微积分 A (2)

姚家燕

第 29 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

期末考试时间与地点

时间: 2021 年 6 月 15 日星期二 8:00–10:00

地点: 二教 401 (核 01-02, 共 40 人)

二教 402 (机械, 共 49 人)

二教 403 (所有其他同学, 共 58 人)

重要提示: 考试时需且只需带学生证和文具!

千万不要迟到或无故缺考!

考前答疑: 2021 年 6 月 14 日 14:00-21:00

答疑地点: 理科楼数学科学系 A 216

第 29 讲

第 7 章小结

1. 形式 Fourier 级数:

- 周期为 2π 的三角函数系:

$$\Lambda = \{1,\ \cos x,\ \sin x, \ldots, \cos(nx),\ \sin(nx), \ldots\}.$$

- 上述三角函数系的性质: 正交性, 完全性.

- 周期为 2π 的函数的 Fourier 级数:

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\ (n\geqslant 0),$$

$$b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\ (n\geqslant 1),$$

$$f(x)\sim\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)\big).$$

- 正弦级数 (奇函数), 余弦级数 (偶函数).

2. Fourier 级数的性质及点态收敛性:

- 若 f 在 $[a,b]$ 上可积或广义绝对可积, 则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x=0.$$

- $\lim_{n\to\infty} a_n(f) = \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0.$
- Fourier 级数的点态收敛 (Dirichlet-Jordan):
  假设 f 是以 2π 为周期的周期函数. 如果 f 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上逐段单调有界或逐段可微, 则 $\forall x\in\mathbb{R}$, 函数 f 的 Fourier 级数在点 x 处收敛到 $S(x)=\frac{1}{2}\big(f(x-0)+f(x+0)\big)$.

  (1) 若 f 在点 x 处连续, 则 $S(x)=f(x)$.

  (2) $S(\pi)=S(-\pi)=\frac{1}{2}\big(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\big)$.

- 周期为 2ℓ 的函数的 Fourier 级数:

$$a_n(f) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x \ (n \geqslant 0),$$
$$b_n(f) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x \ (n \geqslant 1),$$
$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(f)\cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n(f)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Big).$$

- 上述 Fourier 级数与以 2π 为周期的 Fourier 级数具有完全类似的性质.
- 周期性延拓: 零延拓, 奇延拓, 偶延拓.
- 复数形式的 Fourier 级数: 简化运算!

3. Fourier 级数的平方平均收敛:

- 投影、最佳逼近定理: $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$, 令

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big).$$

则 $\|f - S_n(f)\| = \min_{g\in W_n} \|f-g\|$, 最小值仅在 $g = S_n(f)$ 处达到, 且 $f - S_n(f)$ 垂直于 W_n, 其中W_n是$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos(nx), \sin(nx)$ 所张成的实线性空间.

- Parseval 等式: $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$, 均有

$$\frac{1}{2}\big(a_0(f)\big)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\big(a_k(f)\big)^2+\big(b_k(f)\big)^2\Big)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

- 唯一性: 若 $f,g \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$ 有相同的 Fourier 级数, 则 f,g 几乎处处相等. 如果 f,g 还为连续函数, 则 $f \equiv g$.

- 平方平均收敛: $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(f)-f\|=0.$$

- 广义 Parseval 等式: $\forall f, g \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$, 均有

$$\frac{1}{2}a_0(f)a_0(g) + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g)\big) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

- $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$ 以及 $\forall a, x \in [-\pi,\pi]$, 均有

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a_0(f)(x-a) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x \big(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)\big)\,\mathrm{d}t.$$

综合练习

例 1. 设 f 是以 2 为周期的函数且 $\forall x \in [0,2)$, 均有 $f(x) = e^x$. 若 S 是函数 f 以 2 为周期的 Fourier 级数的和函数, 求 $S(0), S(2), S(3)$.

解: 由于 f 在 $(0,2)$ 上可导, 在端点处单侧可导, 则由 Dirichlet-Jordan 定理知, $\forall x \in (0,2)$, 我们均有 $S(x) = e^x$, 并且 $S(0) = S(2) = \frac{1}{2}(1+e^2)$. 又 S 以 2 为周期, 于是 $S(3) = S(1) = e$.

例 2. $\forall x \in (0,1]$, 定义 $f(x) = e^x$. 试求将函数 f 展成以 2 为周期的正弦级数后所得到的和函数在点 $x = \pi$ 处的值.

解: 首先将 f 奇延拓为函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x & 若\ x \in (0,1], \\ 0 & 若\ x = 0, \\ -e^{-x} & 若\ x \in (-1,0). \end{cases}$$

则 f 在 $[-1,1]$ 上为逐段单调且有界. 对之以 2 为周期进行周期延拓, 所得到的函数仍记作 f.

将 f 展成以 2 为周期的正弦级数后所得到的和函数记作 S. 则由 Dirichlet-Jordan 定理可知, $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有 $S(x) = \frac{1}{2}\big(f(x-0) + f(x+0)\big)$. 特别地, 由于 f 在点 $x = 4 - \pi$ 处连续, 则

$$\begin{aligned} S(\pi) &= S(\pi - 4) = -S(4 - \pi) \\ &= -f(4 - \pi) = -e^{4-\pi}. \end{aligned}$$

例 3. $\forall x \in (0,1)$, 令 $f(x) = x(1-x)$. 将函数 f 奇延拓成以 2 为周期的周期函数, 求其 Fourier 级数, 并计算级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

解: 由于延拓后的函数为奇函数, 从而 $\forall n \geqslant 0$, 我们均有 $a_n = 0$. 又 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$b_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n\pi}x(1-x)\cos(n\pi x)\Big|_0^1$$

$$+\frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(n\pi)^2}(1-2x)\sin(n\pi x)\Big|_0^1$$

$$+\frac{4}{(n\pi)^2}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{4(1-(-1)^n)}{(n\pi)^3}.$$

由于延拓后的函数 f 在 $[-1,1]$ 上为连续, 逐段可导, 且 $f(-1)=f(1)$, 于是 $\forall x\in[-1,1]$, 均有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{((2n-1)\pi)^3}\sin(2n-1)\pi x.$$

特别地, 当 $x=\frac{1}{2}$ 时, 我们有

$$\frac{1}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{((2n-1)\pi)^3}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(-1)^{n-1}}{((2n-1)\pi)^3}.$$

由此我们可得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

例 4. 对任意整数 $m \geqslant 1$, 将函数 $f(x) = \cos^{2m} x$ 展成 Fourier 级数.

解: 由 Euler 公式可知, $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^{2m} = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} (e^{ix})^{2m-k} (e^{-ix})^{k} \\
&= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} e^{2(m-k)ix} = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} \cos 2(m-k)x \\
&= \frac{1}{2^{2m}} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{k} \cos 2(m-k)x + \sum_{k=m+1}^{2m} \binom{2m}{k} \cos 2(m-k)x \right) \\
&= \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=1}^{m} \binom{2m}{m-k} \cos(2kx).
\end{aligned}
$$

例 5. 将函数 $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上展成以 2π 为周期的余弦级数, 并计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

解: 由题设可知要将 f 进行偶延拓, 故 $\forall n\geqslant 1$, 均有 $b_n=0$. 而 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x=\pi$, 且 $\forall n\geqslant 1$, 均有

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}\big((-1)^n-1\big).$$

又 f 在 $[0,\pi]$ 上可导, 故 $\forall x\in[0,\pi]$, 均有

$$f(x)=x=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^2\pi}\cos(2n+1)x.$$

特别地, 带入 $x=0$ 可得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

例 6. 假设 $f \in \mathscr{C}(0, \frac{\pi}{2})$. 要使 f 的 Fourier 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x$, 如何将 f 延拓到 $(-\pi, \pi)$?

解: 将延拓后的函数记为 F. 由于 Fourier 级数只含余弦函数, 故 F 为偶函数. 另外 $\forall n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\pi} F(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(f(x) + F(\pi - x)\big)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

为此只需假设 $\forall x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $F(x) = -f(\pi - x)$.

例 7. 设 f 是以 2π 为周期的函数且 $\forall x\in[-\pi,\pi]$, 均有 $f(x)=\cos(\alpha x)$, 其中 $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

(1) 求 f 的 Fourier 展式.

(2) 求证: $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, 均有 $\cot x=\frac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$.

解: (1) 因 f 为偶函数, 由此可知 $\forall n\geqslant 1$, 我们均有 $b_n=0$. 而 $\forall n\geqslant 0$, 我们则有

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\alpha x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(\cos(\alpha+n)x+\cos(\alpha-n)x\big)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}+\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\Big)=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2}.
\end{aligned}$$

由于 f 在 $(-\pi,\pi)$ 上可导, 而在端点处单侧导数存在, 则由 Dirichlet-Jordan 定理知, $\forall x\in[-\pi,\pi]$,

$$\cos(\alpha x)=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\Big(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos(nx)\Big).$$

(2) 在上式中, 令 $x=\pi$, 则我们有

$$\cot(\alpha\pi)=\frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\Big)=\frac{1}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha\pi}{(\alpha\pi)^2-n^2\pi^2}.$$

$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, 令 $\alpha=\frac{x}{\pi}$, 则 $\alpha\notin\mathbb{Z}$, 带入上式可得

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}.$$

例 8. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是以 2π 为周期的周期函数且

$$f(x)=\begin{cases}\pi-x & 若\ x\in(0,\pi],\\ 0 & 若\ x=0,\\ -\pi-x & 若\ x\in[-\pi,0).\end{cases}$$

试求 f 的 Fourier 级数, 并讨论该 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上是否收敛于 f? 是否一致收敛于 f?

解: 由于 f 为奇函数, 则 $\forall n\geqslant 0$, 我们有 $a_n=0$. 而 $\forall n\geqslant 1$, 我们则有

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n}.$$

由此可得 $f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$. 又 f 分段单调且有界, 则由 Dirichlet-Jordan 定理知, $\forall x \in [-\pi, \pi]$,

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{1}{2}\big(f(x-0)+f(x+0)\big) = f(x).$$

于是上述函数项级数在 $[-\pi, \pi]$ 上非一致收敛, 否则由于通项为连续函数, 则其和函数也将为连续函数, 矛盾!

例 9. 设 f 是以 2π 为周期的连续函数, 而 a_n, b_n 为其 Fourier 系数. $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

(1) 求证: 函数 F 是以 2π 为周期的连续函数.

(2) 求 F 的 Fourier 系数 A_n, B_n.

(3) 若 F 满足 Dirichlet-Jordan 定理的条件, 求证:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

证明: (1) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, 令 $g(x,t) = f(t)f(x+t)$. 由于 f 连续, 故 g 连续, 从而由极限与积分次序可交换性知 F 为连续函数. 又 f 以 2π 为周期, 则 $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned} F(x+2\pi) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+2\pi+t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t \\ &= F(x). \end{aligned}$$

故 F 是以 2π 为周期的连续函数.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, 由周期函数的性质可得

$$
\begin{aligned}
F(-x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(-x+t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{u=-x+t}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+u) f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) f(x+u)\,\mathrm{d}u \\
&= F(x),
\end{aligned}
$$

故 F 为偶函数, 从而 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $B_n = 0$.

令 $b_0=0$. $\forall n\geqslant 0$, 由积分与积分次序可交换得

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\cos(nx)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&\overset{u=x+t}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(u)\cos n(u-t)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos nu\cos nt+\sin nu\sin nt)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt))\,\mathrm{d}t = a_n^2+b_n^2.
\end{aligned}
$$

(3) 因函数 F 满足 Dirichlet-Jordan 定理的条件, 于是在点 $x = 0$ 处, 我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t))^2\,\mathrm{d}t &= F(0) \\
&= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \\
&= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).
\end{aligned}
$$

故所证结论成立.

例 10. 设 f 是以 2π 为周期的函数且在 $[0, 2\pi]$ 上可积, 其 Fourier 系数 为 a_n, b_n.

(1) 若 f 在 $(0, 2\pi)$ 内递增, 求证: $\forall n \geqslant 1$, $b_n \leqslant 0$;

(2) 若 f 在 $(0, 2\pi)$ 内递减, 求证: $\forall n \geqslant 1$, $b_n \geqslant 0$;

(3) 若 $\exists L > 0$ 使得 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 均有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|,$$

求证: $\forall n \geqslant 1$, 均有 $|a_n| \leqslant \frac{2L}{n}$, $|b_n| \leqslant \frac{2L}{n}$.

证明: (1) $\forall n \geqslant 1$, 由题设条件立刻可得

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{(2k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin n\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} \left(f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

(2) 若 f 在 $(0,2\pi)$ 内递减, 则 $-f$ 在 $(0,2\pi)$ 内递增, 从而 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $b_n(f) = -b_n(-f) \geqslant 0$.

(3) $\forall n \geqslant 1$, 由题设条件立刻可得

$$
\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{1}{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}}\left(f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right||\cos(nx)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}}\frac{\pi L}{n}|\cos(nx)|\,\mathrm{d}x \overset{t=nx}{=} \frac{L}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t = \frac{2L}{n}, \\
|b_n| &= \frac{1}{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}}\left(f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right||\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}}\frac{\pi L}{n}|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \overset{t=nx}{=} \frac{L}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{2L}{n}.
\end{aligned}
$$

例 11. 假设 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[-\pi, \pi]$ 使得 $f(-\pi) = f(\pi)$. 若 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 求证: $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$, 且等号成立当且仅当 $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

证明: 由题设得 $a_0(f) = 0$. $\forall n \geqslant 0$, 由定义知

$$\begin{aligned} a_n(f') &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} f(x)\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &\quad + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = nb_n(f). \end{aligned}$$

$\forall n \geqslant 1$, 同样由定义以及分部积分可得

$$b_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = -na_n(f).$$

于是由上述关系式以及 Parseval 等式可知,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x &= \pi\Big(\frac{1}{2}(a_0(f'))^2+\sum_{n=1}^{\infty}\big((a_n(f'))^2+(b_n(f'))^2\big)\Big)\\ &= \pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2\big((a_n(f))^2+(b_n(f))^2\big)\\ &\geqslant \pi\sum_{n=1}^{\infty}\big((a_n(f))^2+(b_n(f))^2\big)=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

且等号成立当且仅当 $\forall n\geqslant 2$, $a_n(f)=b_n(f)=0$,

此时由 Dirichlet-Jordan 定理可知, $\forall x\in[-\pi,\pi]$,

$$f(x)=a\cos x+b\sin x.$$

例 12. 假设 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[0,\pi]$ 使得 $f(0)=f(\pi)=0$ 或者 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求证:

$$\int_0^\pi (f(x))^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\pi (f'(x))^2\,\mathrm{d}x,$$

且等号成立当且仅当$\forall x \in [0,\pi]$, 均有

$$f(x)=b\sin x \text{ 或 } f(x)=a\cos x.$$

证明: (1) 若 $f(0)=f(\pi)=0$, 此时将 f 奇延拓到 $[-\pi,\pi]$ 上并将之记作 F, 则 $F \in \mathscr{C}^{(1)}[-\pi,\pi]$, 并且 F' 为偶函数, 故 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $b_n(F')=0$.

而 $\forall n \geqslant 0$, 由定义及分部积分得 $a_n(F') = nb_n(F)$,

进而由 Parseval 等式立刻可知,

$$\int_0^\pi (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{2}(a_0(F'))^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\big((a_n(F'))^2 + (b_n(F'))^2\big)\Big)$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(b_n(F))^2 \geqslant \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(b_n(F))^2 = \int_0^\pi (f(x))^2 \,\mathrm{d}x,$$

并且等号成立当且仅当 $\forall n \geqslant 2$, 均有 $b_n(F) = 0$,

此时由 Dirichlet-Jordan 定理可知, $\forall x \in [0, \pi]$,

$$f(x) = b \sin x.$$

(2) 若 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则将 f 偶延拓到 $[-\pi,\pi]$ 上并将之记作 G, 此时 G 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可导, 并且 G' 为奇函数, 故 $\forall n \geqslant 0$, 均有 $a_n(G') = 0$. $\forall n \geqslant 1$, 由定义及分部积分可得

$$\begin{aligned}
b_n(G') &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi G'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} f(x)\sin(nx)\Big|_0^\pi - \frac{2n}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= -na_n(G).
\end{aligned}$$

另外, $a_0(G) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

进而由 Parseval 等式立刻可知,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (f'(x))^2\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{2}(a_0(G'))^2+\sum_{n=1}^\infty\big((a_n(G'))^2+(b_n(G'))^2\big)\Big)\\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty n^2(a_n(G))^2 \geqslant \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty (a_n(G))^2\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi (G(x))^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi (f(x))^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

并且等号成立当且仅当 $\forall n \geqslant 2$, 均有 $a_n(G)=0$,

此时由 Dirichlet-Jordan 定理可知, $\forall x \in [0,\pi]$,

$$f(x) = a\cos x.$$

期末总复习

第 1 部分　重积分

要求: 能熟练借助各种坐标系或变换, 将二重积分和三重积分化成累次积分, 熟练利用证明单变量积分的相关定理的方法, 来证明多变量情形的结论.

第 2 部分　曲线与曲面积分

要求: 熟练掌握涉及到曲线积分与曲面积分的各种计算公式, 重点在于牢记只有转化成直角坐标系下的参数方程后才能够计算, 要能熟练应用 Green 公式, Gauss 公式以及 Stokes 公式, 尤其是在积分路径无关性上的应用, 牢记梯度、散度与旋度的定义以及相互关系.

第 3 部分　常数项级数

要求: 熟练掌握关于常数项级数敛散性的各种判别准则, 尤其要能够熟练地应用 Taylor 展开, 对于变号的数项级数要特别小心.

第 4 部分 函数项级数

要求: 熟练掌握关于函数项级数的一致收敛的各种判别准则, 对变号函数项级数要特别小心, 牢记一致收敛的函数项级数的和函数的性质.

第 5 部分　幂级数

要求: 熟练掌握计算幂级数的收敛半径的方法, 牢记幂级数的各种基本性质, 牢记一些基本的函数的幂级数展式, 熟练掌握如何能够由这些基本函数的幂级数展式来推导出其它的函数的幂级数展式, 熟练掌握如何利用幂级数展式来求函数在一点处的高阶导数.

第 6 部分　Fourier 级数

要求: 能够熟练计算给定函数关于给定周期的 Fourier 系数, 熟练应用 Dirichlet-Jordan 定理来计算所得到的 Fourier 级数的和函数, 由此得到某些常数项级数的和, 能熟练应用 Parseval 等式来计算某些常数项级数的和.

谢谢大家!