第 4 次作业题

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\big)$, (2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$,

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}$,

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{x}$, (6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$,

(7) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$, (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}+2\sin x}{x}$,

(9) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan x)^{\cot x}$, (10) $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$.

2. 用函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\arctan x=\arctan x_0$ $(x_0>0)$.

3. 求下列极限:

(11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos(kx^2)}}{x^4}$, (12) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$,

(13) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(1-\cos\frac{x}{2})}{x^3\ln(1+x)}$ (14) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\big(\ln(x-2)-\ln x\big)$,

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\big)^n$ $(a,b>0)$, (16) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin^2(\pi\sqrt{n^2+1})$,

(17) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$, (18) $\lim\limits_{x\to0}\big(\frac{a_1^x+\cdots+a_k^x}{k}\big)^{\frac{1}{x}}$, 其中 $a_j>0$.

4. 研究下列函数在 $x=x_0$ 处的连续性:

(1) $f(x)=\begin{cases}|x|^\alpha\sin\frac{1}{x}, & \text{若 } x\neq0,\\ 0, & \text{若 } x=0,\end{cases}$ 其中 $x_0=0$;

(2) $f(x)=\begin{cases}x^{-1}(1-e^{\frac{x}{x-2}}), & \text{若 } x\neq0,2,\\ 0, & \text{若 } x=2,\\ \frac{1}{2}, & \text{若 } x=0,\end{cases}$ 其中 $x_0=0,2$.

5. 指出下列函数的间断点及其类型:

(1) $f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{x}, & \text{若 } x\neq0,\\ 0, & \text{若 } x=0,\end{cases}$;

(2) $f(x)=[|\sin x|]$;

(3) $f(x)=\operatorname{sgn}(|x|)$.

6. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}$, 确定 f 的间断点.

7. 若 $f\in\mathscr{C}[a,b]$ 在 $[a,b]$ 的任意点处均不为零, 求证: f 在 $[a,b]$ 上不变号.

8. 若 $f\in\mathscr{C}[a,b]$ 且 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a,b]$, 求证: $\exists\xi\in[a,b]$ 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}.$$

9. 设 $a<b<c$. 求证: $f(x)=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}$ 在 (a,c) 内恰有两个零点.

10. 设 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. 求证: 函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上有最小值.