\mathscr{C}[a,b]$, 从而 f 在 $[a,b]$ 上一致连续, 进而在 (a,b) 上也为一致连续.

必要性. 假设 f 在开区间 (a,b) 上一致连续. 下证 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 收敛. 对 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 可类似讨论.

$\forall n \geqslant 1$, 令 $a_n = a + \frac{1}{n}(b-a)$. 则数列 $\{a_n\}$ 在开区间 (a,b) 中趋近于 a, 因此为 Cauchy 数列, 于是 $\{f(a_n)\}$ 也为 Cauchy 数列, 故收敛. 设其极限为 A. 下面将证明 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$. $\forall \varepsilon > 0$, 由一致连续性可知, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in (a,b)$, 当 $|x-y| < 2\delta$ 时, 均有 $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$, 故 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$ 时, $|a_n - a| < \delta$, $|f(a_n) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

进而可知 $\forall x \in (a, a+\delta)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
|x - a_{N+1}| &\leqslant |x - a| + |a_{N+1} - a| < 2\delta, \\
|f(x) - A| &\leqslant |f(x) - f(a_{N+1})| + |f(a_{N+1}) - A| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此所证结论成立.

注: 若 (a, b) 为无限区间, 上述结论的必要性可不成立. $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = x$. 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上为一致连续, 但极限 $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ 不收敛.

谢谢大家!