➢ 上节回顾：

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \left| V'_{fi} \right|^2 \rho(E_f) \qquad V'_{fi} = \int \psi_f^* V' \psi_i dv$$

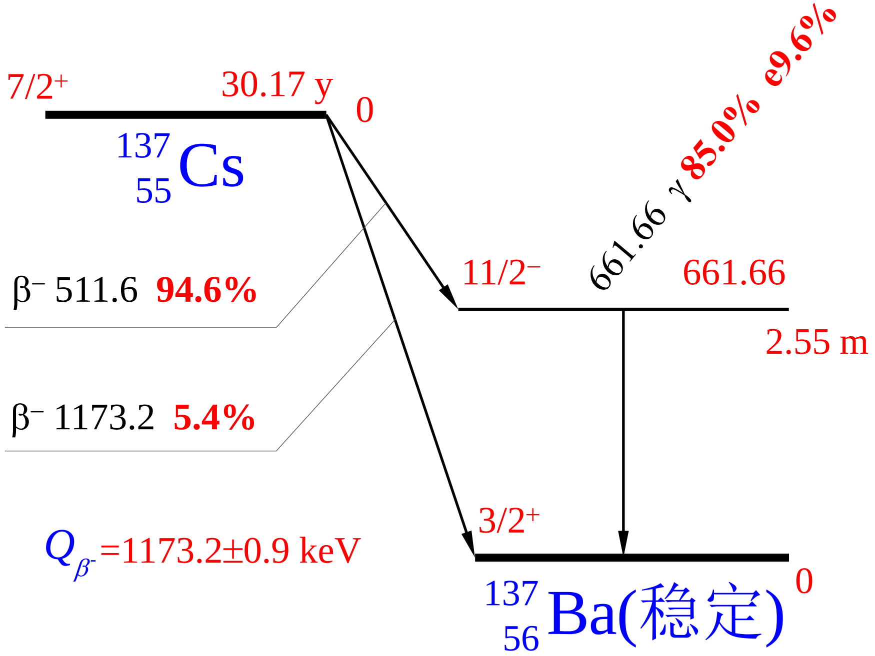
- □核的能级，是由核子的能级来决定的。
- □ 壳层模型，核力的自旋轨道耦合项决定了最后的幻数
- □ 指数衰减规律，是原子核衰变的基本规律。
- □ 衰变纲图中的%，是绝对强度（Intensity），不是分支比（Branch ratio），如果我们讨论的是主核素的衰变，则Intensity= Branch Ratio。

➢ 本节提要：

- $\lambda \Leftrightarrow T_{1/2} \Leftrightarrow \tau \Leftrightarrow \Gamma$
- 放射源的活度=每秒放出的射线的数量吗？
- 级联衰变与三种平衡关系：暂时平衡、长期平衡和逐代衰变（不成平衡）
- 三种天然放射系，都是处于长期平衡的

绝对强度 vs 分支比

- **绝对强度**是针对衰变纲图中的**主核素**而言的。衰变纲图中的**百分数**就是绝对强度，意思是，一个主核素的衰变，对应于某粒子出射或反应发生的**概率**是多少？



- **分支比**则是针对衰变纲图中的**某个具体核素（可以是主核素，也可以是子核素）**而言的，分支衰变对应于哪个核素，分支比就是针对哪个核素的。

- **绝对强度**可以认为是衰变纲图中的**全局量**，**分支比**则是**局部量**，二者是可以互相导出的。

发射662keVγ光子的**分支比**：

$$\frac{85\%}{85\%+9.6\%}=89.85\%$$

- 强调：衰变纲图提供的是**绝对强度**，不是**分支比**！

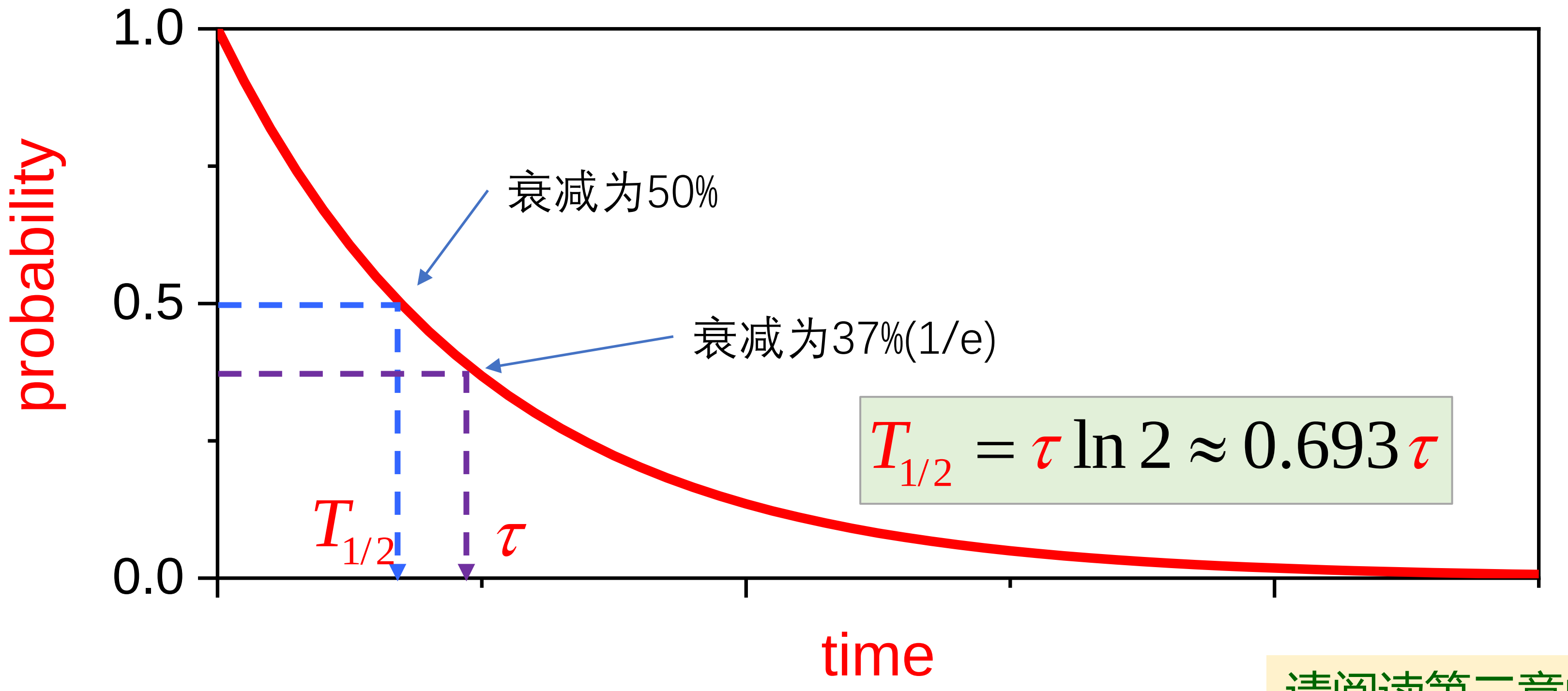
定义：半衰期$T_{1/2}$——原子核**衰变概率为50%**所需时间；

在一个$T_{1/2}$之后，放射源中放射性核素的**数目平均减少一半**。

$$e^{-\lambda T_{1/2}}=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}\approx\frac{0.693}{\lambda}$$

定义：平均寿命τ——放射性原子核的**平均生存时间**。

$$\tau=\int_0^\infty t\cdot\lambda e^{-\lambda t}\,dt=1/\lambda$$



$$T_{1/2}=\tau\ln 2\approx 0.693\,\tau$$

量纲为：[t],如s，h，d，a

请阅读第二章阅读材料2.
Measurement of nuclear lifetimes

定义：衰变宽度Γ——衰变核所处能级的自然宽度。

$$\Psi_a(\vec{r},t)=\psi_a(\vec{r})\cdot e^{-iE_a t/\hbar}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{\hbar}\left|V'_{fi}\right|^2\rho(E_f)$$

$$V'_{fi}=\int\psi_f^* V'\psi_i dv$$

$$V+V'$$

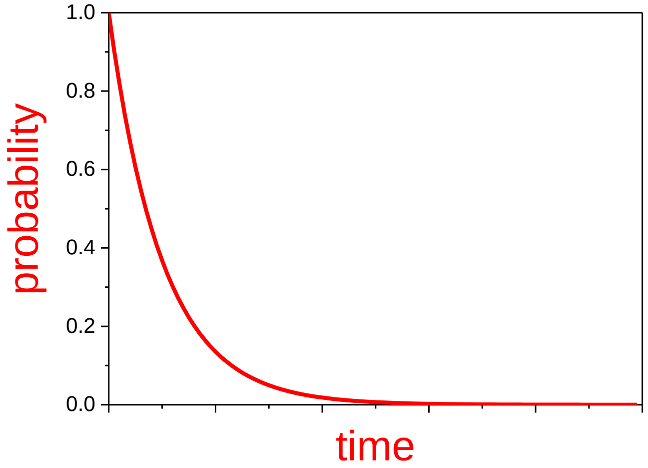
$$\Psi_a(\vec{r},t)=\psi_a(\vec{r})\cdot e^{-iE_a t/\hbar}\cdot e^{-t/2\tau_a}$$

$$\left|\Psi_a(\vec{r},t)\right|^2=\left|\Psi_a(\vec{r},t=0)\right|^2\cdot e^{-t/\tau_a}$$

$$e^{-t/2\tau_a}$$

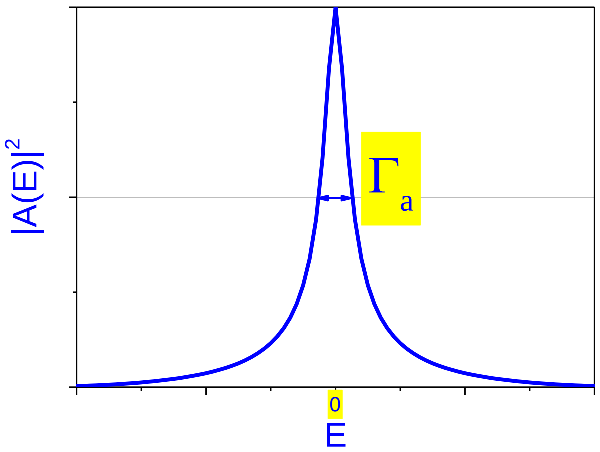
$$e^{-t/2\tau_a}=\int_{-\infty}^{\infty}A(E)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}dE$$

$$A(E)$$



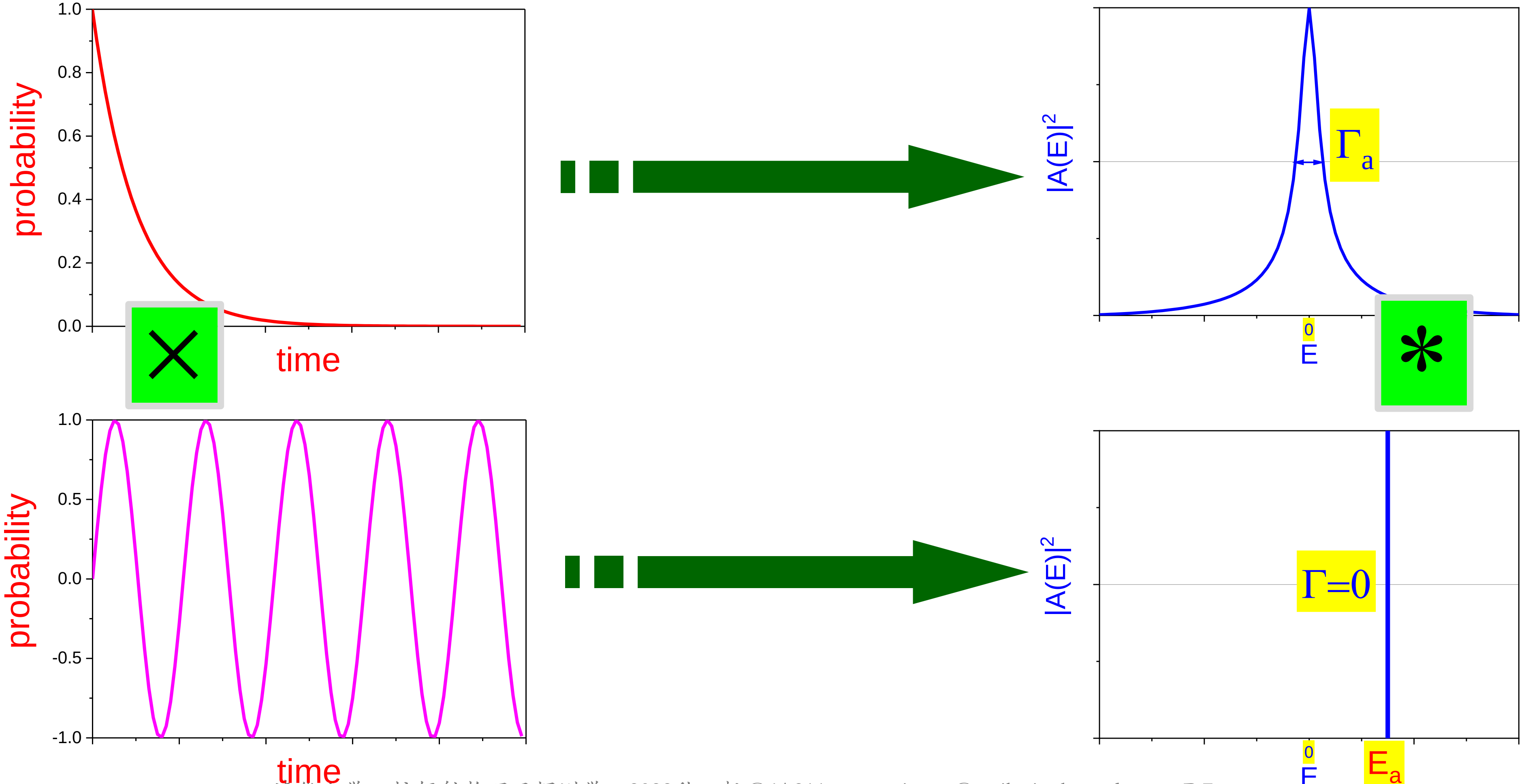
$$\Gamma_a=\hbar/\tau_a$$

$$\left|A(E)\right|^2=\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{E^2+(\Gamma_a/2)^2}$$



$$\Psi_a(\vec{r},t)=\psi_a(\vec{r})\cdot e^{-iE_at/\hbar}\cdot e^{-t/2\tau_a}$$

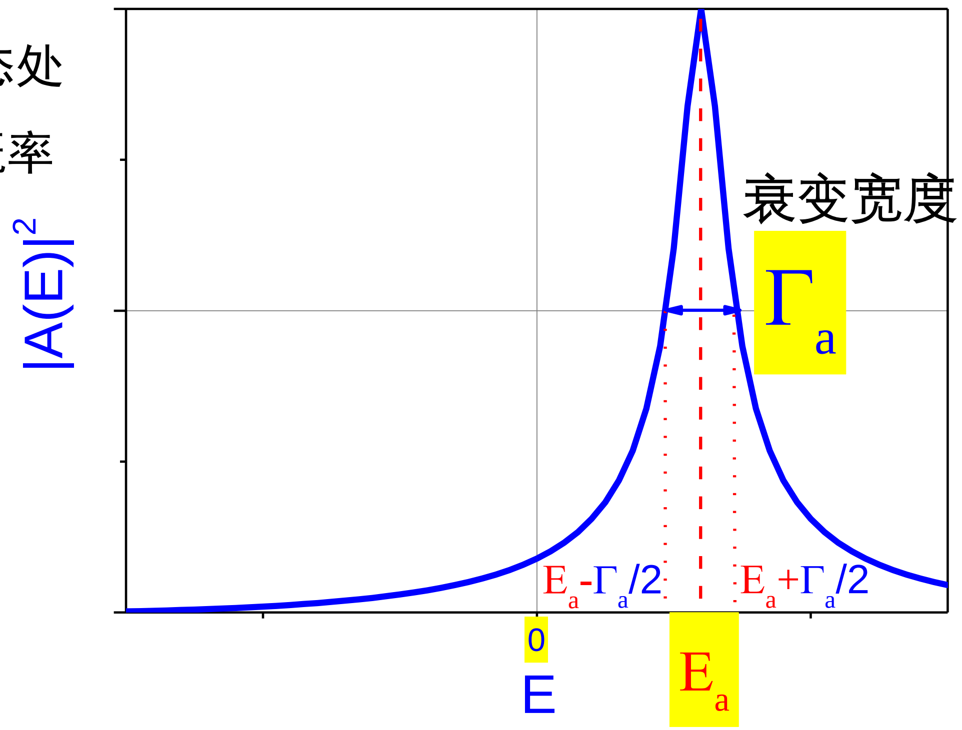
$$\boxed{e^{-iE_at/\hbar}\cdot e^{-t/2\tau_a}} \Rightarrow e^{-iE_at/\hbar}\cdot e^{-t/2\tau_a}=\int_{-\infty}^{\infty}A(E)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}dE \Rightarrow \boxed{A(E)}$$



$$e^{-iE_a t/\hbar} \cdot e^{-t/2\tau_a} \Rightarrow e^{-iE_a t/\hbar} \cdot e^{-t/2\tau_a} = \int_{-\infty}^{\infty} A(E) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} dE \Rightarrow A(E)$$

原子核激发态处

于能量E的概率



衰变宽度Γ_a

VS

能级寿命τ_a

$$\Gamma_a \cdot \tau_a = \hbar$$

$$\Gamma_a = \hbar \cdot \lambda_a$$

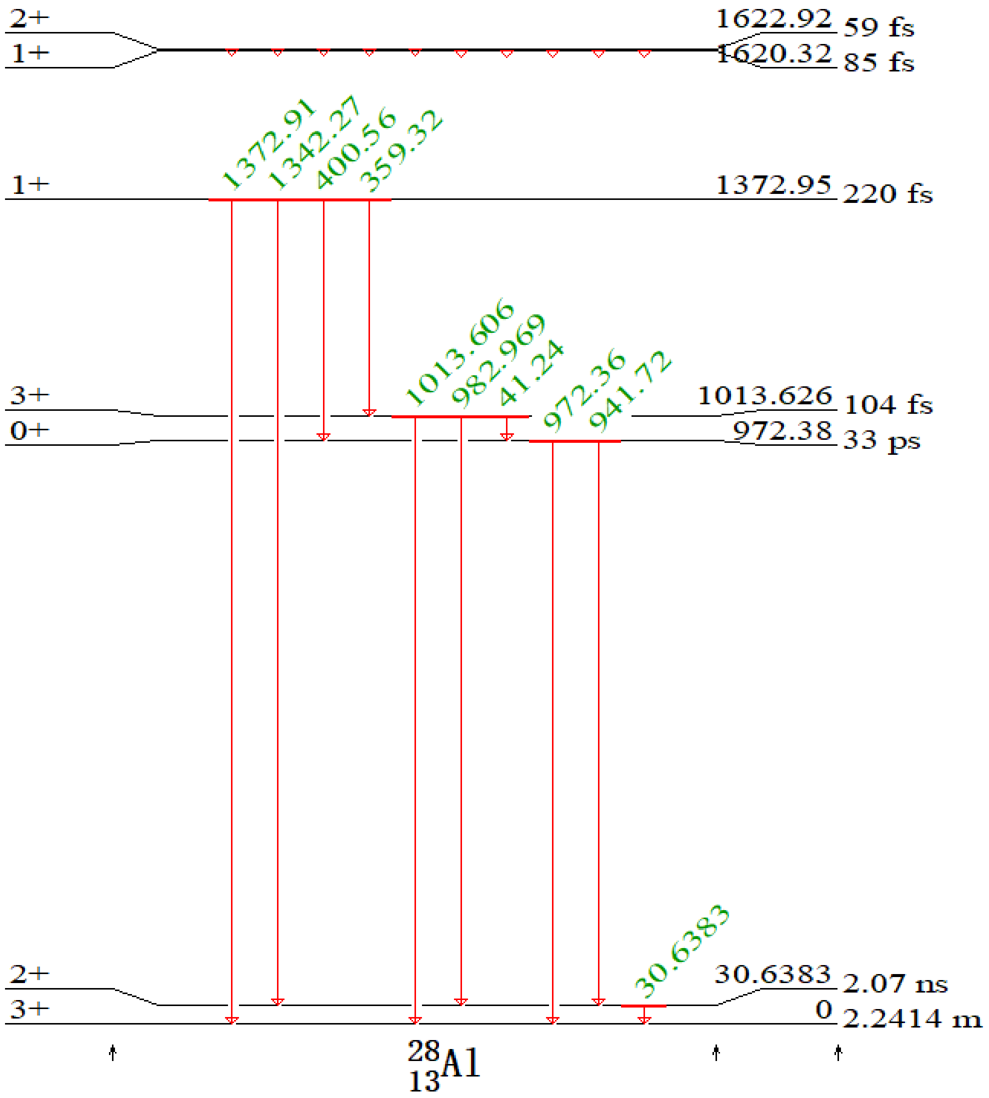
$$|A(E)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(E - E_a)^2 + (\Gamma_a/2)^2}$$

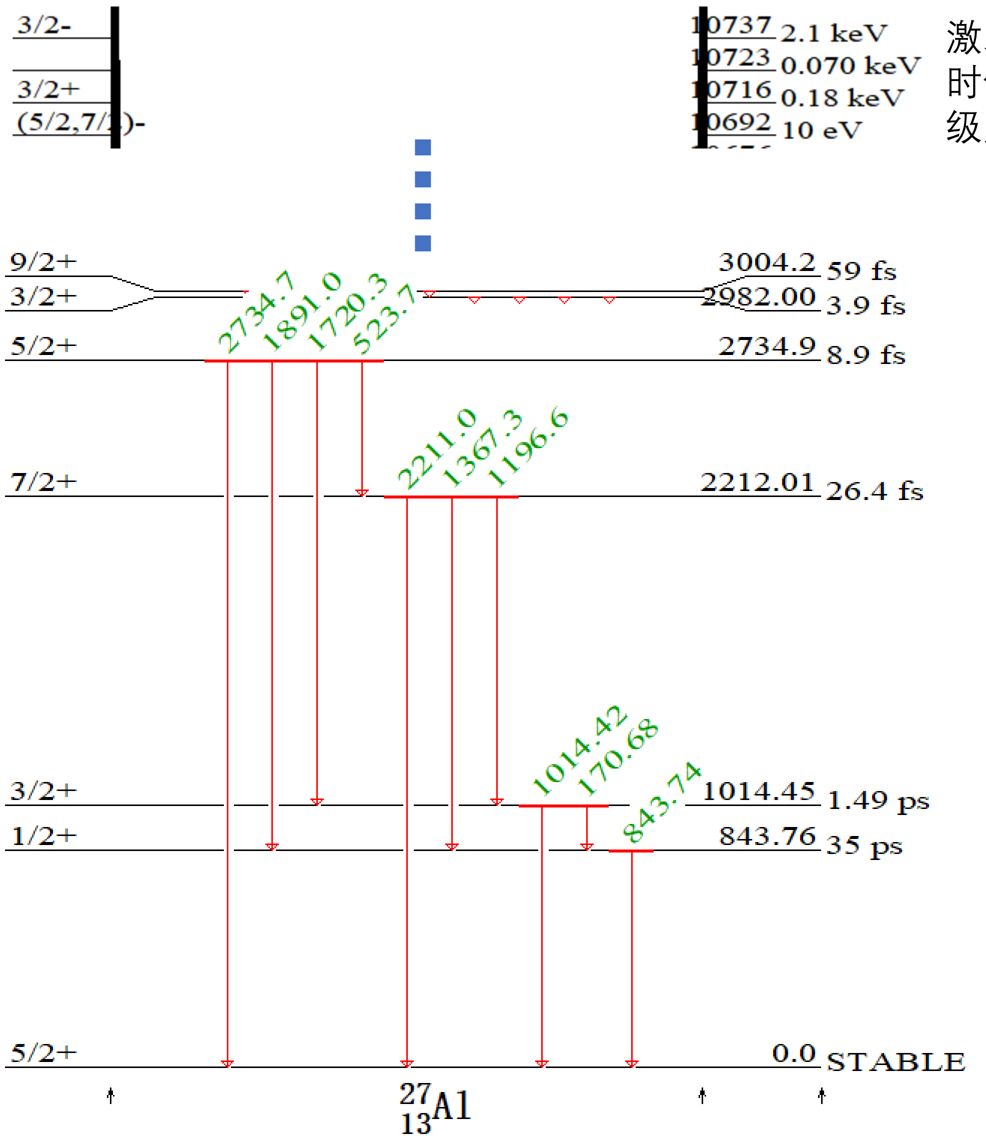
2.判断题 (1分)

最后修改：2022-09-27 17:12

处于基态的原子核，其能级宽度一定为0?

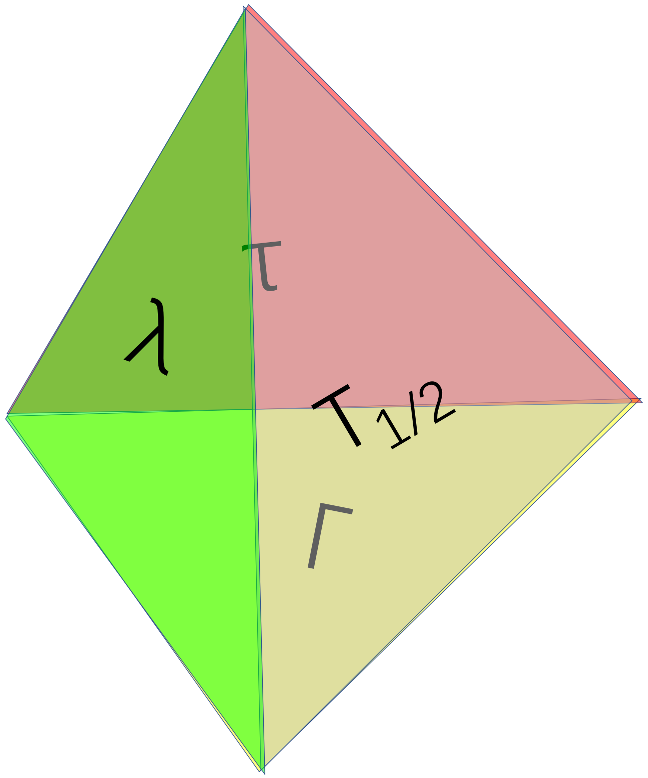
$$\Gamma_a = \frac{\hbar}{\tau_a} = \frac{\hbar \cdot \ln 2}{T_{1/2}} = \frac{4.56\times10^{-16}\, eV\cdot s}{T_{1/2}}$$





激发态能量很高的时候，一般就用能级宽度来表示了

特征量				核衰变
λ	$T_{1/2}$	τ	Γ	衰变速度
大	小	小	大	快
小	大	大	小	慢



	λ $1/s$	$T_{1/2}$ s	τ s	Γ eV
λ		$\lambda=\dfrac{0.693}{T_{1/2}}$	$\lambda=\dfrac{1}{\tau}$	$\lambda=\dfrac{\Gamma}{\hbar}$
$T_{1/2}$	$T_{1/2}=\dfrac{0.693}{\lambda}$		$T_{1/2}=0.693\tau$	$T_{1/2}=\dfrac{0.693\hbar}{\Gamma}$
τ	$\tau=\dfrac{1}{\lambda}$	$\tau=1.44T_{1/2}$		$\tau=\dfrac{\hbar}{\Gamma}$
Γ	$\Gamma=\hbar\lambda$	$\Gamma=\dfrac{0.693\hbar}{T_{1/2}}$	$\Gamma=\dfrac{\hbar}{\tau}$	

定义:放射性活度 (Activity)

——单位时间内发生衰变的原子核数，以A表示，反映放射源的强弱。

$$A(t)=\frac{-dN(t)}{dt}=\frac{-d\left(N_0e^{-\lambda t}\right)}{dt}=\lambda N_0e^{-\lambda t}=\lambda N(t)$$

放射源活度A的大小，与两个因素有关：

①放射性原子核的数目N(t)

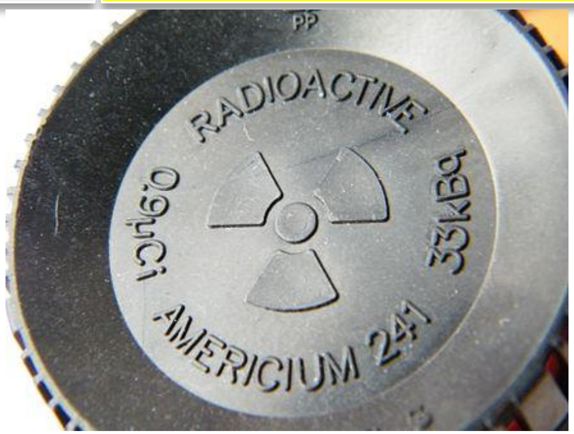
②衰变常数λ

$$A_0=\lambda N_0$$

$$A(t)=\lambda N(t)=\lambda N_0e^{-\lambda t}=A_0e^{-\lambda t}$$

历史上（1910年）采用Ci(居里)作为放射性活度的单位

（1g ^{226}Ra每秒的衰变数）



1975年国际计量大会规定放射性活度的国际单位为Bq(贝可勒尔)

$$1\text{Ci} = 3.7\times10^{10}\ /\ s$$

$$1\text{Bq} = 1/\ s$$

$$1\text{Ci} = 10^3\ \text{mCi} = 10^6\ \mu\text{Ci}$$

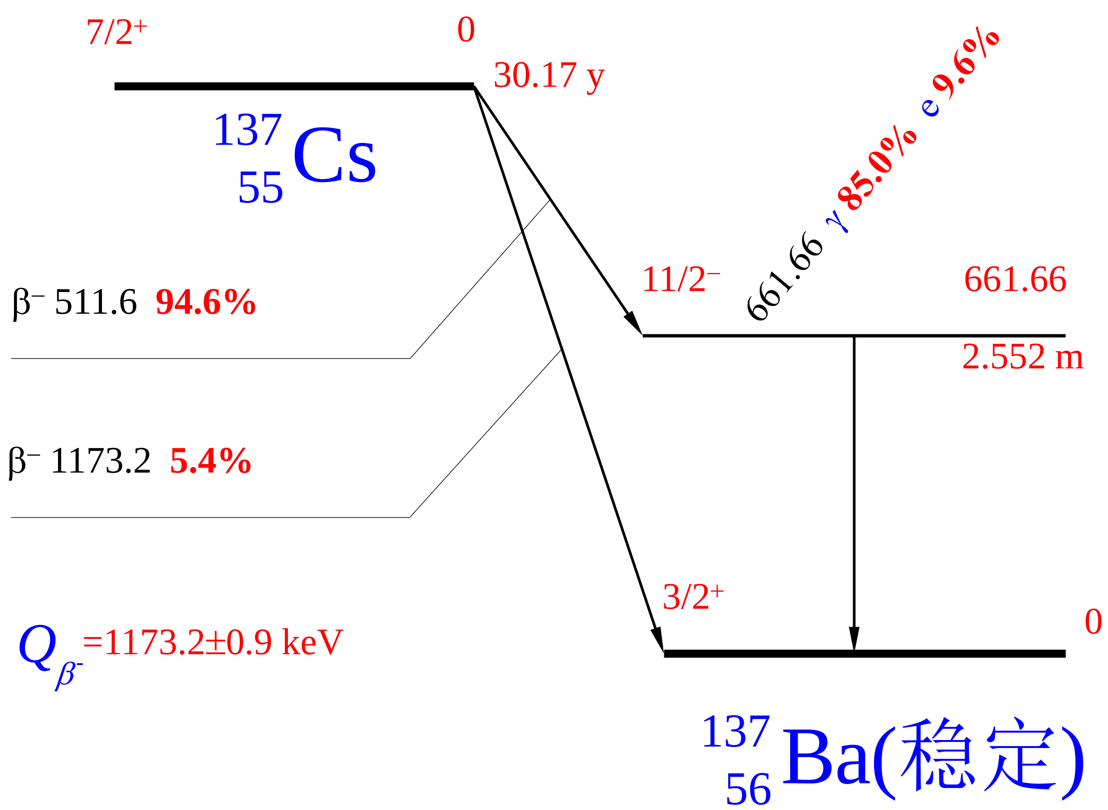
$$1\text{Ci} = 3.7\times10^{10}\ \text{Bq}$$

放射性活度是指单位时间内

发生衰变的原子核数目 ? $\equiv$ 放射源发出的粒子数目

注意！ ✓ ✗

示例：^{137}Cs



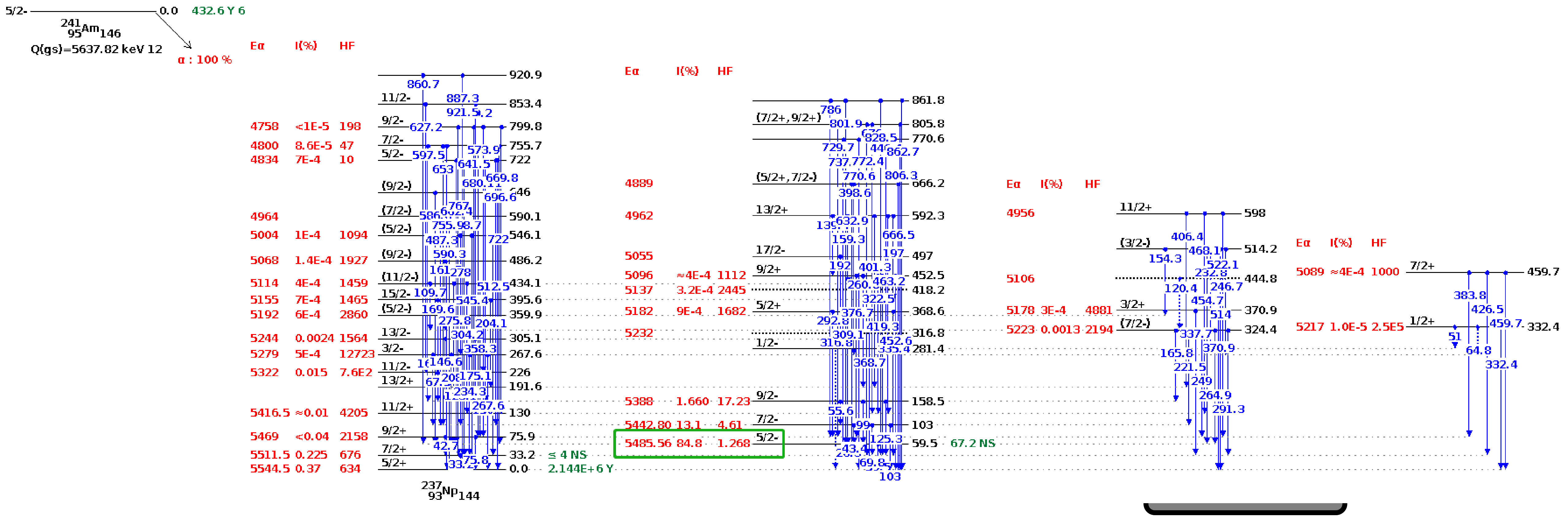
^{137}Cs每发生100次衰变，平均发出：

- **5.4**：最大能量为1.17MeV的β^-粒子
- **94.6**：最大能量为512keV的β^-粒子
- **85**：能量为662keV的γ粒子
- **9.6**：能量~630keV的内转换电子
- **9.6**：特征X射线(32.2keV)或Auger电子
- **100**：β^-衰变伴随的反电子中微子

填空题 1分

设置

烟感报警器中经常采用^{241}Am源产生的α粒子来形成电离（通过监测电离之后电流的变化来对火灾进行报警），^{241}Am的衰变纲图如下（其画法与我们第三章建议的形式有所不同，暂略去不议），请问，一个1μCi的^{241}Am源，每秒钟平均放出5.486MeV的α粒子的数量为多少？ [填空1]



单选题 1分

设置

^{241}Am-^{9}Be是一个常见的中子源，其产生中子的过程分为两步：

$$^{241}Am \rightarrow {}^{237}Np + \alpha,$$

$$\alpha + {}^{9}Be \rightarrow {}^{12}C + n$$

若已知^{241}Am的活度为10^6Bq，且镅与铍均匀地混合在一起，则该中子源的中子产额（即每秒放出的中子数量）为10^6n/s?

A 对

B 不对

提交

定义：比活度 (Specific Activity)——单位质量放射源的放射性活度。

$$a = \frac{A}{m} \quad (Bq/g) \;\; \text{or} (Ci/g)$$

Isotope	Half life	Mass of 1 curie	Specific activity (Ci/g)
^{232}Th	1.405×10^{10} years	9.1 tonnes	1.1×10^{-7}
^{238}U	4.471×10^{9} years	2.977 tonnes	3.4×10^{-7}
^{40}K	1.25×10^{9} years	140 kg	7.1×10^{-6}
^{235}U	7.038×10^{8} years	463 kg	2.2×10^{-6}
^{129}I	15.7×10^{6} years	5.66 kg	0.00018
^{99}Tc	211×10^{3} years	58 g	0.017
^{239}Pu	24.11×10^{3} years	16 g	0.063
^{240}Pu	6563 years	4.4 g	0.23
^{14}C	5730 years	0.22 g	4.5
^{226}Ra	1601 years	1.01 g	0.99

Isotope	Half life	Mass of 1 curie	Specific activity (Ci/g)
^{241}Am	432.6 years	0.29 g	3.43
^{238}Pu	88 years	59 mg	17
^{137}Cs	30.17 years	12 mg	83
^{90}Sr	28.8 years	7.2 mg	139
^{241}Pu	14 years	9.4 mg	106
^{3}H	12.32 years	104 μg	9,621
^{228}Ra	5.75 years	3.67 mg	273
^{60}Co	1925 days	883 μg	1,132
^{210}Po	138 days	223 μg	4,484
^{131}I	8.02 days	8 μg	125,000
^{123}I	13 hours	518 ng	1,930,000
^{212}Pb	10.64 hours	719 ng	1,390,000

- 原子核的衰变是个自发进行的过程，外在因素既无法加速、也无法延缓它；

- 原子核的“存活”是无记忆的，无论它之前存在了多么久，从现在算起，它最可能的衰变时刻都是现在，任一小时间片段dt内发生衰变的概率总是λdt。

- 既然每“穿过”一个dt的存活概率都是（1-λdt），原子核总的衰变规律在时间轴上呈现出了指数下降规律。

- 衰变常数、衰变宽度、平均寿命、半衰期是一体四面，知道一个，其它三个就都知道了。

- 活度，既与原子核是谁(λ)有关，也与原子核的个数(N)有关。

4.判断题 (1分) 最后修改：2022-09-27 17:12

利用探测器来测量处于放射系中的某核素X放出的γ射线强度随时间的变化规律，该规律可能服从指数衰减规律，也可能不服从指数衰减规律?

正确答案：正确

$$A \xrightarrow[\text{半衰期}]{\text{衰变方式}} B \xrightarrow[\text{半衰期}]{\text{衰变方式}} \cdots \xrightarrow[\text{半衰期}]{\text{衰变方式}} N(\text{稳定})$$

- 许多放射性核素**并非一次衰变**就达到**稳定**
- 它们的子核仍可能有放射性，会**接着衰变**……
- 直到衰变的**子核**为**稳定**核素为止
- 这样就产生了多代连续放射性衰变，称之为**递次衰变**或**级联衰变**

例如：

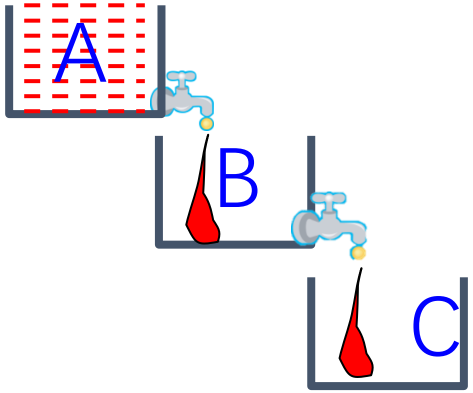
$$^{214}_{84}Po \xrightarrow[1.64\times10^{-4}s]{\alpha\text{衰变}} {}^{210}_{82}Pb \xrightarrow[21a]{\beta^-\text{衰变}} {}^{210}_{83}Bi \xrightarrow[5.01d]{\beta^-\text{衰变}} {}^{210}_{84}Po \xrightarrow[138.4d]{\alpha\text{衰变}} {}^{206}_{82}Pb(\text{稳定})$$

一. **两次**连续衰变规律

二. **多次**连续衰变规律

三. 放射性的**平衡**：**暂时**平衡和**长期**平衡

A→ B→ C（稳定）



衰变常数：

A：λ_1

B：λ_2

C：$\lambda_3=0$

t=0时：

A 的数目为N_{10}

B的数目为0

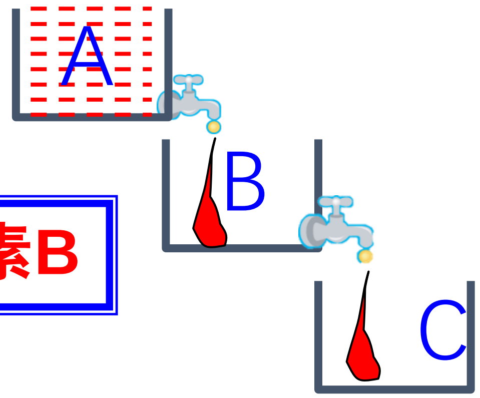
C的数目为0

核素A 是**单一放射性衰变**，服从简单的**指数规律**:

$$N_1(t) = N_{10}e^{-\lambda_1 t}$$

在 t 时刻，A的数目的变化为：

$$-dN_1(t) = \lambda_1 N_1(t)dt$$



核素B

由A衰变而来

$$\lambda_1 N_1(t)dt$$

$$-\lambda_2 N_2(t)dt$$

向C衰变而去

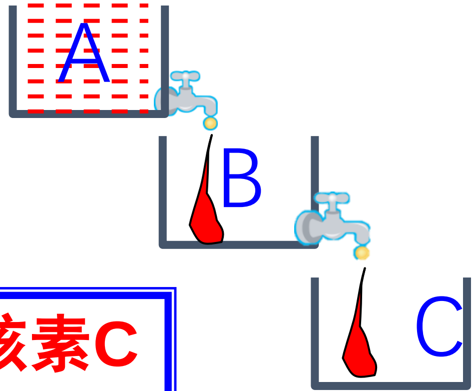
dt内B数目的变化为：

$$dN_2(t) = \lambda_1 N_1(t)dt - \lambda_2 N_2(t)dt$$

$$N_1(t) = N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

$$N_2(t) = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

- 子体 **B** 的变化规律不仅与它本身的衰变常数 λ_2 有关，还与母体 **A** 的衰变常数 λ_1 有关
- 它的衰变规律**不再是简单的指数规律**



核素C

由B衰变而来

$\lambda_2 N_2(t)dt$

不再衰变

dt内C数目的变化为

$$dN_3(t) = \lambda_2 N_2(t)dt$$

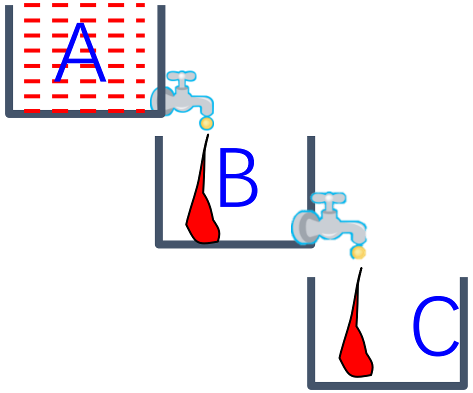
$$N_2(t) = N_{10}\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

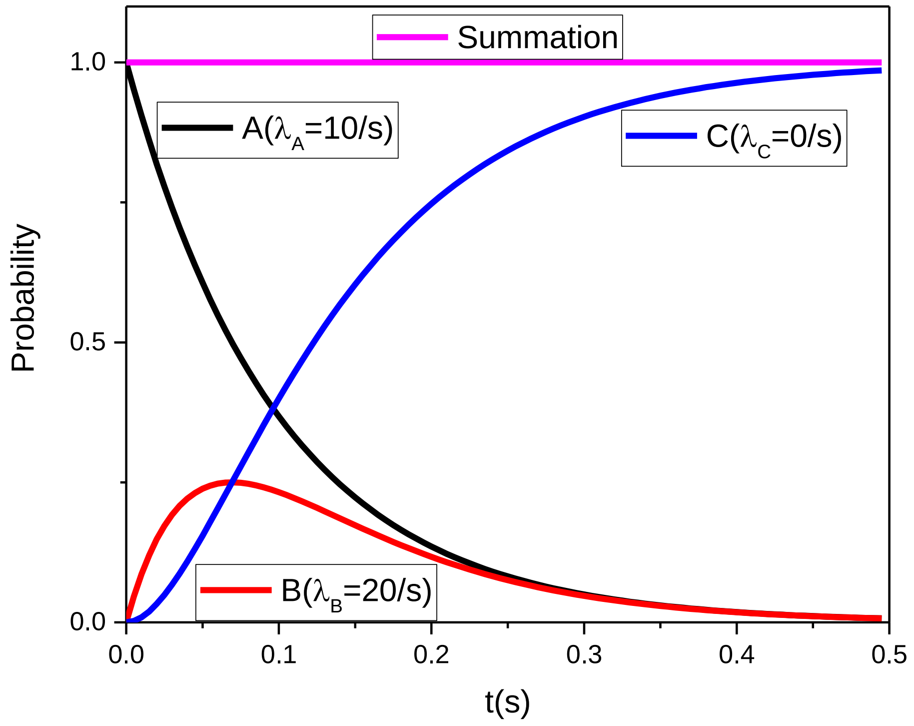
$$N_3(t) = N_{10}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\frac{1}{\lambda_1}(1-e^{-\lambda_1 t}) - \frac{1}{\lambda_2}(1-e^{-\lambda_2 t})\right]$$

~ 1

$t \to \infty$ $\Rightarrow$ $N_3(t) \to N_{10}$

A → B → C（稳定）





请问：

$$N_1(t)+N_2(t)+N_3(t)=?$$

$$\begin{cases} N_1(t)=N_{10}e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t)=N_{10}\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}\right) \\ N_3(t)=N_{10}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\dfrac{1}{\lambda_1}\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right)-\dfrac{1}{\lambda_2}\left(1-e^{-\lambda_2 t}\right)\right] \end{cases}$$

A → B → C→…→X（稳定）

参照前述讨论，若**C也不稳定**，其数目变化量由子体**B**的衰变及它**本身**的衰变决定

由B衰变而来 +

$\lambda_2 N_2(t)dt$ $-\lambda_3 N_3(t)dt$

向D衰变而去 −

$$dN_3(t) = \lambda_2 N_2(t)dt - \lambda_3 N_3(t)dt$$

$$N_2(t) = N_{10}\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

$$N_3(t) = N_{10}(c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} + c_3 e^{-\lambda_3 t})$$

其中，系数 c_1，c_2，c_3 为：

$$c_1 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}$$

$$c_2 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}$$

$$c_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}$$

对于**n**代连续放射性衰变过程，即1~n代核素具有放射性，而第**n+1**代核素为稳定核素。

$$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to A_{n+1}\text{(稳定)}$$

各衰变常数为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

设初始条件为 $N_1(0) = N_{10}$　$N_m(0) = 0$，　$m = 2,3,\cdots,n,n+1$

用同样的方法可以求出第**n**个核素随时间的变化规律：

$$N_n(t) = N_{10}\left(c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{-\lambda_n t}\right) = N_{10}\sum_{i=1}^{n} c_i e^{-\lambda_i t}$$

$$c_1 = \frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_1)}$$

$$c_2 = \frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)\cdots(\lambda_n-\lambda_2)}$$

$$c_n = \frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}}{(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_2-\lambda_n)\cdots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)}$$

$$c_i = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}\lambda_k}{\prod_{k=1}^{n}{}'(\lambda_k-\lambda_i)}$$

'指不考虑k=i这一项

In nuclear physics, the **Bateman equation** is a mathematical model describing abundances and activities in a decay chain as a function of time, based on the decay rates and initial abundances. The model was formulated by **Ernest Rutherford in 1905** and the analytical solution was provided by **Harry Bateman in 1910**.——第二章补充阅读材料

在连续放射性衰变中：

- 母体衰变是单一放射性衰变，服从指数衰减规律；
- 其余各代子体的衰变规律与前面各代衰变常数都有关，不再是简单指数规律。

在连续放射性衰变中，各代母核子核的衰变常数有大有小，衰变有快有慢。

问题：如果时间足够长，各代核素会表现出什么样的衰变规律呢？

1. 暂时平衡

2. 长期平衡

3. 逐代衰变(不成平衡)

$$A \xrightarrow{\lambda_1} B \xrightarrow{\lambda_2} C(\text{稳定})$$

形成条件：

- $T_1 > T_2$，即$\lambda_1 < \lambda_2$
- 但是T_1也不是很大——在观察时间内可以看出母体放射性强度的变化。

$$ {}^{200}_{78}Pt \xrightarrow{\beta^-,12.6h} {}^{200}_{79}Au \xrightarrow{\beta^-,0.81h} {}^{200}_{80}Hg(\text{稳定}) $$

暂时平衡的表现——经过足够长时间后：

①子体与母体的核数目将建立起固定的比例关系

②子体按照母体的半衰期衰减

推导

$$N_2(t)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_{10}\left(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}\right)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_1(t)\boxed{\left(1-e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}\right)}$$

$$\sim 1$$

由于：$\lambda_1<\lambda_2$

当 t 足够大时有：

$$e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}\ll 1$$

$$N_2(t)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_1(t)$$

即：当 t 足够大时

$$\frac{N_2(t)}{N_1(t)}\approx\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\quad \begin{matrix}>1?\\<1?\end{matrix}$$

子体与母体的核素数量大小关系并不确定

子母体的放射性活度的关系为：

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)}=\frac{\lambda_2 N_2(t)}{\lambda_1 N_1(t)}\approx\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}>1$$

子体的活度大于母体的活度

$N_2(t)$的极大值

$$N_2(t)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_{10}(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t})=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_1(t)(1-e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t})$$

- $t=0$时，子核数量为0，并从0开始增长
- t很大后按母体半衰期衰减，逐渐归0

$N_2(t)$于t_m处存在极大值

$$\left.\frac{dN_2(t)}{dt}\right|_{t=t_m}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_{10}\left[\lambda_2 e^{-\lambda_2 t_m}-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_m}\right]=0$$

t_m仅与λ_1、λ_2有关

$$\lambda_2 e^{-\lambda_2 t_m}=\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_m} \Rightarrow e^{(\lambda_2-\lambda_1)t_m}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Rightarrow t_m=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$t=t_m$时的特点

$$\frac{dN_2(t)}{dt}=\lambda_1 N_1(t)-\lambda_2 N_2(t)$$

$$\left.\frac{dN_2(t)}{dt}\right|_{t=t_m}=0$$

$$\boxed{\lambda_1 N_1(t_m)-\lambda_2 N_2(t_m)=0}$$

即 ： $\boxed{A_1(t_m)-A_2(t_m)=0}$

$$\boxed{A_1(t_m)=A_2(t_m)}$$

$t=t_m$

- 子核的活度达到极大
- 母核活度=子核活度

$t<t_m$

- 母核活度>子核活度

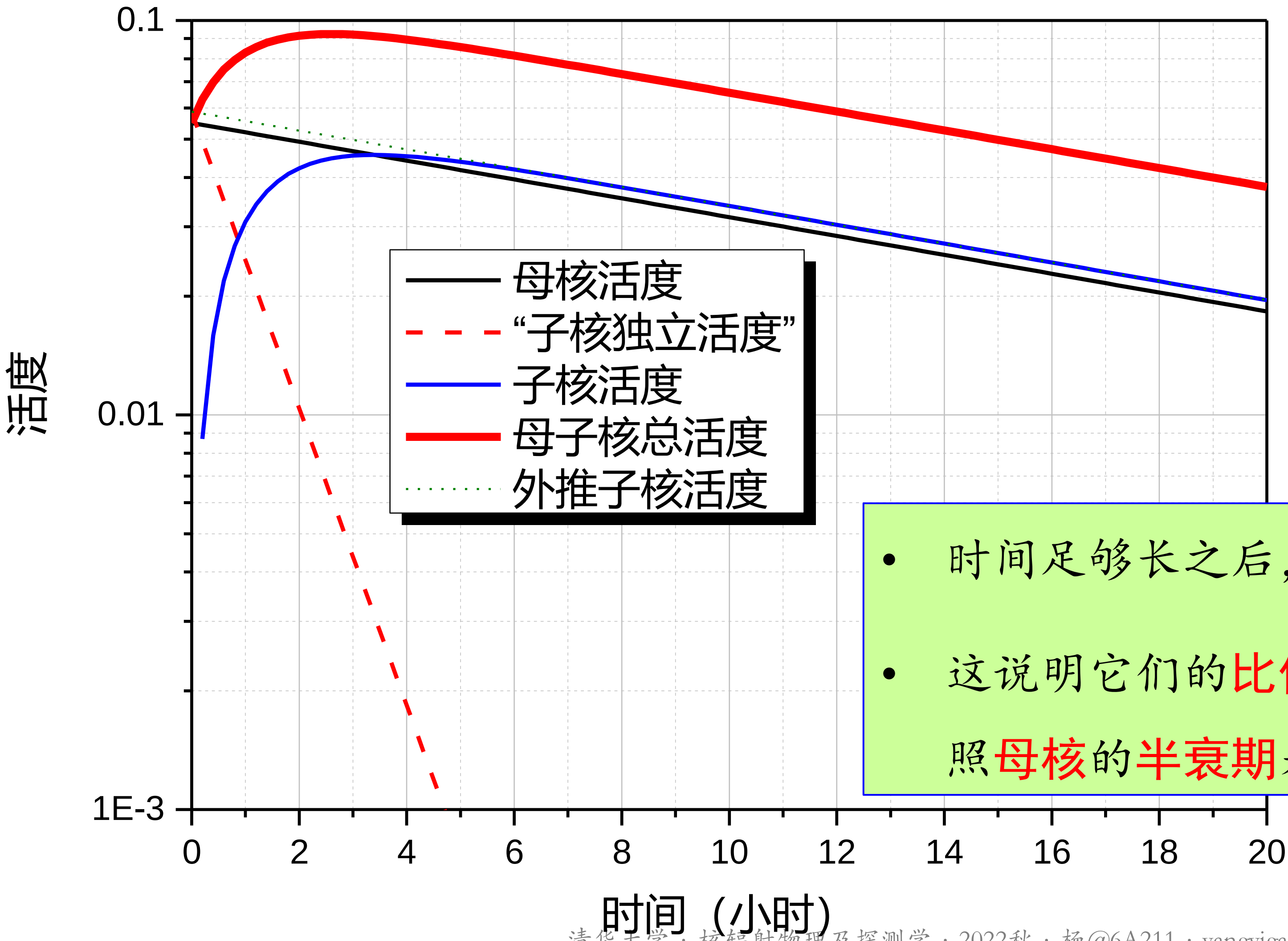
$t>t_m$

- 母核活度<子核活度

示例：

$$^{200}_{78}Pt \xrightarrow{\beta^-,12.6h} {}^{200}_{79}Au \xrightarrow{\beta^-,0.81h} {}^{200}_{80}Hg(\text{稳定})$$

$$\lambda_1 = \ln 2 / T_{1/2}^{(1)} = 0.055/h \quad < \quad \lambda_2 = \ln 2 / T_{1/2}^{(2)} = 0.866/h$$



- 时间足够长之后，母子核的活度曲线在半对数坐标上平行；
- 这说明它们的比值保持恒定，因此衰减规律是一样的，都按照母核的半衰期来衰减了。

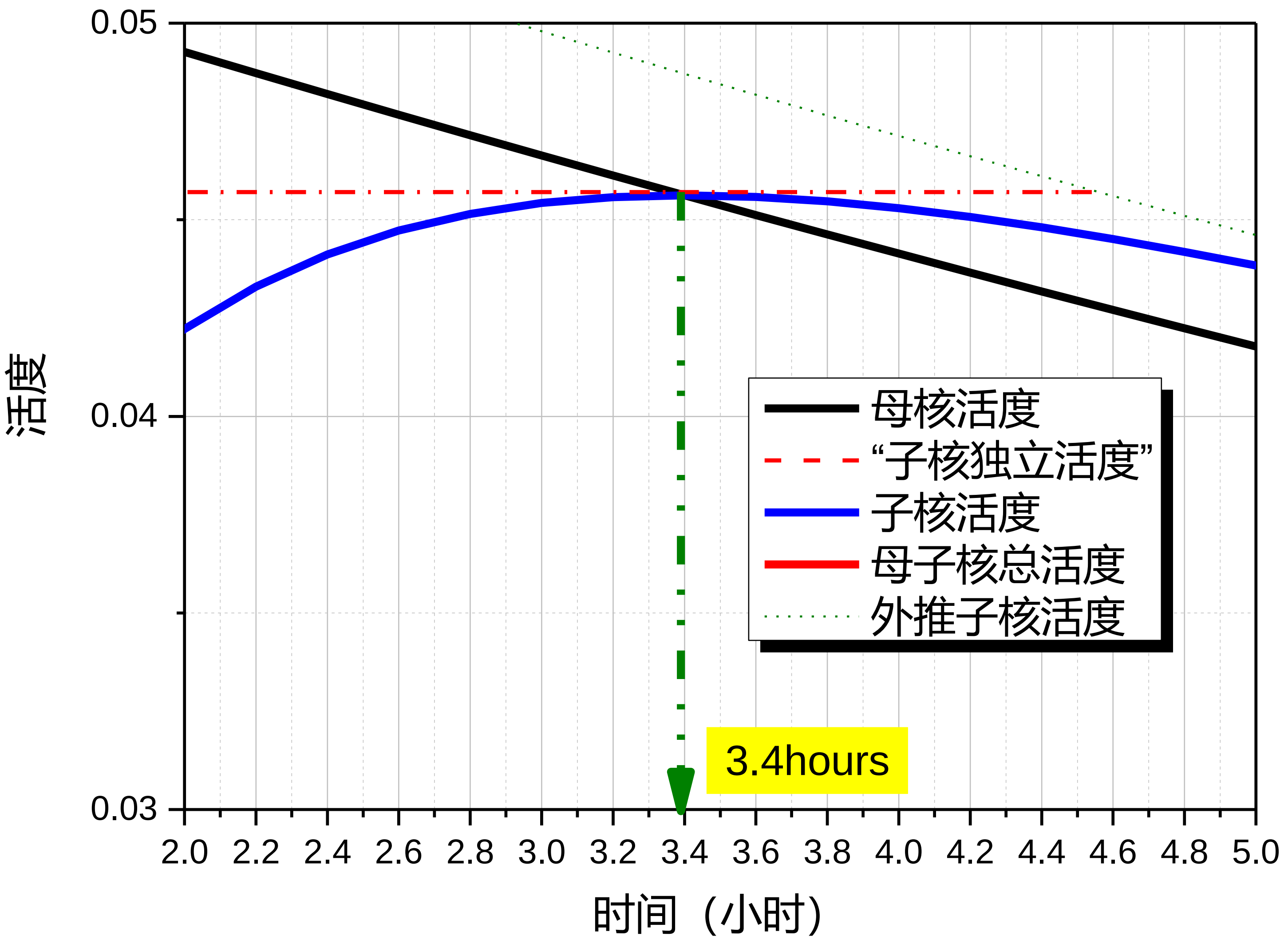
t_m时刻（暂时平衡）

想一想，是母核、还是子核，对t_m的值的大小影响更大？

$$t_m = \frac{1}{0.866-0.055}\ln\frac{0.866}{0.055}$$
$$=1.233hr \times 2.76$$
$$=3.4hr$$

t_m时刻:

- 受子核半衰期影响更大
- 子核的活度达到极大
- 母子核的活度刚好相等
- 在此之前，母核活度大于子核活度
- 在此之后，子核活度大于母核活度



多代连续放射性衰变时的暂时平衡

$$A_1 \xrightarrow[\lambda_1]{} A_2 \xrightarrow[\lambda_2]{} A_3 \xrightarrow[\lambda_3]{} \cdots \xrightarrow[\lambda_n]{} A_{n+1}(\text{稳定})$$

$$A_1 \xrightarrow[\lambda_1]{t_m\text{后，暂时平衡}} A_2 \xrightarrow[\lambda_1(\lambda_2)]{} A_3 \xrightarrow[\lambda_3]{} \cdots \xrightarrow[\lambda_n]{} A_{n+1}(\text{稳定})$$

足够长的时间后

$$A_1 \xrightarrow[\lambda_1]{t_m\text{后，暂时平衡}} A_2 \xrightarrow[\lambda_1(\lambda_2)]{\text{暂时平衡}} A_3 \xrightarrow[\lambda_1(\lambda_3)]{\text{暂时平衡}} \cdots \xrightarrow[\lambda_1(\lambda_n)]{\text{暂时平衡}} A_{n+1}(\text{稳定})$$

结论： 只要母体A_1的衰变常数λ_1**最小**，就会建立起按A_1的半衰期进行衰变的**暂时平衡体系**。

- 足够长时间后，A_2与A_1建立**暂时平衡**，A_2按λ_1衰减
- 然后，A_3与A_2建立**暂时平衡**，也按λ_1衰减
- 以后各代均循此例，按λ_1衰减
- 最终平衡之后，各代子体的**数量及活度之比不随时间变化**

形成条件：

- ➢$T_1 \gg T_2$，$\lambda_1 \ll \lambda_2$
- ➢T_1比较大——在观察时间内看不出母体放射性的变化。

$$^{228}_{88}Ra \xrightarrow{\beta^-,5.76a} {}^{228}_{89}Ac \xrightarrow{\beta^-,6.12h} {}^{228}_{90}Th$$

长期平衡的表现——在经过足够长的时间后：

①**子**体的原子**核数目**和放射性**活度**达到**饱和**

②并且**子体**和**母体**的放射性**活度相等**

③**子体**按照**母体**的**半衰期**衰减

推导

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} N_{10}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} N_1(t)\boxed{\left(1-e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}\right)}$$

$$\boxed{\sim 1}$$

由于：$\boxed{\lambda_1 << \lambda_2}$

$$\boxed{\lambda_2 - \lambda_1 > 0}$$

当 ***t*** **足够大时**

$$\boxed{e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t} << 1}$$

即：$\left(1-e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}\right) \sim 1$

$$N_2(t) = N_1(t)\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$\lambda_2 \gg \lambda_1 \rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 \sim \lambda_2$$

当 ***t*** **足够大时**

$$\boxed{\frac{N_2(t)}{N_1(t)} \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

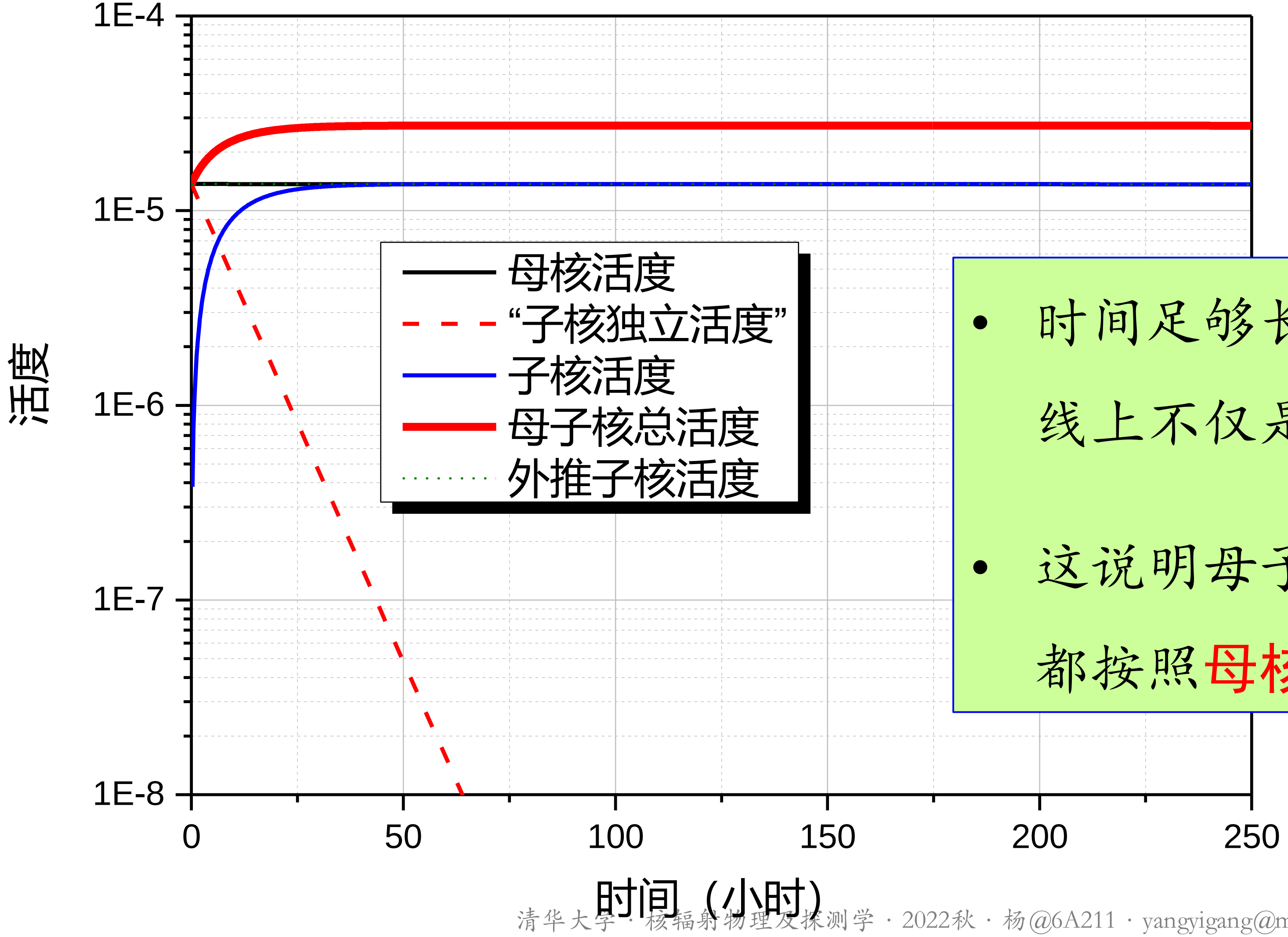
子母体的放射性活度的关系为：

$$\boxed{\frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{\lambda_2 N_2(t)}{\lambda_1 N_1(t)} \approx \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1}$$

示例

$$^{228}_{88}Ra \xrightarrow{\beta^-,5.76a} {}^{228}_{89}Ac \xrightarrow{\beta^-,6.12h} {}^{228}_{90}Th$$

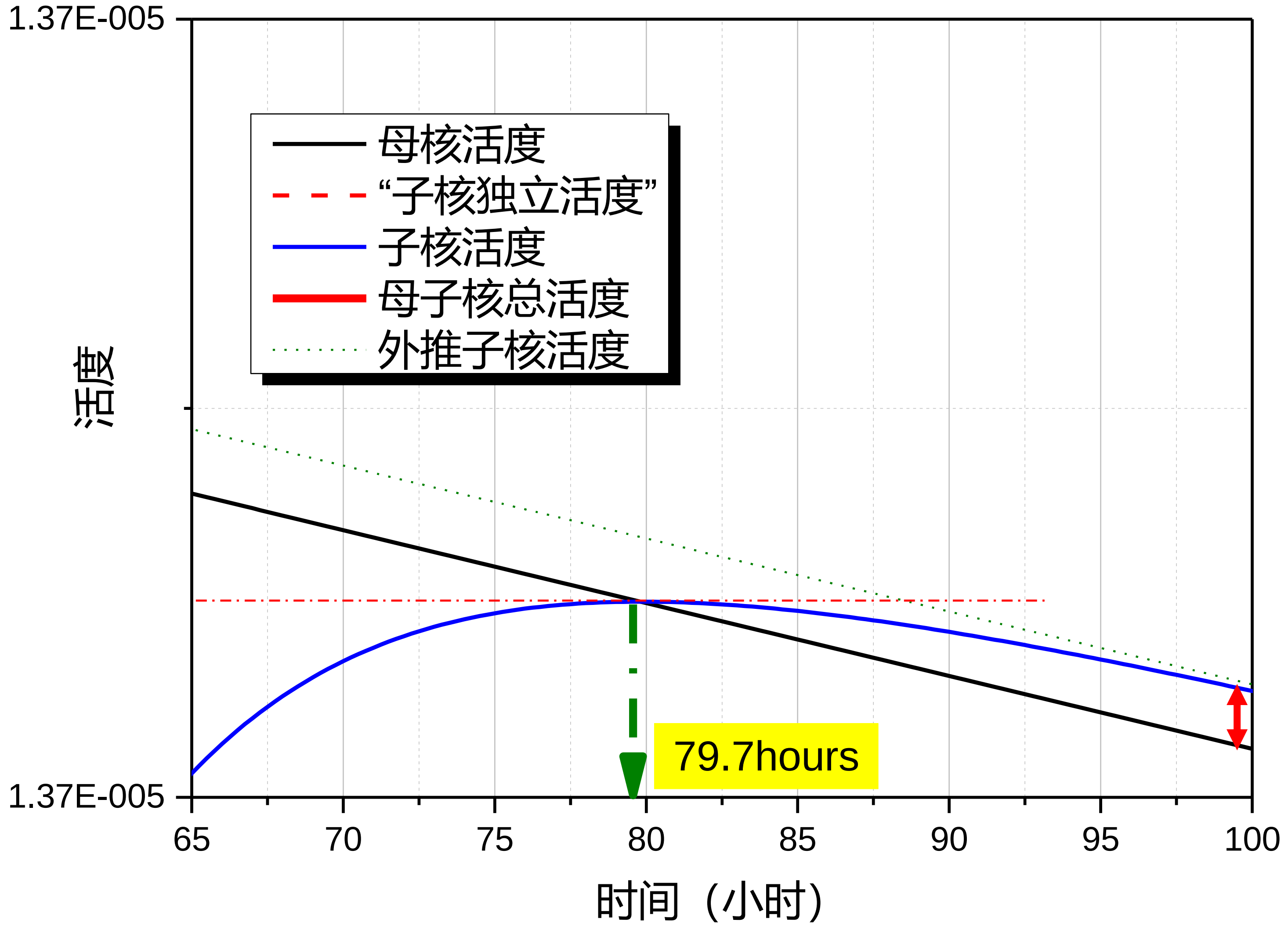
$$\lambda_1 = \ln 2 / T_{1/2}^{(1)} = 1.37\times10^{-5}/h \ll \lambda_2 = \ln 2 / T_{1/2}^{(2)} = 0.113/h$$



- 时间足够长之后，母子核的活度在半对数曲线上不仅是平行的，而且已经“重合”了；
- 这说明母子核的活度已经“一样”了，而且都按照母核的半衰期来衰减了。

t_m时刻

也想一想，是母核、还是子核，对t_m的值的大小影响更大？



$$t_m = \frac{1}{0.113 - 1.37\times10^{-5}} \ln \frac{0.113}{1.37\times10^{-5}}$$
$$= 8.85hr \times 9.02$$
$$= 79.7hr$$

t_m时刻：

- 受子核半衰期影响更大
- 子核的活度达到极大
- 母子核的活度刚好相等
- 在此之前，母核活度大于子核活度
- 在此之后，子核活度≈母核活度

它们的活度其实还是有差别的！

但是很小，近似一样

多代连续放射性衰变时的长期平衡

$$A_1 \xrightarrow[\lambda_1]{} A_2 \xrightarrow[\lambda_2]{} A_3 \xrightarrow[\lambda_3]{} \cdots \xrightarrow[\lambda_n]{} A_{n+1}(\text{稳定})$$

$$A_1 \xrightarrow[\lambda_1]{} A_2 \xrightarrow[\lambda_1]{} A_3 \xrightarrow[\lambda_1]{} \cdots \xrightarrow[\lambda_1]{} A_{n+1}(\text{稳定})$$

结论： 只要母体A_1的衰变常数λ_1足够小，就会建立起按A_1的半衰期进行衰变的**长期平衡体系**。

- **最终，各代子体的核数目保持固定比例，不随时间改变**

$$N_i(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} N_1(t) \qquad \boxed{i = 2, 3, 4, \ldots n}$$

- **各代子体的放射性活度都与母体相同**

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n$$

示例

已知长期平衡系列中^{227}Ac的半衰期为21.8a，求^{231}Pa的半衰期。

$$^{231}_{91}Pa \xrightarrow[T_{1/2}=?]{\alpha} {}^{227}_{89}Ac \xrightarrow[T_{1/2}=21.8a]{} \cdots$$

$$\boxed{\frac{N({}^{231}_{91}Pa)}{N({}^{227}_{89}Ac)}=1505}$$

解：
$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{T_1}{T_2}$$

$$T({}^{231}_{91}Pa)=1505\times 21.8=3.28\times 10^4 a$$

形成条件： $T_1<T_2$，$\lambda_1>\lambda_2$，母体衰变比子体快。

$$^{131}_{52}Te \xrightarrow{\beta^-,25.0m} {}^{131}_{53}I \xrightarrow{\beta^-,8.04d} {}^{131}_{54}Xe$$

逐代衰变的表现：

①建立不起平衡

②当时间足够长，母体几乎全部衰变，转变成子体

③子体按照自己的衰变常数衰变

④子体之后的平衡类型可以是三者中的任何一种……

推导

由：$N_2(t)=N_{10}\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t})$

由于：$\lambda_1>\lambda_2$

当 t 足够大时有：$e^{-\lambda_1 t}\ll e^{-\lambda_2 t}$

$$e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}\approx -e^{-\lambda_2 t}$$

于是当 t 足够大时有：

$$N_2(t)\approx N_{10}\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 t}$$

母体的放射性活度为：

$$A_1(t)=\lambda_1 N_1(t)=\lambda_1 N_{10}e^{-\lambda_1 t}\to 0$$

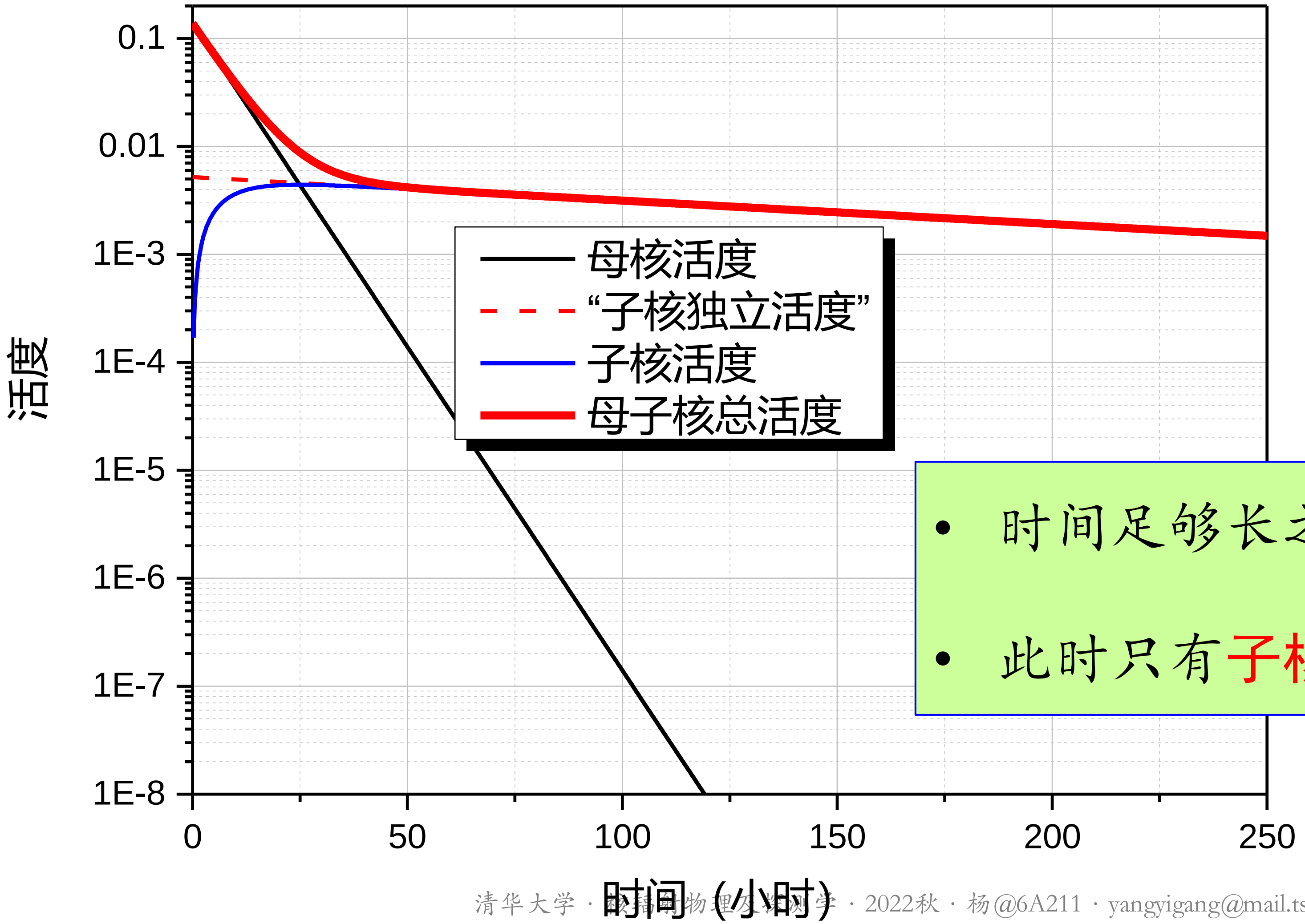
子体的放射性活度为：

$$A_2(t)=\lambda_2 N_2(t)\approx N_{10}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 t}$$

示例

$$^{210}_{83}Bi \xrightarrow{\beta^-,5.01d} {}^{210}_{84}Po \xrightarrow{\alpha,138.4d} {}^{206}_{82}Pb(稳定)$$

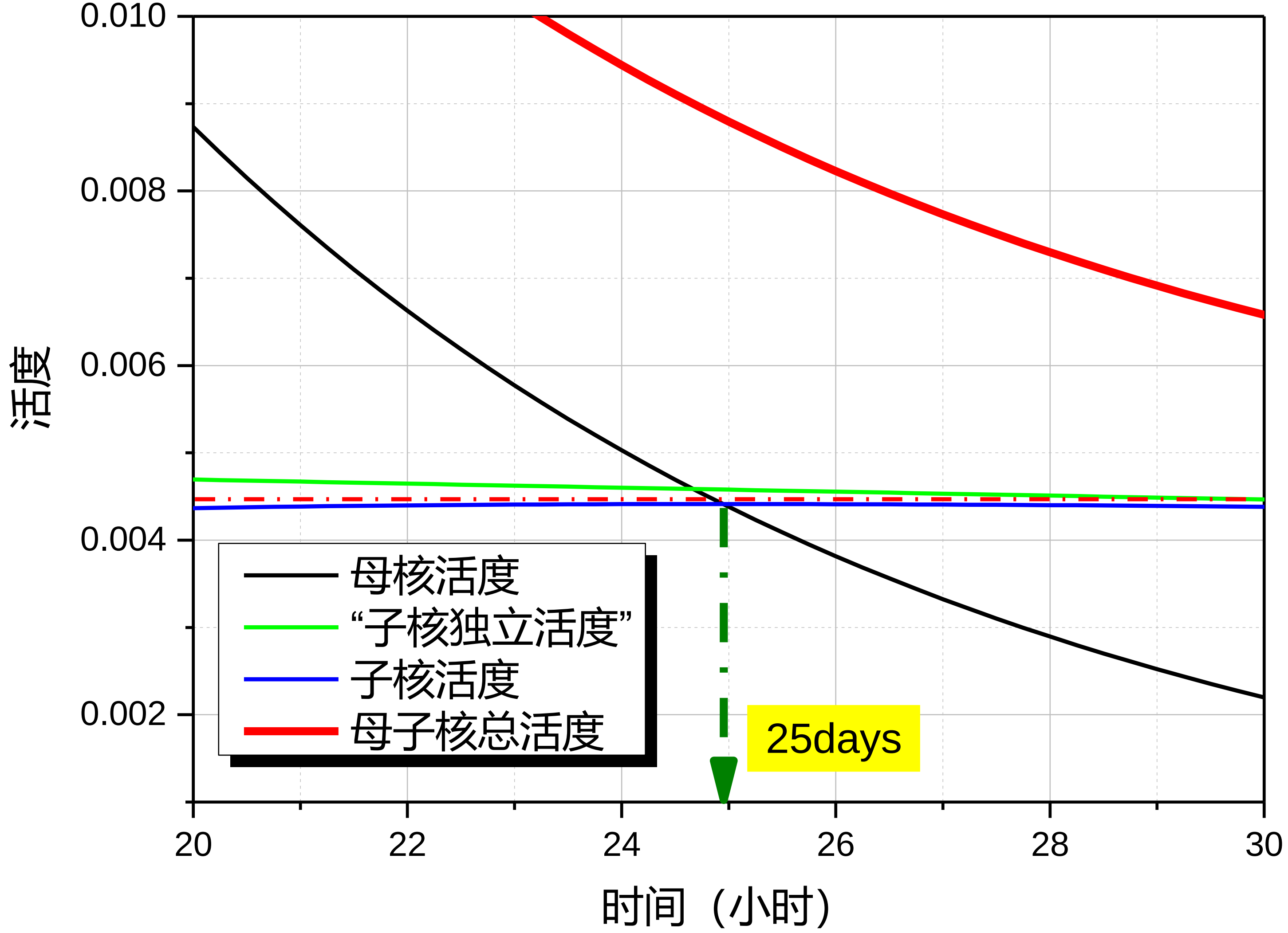
$$\lambda_1 = \ln 2 / T_{1/2}^{(1)} = 0.138/d \quad > \quad \lambda_2 = \ln 2 / T_{1/2}^{(2)} = 0.005/d$$



- 时间足够长之后，**母核**就衰变“**完**”了；
- 此时只有**子核**独自按照**自己**的**半衰期**在衰变。

t_m时刻

再想一想，是母核、还是子核，对t_m的值的大小影响更大?



$$t_m = \frac{1}{0.138-0.005}\ln\frac{0.138}{0.005}$$
$$= 7.52days \times 3.32$$
$$= 25days$$

t_m时刻:

- 受母核半衰期影响更大
- 子核的活度达到极大
- 母子核的活度刚好相等
- 在此之前，母核活度大于子核活度
- 在此之后，子核活度大于母核活度

多代连续放射性衰变时的逐代衰变

$$A_1 \xrightarrow[\lambda_1]{} A_2 \xrightarrow[\lambda_2]{} A_3 \xrightarrow[\lambda_3]{} \cdots \xrightarrow[\lambda_n]{} A_{n+1}(\text{稳定})$$

若上代的核素都比下代的核素衰变地快，有：

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \cdots > \lambda_n$$

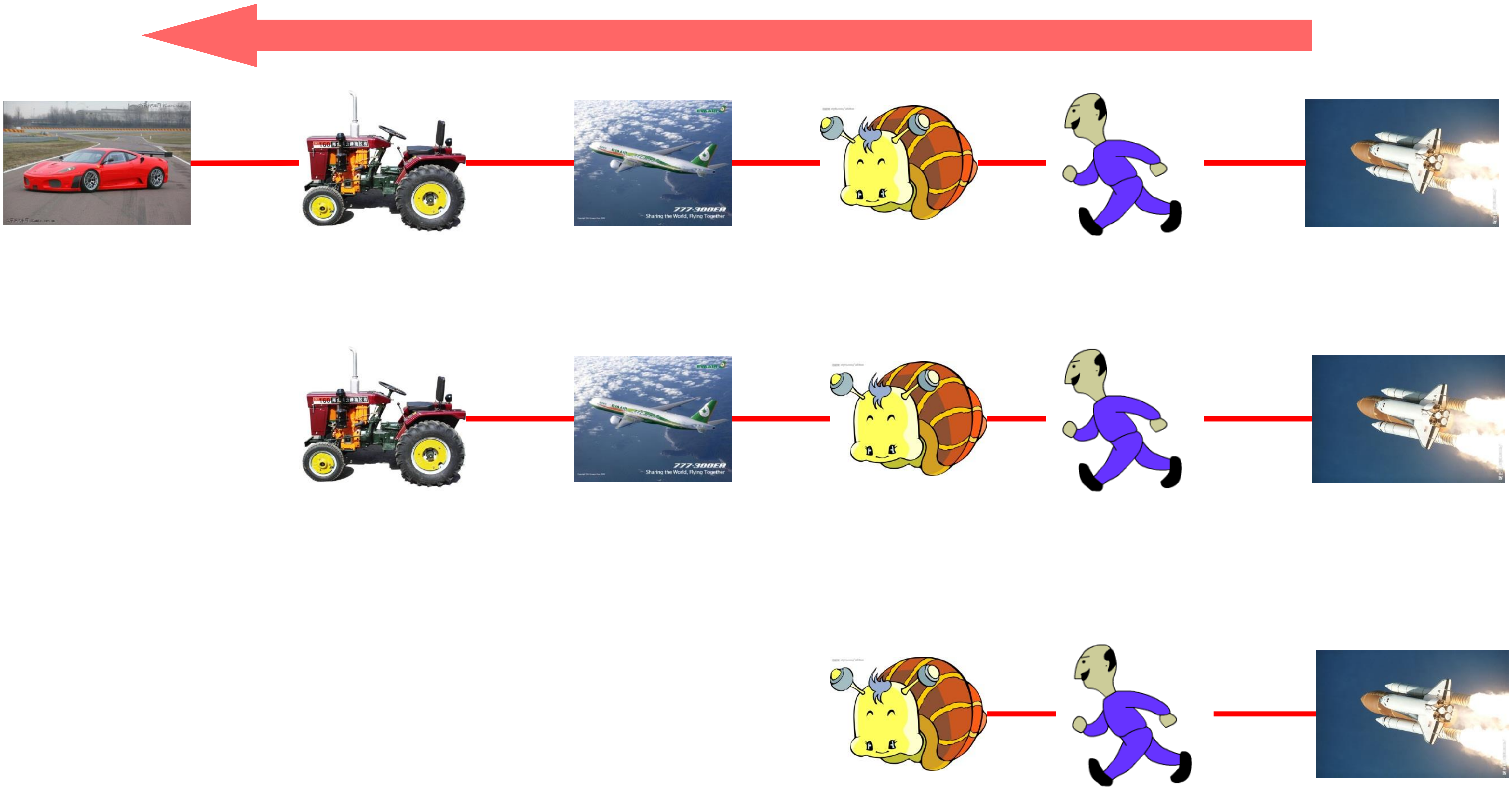
$$A_2 \xrightarrow[\lambda_2]{} A_3 \xrightarrow[\lambda_3]{} \cdots \xrightarrow[\lambda_n]{} A_{n+1}(\text{稳定})$$

$$A_n \xrightarrow[\lambda_n]{} A_{n+1}(\text{稳定})$$

结论：不会形成平衡。

- 先是，A_1按照λ_1衰变完
- 然后，A_2按照λ_2衰变完
- ……
- 最后，A_n按照λ_n衰变为A_{n+1}

分别会达成什么“平衡”？



- 经过足够长时间之后，多代连续放射性衰变过程将出现暂时平衡、长期平衡或逐代衰变等现象。

实际中往往三种交织在一起；

- 母核衰变比子核衰变快的，$T_1<T_2$，母核就按逐代衰变先衰变掉了，$N_1\to 0$， $N_2(\lambda_2)$；

- 如果这个子核比下一代子核衰变慢，$T_1>T_2$，则形成暂时平衡，$N_2\propto N_1$，$A_2>A_1$，$N_2(\lambda_1)$；

暂时平衡体系总要衰变掉；

- 直到出现长半衰期的核素形成长期平衡。$T_1\gg T_2$，$N_2\propto N_1$，$A_2=A_1$，$N_2(\lambda_1)$；

- 地球上目前存在的放射系就是衰变留下的处于长期平衡的多代连续衰变体系。

- 地球的年龄大约有**45亿年**；

- 经过漫长的时间后，还能保存下来的天然放射系，其母核(或衰变链中的子核)的**半衰期都很长**，与地球年龄相近或更长；

- 目前在地球上还存在有**三个天然放射系**，分别为：

钍系 $^{232}_{90}Th$ $T_{1/2}=1.4\times10^{10}a$

铀系 $^{238}_{92}U$ $T_{1/2}=4.468\times10^{9}a$

锕铀系 $^{235}_{92}U$ $T_{1/2}=7.038\times10^{8}a$

不稳定核素 稳定核素

$^{232}_{90}Th$ $A=4\times58$ **钍系(4n系)** 经过连续10次衰变 $A=4\times52$ $^{208}_{82}Pb$

子体中半衰期最长为**5.75年**，所以**钍系**建立起长期平衡需要**几十年时间**。

天然放射系中没有

$^{237}_{93}Np$ $A=4\times59+1$ **镎系(4n+1系)** 经过连续11次衰变 $A=4\times52+1$ $^{209}_{83}Bi$

^{237}Np的半衰期为214万年，天然放射系中缺少4n+1放射系，需要人工制造。

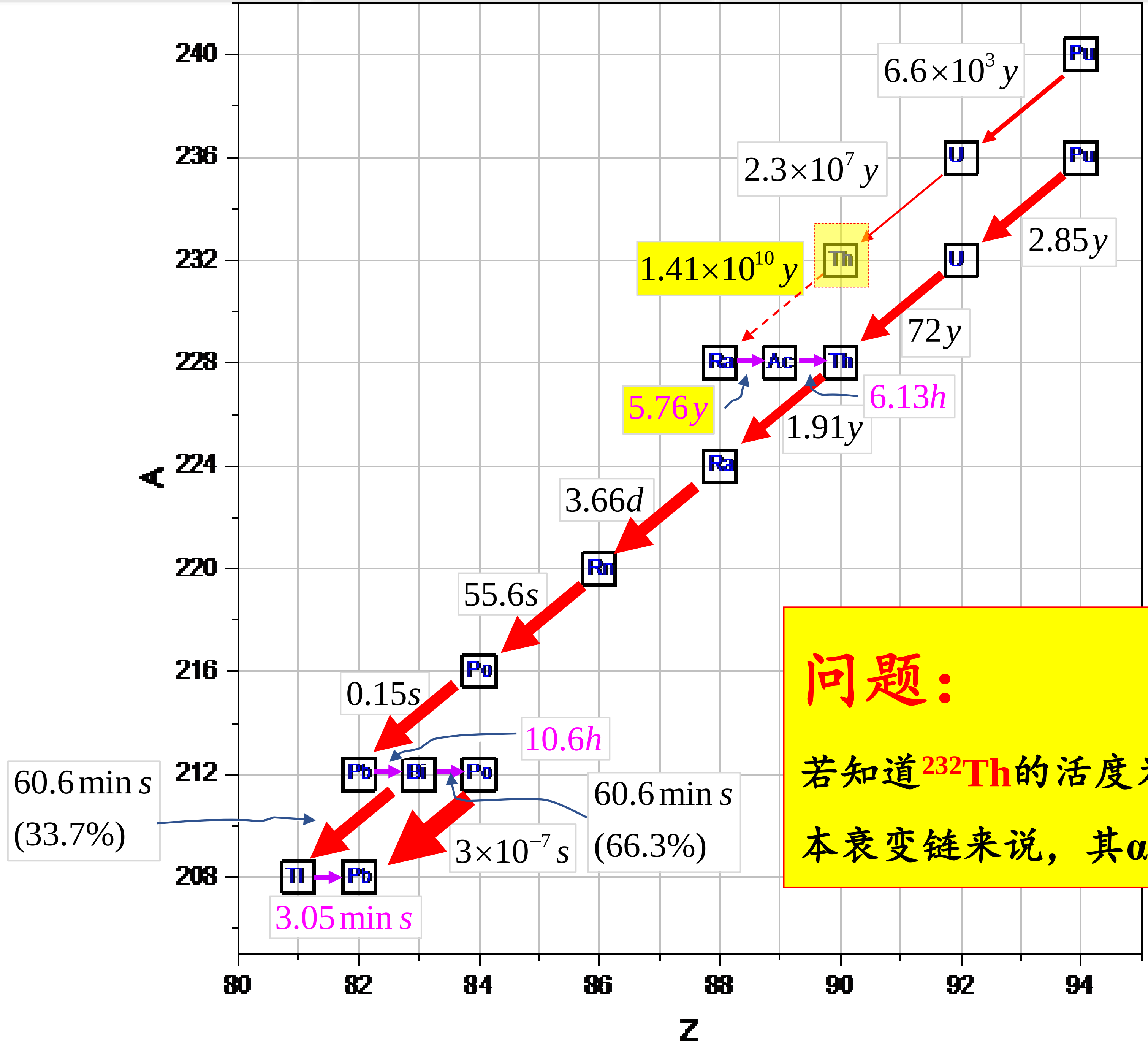
$$^{238}_{92}U+3n\rightarrow{}^{241}_{92}U\xrightarrow{\beta^-}{}^{241}_{93}Np\xrightarrow{\beta^-,13.9m}{}^{241}_{94}Pu\xrightarrow{\beta^-,14.29a}{}^{241}_{95}Am\xrightarrow{\alpha,432.2a}{}^{237}_{93}Np$$

$^{238}_{92}U$ $A=4\times59+2$ **铀系(4n+2系)** 经过连续14次衰变 $A=4\times51+2$ $^{206}_{82}Pb$

子体中半衰期最长为**2.45×10⁵年**，所以**铀系**建立起长期平衡需要**几百万年时间**。

$^{235}_{92}U$ $A=4\times58+3$ **锕铀系(4n+3系)** 经过连续11次衰变 $A=4\times51+3$ $^{207}_{82}Pb$

子体中半衰期最长为**3.28×10⁴年**，所以**锕铀系**建立起长期平衡需要**几十万年时间**。



长期平衡后，哪个α放射性核素的数量最少？

6A	4A

问题：

若知道^{232}Th的活度为A，则对达到长期平衡的本衰变链来说，其α和β衰变活度分别是多少？