第 12 次作业题

1. 计算下列广义积分:

(1) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$, (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$,
(3) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$, (4) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$,
(5) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$, (6) $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

解: (1) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3(1+\frac{1}{x^2})} = -\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{x^2})\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\log 2$.

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\arctan x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}(\tan t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\frac{1}{\cos^3 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t = (t\sin t + \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$.

(5) **方法 1.** $\int_{-\infty}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} \overset{x=-\sec t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}(-\sec t)}{(-\sec t)\sqrt{\sec^2 t-1}} = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t}{\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}}$
$= -t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{6}$.

方法 2. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} \overset{x=-t}{=} \int_{+\infty}^{2} \frac{\mathrm{d}(-t)}{-t\sqrt{t^2-1}} = -\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1-(\frac{1}{t})^2}}$
$= \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\frac{1}{t})}{\sqrt{1-(\frac{1}{t})^2}} = \arcsin\frac{1}{t}\Big|_2^{+\infty} = -\frac{\pi}{6}$.

(6) $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\,\mathrm{d}x \overset{x=\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}(\sin t)$
$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin t)\,\mathrm{d}t$
$= t + \cos t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi$.

2. 判断下列广义积分的敛散性:

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, (2) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$,
(3) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^{-1}}-1}{x^p\log(1+x^{-2})}\,\mathrm{d}x$, (4) $\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\log x}$,
(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^p}\,\mathrm{d}x$, (6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$,
(7) $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos\sqrt{2x}-\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ $(p > \frac{1}{2})$, (8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(\sin^p x)(\cos^q x)}$.

解: (1) $\forall t \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{\arctan x}{x^2} \leqslant \frac{\pi}{2x^2}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) **方法 1.** 利用变量替换和分部积分可得

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x}\,\mathrm{d}x \overset{y=x^2}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}(\sqrt{y}) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{2y}\,\mathrm{d}y$$
$$= -\frac{\sin y}{2y}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{2y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sin 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{2y^2}\,\mathrm{d}y,$$

又 $\forall y \geqslant 1$, 均有 $\frac{|\sin y|}{2y^2} \leqslant \frac{1}{2y^2}$, 而广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2y^2}\,\mathrm{d}y$ 收敛, 从而由比较法则可知广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{2y^2}\,\mathrm{d}y$ 绝对收敛, 从而广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

方法 2. 由变量替换可得 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(x^2)}{x}\,\mathrm{d}x\overset{y=x^2}{=}\int_1^{+\infty}\frac{\cos y}{2y}\,\mathrm{d}y$. $\forall y\geqslant 1$, 定义 $f(y)=\cos y$, $g(y)=\frac{1}{2y}$. 则 $\forall A\geqslant 1$, 均有 $\left|\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x\right|=|\sin A-\sin 1|\leqslant 2$, 而 g 单调递减且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, 于是由 Dirichlet 判断准则可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos y}{2y}\,\mathrm{d}y$ 收敛, 从而 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$ 亦收敛.

(3) 当 $x\to+\infty$ 时, 成立 $\frac{\sqrt{1+x^{-1}}-1}{x^p\log(1+x^{-2})}\sim\frac{\frac{1}{2}x^{-1}}{x^p\cdot x^{-2}}=\frac{1}{2x^{p-1}}$, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^{p-1}}\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p>2$, 从而广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+x^{-1}}-1}{x^p\log(1+x^{-2})}\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p>2$.

(4) 由于 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\log x}\overset{x=u+1}{=}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\log(1+u)}$, 而当 $u\to 0^+$ 时, 成立 $\frac{1}{\log(1+u)}\sim\frac{1}{u}$, 另外广义积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{u}$ 发散, 于是由比较法则可知广义积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\log x}$ 发散.

(5) 由定义可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x^p}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\log(1+x^2)}{x^p}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x^p}\,\mathrm{d}x$.

当 $x\to 0^+$ 时, $\frac{\log(1+x^2)}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-2}}$, 而广义积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^{p-2}}$ 收敛当且仅当 $p<3$, 由比较法则可知广义积分 $\int_0^1\frac{\log(1+x^2)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p<3$.

下面证明广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p>1$.

事实上, 若 $p>1$, 则 $x\to+\infty$ 时, 成立 $\frac{\frac{\log(1+x^2)}{x^p}}{\frac{1}{x^{1+\frac{p-1}{2}}}}=\frac{\log(1+x^2)}{x^{\frac{p-1}{2}}}\to 0$, 而广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\frac{p-1}{2}}}$ 收敛, 由比较法则知广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

若 $p\leqslant 1$, 则 $\forall x\geqslant e$, 均有 $\frac{\log(1+x^2)}{x^p}\geqslant\frac{1}{x}$, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 于是由比较法则可知广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 发散.

综上所述可知广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $1<p<3$.

(6) 由定义可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$.

当 $x\to 0^+$ 时, 我们有 $\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\sim\frac{x}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, 而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 于是由比较法则可知广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$ 收敛. $\forall x\geqslant\frac{\pi}{2}$, 定义 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$. 则 $\forall A\geqslant\frac{\pi}{2}$, 均有 $\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^A f(x)\,\mathrm{d}x\right|=|\cos A|\leqslant 1$, 而 g 单调递减且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, 于是由 Dirichlet 判断准则可知 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

综上所述可知广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(7) $\forall x\geqslant 1$, 定义 $g_p(x)=\frac{1}{x^p}$. 则 g_p 单调递减且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g_p(x)=0$.

$\forall A\geqslant 1$, 我们有 $\left|\int_1^A\sin x\,\mathrm{d}x\right|=|\cos A-\cos 1|\leqslant 2$, 于是由 Dirichlet 判别准则可知广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 注意到

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos\sqrt{2x}}{x^p}\,\mathrm{d}x\overset{y=\sqrt{2x}}{=}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2^p\cos y}{y^{2p-1}}\,\mathrm{d}y,\ \left|\int_{\sqrt{2}}^A\cos y\,\mathrm{d}y\right|=|\sin A-\sin\sqrt{2}|\leqslant 2,$$

而当 $p>\frac{1}{2}$ 时, 函数 g_{2p-1} 单调递减且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g_{2p-1}(x)=0$, 从而由 Dirichlet 判别准则知广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos\sqrt{2x}}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 又 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛当且仅当 $p>1$. 于是由广义积分的线性性可知, 当 $p>1$ 时, 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos\sqrt{2x}-\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时, 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos\sqrt{2x}-\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 发散.

(8) 由广义积分的定义可知

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(\sin^p x)(\cos^q x)} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{(\sin^p x)(\cos^q x)}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(\sin^p x)(\cos^q x)}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{(\sin^p x)(\cos^q x)}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{(\cos^p x)(\sin^q x)}.\end{aligned}$$

当 $x\to 0^+$ 时, 我们有 $\frac{1}{(\sin^p x)(\cos^q x)}\sim\frac{1}{x^p}$, $\frac{1}{(\cos^p x)(\sin^q x)}\sim\frac{1}{x^q}$, 又 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛当且仅当 $p<1$, 而 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{x^q}$ 收敛当且仅当 $q<1$, 故广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(\sin^p x)(\cos^q x)}$ 收敛当且仅当 $p,q<1$.

3. 考察下列广义积分的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$, (2) $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$,

(3) $\int_1^{+\infty}x\big(\arctan\frac{2}{x}-\arctan\frac{1}{x}\big)\,\mathrm{d}x$, (4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

解: (1) $\forall x\geqslant 1$, 令 $g(x)=\frac{1}{x^p}$, 则 g 单调递减且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$. 又 $\forall A\geqslant 1$,

$$\big|\int_1^A\sin x\,\mathrm{d}x\big|=|\cos A-\cos 1|\leqslant 2,$$

于是由 Dirichlet 判别准则可知广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 注意到 $\forall x\geqslant 1$, 均有 $\frac{|\sin x|}{x^p}\leqslant\frac{1}{x^p}$, 而广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛当且仅当 $p>1$, 因此当 $p>1$ 时, 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

下面证明, 当 $0<p\leqslant 1$ 时, 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 发散. 事实上, $\forall x\geqslant 1$,

$$\frac{|\sin x|}{x^p}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1}{2x^p}-\frac{\cos(2x)}{2x^p}.$$

又 $\forall A\geqslant 1$, 我们有

$$\big|\int_1^A\cos(2x)\,\mathrm{d}x\big|=\frac{1}{2}|\sin(2A)-\sin 2|\leqslant 1,$$

由 Dirichlet 判别准则知广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{2x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 但广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x^p}$ 发散, 从而广义积分 $\int_1^{+\infty}\big(\frac{1}{2x^p}-\frac{\cos(2x)}{2x^p}\big)\,\mathrm{d}x$ 也发散, 进而再由比较法则可知广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 发散.

于是 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 在 $p>1$ 时绝对收敛, 而在 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛.

(2) 由广义积分的定义以及变量替换可得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\sin(x^2)\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\sin(x^2)\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

而广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$ 条件收敛, 因此 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$ 也为条件收敛.

(3) 当 $x \to +\infty$ 时, 我们有

$$x\big(\arctan\frac{2}{x} - \arctan\frac{1}{x}\big) = x\arctan\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}} = x\arctan\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x^2}} \sim 1,$$

而 $\int_1^{+\infty} 1\,\mathrm{d}x$ 发散, 由比较法则可知 $\int_1^{+\infty} x\big(\arctan\frac{2}{x} - \arctan\frac{1}{x}\big)\,\mathrm{d}x$ 发散.

(4) $\forall x \geqslant 1$, 定义 $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$, 则 g 可导且 $\forall x \geqslant 1$, 我们有

$$g'(x) = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \leqslant 0,$$

于是 g 递减并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. 又 $\forall A \geqslant 1$, 均有

$$\big|\int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x\big| = |\cos A - \cos 1| \leqslant 2,$$

于是由 Dirichlet 判别准则可知 $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 由广义积分的定义知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}\,\mathrm{d}x,$$

因此广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 当 $x \to +\infty$ 时, 我们有

$$\frac{\sqrt{x}|\sin x|}{x+1} \sim \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}},$$

而广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 发散, 从而由比较法则可知 $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}|\sin x|}{x+1}\,\mathrm{d}x$ 发散.

综上所述可知广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ 为条件收敛.

4. 利用 Euler 积分计算下列积分:

(1) $\int_0^{+\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-4x}\,\mathrm{d}x$, (2) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{3}}}}$, (3) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, 其中 $n > 1$ 为整数.

解: (1) $\int_0^{+\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-4x}\,\mathrm{d}x \overset{y=4x}{=} \frac{1}{32}\int_0^{+\infty} y^{\frac{3}{2}} e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{32} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{32} = \frac{3\sqrt{\pi}}{128}$.

(2) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{3}}}} \overset{y=x^{\frac{1}{3}}}{=} \int_0^1 3y^2(1-y)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = 3B(3,\frac{1}{2}) = \frac{3\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{16}{5}$.

(3) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}} \overset{y=x^n}{=} \frac{1}{n}\int_0^1 y^{\frac{1}{n}-1}(1-y)^{-\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{n}B(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n})$

$= \frac{\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(1-\frac{1}{n})}{n\Gamma(1)} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$.