第 5 次作业题

1. 判断下列函数是否一致连续:

(1) $f(x) = x\sin x\ (0 \leqslant x < +\infty)$, (2) $f(x) = \frac{x^2+1}{4-x^2}\ (-1 < x < 1)$.

解: (1) $\forall n \geqslant 1$, 令 $x_n = 2n\pi$, $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$, 且

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = \lim_{n\to\infty} \big(2n\pi + \frac{1}{n}\big) \sin\frac{1}{n} = 2\pi,$$

于是 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$ 时, 均有 $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \pi$, 故 f 在 $[0, +\infty)$ 上不为一致连续.

(2) 由于 f 可延拓为 $[-1, 1]$ 上为初等函数, 因此连续. 又 $[-1, 1]$ 为有界闭集, 故 f 在 $[-1, 1]$ 上一致连续, 因此也在 $(-1, 1)$ 上一致连续.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-xy^2}\,\mathrm{d}y$, 求 F'.

解: 由含参积分的求导与积分次序可交换性可知, $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有

$$F'(x) = -\int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2}\,\mathrm{d}y + 2xe^{-x^5} - e^{-x^3}.$$

3. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可微. $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $F(x) = \displaystyle\int_0^x (x+y)f(y)\,\mathrm{d}y$, 求 F''.

解: 由含参积分的求导与积分次序可交换性可知, $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y + 2xf(x), \\ F''(x) &= f(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = 3f(x) + 2xf'(x). \end{aligned}$$

4. 设 $\varphi \in \mathscr{C}^{(2)}(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\forall x, t \in \mathbb{R}$, 定义

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,\mathrm{d}s.$$

求证: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

证明: 由含参积分的求导与积分次序可交换性可知, $\forall x, t \in \mathbb{R}$, 均有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{a}{2}\big(\varphi'(x+at) - \varphi'(x-at)\big) + \frac{1}{2}\big(\psi(x+at) + \psi(x-at)\big), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{a^2}{2}\big(\varphi''(x+at) + \varphi''(x-at)\big) + \frac{a}{2}\big(\psi'(x+at) - \psi'(x-at)\big), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \frac{1}{2}\big(\varphi'(x+at) + \varphi'(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\big(\psi(x+at) - \psi(x-at)\big), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{1}{2}\big(\varphi''(x+at) + \varphi''(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\big(\psi'(x+at) - \psi'(x-at)\big), \end{aligned}$$

由此立刻可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$.

5. 证明: 广义含参积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 在含 $t=0$ 的区间上不为一致收敛.

证明: 设 I 为包含 $t=0$ 的任意区间, 则 $\exists a>0$ 使得 $[0,a]\subseteq I$ 或 $[-a,0]\subseteq I$. 由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 t 为奇函数, 不失一般性, 可假设 $[0,a]\subseteq I$.

对任意整数 $n\geqslant 1$, 我们有

$$\Big|\int_{\frac{n}{a}}^{\frac{2n}{a}}\frac{\sin\frac{\pi ax}{4n}}{x}\,\mathrm{d}x\Big| \overset{x=\frac{nu}{a}}{=} \Big|\int_1^2\frac{\sin\frac{\pi u}{4}}{u}\,\mathrm{d}u\Big| \geqslant \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}>0.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{a}=+\infty$, 因此广义含参积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,a]$ 上不为一致收敛, 进而可知在 I 上也不为一致收敛.

6. 讨论下列积分在所给区间上的一致收敛性:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(yx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ (-\infty<y<+\infty)$; (2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-tx}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\ (0\leqslant t<+\infty)$.

解: (1) $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 我们有 $\frac{|\cos(yx)|}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2}$, 而 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法可知广义含参积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(yx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in\mathbb{R}$ 一致收敛.

(2) $\forall A>1$, 我们有 $\displaystyle|\int_1^A\cos x\,\mathrm{d}x|=|\sin 1-\sin A|\leqslant 2$, 而函数 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 单调递减且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, 则由 Dirichlet 判别法知广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 又 $\forall x\geqslant 1$ 及 $\forall t\geqslant 0$, 均有 $|e^{-tx}|\leqslant 1$, 且函数 e^{-tx} 关于 x 单调递减, 从而由 Abel 判别法知广义含参积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-tx}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

7. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\sin(\ln\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x\ (a,b>0)$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\,\mathrm{d}x\ (a,b>0)$;

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin(yx)\,\mathrm{d}x\ (a>0)$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(y+x^2)^{n+1}}$, 其中 $n\geqslant 0$ 为整数.

解: (1) 由题设立刻可知

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\Big(\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

$\forall x \in [0,1)$ 以及 $\forall y \in [0,1]$, 我们有 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 而

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

收敛, 由 Weierstrass 判别法可知广义含参积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}$ 关于 $y \in [0,1]$ 一致收敛, 从而由积分与积分次序可交换性可知

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}\Big)\,\mathrm{d}y \\
\overset{x=\sin t}{=} & \int_0^1 \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\sqrt{1-\sin^2 t}(1+y^2\sin^2 t)}\Big)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+y^2\sin^2 t}\Big)\,\mathrm{d}y \\
= & \int_0^1 \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t\,\mathrm{d}(\tan t)}{1+y^2\sin^2 t}\Big)\,\mathrm{d}y \overset{u=\tan t}{=} \int_0^1 \Big(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+(1+y^2)u^2}\Big)\,\mathrm{d}y \\
= & \int_0^1 \Big(\frac{\arctan\sqrt{1+y^2}u}{\sqrt{1+y^2}}\Big)\Big|_0^{+\infty}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} \\
= & \frac{\pi}{2}\log(y+\sqrt{1+y^2})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\log(1+\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

(2) 由题设立刻可知

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\sin(\ln\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\int_a^b x^y \sin(\ln\frac{1}{x})\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

注意到被积函数 $x^y\sin(\ln\frac{1}{x})$ 可被延拓成 $[0,1]\times[a,b]$ 上的连续函数, 于是由积分与积分次序可交换性可知

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\sin(\ln\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\int_0^1 x^y \sin(\ln\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y.$$

$\forall y \in [a,b]$, 下面来计算 $\displaystyle\int_0^1 x^y \sin\big(\ln\frac{1}{x}\big)\,\mathrm{d}x$.

方法 1. $\forall y \in [a,b]$, 我们均有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^y \sin\big(\ln\frac{1}{x}\big)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathrm{Im}\,(x^y e^{i\ln\frac{1}{x}})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{Im}\,(x^{y-i})\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\Big(\frac{x^{y-i+1}}{y-i+1}\Big|_0^1\Big) \\
&= \mathrm{Im}\Big(\frac{1}{y-i+1}\Big) = \mathrm{Im}\Big(\frac{y+1+i}{(y+1)^2+1}\Big) = \frac{1}{1+(y+1)^2}.
\end{aligned}$$

方法 2. $\forall y \in [a,b]$, 我们均有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^y \sin\big(\ln\frac{1}{x}\big)\,\mathrm{d}x &= \frac{x^{y+1}}{y+1}\sin\big(\ln\frac{1}{x}\big)\Big|_0^1 + \frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\big(\ln\frac{1}{x}\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{y+1}}{(y+1)^2}\cos\big(\ln\frac{1}{x}\big)\Big|_0^1 - \frac{1}{(y+1)^2}\int_0^1 x^y\sin\big(\ln\frac{1}{x}\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{1}{(y+1)^2}\int_0^1 x^y\sin\big(\ln\frac{1}{x}\big)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

于是我们有 $\displaystyle\int_0^1 x^y \sin\big(\ln\frac{1}{x}\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+(y+1)^2}$.

方法 3. $\forall y\in[a,b]$, 我们均有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^y\sin\Big(\ln\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x \overset{t=\ln\frac{1}{x}}{=}& \int_{+\infty}^0 e^{-yt}\sin t\,\mathrm{d}(e^{-t})=\int_0^{+\infty}e^{-(1+y)t}\sin t\,\mathrm{d}t\\ =& \int_0^{+\infty}\mathrm{Im}(e^{(-y-1+i)t})\,\mathrm{d}t\\ =& \mathrm{Im}\Big(\frac{e^{(-y-1+i)t}}{-y-1+i}\Big|_0^{+\infty}\Big)\\ =& \mathrm{Im}\Big(\frac{1}{y+1-i}\Big)\\ =& \frac{1}{1+(y+1)^2}.\end{aligned}$$

于是 $\int_0^1 x^y\sin\Big(\ln\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1+(y+1)^2}$.

综上所述可得

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\sin(\ln\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+(y+1)^2}=\arctan(b+1)-\arctan(a+1).$$

(3) 由题设知 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\Big(\int_a^b xe^{-yx^2}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x$. $\forall x\geqslant 0$ 以及 $\forall y\in[a,b]$, 我们均有 $|xe^{-yx^2}|\leqslant xe^{-ax^2}$, 而 $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}$ 收敛, 则由 Weierstrass 判别法知广义含参变量积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-yx^2}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致收敛. 从而由积分与积分次序可交换性可得

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\Big(\int_a^b xe^{-yx^2}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\\ =&\int_a^b\Big(\int_0^{+\infty}xe^{-yx^2}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y=\int_a^b\Big(\frac{-e^{-yx^2}}{2y}\Big|_0^{+\infty}\Big)\,\mathrm{d}y\\ =&\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{2y}=\frac{1}{2}\log y\Big|_a^b=\frac{1}{2}\log\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

(4) **方法 1.** $\forall y\in\mathbb{R}$, 定义 $I(y)=\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin(yx)\,\mathrm{d}x$. $\forall x\geqslant 0$ 以及 $\forall y\in\mathbb{R}$, 令 $f(x,y)=xe^{-ax^2}\sin(yx)$, 则 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2e^{-ax^2}\cos(yx)$. 注意到

$$|f(x,y)|\leqslant xe^{-ax^2},\ \Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|\leqslant x^2e^{-ax^2},$$

且广义积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax^2}\mathrm{d}x$ 均收敛, 由 Weierstrass 判别法可知广义含参积分 $\int_0^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in\mathbb{R}$ 一致收敛,

从而由求导与积分次序可交换性知 I 连续可导, 并且 $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 均有

$$\begin{aligned}
I'(y) &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} \cos(yx)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \frac{x\cos(yx)}{2a}\,\mathrm{d}(e^{-ax^2}) \\
&= -\frac{xe^{-ax^2}}{2a}\cos(yx)\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}(x\cos(yx)) \\
&= -\frac{y}{2a}\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin(yx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos(yx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{y}{2a}I(y) + \frac{1}{2ay}e^{-ax^2}\sin(yx)\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2ay}\int_0^{+\infty} 2xae^{-ax^2}\sin(yx)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big(\frac{1}{y} - \frac{y}{2a}\Big)I(y),
\end{aligned}$$

由此立刻可得 $I(y) = Ce^{\int(\frac{1}{y}-\frac{y}{2a})\,\mathrm{d}y} = Cye^{-\frac{y^2}{4a}}$, 其中 C 为常数. 又 I 为连续函数, 因此该表达式对任意 $y \in \mathbb{R}$ 均成立. 另外, 我们还有

$$\begin{aligned}
C &= I'(0) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x \overset{u=ax^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{u}{a}e^{-u}\,\mathrm{d}\sqrt{\frac{u}{a}} \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{2}}e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2a\sqrt{a}}\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}},
\end{aligned}$$

由此立刻可得 $I(y) = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}ye^{-\frac{y^2}{4a}}$.

方法 2. 固定 $y \in \mathbb{R}$. $\forall a > 0$, 定义 $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin(yx)\,\mathrm{d}x$. $\forall x \geqslant 0$, 我们有 $|xe^{-ax^2}\sin(yx)| \leqslant xe^{-ax^2}$, 而广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 因此广义积分 $I(a)$ 收敛, 并且由分部积分可得

$$\begin{aligned}
I(a) &= \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\sin(yx)\,\mathrm{d}(ax^2) = -\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\sin(yx)\,\mathrm{d}(e^{-ax^2}) \\
&= -\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin(yx)\Big|_0^{+\infty} + \frac{y}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos(yx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{y}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos(yx)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

固定 $a_0 > 0$. 则 $\forall a \geqslant a_0$ 以及 $\forall x \geqslant 0$, 我们有 $|-x^2e^{-ax^2}\cos(yx)| \leqslant x^2e^{-a_0x^2}$. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1+x^2)e^{-a_0x^2} = 0$, 而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 收敛, 从而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-a_0x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 进而由 Weierstrass 判别法知广义含参积分 $-\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-ax^2}\cos(yx)\mathrm{d}x$ 关于 $a \in [a_0, +\infty)$ 一致收敛, 于是由求导与积分次序可交换性可知

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\big(2aI(a)\big)}{\mathrm{d}a} = -y\int_0^{+\infty} x^2e^{-ax^2}\cos(yx)\,\mathrm{d}x = \frac{y}{2a}\int_0^{+\infty} x\cos(yx)\,\mathrm{d}(e^{-ax^2}) \\
= &\ \frac{y}{2a}e^{-ax^2}x\cos(yx)\Big|_0^{+\infty} - \frac{y}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}(x\cos(yx)) \\
= &\ \frac{y^2}{2a}\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin(yx)\,\mathrm{d}x - \frac{y}{2a}\int_0^{+\infty}\cos(yx)e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{y^2-2a}{2a}I(a).
\end{aligned}$$

也即 $I'(a)+\frac{6a-y^2}{4a^2}I(a)=0$. 从而 $\forall a\geqslant a_0$, 我们有

$$I(a)=\frac{C}{a\sqrt{a}}e^{-\frac{y^2}{4a}},$$

其中 C 为常数. 再由 a_0 的任意性可知 $\forall a>0$, 我们有 $I(a)=\frac{C}{a\sqrt{a}}e^{-\frac{y^2}{4a}}$. 则

$$\begin{aligned} C &= a\sqrt{a}e^{\frac{y^2}{4a}}I(a)=\frac{y}{2}\sqrt{a}e^{\frac{y^2}{4a}}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos(yx)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{t=\sqrt{a}x}{=} \frac{y}{2}e^{\frac{y^2}{4a}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos(\frac{y}{\sqrt{a}})\,\mathrm{d}t \\ &\overset{b=\frac{1}{a}}{=} \frac{y}{2}e^{\frac{y^2b}{4}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos(y\sqrt{b})\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

$\forall t\geqslant 0$, 我们有 $|e^{-t^2}\cos(y\sqrt{b})|\leqslant e^{-t^2}$, 而广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法可知广义含参积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos(y\sqrt{b})\,\mathrm{d}t$ 关于 $b\in[0,+\infty)$ 一致收敛, 从而由极限与积分次序可交换性得

$$\begin{aligned} C &= \lim_{b\to 0^-}\frac{y}{2}e^{\frac{y^2b}{4}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos(y\sqrt{b})\,\mathrm{d}t=\frac{y}{2}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{u=t^2}{=} \frac{y}{4}\int_0^{+\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{y}{4}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{y}{4}\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

由此可知, $\forall a>0$, 我们有 $I(a)=\frac{y}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{y^2}{4a}}$.

(5) 对任意整数 $n\geqslant 0$ 以及对任意 $y>0$, 定义

$$I_n(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(y+x^2)^{n+1}}.$$

固定 $a>0$. $\forall y\geqslant a$ 及 $\forall x\geqslant 0$, 均有 $\frac{1}{(y+x^2)^{n+1}}\leqslant\frac{1}{a+x^2}$. 而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a+x^2}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法可知广义含参积分 $I_n(y)$ 关于 $y\in[a,+\infty)$ 一致收敛, 从而由求导与积分次序可交换性知 I_n 在 $[a,+\infty)$ 上可导且 $\forall y\geqslant a$,

$$I_n'(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{(y+x^2)^{n+1}}\Big)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{-(n+1)\,\mathrm{d}x}{(y+x^2)^{n+2}}=-(n+1)I_{n+1}(y).$$

又 $a>0$ 为任意, 故上式对任意 $y>0$ 均成立, 从而对任意整数 $n\geqslant 0$, 均有

$$\begin{aligned} I_n(y) &= \frac{(-1)^n}{n!}I_0^{(n)}(y)=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\Big(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{y+x^2}\Big) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\Big(\frac{1}{\sqrt{y}}\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^{+\infty}\Big)=\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(y^{-\frac{1}{2}})^{(n)} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cdot\Big(-\frac{1}{2}-1\Big)\cdots\Big(-\frac{1}{2}-n+1\Big)y^{-\frac{1}{2}-n} \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}y^{-(\frac{1}{2}+n)}, \end{aligned}$$

其中约定 $(-1)!!=1$.