微积分 A (2)

姚家燕

第 12 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

第 12 讲

第 2 章 含参积分及广义含参积分

§1. 含参变量积分的概念及其性质

回顾: 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为非空集, 而 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数. 如果 $\forall X \in \Omega$ 以及 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall Y \in \Omega$, 当 $\|X - Y\| < \delta$ 时, 我们均有

$$|f(X) - f(Y)| < \varepsilon,$$

则称函数 f 在 Ω 上连续.

定义 1. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为非空集, 而 $f:\Omega \to \mathbb{R}$ 为函数. 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall X, Y \in \Omega$, 当 $\|X - Y\| < \delta$ 时, 我们有 $|f(X) - f(Y)| < \varepsilon$, 则称函数 f 在 Ω 上一致连续.

否定形式: 函数 f 在 Ω 上不为一致连续当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, $\exists X, Y \in \Omega$ 使 $\|X - Y\| < \delta$ 但我们却有 $|f(X) - f(Y)| \geqslant \varepsilon_0$.

评注

- 函数 f 在 Ω 上不为一致连续当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得对任意的整数 $k \geqslant 1$, 均存在 $X_k, Y_k \in \Omega$ 使得 $\|X_k - Y_k\| < \frac{1}{k}$, 但 $|f(X_k) - f(Y_k)| \geqslant \varepsilon_0$.
- 函数 f 在 Ω 上不为一致连续当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及 Ω 中的两点列 $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty} \|X_k - Y_k\| = 0$, 但 $\forall k \geqslant 1$, 我们却有
$$|f(X_k) - f(Y_k)| \geqslant \varepsilon_0.$$

- 一致连续蕴含连续, 但反之不对: $\forall x \in (0,1)$, 令 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 f 在 $(0,1)$ 上连续但非一致连续. 事实上, $\forall k \geqslant 1$, 我们有

$$\left|f\Big(\frac{1}{2(k+1)}\Big) - f\Big(\frac{1}{k+1}\Big)\right| = k+1 \geqslant 2,$$

而与此同时, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+1}\right| = 0.$

作业题: 判断下列函数是否一致连续:

(1) $f(x) = x\sin x \ (0 \leqslant x < +\infty)$.

回顾: 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, 则 Ω 中的任意点列 $\{X_k\}$ 均有子列 $\{X_{\ell_k}\}$ 在 Ω 中收敛.

定理 1. 如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, 而 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, 则 f 在 Ω 上一致连续.

证明: 用反证法, 假设 f 在 Ω 上不为一致连续, 那么 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall k \geqslant 1$, 均 $\exists X_k, Y_k \in \Omega$ 使得 $\|X_k - Y_k\| < \frac{1}{k}$, 但是却有 $|f(X_k) - f(Y_k)| \geqslant \varepsilon_0$. 由于 Ω 为有界闭集, 因此 $\{X_k\}$ 有子列 $\{X_{\ell_k}\}$ 在 Ω 中收敛, 设其极限为 $A \in \Omega$. 于是

$$\lim_{k\to+\infty} Y_{\ell_k} = \lim_{k\to+\infty} X_{\ell_k} + \lim_{k\to+\infty} (Y_{\ell_k} - X_{\ell_k}) = A.$$

由假设、函数连续性以及复合极限法则可知

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &\leqslant \lim_{k\to+\infty} |f(X_{\ell_k}) - f(Y_{\ell_k})| \\ &= \left| \lim_{k\to+\infty} f(X_{\ell_k}) - \lim_{k\to+\infty} f(Y_{\ell_k}) \right| = 0.\end{aligned}$$

矛盾! 故所证结论成立.

作业题: 判断下列函数是否一致连续:

(2) $f(x) = \frac{x^2+1}{4-x^2}$ $(-1 < x < 1)$.

极限与极限次序可交换性

定理 2. 如果 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 则 $\forall(x_0,y_0)\in[a,b]\times[c,d]$, 均有

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=f(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y).$$

证明: $\forall y\in[c,d]$, 由于函数 f 在点 (x_0,y) 连续, 于是由复合函数极限法则可知

$$\lim_{x\to x_0}f(x,y)=f(x_0,y).$$

同样利用函数 f 在点 (x_0, y_0) 处的连续性以及复合函数极限法则可得

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} f(x_0,y) = f(x_0,y_0).$$

援用同样的证明或利用对称性可知

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

因此所证结论成立.

定义 2. 假设 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为函数. 如果 $\forall y\in[c,d]$, 下述积分

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

均有定义, 则我们将之称为 (以 y 为参变量的) 含参变量积分.

极限与积分次序可交换性

定理 3. 如果 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 则 $I:[c,d]\to\mathbb{R}$ 也为连续函数.

证明: 由于 $[a,b]\times[c,d]$ 为有界闭集而 f 连续, 则 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上一致连续. 于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得对任意 $(x,y),(x',y')\in[a,b]\times[c,d]$, 当 $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}<\delta$ 时, 我们有

$$|f(x,y)-f(x',y')|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

任取定 $y_0 \in [c,d]$. $\forall y \in [c,d]$, 当 $|y-y_0| < \delta$ 时, $\forall x \in [a,b]$, 均有 $|f(x,y)-f(x,y_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. 于是

$$\left|I(y)-I(y_0)\right| = \left|\int_a^b \big(f(x,y)-f(x,y_0)\big)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \int_a^b \left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon.$$

因此 I 在点 y_0 处连续, 从而 I 为连续函数.

注: (1) 我们有 $\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(2) 由于连续性为局部性质, 因此如果在定理中将 $[c,d]$ 换成开区间, 则相应结论依然成立.

求导与积分次序可交换性

定理 4. 如果 $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ 为连续函数使得偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上存在且连续, 则 $I : [c, d] \to \mathbb{R}$ 为连续可导且

$$I'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, \mathrm{d}x.$$

注: 同前面一样, 可在定理条件中将 $[c, d]$ 换成开区间, 相应结论依然成立.

证明: 固定 $y_0 \in [c,d]$. $\forall x \in [a,b]$ 及 $\forall y \in [c,d]$, 若 $y \neq y_0$, 由单变量函数的 Lagrange 中值定理可知, $\exists \theta = \theta(x,y) \in (0,1)$ 使得

$$f(x,y) - f(x,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta(y-y_0)) \cdot (y-y_0).$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned}\frac{I(y)-I(y_0)}{y-y_0} &= \int_a^b \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0+\theta(y-y_0))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 为连续, 因此为一致连续, 从而 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得对任意 $(x, y), (x', y') \in [a, b] \times [c, d]$, 当 $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < \delta$ 时, 我们有

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x', y') \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

进而 $\forall y \in [c, d]$, 当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} &\left| \frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \, \mathrm{d}x \right| \\ \leqslant & \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta(y - y_0)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

于是 I 在点 y_0 处可导, 并且我们有

$$I'(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\,\mathrm{d}x,$$

从而 $\forall y \in [c, d]$, 我们有

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

随后再利用 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 的连续性以及极限与积分次序可交换性可知 I' 连续, 故 I 为连续可导.

定理 5. 假设 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数使得偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上存在且连续, 而 $\alpha,\beta:[c,d]\to[a,b]$ 可导. $\forall y\in[c,d]$, 定义

$$J(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

则 $J:[c,d]\to\mathbb{R}$ 为可导函数且

$$J'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x+f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y).$$

证明: $\forall u, v \in [a,b]$ 以及 $\forall y \in [c,d]$, 定义

$$F(u,v,y) = \int_u^v f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

则 F 连续可微且 $\forall u, v \in [a,b]$ 以及 $\forall y \in [c,d]$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u,v,y) &= -f(u,y),\\
\frac{\partial F}{\partial v}(u,v,y) &= f(v,y),\\
\frac{\partial F}{\partial y}(u,v,y) &= \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

注意到 $J(y)=F(\alpha(y),\beta(y),y)$, 则由复合函数可微法则可知 J 为可导函数且

$$
\begin{aligned}
J'(y) &= \frac{\partial F}{\partial y}(\alpha(y),\beta(y),y)+\frac{\partial F}{\partial v}(\alpha(y),\beta(y),y))\beta'(y) \\
&\quad +\frac{\partial F}{\partial u}(\alpha(y),\beta(y),y)\alpha'(y) \\
&= \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x+f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y).
\end{aligned}
$$

积分与积分次序可交换性

定理 6. 若 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 连续, 则

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

证明: $\forall x\in[a,b]$ 以及 $\forall t\in[c,d]$, 定义

$$F(x,t)=\int_c^t f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

$$g(t)=\int_a^b F(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_c^t f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

则 $F:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 连续且 $\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)=f(x,t)$, 于是 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 为连续. 再由求导与积分次序可交换性可知函数 g 连续可导且我们有

$$g'(t)=\int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned}&\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_c^d g'(y)\,\mathrm{d}y\\&=g(d)-g(c)=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 1. $\forall \theta \in (-1, 1)$, 定义

$$I(\theta) = \int_0^\pi \log(1 + \theta \cos x)\, \mathrm{d}x,$$

求 $I(\theta)$.

解: 由题设条件以及求导与积分次序可交换性可知 I 为连续可导且 $\forall \theta \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, 均有

$$\begin{aligned} I'(\theta) &= \int_0^\pi \frac{\cos x}{1 + \theta \cos x}\, \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{1}{1 + \theta \cos x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{\theta} - \frac{1}{\theta} \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1 + \theta \cos x}. \end{aligned}$$

利用变量替换，我们有

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\theta\cos x} &\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\big(2\arctan t\big)}{1+\theta\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^2+\theta(1-t^2)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+\theta)+(1-\theta)t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-\theta^2}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\Big(\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}t\Big)}{1+\Big(\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}t\Big)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-\theta^2}} \arctan\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}t\,\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\theta^2}}.
\end{aligned}
$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned} I'(\theta) &= \frac{\pi}{\theta} - \frac{\pi}{\theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} = \frac{\pi}{\theta} \cdot \frac{\sqrt{1-\theta^2}-1}{\sqrt{1-\theta^2}} \\ &= \frac{-\theta\pi}{(\sqrt{1-\theta^2}+1)\sqrt{1-\theta^2}}. \end{aligned}$$

注意到 $I(0) = 0$, 故 $\forall \theta \in (-1, 1)$, 我们有

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \int_0^\theta I'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\theta \frac{-\pi t\,\mathrm{d}t}{(\sqrt{1-t^2}+1)\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int_0^\theta \frac{\pi\,\mathrm{d}(\sqrt{1-t^2})}{\sqrt{1-t^2}+1} = \pi \log(\sqrt{1-t^2}+1)\Big|_0^\theta \\ &= \pi \log \frac{\sqrt{1-\theta^2}+1}{2}. \end{aligned}$$

例 2. 计算 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x \ (a,b>0)$.

解: 方法 1. 由积分与积分次序可交换性可知

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \Big(\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1\Big)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \log(y+1)\Big|_a^b \\
&= \log\frac{b+1}{a+1}.
\end{aligned}
$$

方法 2. 固定 $a > 0$. $\forall b > 0$, 定义

$$I(b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x.$$

则 $I(a) = 0$ 且由求导与积分次序可交换性得

$$I'(b) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial b}\Big(\frac{x^b - x^a}{\log x}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^b\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b+1}.$$

由此立刻可得

$$I(b) = \int_a^b I'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \log\frac{b+1}{a+1}.$$

例 3. $\forall y>0$, 令 $I(y)=\int_y^{y^2}\frac{\sin(yx)}{x}\,\mathrm{d}x$, 求 $I'(y)$.

解: 由求导与积分次序可交换性知

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int_y^{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\sin(yx)}{x}\Big)\,\mathrm{d}x+\frac{\sin(y\cdot y^2)}{y^2}\cdot(y^2)' \\ &\quad -\frac{\sin(y\cdot y)}{y}\cdot(y)'=\int_y^{y^2}\cos(yx)\,\mathrm{d}x+\frac{2\sin y^3}{y}-\frac{\sin y^2}{y} \\ &= \frac{1}{y}\sin(yx)\Big|_y^{y^2}+\frac{2\sin y^3}{y}-\frac{\sin y^2}{y}=\frac{1}{y}(3\sin y^3-2\sin y^2). \end{aligned}$$

作业题: 第 2.2 节第 109 页第 2 题第 (1) 小题, 第 110 页第 3, 4 题, 其中将 $u(x)$ 改成 $u(x,t)$.

回顾: 广义积分的定义及其性质

定义 1. 设 $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in (a, +\infty]$, $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ 使得 $\forall A \in (a, \omega)$, 函数 f 在 $[a, A]$ 上均为可积. 定义 f 在 $[a, \omega)$ 上的广义积分为

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to \omega^-} \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若上述极限存在, 称广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 否则称之发散. 广义积分也称为反常积分.

评注

- 通常 $\omega = +\infty$, 或者 $\omega \in \mathbb{R}$ 但函数 f 在 ω 的邻域内无界, 此时称 ω 为 f 的奇点, 相应的广义积分被称为无穷限积分或瑕积分.
- $\forall c \in [a, \omega)$, 我们有

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

故 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性仅与函数 f 在 ω 的邻域内的性质有关.

- 如果 $\omega \in \mathbb{R}$ 且 $f \in \mathscr{R}[a,\omega]$, 则 f 在 $[a,\omega]$ 的任意闭子区间上均可积, 并且

$$\int_a^{\omega} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\omega^-} \int_a^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

此时正常的定积分与广义积分一致.

- 若 $b \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 使得 $\omega < b$, 而且 $f : (\omega, b] \to \mathbb{R}$ 在 $(\omega, b]$ 的任意的闭子区间上可积, 则我们可以类似地定义广义积分

$$\int_{\omega}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to\omega^+} \int_B^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 假设 ω_1, ω_2 $(\omega_1 < \omega_2)$ 为 f 的奇点, 而函数 f 在 (ω_1, ω_2) 的任意的闭子区间上可积. 固定 $a \in (\omega_1, \omega_2)$, 并定义

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\omega_1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

可证明该定义不依赖点 a 的选择.

- 如果 $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, 而 $\omega \in (a, b)$ 使得 f 在 $[a, b] \setminus \{\omega\}$ 的任意闭子区间上可积, 定义:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\omega} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\omega}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 更一般地, 若函数 f 有多个奇点, 此时将整个区间分割成若干个小的区间使得 f 在每一个小区间上只有一个奇点并且该点为小区间的端点, 随后在每一个小区间上定义广义积分, 再将如此定义的广义积分之和定义为函数 f 在原来那个大区间上的广义积分. 有鉴于此, 再通过坐标变换, 我们总可以将问题归结为研究形如 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 这样的广义积分.

回顾: 广义积分小结

- 各种形式的广义积分的定义, 奇点.
- 广义积分的性质: 与定积分的完全类似.
- 敛散性: Cauchy 准则, 比较法 (绝对收敛), Abel-Dirichlet 准则 (变号积分, 条件收敛).
- 重要的比较函数: $\frac{1}{x^p}$, $\log x$, $\frac{\log x}{x^p}$.
- 绝对收敛与条件收敛: 二者关系.
- Γ 函数与 Beta 函数: 递推, 余元, 二者关系.

§2. 广义含参变量积分

广义含参变量积分的收敛性与一致收敛性

定义 1. 假设 $f:[a,\omega)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 其中 $\omega\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. 若 $y_0\in[c,d]$ 使广义积分

$$\int_a^{\omega} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to\omega^-}\int_a^{A} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x$$

收敛, 则称广义含参变量积分 $\int_a^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在点 y_0 处收敛, 否则则称之在该点发散.

如果广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 的每点均收敛, 我们则称之在 $[c,d]$ 上收敛, 由此得到 $[c,d]$ 上的函数 $I(y)=\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

注: (1) 广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上收敛到函数 $I(y)$ 当且仅当 $\forall y\in[c,d]$ 以及 $\forall \varepsilon>0$, $\exists M\in[a,\omega)$ 使得 $\forall A\in[M,\omega)$, 我们均有

$$\left|\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x - I(y)\right| < \varepsilon.$$

(2) 由 Cauchy 判别准则知, 广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上收敛当且仅当 $\forall y\in[c,d]$ 以及 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M\in[a,\omega)$ 使得 $\forall A',A''\in[M,\omega)$,

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_a^{A'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

典型例子:

Gamma 函数: $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Beta 函数: $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$.

定义 2. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in [a, \omega)$ 使 $\forall A \in [M, \omega)$ 以及 $\forall y \in [c, d]$, 均有

$$\left| \int_a^A f(x, y) \, \mathrm{d}x - I(y) \right| < \varepsilon,$$

则我们称广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x, y) \, \mathrm{d}x$ 在区间 $[c, d]$ 上一致收敛到函数 $I(y)$.

注: 一致收敛性蕴含收敛性, 但反之不成立.

定理 1. (Cauchy 准则) $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上为一致收敛当且仅当 $\forall \varepsilon>0$, $\exists M\in[a,\omega)$ 使得 $\forall A', A''\in[M,\omega)$, $\forall y\in[c,d]$, $\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

否定形式: $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上非一致收敛当且仅当 $\exists\varepsilon_0>0$ 使 $\forall M\in[a,\omega)$, $\exists A', A''\in[M,\omega)$, $\exists y\in[c,d]$ 使得 $\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0$; 这等价于 $\exists A_n', A_n''\in[a,\omega)$, $\exists y_n\in[c,d]$ 使得我们有

$$\lim_{n\to\infty} A_n' = \lim_{n\to\infty} A_n'' = \omega,\ \left|\int_{A_n'}^{A_n''} f(x,y_n)\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

例 1. 求证: $\int_a^{+\infty} ye^{-xy}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[0,+\infty)$ 收敛但非一致收敛.

证明: 当 $y=0$ 时, 被积函数恒为零, 因此广义积分收敛. 当 $y>0$ 时, 我们则有

$$\int_a^{+\infty} ye^{-xy}\,\mathrm{d}x = -e^{-xy}\Big|_a^{+\infty} = e^{-ay}$$

也收敛. 又 $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} 2n = +\infty$, 而 $\forall n \geqslant 1$, $\int_n^{2n} \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x = -e^{-\frac{x}{n}}\Big|_n^{2n} = \frac{1}{e}-\frac{1}{e^2} > 0$, 由此得证.

作业题: 第 2.1 节第 104 页第 8 题.

定理 2. (Weierstrass 判别法或比较法则)
假设 $f:[a,\omega)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 而函数 $F:[a,\omega)\to[0,+\infty)$ 使 $\forall(x,y)\in[a,\omega)\times[c,d]$, 我们均有 $|f(x,y)|\leqslant F(x)$. 若 $\int_a^{\omega}F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{\omega}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

证明: 因 $\int_a^{\omega}F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则由 Cauchy 准则知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists M\in[a,\omega)$ 使得 $\forall A',A''\in[M,\omega)$, 均有 $\left|\int_{A'}^{A''}F(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$. 则 $\forall y\in[c,d]$, 我们有

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_{A'}^{A''}|f(x,y)|\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_{A'}^{A''}F(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

从而由 Cauchy 判别准则可知所证结论成立.

例 2. 求证: 广义含参变量积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x$$

关于 $y\in[c,+\infty)$ 一致收敛, 其中 $c>0$.

证明: $\forall x\geqslant 0$ 及 $\forall y\geqslant c$, 均有 $|e^{-xy}\sin x|\leqslant e^{-cx}$. 又 $\int_0^{+\infty} e^{-cx}\,\mathrm{d}x=-\frac{e^{-cx}}{c}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{c}$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法可知所证结论成立.

作业题: 第 2.1 节第 103 页第 4 题第 (2) 小题, 其中将 $\cos yx$ 改为 $\cos(yx)$.

定理 3. 设 $f, g : [a, \omega) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ 为函数使得 $\forall y \in [c, d]$, $f(\cdot, y), g(\cdot, y)$ 在 $[a, \omega)$ 的任意的闭子区间上均可积.

(1) (Abel) 如果 $\int_a^\omega f(x, y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛, 而 g 有界并且关于第一个变量单调, 那么 $\int_a^\omega f(x, y) g(x, y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛.

(2) (Dirichlet) $\forall y \in [c, d]$ 以及 $\forall A \in [a, \omega)$, 定义 $F(A, y) = \int_a^A f(x, y)\,\mathrm{d}x$. 若 F 有界, g 关于第一个变量单调且 $\lim\limits_{x \to \omega^-} g(x, y) = 0$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致成立, 则 $\int_a^\omega f(x, y) g(x, y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛.

证明: (1) 由于函数 g 有界, 因此 $\exists K>0$ 使得 $\forall (x,y)\in[a,\omega)\times[c,d]$, 我们均有 $|g(x,y)|<K$. 又 $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛, 于是由 Cauchy 准则知, $\exists M\in[a,\omega)$ 使得 $\forall y\in[c,d]$, $\forall A_1,A_2\in[M,\omega)$, 我们有 $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\dfrac{\varepsilon}{2K}$. 由积分第二中值定理, 存在 ξ 介于 A_1,A_2 使得

$$\begin{aligned}\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x = g(A_1,y)\int_{A_1}^{\xi} f(x,y)\,\mathrm{d}x\\ +g(A_2,y)\int_{\xi}^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此立刻可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant{}& |g(A_1,y)|\left|\int_{A_1}^{\xi} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| + |g(A_2,y)|\left|\int_{\xi}^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant{}& K\cdot\frac{\varepsilon}{2K} + K\cdot\frac{\varepsilon}{2K} \\
={}& \varepsilon.
\end{aligned}
$$

于是由 Cauchy 判别准则可知所证结论成立.

(2) 由题设, $\exists K>0$ 使得 $\forall (A,y)\in[a,\omega)\times[c,d]$, $|F(A,y)|<K$. 同时由于 $\lim\limits_{x\to\omega^-} g(x,y)=0$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致成立, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M\in[a,\omega)$ 使得 $\forall x\in[M,\omega)$ 以及 $\forall y\in[c,d]$, 均有 $|g(x,y)|<\frac{\varepsilon}{4K}$. 又 $\forall A_1,A_2\in[M,\omega)$, 由积分第二中值定理可知, 存在 ξ 介于 A_1,A_2 之间使得

$$\begin{aligned}\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x = g(A_1,y)&\int_{A_1}^{\xi} f(x,y)\,\mathrm{d}x\\ +g(A_2,y)&\int_{\xi}^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此立刻可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant\ & |g(A_1,y)|\cdot|F(\xi,y)-F(A_1,y)| \\
&+|g(A_2,y)|\cdot|F(A_2,y)-F(\xi,y)| \\
\leqslant\ & \frac{\varepsilon}{4K}\cdot(2K)+\frac{\varepsilon}{4K}\cdot(2K)=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

于是由 Cauchy 判别准则可知所证结论成立.

注: 在上述定理中可将 $[c,d]$ 换成任意集合.

例 3. 求证: 广义含参积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} \mathrm{d}x$ 关于 $t \in [c, +\infty)$ 一致收敛, 其中 $c > 0$.

证明: $\forall (x,t) \in [1,+\infty) \times [c,+\infty)$, 我们定义函数 $f(x,t) = \sin(tx)$, $g(x,t) = \frac{1}{x}$, 那么 g 关于 x 单调, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x,t) = 0$ 关于 $t \in [c,+\infty)$ 一致成立.

$\forall A > 1$, $\left| \int_1^A \sin(tx)\, \mathrm{d}x \right| = \frac{1}{t} |\cos t - \cos(At)| \leqslant \frac{2}{c}$,

由 Dirichlet 判别准则可知 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} \mathrm{d}x$ 关于 $t \in [c,+\infty)$ 一致收敛.

例 4. 求证: 广义含参变量积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [0,+\infty)$ 一致收敛.

证明: $\forall (x,y) \in (0,+\infty)\times[0,+\infty)$, 我们定义函数 $f(x,y)=\frac{\sin x}{x}$, $g(x,y)=e^{-xy}$. 则 $\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [0,+\infty)$ 一致收敛, 而 g 关于 x 单调且 $|g| \leqslant 1$, 由 Abel 判别准则知 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [0,+\infty)$ 一致收敛.

作业题: 第 2.1 节第 103 页第 4 题第 (7) 小题.

广义含参变量积分的分析性质

定理 4. 设 $f:[a,\omega)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数.

(1) 极限与积分可交换性:

若广义含参变量积分

$$I(y)=\int_a^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛, 则 I 在 $[c,d]$ 上连续.

(2) 求导与积分可交换性:

若 $I(y)=\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在区间 $[c,d]$ 上收敛, 偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $[a,\omega)\times[c,d]$ 上连续并且使得广义含参积分 $\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 为一致收敛, 则 I 在 $[c,d]$ 上连续可导且

$$I'(y)=\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

注: 在上述结论中, 均可将 $[c,d]$ 换成开区间.

(3) 积分与积分可交换性:

若 $I(y)=\int_a^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛, 则 I 在 $[c,d]$ 上可积且

$$\int_c^d\Big(\int_a^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y=\int_a^{\omega}\Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

注: 也可以考虑 $[a,\omega)\times[c,\eta)$ 上的函数而探讨二重的广义积分, 如 $\int_c^{+\infty}\Big(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y$. 在一定条件下, 上述结论依然成立.

证明: (1) 任取 $y_0 \in [c,d]$. 因 $\int_a^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists M \in [a,\omega)$ 使得 $\forall A \in [M,\omega)$, $\forall y \in [c,d]$, 我们有

$$\left|\int_A^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又 f 在 $[a,A] \times [c,d]$ 上连续, 因此为一致连续, 于是 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall (x,y),(x',y') \in [a,A] \times [c,d]$, 当 $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} < \delta$ 时, 我们均有

$$|f(x,y) - f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{3(A-a+1)},$$

于是 $\forall y \in [c,d]$, 当 $|y-y_0|<\delta$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
&|I(y)-I(y_0)| = \left|\int_a^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_a^{\omega} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant& \left|\int_a^{A} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_a^{A} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_A^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \\
&+\left|\int_A^{\omega} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^{A} |f(x,y)-f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\varepsilon \\
\leqslant& \frac{\varepsilon}{3(A-a+1)}\cdot(A-a) + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon,
\end{aligned}$$

因此 I 在点 y_0 处连续, 进而在 $[c,d]$ 上也连续.

(2) $\forall A \in (a,\omega)$ 以及 $\forall y \in [c,d]$, 定义

$$I_A(y) = \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x,\ \ J(y) = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

则 $J \in \mathscr{C}[c,d]$ 并且 $\forall \varepsilon > 0$, 由题设条件及常义积分的求导与积分次序可交换性, $\exists M \in (a,\omega)$ 使得 $\forall A \in (M,\omega)$ 以及 $\forall y \in [c,d]$, 我们均会有 $|I_A'(y) - J(y)| < \frac{\varepsilon}{d-c+1}$, 由此可得

$$\left|\int_c^y I_A'(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^y J(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_c^y |I_A'(t) - J(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

而这正意味着, $\forall y \in [c,d]$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\int_c^y J(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{A\to\omega^-}\int_c^y I_A'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{A\to\omega^-}\Big(I_A(y)-I_A(c)\Big) = I(y)-I(c).
\end{aligned}
$$

又 $J \in \mathscr{C}[c,d]$, 故 I 在 $[c,d]$ 上连续可导且

$$
I'(y) = J(y) = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x.
$$

关于 (3), 其证明与正常含参积分的证明类似.

例 5. 求 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 其中 $b \geqslant a > 0$.

解: 由题设可知

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b e^{-xy}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

又 $\forall x \geqslant 0$ 以及 $\forall y \in [a, b]$, 我们有 $|e^{-xy}| \leqslant e^{-ax}$, 另外 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法知广义含参变量积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [a, b]$ 一致收敛.

从而由积分与积分次序可交换性可得

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \Big(\int_a^b e^{-xy} \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \Big(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \, \mathrm{d}x \Big) \, \mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \Big(\frac{-e^{-xy}}{y} \Big|_0^{+\infty} \Big) \, \mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&= \log y \Big|_a^b \\
&= \log \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

例 6. 设 $a>0$. $\forall y\in\mathbb{R}$, 计算

$$I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos(yx)\,\mathrm{d}x.$$

解: $\forall x\geqslant 0$, $\forall y\in\mathbb{R}$, 令 $f(x,y)=e^{-ax^2}\cos(yx)$. 则 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-xe^{-ax^2}\sin(yx)$, $|f(x,y)|\leqslant e^{-ax^2}$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant xe^{-ax^2}$. 但 $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\mathrm{d}x$ 均收敛, 则由 Weierstrass 判别法可知

$$\int_0^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x,\quad\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x$$

关于 $y\in\mathbb{R}$ 一致收敛, 从而由求导与积分次序

可交换性知 I 连续可导, 并且 $\forall y \in \mathbb{R}$, 均有

$$
\begin{aligned}
I'(y) &= -\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin(yx)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(yx)}{2a}\,\mathrm{d}(e^{-ax^2}) \\
&= \frac{e^{-ax^2}}{2a}\sin(yx)\bigg|_0^{+\infty} - \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}(\sin(yx)) \\
&= -\frac{y}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos(yx)\,\mathrm{d}x = -\frac{y}{2a}I(y),
\end{aligned}
$$

则 $I(y) = Ce^{\int(-\frac{y}{2a})\,\mathrm{d}y} = Ce^{-\frac{y^2}{4a}}$, 其中 C 为常数.

又由定义可知

$$\begin{aligned} C &= I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=ax^2} \int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}\sqrt{\frac{u}{a}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{a}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \end{aligned}$$

由此立刻可得 $I(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{y^2}{4a}}$.

作业题: 第 2.2 节第 110 页第 5 题, 第 2.3 节第 115 页第 1 题第 (1), (2) 小题 (不要用例 5 和例 6 的结论, 用其方法), 其中将 $\sin yx$ 换成 $\sin(yx)$, 第 2 题第 (2) 小题 (右边分母中缺 2).

谢谢大家!