微积分 A (1)

姚家燕

第 26 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

第 25 讲回顾: 广义积分的定义及性质

- 各种形式的广义积分的定义, 奇点.
- 广义积分的性质: 形式上与定积分的相同.
- 典型例子: (1) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛当且仅当 $p > 1$, 而 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛当且仅当 $p < 1$; (2) $\int_1^{+\infty} \log x \,\mathrm{d}x$ 发散, 而 $\int_0^1 \log x \,\mathrm{d}x$ 收敛.
- 非负函数的比较法则及其推论.

第 26 讲

例 2. 判断 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,\mathrm{d}x$ 的敛散性. 如果收敛, 则计算其值.

解: 当 $x\to 0^+$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\log\sin x &= \log x + \log\frac{\sin x}{x}\\ &= \left(1+\frac{\log\frac{\sin x}{x}}{\log x}\right)\log x\\ &= \big(1+o(1)\big)\log x,\end{aligned}$$

由此立刻可得 $-\log\sin x \sim -\log x\ (x\to 0^+)$.

大家可注意到

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\log x\right) \mathrm{d}x &= x(1-\log x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2}\Big(1-\log\frac{\pi}{2}\Big),\end{aligned}$$

故广义积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\log\sin x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 从而广义积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,\mathrm{d}x$ 也收敛. 下面来计算其值.

利用变量替换, 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,\mathrm{d}x \overset{x=2t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin 2t)\,\mathrm{d}(2t)$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \big(\log 2 + \log\sin t + \log\cos t\big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2}\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t\,\mathrm{d}t \overset{t=\frac{\pi}{2}-u}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\Big(\frac{\pi}{2}-u\Big)\,\mathrm{d}\Big(\frac{\pi}{2}-u\Big)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin u\,\mathrm{d}u = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t\,\mathrm{d}t.$$

于是我们就有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2}\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t\,\mathrm{d}t,$$

由此可得 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\log 2.$

例 3. 判断 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 当 $x \to +\infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \log \sin \frac{1}{x} &= \left(1 + \frac{\log \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{\log \frac{1}{x}}\right) \log \frac{1}{x} \\ &= \big(1 + o(1)\big) \log \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

于是我们有 $-\log \sin \frac{1}{x} \sim \log x \ (x \to +\infty)$.

当 $x > e$ 时, 我们有 $\log x > 1$, 从而广义积分

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log x \, \mathrm{d}x$$

发散, 进而可知广义积分

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \Big(-\log \sin \frac{1}{x} \Big) \, \mathrm{d}x$$

发散, 故广义积分 $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ 也发散.

例 4. 判断 $\int_1^{+\infty}\log(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 由变量替换可得

$$\int_1^{+\infty}\log(\sin\tfrac{1}{x}+\cos\tfrac{1}{x})\,\mathrm{d}x \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \int_0^1 \frac{1}{y^2}\log(\sin y+\cos y)\,\mathrm{d}y,$$

另外, 由 L'Hospital 法则可知, 我们也有

$$\begin{aligned}\lim_{y\to0^+}\frac{\frac{1}{y^2}\log(\sin y+\cos y)}{\frac{1}{y}} &= \lim_{y\to0^+}\frac{1}{y}\log(\sin y+\cos y)\\ &= \lim_{y\to0^+}\frac{\cos y-\sin y}{\sin y+\cos y}=1,\end{aligned}$$

而 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{y}$ 发散, 故 $\int_1^{+\infty}\log(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 发散.

定理 3. 设函数 $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ 在 $[a,\omega)$ 的任意闭子区间上均为可积. 如果 $\int_a^\omega |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

证明: $\forall A\in[a,\omega)$, 我们定义

$$F(A)=\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x,\ G(A)=\int_a^A |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

由题设可知 $\lim\limits_{A\to\omega^-} G(A)$ 收敛, 则由 Cauchy 判断准则知, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists c \in [a,\omega)$ 使 $\forall A_1, A_2 \in [c,\omega)$, 均有 $|G(A_1) - G(A_2)| < \varepsilon$. 由此立刻可得

$$
\begin{aligned}
|F(A_1) - F(A_2)| &= \left| \int_{A_2}^{A_1} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \left| \int_{A_2}^{A_1} |f(x)|\,\mathrm{d}x \right| = |G(A_1) - G(A_2)| < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

于是由 Cauchy 判断准则可知 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

定义 2. 设函数 $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ 在 $[a,\omega)$ 的任意闭子区间上均可积.

(1) 如果广义积分 $\int_a^\omega |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则称广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(2) 如果广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛但不为绝对收敛, 则称广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

注: 如果广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 为绝对收敛, 则由定理 3 可知 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 但反过来不对.

定理 4. (积分第二中值定理) 如果 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 而 g 在 $[a,b]$ 上单调, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 我们只考虑 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 且 $g \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$ 这一特殊情形. $\forall t \in [a,b]$, 定义

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则 $F \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 且 $F' = f$.

于是由分部积分公式可得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

又 g 单调, 故 g' 不变号, 从而由广义积分第一中值定理可知, $\exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= F(b)g(b) - F(\xi)\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= g(a)F(\xi) + g(b)(F(b) - F(\xi)),\end{aligned}$$

因此所证结论成立.

定理 5. 设 $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ 在 $[a, \omega)$ 的任意的闭子区间上均可积.

(1) (Abel 判别准则) 如果 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 并且函数 g 单调有界, 则 $\int_a^\omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) (Dirichlet 判别准则) $\forall A \in [a, \omega)$, 定义

$$F(A) = \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

如果 F 有界, 而函数 g 单调并且 $\lim\limits_{x \to \omega^-} g(x) = 0$, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证明: (1) 由于函数 g 有界, 因此 $\exists M > 0$ 使得 $\forall x \in [a, \omega)$, 均有 $|g(x)| < M$. 又 $\int_a^{\omega} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 由 Cauchy 判别准则知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c \in [a, \omega)$ 使得 $\forall A_1, A_2 \in [c, \omega)$, 均有 $|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x| < \frac{\varepsilon}{2M}$. 又由积分第二中值定理可知存在 ξ 介于 A_1, A_2 使得

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

由此我们立刻可得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant |g(A_1)|\left|\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + |g(A_2)|\left|\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

于是由 Cauchy 判别准则可知所证结论成立.

(2) 由题设可知, $\exists K>0$ 使得 $\forall x\in[a,\omega)$, 均有 $|F(x)|<K$. 又 $\lim\limits_{x\to\omega^-}g(x)=0$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists c\in[a,\omega)$ 使得 $\forall x\in[c,\omega)$, $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4K}$. $\forall A_1,A_2\in[c,\omega)$, 由积分第二中值定理可知, 存在 ξ 介于 A_1,A_2 之间使得我们有

$$\int_{A_1}^{A_2}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(A_1)\int_{A_1}^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x+g(A_2)\int_{\xi}^{A_2}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此立刻可得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant |g(A_1)|\cdot|F(\xi) - F(A_1)| + |g(A_2)|\cdot|F(A_2) - F(\xi)|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4K}\cdot(2K) + \frac{\varepsilon}{4K}\cdot(2K) = \varepsilon.$$

于是由 Cauchy 判别准则可知所证结论成立.

例 5. 讨论 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性与绝对收敛性.

解: $\forall x \geqslant 1$, 令 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$. $\forall A \geqslant 1$,

$$\left| \int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x \right| = |\cos 1 - \cos A| \leqslant 2,$$

而 g 单调下降且 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. 则由 Dirichlet 判断准则可知广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 下面我们将证明广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散.

事实上, $\forall x \geqslant 1$, 我们有

$$\frac{|\sin x|}{x} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

借助 Dirichlet 判别准则同样可以证明广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 但是 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 从而由比较法则可知广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ 也发散. 因此广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 为条件收敛.

作业题: 第 6.2 节第 205 页第 4 题第 (1), (4), (5), (11) 小题, 第 5 题第 (2), (4), (9) ($p > \frac{1}{2}$), (11) 小题, 第 206 页第 9 题第 (1), (3), (4) 小题.

补充题: 设 $p > 0$. 问广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

何时绝对收敛? 何时条件收敛?

注: 当 $p \leqslant 0$ 时, 可证明上述广义积分发散.

Euler 积分 (Γ 函数)

考虑广义积分 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$, 其中 $s\in\mathbb{R}$, 我们称 $\Gamma(s)$ 为 Euler Gamma 函数.

定理 6. Gamma 函数 $\Gamma(s)$ 收敛当且仅当 $s>0$.

证明: 由广义积分的定义可知

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2+s-1}e^{-x}=0$, 并且广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛, 因此广义积分 $\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 于是只需要研究广义积分 $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

当 $x\to 0^+$ 时, 我们有 $x^{s-1}e^{-x}\sim x^{s-1}$, 而广义积分 $\int_0^1 x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $1-s<1$, 也即 $s>0$. 于是 $\Gamma(s)$ 收敛当且仅当 $s>0$.

命题 1. $\forall s>1$, 均有 $\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)$.

证明: 利用分部积分, 我们有

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\,\mathrm{d}(-e^{-x}) \\ &= -x^{s-1}e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + (s-1)\int_0^{+\infty} x^{s-2}e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= (s-1)\Gamma(s-1).\end{aligned}$$

推论. 对任意整数 $n\geqslant 0$, 均有 $\Gamma(n+1)=n!$.

命题 2. **(余元公式)** $\forall s \in (0,1)$, 均有

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi}.$$

特别地, 我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x e^x}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

例 6. 考虑广义积分

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}} \, \mathrm{d}x$$ (黎曼 zeta 函数).

注意到

$$\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}} \sim x^{s-1}e^{-x} \ (x \to +\infty),$$
$$\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}} \sim x^{s-2} \ (x \to 0^+)$$

于是广义积分 $\zeta(s)$ 收敛当且仅当 $s > 1$.

可以证明，当 $s>1$ 时，我们有

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}.$$

不严格的证明: $\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-x})^n\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{n}\right)^{s-1}e^{-y}\,\mathrm{d}\left(\frac{y}{n}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Euler 积分 (B 函数)

$\forall p, q \in \mathbb{R}$, 考虑广义积分

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x.$$

注意到

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1} \ (x \to 0^+),$$
$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1} \ (x \to 1^-),$$

于是广义积分 $B(p,q)$ 收敛当且仅当 $p, q > 0$.

命题 3. $\forall p, q > 0$, 我们有

(1) $B(p,q) = B(q,p)$,

(2) $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$,

(3) $B(p+1,q) = \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} = \frac{p}{p+q}B(p,q)$.

作业题: 利用 Euler 积分计算下列积分:

(1) $\int_0^{+\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-4x}\,\mathrm{d}x$, (2) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{3}}}}$,

(3) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, 其中 $n > 1$ 为整数.

第 6 章总复习

- 各种形式的广义积分的定义, 奇点.
- 广义积分的性质: 与定积分的完全类似.
- 敛散性: Cauchy 准则, 比较法则 (绝对收敛), Abel-Dirichlet 准则 (变号积分, 条件收敛).
- 重要的比较函数: $\frac{1}{x^p}$, $\log x$, $\frac{\log x}{x^p}$.
- 绝对收敛与条件收敛: 二者关系.
- Γ 函数与 Beta 函数: 递推, 余元, 二者关系.

综合练习

例 1. 设 $n \geqslant 0$ 为整数. $\forall t > 0$, 计算

$$I_n(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2n}\,\mathrm{d}x.$$

解: 由变量替换可得

$$I_n(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2n}\,\mathrm{d}x \overset{u=tx^2}{=\!=} \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{t}\right)^n \mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{u}{t}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}-n}\int_0^{+\infty} u^{n-\frac{1}{2}}e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}-n}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}-n}\cdot\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}t^{\frac{1}{2}+n}}\cdot\sqrt{\pi}.$$

例 2. 判断广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 当 $x \to 0^+$ 时, 我们有

$$\log\sin x = \left(1 + \frac{\log\frac{\sin x}{x}}{\log x}\right)\log x \sim \log x,$$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{\log x}{\sqrt{x}}}{x^{-\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{6}}\log x = 0$, 于是 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\left|\frac{\log\sin x}{\sqrt{x}}\right|}{x^{-\frac{2}{3}}} = 0$,

而广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则由比较法则可知

广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

例 3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 定义 $F(x) = \int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

(1) 求证: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 广义积分 $F(x)$ 收敛.

(2) 求证: $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0$.

(3) 若令 $F(0) = 0$, 求 $F'(0)$.

解: 方法 1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 我们有

$$F(x) = -\int_0^x t^2 \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{t}\Big) = -\int_0^x t^2\,\mathrm{d}\Big(\sin\frac{1}{t}\Big)$$

$$= -t^2 \sin\frac{1}{t}\Big|_0^x + \int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -x^2\sin\frac{1}{x} + \int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

由此立刻可知广义积分 $F(x)$ 收敛且

$$\begin{aligned}|F(x)| &\leqslant x^2 + \left|\int_0^x 2t\left|\sin\frac{1}{t}\right|\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant x^2 + \left|\int_0^x 2t\,\mathrm{d}t\right| = 2x^2.\end{aligned}$$

由夹逼原理立刻可得 $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$, 以及

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x} = 0.$$

若令 $F(0) = 0$, 则 $F'(0) = 0$.

方法 2. (1) 被积函数为偶函数, 则 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 均有 $F(-x) = -F(x)$, 故我们只需考虑 $x > 0$ 的情形. 此时我们有

$$F(x) = \int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \overset{u=\frac{1}{t}}{=} \int_{+\infty}^{\frac{1}{x}} \cos u\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{u}\right) = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

由于 $\frac{|\cos u|}{u^2} \leqslant \frac{1}{u^2}$, 而广义积分 $\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ 收敛, 于是由比较法则可知广义积分 $F(x)$ 收敛.

(2) 由 (1) 可知, $\forall x > 0$, 我们有

$$|F(x)| \leqslant \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{|\cos u|}{u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = x.$$

由于 F 为奇函数, 则 $\forall x < 0$, 我们也有

$$|F(x)| = |-F(-x)| \leqslant -x = |x|.$$

于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0$.

(3) 由 (1) 可知, $\forall x > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} \mathrm{d}u = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\sin u)}{u^2} \\ &= \left. \frac{\sin u}{u^2} \right|_{\frac{1}{x}}^{+\infty} + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{2 \sin u}{u^3} \mathrm{d}u \\ &= -x^2 \sin \frac{1}{x} + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{2 \sin u}{u^3} \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

由此立刻可得

$$|F(x)| \leqslant x^2 + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{2}{u^3}\,\mathrm{d}u = x^2 + \Big(-\frac{1}{u^2}\Big)\Big|_{\frac{1}{x}}^{+\infty} = 2x^2.$$

由于 F 为奇函数, 则 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 均有

$$|F(x)| \leqslant 2x^2.$$

于是若令 $F(0) = 0$, 则由夹逼原理可知

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = 0.$$

例 4. 假设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微, 并且 $\forall x \in [0,+\infty)$, 均有 $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$.

(i) 求证 $\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 若 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)+f'(x)}$ 收敛, 求证 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$ 收敛.

证明: (i) 由于 $\forall x \in [0,+\infty)$, 我们有 $f'(x) > 0$, 则 f 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增, 故 $\frac{1}{f}$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递减且大于 0, 从而由单调有界定理可知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}$ 存在且有限, 进而可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{f(x)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{f(0)} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}.$$

$\forall x \geqslant 0$, 我们均有

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)+f'(x)} &= \frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))} \\
&\leqslant \frac{f'(x)}{(f(x))^2},
\end{aligned}
$$

于是由 (i) 以及比较法则可知广义积分

$$
\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)+f'(x)}\right) \mathrm{d}x
$$

收敛, 进而可知广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$ 收敛.

例 5. 求证: 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 广义积分

$$\int_0^{+\infty} \left(\log \left(1 + \frac{1}{x^p}\right) - \frac{1}{1 + x^p} \right) \mathrm{d}x$$

收敛.

证明: 由广义积分的定义可知

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\log \left(1 + \frac{1}{x^p}\right) - \frac{1}{1 + x^p} \right) \mathrm{d}x \\ = & \int_0^{1} \left(\log \left(1 + \frac{1}{x^p}\right) - \frac{1}{1 + x^p} \right) \mathrm{d}x \\ & + \int_1^{+\infty} \left(\log \left(1 + \frac{1}{x^p}\right) - \frac{1}{1 + x^p} \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\log\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}\right)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1 \log(1+x^p)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 \log x^p\,\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^p},
\end{aligned}$$

其中仅第二个积分为广义积分. 但

$$\int_0^1 \log x^p\,\mathrm{d}x=\int_0^1 p\log x\,\mathrm{d}x=px(\log x-1)\Big|_0^1=-p$$

收敛. 故 $\int_0^1 \left(\log\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}\right)\mathrm{d}x$ 收敛.

另外，当 $x \to +\infty$ 时，我们有

$$\log\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}=\frac{1}{x^p}-\frac{1}{2x^{2p}}+o\Big(\frac{1}{x^{2p}}\Big)-\frac{1}{x^p}\frac{1}{1+\frac{1}{x^p}}$$
$$=\frac{1}{x^p}-\frac{1}{2x^{2p}}+o\Big(\frac{1}{x^{2p}}\Big)-\frac{1}{x^p}\Big(1-\frac{1}{x^p}+o\Big(\frac{1}{x^p}\Big)\Big)$$
$$=\frac{1}{2x^{2p}}+o\Big(\frac{1}{x^{2p}}\Big)=\frac{1}{2x^{2p}}\big(1+o(1)\big).$$

由于 $p>\frac{1}{2}$，于是广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x^{2p}}$ 收敛，从而广义积分 $\int_1^{+\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}\right)\mathrm{d}x$ 也收敛，因此所证结论成立.

例 6. 已知 $0 < a < b$ 且 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解: 由分部积分可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2})\,\mathrm{d}(-\frac{1}{x})$$

$$= -\frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x}\Bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{-2a^2xe^{-a^2x^2} + 2xb^2e^{-b^2x^2}}{x}\mathrm{d}x$$

$$= -2a\int_0^{+\infty} e^{-(ax)^2}\,\mathrm{d}(ax) + 2b\int_0^{+\infty} e^{-(bx)^2}\,\mathrm{d}(bx)$$

$$= -2a \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 2b \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}(b-a).$$

例 7. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

解: $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \overset{x=\tan t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\tan t)}{(\tan^2 t+1)^{\frac{3}{2}}}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{(\sec^2 t)^{\frac{3}{2}} \cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t$$

$$= \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

例 8. 判断 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}$ 的敛散性.

解: 由广义积分的定义可知

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}.$$

下面针对 m 分情况讨论.

情况 1: $m\leqslant\frac{1}{2}$. 则 $\forall x\geqslant 1$, 均有 $\frac{1}{\sqrt{x}+x^m}\geqslant\frac{1}{2\sqrt{x}}$, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$ 为发散, 于是由比较法则立刻可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}$ 发散, 进而可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}$ 发散.

情况 2: $m > \frac{1}{2}$. 此时我们有

$$\frac{1}{\sqrt{x}+x^m} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\ (x \to 0^+),\quad \frac{1}{\sqrt{x}+x^m} \sim \frac{1}{x^m}\ (x \to +\infty).$$

又 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^m}$ 收敛当且仅当 $m > 1$, 则由比较法则可知广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}$ 收敛当且仅当 $m > 1$.

综上可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}$ 收敛当且仅当 $m > 1$.

例 9. 求证: $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_1^2 \frac{\cos(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = 0.$

证明: $\forall a > 1$, 由变量替换可得

$$\int_1^2 \frac{\cos(ax)}{x}\,\mathrm{d}x \overset{y=ax}{=} \int_a^{2a} \frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y.$$

$\forall y > 1$, 定义 $g(y) = \frac{1}{y}$, 则 g 单调递减且

$$\lim_{y\to+\infty} g(y) = 0.$$

又 $\forall A \geqslant 1$, 我们有

$$\Big|\int_1^A \cos y\,\mathrm{d}y\Big| = |\sin A - \sin 1| \leqslant 2,$$

则由 Dirichlet 判别准则可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y$ 收敛，由此我们立刻可得

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^2\frac{\cos(ax)}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\int_a^{2a}\frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\left(\int_1^{2a}\frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y-\int_1^{a}\frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y\right)$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y-\int_1^{+\infty}\frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y=0.$$

例 10. 请问 $\int_1^{+\infty}(\sin x)(\sin\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 是否条件收敛?

解: $\forall x\geqslant 1$, 定义 $g(x)=\sin\frac{1}{x}$, 则 g 单调递减且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. 又 $\forall A\geqslant 1$, 我们有

$$\left|\int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x\right| = |\cos 1-\cos A|\leqslant 2,$$

则由 Dirichlet 准则可知 $\int_1^{+\infty}(\sin x)(\sin\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 收敛. 当 $x\to+\infty$ 时, $|(\sin x)(\sin\frac{1}{x})|\sim\frac{|\sin x|}{x}$, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 由比较法则知 $\int_1^{+\infty}(\sin x)(\sin\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

例 11. 请问 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ 是否条件收敛?

解: 由于 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}y$, 而

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}y = \int_0^{1} \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}y + \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}y,$$

且 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1$, 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}y$ 为条件收敛, 因此 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ 为条件收敛.

谢谢大家!