电磁场数值计算

邢庆子

Tel: 62781684(o), 13661226717

E-mail: xqz@tsinghua.edu.cn

清华大学工物系加速器实验室 刘卿楼**309**

上节内容

2.4 边界条件与边值关系的离散化

2.4.1 第一类边界条件的差分离散

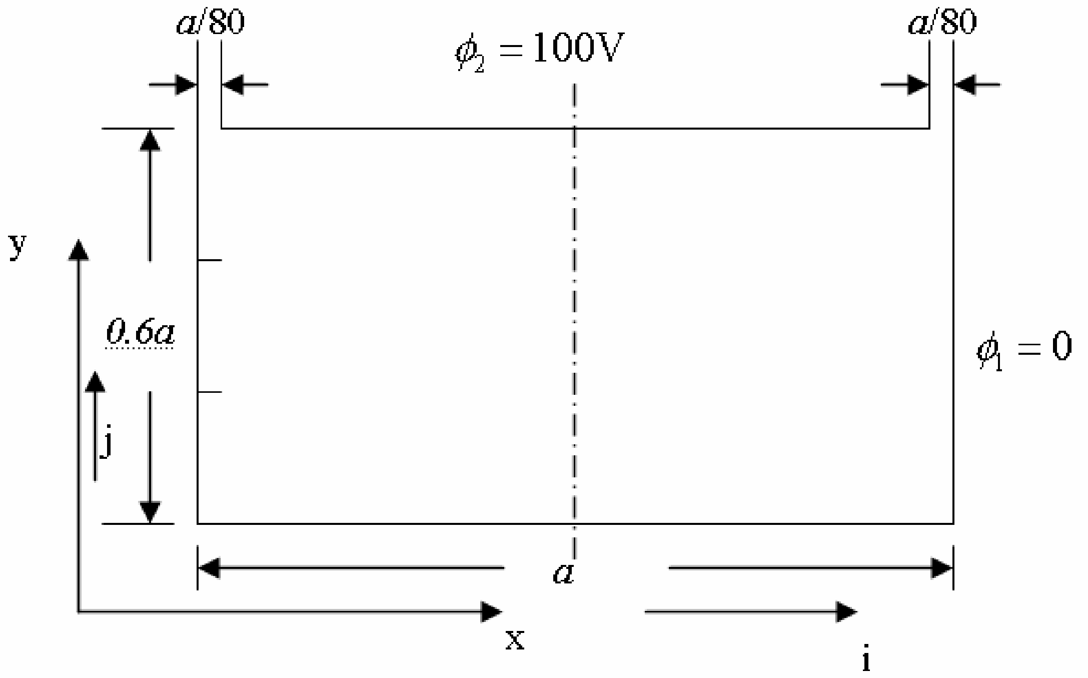
2.4.2 第二类边界条件的差分离散

2.4.3 不同媒质交界面上的差分离散

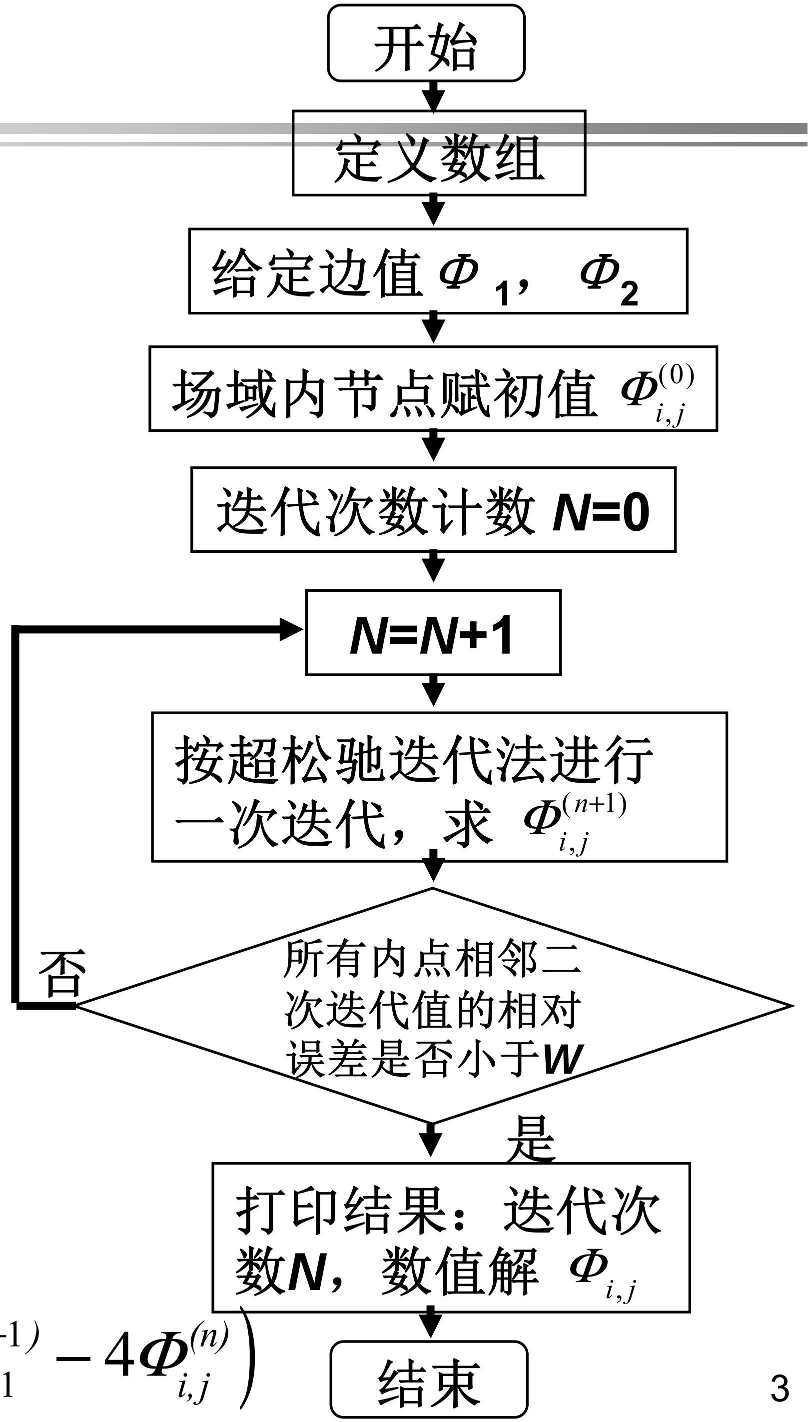
2.4.4 对称线的差分离散格式

2.5 差分方程求解实例

2.5 差分方程求解实例



长接地金属槽二维问题求解



$$\Phi_{i,j}^{(n+1)} = \Phi_{i,j}^{(n)} + \frac{\alpha}{4}\left(\Phi_{i+1,j}^{(n)} + \Phi_{i,j+1}^{(n)} + \Phi_{i-1,j}^{(n+1)} + \Phi_{i,j-1}^{(n+1)} - 4\Phi_{i,j}^{(n)}\right)$$

本节内容

2.6 准泊松方程的差分离散格式

2.7 非线性代数方程组的解法

2.8 场强与电磁积分量的计算

2.9 时变电磁场的差分格式

2.9 时变电磁场的差分格式

2.9.1 时变电磁场方程

2.9.2 边界条件

2.9.3 差分格式

2.9.4 本征值β的计算

2.9.5 谐振腔的计算

2.9.6 谐振腔参数的计算

2.9 时变电磁场的差分格式

2.9.1 时变电磁场方程

矢量波动方程：
$$\begin{cases}\nabla^2 \boldsymbol{H} = -\omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{H} \\ \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{E}\end{cases}$$

波导问题的求解均可归结为求解相应的场的纵向分量H_z或E_z（用Φ标记）所描述的定解问题：

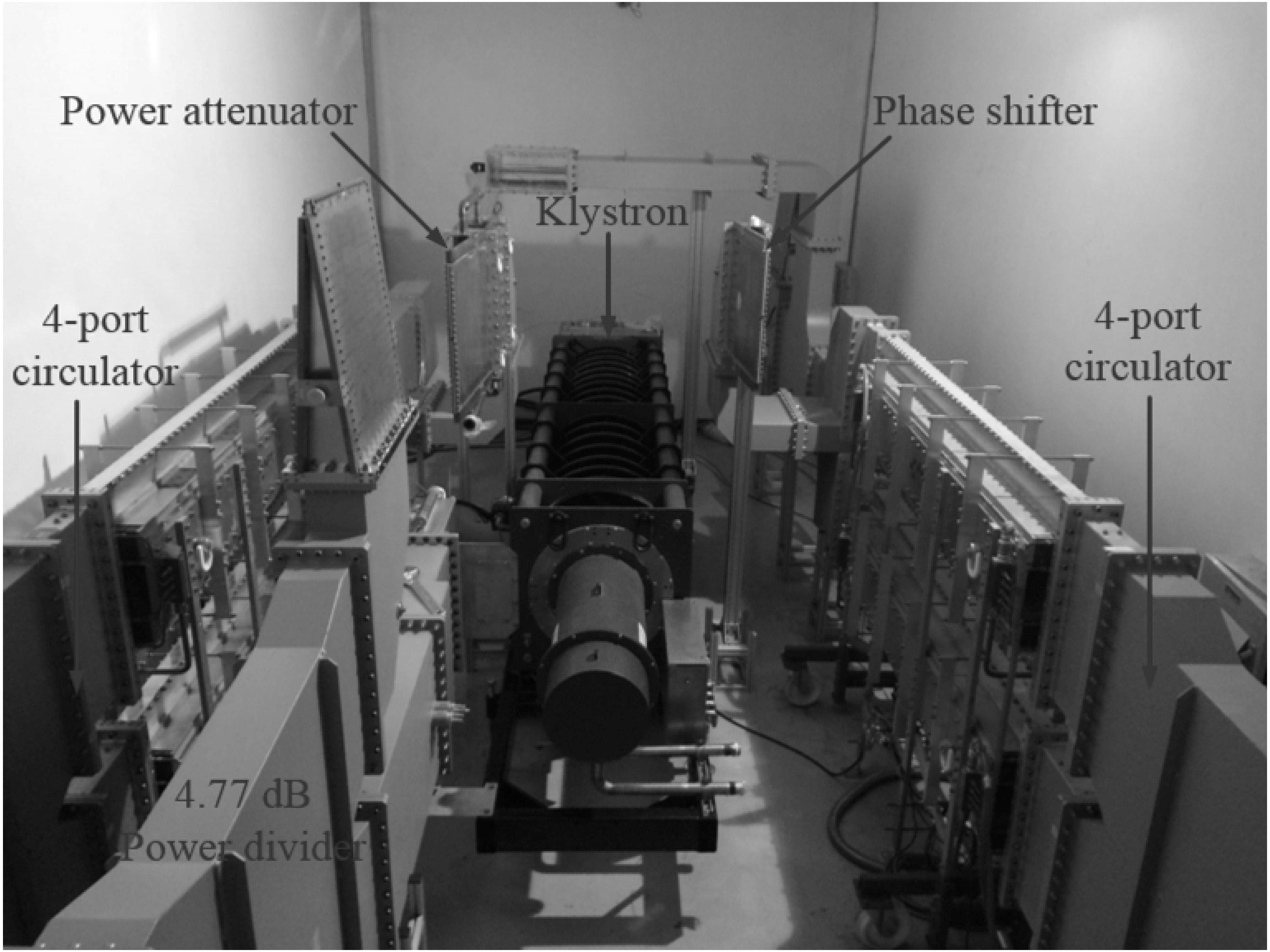
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 \Phi = 0$$

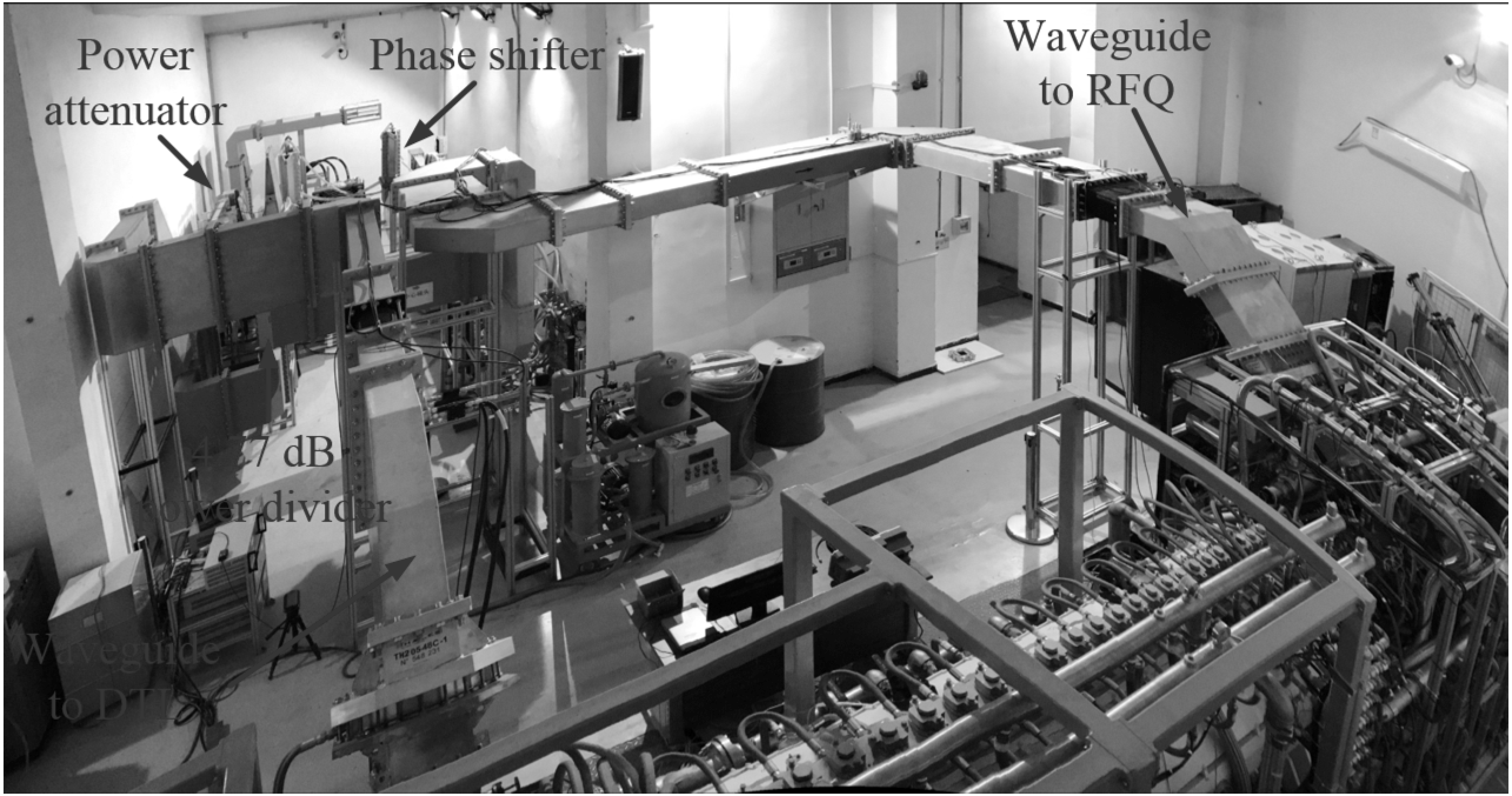
1）波导壁电导率无穷大
2）波导内介质线性均匀、各向同性
3）无源（ρ=0；J=0）
4）截面均匀
5）无反射波

2.9.2 边界条件

对于不同的波型有不同的边界条件。

对 **TM** 波有：$\Phi\big|_L = 0$　　对 **TE** 波有：$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_L = 0$


Power attenuator
Phase shifter
Klystron
4-port
circulator
4-port
circulator
4.77 dB
Power divider


Power attenuator
Phase shifter
Waveguide to RFQ
7 dB
divider
Waveguide to DTL

2.9.3 差分格式

$$2\left[\frac{\Phi_1}{p(p+r)}+\frac{\Phi_2}{q(q+s)}+\frac{\Phi_3}{r(p+r)}+\frac{\Phi_4}{s(q+s)}-\left(\frac{1}{pr}+\frac{1}{qs}\right)\Phi_0\right]+k^2h^2\Phi_0=0$$

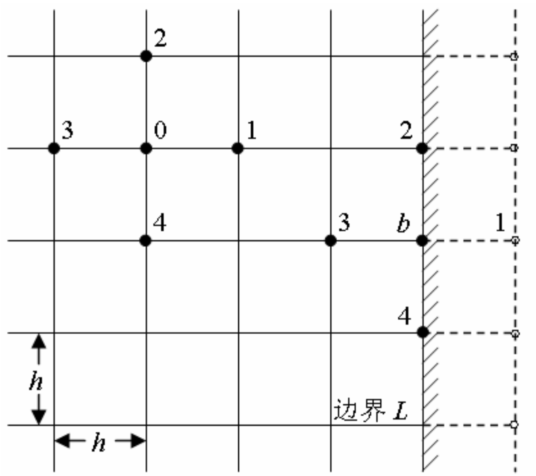
等距网格情况：$\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4-(4-k^2h^2)\Phi_0=0$

边界处理(网格线与边界重合)：

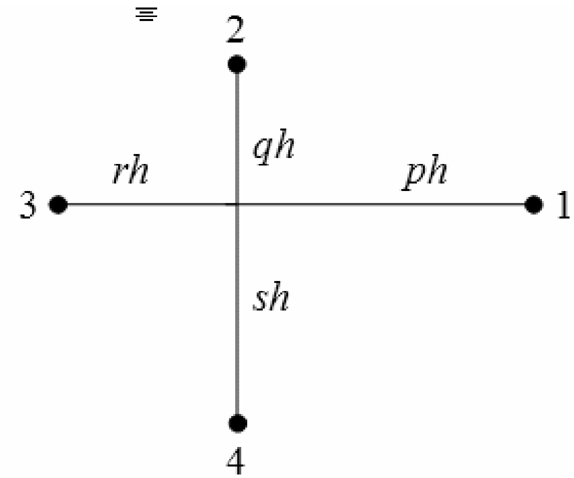
对 TE 波：

$$\Phi_2+\Phi_4+2\Phi_3-4\Phi_0+(kh)^2\Phi_0=0$$

对 TM 波：$\Phi_{\mathrm{hi}}=0$



网格线与边界重合



网格划分

构成差分方程组：$K\Phi=\beta\Phi$ 其中 $\beta=(kh)^2$

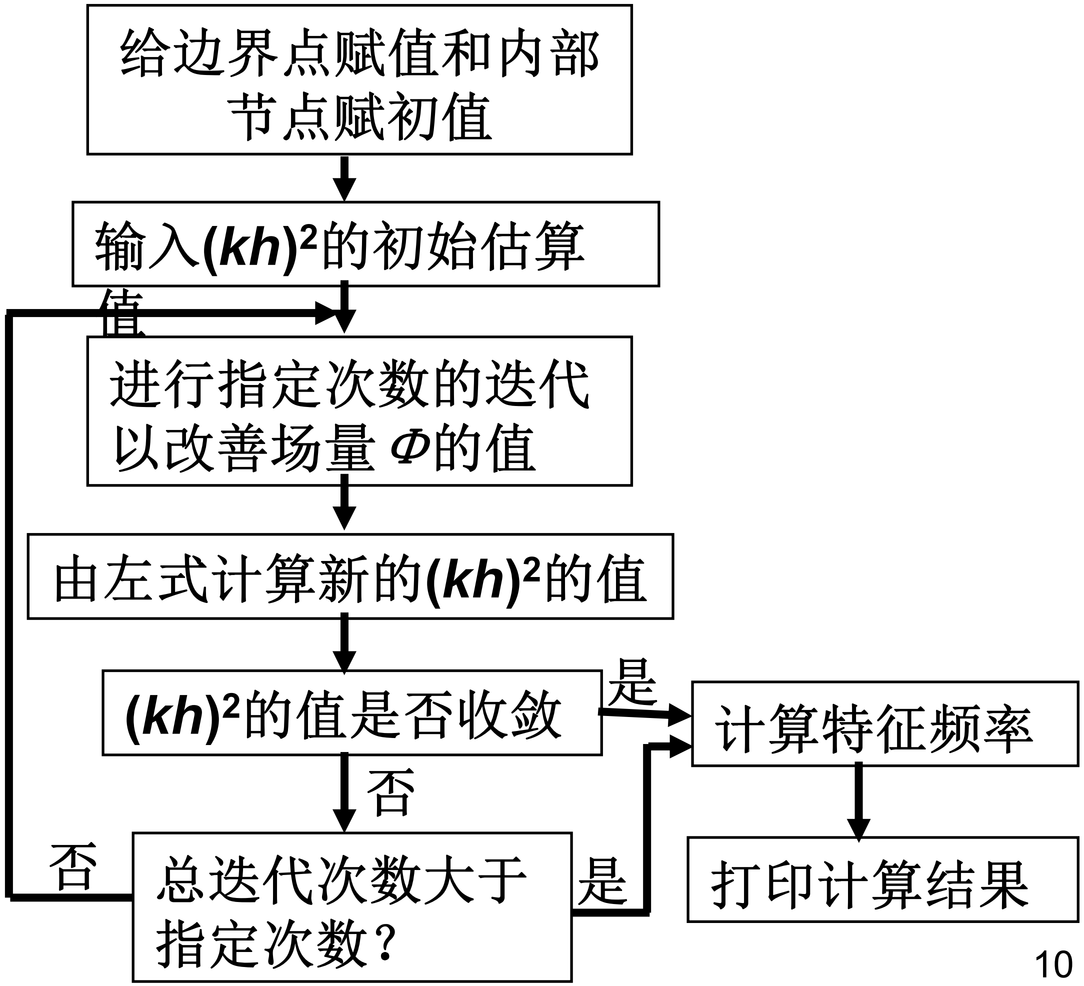
2.9.4 本征值 β 的计算

求波导中电磁场的问题，实质上是一个求解本征值及其对应的本征函数 *Φ*的问题。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+k^2\Phi=0$$

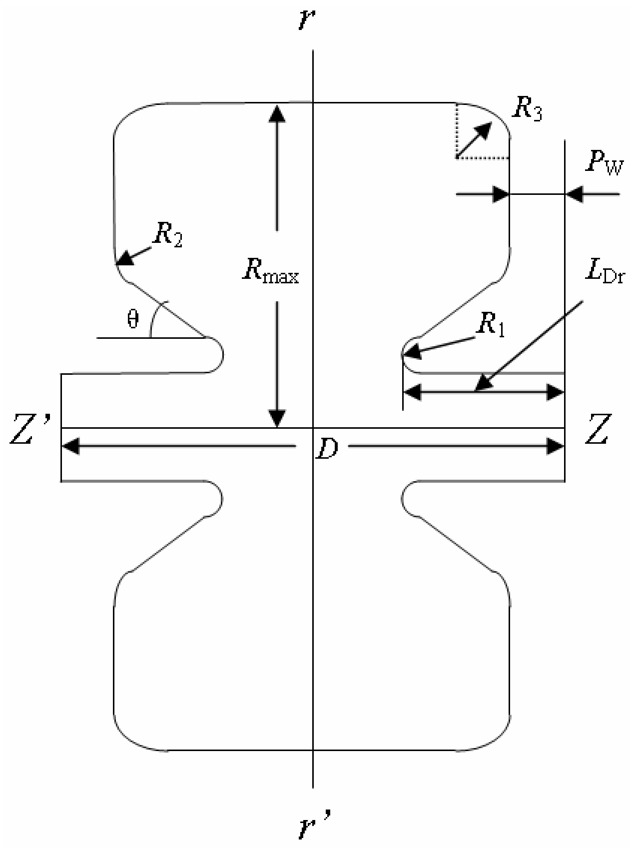
$$k^2=\frac{-\int_S \Phi\nabla_S^2\Phi \mathrm{d}S}{\int_S \Phi^2 \mathrm{d}S}$$

$$k^2h^2=\frac{-\sum_{i,j}\Phi_{i,j}\left(\Phi_{i,j-1}+\Phi_{i,j+1}+\Phi_{i-1,j}+\Phi_{i+1,j}-4\Phi_{i,j}\right)\Delta S_{i,j}}{\sum_{i,j}\Phi_{i,j}^2 \Delta S_{i,j}}$$



2.9.5 谐振腔的计算

所研究的腔相对 **z** 轴是旋转对称的，相对中心平面也是对称的，因而只需计算**1/4**剖面。我们感兴趣的是**<u>TM$_{010}$</u>**<u>模式</u>，它的电场 ***E*** 只有径向 ***r*** 分量和轴向 ***z*** 的分量，磁场 ***H*** 只有辐向 ***Φ***分量。



谐振腔形状说明

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_\Phi}{\partial r}\right)-\frac{H_\Phi}{r^2}+\frac{\partial^2 H_\Phi}{\partial z^2}+\varepsilon_0\mu\omega^2 H_\Phi=0$$

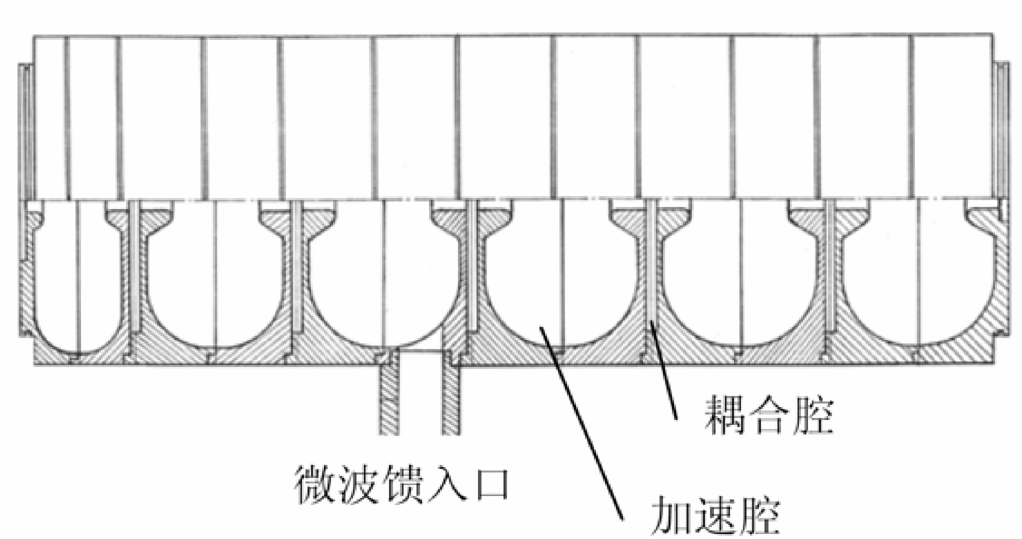
$$\xrightarrow{F=rH_\Phi}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+k^2F=0 \Longrightarrow$$

$$\frac{F_1+F_3-2F_0}{h^2}+\frac{F_2+F_4-2F_0}{h^2}-\frac{1}{2j}\frac{1}{h^2}\left(F_2-F_4\right)+k^2F_0=0$$

边界条件： $\partial F/\partial n=0$ 在导体壁和对称面上

$F=0$ 在轴上和两腔交界面上

2.9 时变电磁场的差分格式



9 MeV驻波加速管

2.9.6 谐振腔参数的计算

1. 电参数

(1) 谐振频率

(2) 场分量

2. 微波参量

(1) 储能 W_{H}

(2) 功率损耗 P_{d}

(3) 无载品质因数 Q_0

3. 沿轴的最大电压 V

4. 渡越时间因子 T

5. 单位长度上的分流阻抗 Z

6. 单位长度上的有效阻抗 ZT^2

7. 沿腔体金属内表面的电场强度 $E_{\mathrm{n}}(l)$

2.6 准泊松方程的差分离散格式

在铁磁材料媒质中，当 **B** 较大时，必然出现饱和效应，此时 μ 不是常数，而是 **B** 的函数。

$\mu \neq$ 常数时的泊松方程，称为准泊松方程。

$\mu \neq$ 常数时, 在二维直角坐标系中矢量磁位 **A** 满足的方程为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y}\right)=-J$$

即 $$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}-\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y}\right)=-\mu J$$ 在磁介质中 $\boldsymbol{J}=\mathbf{0}$ 。

可采用泰勒级数法，或积分方程法导出此方程的有限差分方程。

2.6 准泊松方程的差分离散格式

令磁阻率 $\gamma = \dfrac{1}{\mu}$，则 $\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{\partial \gamma}{\partial x}\dfrac{\partial A}{\partial x} + \dfrac{\partial \gamma}{\partial y}\dfrac{\partial A}{\partial y}\right) = 0$

2.6.1 泰勒级数法离散化

磁介质中：
$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0 - \frac{1}{4\mu_0}\left[(A_1 - A_3)(\mu_1 - \mu_3) + (A_2 - A_4)(\mu_2 - \mu_4)\right] = 0$$

或：
$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0 + \frac{1}{4\gamma_0}\left[(A_1 - A_3)(\gamma_1 - \gamma_3) + (A_2 - A_4)(\gamma_2 - \gamma_4)\right] = 0$$

两个迭代过程：

$$A_{ij}^{(0)} \quad \mu_{ij}^{(0)} \Rightarrow A_{ij}^{(1)} \Rightarrow B_{ij}^{(1)} \Rightarrow \mu_{ij}^{(1)} \Rightarrow A_{ij}^{(2)} \Rightarrow B_{ij}^{(2)} \Rightarrow \mu_{ij}^{(2)} \Rightarrow \cdots\cdots$$

2.6.2 积分法离散化

积分法离散是从泊松方程出发，把场的微分方程还原为积分形式，转化为安培环路定律，将公式离散并求出差分格式。

2.6 准泊松方程的差分离散格式

- 节点（$\boldsymbol{i,j}$）：对应网眼$\boldsymbol{G_{i,j}}$，网眼边界为$\boldsymbol{L_{i,j}}$;
- 对应每个网眼，均满足公式：$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\dfrac{\partial A}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\dfrac{\partial A}{\partial y}\right)=-J$

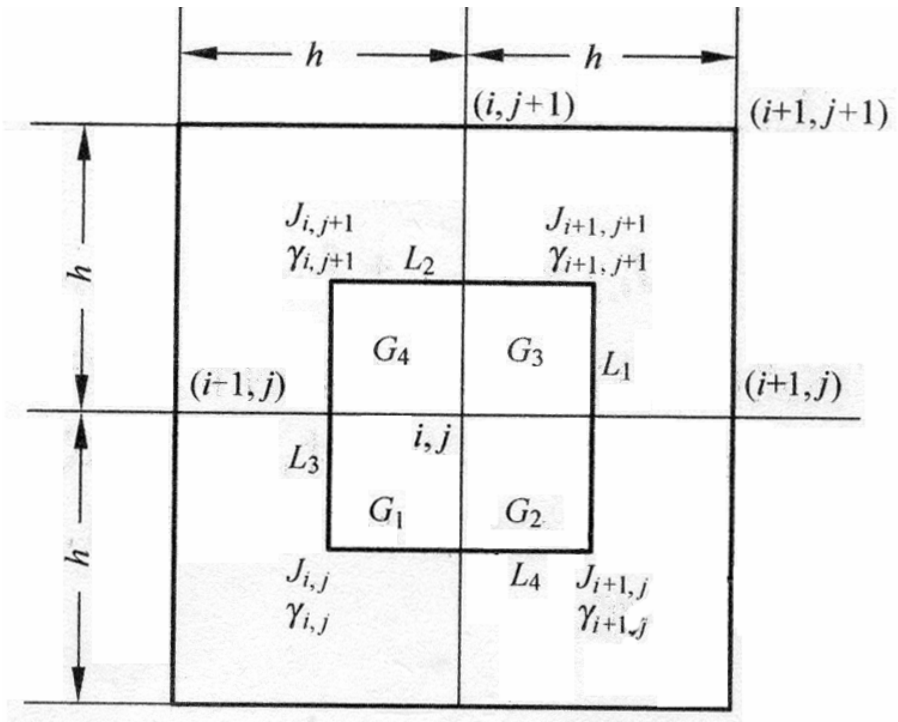


图 2. 17　积分法离散格式

在区域 $\boldsymbol{G_{i,j}}$，对上面准泊松方程等式两边进行二重积分：

$$\iint_{Gi,j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\frac{\partial A}{\partial y}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{Gi,j}J\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2.6 准泊松方程的差分离散格式

$$\iint_{\mathrm{G}i,j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\frac{\partial A}{\partial y}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{Gi,j}J\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

根据格林公式： $$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L(Q\mathrm{d}x+P\mathrm{d}y)$$

令：$P=\gamma\dfrac{\partial A}{\partial x}$ $Q=-\gamma\dfrac{\partial A}{\partial y}$ ，则对于每个网眼 $\mathbf{G_{i,j}}$ 可以得到

$$\iint_{G_{i,j}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\frac{\partial A}{\partial y}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L_{i,j}}\left(\gamma\frac{\partial A}{\partial x}\mathrm{d}y-\gamma\frac{\partial A}{\partial y}\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\iint_{G_{i,j}}J\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即 $$\boxed{\oint_{L_{i,j}}\gamma\frac{\partial A}{\partial n}\mathrm{d}l=-\iint_{G_{i,j}}J\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\Rightarrow\oint_{L_{i,j}}\left(-H_y\mathrm{d}y-H_x\mathrm{d}x\right)=-\iint_{G_{i,j}}J\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2.6 准泊松方程的差分离散格式

- 近似认为每个网格内的函数相同，用该网格右上角节点编号做下标；
- 规定法线方向与坐标方向一致时为正方向。

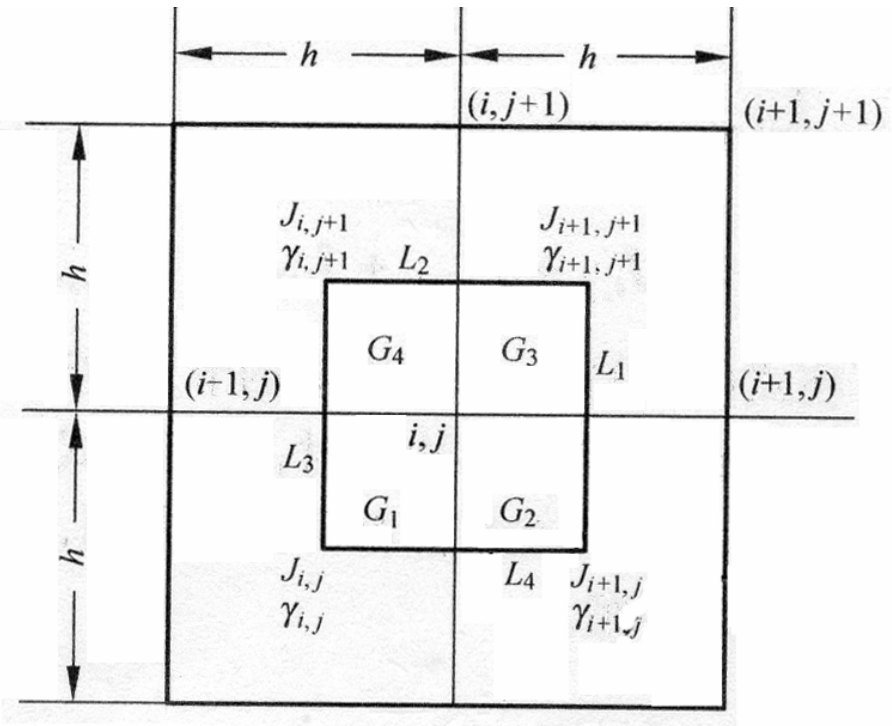


图 2. 17　积分法离散格式

$$
\begin{aligned}
\oint_{L_{i,j}} \gamma \frac{\partial A}{\partial n}\mathrm{d}l &= \int_{L_1} \gamma \frac{\partial A}{\partial n}\mathrm{d}l + \int_{L_2} \gamma \frac{\partial A}{\partial n}\mathrm{d}l \\
&\quad + \int_{L_3} \gamma \frac{\partial A}{\partial n}\mathrm{d}l + \int_{L_4} \gamma \frac{\partial A}{\partial n}\mathrm{d}l \\
&= \frac{A_{i+1,j}-A_{i,j}}{h}\frac{1}{2}\left(\gamma_{i+1,j}h+\gamma_{i+1,j+1}h\right)+ \\
&\quad \frac{A_{i,j+1}-A_{i,j}}{h}\frac{1}{2}\left(\gamma_{i+1,j+1}h+\gamma_{i,j+1}h\right)+ \\
&\quad \frac{A_{i-1,j}-A_{i,j}}{h}\frac{1}{2}\left(\gamma_{i,j+1}h+\gamma_{i,j}h\right)+ \\
&\quad \frac{A_{i,j-1}-A_{i,j}}{h}\frac{1}{2}\left(\gamma_{i,j}h+\gamma_{i+1,j}h\right)
\end{aligned}
$$

2.6 准泊松方程的差分离散格式

$$\oint_{L_{i,j}} \gamma \frac{\partial A}{\partial n} \mathrm{d}l = -\iint_{G_{i,j}} J\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ 的右端：

$$\iint_{G_{i,j}} J\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4} h^2 \left(J_{i,j} + J_{i,j+1} + J_{i+1,j} + J_{i+1,j+1} \right)$$

最后可得到准泊松方程的差分格式为：

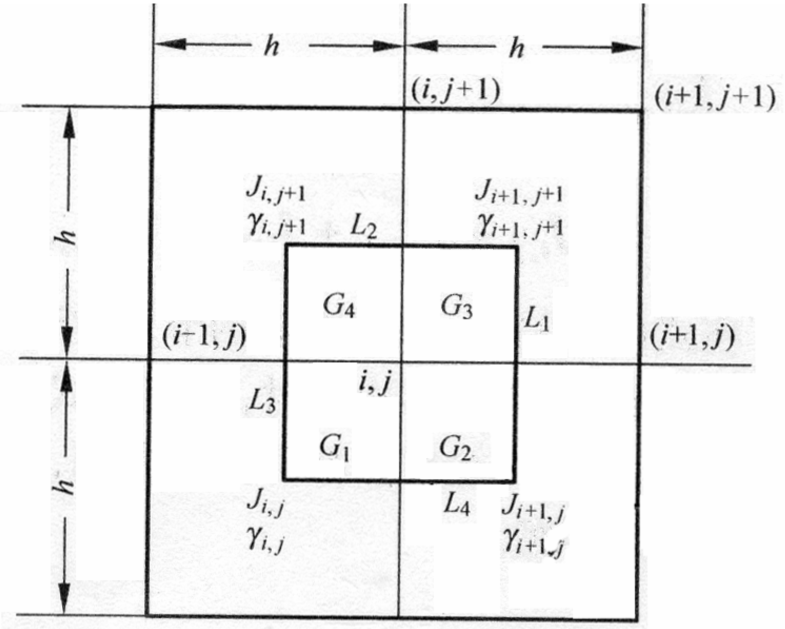


图 2. 17　积分法离散格式

$$\frac{1}{2}\left(\gamma_{i+1,j} + \gamma_{i+1,j+1}\right) A_{i+1,j} + \frac{1}{2}\left(\gamma_{i+1,j+1} + \gamma_{i,j+1}\right) A_{i,j+1} +$$

$$\frac{1}{2}\left(\gamma_{i,j+1} + \gamma_{i,j}\right) A_{i-1,j} + \frac{1}{2}\left(\gamma_{i,j} + \gamma_{i+1,j}\right) A_{i,j-1} -$$

$$\left(\gamma_{ij} + \gamma_{i,j+1} + \gamma_{i+1,j+1} + \gamma_{i+1,j}\right) A_{ij}$$

$$= -\frac{1}{4} h^2 \left(J_{i,j} + J_{i,j+1} + J_{i+1,j} + J_{i+1,j+1} \right)$$

2.6 准泊松方程的差分离散格式

- 边界条件的处理

1）第一类边界：节点参数已知；

2）第二类边界：可由下式导出差分格式。

$$\oint_{L_{i,j}} \gamma \frac{\partial A}{\partial n} \mathrm{d}l = -\iint_{G_{i,j}} J \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

讨论：

1）在轴对称稳定场中用矢量位 ***A*** 求解时，非线性差分方程如何用积分法导出？

2）利用积分法离散，为什么可以不考虑媒质交界面的存在？

2.7 非线性代数方程组的解法

- 非线性方程组的产生：$\mu = \dfrac{B}{H(B)}$

- 非线性方程组的求解：“逐次线性化”

1）首先视磁阻系数 γ 为一常数，使方程转化为线性代数方程组，求出此方程组的解；

2）求出**B**，根据 ***B*(*H*)**曲线，求出场域内各点相应的 γ；

3）按 γ 调整方程的系数，重复求解方程组，逐次逼近，最后求出满足要求的解。

- 迭代公式： $C\left(\gamma\left(A^{(\mathrm{k})}\right)\right)A^{(\mathrm{k+1})} = F$

F：方程中的已知量，包括电流密度和一类边界项

C：是 γ 的函数， γ 是 ***B*** 的函数，也就是 ***A*** 的函数

- 迭代过程： $C\left(\gamma\left(A^{(\mathrm{k})}\right)\right)A^{(\mathrm{k+1})}=F$

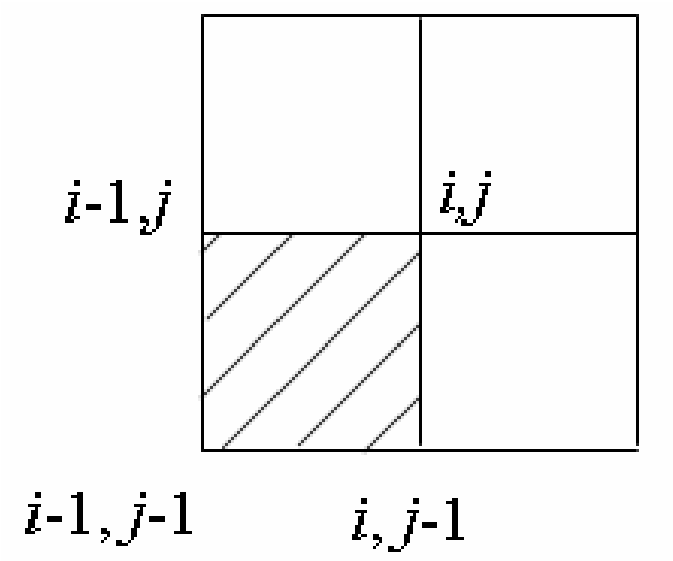
1）外迭代过程：由 $\boldsymbol{A}^{(k)}$ 算出 $\boldsymbol{B}$ 和相应的 $\boldsymbol{\gamma}^{(k)}=\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}^{(k)})$

，重新算出方程组的系数，准备进行另一轮计算。

2）内迭代过程：以 $\boldsymbol{A}^{(k)}$ 值做初值，按调整后的系数矩阵，

解线性代数方程组。

- 如何由节点参数 ***A*** 求网格参数 ***B***？



$$B_{\mathrm{x}}^{(\mathrm{k})}=\frac{1}{2}\left(\frac{A_{i,j}-A_{i,j-1}}{h}+\frac{A_{i-1,j}-A_{i-1,j-1}}{h}\right)$$

$$=\frac{1}{2h}\left(A_{i,j}-A_{i,j-1}+A_{i-1,j}-A_{i-1,j-1}\right)$$

$$B_{\mathrm{y}}^{(\mathrm{k})}=-\frac{1}{2h}\left(A_{i,j}-A_{i-1,\ j}+A_{i,j-1}-A_{i-1,j-1}\right)$$

$$B^{(\mathrm{k})}=\sqrt{B_{\mathrm{x}}^{(\mathrm{k})2}+B_{\mathrm{y}}^{(\mathrm{k})2}}$$

$$=\frac{1}{2h}\left[\left(A_{i,j}-A_{i,j-1}+A_{i-1,j}-A_{i-1,j-1}\right)^{2}+\left(A_{i,j}-A_{i-1,j}+A_{i,j-1}-A_{i-1,j-1}\right)^{2}\right]^{1/2}$$

非线性代数方程组逐次线性化求解具体步骤：

1）对所有网格赋初值 $A_{ij}^{(0)}$ 和 $\gamma_{ij}^{(0)}$；

2）用超松驰迭代法解线性方程组，得到第一次内迭代解 $A_{ij}^{(1)}$；

3）根据 $A_{ij}^{(1)}$ 计算各网格的 $B_{ij}^{(1)}$，由磁化曲线求各网格的 $\tilde{\gamma}_{ij}^{(1)}$；

4）求调整后的 $\gamma_{ij}^{(1)}$：

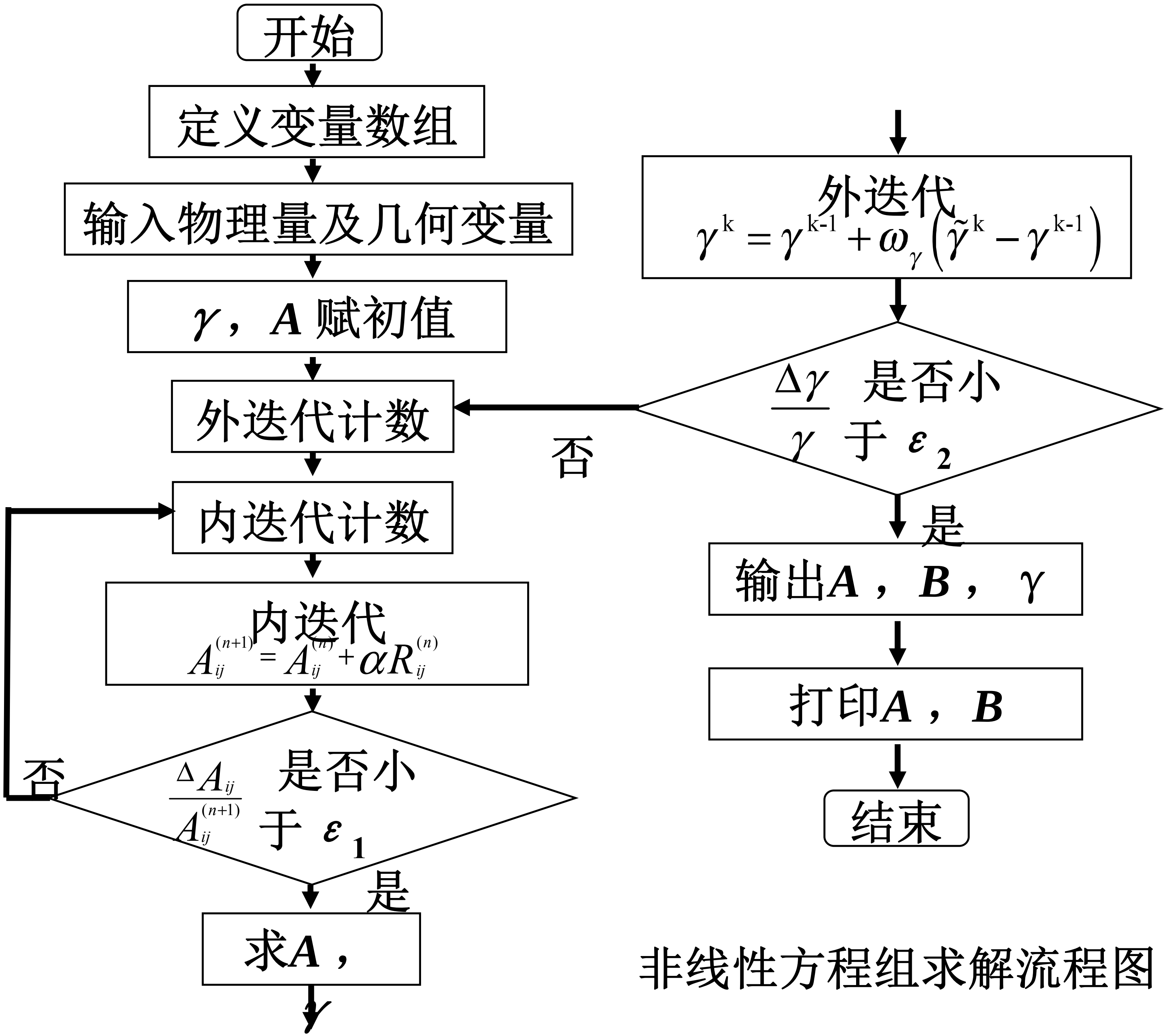
$$\gamma_{ij}^{(1)} = \gamma_{ij}^{(0)} + \omega\left(\tilde{\gamma}_{ij}^{(1)} - \gamma_{ij}^{(0)}\right)$$

ω ：欠松驰迭代因子，**<1**，避免 γ 值迭代过程中解的振荡。

5）由 $A_{ij}^{(1)}$ 和 $\gamma_{ij}^{(1)}$ 重新计算线性方程组，得到第二次内迭代近似解 $A_{ij}^{(2)}$；

6）重复上述步骤，求出 $A_{ij}^{(3)}$, $A_{ij}^{(4)}$，……在进行第 ***k*** 次外迭代时，$\gamma_{ij}^{(k)}$ 由下式求出：$\gamma_{ij}^{(k)} = \gamma_{ij}^{(k-1)} + \omega\left(\tilde{\gamma}_{ij}^{(k)} - \gamma_{ij}^{(k-1)}\right)$

经过 ***k*** 次迭代，满足迭代要求的计算精度 ε 时迭代过程可以结束。



非线性方程组求解流程图

2.8 场强与电磁积分量的计算

- 场强计算

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varPhi_e=-\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varPhi}}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial\boldsymbol{\varPhi}}{\partial y}\vec{e}_y\right)=-\left(\frac{\boldsymbol{\varPhi}_1-\boldsymbol{\varPhi}_3}{2h}\vec{e}_x+\frac{\boldsymbol{\varPhi}_2-\boldsymbol{\varPhi}_4}{2h}\vec{e}_y\right)$$

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\boldsymbol{\varPhi}=-\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varPhi}}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial\boldsymbol{\varPhi}}{\partial y}\vec{e}_y\right)=-\left(\frac{\boldsymbol{\varPhi}_1-\boldsymbol{\varPhi}_3}{2h}\vec{e}_x+\frac{\boldsymbol{\varPhi}_2-\boldsymbol{\varPhi}_4}{2h}\vec{e}_y\right)$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\partial A}{\partial y}\vec{e}_x-\frac{\partial A}{\partial x}\vec{e}_y=\left(\frac{A_2-A_4}{2h}\vec{e}_x-\frac{A_1-A_3}{2h}\vec{e}_y\right)$$

- 电磁积分量的计算

对于恒定电磁场：

$$\boldsymbol{\varPhi}=\int_s ka\,dS \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{\varPhi}=\sum_{i=1}^{n}ka_{\mathrm{av}(i)}\varDelta S_i$$

（其中***k***为媒质特性参数，***a***为场量，$a_{\mathrm{av}(i)}$ 表示在 $\varDelta S_i$ 中场强的平均值）

有限差分法小结

有限差分法适用于解边界简单，形状规则的场域的电磁场问题。有限差分离散的主要方法有泰勒级数法及积分方程法。前者适用于线性媒质中求差分方程，后者主要用于非线性媒质及多媒质情况。

求解方程组方法：

1) 超松弛迭代法

2) 非线性方程组的逐次线性化方法

误差来源：

1) 离散误差，由截断误差、差分结构及网格步长(**h**)决定。

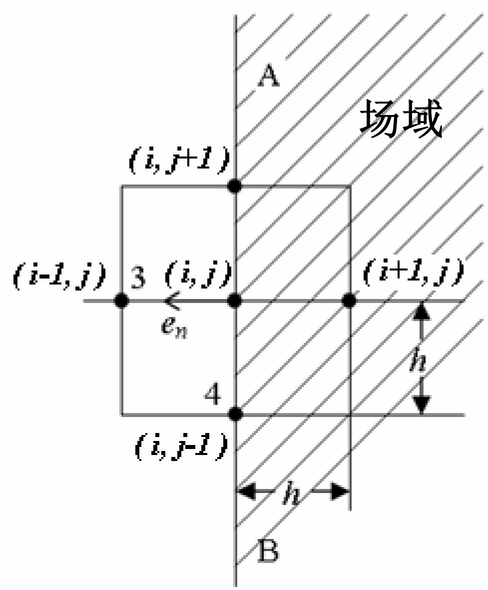
2) 迭代误差，决定于迭代计算中误差控制值。

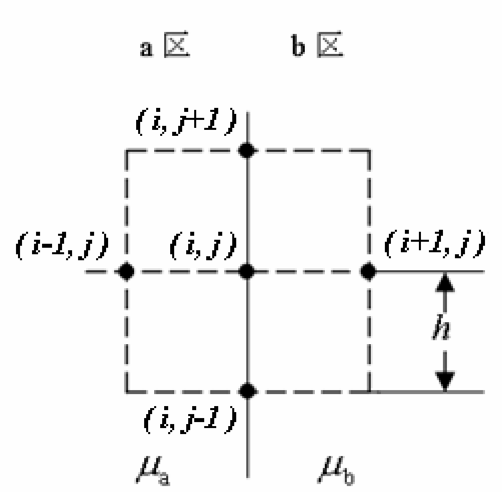
因此必须选择适当节点及合适的 ε，以保证对精度的要求。

有限差分法的发展：时域有限差分法、频域有限差分法等。

作业： 习题 2.4，2.5，2.6。

习题 2.4要求：对第一类边界条件，按边界与节点重合情况讨论；对第二类边界和媒质交界面条件，按以下情况讨论：





第二类边界：$\partial A/\partial n = c \neq 0$

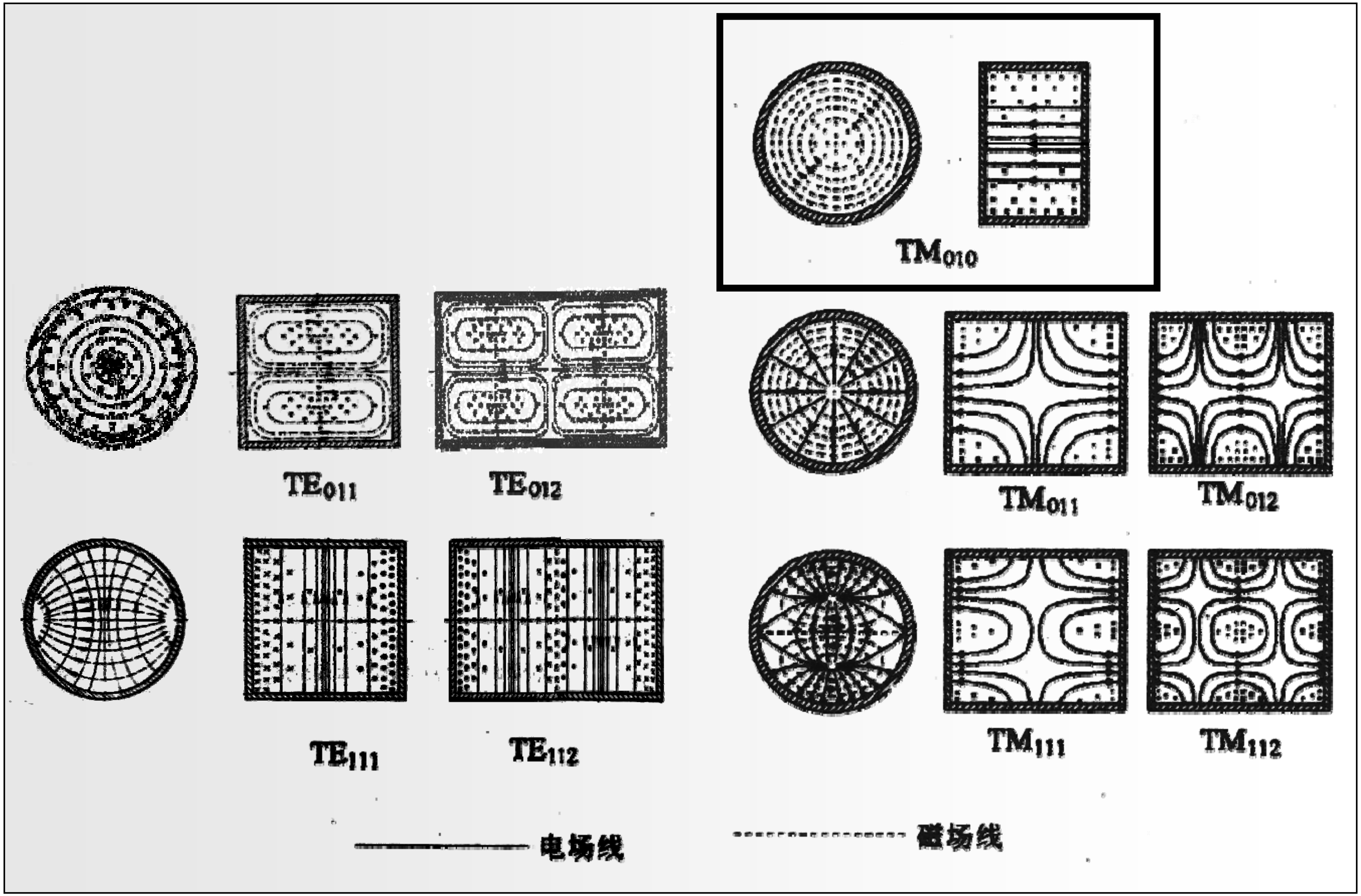
设左边区域中 $\gamma = \gamma_0$ ， $J = 0$ ；

右边区域中 $\gamma = \gamma_0$ $J \neq 0$ 处处相同。

媒质交界面

（设 a 区电流密度为**J(**处处相同**)**，**b**区为**0**）

2.4题要求写出具体公式并比较两种方法的结果。

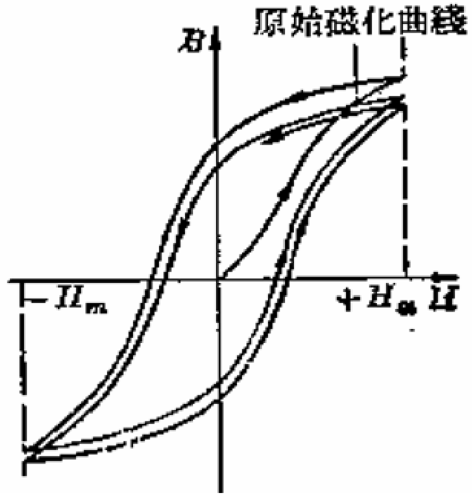


返回

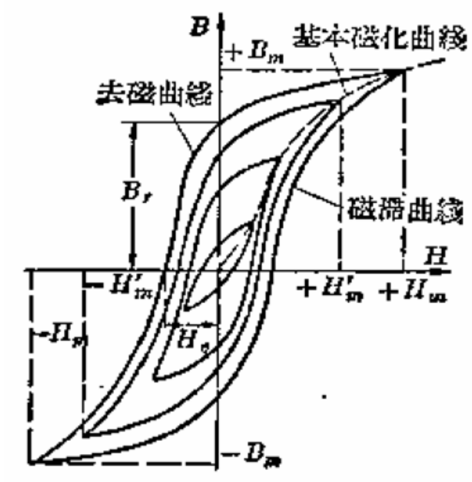
圆柱腔场分布示意图

补充：磁铁的磁化曲线

- 磁性材料分类：软磁、硬磁。（按磁化难易程度）
  - 软磁：矫顽力H_c较小的磁性材料。
  - 用来制造电磁铁的导磁体一般都属于软磁材料。
  - 对于直流电磁铁：多采用低碳钢、工程纯铁、铸铁。



- 磁化曲线
  - 原始磁化曲线（或称为初始磁化曲线）：从未磁化到饱和磁化的这段磁化曲线。
  - 磁滞现象：当铁磁物质在磁化状态下逐渐减小其外磁场强度H，这时B不再沿着原来的磁化曲线而变化，而是沿着另外一条曲线变化。
  - 磁滞回线：铁磁物质在磁场强度$+H_m$和$-H_m$之间交变反复磁化，则B和H之间关系变成一条回线。
  - 基本磁化曲线：将各条对称磁滞回线的顶点所连成的一条B-H曲线。



  - 在电磁场数值计算中，是根据基本磁化曲线来计算的。参考书和手册中所列的磁化曲线，一般都是指基本磁化曲线。