第 2 次习题课题目解答

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 多元数量值函数的微分与偏导数

(1) 多元数量值函数的微分:

(a) 函数在一点的微分为函数在该点处的最佳线性逼近, 因此是一个线性函数.

(b) 可微蕴含连续, 但反之不对.

(c) 微分若存在, 则唯一.

(d) 线性函数在每点的微分均等于其本身.

(e) 记号 $\mathrm{d}x_j$ 的定义以及线性函数的微分表示.

(f) 多元数量值函数求微分的四则运算法则.

(2) 多元数量值函数的偏导数:

(a) 偏导数的定义及其几何意义.

(b) 若 f 在点 X_0 处可微, 则它在该点可导且 $\mathrm{d}f(X_0) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\,\mathrm{d}x_j$.

(c) 计算二元函数的微分的典型方法.

(d) **连续、可导、可微与连续可导的关系:** 连续可导蕴含可微, 可微蕴含可导, 但反过来不对; 连续与可导之间一般没有蕴含关系.

(e) 连续可导函数空间微 $\mathscr{C}^{(1)}(\Omega)$; 初等函数在 **其定义区域的内部** 连续可导.

2. 多元数量值函数的方向导数与梯度

(1) 多元数量值函数的方向导数:

(a) **方向导数的定义:** 方向导数为单侧极限, 所取的方向为单位向量. 因此沿着坐标轴的方向导数存在并不意味着偏导数存在.

(b) 若沿某坐标轴的偏导数存在, 则沿该轴正、反两方向的方向导数存在且互负.

(c) 函数在一点处沿任意方向均有方向导数, 并不意味着函数在该点可微.

(d) 若 f 在点 X_0 处可微, 则沿 $\vec{\ell} = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)^T$ 的方向导数存在且

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\cos\alpha_j.$$

(2) 多元数量值函数的梯度:

(a) **梯度的定义:** 称向量 $\vec{e}$ 为多元数量值函数 f 在点 X_0 处的梯度, 如果 f 在点 X_0 处沿 $\vec{e}$ 的方向导数的值最大, 并且该值等于 $\|\vec{e}\|$, 此时将 $\vec{e}$ 记作 $\mathrm{grad}f(X_0)$ 或 $\vec{\nabla} f(X_0)$, 也将之记作 $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(X_0)$.

(b) 若多元数量值函数 f 在点 X_0 处可微, 则 f 在该点的梯度为

$$\mathrm{grad}f(X_0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\Big)^T,$$

沿向量 $\vec{\ell}$ 的方向导数为 $\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}^0}(X_0) = \mathrm{grad}f(X_0)\cdot \vec{\ell}^0$.

(c) 梯度运算满足与单变量函数求导类似的四则运算及复合法则.

(d) **典型问题:** 求函数在一点的梯度与最大方向导数以及沿某向量的方向导数.

3. 高阶偏导数

(1) **二阶偏导数可交换次序的充分条件:**

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集. 若 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 在 Ω 上有二阶偏导函数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, 且当中一个在点 $X_0 \in \Omega$ 连续, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0)$.

(2) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 而 $k \geqslant 0$ 为整数. 记 $\mathscr{C}^{(k)}(\Omega)$ 为 Ω 上具有 k 阶连续偏导数的所有函数的集合.

(3) 设 $k \geqslant 2$ 为整数. 若 $f \in \mathscr{C}^{(k)}(\Omega)$, 则对任意整数 r $(1 \leqslant r \leqslant k)$, 均有 $f \in \mathscr{C}^{(r)}(\Omega)$ 并且 f 的任意 r 阶偏导数均与求偏导的次序无关.

第 2 部分 习题课题目解答

1. 选择题:

(1) 能推出函数 f 在点 (x_0,y_0) 可微且全微分 $\mathrm{d}f(x_0,y_0)=0$ 的条件是 (　):

A. $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$;

B. 函数 f 在 点(x_0,y_0) 处的增量 $\Delta f(x_0,y_0)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$;

C. 函数 f 在点 (x_0,y_0) 处的增量 $\Delta f(x_0,y_0)=\frac{\sin((\Delta x)^2+\Delta y^2)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$;

D. 函数 f 在点 (x_0,y_0) 处的增量 $\Delta f(x_0,y_0)=((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

(2) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 令 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$. 则函数 f 在点 $(0,0)$ 处 (　):

A. 连续但偏导数不存在;

B. 偏导数存在, 但函数 f 不可微;

C. 可微;

D. 连续可导.

(3) 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不可微, 则下列命题中一定不成立的是 (　):

A. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续;

B. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任何方向 $\vec{v}$ 的方向导数不存在;

C. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数都存在且连续;

D. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在且至少有一个不连续.

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续可导且在点 $(1,-2)$ 处的两个偏导数分别为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2)=1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,-2)=-1,$$

则函数 f 在点 $(1,-2)$ 处增加最快的方向是 (　):

A. $\vec{i}$;　B. $\vec{j}$;　C. $\vec{i}+\vec{j}$;　D. $\vec{i}-\vec{j}$.

(5) 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可导, 则 (　):

A. 函数 f 在点 P_0 处连续;

B. 一元函数 $f(x,y_0)$ 和 $f(x_0,y)$ 分别在点 x_0 和 y_0 处连续;

C. 函数 f 在点 P_0 处的微分为 $\mathrm{d}f(P_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,\mathrm{d}y$;

D. 函数 f 在点 P_0 处的梯度为 $\mathrm{grad}f(P_0)=(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0),\frac{\partial f}{\partial y}(P_0))^T$.

解: (1) 可导并不蕴含着可微. 故不能选 A. 又 $\mathrm{d}f(x_0,y_0)=0$ 当且仅当

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta f(x_0,y_0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

故只能选 D.

(2) 由偏导数的定义得 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. 若 f 在点 $(0,0)$ 处可微, 由微分的定义可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, 于是由复合函数的极限法则可得

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x\cdot x|}}{\sqrt{x^2+x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故 f 在点 $(0,0)$ 可导但不可微. 因此仅 B 成立.

(3) 由于连续可导蕴含着可微, 故选 C.

(4) 函数 f 在点 $(1,-2)$ 处增加最快的方向就是梯度方向, 而由题设可知

$$\mathrm{grad}f(1,-2)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\vec{i}-\vec{j}.$$

因此只能选 D.

(5) 由可导性与连续性, 可微性以及梯度的关系知, A, C, D 不一定成立, 而由偏导数的定义以及单变量函数的可导性蕴含连续性可知 B 成立.

2. 设 $f(x,y)=(x+y)\varphi(x,y)$, 其中 φ 在点 $(0,0)$ 处连续, 则

$$\mathrm{d}f(x,y)=\big(\varphi(x,y)+(x+y)\varphi'_x(x,y)\big)\,\mathrm{d}x+\big(\varphi(x,y)+(x+y)\varphi'_y(x,y)\big)\,\mathrm{d}y.$$

令 $x=0$, $y=0$, 那么 $\mathrm{d}f(0,0)=\varphi(0,0)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$.

(1) 指出上述推理当中的错误, (2) 写出正确的解法.

解: (1) 题目当中并没有假设函数 φ 可微.

(2) 由题设可知, 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $\varphi(x,y)=\varphi(0,0)+o(1)$, 于是

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(0,0)&=(x+y)\varphi(x,y)\\&=\varphi(0,0)x+\varphi(0,0)y+(x+y)o(1)\\&=\varphi(0,0)x+\varphi(0,0)y+\sqrt{x^2+y^2}o(1).\end{aligned}$$

由此可知 f 在点 $(0,0)$ 处可微且 $\mathrm{d}f(0,0)=\varphi(0,0)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 而 $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$. 如果

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(x_0,y_0)=-2,\ \frac{\partial f}{\partial\vec{u}}f(x_0,y_0)=1,$$

求函数 f 在点 (x_0,y_0) 处的微分, 其中 $\vec{i},\vec{j}$ 分别表示沿 x,y 轴的单位向量.

解: 由题设, 我们立刻可知

$$\begin{aligned} -2=\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) &= \operatorname{grad} f(x_0,y_0)\cdot\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \\ 1=\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0,y_0) &= \operatorname{grad} f(x_0,y_0)\cdot\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \end{aligned}$$

由此可得 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\sqrt{5}-2\sqrt{2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\sqrt{5}-4\sqrt{2}$. 于是

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=(\sqrt{5}-4\sqrt{2})\,\mathrm{d}x+(\sqrt{5}-2\sqrt{2})\,\mathrm{d}y.$$

4. 设 $D=[0,a]\times[0,b]$, $F{:}\,D\to\mathbb{R}$ 为函数. 求证: 存在函数 $f{:}\,[0,b]\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall(x,y)\in D$, 均有 $F(x,y)=f(y)$ 当且仅当 $\forall(x,y)\in D$, 均有 $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=0$.

证明: 必要性. 若存在 $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall(x,y)\in D$, 均有 $F(x,y)=f(y)$, 则由偏导数的定义立刻可知 $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=0$.

充分性. $\forall(x,y)\in D$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 $0,x$ 之间使得

$$F(x,y)-F(0,y)=x\frac{\partial F}{\partial x}(\xi,y)=0,$$

也即 $F(x,y)=F(0,y)$. 故所证成立.

5. 设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ 为开集, 而 $(x_0,y_0)\in\Omega$. 如果 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内可导且偏导数有界, 求证: 函数 f 在点 (x_0,y_0) 处连续.

证明: 由题设 $\exists r,M>0$ 使得 $B((x_0,y_0),\sqrt{2}r)\subseteq\Omega$ 且 f 在 $B((x_0,y_0),\sqrt{2}r)$ 上可导, 并且 $\forall(x,y)\in B((x_0,y_0),\sqrt{2}r)$, 我们均有

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|\leqslant M,\ \Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|\leqslant M.$$

$\forall(x,y)\in B((x_0,y_0),r)$, 由 Lagrange 中值定理可知, 存在 ξ 介于 x_0,x 之间, 存在 η 介于 y_0,y 之间使得

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x_0,y) &= (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y), \\ f(x_0,y)-f(x_0,y_0) &= (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta). \end{aligned}$$

因 $|\xi-x_0|<r$, $|y-y_0|<r$, $|\eta-y_0|<r$, 则 $(\xi,y),(x_0,\eta)\in B((x_0,y_0),\sqrt{2}r)$, 故

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(x_0,y_0)| &\leqslant |f(x,y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)| \\ &= \Big|(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\Big|+\Big|(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta)\Big| \\ &\leqslant M|x-x_0|+M|y-y_0|. \end{aligned}$$

于是由夹逼原理可知函数 f 在点 (x_0,y_0) 处连续.

6. 设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ 为开集, $(x_0,y_0)\in\Omega$, 而 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 为函数. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ 存在且 f 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内关于 y 有偏导数, 该偏导函数在点 (x_0,y_0) 处连续, 求证: 函数 f 在点 (x_0,y_0) 处可微.

证明: 由题设可知 $\exists r>0$ 使得 $B((x_0,y_0),r)\subseteq\Omega$, 且 f 在 $B((x_0,y_0),r)$ 上有偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}$, 后者还在点 (x_0,y_0) 连续. 由偏导数的定义、Lagrange 中值定理、夹逼原理以及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在点 (x_0,y_0) 处的连续性可知, 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$,

$$\begin{aligned}
& f(x,y)-f(x_0,y_0)=\big(f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\big)+\big(f(x,y)-f(x,y_0)\big)\\
= & \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+o(1)\Big)(x-x_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta(y-y_0))\\
= & \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+o(1)\Big)(x-x_0)+\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+o(1)\Big)(y-y_0)\\
= & (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\big(o(x-x_0)+o(y-y_0)\big)\\
= & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+o(1)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},
\end{aligned}$$

其中 $\theta\in(0,1)$. 因此函数 f 在点 (x_0,y_0) 处可微.

7. 假设 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 在点 $X_0\in\mathbb{R}^3$ 可微, 而 $\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2,\vec{\ell}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中互相垂直的单位向量, 求证: 在点 X_0 处, 我们有

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_2}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_3}\Big)^2=\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)^2.$$

证明: 对任意整数 $1\leqslant j\leqslant 3$, 记 $\vec{\ell}_j=(a_{1j},a_{2j},a_{3j})^T$, 则在点 X_0 处,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_1} &= a_{11}\frac{\partial f}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial f}{\partial y}+a_{13}\frac{\partial f}{\partial x},\\
\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_2} &= a_{21}\frac{\partial f}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial f}{\partial y}+a_{23}\frac{\partial f}{\partial x},\\
\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_3} &= a_{31}\frac{\partial f}{\partial x}+a_{32}\frac{\partial f}{\partial y}+a_{33}\frac{\partial f}{\partial x}.
\end{aligned}$$

令 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. 因 $\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2,\vec{\ell}_3$ 为正交的单位向量, 则 A 为正交矩阵, 故

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_2}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_3}\Big)^2 &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_1}\\ \frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_2}\\ \frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_3}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_1}\\ \frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_2}\\ \frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_3}\end{pmatrix}=\left(A\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}\right)^T A\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}^T A^TA\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}=\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)^2.
\end{aligned}$$

8. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 其余.\end{cases}$$

问 f 是否有二阶偏导数?

解: 由于 f 在 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上为初等函数, 故它在该集合上有二阶偏导数. 另外, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

又由偏导数的定义可得 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. 注意到极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\Big(2\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}\Big)$$

不存在, 因此 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ 不存在.

9. 设 $D=[0,a]\times[0,b]$, 而函数 $F:D\to\mathbb{R}$ 关于第二个变量的偏导数 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 存在. 求证*: 存在函数* $g:[0,a]\to\mathbb{R}$, $h:[0,b]\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall (x,y)\in D$, 我们均有 $F(x,y)=g(x)+h(y)$ 当且仅当 $\forall (x,y)\in D$, 均有 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=0$.

证明: **必要性.** 假设存在两个 $g:[0,a]\to\mathbb{R}$, $h:[0,b]\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall (x,y)\in D$, 均有 $F(x,y)=g(x)+h(y)$, 则 $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=h'(y)$, 进而可得 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=0$.

充分性. $\forall (x,y)\in D$, 定义 $\varphi(x,y)=F(x,y)-F(0,y)$. 由 Lagrange 中值定理可知, 存在 ξ 介于 $0,x$ 之间使得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial F}{\partial y}(0,y)=x\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(\xi,y)=0.$$

同样由 Lagrange 中值定理可知, 存在 η 介于 $0,y$ 之间使得

$$\big(F(x,y)-F(0,y)\big)-\big(F(x,0)-F(0,0)\big)=\varphi(x,y)-\varphi(x,0)=y\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,\eta)=0,$$

于是 $F(x,y)=\big(F(x,0)-F(0,0)\big)+F(0,y)$. 故所证结论成立.

10. 假设 $D=[0,a]\times[0,b]$, 而 $u\in\mathscr{C}^{(2)}(D)$ 使得 $\forall (x,y)\in D$, 均有 $u(x,y)\neq0$. 求证*: 存在* $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, $g:[0,b]\to\mathbb{R}$ 使 $\forall (x,y)\in D$, $u(x,y)=f(x)g(y)$ 当且仅当在 D 上, 成立 $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

证明: 由于 D 为连通集, 而 u 在 D 上连续且恒不为零, 则由连续函数介值定理可知 u 在 D 上恒为正或恒为负. 不失一般性, 我们可假设 u 在 D 上恒为正, 否则可以考虑 $-u$.

必要性. 假设存在两个函数 $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, $g:[0,b]\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall(x,y)\in D$, 均有 $u(x,y)=f(x)g(y)$. 由于 $u\in\mathscr{C}^{(2)}(D)$, 则 f,g 可导且 $\forall(x,y)\in D$, 成立

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=f'(x)g(y)f(x)g'(y)=u(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y).$$

充分性. 假设 $\forall(x,y)\in D$, 均有 $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=u(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)$. $\forall(x,y)\in D$, 定义 $F(x,y)=\log u(x,y)$. 则 $F\in\mathscr{C}^{(2)}(D)$ 且 $\forall(x,y)\in D$, 均有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{1}{u(x,y)}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\big)\\ &= \frac{1}{(u(x,y))^2}\Big(u(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\Big)=0.\end{aligned}$$

故存在 $p:[0,a]\to\mathbb{R}$, $q:[0,b]\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall(x,y)\in D$, $F(x,y)=p(x)+q(y)$. 此时令 $f(x)=e^{p(x)}$, $g(y)=e^{q(y)}$, 则 $u(x,y)=e^{F(x,y)}=f(x)g(y)$.

11. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}(1-e^{-xy}), & 若\ x\neq 0,\\ y, & 若\ x=0.\end{cases}$ 考察函数 f 的连续性、可微性以及连续可导性, 并给出理由.

解: 令 $D=(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$, 则 D 为开集, 并且 f 在 D 上为初等函数, 于是 f 在 D 上连续可导, 从而可微. 另外, $\forall(x,y)\in D$, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x^2}\big((1+xy)e^{-xy}-1\big),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{-xy}.$$

固定 $y_0\in\mathbb{R}$. 下面我们将证明 f 在点 $(0,y_0)$ 处连续可导.

由偏导数的定义以及 L'Hospital 法则可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-xy_0}-xy_0}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{y_0e^{-xy_0}-y_0}{2x}=-\frac{1}{2}y_0^2,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) &= \lim_{y\to y_0}\frac{f(0,y)-f(0,y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{y-y_0}{y-y_0}=1.\end{aligned}$$

由此可知, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 我们有 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{-xy}$, 因此 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在点 $(0,y_0)$ 处连续. 下证 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 亦在点 $(0,y_0)$ 处连续.

当 $(x,y)\to(0,y_0)$ 且 $x\neq 0$ 时, 由带 Peano 余项的 Taylor 公式可知,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{x^2}\big((1+xy)e^{-xy}-1\big)=\frac{y(e^{-xy}-1)}{x}+\frac{1}{x^2}(e^{-xy}-1+xy)\\ &= \frac{y(-xy+o(xy))}{x}+\frac{1}{x^2}\big(\frac{1}{2}(xy)^2+o((xy)^2)\big)\\ &= -y^2+y^2o(1)+\frac{1}{2}y^2+y^2o(1)=-\frac{1}{2}y^2+o(1)\\ &= -\frac{1}{2}y_0^2+o(1)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)+o(1).\end{aligned}$$

而当 $(x,y)\to(0,y_0)$ 且 $x=0$ 时, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}y_0^2+o(1)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)+o(1),$$

于是当 $(x,y)\to(0,y_0)$ 时, 总有 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)+o(1)$, 即 f 在点 $(0,y_0)$ 连续可导, 进而可知 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可导, 从而可微, 因此连续.

注: 也可直接证明连续性. 由于 f 在 D 上为初等函数, 因此 f 在 D 上连续.

下面固定 $y_0\in\mathbb{R}$, 并证明 f 在点 $(0,y_0)$ 处连续.

当 $(x,y)\to(0,y_0)$ 且 $x\neq 0$ 时, 由带 Peano 余项的 Taylor 公式可知,

$$f(x,y)\ =\ \frac{xy+o(xy)}{x}=y+yo(1)=y_0+o(1)=f(0,y_0)+o(1).$$

而当 $(x,y)\to(0,y_0)$ 且 $x=0$ 时, 则有 $f(x,y)=y=y_0+o(1)=f(0,y_0)+o(1)$. 于是函数 f 在点 $(0,y_0)$ 处连续, 进而可知 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.