1 线性空间

1. 假设P_5是所有不超过5次的实系数多项式$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$的集合。证明：$P_5$是实数上的线性空间，其中加法就是多项式的加法，数乘就是实数乘以一个多项式。

2. 证明向量$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$，$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$和$v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$构成$\mathbb{R}^3$中的一组基。

3. 假设V是向量组$\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$的线性扩张，且任意一个$v_i$都可以写成向量组$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$的线性组合。证明$V$中的任何一个向量都可以写成$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$的线性组合。

4. 假设r维线性空间V中有n个线性无关的向量$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$。证明：$n \leq r$。

5. 假设线性无关的向量组$\{v_1, \cdots, v_r\}$可以写成向量组$\{u_1, \cdots, u_s\}$的线性组合。证明：$r \leq s$。

6. 考虑r维线性空间V中的一组线性无关的向量$\{v_1, \cdots, v_s\}$且$s < r$。证明：a) V存在一个向量v，v不能写成$\{v_1, \cdots, v_s\}$的线性组合。b) 可以通过往$\{v_1, \cdots, v_s\}$中添加向量构造V中的一组基。

7. 假设$\{u_1, \cdots, u_n\}$是$\mathbb{R}^m$中的两两正交的向量组（$\forall i, j,\, u_i \cdot u_j = 0$），并且每一个向量$u_i$都不等于零向量。证明：$\{u_1, \cdots, u_n\}$是线性无关的。

8. 假设$\{v_1, \cdots, v_r\}$和$\{w_1, \cdots, w_r\}$是r维线性空间的两组基。证明：从基$\{w_1, \cdots, w_r\}$到基$\{v_1, \cdots, v_r\}$的变换矩阵可逆。

9. v是$\mathbb{R}^n$中的非0向量，A是一个$n \times n$的矩阵，且存在一个正整数k使得$A^{k+1}v = 0$但是$A^k v \neq 0$。证明：$\{v, Av, \cdots, A^k v\}$线性无关。

2 矩阵的子空间和秩

1. 找出下面矩阵的约化行阶梯矩阵，λ等于多少的时候秩最大？最小？

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ \lambda & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix} \tag{1}$$

2. 证明$m \times n$矩阵A的列空间$C(A)$和零空间$N(A)$分别是$\mathbb{R}^m$和$\mathbb{R}^n$中的子空间。

3. 找出下面矩阵零空间的基

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

4. 写出以下面矩阵为增广矩阵的线性方程组的通解，并且写成$x = x_p + x_n$的形式

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 10 & -7 & 1 \\ -5 & -5 & 3 & 7 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right] \tag{3}$$

5. A和B是任意矩阵，证明：$\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(A)$且$\mathrm{rank} AB \le \mathrm{rank}(B)$。