第 7 次作业题

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$, (2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{(\arcsin x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}$,

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$, (4) $\lim\limits_{n\to\infty}n\big((1+\frac{1}{n})^n-e\big)$.

解: (1) 方法 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}\cos x}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\sin x}+\frac{e^x-e^{\sin x}}{1-\cos x}\right)=1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}\cos x}{\sin x}$

$=1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-e^{\sin x})\cos x}{\sin x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

$=1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x\cos x}{\sin x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=1.$

方法 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x}=1.$

注: 该题说明 L'Hospital 法则并不总是最好的解题方法.

(2) 方法 1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{(\arcsin x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{(\arcsin x-\frac{\pi}{4})(\arcsin x+\frac{\pi}{4})}{(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)}$

$=\frac{\pi}{4}\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\arcsin x-\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}x-1}=\frac{\pi}{4}\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}.$

方法 2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{(\arcsin x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}\xlongequal{y=x-\frac{1}{\sqrt{2}}}\lim\limits_{y\to 0}\frac{(\arcsin(y+\frac{1}{\sqrt{2}})-\frac{\pi}{4})(\arcsin(y+\frac{1}{\sqrt{2}})+\frac{\pi}{4})}{2y(y+\sqrt{2})}$

$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\arcsin(y+\frac{1}{\sqrt{2}})-\frac{\pi}{4}}{y}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-(y+\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}=\frac{\pi}{4}.$

(3) 因 $\lim\limits_{x\to\infty}\log(\cos\frac{1}{x})^{x^2}\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\log\cos y}{y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{y^2}=-\frac{1}{2}$, 故 $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n\big((1+\frac{1}{n})^n-e\big)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\log(1+x)}{x}-1}-1}{x}$

$=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\log(1+x)}{x}-1}{x}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{e}{2}.$

2. 设 f 可导且 $f(0)=f'(0)=1$, 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$.

解: **方法 1.** 由题设可知 f 在点 $x=0$ 处连续, 故我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln\big(1+(f(x)-1)\big)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{f(x)-1}\\ =\;&\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{f(x)-f(0)}=f'(0)\cdot 1\cdot\frac{1}{f'(0)}=1.\end{aligned}$$

方法 2. 由题设可知 $f(y)=1+y+o(y)=1+y(1+o(1))$ $(y\to 0)$, 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln\big(1+(f(x)-1)\big)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{f(x)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

注: 该题不满足 L'Hospital 法则的条件, 因此这里不能应用该法则.

3. 求函数 $y=\frac{x}{1-x}$ 在点 $x_0=2$ 处的 n 次 Taylor 多项式.

解: 方法 1. 由于 $y=\frac{x}{1-x}$ 为初等函数, 因此在其自然定义域 $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ 上为无穷可导. 于是 $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $y^{(n)}=\big(-1+\frac{1}{1-x}\big)^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. 从而所求 n 次 Taylor 多项式为 $-2+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(x-2)^k$.

方法 2. 令 $x=t+2$, 则当 $x\to 2$, 也即 $t\to 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{t+2}{1+t}=-1-\frac{1}{1+t}\\
&= -1-\Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k+o(t^n)\Big)\\
&= -2+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}t^k+o(t^n)\\
&= -2+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(x-2)^k+o\big((x-2)^n\big).
\end{aligned}$$

因此所求 n 次 Taylor 多项式为 $-2+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(x-2)^k$.

4. 若函数 $f\in\mathscr{C}^{(3)}[0,1]$ 使得 $f(0)=f'(\frac{1}{2})=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$, 求证: $\exists\xi\in(0,1)$ 满足 $f'''(\xi)=12$.

证明: 由带 Lagrange 余项 Taylor 公式知, $\exists\xi_1\in(0,\frac{1}{2})$, $\exists\xi_2\in(\frac{1}{2},1)$ 使得

$$\begin{aligned}
f(0) &= f\big(\frac{1}{2}\big)+f'\big(\frac{1}{2}\big)\big(-\frac{1}{2}\big)+\frac{f''\big(\frac{1}{2}\big)}{2!}\big(-\frac{1}{2}\big)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}\big(-\frac{1}{2}\big)^3,\\
f(1) &= f\big(\frac{1}{2}\big)+f'\big(\frac{1}{2}\big)\big(\frac{1}{2}\big)+\frac{f''\big(\frac{1}{2}\big)}{2!}\big(\frac{1}{2}\big)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}\big(\frac{1}{2}\big)^3,
\end{aligned}$$

由此立刻可得 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=24$. 又 f''' 连续, 于是由连续函数介值定理可知, $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得我们有 $f'''(\xi)=\frac{1}{2}\big(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\big)=12$。

注: 若仅假设 f 在 $[0,1]$ 上为三阶可导, 上述结论依然成立, 只是在最后一步, 我们需要借助 Darboux 定理.

5. 研究下列函数的单调性, 有极值的求极值.

(1) $f(x)=x^ne^{-x}$ $(x\geqslant 0,\ n\geqslant 1$ 为整数$)$,

(2) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$ $(x\in[0,2\pi])$.

解: (1) 由题设可知 f 为初等函数在 $[0,+\infty)$ 上的限制, 因此 f 为无穷可导. 又 $\forall x\geqslant 0$, $f'(x)=x^{n-1}(n-x)e^{-x}$. 则 f' 在 $(0,n)$ 上取正号, 在 $(n,+\infty)$ 上取负号, 故 f 在 $[0,n]$ 上严格递增, 在 $[n,+\infty]$ 上严格递减, 从而 f 的极值点为 n, 函数 f 在该点取极大值 $(\frac{n}{e})^n$.

(2) 由于 f 是初等函数在 $[0,2\pi]$ 上的限制, 故无穷可导且 $\forall x\in[0,2\pi]$,

$$f'(x)=3(\sin^2 x)\cos x-3(\cos^2 x)\sin x=\frac{3}{2}\sqrt{2}(\sin(2x))\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

则 f' 在 $(0,\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{2},\pi)$, $(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$ 上为负, 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$, $(\pi,\frac{5\pi}{4})$, $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ 上为正. 由此知 f 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$, $[\frac{\pi}{2},\pi]$, $[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$ 上严格递减, 在 $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$, $[\pi,\frac{5\pi}{4}]$, $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ 上严格递增, 从而 f 的极小值点分别为 $\frac{\pi}{4}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 相应的极小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1, -1; 极大值点为 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$, 相应的极大值分别为 1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. $\forall x>0$, 求证: $\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$.

证明: $\forall x>-1$, 令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$, 则 f 为初等函数, 因此无穷可导, 并且 $\forall x>0$, 均有 $f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}>0$, 于是函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上为严格递增, 从而 $\forall x>0$, 均有 $f(x)>f(0)=0$, 由此立刻可以导出所证结论成立.

7. 设 f 在 x_0 处 n 阶可导使得 $f^{(n)}(x_0)>0$, 但 $f^{(k)}(x_0)=0$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$.

(1) 若 n 为偶数, 则点 x_0 为 f 的极小值点,

(2) 若 n 为奇数, 则点 x_0 不是 f 的极值点.

证明: 由题设可知, $\exists\eta>0$ 使得 f 在 $(x_0-\eta,x_0+\eta)$ 上为 $n-1$ 可导且 $f^{(n-1)}$ 在点 x_0 处可导, 于是由带 Peano 余项的 Taylor 的公式以及题设条件可知, 当 $x\to x_0$ 时, 我们有 $f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\big((x-x_0)^n\big)$, 从而

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}=1,$$

进而由函数极限的保序性可知, $\exists\delta\in(0,\eta)$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 均有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}>\frac{1}{2}.$$

(1) 若 n 为偶数, 则 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 我们有

$$f(x)-f(x_0)\geqslant\frac{1}{2}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\geqslant 0,$$

因此函数 f 在点 x_0 处取极小值.

(2) 若 n 为奇数, 则 $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$, 我们有

$$f(x)-f(x_0)>\frac{1}{2}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n>0,$$

而 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$, 我们却有

$$f(x)-f(x_0)<\frac{1}{2}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n<0,$$

从而 x_0 不是函数 f 的极值点.

8. 求函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在区间 $[-10,10]$ 上的最值.

解: 方法 1. 由题设可得知 $f(x)=|(x-1)(x-2)|$. 该函数在 $[-10,10]$ 上连续, 于是由最值定理可知它在 $[-10,10]$ 上有最值, 相应的最值点必为它的临界点或 $-10,10$. 注意到 $f'(x)=\operatorname{sgn}((x-1)(x-2))\cdot(2x-3)$. 于是 f 的驻点为 $\frac{3}{2}$, 而临界点为 $1,2,\frac{3}{2}$. 又 $f(-10)=132$, $f(1)=f(2)=0$, $f(\frac{3}{2})=\frac{1}{4}$, $f(10)=72$, 因此 f 在点 1, 2 处取最小值 0, 而在点 -10 处取最大值 132.

方法 2. $\forall x\in[-10,10]$, 定义 $F(x)=(f(x))^2=(x-1)^2(x-2)^2$. 该函数在 $[-10,10]$ 上为初等函数, 故可导, 从而连续. 由最值定理知它在 $[-10,10]$ 上有最值, 相应的最值点必为它的驻点或 $-10,10$. 注意到

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= 2(x-1)(x-2)^2+2(x-1)^2(x-2)\\
&= 2(x-1)(x-2)(2x-3).
\end{aligned}
$$

于是 F 而驻点为 $1,2,\frac{3}{2}$. 又 $F(-10)=132^2$, $F(1)=F(2)=0$, $F(\frac{3}{2})=\frac{1}{16}$, $F(10)=72^2$, 因此 F 在点 1, 2 处取最小值 0, 而在点 -10 处取最大值 132^2, 从而 f 在点 1, 2 处取最小值 0, 而在点 -10 处取最大值 132.

方法 3. 由题设可知函数 f 在 $[-10,10]$ 上连续, 于是由最值定理可知 f 在 $[-10,10]$ 上有最值. 另外, $\forall x\in[-10,10]$, 我们有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= |(x-1)(x-2)|\\
&= \begin{cases} (x-1)(x-2), & \text{若 } x\in[-10,1]\cup[2,10],\\ -(x-1)(x-2), & \text{若 } x\in(1,2), \end{cases}
\end{aligned}
$$

于是 f 在 $[-10,10]\setminus\{1,2\}$ 上可导, 并且

$$
f'(x)=\begin{cases} 2x-3, & \text{若 } x\in[-10,1)\cup(2,10],\\ 3-2x, & \text{若 } x\in(1,2), \end{cases}
$$

于是 f' 在 $(1,\frac{3}{2})$, $(2,10]$ 上取正号, 而在 $[-10,1)$, $(\frac{3}{2},2)$ 上取负号, 由此立刻可得 f 在 $[1,\frac{3}{2}]$, $[2,10]$ 上严格递增, 而在 $[-10,1]$, $[\frac{3}{2},2]$ 上严格递减. 又

$$
f(-10)=132,\ f(1)=f(2)=0,\ f(\frac{3}{2})=\frac{1}{4},\ f(10)=72,
$$

因此 f 在点 1, 2 处取到最小值 0, 而在点 -10 处取到最大值 132.

9. 确定函数 $f(x)=xe^{-x}$ 的凸凹区间与拐点.

解: 由于函数 f 为初等函数, 其定义域为 $\mathbb{R}$, 因此 f 在 $\mathbb{R}$ 上无穷可导且 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $f'(x)=(1-x)e^{-x}$, $f''(x)=(x-2)e^{-x}$. 于是 f'' 在 $(2,+\infty)$ 上取正号, 而在 $(-\infty,2)$ 上取负号, 因此 f 在 $[2,+\infty)$ 上严格凸, 在 $(-\infty,2]$ 上严格凹, 进而可知 f 的拐点为 $(2,2e^{-2})$.

10. 讨论由参数方程给出的函数 $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ 的凸性.

解: 方法 1. 由题设知 x, y 为初等函数, 故无穷可导. 又 x 在 $[0, \pi]$ 上严格递减, 因而有反函数 $t = \arccos \sqrt[3]{\frac{x}{3}}$. 而函数 x 的值域为 $[-3, 3]$, 因此 y 可以看成是 x 的连续函数 $f(x)$. 函数 f 的定义域为 $[-3, 3]$, 它为偶函数.

$\forall t \in [0, \pi]$, 我们有 $x'(t) = -9(\cos^2 t)\sin t$, $y'(t) = 9(\sin^2 t)\cos t$. 由此可知当 $t \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 时, 也即 $x \neq 3, 0, -3$ 时, $x'(t) \neq 0$, 此时 y 关于 x 可导, 且

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{9(\sin^2 t)\cos t}{-9(\cos^2 t)\sin t} = -\tan t.$$

进而可知此时 y 关于 x 也二阶可导, 且

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big) \cdot \frac{1}{x'(t)} = -\frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{-9(\cos^2 t)\sin t} = \frac{1}{(9\cos^4 t)\sin t} > 0.$$

则 f 在 $[-3, 0]$ 和 $[0, 3]$ 上均为严格凸. 又函数 x, y 分别在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上严格递减和严格递增, 因此 f 在 $[0, 3]$ 上严格递减, 从而 $\forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$, 我们有

$$\frac{1}{2}f\big(-x(t)\big) + \frac{1}{2}f\big(x(t)\big) = f\big(x(t)\big) < f(0) = y\big(\frac{\pi}{2}\big) = f\Big(\frac{1}{2}(-x(t)) + \frac{1}{2}x(t)\Big),$$

因此 f 在 $[-3, 3]$ 上不是凸函数.

方法 2. 由题设知 x 在 $[0, \pi]$ 上为初等函数, 因而连续且其值域为 $[-3, 3]$. 又函数 x 在 $[0, \pi]$ 上严格递减, 因此有反函数 $t = \arccos \sqrt[3]{\frac{x}{3}}$, 并且

$$y = 3\sin^3 t = 3(1 - \cos^2 t)^{\frac{3}{2}} = 3\big(1 - (\frac{x}{3})^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{3}{2}} =: f(x).$$

函数 f 在 $[-3, 3]$ 上连续, 在 $(-3, 3) \setminus \{0\}$ 上无穷可导, 且我们有

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\big(1 - (\frac{x}{3})^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{x}{3})^{-\frac{1}{3}}, \\ f''(x) &= \frac{1}{9}\big(1 - (\frac{x}{3})^{\frac{2}{3}}\big)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\frac{x}{3})^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{9}\big(1 - (\frac{x}{3})^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{x}{3})^{-\frac{4}{3}} > 0. \end{aligned}$$

则 f 在 $[-3, 0]$ 和 $[0, 3]$ 上均严格凸. 又 f 在 $[0, 3]$ 上严格递减, 则 $\forall x \in (0, 3)$,

$$\frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2}f(x) = f(x) < f(0) = f\big(\frac{1}{2}(-x) + \frac{1}{2}x\big),$$

因此 f 在 $[-3, 3]$ 上不为凸函数.

11. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$ 以及 $p \geqslant 1$, 求证: $\big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\big)^p \leqslant \frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n}$.

证明: $\forall x \geqslant 0$, 定义 $f(x) = x^p$, 则 f 为连续函数且在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导. 又 $\forall x > 0$, 我们有 $f'(x) = px^{p-1}$, $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} \geqslant 0$, 故 f 为凸函数, 从而由凸函数的性质可知, $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$, 我们有

$$\big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\big)^p = f\big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k\big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_k) = \frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n}.$$

由此可知所证结论成立.

12. 作出函数 $f(x)=x^2e^{-x}$ 的图形.

解: 函数 f 的定义域为 $\mathbb{R}$. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2e^{-x}=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty,$$

因此函数 f 仅有水平渐近线 $y=0$. 由于 f 为初等函数, 故无穷可导, 且

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x},\\
f''(x) &= (2-2x)e^{-x}-x(2-x)e^{-x}=(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})e^{-x}.
\end{aligned}$$

则函数 f' 在 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ 上取负号, 而在 $(0,2)$ 上取正号, 由此可知函数 f 在 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ 上严格单调递减, 而在 $(0,2)$ 上严格单调递增, 因而函数 f 在点 $x=0$ 处取极小值 0, 而在点 $x=2$ 处取极大值 $4e^{-2}$. 又 f'' 在 $(-\infty,2-\sqrt{2})$, $(2+\sqrt{2},+\infty)$ 上取正号, 而在 $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$ 上取负号, 故函数 f 在 $(-\infty,2-\sqrt{2})$, $(2+\sqrt{2},+\infty)$ 上严格凸, 而在 $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$ 上严格凹, 因而函数 f 的图像的拐点为

$$\big(2-\sqrt{2},(6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-2}\big),\ \big(2+\sqrt{2},(6+4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}\big).$$

草图略.