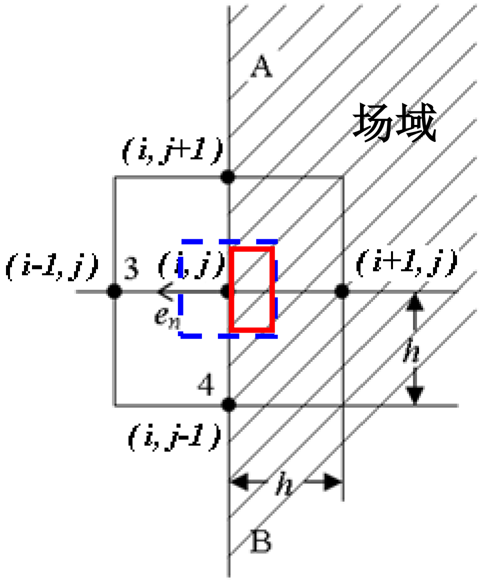
2.4 试分析用积分法离散时，对第一类边界和第二类边界应如何处理?媒质交界面应如何处理?与采用泰勒级数法离散时对边界的处理做一比较。

1）第一类边界：落在边界上的节点的值直接代入已知的位函数，与采用泰勒级数法离散时对边界的处理相同。

2）第二类边界：参考下图，若 $\frac{\partial A}{\partial n}=c\neq 0$，设左边区域中 $\gamma=\gamma_0$，J=0；右边区域中 $\gamma=\gamma_0$，J≠0 处处相同，



对上面左图蓝线路径积分：

$$\oint_L \gamma\frac{\partial A}{\partial n}\mathrm{d}l=\int_{L_1}\gamma\frac{\partial A}{\partial x}\mathrm{d}y+\int_{L_2}\gamma\frac{\partial A}{\partial y}\mathrm{d}x+\int_{L_3}\gamma\frac{\partial A}{\partial y}\mathrm{d}y+\int_{L_4}\gamma\frac{\partial A}{\partial y}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{A_{i+1,j}-A_{i,j}}{h}\gamma_0 h+\frac{A_{i,j+1}-A_{i,j}}{h}\gamma_0 h+c\bullet\gamma_0 h+\frac{A_{i,j-1}-A_{i,j}}{h}\gamma_0 h$$

$$=-\iint_{G_{i,j}} J\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{4}\bullet 2Jh^2$$

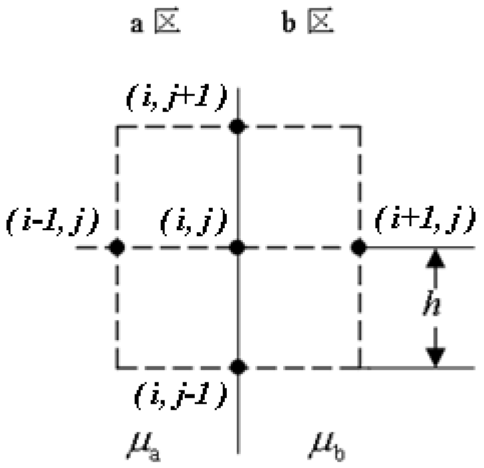
即 $A_{i+1,j}+A_{i,j+1}+A_{i,j-1}-3A_{i,j}+ch=-\frac{1}{2\gamma_0}Jh^2$

也可以对上面图中红线路径积分：

若 $\frac{\partial A}{\partial n}=c$，则可得与采用泰勒级数法离散时相同的结果：（泰勒级数法结果参考书式（2.42））

$$A_{i,j}=\frac{1}{4}\left(2A_{i+1,j}+A_{i,j+1}+A_{i,j-1}+2hc+\mu h^2 J_{i,j}\right)$$

3）媒质交界面：参考下图，若设 a 区电流密度为 J，b 区为 0。直接代入书式（2.90）即可。



$$\oint_L \gamma \frac{\partial A}{\partial n} \mathrm{d}l = \int_{L_1} \gamma \frac{\partial A}{\partial x} \mathrm{d}y + \int_{L_2} \gamma \frac{\partial A}{\partial y} \mathrm{d}x + \int_{L_3} \gamma \frac{\partial A}{\partial y} \mathrm{d}y + \int_{L_4} \gamma \frac{\partial A}{\partial y} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{A_{i+1,j} - A_{i,j}}{h} \gamma_b h$$

$$+ \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j}}{h} \frac{1}{2} (\gamma_a h + \gamma_b h)$$

$$+ \frac{A_{i-1,j} - A_{i,j}}{h} \gamma_a h$$

$$+ \frac{A_{i,j-1} - A_{i,j}}{h} \frac{1}{2} (\gamma_a h + \gamma_b h)$$

$$= -\iint_{G_{i,j}} J \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2} J h^2$$

可得

$$2A_{\text{i+1,j}} + (1+k)A_{\text{i,j+1}} + 2kA_{\text{i-1,j}} + (1+k)A_{\text{i,j-1}} - 4(1+k)A_{\text{i,j}} + kh^2 \mu_{\text{a}} J = 0$$

与采用泰勒级数法离散时结果相同。

2. 5　有一个可以简化为二维问题的 H 型磁铁，如图题 2.5 所示，试分别写出考虑铁区非线性时，空气区(1)、电流区(2)和铁区(3)在两种离散方法(泰勒级数、积分法)中矢量磁位的五点差分格式。

先列出矢量磁位 A 满足的二维平面场公式：

空气区和铁区：$\nabla^2 A = 0$　　　　电流区：$\nabla^2 A = -\mu J$

泰勒级数法：

(1) 空气区　$A_{i,j} = \frac{1}{4}\left(A_{i+1,j} + A_{i,j+1} + A_{i-1,j} + A_{i,j-1}\right)$　　书式（2.32）

(2) 电流区　$A_{i,j} = \frac{1}{4}\left(A_{i+1,j} + A_{i,j+1} + A_{i-1,j} + A_{i,j-1} + h^2 \mu J_{i,j}\right)$　　书式（2.33）

(3) 铁区　$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0 - \frac{1}{4\mu_0}\left((A_1 - A_3)(\mu_1 - \mu_3) + (A_2 - A_4)(\mu_2 - \mu_4)\right) = 0$

或　$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0 + \frac{1}{4\gamma_0}\left((A_1 - A_3)(\gamma_1 - \gamma_3) + (A_2 - A_4)(\gamma_2 - \gamma_4)\right) = 0$　书式（2.75）

积分法：

(1) 空气区 $A_{i,j}=\frac{1}{4}\left(A_{i+1,j}+A_{i,j+1}+A_{i-1,j}+A_{i,j-1}\right)$

(2) 电流区 $A_{i,j}=\frac{1}{4}\left(A_{i+1,j}+A_{i,j+1}+A_{i-1,j}+A_{i,j-1}+\frac{1}{4}h^2\mu(J_{i,j}+J_{i,j+1}+J_{i+1,j}+J_{i+1,j+1})\right)$

(3) 铁区 式（2.90）

$$\frac{1}{2}\left(\gamma_{i+1,j}+\gamma_{i+1,j+1}\right)A_{i+1,j}+\frac{1}{2}\left(\gamma_{i+1,j+1}+\gamma_{i,j+1}\right)A_{i,j+1}+\frac{1}{2}\left(\gamma_{i,j+1}+\gamma_{i,j}\right)A_{i-1,j}+$$
$$\frac{1}{2}\left(\gamma_{i,j}+\gamma_{i+1,j}\right)A_{i,j-1}-\left(\gamma_{ij}+\gamma_{i,j+1}+\gamma_{i+1,j+1}+\gamma_{i+1,j}\right)A_{ij}$$
$$=-\frac{1}{4}h^2\left(J_{i,j}+J_{i,j+1}+J_{i+1,j}+J_{i+1,j+1}\right)=0$$

讨论：当γ=常数时，可得$A_{i,j}=\frac{1}{4}\left(A_{i+1,j}+A_{i,j+1}+A_{i-1,j}+A_{i,j-1}\right)$。

2. 6 按积分法离散落在二类边界上的节点(*i, j*)所划分单元，如图题 2. 6 所示，边界 L_1 L_2 上，$\gamma\frac{\partial A}{\partial n}=q$，其他参数如图所示，求网眼 $G_{i,j}$ 节点（*i, j*）满足的差分方程。

$$\frac{1}{2}q(L_1+L_2)+\frac{A_{i-1,j}-A_{i,j}}{h_i}\bullet\frac{\gamma_2h_{j+1}+\gamma_{i,j}h_j}{2}+\frac{A_{i,j-1}-A_{i,j}}{h_j}\bullet\frac{\gamma_{i,j}h_i+\gamma_1h_{i+1}}{2}$$
$$=-\frac{1}{4}\bullet(\frac{1}{2}J_1h_{i+1}h_j+\frac{1}{2}J_2h_ih_{j+1}+J_{i,j}h_ih_j)$$