

### 第 3 次作业题

1. 设函数  $f$  的定义域关于原点对称. 求证: 函数  $f$  可表示成一个奇函数与一个偶函数之和.

2. 求证:  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\left[\frac{1}{x}\right]} = 1$ .

3. 用函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 5} = 3, \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0.$$

4. 讨论函数  $f$  在点  $x = 0$  处的极限是否存在, 其中  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{若 } x > 0, \\ a \sin x + b \cos x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

5. 求证:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

6. 求证: 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$  不存在.