微积分 A (2)

姚家燕

第 23 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

第 23 讲

第 5 章 常数项级数

§1. 常数项级数及其性质

定义 1. 数列 $\{u_n\}$ 的形式无穷和

$$u_1 + u_2 + \cdots u_n + \cdots$$

称为以 u_n 为通项的级数, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 或者 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$. $\forall n \geqslant 1$, 定义 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, 称之为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和. 若数列 $\{S_n\}$ 收敛到 $S \in \mathbb{R}$ 或者发散, 则相应地称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛到 $S \in \mathbb{R}$ 或者发散.

评注

(1) 记号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 有着两层意思：一个是形式上的，一个表示级数的极限，也即 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

(2) 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 可以来构造部分和数列 $\{S_n\}$. 反过来，若 $\{S_n\}$ 为任意的数列，定义 $u_1 = S_1$，且 $u_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$，那么 $\{S_n\}$ 就是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列，且级数和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

这表明级数理论与数列理论完全一致.

(3) $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x \in [n-1, n)$, 定义 $f(x) = u_n$. 于是 $\forall N \geqslant 1$, 我们均有

$$\int_0^N f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^N \int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^N u_n.$$

由此我们立刻得, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛当且仅当广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 此时我们还有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

这表明级数理论是广义积分理论的特殊情形.

作业题: 第 5.1 节第 235 页第 5 题.

例 1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$ 的敛散性, 其中 $q \in \mathbb{R}$.

解: 分情况讨论. 当 $|q| \neq 1$ 时, $\forall N \geqslant 1$, 我们均有 $S_N = \sum_{n=1}^{N} q^{n-1} = \frac{1-q^N}{1-q}$. 于是当 $|q| < 1$ 时, 我们有 $\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$. 而当 $|q| > 1$ 时, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \infty$.

当 $q = 1$ 时, $\forall N \geqslant 1$, $S_N = N$, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = +\infty$.

当 $q = -1$ 时, $\forall n \geqslant 1$, $S_{2n} = 0$, $S_{2n-1} = 1$, 于是部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$ 发散.

常数项级数的性质

1. 线性性. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$ 也收敛, 并且我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

2. 任意地去掉、添加或者改变级数的有限多项, 不会改变其敛散性, 但会改变该级数的和.

3. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$, 则对于任意严格递增的自然数数列 $\{n_k\}$, 我们均有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} u_n = S,$$

其中约定 $n_0 = 0$.

证明: 事实上, 由数列极限的基本性质可知

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} u_n &= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} u_n \\ &= \lim_{K\to\infty} \sum_{n=1}^{n_K} u_n = \lim_{K\to\infty} S_{n_K} = S.\end{aligned}$$

注: 上述性质的逆命题一般不成立. 例如, 级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散, 但 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{2k-1}+(-1)^{2k}\right)=0.$

4. 设 $\{n_k\}$ 为严格递增的自然数数列. 令 $n_0=0.$ 如果 $\forall k\geqslant 1$, 和式 $v_k=\sum\limits_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}u_n$ 中的项恒 $\geqslant 0$ 或者恒 $\leqslant 0$, 则当 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k=S$ 时, 我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S.$

证明: $\forall m\geqslant 1$, 令 $S'_m=\sum\limits_{k=1}^{m}v_k=\sum\limits_{n=1}^{n_m}u_n=S_{n_m}$. 那么由题设条件立刻可知我们有 $\lim\limits_{m\to\infty}S'_m=\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=S.$

由于 $\{n_k\}$ 为严格递增自然数数列, 则 $\forall n \geqslant 1$, $\exists! k \geqslant 1$ 使得 $n_{k-1} \leqslant n < n_k$. 又和式 v_k 中的项恒 $\geqslant 0$ 或者恒 $\leqslant 0$, 则 S_n 介于 $S_{n_{k-1}}, S_{n_k}$ 之间, 也即介于 S'_{k-1}, S'_k 之间, 则由夹逼原理可知

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} S'_k = S,$$

因此所证结论成立.

推论. 若数列 $\{u_n\}$ 恒 $\geqslant 0$ 或恒 $\leqslant 0$, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

5. (必要条件) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

证明: 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$ 收敛, 则由定义可知

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = S,$$

从而得 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

故所证结论成立.

注: 上述条件不是级数收敛的充分条件. 比如说 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ 发散.

作业题: 第 5.1 节第 235 页第 6 第 (5) 小题.

§2. 常数项级数的判敛法则

定理 1. (Cauchy 准则) 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall m > n \geqslant N$, 均有

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon.$$

定义 1. 通项均 $\geqslant 0$ 的级数称为非负项级数.

定理 2. (单调有界定理) 非负项的级数收敛当且仅当其部分和数列有上界.

注: 若非负级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 发散, 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = +\infty$.

定理 3. 设 $f:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为单调函数. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛当且仅当 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证明: 首先假设 f 为单调递减函数.

充分性. 设 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 则 $\forall n\geqslant 1$, 均有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)\leqslant f(1)+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=f(1)+\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(1)+\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty,$$

于是由单调有界定理可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

必要性. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. 则 $\forall A \geqslant 1$, 均有

$$\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{[A]+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{[A]} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{[A]} f(k) = S_{[A]} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty,$$

于是我们由单调有界定理可知 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

当 f 为单调递增时, 证明类似, 但此时如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$, 进而可得 $f \equiv 0$.

例 1. 固定 $p \in \mathbb{R}$. 试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解: 因为非负单调函数的广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛当且仅当我们有 $p > 1$, 由此知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛当且仅当我们有 $p > 1$.

补充作业题:

1. 设 $p \in \mathbb{R}$. 试判断级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^p}$ 的敛散性.

定理 4. (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为非负项级数且 $u_n = O(v_n)$ $(n \to \infty)$, 也即存在 $N > 0$ 以及 $C > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|u_n| \leqslant C|v_n|$.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

证明: 援引非负函数的广义积分的比较判别法, 立刻可知所证结论成立.

推论 1. 设非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = c$.

(1) 若 $0 < c < +\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散.

(2) 若 $c = 0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(3) 若 $c = +\infty$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

证明: 由比较判别法立刻可知所证结论成立.

推论 2. 设 $p \in \mathbb{R}$, 而非负数列 $\{u_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} n^p u_n = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

(1) 若 $p > 1$ 且 $0 \leqslant \lambda < +\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 若 $p \leqslant 1$ 且 $0 < \lambda \leqslant +\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 2. 试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ 是否收敛? 如果该级数收敛, 计算其极限.

解: 当 $n \to \infty$ 时, 我们有

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

故所求级数收敛, 并且我们有还有

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} \\
= \; & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\
= \; & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\
= \; & \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\
= \; & \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N+1}}\right) = 1.
\end{aligned}
$$

例 3. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解: 由题设可知

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) \\
=\ &\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})] \\
=\ &\lim_{N\to\infty}[(\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1})-(\sqrt{2}-1)] \\
=\ &\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{N+2}+\sqrt{N+1}}+1-\sqrt{2}\right) \\
=\ &1-\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

例 4. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ 的敛散性.

解: 当 $n\to\infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\big(1+o(1)\big)\right)\\ &= \frac{1}{2n^2}\big(1+o(1)\big).\end{aligned}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛, 于是由比较判别法立刻知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ 收敛.

例 5. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{5n^3-2n^2+1}}{n^2}$ 的敛散性.

解: 当 $n \to \infty$ 时, 我们有

$$\frac{\sqrt[3]{5n^3-2n^2+1}}{n^2} = \frac{\sqrt[3]{5-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}}{n} \sim \frac{\sqrt[3]{5}}{n},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散, 于是由比较判别法立刻可知

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{5n^3-2n^2+1}}{n^2}$ 发散.

例 6. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}$ 的敛散性.

解: 当 $n\to\infty$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} &= e-e^{n\log(1+\frac{1}{n})}=e\left(1-e^{n\log(1+\frac{1}{n})-1}\right) \\
&\sim -e\left(n\log(1+\frac{1}{n})-1\right)=-en\left(\log(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}\right) \\
&\sim -en\left(-\frac{1}{2n^{2}}\right)=\frac{e}{2n},
\end{aligned}
$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2}}{4n^{2}}$ 收敛, 则由比较判别法立刻可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}$ 收敛.

例 7. 设 $p, q \in \mathbb{R}$. 判断 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^p(\log n)^q}$ 的敛散性.

解: $\forall n \geqslant 2$, 令 $u_n = \frac{1}{n^p(\log n)^q}$. 下面分情况讨论.

(1) 当 $p > 1$ 时, $\forall n \geqslant 2$, 令 $v_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}(1+p)}}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}(p-1)}(\log n)^q} = 0,$$

而 $\frac{1}{2}(1+p) > 1$, 由此知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} v_n$ 收敛, 进而由比较判别法立刻可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ 收敛

(2) 当 $p<1$ 时, $\forall n\geqslant 2$, 令 $v_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}(1+p)}}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}(1-p)}}{(\log n)^q}=+\infty,$$

而 $\frac{1}{2}(1+p)<1$, 故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}v_n$ 发散, 进而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 发散.

(3) 当 $p=1$ 时, 由于级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 与广义积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^q}\overset{t=\log x}{=\!=}\int_{\log 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^q}$$

同敛散, 由此可知当 $q>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 收敛, 而当 $q\leqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 发散.

例 8. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ 的敛散性.

解: 当 $n \to \infty$ 时, 我们有

$$\frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 于是由比较判别法立刻可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ 收敛.

作业题: 第 5.2 节第 245 页第 1 题第 (4), (6) 题.

定理 5 (比率判别法) 假设正项数列 $\{u_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$ 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(2) 当 $\rho>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散;

(3) 当 $\rho=1$ 时, 无法判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性.

注: 该判别法也称为 d'Alembert 判别法.

证明: (1) 假设 $\rho < 1$. 任取 $q \in (\rho, 1)$. 则由数列极限的保序性可知 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q.$$

由此我们立刻可得

$$u_n = u_{N+1} \prod_{k=N+1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \frac{u_{N+1}}{q^{N+1}} \cdot q^n.$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛, 于是由比较判别法立刻可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 假设 $\rho > 1$. 任取 $q \in (1, \rho)$. 则由数列极限的保序性可知 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > q.$$

由此我们立刻可得

$$u_n = u_{N+1} \prod_{k=N+1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant \frac{u_{N+1}}{q^{N+1}} \cdot q^n,$$

于是数列 $\{u_n\}$ 趋于 $+\infty$, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 当 $\rho = 1$ 时, 通常无法来判别级数的敛散性.

例如, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, 但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

例 9. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ 的敛散性.

解: 当 $n\to\infty$ 时, 我们有

$$\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{3} < 1,$$

由此可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ 收敛.

例 10. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 的敛散性.

解: 当 $n \to \infty$ 时, 我们有

$$\frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{n+1}{3} \to +\infty,$$

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ 发散, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 收敛.

作业题: 第 5.2 节第 245 页第 2 题第 (4) 小题.

回顾: 上极限

设 $\{a_n\}$ 为数列. $\forall n \geqslant 1$, 定义

$$b_n = \sup_{k \geqslant n} a_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

则 $\{b_n\}$ 为单调递降数列. 由单调有界定理知, 数列$\{b_n\}$有极限$A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 记作 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, 并称之为数列 $\{a_n\}$ 的上极限. 可证明该极限为数列 $\{a_n\}$ 的最大极限点. 数列 $\{a_n\}$ 的任意有极限的子列的极限被称为该数列的极限点.

定理 6 (根值判别法) 假设非负数列 $\{u_n\}$ 满足 $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3) 当 $\rho = 1$ 时, 无法判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

注: 该判别法也称为 Cauchy 判别法.

证明: (1) 设 $\rho < 1$. 任取 $q \in (\rho, 1)$. 由题设可知

$$q > \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{u_k},$$

于是由数列极限的保序性可知 $\exists N > 0$ 使得

$$q > \sup_{k\geqslant N} \sqrt[k]{u_k}.$$

从而 $\forall n > N$, 均有 $\sqrt[n]{u_n} < q$, 故我们有 $u_n < q^n$.
而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛, 因此由比较判别法立刻可知
级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 故所证结论成立.

(2) 设 $\rho > 1$. 任取 $q \in (1, \rho)$. 由题设可知

$$q < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{u_k}.$$

由递降数列的极限的性质可知, $\forall n \geqslant 1$, 均有

$$q < \sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{u_k}.$$

由此可以构造严格递增自然数数列 $\{n_k\}$ 使得 $q < (u_{n_k})^{\frac{1}{n_k}}$, 则 $u_{n_k} > q^{n_k} > 1$. 从而数列 $\{u_{n_k}\}$ 不收敛到 0, 进而可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 当 $\rho = 1$, 通常无法判断相关级数的敛散性.
例如, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

注: 如果假设 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, 那么由 Stolz 定理可得 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$, 由此可知根值判别法蕴含着比率判别法.

例 11. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tan^n\left(\theta + \frac{1}{n}\right)$ 的敛散性, 其中假设 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

解: 题设级数从某项开始变为非负项级数且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tan^n\left(\theta+\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \tan\theta.$$

当 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $\tan\theta < 1$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan^n\left(\theta+\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

当 $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan\theta > 1$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan^n\left(\theta+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

现在假设 $\theta = \frac{\pi}{4}$. 则当 $n \to \infty$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
\log\tan^n\left(\theta + \frac{1}{n}\right) &= n\log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \\
&= n\Big(\log\left(1 + \tan\frac{1}{n}\right) - \log\left(1 - \tan\frac{1}{n}\right)\Big) \\
&= \frac{\log\left(1 + \tan\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} - \frac{\log\left(1 - \tan\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 2,
\end{aligned}
$$

于是 $\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\theta + \dfrac{1}{n}\right) = e^2 \neq 0$, 由此立刻可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\tan^n\left(\theta + \dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

例 12. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解: $\forall n \geqslant 1$, 令 $u_n = \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\log(2n)}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e > 1,$$

于是由根值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散.

作业题: 第 5.2 节第 245 页第 3 题第 (6) 小题.

谢谢大家!