微积分 A (1)

姚家燕

第 15 讲

在听课过程中,

严禁使用任何电子产品!

期中考试内容、时间及地点

内容: 第 1、2、3、4 章

时间: 11 月 14 日星期六晚 19:20–21:20

地点: 待定

重要提示: 考试时需且只需带学生证和文具!

千万不要迟到或无故缺考!

考前答疑: 11 月 13 日星期五晚 18:00-20:00

考前答疑地点: 理科楼数学科学系 A 216

第 14 讲回顾: 微分中值定理

- 如果函数 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导且使得 $f(a)=f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.
- 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 而 $\xi \in (a,b)$ 则等价于 $\exists \theta \in (0,1)$ 使得 $\xi = \theta a + (1-\theta)b$.
- 若函数 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 那么 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得我们有
$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(\xi) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(\xi).$$
- 上述三定理等价.

- 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 则 f 为常值函数当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) = 0$.
- 若函数 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导且使得 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) = g'(x)$, 那么 $\exists C \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $f(x) = g(x) + C$.
- 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导且 f' 恒不为零, 则 f 严格单调且其反函数可导.

回顾: 微分中值定理的典型应用

- $\forall x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$, 均有
$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x.$$
- $\forall x, y \in [-1, 1]$, 我们有
$$|\arcsin x - \arcsin y| \geqslant |x - y|.$$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 均有 $e^x > 1 + x$.
- $f'(x) = f(x)$ 当且仅当 $f(x) = ce^x$.

回顾: L'Hospital 法则

- 设 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, 而 $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ 为可导函数, g' 恒不为零且
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$
如果我们有 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$, 或者 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$, 则 $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$.
- 不定型极限包括: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. 但这些均可转化成第一种情形.

第 15 讲

例 1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

解: $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

例 2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$.

例 3. 若 f 在 $(a,+\infty)$ 内可导且

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f'(x)+f(x)\right)=A\in\mathbb{R},$$

求证: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$

证明: $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^x}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)e^x+f(x)e^x}{e^x}=A,$$

进而再利用题设条件可得 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$

例 4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{x^a}\ (a>0)$.

解: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{ax^a}=0.$

作业题: 第 4.2 节第 100 页第 2 题第 (2), (5), (19), (20) 小题, 第 101 页第 4 题.

§3. Taylor 公式

定理 1. (多项式逼近的唯一性)

设 $n \geqslant 1$ 为整数, $x_0 \in \mathbb{R}$, $B(x_0)$ 为 x_0 的邻域, $f : B(x_0) \to \mathbb{R}$ 为函数, 而 P_n, Q_n 为次数 $\leqslant n$ 的多项式使得当 $x \to x_0$ 时, 均有

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + o((x - x_0)^n), \\ f(x) &= Q_n(x) + o((x - x_0)^n), \end{aligned}$$

则我们有 $P_n = Q_n$.

证明: 由题设可知, 当 $x \to x_0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + o((x-x_0)^n), \\ f(x) &= Q_n(x) + o((x-x_0)^n). \end{aligned}$$

由此立刻可得, 当 $x \to x_0$ 时, 我们有

$$P_n(x) - Q_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

由题设可知存在 $a_j \in \mathbb{R}$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ 使得

$$P_n(x) - Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x-x_0)^j.$$

下面证明 $a_j = 0\ (0 \leqslant j \leqslant n)$. 用反证法, 假设上述结论不成立, 则可找到最小的整数 d 使得 $0 \leqslant d \leqslant n$ 且 $a_d \neq 0$. 则 $a_j = 0\ (0 \leqslant j < d)$, 故

$$\begin{aligned}
a_d &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sum_{j=d}^{n} a_j (x - x_0)^j}{(x - x_0)^d} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j (x - x_0)^j}{(x - x_0)^d} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^d} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)^n o(1)}{(x - x_0)^d} \\
&= \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{n-d} o(1) = 0.
\end{aligned}$$

矛盾! 故所证结论成立.

定理 2. (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

假设 $n \geqslant 1$ 为整数, $x_0 \in \mathbb{R}$, $B(x_0)$ 为 x_0 的邻域, 函数 $f: B(x_0) \to \mathbb{R}$ 为 $n-1$ 阶可导且在点 x_0 为 n 阶可导. 则当 $x \to x_0$ 时,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

注: 令 $r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, 则该定理等价于说 $\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. 通常将 $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 叫作 f 在点 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式.

证明: 由于 r_n 为 $n-1$ 阶可导, $r_n^{(n)}(x_0)$ 存在且

$$r_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0),$$

故 $r_n^{(n-1)}(x_0) = 0 = r_n^{(n)}(x_0)$. 由 L'Hospital 法则,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \frac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

因此所证结论成立.

注: 当 $x_0 = 0$ 时, 该公式也称为 Maclaurin 公式.

二者可通过变换 $x \mapsto x - x_0$ 联系起来.

带 Peano 余项的基本 Taylor 公式

当 $x \to 0$ 时，我们有

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
- $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$, $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$.
- $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$.
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

例 1. 求 $f(x) = \sin^2 x$ 的 Maclaurin 展式.

解: 当 $x \to 0$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} + o\big((2x)^{2n}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k} + o\big(x^{2n}\big).
\end{aligned}
$$

例 2. 求函数 $f(x) = \frac{1}{1+x-x^2}$ 在点 $x_0 = \frac{1}{2}$ 的一般 Taylor 多项式.

解: 令 $t = x - \frac{1}{2}$, 则我们有

$$f(x) = \frac{1}{1+(t+\frac{1}{2})-(t+\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{5}{4}-t^2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{5}t^2}.$$

于是所求一般 Taylor 多项式为

$$\frac{4}{5}\sum_{k=0}^{n}(\tfrac{4}{5}t^2)^k = \sum_{k=0}^{n}(\tfrac{4}{5})^{k+1}(x-\tfrac{1}{2})^{2k}.$$

作业题: 第 4.3 节第 108 页第 4 题第 (3) 小题.

例 3. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}$.

解:
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^3}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(-\frac{1}{3}+o(1)\right)}{x^3}\\
=&-\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

例 4. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{n^2}$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\log\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\log\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\right)^3+o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)}{\frac{1}{n}}-1\right)=-\frac{1}{6},$$

因此我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{n^2}=e^{-\frac{1}{6}}$.

例 5. 计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\sin^2 x}-\cos(2\sqrt{x})-2x}{x^2}$.

解: $$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\sin^2 x}-\cos(2\sqrt{x})-2x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\Big(\big(1+\sin^2 x+o(\sin^2 x)\big)$$
$$-\big(1-\frac{1}{2!}(2\sqrt{x})^2+\frac{1}{4!}(2\sqrt{x})^4+o(x^2)\big)-2x\Big)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\Big(\sin^2 x-\frac{2}{3}x^2\Big)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

例 6. 求 $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ 使得极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax^k}-\cos x^2}{x^8}$ 存在且有限, 随后计算该极限.

解: 当 $x \to 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
\cos x^2 &= 1 - \frac{1}{2!}(x^2)^2 + \frac{1}{4!}(x^4)^2 + o(x^8), \\
e^{ax^k} &= 1 + ax^k + \frac{1}{2!}(ax^k)^2 + o(x^{2k}), \\
e^{ax^k} - \cos x^2 &= ax^k + \frac{a^2}{2}x^{2k} + o(x^{2k}) \\
&\quad + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4!}x^8 + o(x^8).
\end{aligned}$$

于是由题设可知, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^k}-\cos x^2}{x^8}\cdot x^4 \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{ax^k+\frac{a^2}{2}x^{2k}+o(x^{2k})+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4!}x^8+o(x^8)}{x^4} \\ &= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{ax^k+\frac{a^2}{2}x^{2k}+o(x^{2k})}{x^4}. \end{aligned}$$

由此立刻可得 $k=4$, $a=-\frac{1}{2}$, 从而我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^k}-\cos x^2}{x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^8}\Big(-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{8}x^8+o(x^8)$$
$$+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4!}x^8+o(x^8)\Big)=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{1}{12}.$$

例 7. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$.

解: 由题设可知

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36,
\end{aligned}
$$

进而我们可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$.

例 8. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(2\sqrt{x})-2x}{x^2}$.

解: 由带 Peano 余项的 Taylor 展式得

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(2\sqrt{x})-2x}{x^2} \\
= & \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\left(1-\frac{1}{2!}(2\sqrt{x})^2+\frac{1}{4!}(2\sqrt{x})^4(1+o(1))\right)-2x}{x^2} \\
= & \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{2}{3}x^2(1+o(1))}{x^2} \\
= & -\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

定理 2. (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)

假设 $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathscr{C}^{(n)}[a,b]$ 在 (a,b) 上 $n+1$ 阶可导, 那么 $\forall x_0, x \in [a,b]$ $(x_0 \neq x)$, 存在 ξ 严格介于 x_0, x 之间使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中称余项 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 Lagrange 余项. 通常也将 ξ 写成 $x_0+\theta(x-x_0)$, $\theta \in (0,1)$.

证明: 不失一般性, 设 $x > x_0$. $\forall t \in [x_0, x]$, 令

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,\ G(t) = (x-t)^{n+1}.$$

则 $F \in \mathscr{C}[x_0, x]$ 在 (x_0, x) 上可导. $\forall t \in [x_0, x]$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\ &\quad -\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \cdot (-1) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n, \end{aligned}$$

$G'(t) = -(n+1)(x-t)^n$. 又 $F(x) = G(x) = 0$,

则由 Cauchy 中值定理可知, $\exists \xi \in (x_0, x)$ 使得

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

即 $F(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} G(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

故所证结论成立.

推论. 如果 $f \in \mathscr{C}^{(n)}[a,b]$ 在 (a,b) 上的 $n+1$ 阶导数恒为零, 则 f 为次数不超过 n 的多项式.

带 Lagrange 余项的基本 Taylor 公式 $(0 < \theta < 1)$

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$.
- $\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin(\theta x)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$.
- $\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin(\theta x)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.
- $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$.
- $$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}.$$

例 11. $\forall x \in \mathbb{R}$, 求证: $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$.

证明: 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可得知,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists \theta \in (0,1)$ 使得

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^{\theta x}}{4!} x^4 \\ &\geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}. \end{aligned}$$

故所证结论成立.

例 12. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 若 $x \neq y$, 求证:

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos y\right| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $f(x) = \sin x$, 那么 f 为初等函数, 因此为无穷可导. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 当 $x \neq y$ 时, 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知, 存在 ξ 严格介于 x, y 之间使得我们有

$$f(x) = f(y) + f'(y)(x - y) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - y)^2.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin y + (x-y)\cos y \\ &\quad -\frac{1}{2}(x-y)^2\sin\xi,\end{aligned}$$

由此我们可立刻导出

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin x - \sin y}{x-y} - \cos y\right| &= \frac{1}{2}|(x-y)\sin\xi| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|x-y|.\end{aligned}$$

例 13. 若 $f \in \mathscr{C}^{(2)}[-1,1]$ 在 $(-1,1)$ 上三阶可导, 并且使得 $f(1)=1$, $f(-1)=0$, $f'(0)=0$, 求证: $\exists \xi \in (-1,1)$ 使得 $f'''(\xi)=3$.

证明: 由带 Lagrange 余项的 Maclaurin 展式知, 存在 $\xi_1 \in (-1,0)$, $\xi_2 \in (0,1)$ 使得我们有

$$
\begin{aligned}
f(-1) &= f(0) - f'(0) + \frac{1}{2!}f''(0) - \frac{1}{3!}f'''(\xi_1), \\
f(1) &= f(0) + f'(0) + \frac{1}{2!}f''(0) + \frac{1}{3!}f'''(\xi_2),
\end{aligned}
$$

由此我们立刻可得

$$f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6,$$

进而由 Darboux 定理可知 $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)) = 3.$$

因此所证结论成立.

作业题: 第 4.3 节第 109 页第 9 题.

函数的增减性

定理 1. 设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导. 则

(1) 函数 f 递增当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \geqslant 0$;

(2) 函数 f 递减当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \leqslant 0$.

证明: (1) 充分性. 若 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) \geqslant 0$, 那么 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, 当 $x_2 > x_1$ 时, 由 Lagrange 中值定理可知, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant 0,$$

因此函数 f 为单调递增.

必要性. 设 f 单调递增, 则 $\forall x \in (a,b)$, 由导数定义以及函数极限保号性可知

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0.$$

故所证结论成立.

(2) 对 $-f$ 应用 (1) 结论立刻可知所证成立.

注: 由前面证明可知, 若 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) > 0$, 则 f 在 $[a,b]$ 上严格递增, 但其逆命题不成立. 例如 $f(x) = x^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增, 但 $f'(0) = 0$.

定理 2. 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 (a,b) 内可导, 则 f 严格递增当且仅当 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $f'(x) \geqslant 0$ 且 f' 在 (a,b) 的任意子区间上不恒为零.

证明: 充分性. 假设 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \geqslant 0$ 且 f' 在 (a,b) 的任意子区间上不恒为零. 则 f 递增. 如果 f 不为严格递增, 则 $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ 使得 $x_1 < x_2$, 但 $f(x_1) = f(x_2)$, 于是 f 在 $[x_1, x_2]$ 上取常值, 故 f' 在 (x_1, x_2) 上恒为零, 矛盾! 因此函数 f 为严格递增.

必要性. 如果 f 严格递增, 则 $\forall x \in (a, b)$, 均有 $f'(x) \geqslant 0$. 另外, 对于任意的子区间 $I \subseteq (a, b)$, 必存在 $x_1, x_2 \in I$ 使得 $x_1 < x_2$. 又由 Lagrange 中值定理可知, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得我们有

$$f'(\xi) = \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0,$$

因此 f' 在 I 上不恒为零.

定理 2'. 如果 $f \in \mathscr{C}[a, b]$ 在 (a, b) 内可导, 则 f 严格递减当且仅当 $\forall x \in (a, b)$, 均有 $f'(x) \leqslant 0$ 且 f' 在 (a, b) 的任意子区间上不恒为零.

如何研究 (初等) 函数的单调性?

- 函数 f 的导数为零的点称为 f 的驻点.
- 驻点和导数不存在的点称为临界点.

确定 (初等) 函数单调性的具体步骤

- 计算导数, 找出临界点.
- 以临界点为端点来分割函数的定义域.
- 判断导函数在每个子区间的符号, 由此确定函数的单调性.

例 1. 求函数 $f(x)=x^4-2x^2$ 的单调区间.

解: 因函数 f 为初等函数, 故可导且

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1),$$

从而 f 的驻点为 $-1,0,1$. 由于 f' 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$ 上取负号, 而在 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 上取正号, 因此 f 在 $(-\infty,-1]$ 和 $[0,1]$ 上为严格递减, 而在 $[-1,0]$ 和 $[1,+\infty)$ 上为严格递增.

例 2. 求函数 $f(x)=\frac{x}{3}-x^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间.

解: 函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上可导, 而 $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 均有 $f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. 则 f 的驻点为 8, 其临界点为 $0, 8$. 由于 f' 在 $(-\infty,0)$ 和 $(8,+\infty)$ 上取正号, 于是函数 f 在 $(-\infty,0]$ 和 $[8,+\infty)$ 上严格递增. 同样因 f' 在 $(0,8)$ 上取负号, 故 f 在该区间上严格递减.

例 3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 求证: $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$, 则 f 为初等函数, 因此为无穷可导且

$$f'(x) = -\sin x + x.$$

于是 f' 在 $(0, +\infty)$ 上取正号, 而在 $(-\infty, 0)$ 上取负号, 从而函数 f 在 $[0, +\infty)$ 上为严格递增, 而在 $(-\infty, 0]$ 上为严格递减, 则 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 我们有 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$.

谢谢大家!