概率论与数理统计

任课教师: 胡家信

清华大学数学科学系

2022 年 11 月 14 日

复习

- 方差：$\sigma^2(X) := \mathbb{E}\left\{(X-\mathbb{E}(X))^2\right\}$，或等价地

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 .$$

开方后称为偏差：表示随机变量与其均值之间的平均误差。

- $X_1, \cdots, X_n$独立：则

$$\sigma^2(X_1 + \cdots + X_n) = \sigma^2(X_1) + \cdots + \sigma^2(X_n)$$

- 协方差(covariance)：$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$。
- 关联系数：$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\mathbb{E}(X^0 Y^0)}{\sqrt{\mathbb{E}\{(X^0)^2\}\mathbb{E}\{(Y^0)^2\}}}$，
且$\rho(X, Y) \in [-1, 1]$。

- Cauchy-Schwarz inequality：$[\mathbb{E}(XY)]^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$。

  从微积分观点：若X, Y均为连续随机变量，则

$$
\begin{aligned}
[\mathbb{E}(XY)]^2 &= \left(\int\int uvf(u,v)dudv\right)^2 \\
&\leq \left\{\int\int u^2 f(u,v)dudv\right\} \cdot \left\{\int\int v^2 f(u,v)dudv\right\} \\
&= \left\{\int u^2 f_X(u)du\right\} \cdot \left\{\int v^2 f_Y(v)dv\right\} = \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y^2)
\end{aligned}
$$

一般Cauchy-Schwarz不等式：对任意（平方）可积函数f, g,

$$
\left(\int\int f(u,v)g(u,v)dvdu\right)^2 \leq \int\int f^2(u,v)dvdu \cdot \int\int g^2(u,v)dvdu.
$$

复习

- 多次多项式(multinomial)：

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=\sum_{k_1+\cdots+k_r=n}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_r^{k_r}.$$

- 生成函数： $g(z)=E\left(z^X\right)$。
  - 若X是离散的，则

$$g(z)=\sum_{j\geq 0}P(X=j)z^j=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j.$$

  - 若X是连续的、具有密度函数f, 则

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty}z^uf(u)du.$$

- 生成函数的性质：

$$\mathbb{E}(X)=g'(1),\quad \mathbb{E}(X^2)=g'(1)+g''(1).$$

复习

- 若随机变量$X_1, \cdots, X_n$独立，生成函数分别为$g_1, \cdots, g_n$，则其和$X_1 + \cdots + X_n$的生成函数为$g = g_1 \cdots g_n$。
- Laplace 变换（下面详述）：
$$\mathbb{E}(e^{-\lambda X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u} f(u) du,$$
称为随机变量X的**拉氏变换**。
- Fourier 变换（下面详述）：
$$\mathbb{E}(e^{i\theta X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta u} f(u) du,$$
称为随机变量X的**特征函数**。

Laplace 变换(transform)

设X是任意随机变量，密度函数为f。令$\lambda \geq 0$，考虑一个新的**重要**随机变量$e^{-\lambda X}$。数学期望$E(e^{-\lambda X})$（即X的拉氏变换）：

$$E(e^{-\lambda X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u} f(u) du.$$

右边积分称为函数f的**Laplace 变换**，即$\mathcal{L}(f)(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u} f(u) du$。若$\lambda = -i\theta$为复数，则

$$E(e^{i\theta X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta u} f(u) du,$$

为函数f的**Fourier 变换**。函数$E(e^{i\theta X})$在概率论中称为随机变量X的**特征函数**(characteristic function)。

Laplace 变换(transform)

课堂练习:

- 求函数$f(u) = u^{-\alpha}(u > 0)$ $(\alpha = \frac{1}{2})$的Laplace变换。
- 求Gauss函数$f(u) = e^{-u^2/2}(-\infty < u < \infty)$的Fourier变换。

答案：

- 函数$f(u) = u^{-\alpha}(u > 0)$的Laplace变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(\lambda) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} u^{-\alpha} du \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha} \frac{dx}{\lambda} \quad (\text{令} x = \lambda u) \\ &= \lambda^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha), \quad \lambda > 0,\end{aligned}$$

其中Gamma函数$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$。

答案

答案：

- Gauss函数$f(u)=e^{-u^2/2}(-\infty<u<\infty)$的Fourier变换为

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta u}e^{-u^2/2}du=\sqrt{2\pi}e^{-\theta^2/2}.$$

事实上，利用下面公式：对任意实数ξ,

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(i\xi+x)^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

注：此题为**奖励题1（0.4分），请提交到网络学堂第2次奖励题窗口**。

所以，我们得

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta u}e^{-u^2/2}du=e^{-\theta^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(u/\sqrt{2}-i\theta/\sqrt{2}\right)^2}du$$

$$=e^{-\theta^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}du=\sqrt{2\pi}e^{-\theta^2/2}.$$

今天主要内容

- Bernoulli 分布
- 二次项分布
- Poisson分布
- 作业讲解

1、Bernoulli分布

设X是一个随机变量，其概率分布为

$$\mathbb{P}(X=1)=p,$$
$$\mathbb{P}(X=0)=q=1-p,$$

如掷硬币正面出现的概率为p，反面出现的概率为$1-p$。令

$$X(\omega)=\begin{cases}1, & \omega=\text{正面}\\ 0, & \omega=\text{反面}.\end{cases}$$

则X是一个随机变量，定义域为集合{正面,反面}，值域为集合$\{0,1\}$。

$$\mathbb{E}(X)=p,\sigma^2(X)=p(1-p)=pq.$$

1、Bernoulli分布（续）

概率质量函数(probability mass function)可写成

$$f(k;p)=\mathbb{P}(X=k)=p^k(1-p)^{1-k},\quad k=0,1.$$

注：**概率质量函数**有时也称为**概率分布**，但此概念不同于**分布函数**（或者**分布**），因为分布函数定义为

$$\mathbb{P}(X\le x).$$

2、二项式分布(Binomial distribution)

固定一个正整数n，设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是n个独立、服从Bernoulli分布的随机变量，令

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

也是一个随机变量。如上面掷硬币，集合$\{S_n = k\}$表示在n次投掷币中正面出现k 次这一事件。其**概率质量函数**为

$$\begin{aligned} f(k; n, p) &= \mathbb{P}(S_n = k) \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

特别地$f(k; 1, p)$（即$n = 1$）为Bernoulli概率质量函数。计算知

$$\mathbb{E}(S_n) = np, \sigma^2(X) = npq.$$

其**分布函数**的计算较复杂。实际上，

$$
\begin{aligned}
F(k;n,p) &= \mathbb{P}(S_n \le k) \\
&= \mathbb{P}(S_n = 0) + \mathbb{P}(S_n = 1) + \cdots + \mathbb{P}(S_n = k) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\
&= (n-k)\binom{n}{k} \int_0^{1-p} t^{n-k-1}(1-t)^k dt, \quad 0 \le k < n.
\end{aligned}
$$

课后思考题：如何证明最后的等式？

定义（二项式分布）：固定一个正整数n和p，如果

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n.$$

称随机变量X服从二项式分布$B(n,p)$，记为

$$X\sim B(n,p)$$

例题：设$X\sim B(n,p),Y\sim B(m,p)$且独立，则

$$X+Y\sim B(n+m,p).$$

方法一。 事实上，计算知

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(X+Y=k|X=j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k-j|X=j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k-j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \cdot \binom{m}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{m-k+j} \\
&= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}.
\end{aligned}
$$

这里用到等式

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}=\binom{n+m}{k}.$$

该等式证明如下：$(1+x)^n\cdot(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$展开并比较$x^k$ 的系数：左边展开为

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\cdot\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{j}x^{i+j}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{m+i}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}x^k=\sum_{k=0}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}x^k$$

右边展开为$\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k$。故所证等式成立。证毕

方法二。请利用母函数证明.

注：此为**奖励题2（0.2分），请提交到第2次奖励题窗口**

二项式分布的极限。 令

$$A_k(n,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad 0\le k\le n.$$

现让p随n变化，即$p=p_n$，特别取$p_n=\frac{\alpha}{n}$，

$$a_k(n):=A_k(n,\frac{\alpha}{n})=\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k},\quad 0\le k\le n.$$

取极限得

$$\lim_{n\to\infty}a_0(n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n=e^{-\alpha}.$$

再计算

$$\frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)}=\frac{\alpha}{k+1}\left[\left(\frac{n-k}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-1}\right]\to\frac{\alpha}{k+1},n\to\infty.$$

已知:

$$\lim_{n\to\infty} a_0(n) = e^{-\alpha}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)} = \frac{\alpha}{k+1}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_1(n) = \frac{\alpha}{1} \lim_{n\to\infty} a_0(n) = \alpha e^{-\alpha},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_2(n) = \frac{\alpha}{2} \lim_{n\to\infty} a_1(n) = \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} e^{-\alpha},$$

$$\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} a_k(n) = \frac{\alpha}{k} \lim_{n\to\infty} a_{k-1}(n) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}.$$

Poisson 极限定律:

$$\lim_{n\to\infty} A_k(n, \frac{\alpha}{n}) = \pi_k(\alpha) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}.$$

课后思考题： 若$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$，则

$$\lim_{n\to\infty}A_k(n,\frac{\alpha_n}{n})=\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-k}=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}.$$

（**注意：** 前面我们取$\alpha_n=\alpha$对所有$n\geq 0$）。这是纯粹的微积分题目！

Poisson分布的模型: 给定一个常数$\alpha > 0$，设

$$a_k = \frac{e^{-\alpha}}{k!}\alpha^k, \quad k = 0, 1, 2\cdots,$$

则$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}}{k!}\alpha^k = e^{-\alpha}e^{\alpha} = 1$，其均值为

$$\sum_{k=0}^{\infty} ka_k = e^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k!}\alpha^k = \alpha e^{-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} = \alpha.$$

定义（Poisson分布）：参数为α的Poisson分布:

$$P(X = k) = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}, \quad k \in N^0,$$

其中$N^0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$为非负整数集。

Poisson分布

设X是服从参数为α的**Poisson分布**的随机变量，则$\mathbb{E}(X)=\alpha$，生成函数为

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha}}{k!}\alpha^k z^k=e^{-\alpha}e^{\alpha z}=e^{\alpha(z-1)}.$$

微分两次得

$$g'(z)=\alpha e^{\alpha(z-1)},\quad g''(z)=\alpha^2 e^{\alpha(z-1)}.$$

所以

$$\mathbb{E}(X)=g'(1)=\alpha,\mathbb{E}(X^2)=g'(1)+g''(1)=\alpha+\alpha^2,$$
$$\sigma^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=\alpha.$$

定理: 设随机变量X_j独立，且具有Poisson分布$\pi(\alpha_j)$，则$X_1+\cdots+X_n$具有Poisson分布$\pi(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)$。

证明：利用生成函数证明。令g_{X_i}为X_i的生成函数，则

$$
\begin{aligned}
g_{X_1+\cdots+X_n}(z) &= g_{X_1}(z)g_{X_2}(z)\cdots g_{X_n}(z)\\
&= e^{\alpha_1(z-1)}e^{\alpha_2(z-1)}\ldots e^{\alpha_n(z-1)}\\
&= e^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)(z-1)}.
\end{aligned}
$$

即$X_1+\cdots+X_n$的生成函数与Poisson分布$\pi(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)$ 的生成函数一样。 由唯一性得证。

定理（Stirling 公式）：下列极限成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}=\sqrt{2\pi}.$$

即

$$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}.$$

例子：令$a_n=\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}$，计算（利用计算器）

$$(1).\quad 20!,\quad a_{20},$$

$$(2).\quad 100!,\quad a_{100}.$$

答案： 利用计算器，

$$(1).\quad 20! = 2.4329 \times 10^{18}, \quad a_{20} = 2.4228 \times 10^{18},$$

$$(2).\quad 100! = 9.3326 \times 10^{157}, \quad a_{100} = 9.3248 \times 10^{157}.$$

下面的证明略（课后讨论题）。

引理: 设$|x| \le 2/3$，则

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \theta(x),$$

其中$|\theta(x)| \le |x|^3$。

证：由Taylor公式：$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，所以,

$$|\theta(x)| \le \sum_{n=3}^{\infty}\frac{|x|^n}{n} \le \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}|x|^n = \frac{|x|^3}{3(1-|x|)}.$$

当$|x| \le 2/3$时,有$3(1-|x|) \ge 1$。证毕。

引理: 存在常数C使得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log(n!) - (n+\frac{1}{2})\log n + n\right) = C.$$

证：令$d_n = \log(n!) - (n+\frac{1}{2})\log n + n$，则

$$d_n - d_{n+1} = (n+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{n}) - 1.$$

由上面引理，上式右边等于

$$(n+\frac{1}{2})\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \theta(1/n)\right) - 1 = (n+\frac{1}{2})\theta(1/n) - \frac{1}{4n^2},$$

所以, $|d_n - d_{n+1}| \le (n+\frac{1}{2})\frac{1}{n^3} + \frac{1}{4n^2}$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(d_n - d_{n+1})$绝对收敛。

Stirling公式的证明

即

$$d_1 - \lim_{N\to\infty} d_N = \sum_{n=1}^{\infty}(d_n - d_{n+1}) = C_1.$$

引理证毕。

从极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log(n!) - (n+\frac{1}{2})\log n + n\right) = C.$$

得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+1/2}} = e^C = A.$$

即

$$n! \sim An^{n+1/2}e^{-n}.$$

现证常数$A = \sqrt{2\pi}$。

常数$A=\sqrt{2\pi}$

考虑积分$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$。则

$$(1).\ I_n\le I_{n-1}.\quad (2).\ I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

$$(3).\ \frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}}=\frac{2n}{2n+1}.\quad (4).\ \frac{2n}{2n+1}\le\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}}\le\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\le 1.$$

$$(5).\ \lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1.$$

$$(6).\ \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\right)\cdot\frac{2}{\pi}\quad\Rightarrow$$

$$(7).\ \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}.$$ (**Wallis公式.**)

常数$A = \sqrt{2\pi}$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}. \quad (\textbf{Wallis公式.})$$

上式左边前k项写成

$$\prod_{n=1}^{k}\frac{(2n)^4}{[(2n-1)(2n)][(2n)(2n+1)]}=\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{16^k(k!)^4}{[(2k)!]^2}$$

但当k很大时,由上面知

$$k!\sim Ak^{k+1/2}e^{-k}, \quad (2k)!\sim A(2k)^{2k+1/2}e^{-2k}$$

带入上式得$A = \sqrt{2\pi}$。证毕。

题目讲解（粒子移动问题, P.160. 23题）

题目：粒子从原点每次独立向左或向右移动一格，概率均为$\frac{1}{2}$，设Y_n是粒子第n步时的位置（随机变量），求

(a) $P(Y_n \geq 0, 1 \leq n \leq 4)$。**(b)** $P(|Y_n| \leq 2, 1 \leq n \leq 4)$。

(c) $P(Y_n \geq 0, 1 \leq n \leq 4 | Y_4 = 0)$.

想法：$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，其中$X_n$表示粒子第$n$步移动的位移，$X_n = 1$，或者$X_n = -1$, 其概率分布为

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}, n \geq 1.$$

注意随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立、同分布。

解答：(a) 欲求$P(Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, Y_3 \geq 0, Y_4 \geq 0)$，即求

$$P(Y_1 \geq 0)P(Y_2 \geq 0|Y_1 \geq 0)P(Y_3 \geq 0|Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0)$$

$$\cdot P(Y_4 \geq 0|Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, Y_3 \geq 0)$$

- 注意$\{Y_1 \geq 0\} = \{X_1 = 1\}$，故$P(Y_1 \geq 0) = \frac{1}{2}$.
- 事件$\{Y_2 \geq 0 | Y_1 \geq 0\} = \{X_1 + X_2 \geq 0 | X_1 = 1\}$永远成立（为什么），所以$P(Y_2 \geq 0 | Y_1 \geq 0) = 1$.
- 事件$\{Y_3 \geq 0 | Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0\}$等于

$$\{X_1 + X_2 + X_3 \geq 0 | X_1 = 1\},$$

而该事件发生，当且仅当X_2, X_3不能同时等于-1，即只有下列情形发生：$\{X_2 = 1, X_3 = 1 | X_1 = 1\}$，$\{X_2 = 1, X_3 = -1 | X_1 = 1\}$，或者$\{X_2 = -1, X_3 = 1 | X_1 = 1\}$，这三个事件发生的概率均为$\frac{1}{4}$（为什么），故

$$P(Y_3 \geq 0 | Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0) = \frac{3}{4}.$$

- 事件$\{Y_4 \geq 0 | Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, Y_3 \geq 0\}$等于

$$\{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 0 | X_1 = 1, X_1 + X_2 + X_3 \geq 0\}$$

该事件也**永远发生**，这是因为如果条件

$$\{X_1 = 1, X_1 + X_2 + X_3 \geq 0\}$$

发生，那么$Y_3 = 1 + X_2 + X_3 = 3$，或者$Y_3 = 1 + X_2 + X_3 = 1$（排除情形$X_2 = X_3 = -1$），此时$Y_4 = Y_3 + X_4$总大于0，故

$$P\left(Y_4 \geq 0 | Y_1 \geq 0, Y_2 \geq, Y_3 \geq 0\right) = 1.$$

综上所述，所求概率

$$P\left(Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, Y_3 \geq 0, Y_4 \geq 0\right) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{8}.$$

解答(b) 欲求$P(|Y_n| \leq 2, 1 \leq n \leq 4)$

- 注意$|Y_1| \leq 2$和$|Y_2| \leq 2$总成立，故所求概率为$P(|Y_n| \leq 2, 1 \leq n \leq 4) = P(|Y_3| \leq 2, |Y_4| \leq 2)$.
- 事件$\{|Y_3| \leq 2\}$发生，当且仅当X_1, X_2, X_3不能全等于1，或者全等于−1，所以$P(|Y_3| \leq 2) = 6 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$。注意$\{|Y_3| \leq 2\} = \{Y_3 = 1\} \cup \{Y_3 = -1\}$，且$P(Y_3 = 1) = P(Y_3 = -1) = 3/8$。
- 事件$\{|Y_4| \leq 2| \, |Y_3| \leq 2\}$等于$\{|Y_3 + X_4| \leq 2 | Y_3 = 1\} \cup \{|Y_3 + X_4| \leq 2 | Y_3 = -1\}$，该事件总发生，这是因为$X_4$只取+1或−1两个值，故$P(Y_4| \leq 2| \, |Y_3| \leq 2) = 1$
- 综上所述，**所求概率为**

$$P(|Y_n| \leq 2, 1 \leq n \leq 4) = P(|Y_3| \leq 2) \cdot P(|Y_4| \leq 2| \, |Y_3| \leq 2) = \frac{3}{4}.$$

解答(c) 欲求$P(Y_n \geq 0, 1 \leq n \leq 4 | Y_4 = 0)$，即求

$$P(Y_n \geq 0, 1 \leq n \leq 4 | Y_4 = 0) = \frac{P(Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, Y_3 \geq 0, Y_4 = 0)}{P(Y_4 = 0)}$$

- 注意$\{Y_4 = 0\}$发生，当且仅当X_1, X_2, X_3, X_4有两取值为$+1$, 另两个取值为-1，共有种$\binom{4}{2} = 6$情形，每个情形的概率均为$\frac{1}{16}$，故$P(Y_4 = 0) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$。
- 注意$A := \{Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, Y_3 \geq 0, Y_4 = 0\}$发生，当且仅当$X_1 = 1$，$1 + X_2 + X_3 \geq 0$，$1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$（注意此时$Y_2 \geq 0$总发生），故$X_4 = -(1 + X_2 + X_3) \leq 0$，从而$X_4 = -1$，进而有$X_2 + X_3 = 0$。总而言之，$A = \{X_1 = 1, X_2 + X_3 = 0, X_4 = -1\}$, 所以$P(A) = 2 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$
- 综上所述，所求概率为$\frac{1}{8} / \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$.

题目：已知函数φ定义在$[0,\infty)$上的非负、单减、不恒为零的函数，满足方程

$$\varphi(s+t)=\varphi(s)\varphi(t),\ \forall s,t\geq 0.$$

证明：存在某个$\lambda\geq 0$使得$\varphi(t)=e^{-\lambda t},\forall t\geq 0$。进而证明：$T$是正的随机变量，满足

$$P(T>s+t|T>s)=P(T>t),\ \forall s,t\geq 0$$

当且仅当T的分布函数是一个**指数函数**。

题目讲解（指数分布问题，P.162. 41题）（续）

证明： 先证明$\varphi(t) = e^{-\lambda t}, \forall t \geq 0$。事实上，对任意$t \geq 0$,

$$\varphi(t) = \varphi(0+t) = \varphi(0)\varphi(t) \quad \Rightarrow \varphi(0) = 1,$$

这是因为有某个$\varphi(t) \neq 0$。由单调性$\varphi(1) \leq \varphi(0) = 1$。
令$\lambda = -\log \varphi(1) \geq 0$。注意到

$$\varphi(2t) = \varphi(t)^2, \varphi(3t) = \varphi(t)^3, \cdots,$$

$$\varphi(mt) = \varphi(t)^m, \text{对任意正整数} m.$$

取$t = 1/m$得，对任意正整数m, $\varphi(1) = \varphi(1/m)^m$,于是

$$\varphi(1/m) = \varphi(1)^{1/m} = e^{\frac{1}{m}\log \varphi(1)} = e^{-\lambda/m},$$

$$\varphi(n/m) = \varphi(1/m)^n = e^{-\lambda \cdot \frac{n}{m}}.$$

进而对任何**非负有理数**t，均有$\varphi(t) = e^{-\lambda \cdot t}$。对任何**无理数**$t$，则存在两列**有理数** $\{t_n\}$和$\{s_n\}$，使得$t_n < t < s_n$，$t_n \to t$，$s_n \to t$。由单调性及已经证明的结论，于是，$\varphi(t_n) \geq \varphi(t) \geq \varphi(s_n)$。但$\varphi(t_n) = e^{-\lambda \cdot t_n} \to e^{-\lambda \cdot t}$（**为什么？**），同理$\varphi(s_n) = e^{-\lambda \cdot s_n} \to e^{-\lambda \cdot t}$，故对任何**无理数**$t$，有$\varphi(t) = e^{-\lambda \cdot t}$，得证。

最后，令$P(T > t) = \varphi(t)$，根据题意，对任意$s, t \geq 0$，

$$\varphi(t) = P(T > t) = P(T > s + t | T > s) = \frac{P(T > s + t, T > s)}{P(T > s)} = \frac{\varphi(s + t)}{\varphi(s)},$$

即$\varphi(s + t) = \varphi(s)\varphi(t)$，从而$\varphi(t) = e^{-\lambda t}$（$t > 0$），

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - \varphi(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0.$$

其余略。

题目：首先掷一枚色子，然后抛和色子出现点数数目相同的均匀硬币(如色子出现**点“6”**，**抛六枚**硬币)。

(a) 求出现k个正面的概率？

(b) 已知出现3个正面，问色子出现的点数为n的概率？

解：（**a**）。A_n表示“色子出现点数n"（$1 \le n \le 6$），B_k表示“(硬币)出现k个正面"，则总有$k \le n$。$B_k|A_n$ 表示“**抛n次硬币出现k个正面**"。不难求得$P(A_n) = \frac{1}{6}$（$1 \le n \le 6$），

$$P(B_k|A_n) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}, \quad \forall k \le n \le 6,$$

于是出现k个正面的概率为（分割征服公式）

$$P(B_k) = \sum_{n=k}^{6} P(A_n)P(B_k|A_n) = \sum_{n=k}^{6} \frac{1}{6}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall 0 \le k \le 6.$$

解：（**b**）。回顾B_3表示"(硬币)出现3个正面"。对任意$3 \le n \le 6$，

$$P(B_3) = \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{6}\binom{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad P(B_3|A_n) = \binom{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

于是**(硬币)出现3个正面时，色子出现的点数为n的概率为**

$$P(A_n|B_3) = \frac{P(A_nB_3)}{P(B_3)} = \frac{P(A_n)P(B_3|A_n)}{P(B_3)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\binom{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{6}\sum_{n=3}^{6}\binom{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$= \frac{\binom{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sum_{n=3}^{6}\binom{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \binom{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall 3 \le n \le 6,$$

这里用到$\sum_{n=3}^{6}\binom{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$（见Banach火柴问题）。解毕。

题目：一台自动化机器生产的产品有2%的不合格（即合格率为98%）。当机器生产不合格产品时，工程师要对机器进行修理，使之能生产合格产品。问在两次修理机器之间，**平均生产**多少个合格产品？

解：设X表示生产次品的“**等时**”，即$X = n$表示前$n-1$ 次生产的均是合格产品，而第n恰好生产一台次品。则

$$\mathbb{P}(X = n) = \left(\frac{98}{100}\right)^{n-1} \frac{2}{100}.$$

于是，

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{98}{100}\right)^{n-1} \frac{2}{100} = 50.$$

即生产第一台次品时，平均生产了50台产品，最后一台是次品，**合格品有**$50 - 1 = 49$**台**。解毕。

题目讲解（P.196. 12题）

题目：6把相似的钥匙只有其中1把能打开门，现一个一个地试。问要打开门，**平均需要**试多少次钥匙？（猜一猜）

解：设X表示打开门的"**等时**"，即$X=n$表示前$n-1$次打不开门，而第n恰次正好打开门。则$\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{6}$，即**从6把钥匙选取正确那把钥匙**这一事件的概率。同时，

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$$

即**第一次从6把钥匙选取的是错误的钥匙、而第二次从剩下的5把钥匙选取正确的钥匙**这一事件的概率。同理，

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6},$$

以及

$$\mathbb{P}(X=4)=\mathbb{P}(X=5)=\mathbb{P}(X=6)=\frac{1}{6}.$$

于是，

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=1}^{6} n\cdot\mathbb{P}(X=n)=\sum_{n=1}^{6} n\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}.$$

即平均需要试3.5次钥匙才能打开门（合理吗？）。解毕。

作业讲解

P. 196, 第15题：There are N coupons numbered 1 to N in a bag. Draw one after another with replacement. (a) What is the expected number of drawings until the first coupon drawn is drawn again? (b) What is the expected number of drawings until the first time a duplication occurs?

N张有标号的优惠券，放回的一个一个的抽取，求

(a) **第一张**优惠券再次被抽到的平均次数（猜一猜）；

(b) **有一张**优惠券再次被抽到的平均次数（猜一猜？？）；

上述两种情况那个次数大？

答案

解(a)：设X为第一张优惠券再次被抽到所需要的次数，则"X=n"表示"第一张优惠券仅在第n次时，第二次抽到"，即第一张优惠券有N种选取；从第二次至第$n-1$次均抽到不同于第一次抽到的优惠券，有$(N-1)^{n-2}$种情形；而第n次抽到的只能是第一张优惠券，故

$$P\left(X=n\right)=\frac{N\cdot\left(N-1\right)^{n-2}\cdot 1}{N^n}=\frac{1}{N-1}\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1},$$

于是所求期望为

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{n=2}^{\infty}nP\left(X=n\right)=\sum_{n=2}^{\infty}n\frac{1}{N-1}\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{N-1}\cdot\left(1/\left(1/N^2\right)-1\right)=N+1.\end{aligned}$$

解(b)：设Y为优惠券“**第一次出现重复**”所抽的次数，则”Y=n“ 表示”有一张优惠券仅在第n次时，**再次（即第二次）**抽到“，即前面$n-1$次中每次抽出的优惠券皆不同，有

$$N(N-1)\cdots(N-(n-1)+1)=(N)_{n-1}$$

种可能，而第n次抽出的优惠券与前面某个优惠券相同，有$n-1$种可能。故$P\left(Y=n\right)=\frac{(N)_{n-1}\cdot(n-1)}{N^n}$，于是所求期望为

$$E(Y)=\sum_{n=2}^{N+1}nP\left(Y=n\right)=\sum_{n=2}^{N+1}n\frac{(N)_{n-1}\cdot(n-1)}{N^n}=\sum_{n=2}^{N+1}\frac{n(n-1)(N)_{n-1}}{N^n}.$$

（当$N=2$时，第一个答案是3，第二个答案是2.5，合理吗？）解毕。

附带问题

上面一个附带问题：因为下列事件至少有一个发生

$$\{Y=2\},\{Y=3\},\cdots,\{Y=N+1\},$$

即N张优惠券中、第$N+1$次肯定抽到某个优惠券，故我们有

$$\begin{aligned} 1 &= P(Y=2)+P(Y=3)+\cdots+P(Y=N+1) \\ &= \sum_{k=2}^{N+1}\frac{(N)_{k-1}\cdot(k-1)}{N^k}=\sum_{k=1}^{N}\frac{k\cdot(N)_k}{N^{k+1}} \text{ 对任意正整数}N\geq 2. \end{aligned}$$

问题：证明下列恒等式：对任意正整数$N\geq 2$

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{k\cdot(N)_k}{N^{k+1}}=1.\text{（例如}N=2,\text{显然}\frac{1\cdot 2}{2^2}+\frac{2\cdot 2}{2^3}=1\text{）}$$

（**奖励题3，0.2分**）。（相似题：$\sum_{k=1}^{N}\frac{((k+1)^2-(k+1)-N)\cdot(N)_k}{N^{k+1}}=1$）

题目：电子元件的使用寿命服从指数密度$\lambda e^{-\lambda t}$（单位：小时），已知电子元件已经使用了n个小时，问还可以平均使用多长时间？（此题求条件期望）

注意下列公式：

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n), \quad X\text{为取非负整数值的离散随机变量.} \tag{1}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq u)du, \quad X\text{为取非负值的连续随机变量.} \tag{2}$$

现证明(2): 事实上

$$\int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq u)du = \int_0^{\infty} \left\{ \int_u^{\infty} f(t)dt \right\} du$$

答案

交换积分顺序，得

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq u)du = \int_0^\infty \left\{ \int_u^\infty f(t)dt \right\} du$$
$$= \int_0^\infty f(t)dt \int_0^t du = \int_0^\infty tf(t)dt = \mathbb{E}(X).$$

于是，式(2)成立。

答案

解：设电子元件的使用寿命为T（小时），是一个随机变量，根据题意，它的密度函数为$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$。下列总是成立：

$$\mathbb{P}(T > n + t | T > n) = \mathbb{P}(T > t), \quad \forall t > 0, n > 0$$

（为什么？注意$\mathbb{P}(T > t) = \int_t^\infty f(u) du = e^{-\lambda t}$）。于是，利用（2）

$$\mathbb{E}(T | T > n) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T > n + t | T > n) dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t) dt = \frac{1}{\lambda}.$$

电子元件还可以平均使用$\frac{1}{\lambda}$小时（此为马尔可夫性质）。解毕。

作业

第8次作业(钟开来书)：

P. 246-247：第1，2，3，6，7，8，9题.

预习内容:

- Laplace 定理。
- 正态分布。
- 中心极限定理。