第八次习题课

1 课堂内容复习

1. 不定积分的概念

(1) 定义: 将定义在区间上的函数f的原函数的一般表达式称为f的不定积分, 记作$\int f(x)dx$. 这是一个以x为自变量的函数.

(2) 不定积分与定积分的关系: 若$f \in C[a,b]$, 则$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$, 这里$C \in \mathbb{R}$为任意的常数.

(3) 不定积分与导数、微分的关系: 若$\int f(x)dx = F(x) + C$, 则

$$F'(x) = f(x), \quad \Big(\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big)' = F'(x) = f(x), \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}\Big(\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C,$$

其中$C \in \mathbb{R}$为任意的常数.

2. 不定积分的计算

(1) 基本的不定积分公式: 这里$C \in \mathbb{R}$为任意的常数,

(a) $\int 1dx = x + C$;

(b) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$, $\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$;

(c) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C\ (a > 0,\ a \neq 1)$, $\int e^x dx = e^x + C$;

(d) $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$;

(e) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$;

(f) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$;

(g) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

(h) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$;

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$;

(j) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$;

(k) $\int \sec x dx = \log|\sec x + \tan x| + C$;

(l) $\int \csc x dx = \log|\csc x - \cot x| + C$.

(2) 计算不定积分的基本方法:

(a) 线性性: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

(b) 分段计算.

(c) 降低三角函数的幂次.

(d) 变量替换:

1) 第一换元积分法 (凑微分): 若$F'(y) = f(y)$, 则

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(u(x)) du(x) = F(u(x)) + C.$$

2) 第二换元积分法: 若$f(x(t))x'(t) = F'(t)$, 则

$$\int f(x) dx \overset{x=x(t)}{=} \int f(x(t)) x'(t) dt = F(t) + C \overset{t=t(x)}{=} F(t(x)) + C.$$

3) 三角变换: 下面假设 $a > 0$.

(α) 若不定积分中出现$\sqrt{a^2 - x^2}$, 作变换$x = a \sin t$ ($|t| \leqslant \frac{\pi}{2}$).

(β) 若不定积分中出现$\sqrt{x^2 + a^2}$, 作变换$x = a \tan t$ ($|t| < \frac{\pi}{2}$).

(γ) 若不定积分中出现$\sqrt{x^2 - a^2}$, 分情况讨论:

当$x > a$时, 作变换$x = a \sec t$ ($0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$);

当$x < -a$时, 作变换$x = -a \sec t$ ($0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$).

(e) 分部积分及其应用: $\int u dv = uv - \int v du$.

1) $\int P(x) (\ln x)^m dx$,

2) $\int P(x) e^{ax} dx$,

3) $\int e^{ax} \cos bx dx, \ \int e^{ax} \sin bx dx$,

其中$P(x)$为多项式, $m \geqslant 1$为整数, 而$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(f)有理函数的不定积分:

1) 多项式的因式分解: 设$Q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$为实系数$n$次多项式, 其中$a_n \neq 0$. 由代数基本定理可得如下素因子分解:

$$Q(x) = a_n \prod_{j=1}^{s} (x - \alpha_j)^{l_j} \cdot \prod_{k=1}^{t} (x^2 + p_k x + q_k)^{m_k},$$

这里$\alpha_j \in \mathbb{R}$互异, (p_k, q_k)互异, $p_k^2 - 4q_k < 0$, 且$\sum\limits_{j=1}^{s} l_j + 2 \sum\limits_{k=1}^{t} m_k = n$.

2) 有理分式的标准分解: 有理分式$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$总可以表示成:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \sum_{j=1}^{s} \sum_{u=1}^{l_j} \frac{a_{j,u}}{(x - \alpha_j)^u} + \sum_{k=1}^{t} \sum_{v=1}^{m_k} \frac{b_{k,v} x + c_{k,v}}{(x^2 + p_k x + q_k)^v},$$

其中$T(x)$为多项式, $a_{j,u}, b_{k,v}, c_{k,v} \in \mathbb{R}$为常数.

3) 求标准分解的方法: 待定系数, 带入特殊值.

4) 有理分式的不定积分的分类: 这里$a > 0$, 而$m \geqslant 2$为整数,

(α) $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \log|x-\alpha| + C$,

(β) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}} + C$,

(γ) $\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\log(x^2+a^2) + C$,

(δ) $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$,

(ϵ) $\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)}\frac{1}{(x^2+a^2)^{m-1}} + C$,

(ε) $I_{m+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m+1}} = \frac{x}{2a^2m(x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2a^2m}I_m$.

(g) 三角有理函数的不定积分:

设$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, 其中$P, Q$是以$u, v$为变量的多项式.

1) 一般方法: 利用万能公式可得

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

2) 被积函数为$\sin x$的奇函数(将$\sin x$变换成$-\sin x$后会出现一个负号):

$$\int R(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx \overset{t=\cos x}{=} -\int R(1-t^2, t)dt.$$

3) 被积函数为关于$\cos x$的奇函数

$$\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx \overset{t=\sin x}{=} \int R(t, 1-t^2)dt.$$

4) 将$\sin x, \cos x$变换成$-\sin x, -\cos x$后不变:

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx \overset{t=\tan x}{=} \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

(h) 两类无理函数的不定积分: 考虑不定积分$\int R(x, y(x))dx$, 其中$R(x,y)$是关于变量x, y的有理函数, 而$y = y(x)$为下述无理函数.

1) 若$y(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 且$n \geqslant 1$为整数, $ad - bc \neq 0$, 则

$$\int R\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)dx \overset{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}{=} \int R\Big(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\Big)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt.$$

2) 若$y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$, 且$a \neq 0$: 将ax^2+bx+c配方, 再作三角变换.

3. 定积分的计算

(1) 利用计算不定积分的方法: 分段, 线性性, 降低三角函数的幂, 换元法, 分部积分法, 有理函数的定积分(有理函数标准分解), 三角有理函数(转化为有理函数)的定积分, 两特殊无理函数的定积分.

(2) 定积分的换元公式: 若$f \in C[a,b]$, 而$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$连续可导, 则

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

注: 若$f \in R[a,b]$而$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$连续可导且严格单调, 上述公式依然成立.

(3) 分部积分公式: 若$u, v \in C^{(1)}[a,b]$, 则$\int_a^b u(x)dv(x) = (uv)|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$.

(4) 对称性: 设$a > 0$, 而$f \in R[-a,a]$.

(a) 若f为奇函数, 则$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

(b) 若f为偶函数, 则$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

(5) 周期性: 若$f \in R(\mathbb{R})$以$T > 0$为周期, 则$\forall a \in \mathbb{R}$, 均有$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

(6) 带积分余项的Taylor公式: 设$n \geqslant 1$为整数. 若$f \in C^{(n+1)}[a,b]$, 而$x_0 \in [a,b]$, 则$\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)du.$$

通常称$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)du$为积分余项. 令$u = x_0 + t(x - x_0)$, 则

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + t(x-x_0))dt.$$

(a) Cauchy余项: $\exists \theta \in (0,1)$使$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))$.

(b) Lagrange 余项: $\exists \theta \in [0,1]$使得$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$.

2 原函数概念

题2.1 若$\int f(x)dx = \frac{\sin x}{1 + x\sin x} + C$, 求$\int f(x)f'(x)dx$.

3 不定积分的计算

题3.1 计算下列积分: $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, 其中$|x| > 1$.

题3.2 计算下列积分: $\int x^n e^{-x}dx$, 其中$n \in \mathbb{Z}_+$.

题3.3 计算下列有理式的积分:

1. $\int \frac{dx}{1+x^4}$;

2. $\int \frac{x^2dx}{1+x^4}$.

题3.4 计算下列三角式的不定积分:

1. $\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}dx$, 其中$0 < r < 1$, $|x| < \pi$.

2. $\int \frac{dx}{1+\epsilon\cos x}$, 其中$\epsilon > 0$.

题3.5 计算下列无理式的不定积分:

1. $\int \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}dx, (x>0)$;

2. $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(x-2)^2}$;

3. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+5}}$;

题3.6 设函数$f(x)$二次连续可导且$f'(x)\neq 0$, 计算下列不定积分

$$\int \left(\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f(x)^2\cdot f''(x)}{(f'(x))^3}\right)dx.$$

4 定积分的计算

题4.1 计算下列定积分:

$$I = \int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$$

其中$a>0$.

题4.2 设$n\in\mathbb{Z}_+$, 试计算下列定积分:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}.$$

题4.3 设$f(x)$是周期为T的连续函数. 求证:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx.$$

题4.4 设$k,n\in\mathbb{Z}_+$, 求证:

1. $\int_0^\pi \cos nx\cos kx dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k=n \\ 0, & k\neq n \end{cases}$;

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\cos^n x dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

题4.5 设$x>1$, $n\in\mathbb{Z}_+$, 求证

$$\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(x-\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^{n+1}}.$$

题4.6 设

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) \qquad n\in\mathbb{Z}_+,$$

请计算定积分

$$I(m,n) = \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx.$$

5 综合题

题5.1 设函数$f(x) \in C^{(1)}[1, +\infty)$, $f(1) = 1$, 且当$x \geq 1$时, 有$f'(x) = \frac{1}{x^2+f^2(x)}$. 证明: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$存在, 且$\lim_{x\to+\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}$.

题5.2 设$n \in \mathbb{N}$, 而函数$f \in C[a, b]$使得$\int_a^b x^k f(x)dx = 0$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, 求证: 函数$f$在$(a, b)$内至少有$n + 1$个不同的零点.

题5.3 设$P_n(x)$为$n \geq 1$次多项式, $[a, b]$是任意一个闭区间. 证明:

$$\int_a^b |P_n'(x)|dx \leq 2n \max\{|P_n(x)| : a \leq x \leq b\}.$$