1 矩阵、线性空间

1. 证明任何方阵A都可以写成一个对称矩阵和反对称矩阵的和。
2. R_1和R_2是两个约化行阶梯矩阵，证明：R_1=R_2当且仅当$N(R_1) = N(R_2)$。
3. A和B都是$m \times n$矩阵，证明：$N(A) = N(B)$当且仅当存在可逆矩阵E，使得$A = EB$。
4. 证明：矩阵A和B满足$AB = 0$当且仅当$C(B) \subset N(A)$。
5. P是一个方阵。证明：
   (a) $P^2 = P$当且仅当$\text{rank}(P) + \text{rank}(I - P) = n$。
   (b) $P^2 = I$当且仅当$\text{rank}(I - P) + \text{rank}(I + P) = n$。

2 内积、正交性、投影

1. v是$\mathbb{R}^n$中的一个向量，H_v是所有与v正交的向量的集合，向量w相对于v的反射$s_v(w)$是一个向量且$s_v(w) = w - \frac{2w\cdot v}{v\cdot v}v$。证明：
   (a) H_v是$\mathbb{R}^n$中的一个线性子空间。
   (b) H_v中所有向量的反射都是它本身。
   (c) 对于任意两个向量u和w，$u \cdot w = s_v(u) \cdot s_v(w)$。
   (d) $s_v(s_v(w)) = w$
   (e) $\mathbb{R}^n$中的任何一个向量w都可以唯一的写成$w = av + u$的形式，其中u是H_v中的一个元素。
   (f) v_1和v_2是$\mathbb{R}^n$中两个线性无关的向量，$V = \text{span}\{v_1, v_2\}$。证明：对于任意的$w \in V$，$s_{v_1}(s_{v_2}(w)) \in V$。
2. W_1和W_2是$\mathbb{R}^n$的子空间，且W_1和W_2正交。证明：
   (a) $\text{dim}W_1 + \text{dim}W_2 \le n$，且等号成立当且仅当$W_2$是$W_1$的正交补。
   (b) 如果W_2是W_1的正交补，$\mathbb{R}^n$中的任何向量v都可以唯一的写成$v = v_1 + v_2$且$v_1 \in W_1$，$v_2 \in W_2$。
3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$。
   (a) 求投影到$C(A)$的投影矩阵，并计算$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$在$C(A)$上的投影。
   (b) 找到$C(A)$在$\mathbb{R}^3$中的正交补。
4. 证明：$\mathbb{R}^n$的任何一个子空间都能写成某个矩阵的零空间。

5. 我们有一组数据(a,b)为$(1,3)$, $(2,6)$, $(3,6)$, $(4,8)$, $(5,12)$, $(6,11)$。假设a, b之间有关系$b = xa + y$，用最小二乘法决定x和y。

6. 验证$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$是$\mathbb{R}^3$中的一组基，并用Gram-Schmidt法则得到一组正交归一基。然后给出矩阵$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$的$QR$分解。

7. 假设$(a_1, \cdots, a_n)$是$\mathbb{R}^m$中的一组线性无关的向量，$(q_1, \cdots, q_k)$是由$(a_1, \cdots, a_k)$得到的一组正交归一基（$k < n$），用a_{k+1}找到一个同$(q_1, \cdots, q_k)$都正交的向量，并且证明该向量同$(a_1, \cdots, a_k)$都正交。