第4章　积分变换法

§4. 1　Fourier 变换

§4. 2　Fourier 变换应用

§4. 3　Fourier 正弦、余弦变换

§4. 4　Fourier 变换与分离变量法

§4. 5　Laplace 变换

§4. 6　Laplace 变换应用

积分变换　是从函数空间到函数空间的算子

$$T[f](\xi):=\int_a^b \underline{K(x,\xi)}\, f(x)dx$$

核函数（kernel）

Fourier 变换

$$F[f](\xi):=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx \qquad (i=\sqrt{-1},\xi\in\mathbb{R})$$

$$=: \hat{f}(\xi)$$

Laplace 变换

$$L[f](\xi):=\int_0^{\infty} e^{-\xi x} f(x)dx \qquad (\xi\in\mathbb{C})$$

§4. 1 Fourier 变换

§4.1.1 Fourier 变换与 Fourier 级数

设 f 在实轴上分段连续且 $f \in L^1(\mathbb{R})$，这里　（f 可以是复值函数）

$$L^1(\mathbb{R}) \triangleq \left\{ f(x) : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty \right\}.$$

在 $[-L, L]$ 上作 Fourier 级数展开

$$f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{n,L} e^{in\pi x/L} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{n,L} e^{i\xi_n x} \Delta\xi$$

其中 $C_{n,L} = \int_{-L}^{L} f(y) e^{-in\pi y/L} dy$　　$(\Delta\xi = \frac{\pi}{L})$

$\boxed{L \text{ 足够大}} \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi_n y} dy =: \hat{f}(\xi_n)$　　$(\xi_n = \frac{n\pi}{L})$

$$\Rightarrow \quad f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi_n) e^{i\xi_n x} \Delta\xi$$

—— 看作 Riemann 和

$$\boxed{f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi_n) e^{i\xi_n x} \Delta\xi}$$

令 $L \to \infty \Rightarrow \quad \Delta\xi = \dfrac{\pi}{L} \to 0$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$ —— Fourier 逆变换

这里 $\boxed{\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx}$ —— f 的 Fourier 变换

注：（1）Fourier 变换可视为 Fourier 级数的连续形式

（2）以上过程仅为不严格的形式推导

（3）无界区间上的分离变量法中Fourier展开对应 Fourier 变换

$$\boxed{F[f](\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx =: \hat{f}(\xi)}$$

Fourier 变换的一些基本性质（练习，部分为作业）

设 f,g 使得下述所有的 Fourier 变换有意义，

（绝对可积函数有 Fourier 变换）　则

（1）线性性质　$F[c_1 f + c_2 g] = c_1 F[f] + c_2 F[g], \ \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

（2）微分性质　$F[f'](\xi) = i\xi F[f](\xi)$

$$\Rightarrow F[f^{(n)}](\xi) = (i\xi)^n F[f](\xi)$$

（3）积分性质　$F[\int_{-\infty}^{x} f(s)ds](\xi) = \frac{1}{i\xi} F[f](\xi)$

这里需要假设 $\int_{-\infty}^{x} f(s)ds$ 的Fourier 变换存在，且

$\hat{f}(0)=0.$

$$\boxed{F[f](\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx =: \hat{f}(\xi)}$$

（4）像函数微分性质　$F[-ixf(x)](\xi) = \hat{f}'(\xi)$

$$\Rightarrow \quad F[(-ix)^n f(x)](\xi) = \hat{f}^{(n)}(\xi)$$

（5）像函数积分性质　A_1, A_2 为适当常数

$$F[\frac{f(x)}{-ix}](\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \hat{f}(s)ds + A_1,\ F[\frac{f(x)}{ix}](\xi) = \int_{\xi}^{+\infty} \hat{f}(s)ds + A_2$$

（6）频移与时移（位移）性质　$\forall \xi_0$，$x_0 \in \mathbb{R}$，

$$F[f(x)e^{i\xi_0 x}](\xi) = \hat{f}(\xi - \xi_0)$$ 频移

$$F[f(x - x_0)](\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-ix_0\xi}$$ 时移（位移）

（7）相似性质　$\forall k \in \mathbb{R}$，$k \neq 0$，

$$F[f(kx)](\xi) = \frac{1}{|k|}\hat{f}(\frac{\xi}{k})$$

$$\boxed{F[f](\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx =: \hat{f}(\xi)}$$

（8）卷积性质 $F[f*g] = F[f]F[g]$

$$f*g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds \;\Rightarrow f*g = g*f$$

（9）像函数卷积性质

$$F[f(x)g(x)] = \frac{1}{2\pi} F[f]*F[g] = \frac{1}{2\pi} \hat{f}*\hat{g}(\xi)$$

（10）反射性质 $F[\hat{f}(x)](\xi) = 2\pi f(-\xi)$

$$\because \quad F[\hat{f}(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\hat{f}(x)dx = 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-\xi)x}\hat{f}(x)dx\right]$$

$$= 2\pi f(-\xi).$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi \text{（形式推导）}}$$

Fourier 逆变换

$$F^{-1}[g](x):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}g(\xi)d\xi \qquad (x\in\mathbb{R})$$

问题：$F^{-1}[\hat{f}]=f$？

反演定理 设 f 在 (-∞, ∞) 的任一有限区间上满足Dirichlet条件（见Dirichlet收敛定理），且 $f\in L^1(\mathbb{R})$，则

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+)+f(x^-)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)d\xi \quad (\forall\, x\in\mathbb{R})$$

在 f 连续点处则有 $F^{-1}[\hat{f}]=f$

例：Gauss 函数的 Fourier 变换

$$F[e^{-a x^2}](\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \qquad (a>0)$$

§ 4. 1. 2 高维Fourier 变换

设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$.

$dX=dx_1dx_2\cdots dx_n$, $d\alpha=d\alpha_1d\alpha_2\cdots d\alpha_n$, $d\xi=d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n$.

$\xi\bullet X=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n$,

$$L^1(\mathbb{R}^n)\triangleq\left\{f(X):\int_{\mathbb{R}^n}|f(X)|dX<+\infty\right\}.$$

设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且在$\mathbb{R}^n$上分片光滑,

n维Fourier 变换

$$F[f](\xi):=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\xi\bullet X}f(X)dX=:\hat{f}(\xi)\qquad(i=\sqrt{-1},\ \xi\in\mathbb{R}^n)$$

n 维Fourier 反变换

$$F^{-1}[g](X) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot X} g(\xi)d\xi$$

在 f 的连续点，有反演公式：

$$f(X) = F^{-1}[\hat{f}](X) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot X} \hat{f}(\xi)d\xi$$

n 维Fourier 变换性质：

（1）线性性质 $F[c_1 f + c_2 g] = c_1 F[f] + c_2 F[g]$， $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

（2）微分性质

$$F[\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} f(X)](\xi) = (i\xi_1)^{k_1}\cdots(i\xi_n)^{k_n} F[f](\xi)$$

（3）积分性质 $F[\int_{-\infty}^{x_n}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(\alpha)d\alpha](\xi)=\frac{1}{(i\xi_1)\cdots(i\xi_n)}F[f](\xi)$

这里需要假设 $\int_{-\infty}^{x_n}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(\alpha)d\alpha$ 的Fourier 变换存在，且 $\hat{f}(0)=0.$

（4）像函数微分性质

$$F[(-ix_1)^{k_1}\cdots(-ix_n)^{k_n} f(x)](\xi)=\frac{\partial^{k_1+\cdots k_n}}{\partial\xi_1^{k_1}\cdots\partial\xi_n^{k_n}}\hat{f}(\xi)$$

（5）像函数积分性质 A_1,A_2 为适当函数

$$F[\frac{f(X)}{-ix_j}](\xi)=\int_{-\infty}^{\xi_j}\hat{f}(\alpha)d\alpha_j+A_1,\quad F[\frac{f(X)}{ix_j}](\xi)=\int_{\xi_j}^{+\infty}\hat{f}(\alpha)d\alpha_j+A_2,$$

（6）频移与时移性质 $\forall\alpha$，$X_0\in\mathbb{R}^n$，

$$F[f(X)e^{i\alpha\cdot X}](\xi)=\hat{f}(\xi-\alpha)\qquad \text{频移}$$

$$F[f(X-X_0)](\xi)=\hat{f}(\xi)e^{-iX_0\cdot\xi}\qquad \text{时移（位移）}$$

（7）相似性质　$\forall k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in\mathbb{R}^n$，$k_j\neq 0$，$j=1,2\cdots n$，

$$F[f(k_1x_1,k_2x_2,\cdots,k_nx_n)](\xi)=\frac{1}{|k_1k_{2\ldots}k_n|}\hat{f}(\frac{\xi_1}{k_1},\frac{\xi_2}{k_2},\cdots\frac{\xi_n}{k_n})$$

（8）卷积性质　$F[f*g]=F[f]F[g]$

$$f*g(X):=\int_{\mathbb{R}^n}f(\alpha)g(X-\alpha)d\alpha\ \Rightarrow f*g=g*f$$（交换律）

（9）像函数卷积性质

$$F[f(X)g(X)]=\frac{1}{(2\pi)^n}F[f]*F[g]=\frac{1}{(2\pi)^n}\hat{f}*\hat{g}(\xi)$$

（10）反射性质 $F[\hat{f}(X)](\xi)=(2\pi)^n f(-\xi)$

注：卷积还具有结合律：$f*(g*h)=(f*g)*h,$

分配律：$f*(g+h)=f*g+f*h.$

附录 A　傅里叶变换简表

像原函数 $f(t)$	像函数 $F(\omega)$
$\begin{cases} E, & \lvert t \rvert \leqslant \dfrac{\tau}{2} \\ 0, & \lvert t \rvert > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$	$2E\dfrac{\sin\dfrac{\omega\tau}{2}}{\omega}$
e^{-at^2}　$(\mathrm{Re}(a) > 0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert t \rvert}$　$(a > 0)$	$\dfrac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
$\sin\omega_0 t$	$\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
单位函数 $u(t)$	$\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$
$u(t)t$	$\dfrac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2}+\pi\mathrm{j}\delta'(\omega)$
$u(t)t^n$	$\dfrac{n!}{(\mathrm{j}\omega)^{n+1}}+\pi\mathrm{j}^n\delta^{(n)}(\omega)$
$u(t)e^{-at}$　$(a > 0)$	$\dfrac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$
$u(t)\sin at$	$\dfrac{a}{a^2-\omega^2}$
$u(t)\cos at$	$\dfrac{\mathrm{j}\omega}{a^2-\omega^2}$
$u(t)e^{\mathrm{j}at}$	$\dfrac{1}{\mathrm{j}(\omega-a)}+\pi\delta(\omega-a)$
$\begin{cases} e^{\mathrm{j}\beta t}, & a < t < b \\ 0, & t < a, t > b \end{cases}$	$\dfrac{\mathrm{j}}{\beta-\omega}[e^{\mathrm{j}a(\beta-\omega)}-e^{\mathrm{j}b(\beta-\omega)}]$
$\begin{cases} e^{-(a+\mathrm{j}b)t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\dfrac{\mathrm{j}}{-(b+\omega)+\mathrm{j}a}$
$\delta(t)$,　$\delta(t-t_0)$	1,　$e^{-\mathrm{j}\omega t_0}$
$\dfrac{1}{a^2+t^2}$　$(\mathrm{Re}(a) < 0)$	$-\dfrac{\pi}{a}e^{a\lvert\omega\rvert}$

续表

像原函数 $f(t)$	像函数 $F(\omega)$
$\dfrac{t}{(a^2+t^2)^2}$ $(\mathrm{Re}(a)<0)$	$\dfrac{\mathrm{j}\omega\pi}{2a}e^{a\lvert\omega\rvert}$
$\dfrac{e^{jbt}}{a^2+t^2}$ $(\mathrm{Re}(a)<0$，b 为实数$)$	$-\dfrac{\pi}{a}e^{a\lvert\omega-b\rvert}$
$\dfrac{\cos bt}{a^2+t^2}$ $(\mathrm{Re}(a)<0$，b 为实数$)$	$-\dfrac{\pi}{2a}\left[e^{a\lvert\omega-b\rvert}+e^{a\lvert\omega+b\rvert}\right]$
$\dfrac{\sin bt}{a^2+t^2}$ $(\mathrm{Re}(a)<0$，b 为实数$)$	$-\dfrac{\pi}{2a\mathrm{j}}\left[e^{a\lvert\omega-b\rvert}-e^{a\lvert\omega+b\rvert}\right]$
$\dfrac{\mathrm{sh}\,at}{\mathrm{sh}\,\pi t}$ $(-\pi<a<\pi)$	$\dfrac{\sin a}{\mathrm{ch}\,\omega+\cos a}$
$\dfrac{\mathrm{sh}\,at}{\mathrm{ch}\,\pi t}$ $(-\pi<a<\pi)$	$-\dfrac{2\mathrm{j}\sin\dfrac{a}{2}\mathrm{sh}\dfrac{\omega}{2}}{\mathrm{ch}\,\omega+\cos a}$
$\dfrac{\mathrm{ch}\,at}{\mathrm{ch}\,\pi t}$ $(-\pi<a<\pi)$	$\dfrac{2\cos\dfrac{a}{2}\mathrm{ch}\dfrac{\omega}{2}}{\mathrm{ch}\,\omega+\cos a}$
$\sin at^2$ $(a>0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4a}+\dfrac{\pi}{4}\right)$
$\cos at^2$ $(a>0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$
$\dfrac{1}{t}\sin at$ $(a>0)$	$\begin{cases}\pi, & \lvert\omega\rvert\leqslant a\\ 0, & \lvert\omega\rvert>a\end{cases}$
$\dfrac{\sin at}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\mathrm{j}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lvert\omega+a\rvert}}-\dfrac{1}{\sqrt{\lvert\omega-a\rvert}}\right)$
$\dfrac{\cos at}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lvert\omega+a\rvert}}+\dfrac{1}{\sqrt{\lvert\omega-a\rvert}}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\sqrt{\dfrac{2\pi}{\lvert\omega\rvert}}$
$\mathrm{sgn}\,t$	$\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$
$\lvert t\rvert$	$-\dfrac{2}{\omega^2}$
$\dfrac{1}{\lvert t\rvert}$	$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\lvert\omega\rvert}$

§4. 2 Fourier 变换应用

Fourier 变换可用来解无界区间上波动方程、热传导方程带形区域上的 Laplace 方程等；也适用于高阶方程。

例:(无界长杆热传导)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \qquad (1)$$

使用 Fourier 变换(关于空间变量 x)

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) = -a^2\xi^2\hat{u}(\xi,t) + \hat{f}(\xi,t), & \xi \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi), & \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}(\xi,t) = e^{-a^2\xi^2 t}\left[\int_0^t \hat{f}(\xi,s)e^{a^2\xi^2 s}ds + g(\xi)\right]$$

$$(*) \Rightarrow \quad g(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi)e^{-a^2\xi^2 t} + \int_0^t \hat{f}(\xi,s)e^{-a^2\xi^2(t-s)}ds$$

$$\boxed{F^{-1}[e^{-k\xi^2}](x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi k}}e^{-\frac{x^2}{4k}} \quad k>0}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t)=F^{-1}[\hat{u}(\xi,t)]$$

$$=F^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}]+F^{-1}[\int_0^t \hat{f}(\xi,s)e^{-a^2\xi^2(t-s)}ds]$$

$$F^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}]=F^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)]*F^{-1}[e^{-a^2\xi^2 t}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\varphi(y)dy$$

$$F^{-1}[\int_0^t \hat{f}(\xi,s)e^{-a^2\xi^2(t-s)}ds]=\int_0^t F^{-1}[\hat{f}(\xi,s)]*F^{-1}[e^{-a^2\xi^2(t-s)}]ds]$$

$$=\int_0^t f(x,s)*[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-s)}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-s)}}]ds \qquad \boxed{(f*g)^{\wedge}=\hat{f}\,\hat{g}}$$

$$\boxed{F[e^{-bx^2}](\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-\frac{\xi^2}{4b}} \quad b>0}$$

$$=\int_0^t ds\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-s)}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}}f(y,s)dy$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\varphi(y)dy$$

$$+\int_0^t ds\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-s)}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}}f(y,s)dy$$

注：（1）当$f(x,t)=0$ 时，对应齐次方程的解为

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\varphi(y)\,dy}$$

非齐次方程的解也可以通过叠加原理与齐次化原理得到（练习）

（2）上面的解只为形式解（积分变换法的局限），但可

用之预测解（如$|\varphi|\le Ke^{-bx^2}\ (b>0)\Rightarrow$ 古典解）

（3）无界长杆热传导方程的解一般不唯一，

若附加无穷远处衰减条件则可有唯一性

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\varphi(y)\,dy} = (H*\varphi)(x,t)$$

注：热传导方程解的性质（练习）

（1）φ 无穷次可微性且 $|\varphi| \le Ke^{-bx^2}$ $(b>0) \Rightarrow u \in C^\infty$ $(t>0)$

（2）φ 为奇（偶或周期）函数

则 u 关于 x 为奇（偶或周期）函数

（3）基本源解（热核）

$$H(x,t) := \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \qquad (t>0)$$

$$H_t = a^2 H_{xx} \qquad H(x,t) \xrightarrow{t\to 0^+} ?$$

例：n 维热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta_n u, & X \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(X,0) = \varphi(X), & X \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (2)$$

使用 Fourier 变换（关于空间变量 X）

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) = -a^2\rho^2\hat{u}(\xi,t), & \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad \rho = |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi)e^{-a^2\rho^2 t} = \hat{\varphi}(\xi)e^{-a^2(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)t}$$

$$\Rightarrow \; u(X,t) = F^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)e^{-a^2(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)t}] = \varphi(X) * F^{-1}[e^{-a^2(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)t}]$$

$$= \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|X-\alpha|^2}{4a^2 t}} \varphi(\alpha)\, d\alpha \;: \qquad |X-\alpha|^2 = (x_1-\alpha_1)^2 + \cdots + (x_n-\alpha_n)^2$$

例：n 维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta_n u, & X \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(X,0) = \varphi(X), \quad u_t(X,0) = \psi(X), & X \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (3)$$

使用 Fourier 变换（关于空间变量 X）

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{u}_{tt}(\xi,t) = -a^2 \rho^2 \hat{u}(\xi,t), & \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi), \quad \hat{u}_t(\xi,0) = \hat{\psi}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad \rho = |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi)\cos a\rho t + \frac{\hat{\psi}(\xi)}{a\rho}\sin a\rho t$$

$$\Rightarrow \quad u(X,t) = F^{-1}[\hat{u}(\xi,t)] = F^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)\cos a\rho t] + F^{-1}\left[\frac{\hat{\psi}(\xi)}{a\rho}\sin a\rho t\right]$$

对一般的n，上面的Fourier反变换不太容易得到，这与n维热传导方程有很大差异。当n=3时，我们会在第5章利用δ 函数给出上面的解。

$n=1$时，我们来给出d'Alembert公式，此时

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{\varphi}(\xi)\cos a\xi t+\frac{\hat{\psi}(\xi)}{a\xi}\sin a\xi t$$

$$=\hat{\varphi}(\xi)\frac{e^{ia\xi t}+e^{-ia\xi t}}{2}+\frac{\hat{\psi}(\xi)}{a\xi}\frac{e^{ia\xi t}-e^{-ia\xi t}}{2i}$$

$$=\frac{1}{2}[\hat{\varphi}(\xi)e^{ia\xi t}+\hat{\varphi}(\xi)e^{-ia\xi t}]+\frac{1}{2a}\left[\frac{\hat{\psi}(\xi)e^{ia\xi t}}{i\xi}-\frac{\hat{\psi}(\xi)e^{-ia\xi t}}{i\xi}\right]$$

$$\Rightarrow\quad u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\big)$$ —— 时移性质

$$+\frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{x+at}\psi(y)dy-\int_{-\infty}^{x-at}\psi(y)dy\right]$$ —— 积分+时移性质

$$\boxed{=\frac{1}{2}\big(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy.}$$

例：上半平面Dirichlet问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in\mathbb{R},\ y>0, \\ u\big|_{y=0}=\varphi(x) & \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x,y)=0,\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} u_x(x,y)=0 & \end{cases} \longrightarrow \text{自然边界条件}$$

上述收敛关于y是一致的，另外，

当 $y\to+\infty$时，$u(x,y)$关于x 在$\mathbb{R}$上一致有界。

解：使用 Fourier 变换（关于空间变量 x）

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{u}_{yy}(\xi,y)-\xi^2\hat{u}(\xi,y)=0, & \xi\in\mathbb{R},\ y>0 \\ \hat{u}(\xi,0)=\hat{\varphi}(\xi), & \xi\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}(\xi,y)=A(\xi)e^{\xi y}+B(\xi)e^{-\xi y}$$

当$y\to+\infty$时，u 有界 $\Rightarrow$ 当$y\to+\infty$时,$\hat{u}(\xi,y)$ 也必须有界。（练习）

$\Rightarrow$ 当$\xi>0$时，$A(\xi)=0$,　当$\xi<0$时，$B(\xi)=0$.

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi,y)=\begin{cases}\hat{\varphi}(\xi)e^{-\xi y}, & \xi>0,\\ \hat{\varphi}(\xi)e^{\xi y}, & \xi<0.\end{cases}$$

$$i.e., \hat{u}(\xi,y)=\hat{\varphi}(\xi)e^{-|\xi|y}, \xi\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{F[\frac{1}{x^2+b^2}](\xi)=\frac{\pi}{b}e^{-b|\xi|} \quad :\mathrm{Re}\, b>0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F^{-1}[e^{-b|\xi|}]=\frac{b}{\pi}\frac{1}{x^2+b^2} \quad :\mathrm{Re}\, b>0}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y)=F^{-1}[\hat{u}(\xi,y)]=F^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)e^{-|\xi|y}]$$

$$=F^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)]*F^{-1}[e^{-|\xi|y}]=\varphi(x)*F^{-1}[e^{-|\xi|y}]$$

$$=\varphi(x)*\left[\frac{y}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\varphi(t)}{(x-t)^2+y^2}dt.$$

上半平面内的Poisson公式

$$\boxed{\hat{u}(\xi,y)=A(\xi)e^{\xi y}+B(\xi)e^{-\xi y}}$$

练习：上半平面Neumann问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in\mathbb{R}, \quad y>0, \\ u_y\big|_{y=0}=\varphi(x) \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} u_y(x,y)=0, \lim\limits_{|x|\to+\infty} u_{xy}(x,y)=0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ 自然边界条件

上述收敛关于y是一致的， 另外，

当$y\to+\infty$时，$u(x,y)$关于x在$\mathbb{R}$上一致有界。

答案：

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\ln\frac{(x-t)^2+y^2}{(x-t)^2+c^2}\,d\,t, \ \forall\, c\in\mathbb{R}.$$

例：半无界杆热传导方程问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x < \infty \end{cases}$$

解：对$\varphi(x)$做偶延拓，以$\varphi_e(x)$表示之。(思考：为什么这里要做偶延拓)

相应的“延拓问题”为

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi_e(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

根据前面所得公式，此问题的解是

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \varphi_e(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} [e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}}]\varphi(y)\,dy$$

练习：半无界杆热传导方程问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x < \infty \end{cases}$$

用**奇延拓法**可求得此问题解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty [e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}}] \varphi(y) dy$$

回顾与对比：用延拓法求解半无界弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ (or: u_x(0,t) = 0) & t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x < \infty \end{cases}$$

§4. 3 Fourier 正弦、余弦变换

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上奇函数，则

$$F[f](\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}f(x)dx \quad =\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)\cos\xi x-if(x)\sin\xi x]dx$$

$$=-i\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\xi xdx=-2i\int_{0}^{\infty}f(x)\sin\xi xdx$$

定义：（1） $[0,+\infty)$ 上函数$f(x)$的正弦变换定义为

$$F_s[f](\xi)=\hat{f}_s(\xi):=\int_0^{\infty}f(x)\sin\xi xdx \qquad (\xi\geq 0)$$

此处 $f(x)$可看做实轴上奇函数

（2） $[0,+\infty)$ 上函数$f(x)$的余弦变换定义为

$$F_c[f](\xi)=\hat{f}_c(\xi):=\int_0^{\infty}f(x)\cos\xi xdx \qquad (\xi\geq 0)$$

此处 $f(x)$可看做实轴上偶函数

$$\boxed{F[f](\xi)=2\int_0^{\infty}f(x)\cos\xi xdx}$$

不难看出，$\hat{f}_s(\xi)$，$\hat{f}_c(\xi)$ 分别是奇，偶函数

下面求正弦变换的反演公式

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = -2i\int_0^{\infty} f(x)\sin\xi x dx}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -2i\hat{f}_s(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

$$= \frac{-i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_s(\xi)e^{i\xi x}d\xi = \frac{-i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\hat{f}_s(\xi)\cos\xi x + i\hat{f}_s(\xi)\sin\xi x]d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_s(\xi)\sin\xi x d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \hat{f}_s(\xi)\sin\xi x d\xi \triangleq F_s^{-1}[\hat{f}_s(\xi)]$$

类似可得余弦变换的反演公式

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \hat{f}_c(\xi)\cos\xi x d\xi \triangleq F_c^{-1}[\hat{f}_c(\xi)]$$

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos\xi x dx}$$

正弦，余弦变换的一些性质

（1）线性性质 （略）

（2）微分性质

$$\begin{cases} F_s[f'(x)](\xi) = f(x)\sin\xi x\Big|_0^{+\infty} - \xi F_c[f](\xi) \\ F_c[f'(x)](\xi) = f(x)\cos\xi x\Big|_0^{+\infty} + \xi F_s[f](\xi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_s[f''(x)](\xi) = [f'(x)\sin\xi x - \xi f(x)\cos\xi x]\Big|_0^{+\infty} - \xi^2 F_s[f](\xi) \\ F_c[f''(x)](\xi) = [f'(x)\cos\xi x + \xi f(x)\sin\xi x]\Big|_0^{+\infty} - \xi^2 F_c[f](\xi) \end{cases}$$

（3）积分性质

$$F_s[\int_0^x f(s)ds](\xi) = \frac{1}{\xi}F_c[f](\xi)$$

$$F_c[\int_0^x f(s)ds](\xi) = \frac{-1}{\xi}F_s[f](\xi)$$

这里需要假设 $\int_0^{+\infty} f(s)ds=0.$

（4）像函数微分性质

$$F_s[xf(x)](\xi) = -\frac{d\hat{f}_c(\xi)}{d\xi}$$

$$F_c[xf(x)](\xi) = \frac{d\hat{f}_s(\xi)}{d\xi} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} F_s[x^2 f(x)](\xi) = -\dfrac{d^2\hat{f}_s(\xi)}{d\xi^2} \\ F_c[x^2 f(x)](\xi) = -\dfrac{d^2\hat{f}_c(\xi)}{d\xi^2} \end{cases}$$

（5）相似性质 $\forall k \in \mathbb{R}$，$k \neq 0$,

$$F_s[f(kx)](\xi) = \frac{1}{k}\hat{f}_s\left(\frac{\xi}{|k|}\right)$$

$$F_c[f(kx)](\xi) = \frac{1}{|k|}\hat{f}_c\left(\frac{\xi}{|k|}\right)$$

（6）反射性质 $F_s[\hat{f}_s(x)](\xi) = -\dfrac{\pi}{2} f(-\xi)$

$$F_c[\hat{f}_c(x)](\xi) = \frac{\pi}{2} f(-\xi)$$

应用 Fourier 正弦或余弦变换可以求解半无界空间上的定解问题

例：半无界杆热传导方程问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u_x(0,t) = \varphi(t), & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x < \infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t) = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} u_x(x,t) = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ 自然边界条件

解：使用 Fourier 余弦变换（关于空间变量 x ）

(思考：为什么这里不能使用正弦变换)

记 $\mathrm{U}(\xi,t) = F_c[u(x,t)]$.

$$\Rightarrow \quad U_t(\xi,t) = a^2\left\{[u_x(x,t)\cos\xi x + \xi u(x,t)\sin\xi x]\Big|_0^{+\infty} - \xi^2 U(\xi,t)\right\}$$

$$= -a^2\xi^2 U(\xi,t) - a^2\varphi(t), \qquad U(\xi,0) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad U(\xi,t) = -a^2\int_0^t e^{-\xi^2 a^2 (t-s)}\varphi(s)ds$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = F_c^{-1}[U(\xi,t)] = -\frac{2a^2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t e^{-\xi^2 a^2 (t-s)}\varphi(s)ds\right]\cos\xi x d\xi$$

$$= -\frac{2a^2}{\pi}\int_0^t \varphi(s)\left[\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2 a^2 (t-s)}\cos\xi x d\xi\right]ds$$

$$= -\frac{a^2}{\pi}\int_0^t \varphi(s)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 a^2 (t-s)}\cos\xi x d\xi\right]ds$$

$$= -2a^2\int_0^t \varphi(s)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 a^2 (t-s)}e^{i\xi x}d\xi\right]ds$$

$$= -a\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-s)}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-s)}}\varphi(s)ds$$

作业：半无界杆热传导方程问题　　教材P160习题4：3（1）

$$
\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \infty, t > 0 \\
u(0,t) = \varphi(t), & t > 0 \\
u(x,0) = 0, & 0 \le x < \infty \\
\lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t) = 0, \lim\limits_{x\to+\infty} u_x(x,t) = 0 \longrightarrow \text{自然边界条件}
\end{cases}
$$

注：这里条件 $u(0,t)=\varphi(t)$, 适用**正弦变换**。

答案：

$$
u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(s) \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-s)}} ds
$$

练习： 用正弦或余弦变换求解半无界弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<\infty, t>0 \\ u_x(0,t)=f(t), \quad \text{or: } u(0,t)=f(t), & t>0 \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, & 0\le x<\infty \end{cases}$$

注：（1）配以自然边界条件: $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t)=0, \lim\limits_{x\to+\infty} u_x(x,t)=0$

（2）反变换中需要用到 δ 函数，可以在学完第五章后再练习求解。

示例： 设上面练习中0端边界条件为 $u_x(0,t)=f(t)$，我们来求解。

施行余弦变换， 记 $\mathrm{U}(\xi,t)=F_c[u(x,t)]$

$$\Rightarrow U_{tt}(\xi,t)=a^2\left\{[u_x(x,t)\cos\xi x+\xi u(x,t)\sin\xi x]\Big|_0^{+\infty}-\xi^2U(\xi,t)\right\}$$

$$=-a^2\xi^2U(\xi,t)-a^2f(t), \qquad U(\xi,0)=0,\ U_t(\xi,0)=0.$$

$$\Rightarrow \qquad U(\xi,t) = -\frac{a}{\xi}\int_0^t \sin a\xi(t-s)\ f(s)ds \qquad \Rightarrow$$

$$u(x,t) = F_c^{-1}[U(\xi,t)] = -\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\xi}\int_0^t \sin a\xi(t-s)\ f(s)ds\right]\cos\xi x d\xi$$

$$= -\frac{2a}{\pi}\int_0^t f(s)ds\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\xi}\sin a\xi(t-s)\right]\cos\xi x d\xi$$

$$= -\frac{a}{\pi}\int_0^t f(s)ds\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\xi}\sin a\xi(t-s)\right]\cos\xi x d\xi$$

$$= -2a\int_0^t f(s)ds\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\xi}\sin a\xi(t-s)\right]e^{i\xi x}d\xi$$

注意 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\xi}\sin a\xi(t-s)\right]e^{i\xi x}d\xi = \frac{1}{2}F^{-1}\left[\frac{e^{ia\xi(t-s)}-e^{-ia\xi(t-s)}}{i\xi}\right](x)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} F^{-1}\left[e^{ia\xi(t-s)}-e^{-ia\xi(t-s)}\right](y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}[\delta(y+a(t-s))-\delta(y-a(t-s))]dy$$

$$=\frac{1}{2}[H(x+a(t-s))-H(x-a(t-s))]$$

$$\Rightarrow\quad u(x,t)=-a\int_{0}^{t}f(s)[H(x+a(t-s))-H(x-a(t-s))]ds$$

$$=-aH(t-\frac{x}{a})\int_{0}^{t-\frac{x}{a}}f(s)ds$$ （想想为什么）

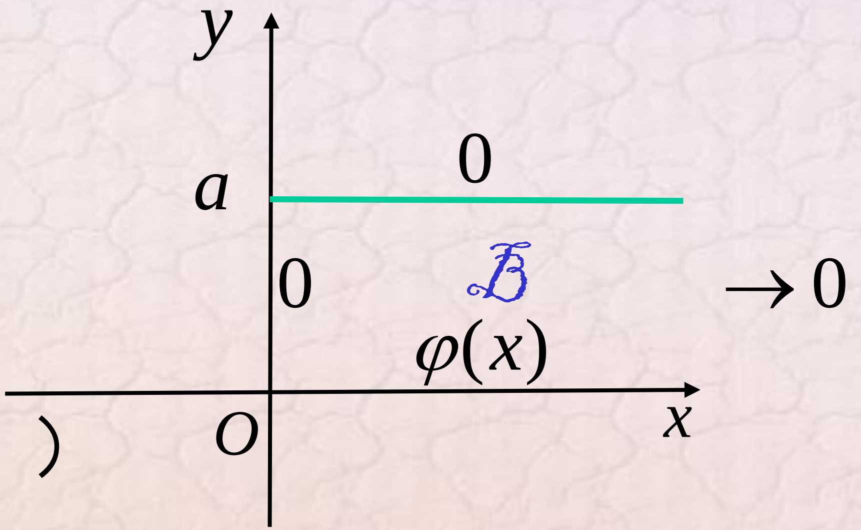
注：若配以0端边界条件 $u(0,t)=f(t)$, 则答案为：

$$u(x,t)=H(t-\frac{x}{a})f(t-\frac{x}{a}).$$

这里 $H(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$ 为Heaviside跳跃函数

例： 半条形区域$\mathscr{B}$上Dirichlet问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,+\infty), \quad 0<y<a, \\ u|_{y=0}=\varphi(x), \quad u|_{y=a}=0, & x\in(0,+\infty), \\ u|_{x=0}=0, & 0<y<a, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,y)=0, \lim\limits_{x\to+\infty} u_x(x,y)=0 & \end{cases}$$



解： 使用 Fourier 正弦变换（关于空间变量 x ）

记$U(\xi,y)=F_s[u(x,y)]$, $\qquad \Phi(\xi)=F_s[\varphi(x)]$.

$$\Rightarrow \quad U_{yy}(\xi,y)+\left\{[u_x(x,y)\sin\xi x-\xi u(x,y)\cos\xi x]\Big|_0^{+\infty}-\xi^2 U(\xi,y)\right\}$$

$$=U_{yy}(\xi,y)-\xi^2 U(\xi,y)=0$$

$$U(\xi,0)=\Phi(\xi), \quad U(\xi,a)=0.$$

$$\Rightarrow \quad U(\xi, y) = A(\xi)\cosh \xi y + B(\xi)\sinh \xi y$$

$$\Rightarrow \quad A(\xi) = \Phi(\xi), \quad B(\xi) = \frac{-\cosh a\xi}{\sinh a\xi}\Phi(\xi)$$

$$\Rightarrow \quad U(\xi, y) = [\cosh \xi y - \frac{\cosh a\xi \sinh \xi y}{\sinh a\xi}]\Phi(\xi)$$

$$= [\cosh \xi y - \frac{\cosh a\xi \sinh \xi y}{\sinh a\xi}]\int_0^{+\infty} \varphi(s)\sin \xi s\, ds$$

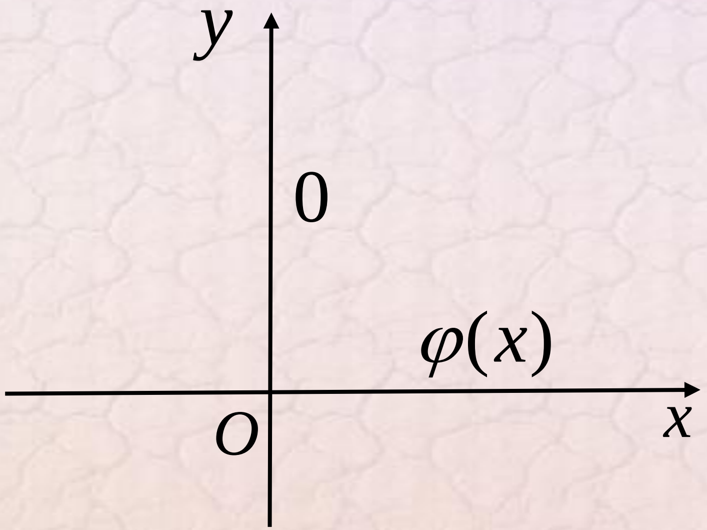
$$= \int_0^{+\infty} \varphi(s)\sin \xi s \frac{\sinh(a-y)\xi}{\sinh a\xi} ds$$

$$\Rightarrow \quad u(x, y) = F_s^{-1}[U(\xi, y)]$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(s)\left[\int_0^{+\infty} \frac{\sinh(a-y)\xi}{\sinh a\xi} \sin \xi s \sin \xi x\, d\xi\right] ds$$

练习：用正弦或余弦变换求解求解$\frac{1}{4}$-平面上Laplace方程定解问题

（1）$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x,y\in(0,+\infty), \\ u|_{y=0}=\varphi(x), & x\in(0,+\infty), \\ u|_{x=0}=0, & y\in(0,+\infty), \end{cases}$$



（2）$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x,y\in(0,+\infty), \\ u|_{y=0}=\varphi(x), & x\in(0,+\infty), \\ u_x|_{x=0}=0, & y\in(0,+\infty), \end{cases}$$

注：配以适当自然边界条件

注： 半无界区间情形通过适当延拓，

然后使用 Fourier 变换法求解，

等价于应用 Fourier 正弦或余弦变换

$$F_s[f](\xi) := \int_0^\infty f(x)\sin\xi x\,dx \qquad (\xi \geq 0)$$

$$F_c[f](\xi) := \int_0^\infty f(x)\cos\xi x\,dx$$

§4. 4 Fourier 变换与分离变量法

第2章我们留下一个问题：

无界区域是否有相应的分离变量法？

如无界弦的振动或无限长杆热传导方程

例：无界长杆热传导

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (1)$$

设 $u(x,t) = X(x)T(t)$ （分离变量）

分离得特征值问题 $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(\pm\infty) \text{ 有界} \end{cases} \longrightarrow$ 自然边界条件

及常微分方程 $T'' + \lambda a^2 T = 0$

讨论可知（练习）

$$0 \le \lambda := \xi^2$$

取其复形式特征函数

$$X(x,\xi) = e^{i\xi x}, \xi \in \mathbb{R}$$ (怎么理解这里 $\xi \in \mathbb{R}$)

相应的 $T(t,\xi) = e^{-a^2\xi^2 t},$

无限区间上特征值是连续分布的，利用积分叠加可得

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\xi)T(t,\xi)X(x,\xi)d\xi \longrightarrow A(\xi)\text{待定}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}e^{i\xi x}d\xi \longrightarrow A(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}\text{之Fourier反变换}$$

$$u(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\xi)e^{i\xi x}d\xi = \varphi(x) = F^{-1}[A(\xi)]$$

$\Rightarrow$ $\varphi(x)$是$A(\xi)$的Fourier反变换

$$\Rightarrow \quad A(\xi)=F[\varphi(s)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)e^{-i\xi s}ds.$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)e^{-i\xi s}ds\right]e^{-a^2\xi^2 t}e^{i\xi x}d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\xi^2 t}e^{i\xi(x-s)}d\xi\right]ds$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}ds$$

可见分离变量法依然适用于无界区间上的问题，只是特征值是连续分布的，$u(x,t)$ 的Fourier展开是以积分形式出现。

$$\begin{cases} A(\xi)e^{-a^2\xi^2 t} \text{ 可视作未知函数} u(x,t) \text{ 的Fourier变换 } F[u(x,t)] \\ u(x,t) \text{ 的Fourier展开式即是} F[u(x,t)] \text{的反变换} \end{cases}$$

要点：Fourier正、反变换视作可分离变量法的分解、重组过程

例： 半无界长杆热传导

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x>0, t>0 \\ u(0,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x>0 \end{cases} \qquad (2)$$

设 $u(x,t)=X(x)T(t)$ （分离变量）

分离得特征值问题 $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0, X(+\infty) \text{ 有界} \end{cases}$ $\longrightarrow$ 自然边界条件

及常微分方程 $T''+\lambda a^2 T=0$

讨论可知（练习）

$$0<\lambda := \xi^2$$

特征函数 $X(x,\xi)=\sin\xi x, \xi\in\mathbb{R}^+$ (怎么理解这里 $\xi\in\mathbb{R}^+$)

相应的 $T(t,\xi)=e^{-a^2\xi^2 t} \quad \Rightarrow$

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}A(\xi)T(t,\xi)X(x,\xi)d\xi \longrightarrow A(\xi)\text{待定}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}A(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}\sin\xi x\, d\xi \longrightarrow A(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}\text{之Fourier反正弦变换}$$

$$u(x,0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}A(\xi)\sin\xi x d\xi=\varphi(x)=F_S^{-1}[A(\xi)]$$

$\Rightarrow$ $\varphi(x)$是$A(\xi)$ 之Fourier反正弦变换

$$\Rightarrow \quad A(\xi)=F_s[\varphi(s)]=\int_0^{\infty}\varphi(s)\sin\xi s\, ds.$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\varphi(s)\sin\xi s\, ds\right]e^{-a^2\xi^2 t}\sin\xi x\, d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\underline{\varphi_o(s)}\sin\xi s\, ds\right]e^{-a^2\xi^2 t}\sin\xi x\, d\xi$$

$\boxed{\varphi(x)\text{之奇延拓}}$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_o(s)\sin\xi s\,ds\right]e^{-a^2\xi^2 t}\sin\xi x\,d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_o(s)\frac{e^{-i\xi s}}{-i}\,ds\right]e^{-a^2\xi^2 t}\frac{e^{i\xi x}}{i}\,d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_o(s)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\xi^2 t}e^{i\xi(x-s)}d\xi\right]ds$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_o(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}\,ds=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}[e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}}]\varphi(s)\,ds$$

体会：Fourier正弦变换与反变换视作可分离变量法的分解、重组过程；其中进行的奇延拓正好跟正弦变换性质以及边界条件适配。

若边界条件 $u(0,t)=0$ 代以 $u_x(0,t)=0$，类似处理。（练习）

练习：用分离变量法求解

（1）无界弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

（2）半无界弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad or: u_x(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x > 0 \end{cases}$$

有限区间上的有限 Fourier 变换，

$$F[f](n):=\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi x}{L}} f(x)dx = a_n + ib_n: \quad (n=0,1,\cdots)$$

$$a_n := \int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad b_n := \int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

反变换公式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2L} + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

有限积分变换可用来求解有限区间上的混合问题和边值问题，实际上就是分离变量法，而且边界条件不必齐次，这是它的优点 。但注意其微分公式需要用分部积分和边界条件推出。

类似地，有限Fourier正弦变换

$$F_s[f](n):=b_n=\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\quad (n=1,2,\cdots)$$

反变换公式为

$$f(x)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

有限Fourier余弦变换

$$F_c[f](n):=a_n=\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

反变换公式为

$$f(x)=\frac{a_0}{L}+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

§4. 5 Laplace 变换

定义 设 $f(x)$ 定义于$[0,+\infty)$,若下面含参变量积分

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi x} f(x)dx \qquad (\xi = \sigma + i\tau,\ \sigma,\ \tau \in \mathbb{R})$$

收敛，则称此积分为 $f(x)$ 的Laplace变换，记作

$$L[f](\xi) := \overline{f}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\xi x} f(x)dx \quad (\mathrm{Re}\,\xi = \sigma > 0)$$

Laplace变换存在定理： 设 $f(x)$ 定义于$[0,+\infty)$,且满足下列条件

(L_1). 在 $x \ge 0$ 的任意有限区间上分段连续，

(L_2). $\exists\, \mathrm{M} > 0,\ \sigma_0 \ge 0,\ s.t.$

$$|f(x)| \le Me^{\sigma_0 x},\ x \ge 0,$$

那么$L[f](\xi) = \overline{f}(\xi)$在半平面$\mathrm{Re}\,\xi > \sigma_0$ 上存在且解析。

注（1）这里常数 σ_0 称为$f(x)$的增长指数，记为 $\sigma_f = \sigma_0$.

(2) (L_1)-(L_2) 称为Laplace变换存在性条件。

可以证明当 $f(x)$分段连续且具有增长指数$\sigma_0 \ge 0$, 则

$$(RM_1).\ f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(\xi)e^{\xi x}d\xi,$$ 当 x 为 $f(x)$ 连续点

$$(RM_2).\ 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(\xi)e^{\xi x}d\xi, \quad x<0.$$

这里积分沿着直线 $\operatorname{Re}\xi = \sigma > \sigma_0$.

(RM_1)-(RM_2)称作Riemann - Mellin反演公式

定义 Laplace 逆变换为（记为L^{-1}）

$$f(x) = L^{-1}[\bar{f}(\xi)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(\xi)e^{\xi x}d\xi,\ x\ge 0,$$

这里常数 $\sigma > \sigma_0$.

注　（1）公式涉及复平面上积分，有时需要使用留数计算

（2）实际应用中常利用 Laplace 变换表，根据已知

的 Laplace 变换进行反演，多数情况有

$$L^{-1}[L[f]]=f$$

一般还要利用 L^{-1} 的线性性质

$$L[f](\xi):=\int_0^\infty e^{-\xi x} f(x)dx \quad (\mathrm{Re}\,\xi>0)$$

注： Laplace 变换不理会 $x<0$ 时 $f(x)$ 的值, 我们一般默认为

$$f(x)=0\ (x<0)$$

Laplace 变换与 Fourier变换

设 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 且 $f(x)=0\ (x<0)$ 则形式上

$$L[f](\xi)=\int_0^\infty e^{-\xi x} f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^\infty e^{-i(-i\xi)x} f(x)dx = F[f](-i\xi)$$

$\Rightarrow$ 可期望两种变换具有许多共有性质

$$\boxed{L[f](\xi) := \int_0^\infty e^{-\xi x} f(x)dx \quad (\mathrm{Re}\,\xi > 0)}$$

Laplace 变换的一些基本性质（练习）

设 f,g 使得下述所有的 Laplace 变换有意义，则

（1）线性性质 $L[c_1 f + c_2 g] = c_1 L[f] + c_2 L[g], \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

（2）微分性质 $L[f'](\xi) = \xi L[f](\xi) - f(0)$

$$\Rightarrow L[f^{(n)}](\xi) = \xi^n L[f](\xi) - \xi^{n-1} f(0)$$

$$-\xi^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

（3）积分性质 $L[\int_0^x f(s)ds](\xi) = \dfrac{1}{\xi} L[f](\xi)$

（4）像函数微分性质 $L[-xf(x)](\xi)=\bar{f}'(\xi)$

$\Rightarrow \quad L[(-x)^n f(x)](\xi)=\bar{f}^{(n)}(\xi)$

（5）像函数积分性质 $L[\dfrac{f(x)}{x}](\xi)=\int_{\xi}^{+\infty}\bar{f}(\xi)d\xi,$

这里积分路径取在 $\mathrm{Re}\,\xi=\sigma>\sigma_0$ 内.

（6）复频移与时滞性质 $\forall\xi_0\in\mathbb{C}$， $x_0\geq 0,$

$L[f(x)e^{\xi_0 x}](\xi)=\bar{f}(\xi-\xi_0)$ 复频移

$L[H(x-x_0)f(x-x_0)](\xi)=\bar{f}(\xi)e^{-x_0\xi}$ 时滞

这里 $H(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$ 为Heaviside跳跃函数

（7）相似性质　$\forall k>0,$

$$L[f(kx)](\xi)=\frac{1}{k}\bar{f}(\frac{\xi}{k})$$

（8）卷积性质　$L[f*g]=L[f]L[g]$

$$f*g(x):=[H(x)f(x)]*[H(x)g(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}H(s)f(s)H(x-s)g(x-s)ds$$

$$=\int_0^x f(s)g(x-s)ds \Rightarrow f*g=g*f$$　（交换律）

（9）像函数卷积性质

$$F[f(x)g(x)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\bar{f}(s)\bar{g}(\xi-s)ds,\ \mathrm{Re}\,\xi\geq\sigma>\max(\sigma_f,\sigma_g).$$

注：卷积还具有结合律：$f*(g*h)=(f*g)*h,$

分配律：$f*(g+h)=f*g+f*h.$

定理（第一展开定理） 设 $F(\xi)$ 在 ∞ 的邻域内有Laurent展开式

$$F(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\xi^n},\quad \text{则}$$

$$\boxed{L[x^{n-1}](\xi)=\frac{\Gamma(n)}{\xi^n},\quad n>0}$$

$$f(x)=L^{-1}[F(\xi)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(n-1)!}x^{n-1},\quad x\geq 0.$$

定理（第二展开定理） 设 $F(\xi)=\dfrac{A(\xi)}{B(\xi)}$ 是有理函数，$A(\xi),B(\xi)$是多项式，且 $\deg A(\xi)<\deg B(\xi)$，$B(\xi)$只具有单零点 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，且是$F(\xi)$的单极点，则

$$f(x)=L^{-1}[F(\xi)]=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(\xi_k)}{B'(\xi_k)}e^{\xi_k x}=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[e^{\xi x}F(\xi),\xi_k].$$

一般的，有下面的展开定理

定理 设 $F(\xi)$ 满足：

(1) 在$\mathbb{C}$上除了有限个奇点 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 外解析，

(2) 在半平面 $\mathrm{Re}\,\xi > \sigma_0$ 上解析，

(3) $\exists\, M > 0$，$R > 0$，$s.t.$ 当 $|\xi| > R$ 时，

$$|F(\xi)| \le \frac{M}{|\xi|},$$

那么，对 $x \ge 0$ 有

$$f(x) = L^{-1}[F(\xi)] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[e^{\xi x} F(\xi), \xi_k].$$

附录 B 拉普拉斯变换简表

像原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^m \quad (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$
$t^m e^{at} \quad (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{(s-a)^{m+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\operatorname{ch} at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$t^m \sin at \quad (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{2j(s^2+a^2)^{m+1}}\left[(s+ja)^{m+1}-(s-ja)^{m+1}\right]$
$t^m \cos at \quad (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{2(s^2+a^2)^{m+1}}\left[(s+ja)^{m+1}+(s-ja)^{m+1}\right]$
$e^{-bt}\sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$
$e^{-bt}\cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$
$\sin^2 t$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)$
$\cos^2 t$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right)$
$e^{at}-e^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
$ae^{at}-be^{bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$	$\ln\frac{s-b}{s-a}$

续表

像原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)$
$\frac{1}{a}\sin at-\frac{1}{b}\sin bt$	$\frac{b^2-a^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
$\cos at-\cos bt$	$\frac{(b^2-a^2)s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$
$\frac{1}{a^3}(at-\sin at)$	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
$\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{1}{2a}(\sin at+at\cos at)$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$
$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
$t\left(1-\frac{at}{2}\right)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^3}$
$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-at}$	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-a\sqrt{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\sqrt{s}}\sin\sqrt{s}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\sqrt{s}}\cos\sqrt{s}$
$\frac{1}{t}\sin at$	$\arctan\frac{a}{s}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a^2}{s}}\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$

像原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)$
$\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}$
$\mathrm{erf}\left(\frac{t}{2a}\right)$	$\frac{1}{s}e^{a^2s^2}\mathrm{erfc}(as)$
$\mathrm{erf}(\sqrt{at})$	$\frac{\sqrt{a}}{s\sqrt{s+a}}$
$e^t\mathrm{erfc}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{s+\sqrt{s}}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^m u(t)\quad(m>-1)$	$\frac{1}{s^{m+1}}\Gamma(m+1)$
$\delta(t)$	1
$\delta^{(n)}(t)$	s^n
$\mathrm{sgn}t$	$\frac{1}{s}$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
$I_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$
$J_0(2\sqrt{at})$	$\frac{1}{s}e^{-\frac{a}{s}}$
$e^{-bt}I_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{(s+b)^2-a^2}}$
$tJ_0(at)$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$
$tI_0(at)$	$\frac{s}{(s^2-a^2)^{3/2}}$
$J_n(at)\quad(\mathrm{Re}(a)>-1)$	$\frac{a^n}{\sqrt{s^2+a^2}}\left(\frac{1}{s+\sqrt{a^2+s^2}}\right)^n$

1. $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$，称为误差函数；$\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$，称为余误差函数.

2. $I_n(x)=j^{-n}J_n(jx)$，J_n 称为第一类 n 阶贝塞尔函数；I_n 称为第一类 n 阶变形的贝塞尔函数，或称为虚宗量的贝塞尔函数.

§4. 6 Laplace 变换应用

例：有限长杆热传导

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u(L,t) = A, \quad t > 0, \\ u(x,0) = B, \ 0 \le x \le L. \end{cases}$$

解： 关于时间变量 t 作Laplace变换，令 $U(x,\xi) = L[u(x,\cdot)](\xi)$,

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi U(x,\xi) - u(x,0) = \xi U(x,\xi) - B = U_{xx}(x,\xi), \quad 0 < x < L \\ U_x(0,\xi) = 0, \quad U(L,\xi) = \dfrac{A}{\xi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(x,\xi) = c_1(\xi)\cosh\sqrt{\xi}x + c_2(\xi)\sinh\sqrt{\xi}x + \frac{B}{\xi}$$

$$\Rightarrow \quad U(x,\xi) = \frac{(A-B)\cosh\sqrt{\xi}x}{\xi\cosh\sqrt{\xi}L} + \frac{B}{\xi}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = L^{-1}[U(x,\xi)](t)$$

$$= L^{-1}[\frac{B}{\xi}](t) + L^{-1}[\frac{(A-B)\cosh\sqrt{\xi}x}{\xi\cosh\sqrt{\xi}L}](t)$$

$$= B + (A-B)L^{-1}[\frac{\cosh\sqrt{\xi}x}{\xi\cosh\sqrt{\xi}L}](t)$$

$$= A + \frac{4(A-B)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t}{4L^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}.$$

注: $\frac{\cosh\sqrt{\xi}x}{\xi\cosh\sqrt{\xi}L}$ 孤立奇点有 $\xi_n = -\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right]^2$， $n = 1, 2, \cdots$

例：有限长弦的强迫振动　　（教材P148 例 4.2.3）

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = A\sin\omega t, \quad t > 0, \quad \omega \neq \dfrac{2k-1}{2l}\pi a, k = 1, 2, \cdots \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l. \end{cases}$$

解：关于时间变量 t 作Laplace变换，令 $U(x,\xi) = L[u(x,\cdot)](\xi)$,

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi^2 U(x,\xi) - \xi u(x,0) - u_t(x,0) = \xi^2 U(x,\xi) = a^2 U_{xx}(x,\xi), \quad 0 < x < L \\ U(0,\xi) = 0, \quad U_x(l,\xi) = L[A\sin\omega t] = \dfrac{A\omega}{\xi^2 + \omega^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(x,\xi) = c_1(\xi)e^{-\frac{\xi}{a}x} + c_2(\xi)e^{\frac{\xi}{a}x} = C(\xi)ch\frac{\xi}{a}x + D(\xi)sh\frac{\xi}{a}x$$

$$\Rightarrow \quad U(x,\xi)=\frac{Aa\omega}{\xi(\xi^2+\omega^2)ch\frac{l}{a}\xi}sh\frac{x}{a}\xi.$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t)=L^{-1}[U(x,\xi)](t)=\sum_k \mathrm{Re}\,s[e^{\xi t}U(x,\xi),\xi_k].$$

这里$\left\{\xi_k\right\}$ 是$U(x,\xi)$的所有孤立奇点，它们是：

（1） 可去奇点 $\xi=0,$

（2） 1级（或简单）极点 $\xi=\pm i\omega,$

（3） 1级（或简单）极点 $\xi=\pm i\omega_k,\ \omega_k=\frac{2k-1}{2l}\pi a, k=1,2,\cdots$

$$v(x,t)=\mathrm{Re}\,s[e^{\xi t}U(x,\xi),i\omega]+\mathrm{Re}\,s[e^{\xi t}U(x,\xi),-i\omega]$$

$$=2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Re}\,s[e^{\xi t}U(x,\xi),i\omega]\right\}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{Aa\omega sh\frac{x}{a}\xi}{\xi(\xi+i\omega)ch\frac{l}{a}\xi}e^{\xi t}\right]_{\xi=i\omega} = \frac{Aash\frac{\omega x}{a}}{\omega\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\omega t$$

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{\mathrm{Re\,s}[e^{\xi t}U(x,\xi),i\omega_k]+\mathrm{Re\,s}[e^{\xi t}U(x,\xi),-i\omega_k]\right\}$$

$$=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{Re\,s}[e^{\xi t}U(x,\xi),i\omega_k]=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{Aa\omega sh\frac{x}{a}\xi}{\xi(\xi^2+\omega^2)\frac{l}{a}sh\frac{l}{a}\xi}e^{\xi t}\right]_{\xi=i\omega_k}$$

$$=16Aa\omega l^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin\frac{\omega_k x}{a}\sin\omega_k t}{(2k-1)[4l^2\omega^2-(2k-1)^2\pi^2a^2]}$$

$$\Rightarrow\quad u(x,t)=v(x,t)+w(x,t).$$

问题：若有 $\omega=\omega_k=\dfrac{2k-1}{2l}\pi a$, 对某个$k$成立, 则物理上作何解释？

例：（半无界长杆热传导，第I类边界条件）

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x>0, t>0 \\ u(0,t) = f(t), & t>0 \\ u(x,0)=0, & x\ge 0 \end{cases}$$

可以使用两种方法： 1. Laplace变换法（关于t）

2. Fourier 正弦变换（关于x）

（均需适当配以∞处自然边界条件）

下面使用 Laplace 变换（关于时间变量 t ）

记 $U(x,\xi)=L[u(x,\cdot)](\xi),\ \ F(\xi)=L[f](\xi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi U(x,\xi) - u(x,0) = \xi U(x,\xi) = a^2 U_{xx}(x,\xi), & x>0 \\ U(0,\xi) = F(\xi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ U(x,\xi) = c_1(\xi) e^{-\frac{\sqrt{\xi}}{a}x} + c_2(\xi) e^{\frac{\sqrt{\xi}}{a}x}$$

$$\boxed{U(x,\xi)=c_1(\xi)e^{-\frac{\sqrt{\xi}}{a}x}+c_2(\xi)e^{\frac{\sqrt{\xi}}{a}x}}$$

约定 $\sqrt{\xi}\big|_{\mathbb{R}^+}>0$（与实值根号的意义保持一致）

u 有界 $\Rightarrow$ U有界　　（练习）

自然条件

$\Rightarrow\quad c_2(\xi)=0$

$\Rightarrow\ U(x,\xi)=F(\xi)e^{-\frac{\sqrt{\xi}}{a}x}$

$\Rightarrow\ u(x,t)=L^{-1}[F(\xi)e^{-\frac{\sqrt{\xi}}{a}x}](t)$

$$=\left(f*L^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{\xi}}{a}x}]\right)(t)$$

$$=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t f(s)\frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-s)}}ds$$

$$\boxed{L^{-1}[e^{-b\sqrt{\xi}}]=\frac{b}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{b^2}{4t}}\qquad b>0}$$

$$\boxed{L[f*g]=L[f]L[g]}$$

练习：（半无界长杆热传导，第II类边界条件）

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x>0, t>0 \\ u_x(0,t) = f(t), & t>0 \\ u(x,0)=0, & x\geq 0 \end{cases}$$

可使用两种方法：1. Laplace变换法（关于t）

2. Fourier 余弦变换（关于x）

答案： 均需适当配以∞ 处自然边界条件，可得

$$u(x,t) = -a\int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-s)}} ds.$$

例：（半无界弦的强迫振动，第II类边界条件）

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x>0, t>0 \\ u_x(0,t) = f(t), & t>0 \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, & x \ge 0 \end{cases}$$

可以使用两种方法： 1. Laplace变换法（关于t）

2. Fourier 余弦变换（关于x），较复杂

（均需适当配以 ∞ 处自然边界条件）

下面用Laplace 变换法（关于t）

记 $U(x,\xi) = L[u(x,\cdot)](\xi)$, $F(\xi) = L[f](\xi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi^2 U(x,\xi) - \xi u(x,0) - u_t(x,0) = \xi^2 U(x,\xi) = a^2 U_{xx}(x,\xi), & x>0 \\ U_x(0,\xi) = F(\xi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad U(x,\xi)=c_1(\xi)e^{-\frac{\xi}{a}x}+c_2(\xi)e^{\frac{\xi}{a}x}$$

自然条件 $\longleftarrow u$ 有界 $\Rightarrow U$ 有界 $\Rightarrow c_2(\xi)=0$

$$\Rightarrow \quad U(x,\xi)=-\frac{a}{\xi}F(\xi)e^{-\frac{\xi}{a}x}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t)=L^{-1}[-\frac{a}{\xi}F(\xi)e^{-\frac{\xi}{a}x}](t)=-aL^{-1}[\frac{1}{\xi}F(\xi)e^{-\frac{\xi}{a}x}](t)$$

$$L^{-1}[\frac{1}{\xi}F(\xi)](t)=\int_0^t f(s)ds \longrightarrow$$ 积分性质

$$\Rightarrow \quad u(x,t)=-aH(t-\frac{x}{a})\int_0^{t-\frac{x}{a}} f(s)ds \longrightarrow$$ 时滞性质

（练习）**求解**：（半无界弦的振动，第I类边界条件）

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x>0, t>0 \\ u(0,t) = f(t), & t>0 \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, & x \ge 0 \end{cases}$$

可以使用两种方法：1. Laplace变换法（关于t）

2. Fourier 正弦变换（关于x），较复杂

答案：均需适当配以∞处自然边界条件，可得

$$u(x,t) = H\left(t-\frac{x}{a}\right) f\left(t-\frac{x}{a}\right).$$

问题：以上半无界问题是否可以对空间变量 x 施行Laplace变换求解？

注：（1）非齐次方程可同法求解

（2）无界长杆热传导方程（无界长弦振动方程）
不合适用 Laplace 变换求解

（3） Laplace 变换可解的偏微分方程通常可以另法求解

积分变换法小结：

（1）所得解一般只为形式解（积分变换法的局限）

（2）积分变换法步骤简单较易实施，反演计算

虽可借助变换表，但通常需要一定的技巧

（3）方程和边界条件皆为非齐次时也可用积分

变换法（积分变换法的优点）

（4）还有其它常用积分变换，如 Hankel，Mellin 变换等

例：Mellin 变换 $M[f](\xi)=\hat{f}(\xi)=:\int_0^{\infty}x^{\xi-1}f(x)dx \qquad (\xi\in\mathbb{C})$

Mellin 反变换为：$M^{-1}[\hat{f}(\xi)]=f(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\hat{f}(\xi)x^{-\xi}d\xi$