电磁场数值计算

邢庆子

Tel: **62781684(o), 13661226717**

E-mail: **xqz@tsinghua.edu.cn**

清华大学工物系加速器实验室 刘卿楼**309**

3.1 变分法基本概念

- 有限元法简介：

  有限差分法和变分法中里兹法的结合；

- 有限元法计算电磁场的基本步骤：

1）简化求解物理模型，导出求解的微分方程。

2）根据微分方程及边界条件，求出对应定解问题的泛函及其等价的变分问题。

3）对求解区域进行剖分，确定相应的插值函数。

4）对多元函数的泛函求极值，导出有限元方程组。

5）用追赶法或其它有效的方法求解有限元方程组，得到节点上的位函数。

- 应用范围及特点：

任何微分方程所描述的各类物理场，适用于具有复杂边界或边界条件、含有复杂媒质的定解问题；对第二类、第三类及不同媒质交界面的边界条件不必作单独处理。

3.1 变分法基本概念

边值问题的等价泛函

有限元法的关键问题之一是：根据具体物理问题建造一个泛函，使其欧拉方程为物理问题满足的偏微分方程。

(1) 一类边界泊松方程**(**二维、线性区**)**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2}=-\mu J\\ A\big|_L=u(l)\end{cases}\xrightarrow{\text{对应泛函}}\begin{cases}F(A)=\int_D\left[\left(\dfrac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial A}{\partial y}\right)^2-2\mu JA\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ A\big|_L=u(l)\end{cases}$$

(2) 二类边界泊松方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2}=-\mu J\\ \dfrac{\partial A}{\partial n}\Big|_L=u_2(l)\end{cases}\xrightarrow{\text{对应泛函}}F(A)=\iint_D\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2-2\mu JA\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_L u_2A\,\mathrm{d}l$$

3.1 变分法基本概念

- 具有平行平面场特征的静态电、磁场的统一数学模型：（β为常数）

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-f/\beta \\
u\big|_{L1}=u_0 \\
\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{L2}=q
\end{cases}
\quad\Longleftrightarrow\quad
\begin{cases}
\iint_D\left\{\dfrac{\beta}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-fu\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\qquad\qquad+\int_{L2}(-q)u\,\mathrm{d}l=\min \\
u\big|_{L1}=u_0
\end{cases}
$$

待求函数	***u***	***f***	***β***	$\boldsymbol{u_0}$	***q***
矢量磁位***A***	A_z	J_z	γ (或$1/\mu$)	A_{zL}	H_t
标量磁位 $\boldsymbol{\Phi_m}$	Φ_m	0	μ	Φ_{mL}	$-B_n$
标量电位 $\boldsymbol{\Phi}$	Φ	ρ	ε	Φ_0	$-D_n$

本节内容

第3章 有限元法基础

3.2 泛函的离散化与线性插值函数

3.2 泛函的离散化与线性插值函数

有限元法的第一个基本问题是：

根据具体物理问题建造一个泛函，使其欧拉方程为物理问题满足的偏微分方程。

有限元法的第二个基本问题是：

把在一个区域 **D** 上根据电磁场边值问题建立起来的连续的泛函，用剖分为有限个单元上的泛函之和来代替。

- **剖分与插值：**

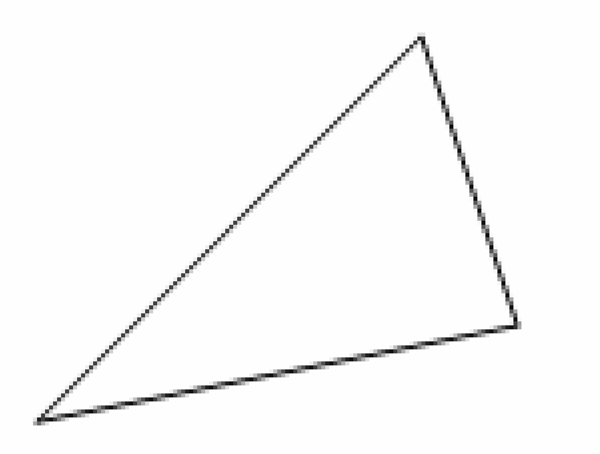
　　首先对场域进行剖分，在每个小单元内的泛函仍然是位函数分布的函数。为进行数值计算，单元内任意一点的位函数的值可利用单元节点参数通过插值关系近似表示，并将此插值关系代入单元的泛函中，将泛函变为节点参数表示的多元函数。

3.2.1 场域的剖分（剖分形式、原则和要求）

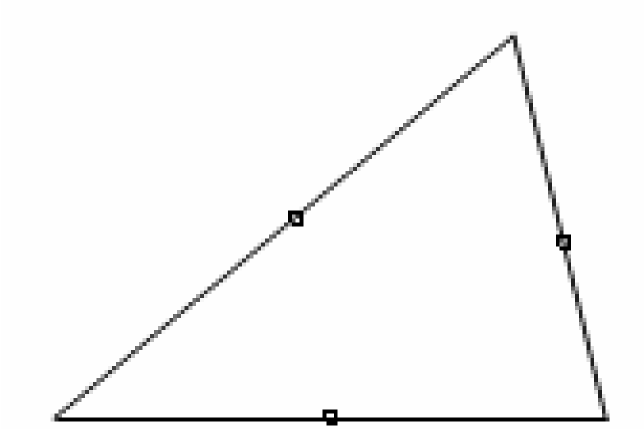
对于平面场域进行离散化的几何剖分、以及确定相应插值函数可采用多种形式。

剖分的几何形状可以是三角形，四边形、矩形等，节点个数也可以不同。

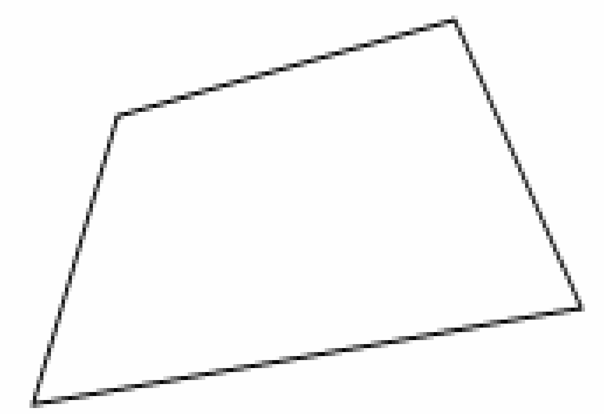
3.2 泛函的离散化与线性插值函数



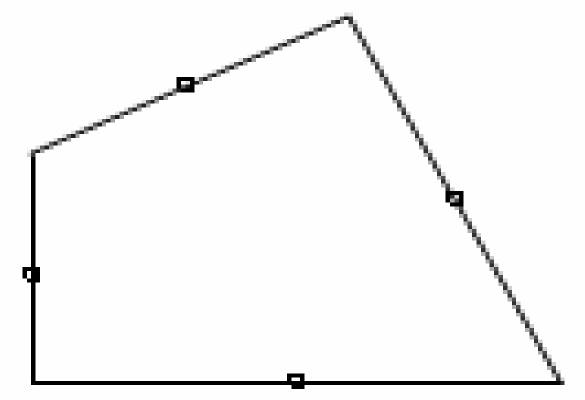
(a) 三节点三角形单元



(b) 六节点三角形单元



(c) 四节点四边形单元



(d)八节点四边形单元

二维常用的剖分单元类型

- 三角形单元的单元剖分

(1) 场域的剖分要遍及全部场区，包括边界；三角形单元既不能重迭，也不能分离；

(2) 直线边界与单元的一边重合，曲线边界以折线近似代替；

(3) 内部边界与单元的一边重合，用折线代替曲线；

(4) 任一三角形的顶点必须同时是相邻三角形的顶点；

(5) 每个单元及每个节点都应按一定顺序编号。

共有四组数据：

1）节点编号： **1, 2, 3, …… N_0**

2）节点坐标： （$x_{i,}, y_i$）i **= 1, 2, 3, …… N_0**

3）单元编号 ：**1，2，3 …… N_e**

4）单元三个顶点编号：按逆时针给出， **(i, j, m)**

3.2.2 线性插值函数

如何构造磁位插值函数？

插值函数多采用多项式，因为多项式对任意复杂场分布提供较好的近似，并易于求导和积分。

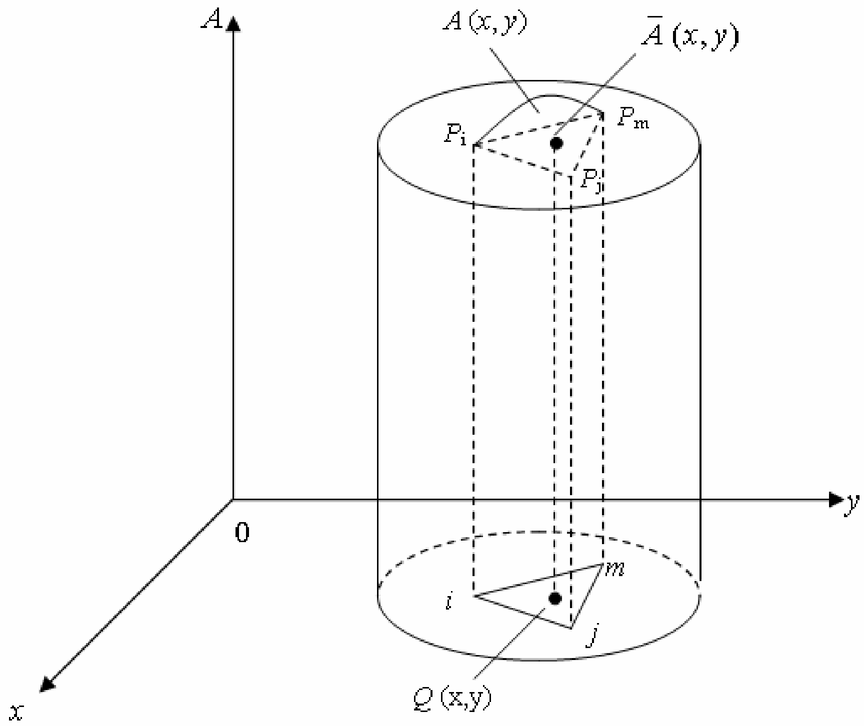
多项式次数取决于单元的节点数（即自由度）。例如三节点三角形有三个自由度，故多项式只有三项，即常数项和 ***x*, y** 的线性项，六节点三角形有六个自由度，故多项式有六项，即常数项、线性项和二次项，以此类推。

有限元中常用的是三节点三角形单元构成的线性插值函数。

对于每一个三角形单元 e，泛函为：

$$F^{(e)}(A)=\iint_{e}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^{2}-2\mu JA\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

三角形内任一点 (x, y) 的 $A(x, y)$ 可以用此三角形三顶点 i, j, m 的节点参数 $A(x_i, y_i)$，$A(x_j, y_j)$ 和 $A(x_m, y_m)$ 值按线性插值规律定出！



$Q(x, y)$：单元 e 内一点；

$A(x, y)$：对应 $Q(x, y)$ 点的真实值，在 曲面上；

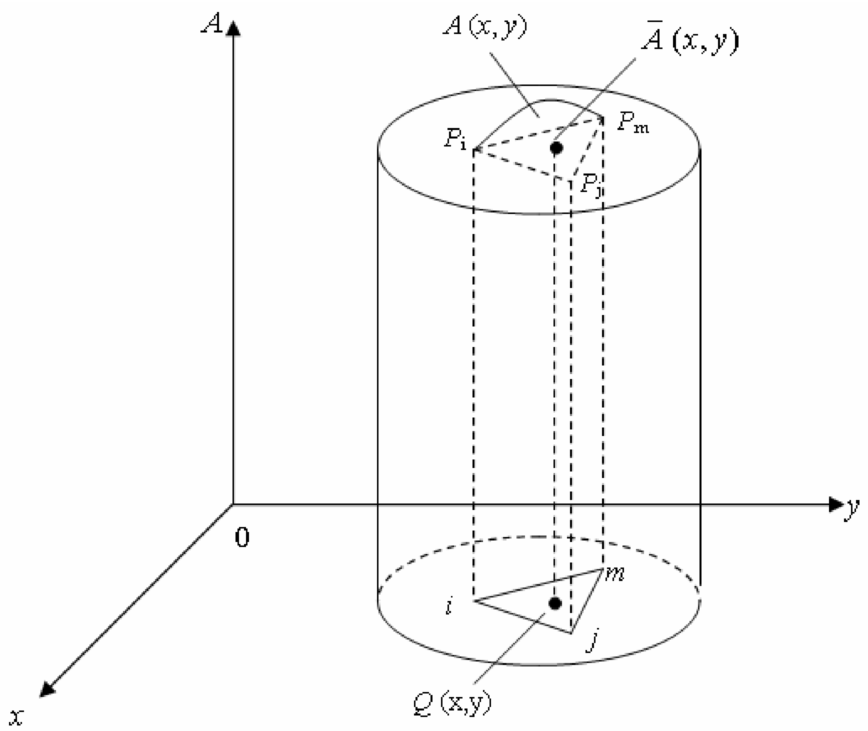
$\bar{A}(x,y)$：线性插值的近似值，在通过 P_i, P_j, P_m 三节点的平面 $P_e(x, y)$ 上。

3.2 泛函的离散化与线性插值函数

平面 P_e(x, y) 满足的方程是： $P_e(x,y) = g_1 + g_2 x + g_3 y$

g_1, g_2, g_3 是由 A_i, A_j, A_m 决定的常数：

$$\begin{cases} P_i(x_i, y_i) = g_1 + g_2 x_i + g_3 y_i = A_i \\ P_j(x_j, y_j) = g_1 + g_2 x_j + g_3 y_j = A_j \\ P_m(x_m, y_m) = g_1 + g_2 x_m + g_3 y_m = A_m \end{cases}$$



由上式可解得：

$$\begin{cases} g_1 = (a_i A_i + a_j A_j + a_m A_m)/2\Delta \\ g_2 = (b_i A_i + b_j A_j + b_m A_m)/2\Delta \\ g_3 = (c_i A_i + c_i A_j + c_m A_m)/2\Delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_i\left(x_i, y_i\right) = g_1 + g_2 x_i + g_3 y_i = A_i \\ P_j\left(x_j, y_j\right) = g_1 + g_2 x_j + g_3 y_j = A_j \\ P_m\left(x_m, y_m\right) = g_1 + g_2 x_m + g_3 y_m = A_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1 = \left(a_i A_i + a_j A_j + a_m A_m\right)/2\Delta \\ g_2 = \left(b_i A_i + b_j A_j + b_m A_m\right)/2\Delta \\ g_3 = \left(c_i A_i + c_i A_j + c_m A_m\right)/2\Delta \end{cases}$$

其中：

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} \quad a_j = -\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_m & y_m \end{vmatrix} \quad a_m = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

$$b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix} \quad b_j = \begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_m \end{vmatrix} \quad b_m = -\begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_j \end{vmatrix}$$

$$c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix} \quad c_j = -\begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_m \end{vmatrix} \quad c_m = \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{vmatrix}$$

3.2 泛函的离散化与线性插值函数

将$\boldsymbol{g_1, g_2, g_3}$ 的表达式代入 $P_e(x,y)=g_1+g_2x+g_3y$

并令 $\begin{cases} N_i(x,y)=(a_i+b_ix+c_iy)/2\Delta \\ N_j(x,y)=(a_j+b_jx+c_jy)/2\Delta \\ N_m(x,y)=(a_m+b_mx+c_my)/2\Delta \end{cases}$

可得平面 $\boldsymbol{P_e(x, y)}$ 满足的方程：

$$P_e(x,y)=A_iN_i+A_jN_j+A_mN_m=\overline{A}(x,y) \qquad (3.42)$$

- 单元 $\boldsymbol{e}$ 内任意点 $\boldsymbol{(x, y)}$ 对应的 $\boldsymbol{A(x, y)}$ 的线性插值近似值为 $\boldsymbol{P_e}$**(x, y)**，它是$\boldsymbol{A_i, A_j, A_m}$ 和 $\boldsymbol{x, y}$ **(**即 $\boldsymbol{N_i, N_j, N_m}$**)** 的函数！

- $\boldsymbol{N_i, N_j, N_m}$：与三角形的几何尺寸、节点配置及插值多项式的形式有关，所以称为形状函数，也常称为基函数。

在顶点为 ***i***，***j***，***k*** 的三角形内 ***Q(x, y)*** 点把三角形划分为 **3** 个三角形，由它们可以确定 ***Q(x, y)*** 点在三角形中的位置。可得出

$$N_i(x,y)=\frac{\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix}} \qquad \text{(3.43)}$$

当 ***Q*** 点与顶点 ***i*** 重合时可得：

$$\begin{cases}N_i(x_i,y_i)=1\\ N_j(x_i,y_i)=0\\ N_m(x_i,y_i)=0\end{cases}$$

- 只要确定了有关节点参数 A_i, A_j 和 A_m，则 **A(x,y)** 在单元 ***e*** 内任意点的近似值 $\overline{A}(x,y)$ 就由**(3.42)**式确定了。

3.2 泛函的离散化与线性插值函数

在场域 ***D*** 内，函数值 ***A*** 的曲面近似成以许多小三角形平面组成的折平面，诸多小三角形顶点位于函数值 **A** 的曲面上，当小三角形→**0**，近似折平面→ ***A*** 真值曲面。若剖分节点总数为 ***n***，函数 ***A*** 近似写成折平面公式为

$$\begin{aligned}\overline{A}(x,y) &= A_1N_1(x,y)+A_2N_2(x,y)+A_3N_3(x,y)\\&+A_4N_4(x,y)+\cdots+A_nN_n(x,y)\end{aligned} \tag{3.44}$$

其中

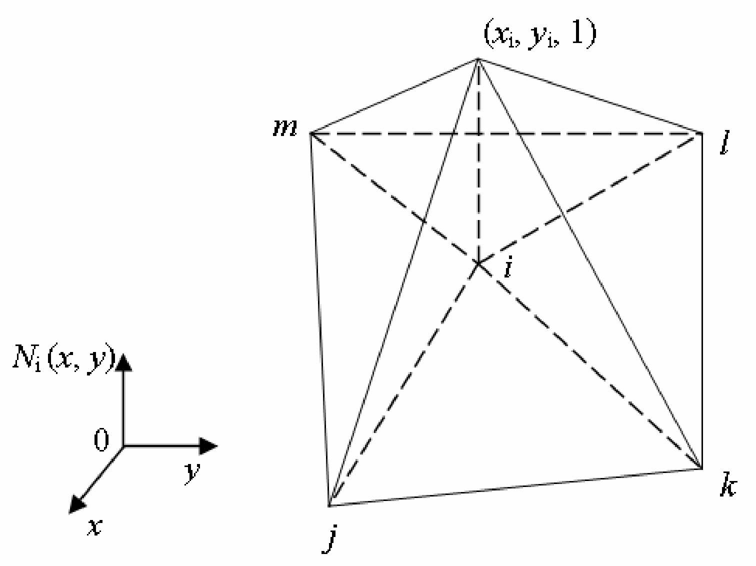
$$N_i(x,y)=\begin{cases}1 & \text{在节点 } \boldsymbol{i} \text{ 处}\\ N_i & \text{在节点 } \boldsymbol{i} \text{ 周围的各个三角形中}\\ 0 & \text{在其它区域}\end{cases}$$

因此有

$$\overline{A}(x_1,y_1)=A_1\ ,\quad \overline{A}(x_2,y_2)=A_2\ ,\quad \overline{A}(x_i,y_i)=A_i\ \ \ldots\ldots\ \ \overline{A}(x_n,y_n)=A_n$$

在场域 ***D*** 内，此函数在每个单元上是线性的，在相邻单元公共边上的位置是由两端上的节点参数唯一决定的，因而近似函数在整个区域是连续的。

3.2 泛函的离散化与线性插值函数



整体形状函数 $\mathbf{N_i(x,y)}$ 分布

在定义域 ***ijk*** 内：

$$N_i(x,y)=\frac{\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_k & y_k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_k & y_k\end{vmatrix}}$$

在定义域 ***ikl*** 内：

$$N_i(x,y)=\frac{\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_k & y_k\\ 1 & x_l & y_l\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_k & y_k\\ 1 & x_l & y_l\end{vmatrix}}$$

在定义域 ***ilm*** 内：

$$N_i(x,y)=\frac{\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_l & y_l\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_l & y_l\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix}}$$

在定义域 ***imj*** 内：

$$N_i(x,y)=\frac{\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_m & y_m\\ 1 & x_j & y_j\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_m & y_m\\ 1 & x_j & y_j\end{vmatrix}}$$

3.2.3 面积坐标及其性质

1. 面积坐标

整体坐标：可用于表示场域中所有点的位置，如二维场中常用的直角坐标等。

局部坐标：只在每个单元中有定义，只能描述单元内各点的位置，在单元外无意义。

在顶点为 ***i***，***j***，***m*** 的三角形单元中，任一点 **Q(x, y)** 可以由 **3** 个值 L_i, L_j 和 L_m 来确定：

$$\begin{cases} L_i = \Delta_i / \Delta \\ L_j = \Delta_j / \Delta \\ L_m = \Delta_m / \Delta \end{cases}$$

3.2 泛函的离散化与线性插值函数

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix}\quad \Delta_i=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix}\quad \Delta_j=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x & y\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix}\quad \Delta_m=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x & y\end{vmatrix}$$

即
$$\begin{cases}\Delta_i=(a_i+b_ix+c_iy)/2\\ \Delta_j=(a_j+b_jx+c_jy)/2\\ \Delta_m=(a_m+b_mx+c_my)/2\end{cases}$$

其中

$$a_i=\begin{vmatrix}x_j & y_j\\ x_m & y_m\end{vmatrix}\quad b_i=-\begin{vmatrix}1 & y_j\\ 1 & y_m\end{vmatrix}\quad c_i=\begin{vmatrix}1 & x_j\\ 1 & x_m\end{vmatrix}$$

$$a_j=-\begin{vmatrix}x_i & y_i\\ x_m & y_m\end{vmatrix}\quad b_j=\begin{vmatrix}1 & y_i\\ 1 & y_m\end{vmatrix}\quad c_j=-\begin{vmatrix}1 & x_i\\ 1 & x_m\end{vmatrix}$$

$$a_m=\begin{vmatrix}x_i & y_i\\ x_j & y_j\end{vmatrix}\quad b_m=-\begin{vmatrix}1 & y_i\\ 1 & y_j\end{vmatrix}\quad c_m=\begin{vmatrix}1 & x_i\\ 1 & x_j\end{vmatrix}$$

则

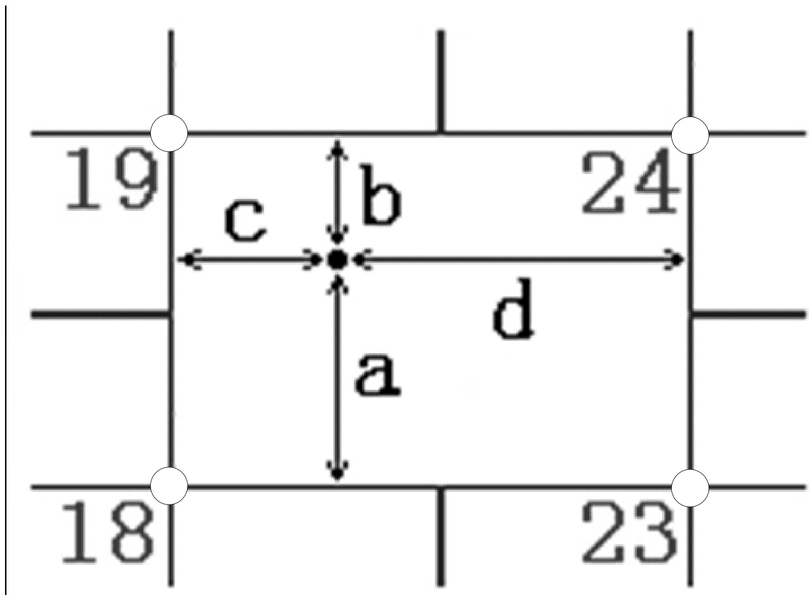
$$\left.\begin{aligned} L_i &= \left(a_i + b_i x + c_i y\right)/2\Delta \\ L_j &= \left(a_j + b_j x + c_j y\right)/2\Delta \\ L_m &= \left(a_m + b_m x + c_m y\right)/2\Delta \end{aligned}\right\}$$

三节点三角形单元线性插值时，其形状函数 N_i， N_j 和 N_m 就是 L_i，L_j，L_m，即 $N_i = L_i$，$N_j = L_j$，$N_m = L_m$！

由 N_i，N_j 和 N_m 就可以确定 Q 点在三角形 $\triangle_{ijm}$ 中的位置。

N_i，N_j，N_m 被称为局部坐标或面积坐标。

- 四节点矩形单元的线性插值：



$$E_P = \frac{a}{a+b} \cdot \left(\frac{d}{c+d} E_{19} + \frac{c}{c+d} E_{24}\right) + \frac{b}{a+b} \cdot \left(\frac{d}{c+d} E_{18} + \frac{c}{c+d} E_{23}\right)$$

2. 面积坐标的性质

总体坐标与面积坐标有一一对应关系，实际是坐标变换关系。

（**1**） N_{i}， N_{j} 和 N_{m} 之和恒等于**1**：

$$N_i + N_j + N_m = \frac{\Delta_i}{\Delta} + \frac{\Delta_j}{\Delta} + \frac{\Delta_m}{\Delta} = 1$$

（**2**） N_{i}， N_{j} 和 N_{m} 仅有两个量独立，***x***，***y*** 坐标可转换成以 N_{i}，N_{j} 为变量的坐标系统（即面积坐标），经过推导可得：

$$\begin{cases} x = N_i x_i + N_j x_j + N_m x_m = x_i N_i + x_j N_j + x_m \left(1 - N_i - N_j\right) \\ y = y_i N_i + y_j N_j + y_m \left(1 - N_i - N_j\right) \end{cases} \qquad (3.52)$$

（3） 在三角形顶点 ***i***，***j***，***m*** 处的面积坐标为：

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{i}\text{处} & N_i\left(x_i,y_i\right)=1,\quad N_j\left(x_i,y_i\right)=0,\quad N_m\left(x_i,y_i\right)=0 \\
\boldsymbol{j}\text{处} & N_i\left(x_j,y_j\right)=0,\quad N_j\left(x_j,y_j\right)=1,\quad N_m\left(x_j,y_j\right)=0 \\
\boldsymbol{m}\text{处} & N_i\left(x_m,y_m\right)=0,\quad N_j\left(x_m,y_m\right)=0,\quad N_m\left(x_m,y_m\right)=1
\end{cases}
$$

3.2 泛函的离散化与线性插值函数

采用面积坐标的优点在于泛函求积分时，可以化为对有关面积的积分，即由

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(N_i,N_j)}\right|\mathrm{d}N_i\mathrm{d}N_j=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial N_i} & \dfrac{\partial x}{\partial N_j}\\ \dfrac{\partial y}{\partial N_i} & \dfrac{\partial y}{\partial N_j}\end{vmatrix}\mathrm{d}N_i\mathrm{d}N_j$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial N_i}\frac{\partial y}{\partial N_j}-\frac{\partial x}{\partial N_j}\frac{\partial y}{\partial N_i}\right)\mathrm{d}N_i\mathrm{d}N_j$$

对式（**3.52**）求导，可得

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left[(x_i-x_m)(y_j-y_m)-(x_j-x_m)(y_i-y_m)\right]\mathrm{d}N_i\mathrm{d}N_j$$

$$=2\Delta\mathrm{d}N_\mathrm{i}dN_\mathrm{j}$$

几个有用的积分公式：

可求出下面常用的积分：

$$\begin{cases}\iint_e \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\Delta\int_0^1\int_0^{1-N_i}\mathrm{d}N_i dN_j = \Delta \\ \iint_e N_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\Delta\int_0^1 N_i\mathrm{d}N_i\int_0^{1-N_i}\mathrm{d}N_j = \dfrac{\Delta}{3} \\ \iint_e N_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\Delta\int_0^1 N_i^2 dN_i\int_0^{1-N_i}\mathrm{d}N_j = \dfrac{\Delta}{6} \\ \iint_e N_iN_j\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\Delta\int_0^1 N_i\mathrm{d}N_i\int_0^{1-N_i}N_j\mathrm{d}N_j = \dfrac{\Delta}{12}, i\neq j\end{cases} \qquad (3.55)$$

$$\Rightarrow \iint_e N_i^{\alpha}N_j^{\beta}N_m^{\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!}\times 2\Delta$$

推导中用到：$\iint N_i^{\alpha}N_j^{\beta}N_m^{\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_C N_i^{\alpha}N_j^{\beta}N_m^{\gamma}\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(N_i,N_j)}\mathrm{d}N_i\mathrm{d}N_j$

雅可比式（即变换矩阵的行列式）为：$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(N_i,N_j)} = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial N_i} & \dfrac{\partial x}{\partial N_j} \\ \dfrac{\partial y}{\partial N_i} & \dfrac{\partial y}{\partial N_j}\end{vmatrix}$

作业：

习题3.1。

补6：证明（**3.55**）式的几个特殊积分。

补7：证明 $N_i = \Delta_i / \Delta$ ，$N_j = \Delta_j / \Delta$ ，$N_m = \Delta_m / \Delta$ 。