微积分 A (2)

姚家燕

第 20 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

第 19 讲回顾: 第一、二类曲线积分之间的关系

设路径 $L \subset \mathbb{R}^3$ 是起点为 A, 终点为 B 的分段光滑曲线, 其参数方程为

$$\vec{\ell}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^T \quad (t \in [a, b]),$$

而 $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T \colon L \to \mathbb{R}^3$ 为分段连续函数. $\forall P \in L$, 设 L 在点 P 处的单位切向量为

$$\vec{\tau}^0(P) = (\cos\alpha(P), \cos\beta(P), \cos\gamma(P))^T.$$

于是 $\forall t \in [a,b]$, 我们有

$$\vec{\tau}^0(\vec{\ell}(t)) = \frac{\vec{\ell}'(t)}{\|\vec{\ell}'(t)\|} = \frac{\big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)^T}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}.$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\big(\vec{\ell}(t)\big) &= \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}},\\
\cos\beta\big(\vec{\ell}(t)\big) &= \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}},\\
\cos\gamma\big(\vec{\ell}(t)\big) &= \frac{z'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}.
\end{aligned}$$

注意到 $\mathrm{d}\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t$, 故

$$x'(t)\,\mathrm{d}t = \cos\alpha\,\mathrm{d}\ell,\ \ y'(t)\,\mathrm{d}t = \cos\beta\,\mathrm{d}\ell,\ \ z'(t)\,\mathrm{d}t = \cos\gamma\,\mathrm{d}\ell.$$

进而我们就有

$$\begin{aligned}
&\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}(\vec{\ell})\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{L(A)}^{(B)} F_1(\vec{\ell})\,\mathrm{d}x + F_2(\vec{\ell})\,\mathrm{d}y + F_3(\vec{\ell})\,\mathrm{d}z \\
= \ &\int_a^b \Big(F_1(\vec{\ell}(t))x'(t) + F_2(\vec{\ell}(t))y'(t) + F_3(\vec{\ell}(t))z'(t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
= \ &\int_L \big(F_1(x,y,z)\cos\alpha + F_2(x,y,z)\cos\beta + F_3(x,y,z)\cos\gamma\big)\mathrm{d}\ell \\
= \ &\int_L (\vec{F}\cdot\vec{\tau}^0)(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell.
\end{aligned}$$

评注

- 由于第二类曲线积分可以转化成第一类曲线积分，因此只要不涉及到路径时，第二类曲线积分就具有与第一类曲线积分类似的性质.
- 形式上，我们有 $\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{\tau}^0 \,\mathrm{d}\ell$，也即

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\,\mathrm{d}\ell,\ \ \mathrm{d}y = \cos\beta\,\mathrm{d}\ell,\ \ \mathrm{d}z = \cos\gamma\,\mathrm{d}\ell.$$

回顾: 第二类曲面积分

- 连通光滑曲面的定向: 可定向曲面的定义及其刻画, 定向曲面. 对于一般的分片光滑曲面, 可以对于每个连通分支分片考虑.
- 第二类曲面积分的定义及其直观意义.
- 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为开集, $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ 分片连续, $S^+ \subset \Omega$ 为定向曲面, 则 $\iint\limits_{S^+} \vec{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$ 存在.
- 若 S 为封闭曲面, 通常将外侧取为正侧并将第二类曲面积分记作 $\oiint\limits_{S^+} \vec{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$.

回顾: 第一、二类曲面积分间的关系

$\forall P \in S$, 假设 $\vec{n}_S^0(P)$ 是由定向曲面 S^+ 的定向在点 P 处所确定的单位法向量, 则由定义知

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} &= \lim_{d\to 0}\sum_{j=1}^{k} \vec{F}(X_j)\cdot \vec{S}_j \\ &= \lim_{d\to 0}\sum_{j=1}^{k} \vec{F}(X_j)\cdot \vec{n}_S^0(X_j)|S_j| \\ &= \iint\limits_{S} (\vec{F}\cdot \vec{n}_S^0)(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

形式上, 我们有 $\mathrm{d}\vec{\sigma} = \vec{n}_S^0(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$.

若记 $\vec{n}_S^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)^T$, 则我们有

$$\iint\limits_{S^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \iint\limits_{S} (\vec{F}\cdot \vec{n}_S^0)(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint\limits_{S} \Big(F_1(x,y,z)\cos\alpha + F_2(x,y,z)\cos\beta$$

$$+F_3(x,y,z)\cos\gamma\Big)\,\mathrm{d}\sigma.$$

现定义 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = \cos\beta\,\mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma$, 于是我们有

$$\iint\limits_{S^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \iint\limits_{S^+} \Big(F_1(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$+F_2(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + F_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\Big).$$

回顾: 第二类曲面积分的性质

- 当不涉及到曲面的定向时, 第二类曲面积分具有与第一类曲面积分类似的性质.
- 曲面的有向性:

$$\iint_{S^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = -\iint_{S^-} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}.$$

- 曲面的可加性: 如果曲面 S 由 S_1, S_2 所组成, 并且 S_1, S_2 的定向由 S 的定向诱导, 则

$$\iint_{S^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \iint_{S_1^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} + \iint_{S_2^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}.$$

回顾: 第二类曲面积分的计算

设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为光滑曲面, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

其中 D 为 Jordan 可测, x, y, z 连续可微且

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D(y,z)}{D(u,v)} \\ \frac{D(z,x)}{D(u,v)} \\ \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

设 $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)^T$ 在 S 的邻域上分片连续, 则

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{S^+} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} &= \iint\limits_{S^+} \Big(F_1\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + F_2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + F_3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\Big) \\
= \quad & \pm\iint\limits_{D}\Big(F_1(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{D(y,z)}{D(u,v)} \\
& +F_2(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{D(z,x)}{D(u,v)} \\
& +F_3(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
= \quad & \pm\iint\limits_{D}\begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,
\end{aligned}
$$

其中 $\pm$ 由任意一点处, $\vec{n}$ 与 S^+ 是否同向来定.

形式上, 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z &= \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \pm\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \\
\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x &= \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \pm\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \\
\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \pm\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,
\end{aligned}
$$

其中 $\pm$ 由任意一点处, $\vec{n}$ 与 S^+ 是否同向来定.

回顾: 计算第二类曲面积分的步骤

- 给出定向曲面 S^+ 的参数方程. 有时还需要将 S 分片, 在每片上给出各自的参数表示.
- 在曲面上任取一个定点 P_0, 并将相应的参数记作 (u_0, v_0). 利用参数方程来计算法向量

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}\,'_u(u_0, v_0) \times \vec{r}\,'_v(u_0, v_0),$$

随后再将 $\vec{n}(u_0, v_0)$ 与 S^+ 在点 P_0 处的方向进行比较, 以便确定二重积分前的正负号.

第 20 讲

§5. 平面向量场 Green 公式

1. Green 公式

定义 1. 称 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为单连通集, 若 Ω 中的任意闭曲线所围的区域仍包含在 Ω 中 (也即 Ω 中的任意闭曲线可连续地收缩成为一点). 若 Ω 不为单连通集, 则称之为复连通集.

例 1. $\mathbb{R}^2$ 中单位圆盘 $B(\mathbf{0},1)$ 为单连通集, 但是去心单位圆盘 $\mathring{B}(\mathbf{0},1)$ 不为单连通.

定理 1. (Green 公式) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为单连通的有界闭区域, 它的边界 $\partial\Omega$ 为分段光滑闭曲线, 该曲线的正方向为逆时针方向, 记 $\vec{n}^0$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 如果 $\vec{F} = (F_1, F_2)^T : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 为连续可导的向量值函数, 则

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \, \mathrm{d}\ell = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

评注

- $\forall P \in \partial\Omega$, 假设 $\vec{\tau}^0(P) = (\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ 为 $\partial\Omega$ 在点 P 处的单位切向量, 则我们有

$$\vec{n}^0(P) = \Big(\cos\big(\alpha - \frac{\pi}{2}\big), \sin\big(\alpha - \frac{\pi}{2}\big)\Big)^T = (\sin\alpha, -\cos\alpha)^T.$$

又 $\mathrm{d}x = \cos\alpha\,\mathrm{d}\ell$, $\mathrm{d}y = \sin\alpha\,\mathrm{d}\ell$, 于是我们有

$$\vec{F}\cdot\vec{n}^0\,\mathrm{d}\ell = (F_1\sin\alpha - F_2\cos\alpha)\,\mathrm{d}\ell = F_1\,\mathrm{d}y - F_2\,\mathrm{d}x.$$

从而 Green 公式又可以表述成

$$\oint_{\partial\Omega^+} F_1\,\mathrm{d}y - F_2\,\mathrm{d}x = \iint_{\Omega}\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

- $|\Omega| = \iint\limits_{\Omega} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial\Omega^+} x\mathrm{d}y = -\oint_{\partial\Omega^+} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$
- 若将 F_2 换成 $-F_1$, F_1 换成 F_2, 则

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_{\partial\Omega^+} F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

- (外微分) 设 $\omega = F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$. 定义

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &:= \mathrm{d}F_1 \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}F_2 \wedge \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F_1}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F_2}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial y}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + \frac{\partial F_2}{\partial x}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

借助外微分, Green 公式变为

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}\omega &= \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \oint_{\partial\Omega^+} F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial\Omega^+} \omega.\end{aligned}$$

上式形式上与 Newton-Leibniz 公式极为类似:

$$\int_a^b \mathrm{d}F(x) = \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F\Big|_a^b.$$

这里区间 $[a,b]$ 的边界为 $\{a,b\}$.

最简单情形下的证明

假设 $\Omega=[a,b]\times[c,d]$. 则我们有

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Omega}\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=\;&\int_c^d\Big(\int_a^b\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y+\int_a^b\Big(\int_c^d\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x\\
=\;&\int_c^d\big(F_1(b,y)-F_1(a,y)\big)\,\mathrm{d}y+\int_a^b\big(F_2(x,d)-F_2(x,c)\big)\,\mathrm{d}x\\
=\;&\int_a^b\big(-F_2(x,c)\big)\,\mathrm{d}x+\int_c^d F_1(b,y)\,\mathrm{d}y+\int_b^a\big(-F_2(x,d)\big)\,\mathrm{d}x\\
&+\int_d^c F_1(a,y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

令 $A=(a,c)$, $B=(b,c)$, $C=(b,d)$, $D=(a,d)$. 则 $\partial\Omega$ 的边界由 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$ 组成, 从而

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\Omega^+} F_1\,\mathrm{d}y-F_2\,\mathrm{d}x &= \int_{\overrightarrow{AB}} F_1\,\mathrm{d}y-F_2\,\mathrm{d}x+\int_{\overrightarrow{BC}} F_1\,\mathrm{d}y-F_2\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_{\overrightarrow{CD}} F_1\,\mathrm{d}y-F_2\,\mathrm{d}x+\int_{\overrightarrow{DA}} F_1\,\mathrm{d}y-F_2\,\mathrm{d}x=\int_a^b\big(-F_2(x,c)\big)\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_c^d F_1(b,y)\,\mathrm{d}y+\int_b^a\big(-F_2(x,d)\big)\,\mathrm{d}x+\int_d^c F_1(a,y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

由此可得 $\displaystyle\oint_{\partial\Omega^+} F_1\,\mathrm{d}y-F_2\,\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Omega}\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

例 2. 求 $\int_{L_1^+}(1+ye^x)\,\mathrm{d}x+(x+e^x)\,\mathrm{d}y$, 其中 L_1 沿 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的上半周由 $A(a,0)$ 到 $B(-a,0)$.

解: 设 $L^+=L_1^+\cup\overrightarrow{BA}$, 并且将 L 所围成的区域记作 Ω. 则由 Green 公式可知

$$\begin{aligned}
&\oint_{L^+}(1+ye^x)\,\mathrm{d}x+(x+e^x)\,\mathrm{d}y\\
=\;&\iint\limits_{\Omega}\Big(-\frac{\partial(1+ye^x)}{\partial y}+\frac{\partial(x+e^x)}{\partial x}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=\;&\iint\limits_{\Omega}(-e^x+1+e^x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega}1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}ab.
\end{aligned}$$

另一方面, 我们也有

$$\int_{\overrightarrow{BA}} (1 + ye^x)\,\mathrm{d}x + (x + e^x)\,\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a} 1\,\mathrm{d}x = 2a.$$

由此可得

$$\begin{aligned} & \int_{L_1^+} (1 + ye^x)\,\mathrm{d}x + (x + e^x)\,\mathrm{d}y \\ = \ & \oint_{L^+} (1 + ye^x)\,\mathrm{d}x + (x + e^x)\,\mathrm{d}y \\ & - \int_{\overrightarrow{BA}} (1 + ye^x)\,\mathrm{d}x + (x + e^x)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}ab - 2a. \end{aligned}$$

例 3. 计算 $\iint\limits_{\Omega} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中区域 Ω 为三条直线 $x=y$, $y=0$, $x=1$ 所围成的三角形.

解: 令 $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(1,1)$. 则我们由 Green 公式立刻可得

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Omega} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \oint_{\partial\Omega^+} \big(-y\sin(x^2)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\overrightarrow{OA}} \big(-y\sin(x^2)\big)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\overrightarrow{AB}} \big(-y\sin(x^2)\big)\,\mathrm{d}x + \int_{\overrightarrow{BO}} \big(-y\sin(x^2)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^0 \big(-x\sin(x^2)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}\Big(\frac{x^2}{2}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{2}\cos(x^2)\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-\cos 1).
\end{aligned}$$

对于复连通区域, 如果规定沿它的边界的正方向行走时, 上述区域在其边界的左边, 则我们有:

定理 2. **(Green 公式)** 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为复连通的有界闭区域, 它的边界 $\partial\Omega$ 为分段光滑的闭曲线, 且其方向取正向. 若 $\vec{F} = (F_1, F_2)^T : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 为连续可导的向量值函数, 则

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\Omega^+} F_1\,\mathrm{d}y - F_2\,\mathrm{d}x &= \iint_{\Omega} \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\
\oint_{\partial\Omega^+} F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y &= \iint_{\Omega} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

定义 2. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为非空开集, $\vec{F} = (F_1, F_2)$ 在 Ω 上可导. $\forall (x, y) \in \Omega$, 定义

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{F}(x,y) &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y), \\ \mathrm{rot}\vec{F}(x,y) &= \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y), \end{aligned}$$

称为 $\vec{F}$ 的散度和旋度. 此时 Green 公式变为

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \,\mathrm{d}\ell = \oint_{\partial\Omega^+} F_1 \,\mathrm{d}y - F_2 \,\mathrm{d}x = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F}(x,y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_{\partial\Omega^+} F_1 \,\mathrm{d}x + F_2 \,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{rot}\vec{F}(x,y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 4. 设 $L \subset \mathbb{R}^2$ 为光滑的简单闭曲线, 所围的区域为 Ω, 而 $\vec{n}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta)^T$ 为 L 的单位外法向量. 求证:

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\oint_L (x\cos\alpha + y\cos\beta)\,\mathrm{d}\ell.$$

证明: 由 Green 公式可知

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\oint_L (x\cos\alpha + y\cos\beta)\,\mathrm{d}\ell = \frac{1}{2}\oint_L (x,y)^T \cdot \vec{n}^0\,\mathrm{d}\ell \\ = \; & \frac{1}{2}\iint_\Omega \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |\Omega|. \end{aligned}$$

例 5. 设 $L \subset \mathbb{R}^2$ 为光滑闭曲线, 逆时针方向为正向, $\vec{n}^0$ 为 L 的单位外法向量, 而 $\vec{a}$ 为固定的单位向量. 求证: $\int_L \cos\langle \vec{n}^0, \vec{a}\rangle \, \mathrm{d}\ell = 0$.

证明: 设 L 所围区域为 Ω. 由 Green 公式可知

$$\int_L \cos\langle \vec{n}^0, \vec{a}\rangle \, \mathrm{d}\ell = \int_L \vec{a} \cdot \vec{n}^0 \, \mathrm{d}\ell = \iint_\Omega (\operatorname{div} \vec{a}) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

作业题: 第 4.6 节第 214 页第 1 题第 (1) 小题, 第 215 页第 4 题第 (1) 小题.

2. 平面第二类曲线积分与路径的无关性 原函数

问题: 设 $\vec{F}=(F_1,F_2)^T$, L 是以 A 为起点, 以 B 为终点的路径, 问第二类曲线积分

$$\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}=\int_{L(A)}^{(B)} F_1(x,y)\,\mathrm{d}x+F_2(x,y)\,\mathrm{d}y$$

何时仅与 A,B 有关而与路径 L 无关? 若无关, 则将上述积分记作 $\int_{(A)}^{(B)} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$.

定理 3. 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为非空开集, $\vec{F}=(F_1,F_2)^T$ 在 Ω 上为连续可导, 而 $A,B\in\Omega$ 为两个固定点, $L\subset\Omega$ 为连接 A,B 的分段光滑曲线. 则

$$\int_{L(A)}^{(B)}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$$

仅依赖 A,B 而与路径 L 无关当且仅当对于 Ω 中过 A,B 的任意分段光滑闭曲线 Γ, 均有

$$\oint_{\Gamma^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=0.$$

证明: 假设 $L_1, L_2 \subset \Omega$ 为连接 A, B 的两条分段光滑的曲线. 从 A 出发经 L_1 到 B 后, 再沿 L_2 回到 A 可得到过 A, B 的分段光滑的闭曲线 Γ; 而由过 A, B 的任意分段光滑闭曲线 Γ, 也可以得到连接 A, B 的分段光滑曲线 L_1, L_2. 此时

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{L_1(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - \int_{L_2(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

则 $\oint_{\Gamma^+} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$ 当且仅当 $\int_{L_1(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{L_2(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$. 因此所证结论成立.

定理 4. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为单连通开区域, 而函数 $\vec{F} = (F_1, F_2)^T$ 在 Ω 上连续可导. 则下列等价:

(1) $\forall (x, y) \in \Omega$, 均有 $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)$;

(2) $\forall A, B \in \Omega$, $\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ 仅与 A, B 有关, 而与 Ω 中连接 A, B 的分段光滑曲线 L 无关;

(3) 存在函数 $U : \Omega \to \mathbb{R}$ 使得 $\forall (x, y) \in \Omega$,

$$\mathrm{d}U(x, y) = F_1(x, y)\,\mathrm{d}x + F_2(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

证明: (1) $\Rightarrow$ (2) 对于 Ω 中过 A, B 的分段光滑闭曲线 L, 设其所围区域为 Ω_1, 由 Green 公式知

$$\oint_{L^+} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_{L^+} F_1 \, \mathrm{d}x + F_2 \, \mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega_1} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 0.$$

进而由前面定理可知 (2) 成立.

(2) $\Rightarrow$ (3) 固定 $A \in \Omega$. $\forall B = (x_0, y_0) \in \Omega$, 定义

$$U(x_0, y_0) = \int_{(A)}^{(B)} F_1 \, \mathrm{d}x + F_2 \, \mathrm{d}y.$$

下面将证明 $\mathrm{d}U = F_1 \, \mathrm{d}x + F_2 \, \mathrm{d}y$.

固定 $(x_0, y_0) \in \Omega$. 当 $(h, k) \to (0, 0)$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
&U(x_0+h, y_0+k) - U(x_0, y_0) \\
&= \int_{(A)}^{(x_0+h, y_0+k)} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - \int_{(A)}^{(x_0, y_0)} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\
&= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0+h, y_0+k)} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\
&= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0+h, y_0)} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{(x_0+h, y_0)}^{(x_0+h, y_0+k)} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\
&= \int_{x_0}^{x_0+h} F_1(x, y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y_0+k} F_2(x_0+h, y)\,\mathrm{d}y \\
&= F_1(x_0+\theta_1 h, y_0)h + F_2(x_0+h, y_0+\theta_2 k)k \ \big(\theta_1, \theta_2 \in (0,1)\big) \\
&= F_1(x_0, y_0)h + F_2(x_0, y_0)k + o(1)h + o(1)k \\
&= F_1(x_0, y_0)h + F_2(x_0, y_0)k + o(1)\sqrt{h^2+k^2},
\end{aligned}
$$

于是 $\mathrm{d}U(x_0, y_0) = F_1(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + F_2(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y$,

由此立刻可得 (3) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (1) 由于 $\mathrm{d}U = F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$, 则我们有

$$F_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, \ F_2 = \frac{\partial U}{\partial y},$$

于是 $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$. 又 F_1, F_2 为连续可导, 因此 $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ 均连续, 从而 $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, 进而可得 $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$. 故 (1) 成立.

评注

- 单连通的条件不能够去掉. 例如函数 $\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上满足条件 (1), 但对于单位圆周 $L: \ x^2 + y^2 = 1$ (逆时针方向), 却有
$$\oint_{L^+} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \cos\varphi\,\mathrm{d}(\sin\varphi) - \sin\varphi\,\mathrm{d}(\cos\varphi) = 2\pi.$$
- 仅 (1) $\Rightarrow$ (2) 才需要单连通条件.
- 满足 $\mathrm{d}U = F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$ 的函数 U 被称为微分形式 $F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$ 的一个原函数.

- 若 U 为 $F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$ 的一个原函数, 那么 $U + C$ 也是上述微分形式另外一个原函数, 其中 C 为任意的常数.
- 前面的定理是说: 单连通区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上的微分形式 $F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$ 具有原函数当且仅当我们有 $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

定理 5. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为开区域, 函数 $\vec{F}=(F_1,F_2)^T$ 在 Ω 上连续并且使得 $F_1\,\mathrm{d}x+F_2\,\mathrm{d}y$ 在 Ω 上有原函数 U, 则 $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\Omega$, 我们有

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} F_1\,\mathrm{d}x+F_2\,\mathrm{d}y=U(x_2,y_2)-U(x_1,y_1)=U\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}.$$

证明: 假设 $\vec{\gamma}:[0,1]\to\Omega$ 为分段连续可导函数使得 $\vec{\gamma}(0)=(x_1,y_1)$, $\vec{\gamma}(1)=(x_2,y_2)$. $\forall t\in[0,1]$, 记 $\vec{\gamma}(t)=(x(t),y(t))$. 设 $\vec{\gamma}$ 定义的曲线为 L, 则

$$\begin{aligned}\int_{L(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} F_1\,\mathrm{d}x+F_2\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \big(F_1(\vec{\gamma}(t))x'(t)+F_2(\vec{\gamma}(t))y'(t)\big)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \mathrm{d}\big(U(\vec{\gamma}(t))\big)=U(\vec{\gamma}(1))-U(\vec{\gamma}(0)).\end{aligned}$$

例 6. 计算 $\int_{L(O)}^{(B)}(e^y+\sin x)\,\mathrm{d}x+(xe^y-\cos y)\,\mathrm{d}y$, 其中 L 是沿圆弧 $(x-\pi)^2+y^2=\pi^2$ 由原点 O 到点 $B(\pi,\pi)$. 另外, 记 $A=(\pi,0)$.

解: 方法 1. 因 $\frac{\partial(e^y+\sin x)}{\partial y}=e^y=\frac{\partial(xe^y-\cos y)}{\partial x}$, 则

$$
\begin{aligned}
&\int_{L(O)}^{(B)}(e^y+\sin x)\,\mathrm{d}x+(xe^y-\cos y)\,\mathrm{d}y\\
=&\int_{\overrightarrow{OA}}(e^y+\sin x)\,\mathrm{d}x+(xe^y-\cos y)\,\mathrm{d}y\\
&+\int_{\overrightarrow{AB}}(e^y+\sin x)\,\mathrm{d}x+(xe^y-\cos y)\,\mathrm{d}y\\
=&\int_0^{\pi}(1+\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}(\pi e^y-\cos y)\,\mathrm{d}y=2+\pi e^{\pi}.
\end{aligned}
$$

方法 2. 由题设可知

$$\begin{aligned} & (e^y + \sin x)\,\mathrm{d}x + (xe^y - \cos y)\,\mathrm{d}y \\ = \; & (e^y\,\mathrm{d}x + xe^y\,\mathrm{d}y) + \sin x\,\mathrm{d}x - \cos y\,\mathrm{d}y \\ = \; & \mathrm{d}(xe^y - \cos x - \sin y), \end{aligned}$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned} & \int_{L(O)}^{(B)} (e^y + \sin x)\,\mathrm{d}x + (xe^y - \cos y)\,\mathrm{d}y \\ = \; & (xe^y - \cos x - \sin y)\Big|_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} = 2 + \pi e^{\pi}. \end{aligned}$$

作业题: 第 4.6 节第 214 页第 3.(1) 题, 第 215 页第 5 题.

例 7. 求解 $\left(\log y - \frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{y} - \log x\right)\mathrm{d}y = 0.$

解: 方法 1. 由题设可知

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\log y - \frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{y} - \log x\right)\mathrm{d}y \\
&= \left(\log y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}(\log y)\right) - \frac{x}{y}\,\mathrm{d}y - \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{y} - \log x\right)\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{d}\left(x\log y\right) - \left(\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + \log x\,\mathrm{d}y\right) = \mathrm{d}\left(x\log y - y\log x\right).
\end{aligned}$$

于是常微分方程的通解为 $x\log y - y\log x = C$,

其中 $C \in \mathbb{R}$ 为任意常数.

方法 2. 由题设立刻可知

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\log y-\frac{y}{x}\big)=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\ \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{x}{y}-\log x\big)=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},$$

故原方程为全微分方程, 从而该方程的解满足

$$\begin{aligned}
C &= \int_{(1,1)}^{(x,y)}\big(\log v-\frac{v}{u}\big)\mathrm{d}u+\big(\frac{u}{v}-\log u\big)\mathrm{d}v \\
&= \int_{(1,1)}^{(x,1)}\big(\log v-\frac{v}{u}\big)\mathrm{d}u+\big(\frac{u}{v}-\log u\big)\mathrm{d}v \\
&\quad +\int_{(x,1)}^{(x,y)}\big(\log v-\frac{v}{u}\big)\mathrm{d}u+\big(\frac{u}{v}-\log u\big)\mathrm{d}v \\
&= -\int_1^x\frac{\mathrm{d}u}{u}+\int_1^y\big(\frac{x}{v}-\log x\big)\mathrm{d}v=x\log y-y\log x,
\end{aligned}$$

其中 $C\in\mathbb{R}$ 为任意常数.

例 8. 求解 $(x+y)\,\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y=0.$

解: 由题设知 $0=x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y$, 故

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)}+\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \\
&= \mathrm{d}\big(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\big)+\frac{\frac{\mathrm{d}x}{y}+x\,\mathrm{d}(\frac{1}{y})}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \\
&= \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+\arctan\frac{x}{y}\right).
\end{aligned}
$$

于是原方程的解为 $\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+\arctan\frac{x}{y}=C$,

其中 $C\in\mathbb{R}$ 为任意常数.

例 9. 计算 $\int_{L^+} \frac{(x+y)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 L 是:

(1) $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$, 顺时针方向;

(2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$, 顺时针方向;

(3) 从 $A(2,0)$ 到 $B(4,4)$ 的有向线段.

解: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 若 $x\neq 0$, 则我们有

$$\begin{aligned}\frac{(x+y)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} &= \frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)}+\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{d}\Big(\log(x^2+y^2)\Big)+\frac{\frac{1}{x}\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}(\frac{1}{x})}{1+(\frac{y}{x})^2}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{d}\Big(\log(x^2+y^2)\Big)+\mathrm{d}\Big(\arctan(\frac{y}{x})\Big).\end{aligned}$$

(1) 由于曲线

$$L : (x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 1$$

为简单封闭曲线, 它所围成的区域不包含原点且为单连通, 则我们有

$$\oint_{L^+} \frac{(x+y)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \arctan(\frac{y}{x})\right)\Big|_{(3,1)}^{(3,1)} = 0.$$

(2) 假设曲线 $L: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 所围的区域为 Ω, 那么原点为 Ω 的内点, 从而存在 $\delta > 0$ 使得 Ω 包含 $L_\delta: x^2 + y^2 = \delta^2$. 再令 Ω_δ 是以 $L \cup L_\delta$ 为边界的区域, 其中 L^+ 沿顺时针方向, 而 L_δ^+ 沿逆时针方向. 则由 Green 公式可知

$$\oint_{L^+ \cup L_\delta^+} \frac{(x+y)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = -\iint_{\Omega_\delta} \Big(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x-y}{x^2+y^2} \Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{\Omega_\delta} \Big(\frac{(x^2+y^2)-(x+y)(2x)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-(x^2+y^2)-(x-y)(2y)}{(x^2+y^2)^2} \Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{\Omega_\delta} \Big(\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2-2xy)}{(x^2+y^2)^2} \Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

由此我们立刻可得

$$\oint_{L^+} \frac{(x+y)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = -\oint_{L_\delta^+} \frac{(x+y)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{(\delta\cos\varphi + \delta\sin\varphi)\,\mathrm{d}(\delta\sin\varphi)}{\delta^2} + \frac{(\delta\cos\varphi - \delta\sin\varphi)\,\mathrm{d}(\delta\cos\varphi)}{\delta^2}$$

$$= -\int_0^{2\pi} \Big((\cos\varphi + \sin\varphi)\cos\varphi - (\cos\varphi - \sin\varphi)\sin\varphi\Big)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= -2\pi.$$

(3) 由于有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 包含于单连通区域 $x > 1$, 而后者不包含原点, 于是我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\overrightarrow{AB}} \frac{(x+y)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \\
= \; & \left(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\Bigg|_{(2,0)}^{(4,4)} \\
= \; & \frac{1}{2}\log 32 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 4 \\
= \; & \frac{3}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

例 10. 问曲线积分 $\int_{L(A)}^{(B)} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 在复连通域 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}((0,0);1)$ 上是否与路径无关? 若是, 求其从 $A(2,0)$ 到点 $B(0,3)$ 的积分值.

解: 设 Γ 为 Ω 中过 A, B 的分段光滑闭曲线且参数方程为 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$. 则

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma^+} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2-1}} &= \int_a^b \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2-1}}\mathrm{d}t \\ &= \left(\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2-1}\right)\Big|_a^b = 0,\end{aligned}$$

因此题中的曲线积分在 Ω 上与路径无关.

特别地, 若 $A=(2,0)$, $B=(0,3)$, 并设 $L=\overrightarrow{AB}$,

则其方程为 $y=3-\frac{3}{2}x\ (0\leqslant x\leqslant 2)$, 于是

$$\begin{aligned}
\int_{(A)}^{(B)}\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2-1}} &= \int_{L(A)}^{(B)}\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\\
&= -\int_0^2\frac{x-\frac{3}{2}(3-\frac{3}{2}x)}{\sqrt{x^2+(3-\frac{3}{2}x)^2-1}}\,\mathrm{d}x\\
&= -\sqrt{x^2+\left(3-\frac{3}{2}x\right)^2-1}\,\Bigg|_0^2\\
&= 2\sqrt{2}-\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

§6. 空间向量场 Gauss 公式和 Stokes 公式

1. Gauss 公式

定理 1. (Gauss 公式) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界闭区域, 其边界 $\partial\Omega$ 为分片光滑可定向曲面且以外侧为正向, 而 $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T \in \mathscr{C}^{(1)}(\Omega)$, 则

$$\oiint\limits_{\partial\Omega^+} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

注: (1) 令 $\mathrm{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$, 称为向量场 $\vec{F}$ 的散度.

(2) Gauss 公式的证明与 Green 公式的类似.

利用微分形式表述的 Gauss 公式

因 $\displaystyle\iint\limits_{\partial\Omega^+} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \iint\limits_{\partial\Omega^+} F_1\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + F_2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + F_3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

于是 Gauss 公式也可以表述成

$$\begin{aligned}&\oiint\limits_{\partial\Omega^+} F_1\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + F_2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + F_3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ =\ &\iiint\limits_{\Omega}\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

我们由此考虑微分 2-形式

$$\omega = F_1\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + F_2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + F_3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

我们下面定义外微分

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega :=& \mathrm{d}F_1 \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}F_2 \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}F_3 \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
=& \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F_1}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_1}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F_2}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_2}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
&+\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F_3}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_3}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
=& \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

故 Gauss 公式也可表述成 $\displaystyle\oiint_{\partial\Omega^+} \omega = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}\omega.$

例 1. 计算 $\iint\limits_{S^+} x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中 $S: x+y+z=1\ (x,y,z\geqslant 0)$, 它的正侧的单位法向量为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

解: 将曲面 S 与坐标平面所围成的区域记为 Ω, 则由 Gauss 公式, 我们立刻可知

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{S^+} x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
=\ &\oiint\limits_{\partial\Omega^+} x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega} 3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

作业题: 第 4.7 节第 226 页第 3.(1) 题, 第 4 章总复习题第 229 页第 5, 7 题.

例 2. 求 $\iint\limits_{S^+}(x^2-z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(z^2-y)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$, 其中 S^+ 为抛物面 $z=1-x^2-y^2$, $z\in[0,1]$ 的外侧.

解: 令 S_1 为圆盘 $z=0\ (x^2+y^2\leqslant 1)$, 其正向为 z 轴的方向. 将 S^+ 与 S_1^- 所围成的区域记作 Ω, 则由 Gauss 公式, 我们立刻可知

$$\oiint\limits_{S^+\cup S_1^-}(x^2-z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(z^2-y)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iiint\limits_{\Omega}(-2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\ -2\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1\Big(\int_0^{1-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\rho\Big)\mathrm{d}\varphi=-4\pi\int_0^1(1-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\ -4\pi\Big(\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\Big)\Big|_0^1=-\pi.$$

曲面 S_1 的方程为 $z=0$ $(x^2+y^2\leqslant 1)$, 则我们有 $\frac{D(x,y)}{D(x,y)}=1$, 而 S_1 的正向为 $(0,0,1)^T$, 故

$$\iint\limits_{S_1^+}(x^2-z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(z^2-y)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1(\rho\cos\varphi)^2\rho\,\mathrm{d}\rho\Big)\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^1\cdot\frac{\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{4}.$$

由此立刻可得

$$\iint\limits_{S^+}(x^2-z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(z^2-y)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$
$$=\iint\limits_{S_1^+}(x^2-z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(z^2-y)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-\pi=-\frac{3}{4}\pi.$$

2. Stokes 公式

定理 2. (Stokes 公式) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为非空开集, $S \subset \Omega$ 为分片光滑可定向有界曲面, 其边界 ∂S 为分段光滑闭曲线并且 S^+ 与 ∂S^+ 的定向满足右手螺旋法则, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T \in \mathscr{C}^{(1)}(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S^+} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} &= \oint_{\partial S^+} F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y + F_3\,\mathrm{d}z \\ &= \iint_{S^+} \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}, \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ 被称为向量场 $\vec{F}$ 的旋度.

评注

我们由定义立刻可知

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\vec{F} &= \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{pmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\\ \frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 的标准基底.

于是 Stokes 公式也可以表述成

$$\oint_{\partial S^+} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_{\partial S^+} F_1 \,\mathrm{d}x + F_2 \,\mathrm{d}y + F_3 \,\mathrm{d}z$$

$$= \iint\limits_{S^+} \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \Big(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\Big)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

$$+\Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{S^+} \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}.$$

由此令 $\omega = F_1 \,\mathrm{d}x + F_2 \,\mathrm{d}y + F_3 \,\mathrm{d}z$, 并定义

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}F_1 \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}F_2 \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}F_3 \wedge \mathrm{d}z.$$

则我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}F_1 \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}F_2 \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}F_3 \wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F_1}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_1}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x \\
&+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F_2}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_2}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F_3}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_3}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial F_1}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial F_2}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&\quad + \frac{\partial F_2}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial F_3}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial F_3}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

于是 Stokes 公式也可写成 $\oint_{\partial S^+} \omega = \iint\limits_{S^+} \mathrm{d}\omega$.

例 3. 求 $\oint_{L^+} \dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$, 其中曲线 L 为球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限中与坐标平面相交的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ 连接而成的闭曲线.

解: 曲面 S 的正向向外. 由 Stokes 公式可知

$$\begin{aligned}
\oint_{L^+} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} &= \frac{1}{a^2}\oint_{L^+} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{a^2}\iint\limits_{S^+} \vec{\nabla} \times (x,y,z)^T \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = 0.
\end{aligned}$$

作业题: 第 4.7 节第 227 页第 5 题第 (1) 小题.

谢谢大家!