# 线性映射

颜文斌

清华大学

# 内容提要

- **线性映射和矩阵**
- 线性映射的性质
- 换基
- 若当标准型
- 对偶空间与直和、直积
- 张量

# 映射（mapping）

- **映射**：$S$，$S'$是两个集合，如果对于任意$S$中的元素，都有一个$S'$中的元素和它对应，这个对应就叫一个映射
- $S$叫做**定义域**，$S'$叫做**陪域**
- 如果我们把一个映射记做$f: S \to S'$。$u$是$S$中的一个元素，$f(u)$叫做$u$在映射$f$下的**像**（image）。$W$是$S$中的一个子集，$f(W)$叫做$W$在映射$f$下的**像**。$f(S)$叫做**值域**
- 映射的**复合**（composition）：$f: U \to V, g: V \to W$。
$$g \circ f: U \to W, \forall\, x \in U, \qquad g \circ f(x) = g(f(x))$$
- 映射的复合满足**结合律**：$g \circ f \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$

# 映射

- **原像**：映射$F: S \to S'$， $y$的原像$F^{-1}(y)$是集合$\{x \in S | F(x) = y\}$
- **单射**（injection）：映射$F: S \to S'$是单射，如果$\forall\, x, y \in S, x \neq y, \mathrm{s.t.}\, F(x) \neq F(y)$
- **满射**（surjection）：映射$F: S \to S'$是满射，如果$F(S) = S'$
- **双射**（bijection）：既是单射也是满射的映射
- **恒等映射**（identity map）：$I_S: S \to S, \mathrm{s.t.} \forall\, x \in S, I_S(x) = x$
- **逆映射**（inverse map）：对于映射$F: S \to S'$如果存在一个映射$G: S' \to S$使得$G \circ F = I_S$和$F \circ G = I_{S'}$，则称映射$F: S \to S'$**可逆**，$G$被称作$F$的**逆**

# 可逆映射的性质

- **定理**：映射$f: S \to S'$可逆当且仅当$f$是双射
- 证明：
  - 首先假设$x, y \in S$，$g: S' \to S$是 $f$的逆
  - 如果$f(x) = f(y)$，则$x = g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big) = y$，所以$f$是单射
  - $\forall\, z \in S'$，我们有$f\big(g(z)\big) = z$，所以$\exists\, x = g(z), \mathrm{s.t.}\, f(x) = z$，所以$f$是满射。这样我们就从左边推出了右边
  - 接下来假设$f: S \to S'$是双射，那么因为$f$是满射$\forall\, z \in S'$，我们有$x \in S, \mathrm{s.t.}\, f(x) = z$。又因为$f$是单射，所以$x$是唯一的。所以可以定义$g(z) = x$，则$g$是$f$的逆映射。这样我们就从右边推出了左边

# 线性映射（linear mapping）

- **定义（线性映射）**：$V$，$W$是两个（实）线性空间，映射$T: V \to W$是（实）线性映射，如果$T$满足以下两个条件

1. 对于任意的$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$，有$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$
2. 对于任意的实数$c$，有$T(c\boldsymbol{u}) = cT(\boldsymbol{u})$

- 线性映射也被称为**线性变换**（linear transformation）
- **推论**：$T: V \to W$是线性映射，则$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

# 线性映射例

- 例1：$\boldsymbol{a}=(1,2,3), \boldsymbol{v}=(x,y,z)$。映射$T(v)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$是从$\mathbb{R}^3$到$\mathbb{R}$的线性映射
- 例2：$T(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}+b$不是线性的，因为0没有映到0
- 例3：$T(\boldsymbol{v})=\|\boldsymbol{v}\|$不是线性的，因为$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|\le\|\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{w}\|$，而且$\|-\boldsymbol{v}\|=\|\boldsymbol{v}\|$
- 例4：假设$T(\boldsymbol{v})$是线性映射，$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{v}_r=\mathbf{0}$，则$T(c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{v}_r)=c_1T(\boldsymbol{v}_1)+\cdots+c_rT(\boldsymbol{v}_r)=\mathbf{0}$

# 线性映射例

- 例5：考虑所有可导函数$f(x)$构成的线性空间，映射$T(f)=\frac{df}{dx}$是线性的
  - $\frac{d}{dx}\big(af(x)+bg(x)\big)=a\frac{df(x)}{dx}+b\frac{dg(x)}{dx}$
- 例6（恒等映射）：$\mathrm{id}: V \to V$, $\mathrm{id}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}$
- 例7（零映射）：$\forall\, \boldsymbol{u} \in V, T(\boldsymbol{u})=0$
- 例8：考虑mxn的矩阵$A$，定义线性映射$L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，使得$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，$L_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$

# 怎么决定线性映射？

- **定理**：$V$和$W$是线性空间，$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$是$V$中的一组基，$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$是$W$中的任意n个元素。则存在唯一的线性映射$T: V \rightarrow W$使得
$$T(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1, \cdots, T(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{w}_n$$
- **证明（存在性）**：
  - $\forall\, \boldsymbol{v} \in V$， $\boldsymbol{v}$可以唯一写成$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$的线性组合$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$
  - 定义映射$T(\boldsymbol{v}) = c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{w}_n$，下面证明$T(\boldsymbol{v})$是线性映射
  - $T(c\boldsymbol{v}) = T(cc_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + cc_n\boldsymbol{v}_n) = cc_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + cc_n\boldsymbol{w}_n = cT(\boldsymbol{v})$
  - 假设$\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$，$T(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = T((c_1+x_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (c_n+x_n)\boldsymbol{v}_n) = (c_1+x_1)\boldsymbol{w}_1 + \cdots + (c_n+x_n)\boldsymbol{w}_n) = T(\boldsymbol{v}) + T(\boldsymbol{u})$

# 怎么决定线性映射？

- **定理**：$V$和$W$是线性空间，$\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$是$V$中的一组基，$\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_n\}$是$W$中的任意n个元素。则存在唯一的线性映射$T: V\to W$使得
$$T(\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{w}_1,\cdots,T(\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{w}_n$$
- **证明（唯一性）**：
  - 假设存在另一个线性映射$F: V\to W$使得$F(\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{w}_1,\cdots,F(\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{w}_n$
  - $\forall\, \boldsymbol{v}\in V$，，　$\boldsymbol{v}$可以唯一写成$\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$的线性组合$\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n$
  - $F(\boldsymbol{v})=c_1F(\boldsymbol{v}_1)+\cdots+c_nF(\boldsymbol{v}_n)=c_1\boldsymbol{w}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{w}_n=c_1T(\boldsymbol{v}_1)+\cdots+c_nT(\boldsymbol{v}_n)=T(\boldsymbol{v})$

# 怎么决定线性映射？

- **定理**：$V$和$W$是线性空间，$\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$是$V$中的一组基，$\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_n\}$是$W$中的任意n个元素。则存在唯一的线性映射$T{:}\,V\to W$使得
$$T(\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{w}_1,\cdots,T(\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{w}_n$$
- 只要知道一个线性映射在基上的值，就唯一决定了整个线性映射

# 线性映射和表示矩阵

- 考虑mxn的矩阵，定义线性映射$L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，使得$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$
- 定理：mxn矩阵$A$、$B$，如果$L_A = L_B$，则$A = B$
- 证明：
  - 根据$L_A, L_B$定义可知$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$，所以$(A - B)\boldsymbol{x} = 0$，也就是说$N(A - B) = \mathbb{R}^n$
  - 又由矩阵子空间的维度关系可知$\mathrm{rank}(A - B) = 0$，所以$A - B = 0$，也就是说$A = B$

# 线性映射和表示矩阵（标准基版本）

- **定理**：设$L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是线性映射，则存在唯一的矩阵$A$使得$L = L_A$
- 证明：
  - 假设$\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$是$\mathbb{R}^n$中的标准基，$\{\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$是$\mathbb{R}^m$中的标准基，任何$\mathbb{R}^n$中的向量$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
  - $L(\boldsymbol{x}) = x_1 L(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n L(\boldsymbol{e}_n)$
  - 因为$L(\boldsymbol{e}_i)$是$\mathbb{R}^m$中的向量，所以可以写成$\{\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$的线性组合，也就是说$L(\boldsymbol{e}_i) = a_{1i}\boldsymbol{f}_1 + \cdots + a_{mi}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{m}}$

# 线性映射和矩阵（标准基版本）

- **定理**：设$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是线性映射，则存在唯一的矩阵$A$使得$L = L_A$
- 证明（续）：
  - 因为$L(\boldsymbol{e}_i)$是$\mathbb{R}^m$中的向量，所以可以写成$\{\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_m}\}$的线性组合，也就是说$L(\boldsymbol{e}_i) = a_{1i}\boldsymbol{f}_1 + \cdots + a_{mi}\boldsymbol{f}_m$
  - $L(\boldsymbol{x}) = x_1 L(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n L(\boldsymbol{e}_n) = x_1(a_{11}\boldsymbol{f}_1 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{f}_m) + \cdots + x_n(a_{1n}\boldsymbol{f}_1 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{f}_m) = (a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n)\boldsymbol{f}_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n)\boldsymbol{f}_m = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n \end{bmatrix}$
  - $L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = L_A(\boldsymbol{x})$。我们证明了存在性，唯一性由之前定理保证

# 线性映射和矩阵（标准基版本）

- **定理**：设$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是线性映射，则存在唯一的矩阵$A$使得$L = L_A$
- 说明：$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$，给出了矩阵和向量乘法的自然定义

# 例

- 例1:$F(x,y,z)=(x,y)$，对应的矩阵为$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$
- 例2:id: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，对应的矩阵为单位矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

# 内容提要

- 线性映射和矩阵
- **线性映射的性质**
- 换基
- 若当标准型
- 对偶空间与直和、直积
- 张量

# 线性映射的加法

- $T: V \to W$，$F: V \to W$为两个线性映射，我们定义这两个线性映射的**和**为一个新的线性映射$H = T + F: V \to W$，满足$\forall\, \boldsymbol{u} \in V$，$(T + F)(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{u}) + F(\boldsymbol{u})$
- $T + F$也是一个线性映射
- 例：$L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x},\ L_B(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$
  - $(L_A + L_B)(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} = (A + B)\boldsymbol{x} = L_{A+B}(\boldsymbol{x})$
- 利用线性映射和矩阵的对应，线性映射的加法等价于矩阵的加法
- 加法的零元：零映射$\forall\, \boldsymbol{u} \in V, T(\boldsymbol{u}) = 0$
- 加法的逆：$(-T)(\boldsymbol{u}) = -T(\boldsymbol{u})$，$(-T) + T$是零映射

# 线性映射的数乘

- $T: V \to W$为线性映射，我们定义这线性映射和$c$的**数乘**为一个新的线性映射$F = cT: V \to W$，满足$\forall\, \boldsymbol{u} \in V$，$(cT)(\boldsymbol{u}) = c(T(\boldsymbol{u}))$
- $cT$也是一个线性映射
- 例：$L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$
  - $(cL_A)(\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x} = L_{cA}(\boldsymbol{x})$
- 利用线性映射和矩阵的对应，线性映射的数乘等价于矩阵的数乘
- $1T = T$，$-T = (-1)T$

# 线性映射构成线性空间

- **性质**：所有从$V \to W$的线性映射集合$\{T\}$构成一个线性空间
  - 加法和数乘按照之前的定义
  - 加法零元是零映射
  - 满足线性空间的所有8条公理（交换律、结合律、分配律等等）
- 和dimW x dimV的矩阵构成的线性空间有一一对应

# 线性映射的核（Kernel）

- **定义**：线性映射$F: V \to W$的核$\mathrm{Ker}\, F$是所有满足$F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$的向量$\boldsymbol{v}$的集合
- **性质**：$\mathrm{Ker}\, F$是$V$中的一个线性子空间
- 说明：如果$V = \mathbb{R}^n$，$W = \mathbb{R}^m$，矩阵$A$为$F$对应的矩阵，则$\mathrm{Ker}\, F = N(A)$

# 核和单射

- **性质**：$F\colon V \to W$是线性映射，以下两个条件是等价的
  1. $\mathrm{Ker}\, F$只有零向量
  2. $F$是单射，换句话说，如果$V$中的元素$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$满足$F(\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{w})$，则$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$
- 证明：
  - （矩阵版本）对应的矩阵零空间是0， $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$如果有解则必有唯一解。
  - （抽象版本）假设$V$中的元素$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$满足$F(\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{w})$，则$F(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{v}) - F(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}$
  - 因为假设，$\mathrm{Ker} F$只有零向量，则$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$

# 核的性质

- **定理**：$F\colon V \to W$是线性映射且$\mathrm{Ker}\, F = \{\mathbf{0}\}$。如果$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$是$V$中的线性无关向量，则$F(\boldsymbol{v}_1), \cdots, F(\boldsymbol{v}_n)$是$W$中线性无关的向量
- 证明：
  - （矩阵版本）对应矩阵的零空间为$\{\mathbf{0}\}$，所以列满秩，列之间线性无关
  - （抽象版本）假设$x_1F(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + x_nF(\boldsymbol{v}_n) = 0$
  - 根据线性性，$F(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = 0$
  - 又因为$\mathrm{Ker}F = \{\mathbf{0}\}$，则$x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = 0$
  - $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$是线性无关的，则$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$，所以$F(\boldsymbol{v}_1), \cdots, F(\boldsymbol{v}_n)$线性无关

# 线性映射的像（image）

- **定义**：线性映射$F: V \to W$的像$\mathrm{Im}F$是$W$中所有在$V$中有原像的向量的集合（$\forall\, \boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}F, \exists\, \boldsymbol{v} \in V, s.t. F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$）
- 性质： $\mathrm{Im}F$是$W$中的线性子空间
- 说明：如果$V = \mathbb{R}^n$， $W = \mathbb{R}^m$，矩阵$A$为$F$对应的矩阵，则$\mathrm{Im}F = C(A)$

# 像和核的关系

- **定理**：$V$是一个线性空间，$L: V \to W$是一个线性映射，则
$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L$$
- 证明：
  - （矩阵版本）$\dim V = \dim N(A) + \dim C(A^T) = \dim N(A) + \dim C(A)$
  - （抽象版本）如果$\operatorname{Im} L = \{0\}$，则$\operatorname{Ker} L = V$，则定理成立
  - 否则假设$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s\}$是$\operatorname{Im} L$的一组基。设$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s\}$分别是$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s\}$的一个原像，也就是说$L(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$，$i = 1, \cdots, s$
  - 另，如果$\operatorname{Ker} L \neq \{0\}$，假设$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_q\}$是$\operatorname{Ker} L$的一组基
  - 如果我们能证明$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_q\}$是$V$中的一组基，则定理得证

# 像和核的关系

- **定理**：$V$是一个线性空间，$L: V \to W$是一个线性映射，则
$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L$$
- 证明：
  - 如果我们能证明$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_q\}$是$V$中的一组基，则定理得证
  - 首先要证明任何一个$V$中的向量可以写成$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_q\}$的线性组合
  - $\forall\, \boldsymbol{v} \in V, L(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} L$，所以$L(\boldsymbol{v}) = x_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{w}_s$
  - 因为$L(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$，所以$L(x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{v}_s) = x_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{w}_s = L(\boldsymbol{v})$
  - 所以$L(\boldsymbol{v}) - L(x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{v}_s) = L(\boldsymbol{v} - (x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{v}_s)) = 0$
  - $\boldsymbol{v} - (x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{v}_s) \in \operatorname{Ker} L$，可以写成$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_q\}$的线性组合
  - 所以$\boldsymbol{v} - (x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{v}_s) = y_1u_1 + \cdots + y_qu_q$

# 像和核的关系

- **定理**：$V$是一个线性空间，$L: V \to W$是一个线性映射，则
$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L$$
- 证明：
  - 如果我们能证明$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_q\}$是$V$中的一组基，则定理得证
  - 接下来要证明 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_q\}$线性无关
  - 假设 $(x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{v}_s) + \left(y_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + y_q\boldsymbol{u}_q\right) = \boldsymbol{0}$
  - $\boldsymbol{0} = L\left((x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{v}_s) + \left(y_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + y_q\boldsymbol{u}_q\right)\right) = L(x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{v}_s) = x_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{w}_s$，$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s\}$线性无关，所以$x_i = 0$
  - 所以$y_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + y_q\boldsymbol{u}_q = \boldsymbol{0}$，又因为$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_q\}$线性无关，所以$y_i = 0$

# 例

- 线性映射$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$：$L(x, y, z) = 3x - 2y + z$
- 对应的矩阵：$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
- 像：$\mathbb{R}$，一维
- 核：$C\left(\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$，二维

# 例

- 线性映射$\frac{d}{dx}$: $P^n \to P^{n-1}$ ：$P^n$是最高次数不超过n的多项式构成的线性空间，$\dim P^n = n+1$
- 像： $P^{n-1}$， 维度为n
- 核：常数$P^0$， 维度为1

# 双射的像和核

- **定理**： $L: V \to W$是一个线性映射，假设$\dim V = \dim W$。如果$\operatorname{Ker} L = \{\mathbf{0}\}$，或者$\operatorname{Im} L = W$，则$L$是双射
- 证明：
  - 假设$\operatorname{Im} L = W$，根据定义， $L$是满射
  - 又由前面的定理可知$\dim \operatorname{Ker} L = \dim V - \dim \operatorname{Im} L = \dim W - \dim \operatorname{Im} L = 0$，所以$\operatorname{Ker} L = \{\mathbf{0}\}$。由此可知$L$是单射
  - 所以$L$是双射
  - $\operatorname{Ker} L = \{\mathbf{0}\}$的证明类似

# 内容提要

- 线性映射和矩阵
- 线性映射的性质
- **换基**
- 若当标准型
- 对偶空间与直和、直积
- 张量

# 基和坐标向量

- 假设$\mathcal{B}=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$是线性空间$V$上的一组基
- 对于$V$中的任意向量$\boldsymbol{v}$，我们有$\boldsymbol{v}=x_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{v}_n$
- **坐标向量**：$x_{\mathcal{B}}(v)=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$被称作向量$\boldsymbol{v}$在基$\mathcal{B}$下的坐标向量
- 通过坐标向量和基$\mathcal{B}$，我们有$V$和$\mathbb{R}^n$的线性映射
  - $\boldsymbol{v}\to\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$
  - 这个映射和基的选取有关，而且是个双射

# 换基时坐标向量的变换

- 假设$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$是线性空间$V$上的一组基
- 对于$V$中的任意向量$\boldsymbol{v}$，我们有$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$
- 也可以选取线性空间$V$上的另一组基$\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$
  - $\boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$
- 向量$\boldsymbol{v}$在基的变化下保持**不变**
  - **基变换矩阵**：$(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)M$
  - $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)(x_1, \cdots, x_n)^T = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)(y_1, \cdots, y_n)^T$
  - 可以推出：$(x_1, \cdots, x_n)^T = M(y_1, \cdots, y_n)^T$，$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = M^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

# 线性变换和矩阵

- $L: V \to W$是一个线性映射， $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$是$V$上的一组基，$\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$是$W$上的一组基
- 对于$V$中的任意向量$\boldsymbol{v}$，我们有$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$
  - $L(\boldsymbol{v}) = x_1L(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + x_nL(\boldsymbol{v}_n)$
  - $L(\boldsymbol{v}_i)$是$W$中的向量，所以$L(\boldsymbol{v}_i) = t_{1i}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + t_{mi}\boldsymbol{w}_m = \left((\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m)T\right)_i$
  - $L(\boldsymbol{v}) = x_1(t_{11}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + t_{m1}\boldsymbol{w}_m) + \cdots + x_n(t_{1n}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + t_{mn}\boldsymbol{w}_m) = (t_{11}x_1 + \cdots t_{1n}x_n)\boldsymbol{w}_1 + (t_{m1}x_1 + \cdots + t_{mn}x_n)\boldsymbol{w}_m = (\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m)T(x_1, \cdots, x_n)^T$
- $L(\boldsymbol{v})$在$\mathcal{B}'$上的坐标向量是 $T(x_1, \cdots, x_n)^T$

# 一般线性变换的矩阵表示

- $L: V \to W$是一个线性映射， $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$是$V$上的一组基，$\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$是$W$上的一组基
- **定理**：存在唯一的mxn矩阵$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(L)$，使得$\forall\, \boldsymbol{v} \in V$，$x_{\mathcal{B}'}\big(L(\boldsymbol{v})\big) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(L) x_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v})$。$x_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v})$是 $\boldsymbol{v}$ 在 $\mathcal{B}$ 上的坐标向量， $x_{\mathcal{B}'}\big(L(\boldsymbol{v})\big)$是$L(\boldsymbol{v})$在$\mathcal{B}'$上的坐标向量
- 存在性
  - 假设$(L(\boldsymbol{v}_1), \cdots, L(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m)T$
  - $\boldsymbol{w} = L(\boldsymbol{v})$， $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{v}_m$， $\boldsymbol{w} = y_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{w}_m$
  - $\boldsymbol{w} = y_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{w}_m = L(\boldsymbol{v}) = x_1L(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + x_nL(\boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m)T(x_1, \cdots, x_n)^T$

# 一般线性变换的矩阵表示

- **定理**：存在唯一的mxn矩阵$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(L)$，使得∀ $\boldsymbol{v} \in V$，$x_{\mathcal{B}'}\big(L(\boldsymbol{v})\big) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(L) x_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v})$。$x_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v})$是 $\boldsymbol{v}$ 在 $\mathcal{B}$ 上的坐标向量， $x_{\mathcal{B}'}\big(L(\boldsymbol{v})\big)$是$L(\boldsymbol{v})$在$\mathcal{B}'$上的坐标向量
- $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(L)$的第j列就是$L(\boldsymbol{v}_j)$在$\mathcal{B}'$上的坐标向量，换句话说$L(\boldsymbol{v}_j) = \sum_i \boldsymbol{w}_i (M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(L))_{ij}$
- 注：线性映射对应的矩阵跟基的选取有关，之前$\mathbb{R}^n$的结果是两组基都取标准基的特殊情形（$M_{e_m}^{e_n}(L_A) = A$）

# 例

- 例1：$L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，我们之前学习了怎么构造$M_{e_m}^{e_n}(L)$
- 例2：$L\colon V \to W$，$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$，$\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$
  - $L(\boldsymbol{v}_1) = 3\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 + 17\boldsymbol{w}_3$，$L(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_3$
  - $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(L) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$

# 例

- 例3

**Example 3** The input basis of $\boldsymbol{v}$'s is $1, x, x^2, x^3$. The output basis of $\boldsymbol{w}$'s is $1, x, x^2$.

Then $T$ **takes the derivative**: $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}$ and $A$ = "derivative matrix".

If $\boldsymbol{v} = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$

then $\dfrac{dv}{dx} = \mathbf{1} c_2 + \mathbf{2} c_3 x + \mathbf{3} c_4 x^2$

$$A\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ 2c_3 \\ 3c_4 \end{bmatrix}$$

# $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$的性质

- $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$是所有 $L: V \to W$ 线性变换到$\dim W \times \dim V$矩阵的映射
- $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$是一个线性映射
  - $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f+g) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) + M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(g)$
  - $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(cf) = cM_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$
- $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$是一个**双射**

# 线性变换的复合与矩阵乘法

- 考虑两个线性映射$L_1: U \to V$， $L_2: V \to W$ 。$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_l\}$是$V$上的一组基，$\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$是$V$上的一组基，$\mathcal{B}'' = \{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$是$W$上的一组基
- $M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}(L_2 \circ L_1) = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(L_2) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(L_1)$
- 线性映射的**复合**等价于对应矩阵的**乘法**
  - 同一个线性空间$V$: 前一个矩阵的列数=后一个矩阵的行数
  - 可以自然得到矩阵乘法的规则

# 同一个线性空间，不同的基

- 线性空间$V$上有两组基， $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$， $\mathcal{B}'=\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_n\}$。同一个向量$\boldsymbol{v}$在不同的基上有不同的坐标向量$x_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v})$， $x_{\mathcal{B}'}(\boldsymbol{v})$。我们可以用线性映射的表示矩阵理解坐标向量在换基时的变换
- **推论**：$x_{\mathcal{B}'}(\boldsymbol{v})=M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})x_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v})$，或者说$\boldsymbol{v}_j=\sum_i \boldsymbol{w}_i\left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})\right)_{ij}$
- 注意：一般$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$不是单位矩阵，但是$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})=I$
- 利用线性变换复合和矩阵乘法的对应，我们有
- **定理**：$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})=I=M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$，也就是说$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$**可逆**，而且逆是$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$

# 表示矩阵在换基时的变换

- **定理**：线性映射$L: V \to W$，$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$是$V$上两组基，$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$是$W$上的两组基。则
  $$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(L) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = \left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(\mathrm{id})\right)^{-1} M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$$
- 证明：用线性映射的复合$L = \mathrm{id}_W \circ L \circ \mathrm{id}_V$和矩阵乘法的对应
- **推论**：线性映射$L: V \to V$，$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$是$V$上两组基，则
  $$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(L) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})\right)^{-1} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$$
- 所以矩阵相似变换就是换基，矩阵对角化就是找到描述同一个线性变换的最好的基

# 矩阵分解和换基

- LU分解：$A = LDU$，$L^{-1}AU^{-1} = D$， $D$相抵标准型
- QR分解：$A = QR$，$Q^{-1}A = R$，正交变换变成上三角
- 对角化：$\Lambda = Q^{-1}AQ$， $\Lambda$相似标准型
  - 对称矩阵可以正交对角化：正交变换
- 奇异值分解：$A = U\Sigma V$，$\Sigma = U^{T}AV^{T}$

# 内容提要

- 线性映射和矩阵
- 线性映射的性质
- 换基
- **若当标准型**
- 对偶空间与直和、直积
- 张量

# 矩阵对角化

- 不是所有方阵都可以对角化
- nxn矩阵$A$可以对角化
  - 有n个线性独立的特征向量
  - 所有特征值的几何重数=代数重数
- 如果nxn矩阵$A$只有s<n个线性独立的特征向量，怎么把$A$变成最接近对角矩阵的形式？

# 若当标准型（Jordan normal form）

- **定理**：nxn矩阵$A$有s个线性独立的特征向量，则存在可逆矩阵$B$，使得$B^{-1}AB=\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_s \end{bmatrix}$，其中$J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$，其中$\lambda_i$是第i个线性独立的特征向量的特征值

# 内容提要

- 线性映射和矩阵
- 线性映射的性质
- 换基
- 若当标准型
- **对偶空间与直和、直积**
- 张量

# 构造新的线性空间

- 问题：怎么从已知的线性空间构造新的线性空间

# 对偶空间(dual vector space, dual space)

- 线性空间$V$中的基$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$
- **对偶空间**$V^*$ ：所有线性函数$L: V \to \mathbb{R}$构成的线性空间
- 通过$V$中基$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$构造对偶空间$V^*$的基：$\{v^{*1}, \cdots, v^{*n}\}$
  - $v^{*i}: V \to \mathbb{R}$是线性映射，且$v^{*i}(\boldsymbol{v}_j) = \delta^i_j$，（$\delta^i_j$ 当i=j时为1，其它情况为0）
  - **完备**：任何线性映射$L: V \to \mathbb{R}$由$\{L(\boldsymbol{v}_1), \cdots, L(\boldsymbol{v}_n)\}$唯一决定。利用线性映射的加法，$L = L(\boldsymbol{v}_1)v^{*1} + \cdots + L(\boldsymbol{v}_n)v^{*n}$
  - **线性无关**：考虑映射$L = x_1 v^{*1} + \cdots + x_n v^{*n} =$ 零映射，也就是说$L(\boldsymbol{v}) = 0, \forall\, \boldsymbol{v} \in V$，特别的$L(\boldsymbol{v}_i) = 0$
  - $L(\boldsymbol{v}_i) = x_1 v^{*1}(\boldsymbol{v}_i) + \cdots + x_n v^{*n}(\boldsymbol{v}_i) = x_i = 0$

# 例

- $\mathbb{R}^*$
  - $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$的线性函数$f(x) = ax$。$\boldsymbol{e}$是$\mathbb{R}$上的基，实际上$\boldsymbol{e} = 1$
  - $e^*(\boldsymbol{e}) = e^*(1) = 1$，所以$e^*(x) = x$
  - $f(x) = ax = ae^*(x)$，所以$\mathbb{R}^*$是一维的，系数$a$就是$f$在$\mathbb{R}^*$中的坐标
- $(\mathbb{R}^n)^*$
  - $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$的线性函数 $f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n a_i x_i$
  - $e^{*i}(\boldsymbol{x})$相当于$\boldsymbol{a}$取$\boldsymbol{e}_i$，$e^{*i}(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{x})$

# 例

- 平面波的相位
  - 平面波：$A(\boldsymbol{x},t)=A_1e^{i(k_xx+k_yy+k_zz+\omega t)}+A_2e^{i(k_xx+k_yy+k_zz-\omega t)}$，$\omega\geq 0$
  - 相位：$\phi(x,t)=-\omega t+k_xx+k_yy+k_zz\in(\mathbb{R}^{3,1})^*$，$\omega$任意
  - 相位是从$\mathbb{R}^{3,1}\to\mathbb{R}$的函数，$(\omega,\boldsymbol{k})$决定波的传播方向
  - $(\mathbb{R}^{3,1})^*$和平面波一一对应
- 傅立叶变换
  - $f(\boldsymbol{k})=\int d^3x\, f(\boldsymbol{x})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$
  - 将$\mathbb{R}^3$的函数变换成$(\mathbb{R}^3)^*$的函数

# 对偶的对偶

- 线性空间$V$中的基$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$
- **对偶空间**$V^*$ ：所有线性映射（函数）$L: V \to \mathbb{R}$构成的线性空间
- 对偶空间$V^*$的一组基：$\{v^{*1}, \cdots, v^{*n}\}$
  - $v^{*i}: V \to \mathbb{R}$是线性映射，且$v^{*i}(\boldsymbol{v}_j) = \delta^i_j$
- $V^*$的对偶$(V^*)^*$
  - $v_i^{**}: V^* \to \mathbb{R}$， $v_i^{**}(v^{*j}) \equiv v^{*j}(\boldsymbol{v}_i) = \delta^j_i$
  - $\mathbb{R}^n$和$(\mathbb{R}^n)^*$： $f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i a_i = f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a})$，

# 对偶空间和换基

- 线性空间$V$中的基: $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$，$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$
- 对偶空间$V^*$中的基：$\{v^{*1}, \cdots, v^{*n}\}$，$\{u^{*1}, \cdots, u^{*n}\}$，满足$v^{*i}(\boldsymbol{v}_j) = \delta^i_j$，$v^{*i}(\boldsymbol{u}_j) = \delta^i_j$
- 如果$\boldsymbol{v}_i = \sum_j \boldsymbol{u}_j a^j{}_i$，那么$\{v^{*1}, \cdots, v^{*n}\}$和$\{u^{*1}, \cdots, u^{*n}\}$之间的关系？
  - 假设$v^{*i} = \sum_j b_j{}^i u^{*j}$
  - $\delta^i_j = v^{*i}(\boldsymbol{v}_j) = \sum_k b_k{}^i u^{*k}(\sum_l \boldsymbol{u}_l a^l{}_j) = \sum_{k,l} b_k{}^i a^l{}_j u^{*k}(\boldsymbol{u}_l) = \sum_{k,l} b_k{}^i a^l{}_j \delta^k_l = \sum_k b_k{}^i a^k{}_j$，所以$b_i{}^j = (a^{-1})_i{}^j$，$(a^{-1})_i{}^j$代表$a^i{}_j$对应矩阵的逆的ij分量
  - $v^{*i} = \sum_j u^{*j} (a^{-1})_j{}^i$

# 线性空间的**和**(sum)与**直和**(direct sum)

- 线性空间$V$有两个子空间$U$和$W$， $U$和$W$的**和**$U+W$定义为所有形如$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}, \forall\, \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W$的元素构成的集合
- $U+W$是$V$的线性子空间
- **直和**：线性空间$V$是$U$和$W$的直和，如果对于任意$V$中的元素 $\boldsymbol{v}$，存在唯一的$\boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W$使得$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$，记为$V=U \oplus W$

# 直和的性质

- **定理**：线性空间$V$有两个子空间$U$和$W$。如果$V = U + W$，且$U \cap W = \{\mathbf{0}\}$，则$V = U \oplus W$
- 证明：
  - 因为$V = U + W$，假设$\boldsymbol{v} \in V$可以写成$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{w}'$
  - 所以$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w}$
  - 但是$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' \in U$，$\boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w} \in W$，而且$U \cap W = \{\mathbf{0}\}$。所以$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$
  - 所以$\boldsymbol{v}$的分解是唯一的，所以$V = U \oplus W$

# 直和的性质

- **定理**：$V$是个有限维线性空间， $U$是$V$的子空间，则存在的$V$子空间$W$使得$V = U \oplus W$
- 证明：
  - 假设$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$是$U$的一组基，将它扩张成$V$的一组基$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$，则$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$张成的线性子空间就是我们需要的$W$
- **推论**：$\dim U \oplus W = \dim U + \dim W$
- $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$是$U$的一组基， $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$是$W$的一组基，则$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$是 $U \oplus W$的一组基

# 直积(direct product)

- 直和是由两个向量相加构造的，要求两个子空间的向量之间可以相加
- 如果两个线性空间不是某个大线性空间的子空间怎么办？
- **直积**：$U$和$W$是任意的两个线性空间，$U$和$W$的直积$U\times W$是所有形如$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),\forall\, \boldsymbol{u}\in U,\forall\, \boldsymbol{w}\in W$的元素的集合。且$U\times W$是个线性空间
  - 加法：$(\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{w}_1)+(\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{w}_2)=(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)$
  - 数乘：$c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=(c\boldsymbol{u},c\boldsymbol{w})$
- 性质：$\dim U\times W=\dim U+\dim W$
- 直和有时候也叫做**内直积**

# 例

- $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$是$U$的一组基，$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$是$W$的一组基，则$\{(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{0}), \cdots, (\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{w}_1), \cdots, (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{w}_n)\}$是 $U \times W$的一组基
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
- $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$

# 内容提要

- 线性映射和矩阵
- 线性映射的性质
- 换基
- 若当标准型
- 对偶空间与直和、直积
- **张量**

# 多（重）线性映射

- 考虑映射$L: V_1 \times V_2 \cdots \times V_r \rightarrow W$
- 这个映射的自变量是r个向量，分别属于$\{V_1, V_2 \cdots, V_r\}$
- 映射$L$被称为**多线性**的，如果它对于每一个变量都是线性的，也就是说
  $L(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}, a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_r)$
  $= aL(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_r) + bL(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_r)$
- 如果$W$是$\mathbb{R}$，则称$L$是个**多（重）线性函数**
  - 例：行列式就是一个多（重）线性函数

# 张量空间 $V^* \otimes V^*$

- 考虑所有$V\times V \to \mathbb{R}$的多重线性函数的集合$\{L: V\times V \to \mathbb{R}\}$，我们同样可以在这个集合上定义加法和数乘
  - 加法：$(L_1+L_2)(u,v) = L_1(u,v) + L_2(u,v)$
  - 数乘：$(cL_1)(u,v) = cL_1(u,v)$
  - 零元：零函数
- 所有$V\times V \to \mathbb{R}$的多重线性函数构成一个线性空间，我们把这个空间叫做$V^*$ 和$V^*$ 的张量积（记做$V^* \otimes V^*$）
  - $V^* \otimes V^*$中的每一个元素（向量）叫做一个二阶协变张量（(0,2)张量）
  - $V$中基$\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$， $L(u,v) = L\left(\sum_i a_i v_i , \sum_j b_j v_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j L(v_i, v_j)$
  - $n^2$个函数值$L(v_i,v_j)$唯一决定了函数$L$

# 张量空间 $V^* \otimes V^*$的一组基

- $V$中基$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$。对偶空间$V^*$的基：$\{v^{*1}, \cdots, v^{*n}\}$
  - $v^{*i}(v_j) = \delta^i_j$
- 定义张量$v^{*i} \otimes v^{*j}$满足$v^{*i} \otimes v^{*j}(u, v) = v^{*i}(u)v^{*j}(v)$
  - $v^{*i} \otimes v^{*j}(v_k, v_l) = v^{*i}(v_k)v^{*j}(v_l) = \delta^i_k\delta^j_l$
  - $n^2$个张量$v^{*i} \otimes v^{*j}$构成$V^* \otimes V^*$的一组基
- $w \in V^* \otimes V^*$， $w = \sum_{\{i,j\}} w_{ij}\, v^{*i} \otimes v^{*j}$， $w_{ij} = w(v_i, v_j)$
  - $\{w_{ij}\}$是$w$在$\{v^{*i} \otimes v^{*j}\}$这组基上的分量，物理文献中有时候也把$\{w_{ij}\}$叫做张量
  - 在基的变换下$w$不变，分量$\{w_{ij}\}$会变

# $V^* \otimes V^*$ 的张量分量 $w_{ij}$ 随基的变换

- $V$中基$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$。对偶空间$V^*$的基：$\{\boldsymbol{v}^{*1}, \cdots, \boldsymbol{v}^{*n}\}$
  - $\boldsymbol{u}_i = \sum_j \boldsymbol{v}_j a^j{}_i$， $\boldsymbol{u}^{*i} = \sum_j \boldsymbol{v}^{*j} (a^{-1})_j{}^i$
- 张量$w$在基$\{u^{*i} \otimes u^{*j}\}$下的分量$w'_{ij} = w(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)$
  - $w'_{ij} = w(u_i, u_j) = w\left(\sum_k v_k a^k{}_i, \sum_l v_l a^l{}_j\right) = \sum_{kl} w(v_k, v_l) a^k{}_i a^l{}_j = \sum_{kl} w_{kl} a^k{}_i a^l{}_j$
  - 当$V$的基从$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$变成$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$时，分量$w'_{ij} = \sum_{kl} w_{kl} a^k{}_i a^l{}_j$ （二阶协变张量：分量同基的变换规律一致）

# 张量积(tensor product)

- 定义基$\{\boldsymbol{v}^{*i} \otimes \boldsymbol{v}^{*j}\}$的时候我们用到了一个新的运算
- **张量积**： $U$和$W$是任意的两个线性空间，$\boldsymbol{u} \in U$，$\boldsymbol{v} \in W$。定义$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$的张量积为一个新的元素$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$，且满足下面的性质
  - 结合律：$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \otimes (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})$
  - 加法左分配：$(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \otimes \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_2 \otimes \boldsymbol{v}$
  - 加法右分配：$\boldsymbol{u} \otimes (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}_2$
  - 数乘：$(a\boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \otimes (a\boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})$
- 张量积运算的结果不在$U$或$W$中，也不**交换**
  - $v^{*i} \otimes v^{*j}$就是 $v^{*i}$ 和 $v^{*j}$ 的张量积，结果是$V^* \otimes V^*$中的一个张量

# 线性空间的张量积

- **线性空间张量积**：$U$和$W$是任意的两个线性空间，$\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m\}$是$U$的一组基，$\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_n\}$是$W$的一组基。定义新的基为$\{\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{w}_j, 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$，$\{\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{w}_j\}$张成的线性空间被称为$U$和$W$的张量积，记为$U\otimes W$
- $U\otimes W$中的元素：$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x^{ij}\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{w}_j$
- $U\otimes W$中的加法和数乘：$a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(ax^{ij}+by^{ij})\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{w}_j$
- $\dim U\otimes W=\dim U\times\dim W$

# 张量积(tensor product)

- $U$和$V$是任意的两个线性空间，$\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n \in U$，$\boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{v}_m \in V$
  - $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{v}_j$
  - $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} \in U \otimes V$
- 但是并不是所有$U \otimes V$中的元素都能写成$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$的形式
  - 例：$\boldsymbol{u}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}_2 \otimes \boldsymbol{v}_1$
  - 类比：$f(x)g(y)$是一个自变量为x,y的二元函数，但任意二元函数h$(x, y)$一般不能写成$f(x)g(y)$的形式

# 例

- 例1：$\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$，基是$\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1$
- 例2：$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$，基是$e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$
  - 注意$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$和 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$的区别
- 例3：$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$，基是$\{e_i \otimes e_j\}$
  - 基的另一种写法：对称部分$\{\frac{1}{2}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)\}$，反对称部分$\{\frac{1}{2}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)\}$

# 用张量积定义$V\otimes V$

- $V\otimes V$是**所有**$V^*\times V^*\to\mathbb{R}$的双线性函数构成的线性空间。但是我们也可以用张量积的方法定义
- $V$中的基$\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$
- $V\otimes V$中的基$\{\boldsymbol{v_i}\otimes\boldsymbol{v}_j\}, 1\le i,j\ \le n$，$n^2$个
- $V\otimes V$中的元素$\boldsymbol{v}=\sum_{i,j=1}^{n} v^{ij}\boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{v}_j$，二阶逆变张量（(2,0)张量）
  - $\boldsymbol{v}$是线性空间$V\otimes V$中的一个向量
  - $\{v_{ij}\}$是$\boldsymbol{v}$在基$\{\boldsymbol{v_i}\otimes\boldsymbol{v}_j\}$上的分量，有2个指标，$n^2$个数
- 思考：这两种定义是等价的？

# 换基时$V \otimes V$张量分量的变换

- $V$中的基$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$
  - $\boldsymbol{u}_i = \sum_j \boldsymbol{v}_j a^j{}_i$
- $V \otimes V$中的元素$\boldsymbol{v} = \sum_{i,j=1}^{n} v^{ij} \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_j$
  - $\boldsymbol{v} = \sum_{ij} v'^{ij} \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_j = \sum_{ij} v'^{ij} (\sum_k \boldsymbol{v}_k a^k{}_i) \otimes (\sum_l \boldsymbol{v}_l a^l{}_j) = \sum_{kl} \left(\sum_{ij} a^k{}_i a^l{}_j v'^{ij}\right) v_k \otimes v_l = \sum_{kl} v^{kl} \boldsymbol{v}_k \otimes \boldsymbol{v}_l$
  - $v^{kl} = \sum_{ij} a^k{}_i a^l{}_j v'^{ij}$
  - 或者 $v'^{ij} = \sum_{kl} (a^{-1})^i{}_k (a^{-1})^j{}_l v^{kl}$（逆变：分量每个指标对应的变换矩阵是基的变换矩阵的逆矩阵）

# 混合张量$V\otimes V^*$

- $V\otimes V^*$是**所有**$V^*\times V\rightarrow\mathbb{R}$的双线性函数构成的线性空间。也可以用张量积的方法定义$V\otimes V^*$
- $V$中的基$\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$。对偶空间$V^*$的基：$\{\boldsymbol{v}^{*1},\cdots,\boldsymbol{v}^{*n}\}$
- $V\otimes V^*$中的基$\left\{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}\otimes\boldsymbol{v}^{*j}\right\},1\leq i,j\ \leq n$
- $V\otimes V^*$中的元素$\boldsymbol{v}=\sum_{i,j=1}^{n}v^{i}{}_{j}\boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{v}^{*j}$（(1,1)张量）
- 思考：在换基时$v^{i}{}_{j}$怎么变？

$$V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes V^* = V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes l}$$

- 所有$V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots V \to \mathbb{R}$的多线性函数构成的线性空间
- 用张量积定义
  - $V$中的基$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$，对偶空间$V^*$中的基$\{\boldsymbol{v}^{*1}, \cdots, \boldsymbol{v}^{*n}\}$
  - $V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes l}$中的基$\{\boldsymbol{v}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{i_k} \otimes \boldsymbol{v}^{*j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}^{*j_l}\}, 1 \leq i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l \leq n$
- $V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes l}$中的元素$\boldsymbol{v} = \sum_{i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_l=1}^{n} \left(v^{i_1 \cdots i_k}{}_{j_1 \cdots j_l}\right) \boldsymbol{v}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{i_k} \otimes \boldsymbol{v}^{*j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}^{*j_l}$
  - $\boldsymbol{v}$的分量$v^{i_1 \cdots i_k}{}_{j_1 \cdots j_l}$有k+l个指标，一共是$n^{k+l}$个数
  - $\boldsymbol{v}$是一个(k,l)阶张量

# 附录：上下指标

# 上下指标

- 前面的例子中可以看到，$V$和$V^*$在换基下的变换是有联系但又有区别的。实际应用中我们通常用上下指标区分$V$和$V^*$
- 一般规定基向量的指标为下指标，换基的时候，新的基向量可以写成老基向量的如下线性组合

$$\boldsymbol{e'}_i = \sum_j \boldsymbol{e}_j A^j{}_i$$

- $A^j{}_i$数值上等于之前的矩阵的分量，只是为了方便将一个指标移到上面。在这个记号下，所有求和都是一上一下两个指标的求和
- 指标升降（用$\delta^{jk}$）：$A^j{}_i = \sum_k \delta^{jk} A_{ki}$ , $x_j = \sum_i \delta_{ji} x^i$，等等

# 协变和逆变

- **协变**：基向量的变换，$\boldsymbol{e}'_i = \sum_j \boldsymbol{e}_j A^j{}_i$
- 考虑线性空间$V$中的某个向量$\boldsymbol{v} = \sum_i v^i \boldsymbol{e}_i = \sum_i v'^i \boldsymbol{e}'_i$
- 换基的时候，$v$不变，相应的坐标向量$v^i$的变换关系为

$$x'^i = \sum_j (A^{-1})^i{}_j x^j$$

- 因为变换矩阵是基向量变换矩阵的逆，所以被称作**逆变**的
- **协变**：同基向量变换规律一致
- **逆变**：同坐标向量变换规律一致

# 对偶空间中的基

- 基向量的变换，$\boldsymbol{e'}_i = \sum_j \boldsymbol{e}_j A^j{}_i$
- 对偶空间$V^*$中的基的一种选取是$e^{*i}(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_{.j}$
- 在换基下，这组基的变换关系为

$$e'^{*i} = \sum_j (A^{-1})^i_{.j} e'^{*j}$$

- 在推导中我们利用了性质：$e^{*i}(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_{.j} = e'^{*i}(\boldsymbol{e'}_j)$
- 对偶空间中的基是**逆变**的

# 张量的指标和变换

- 基向量的变换，$\boldsymbol{e'}_i = \sum_j \boldsymbol{e}_j A^j{}_i$
- $V \otimes V$ 中的元素$\boldsymbol{v} = \sum_{i,j} v^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$
  - 在换基下：$v'^{ij} = \sum_{k,l} (A^{-1})^i{}_k (A^{-1})^j{}_l v^{kl}$
  - 二阶有两个逆变指标的张量
- $V^* \otimes V^*$ 中的元素$\boldsymbol{w} = \sum_{i,j} w_{ij} e^{*i} \otimes e^{*j}$
  - 在换基下：$w'_{ij} = \sum_{k,l} w_{kl} A^k{}_i A^l{}_j$
  - 二阶有两个协变指标的张量

# 张量的指标和变换

- 基向量的变换，$\boldsymbol{e'}_i = \sum_j \boldsymbol{e}_j A^j{}_i$
- $V \otimes V^*$ 中的元素$\boldsymbol{w} = \sum_{i,j} w^i{}_j \boldsymbol{e}_i \otimes e^{*j}$
  - 在换基下：$w'^i{}_j = \sum_{k,l} (A^{-1})^i{}_k w^k_l A^l{}_j$
  - 一个逆变一个协变指标的张量
- 这些变换关系的推倒都利用了张量本身在换基下不变的性质

# 张量的指标和变换

- 基向量的变换，$\boldsymbol{e'}_i = \sum_j \boldsymbol{e}_j A^j{}_i$
- 一般$V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$中的元素

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s} w^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_r} \otimes e^{*j_1} \otimes \cdots \otimes e^{*j_s}$$

- 变换

$$w'^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} = \sum_{k_1,\cdots,k_r,l_1,\cdots,l_s} (A^{-1})^{i_1}{}_{k_1} \cdots (A^{-1})^{i_r}{}_{k_r} w^{k_1\cdots k_r}{}_{l_1\cdots l_s} A^{l_1}{}_{j_1} \cdots A^{l_s}{}_{j_s}$$

# 张量指标的缩并

- 考虑一般张量$w^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$
- 我们定义任意一个上指标和任意一个下指标的缩并为

$$v^{i_1 \cdots i_{p-1} i_{p+1} \cdots i_r}_{j_1 \cdots i_{q-1} i_{q+1} \cdots j_s} = \sum_i v^{i_1 \cdots i_{p-1} i i_{p+1} \cdots i_r}_{j_1 \cdots i_{q-1} i i_{q+1} \cdots j_s}$$

- 新的张量比原来的张量各少了一个上指标和一个下指标
- 特别的只有一个上指标和一个下指标的张量$w^i{}_j$缩并以后$w = \sum_i w^i{}_i$，在换基下$w$不变

# $V^* \otimes V^*$ 的张量分量随基的变换

- $V$中基$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$。对偶空间$V^*$的基：$\{v^{*1}, \cdots, v^{*n}\}$
  - $\boldsymbol{u}_i = \sum_j \boldsymbol{v}_j a_{ji}$，  $u^{*i} = \sum_j (a^{-1})_{ij} v^{*i}$
- 张量$w = \sum_{\{i,j\}} w_{ij}\, v^{*i} \otimes v^{*j}$在基的变换下不变
  - $w = \sum_{ij} w'_{ij} u^{*i} \otimes u^{*j} = \sum_{ij} w'_{ij} (\sum_k (a^{-1})_{ik} v^{*k}) \otimes (\sum_l (a^{-1})_{jl} v^{*l}) = \sum_{kl} \big(\sum_{ij} w'_{ij} (a^{-1})_{ik} (a^{-1})_{jl}\big) v^{*k} \otimes v^{*l}$
  - 所以$w$在$\{v^{*k} \otimes v^{*l}\}$下的分量$w_{kl} = \sum_{ij} w'_{ij} (a^{-1})_{ik} (a^{-1})_{jl}$，或者说
  - $w'_{ij} = \sum_{kl} w_{kl} a_{ki} a_{lj}$ （协变：分量同基的变换规律一致）