

## 第 12 次作业题

1. 设数列  $\{u_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$ . 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(u_{n+1} - u_n)$  收敛等价于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

2. 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2n^3 + n}$  的敛散性.

3. 判断下列级数的敛散性:

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ , (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ , (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$ , (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n!}$ .

4. 设  $p \in \mathbb{R}$ . 判断级数  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)^p}$  的敛散性.

5. 判断下列级数为绝对收敛、条件收敛还是发散:

(1)  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n+1}{n(n-1)}}$ ,

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$ ,

(3)  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots$ .

6. 假设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$  收敛, 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$  收敛, 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  绝对收敛.

7. 讨论下列无穷乘积的收敛性:

(1)  $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ , (2)  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ .