# 微积分 A (2)

姚家燕

第 28 讲

在听课过程中，

严禁使用与教学无关的电子产品！

# 第 28 讲

# 第 7 章 Fourier 级数

人们对多项式比较了解，而幂级数作为多项式的自然推广，具有许多与多项式非常类似的性质. 这就促使人们试图将一般的函数展开成幂级数来了解它的性态. 但对于周期函数，将其展开成幂级数只会将问题复杂化，因为幂级数的通项不是周期函数. 不失一般性，我们首先考虑以 $2\pi$ 为周期的函数，为此只需考虑它在 $[-\pi, \pi]$ 上的性态. 最简单的例子为: $1,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$

## §1. 形式 Fourier 级数

**定义 1.** 形如 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ 或 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n\sin(nx+\varphi_n)$ 的函数项级数称为三角级数，其中 $\frac{a_0}{2}=A_0\sin\varphi_0$, $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $\tan\varphi_n=\frac{a_n}{b_n}$.

**典型问题:** 1. 如何计算三角级数的系数?

2. 三角级数的基本性质?

3. 如何将一个函数展成三角级数?

定义 2. $\forall f, g \in \mathscr{C}[a,b]$, 定义

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

称之为 $f, g$ 的内积. 如果 $(f,g)=0$, 则称 $f$ 与 $g$ 正交, 记作 $f \perp g$. 此外, $\forall f \in \mathscr{C}[a,b]$, 定义

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

称为 $f$ 的范数. 于是 $f \equiv 0$ 当且仅当 $\|f\| = 0$.

另外, $\forall f, g \in \mathscr{C}[a,b]$, 均有 $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

# 三角函数系的基本性质

令 $\Lambda = \{1,\ \cos x,\ \sin x, \ldots, \cos nx,\ \sin nx, \ldots\}$, 并称之为三角函数系.

1. (正交性) 三角函数系 $\Lambda$ 在 $[a, a+2\pi]$ 上为非零的正交函数系, 即 $\forall f, g \in \Lambda$, 若 $f \neq g$, 则 $\int_a^{a+2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 事实上, 我们有 $(n \geqslant 1)$

$$\int_a^{a+2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi,\ \int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \pi.$$

而 $\forall n, m \geqslant 1$ 且 $n \neq m$, 我们有

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

由此可知 $\Lambda$ 当中的元素在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

2. (完全性) 如果 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数使得 $\forall g \in \Lambda$, 均有 $\int_a^{a+2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则我们有 $f \equiv 0$.

常用的其它正交函数系:

1. Legendre 多项式 $P_n$: 将多项式 $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ 在 $[-1,1]$ 上依照 Schmidt 正交化法得到的正交归一多项式列. $P_n$ 为 Legendre 方程的解.

2. Bessel 函数 $J_p(x)$: Bessel 方程的解.

假设 $f$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数且

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛, 那么由积分与级数求和可交换性立刻可知

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x \ (n \geqslant 0), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x \ (n \geqslant 1). \end{aligned}$$

注: (1) 可以将 $[-\pi, \pi]$ 换成长度为 $2\pi$ 的区间.

(2) 也可考虑依一个任意正交函数系的展开.

定义 2. 假设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数且 $f\big|_{[-\pi,\pi]}\in\mathscr{R}[-\pi,\pi]$. 定义

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\ (n\geqslant 0), \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\ (n\geqslant 1), \end{aligned}$$

称之为 $f$ 的 Fourier 系数, 并记

$$f(x)\sim\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)\big),$$

称上述函数项级数为 $f$ 的 (形式) Fourier 级数.

## 评注

1. 出于简便, 也常将 $a_n(f)$, $b_n(f)$ 记作 $a_n$, $b_n$.

2. 对于一般的以 $2\pi$ 为周期的函数, 只要上述定义有意义 (广义积分), 我们就可以如上定义其 Fourier 系数和 Fourier 级数.

3. 若 $f$ 为偶函数, 则 $\forall n \geqslant 1$, $b_n(f) = 0$. 此时

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

相应的 Fourier 级数称为余弦级数.

4. 若 $f$ 为奇函数, 则 $\forall n \geqslant 0$, $a_n(f) = 0$. 此时

$$\forall n \geqslant 1, \quad b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

相应的 Fourier 级数称为正弦级数.

例 1. $\forall x \in [-\pi, \pi]$, 令 $f(x) = x$ 并将之延拓成以 $2\pi$ 为周期的函数, 求其形式 Fourier 级数.

解: 由于 $f$ 为奇函数, 于是对任意的整数 $n \geqslant 0$, 均有 $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$, 而对整数 $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi} x\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &\quad + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = (-1)^{n-1}\frac{2}{n}, \end{aligned}$$

从而我们有 $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin(nx)$.

## §2. Fourier 级数的性质及收敛性

典型问题:

1. 函数 $f$ 的 Fourier 级数是否收敛到 $f$ ?

回答: 一般不成立.

2. 若一个三角级数收敛到 $f$, 那么该三角级数是否就是 $f$ 的 Fourier 级数?

回答: 一般不成立.

**定理 1.** **(Riemann-Lebesgue 引理)**

若 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积或广义绝对可积, 则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x=0.$$

**推论.** 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或广义绝对可积, 则

$$\lim_{n\to\infty}a_n(f)=\lim_{n\to\infty}b_n(f)=0.$$

# Fourier 级数点态收敛的判别准则

定义 1. 考虑函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 及区间 $[a,b]$ 的分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

(1) 若 $f$ 在每个子区间 $(x_{j-1},x_j)$ 上单调, 则称函数 $f$ 为逐段 (或分段) 单调.

(2) 若 $f$ 在每个子区间 $[x_{j-1},x_j]$ 上可微, 则称函数 $f$ 为逐段 (或分段) 可微. 此时 $f$ 在 $[a,b]$ 上为逐段连续, 因此 $f$ 为有界函数.

**定理 2. (Dirichlet-Jordan 定理)** 假设 $f$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数. 如果 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上逐段单调有界或逐段可微, 那么 $\forall x\in\mathbb{R}$, 函数 $f$ 的 Fourier 级数在点 $x$ 处收敛到

$$S(x)=\frac{1}{2}\big(f(x-0)+f(x+0)\big).$$

注: (1) 若 $f$ 在点 $x$ 处连续, 则 $S(x)=f(x)$.

(2) 由 $f$ 的周期性可知 $f(-\pi-0)=f(\pi-0)$, 且 $f(\pi+0)=f(-\pi+0)$, 于是我们有

$$S(\pi)=S(-\pi)=\frac{1}{2}\big(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\big).$$

更一般地, 我们有

定理 3. 设 $f$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数, 并且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积或广义绝对可积. 如果函数 $f$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上连续且逐段单调有界, 或者有有界导数, 那么 $f$ 的 Fourier 级数在 $(-\pi, \pi)$ 的任意闭子区间上一致收敛到 $f$ 本身.

# 函数的周期延拓

问题: 对于定义在区间 $(-\pi,\pi)$ 上的任意函数 $f$, 尽管它并不是定义在 $\mathbb{R}$ 上并且以 $2\pi$ 为周期的函数, 但我们仍可定义其 Fourier 系数 (若相关积分均存在), 由此而得到的形式 Fourier 级数与原来的函数 $f$ 之间有何关系?

回答: 需要将 $f$ 延拓成为以 $2\pi$ 为周期的函数. 为此我们取 $f(\pi) = f(-\pi)$ 为任意常数, 再将 $f$ 以 $2\pi$ 为周期从区间 $[-\pi, \pi]$ 延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上. 随后再来考虑延拓后的函数 $f$ 的 Fourier 级数. 若此时函数 $f$ 满足 Dirichlet-Jordan 定理的条件, 则 $\forall x \in (-\pi, \pi)$, 函数 $f$ 的 Fourier 级数在点 $x$ 收敛到 $S(x) = \frac{1}{2}\big(f(x-0) + f(x+0)\big)$, 在两个端点 $x = \pm\pi$ 收敛到 $\frac{1}{2}\big(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\big)$.

例 1. $\forall x \in (-\pi,\pi)$, 定义 $f(x)=e^{-x}$. 求函数 $f$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的 Fourier 级数并讨论其收敛性.

解: 由定义可知

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})=\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\,\pi.$$

而 $\forall n \geqslant 1$, 我们也有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x}\cos(nx)\,\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{2}{\pi(1+n^2)}\mathrm{sh}\,\pi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x}\sin(nx)\,\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{2n}{\pi(1+n^2)}\mathrm{sh}\,\pi. \end{aligned}$$

由于函数 $f$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上可微且导函数有界, 由 Dirichlet-Jordan 定理, $\forall x\in(-\pi,\pi)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
e^{-x} &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big)\\
&= \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos(nx)\\
&\qquad +\frac{(-1)^n n}{1+n^2}\sin(nx)\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

上述 Fourier 级数在点 $x=\pm\pi$ 处收敛到

$$\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))=\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi}).$$

特别地, 在 $x=0$ 处, 则有 $1=\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\right)$,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}=\frac{\pi}{2\operatorname{sh}\pi}-\frac{1}{2}$. 而在点 $x=\pi$ 处, 我们有

$\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\right)=\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})=\operatorname{ch}\pi$, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi(e^{\pi}+e^{-\pi})}{2(e^{\pi}-e^{-\pi})}-\frac{1}{2}.$$

例 2. $\forall x \in [-\pi, \pi]$, 定义

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 若\ x \in [-\pi, 0), \\ 0, & 若\ x = 0, \\ 1, & 若\ x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

求 $f$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 展式及其和函数.

解: 由于 $f$ 为奇函数, 则 $\forall n \geqslant 0$, 均有 $a_n = 0$.

而 $\forall n \geqslant 1$, 我们则有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) \\ &= \frac{2}{n\pi}\big(1 - (-1)^n\big). \end{aligned}$$

又 $f$ 逐段单调有界, 于是 $\forall x \in [-\pi, \pi]$, 我们有

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in (0, \pi), \\ -1, & \text{若 } x \in (-\pi, 0), \\ 0, & \text{若 } x = 0, \pm\pi. \end{cases}$$

特别地, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1$, 也即

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

# 一般周期函数的 Fourier 级数

假设 $\ell > 0$ 而 $T = 2\ell$. 对周期为 $T$ 的周期函数, 我们可以相应地引入在任何长度为 $T$ 的区间上均为正交的三角函数系:

$$\left\{1,\ \cos\frac{\pi}{\ell}x,\ \sin\frac{\pi}{\ell}x, \ldots, \cos\frac{n\pi}{\ell}x,\ \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \ldots\right\}.$$

关于该函数系, 前面介绍的所有结论依然成立. 例如对 Dirichlet-Jordan 定理, 只需将 $\pi$ 换成 $\ell$.

特别地, 我们可以类似定义:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x \ (n \geqslant 0), \\ b_n(f) &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x \ (n \geqslant 1), \end{aligned}$$

称之为 $f$ 的 Fourier 系数, 并记

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(f)\cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n(f)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Big),$$

称上述函数项级数为 $f$ 的 (形式) Fourier 级数.

例 3. $\forall x \in [-1,1]$, 令 $f(x)=x^2$. 求 $f$ 在 $[-1,1]$ 上以 2 为周期的 Fourier 展式及其和函数.

解: 由题设知 $T=2$, 故 $\ell=1$. 由 $f$ 为偶函数, 则 $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $b_n=0$. 又

$$a_0=\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

而当 $n \geqslant 1$ 时, 我们有

$$a_n=\int_{-1}^{1} x^2 \cos(n\pi x) \,\mathrm{d}x=(-1)^n \frac{4}{(n\pi)^2}.$$

由于函数 $f$ 在 $[-1,1]$ 上可微且 $f(-1)=f(1)$,

则 $\forall x\in[-1,1]$, 我们有

$$x^2=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x).$$

特别地, 当 $x=0$ 时, 我们有

$$0=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{(n\pi)^2}.$$

由此我们立刻可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

当 $x = 1$ 时, 我们则有

$$1 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^2},$$

进而可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

# 奇延拓与偶延拓

设 $T \geqslant L > 0$, 而 $f$ 定义在 $(0, L)$ 上. 我们寻求如何将 $f$ 延拓成以 $T$ 为周期的周期函数, 并将计算其 Fourier 级数展开.

(1) 若 $T = L$, 将 $f$ 以 $L$ 为周期来延拓. 此时

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{2n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x \ (n \geqslant 0), \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{2n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x \ (n \geqslant 1). \end{aligned}$$

(2) 若 $T=2L$, 将 $f$ 延拓成 $(-L,L)$ 上的奇函数或偶函数, 再将 $f$ 以 $T$ 为周期进行延拓.

奇延拓: $\forall x\in(-L,L)$, 定义

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 若\ x\in(0,L), \\ -f(-x), & 若\ x\in(-L,0), \end{cases}$$

此时 $\forall n\geqslant 0$, $a_n=0$, 而 $\forall n\geqslant 1$, 我们则有

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x.$$

相应的 Fourier 级数为正弦级数.

偶延拓: $\forall x \in (-L, L)$, 定义

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 若\ x \in (0, L), \\ f(-x), & 若\ x \in (-L, 0), \end{cases}$$

此时 $\forall n \geqslant 1$, $b_n = 0$, 而 $\forall n \geqslant 0$, 我们有

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, \mathrm{d}x.$$

相应的 Fourier 级数为余弦级数.

(3) 若 $T > 2L$, 首先可将 $f$ 零延拓到 $\left(0, \frac{T}{2}\right)$ 上, 然后再像 (2) 中那样做奇延拓或者偶延拓, 最后以 $T$ 为周期进行周期延拓.

例 4. $\forall x \in [0,2]$, 令 $f(x) = 2 - x$. 将 $f$ 在 $[0,2]$ 上展成以 4 为周期的余弦级数并求和函数.

解: 首先将 $f$ 偶延拓而定义

$$F(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{若 } x \in [0,2], \\ 2 + x, & \text{若 } x \in [-2,0], \end{cases}$$

此时 $T = 4$, $\ell = 2$. 故 $F$ 的 Fourier 系数满足:

$b_n = 0 \ (n \geqslant 1)$. 另外, 我们还有

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x = 2.$$

$\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} F(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (2-x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 (1-\cos(n\pi)) \\
&= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 (1-(-1)^n).
\end{aligned}
$$

由于函数 $F$ 在 $[-2,2]$ 上为连续并且分段可微, 而 $F(-2)=F(2)$, 于是 $\forall x\in[0,2]$, 我们有

$$f(x)=2-x=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2}x.$$

特别地, 在点 $x=0$ 处, 我们有

$$2=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}.$$

由此立刻可得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

例 5. $\forall x \in [0,2]$, 定义

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & 若\ x\in[0,1],\\ 0, & 若\ x\in(1,2].\end{cases}$$

将之展成以2为周期的Fourier级数并求和函数.

解: 由题设可知 $T=2$, 故 $\ell=1$. 由定义得

$$a_0=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

$\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^2 f(x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1-\cos(n\pi)}{(n\pi)^2} = \frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2}, \\
b_n &= \int_0^2 f(x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

函数 $f$ 在 $[0,2]$ 上连续且分段可微, 则 $\forall x\in(0,2)$,

$$f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x)+\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right).$$

而在点 $x=0,2$ 处, Fourier 级数收敛到

$$\frac{1}{2}(f(0+0)+f(2-0))=\frac{1}{2}.$$

作业题: 第 7.1 节第 303 页第 1 题第 (1), (2), (4), (6) 题, 其中 (6) 中 “$t$” 改为 “$x$”, 第 2 题, 其中第 (2) 小题改为 “展成 $2\pi$ 为周期” . 每题均应给出 Fourier 级数的和函数.

# 复数形式的 Fourier 级数

集 $\{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $[-\pi, \pi]$ 上的正交函数系.

定义 2. 假设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数. $\forall n \in \mathbb{Z}$, 定义 (若积分存在)

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, \mathrm{d}x,$$

称之为 $f$ 的复数形式的 Fourier 系数, 并记

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx},$$

上式右边称为 $f$ 的复数形式的 Fourier 级数.

借助 Euler 公式, 可得复数形式的 Fourier 系数与三角 Fourier 系数之间的关系 ($n \geqslant 0$):

$$c_{-n} = \overline{c_n}, \; c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n),$$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\, c_n = c_n + \overline{c_n}, \; b_n = -2\,\mathrm{Im}\, c_n = (c_n - \overline{c_n})i.$$

一般地, 若 $f$ 以 $T = 2\ell$ 为周期, 则其复数形式 Fourier 级数为 $f(x) \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}$, 其中

$$c_n(f) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}\,\mathrm{d}x.$$

通过分离实部和虚部立刻可知, 关于点态收敛的 Dirichlet-Jordan 定理依然成立.

例 6. $\forall x \in [0,2]$, 定义 $f(x) = e^{-x}$. 求 $f$ 以 2 为周期的复数形式的 Fourier 级数及其和函数.

解: 由题设 $T = 2$, 故 $\ell = 1$. 由定义, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)e^{-in\pi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-(1+in\pi)x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{e^{-(1+in\pi)x}}{2(1+in\pi)}\Big|_0^2 = \frac{1-e^{-2(1+in\pi)}}{2(1+in\pi)} \\ &= \frac{1-e^{-2}}{2(1+in\pi)}. \end{aligned}$$

由于 $f$ 在 $[0,2]$ 上可微, 则 $\forall x \in (0,2)$, 我们有

$$f(x) = e^{-x} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-2}}{2(1+in\pi)} e^{in\pi x}.$$

而在点 $x = 0, 2$ 处, 上述 Fourier 级数收敛到

$$\frac{1}{2}\big(f(0+0) + f(2-0)\big) = \frac{1}{2}(1+e^{-2}).$$

例 7. $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $f(x) = \frac{q \sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q| < 1)$.

求 $f$ 的 Fourier 级数展开.

解: 由题设可知, $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有

$$f(x) = \frac{q \sin x}{(1-q\cos x)^2 + (q \sin x)^2} = \frac{q \sin x}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-qe^{ix}} - \frac{1}{1-qe^{-ix}}\right) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(qe^{ix})^n - \sum_{n=0}^{\infty}(qe^{-ix})^n\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} q^n(e^{inx} - e^{-inx}) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin(nx).$$

# Fourier 级数的平方平均收敛

回顾: $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$, 定义

$$\|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

称之为 $f$ 的范数, 它在整体上度量函数 $f$ 大小.

于是 $\forall f, g \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$, 范数 $\|f-g\|$ 就在上述意义下度量了 $f, g$ 的整体差别.

**命题 1.** $\forall f, g \in \mathscr{R}[-\pi, \pi]$, 我们均有

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2(f,g) + \|g\|^2.$$

特别地, 若 $f \perp g$, 则 $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

**证明:** 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x)+g(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\big(f(x)\big)^2 + 2f(x)g(x) + \big(g(x)\big)^2\Big) \,\mathrm{d}x \\
&= \|f\|^2 + 2(f,g) + \|g\|^2.
\end{aligned}$$

对任意的整数 $n \geqslant 1$, 我们令

$$\Lambda_n = \{1,\ \cos x,\ \sin x, \ldots, \cos(nx),\ \sin(nx)\}.$$

如果将 $\Lambda_n$ 所张成的实线性空间记作 $W_n$, 那么 $W_n$ 为 $\mathscr{R}[-\pi, \pi]$ 的 $2n+1$ 维子空间.

**定理 4.** **(投影、最佳逼近)** $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi, \pi]$, 令

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big).$$

则 $\|f - S_n(f)\| = \min\limits_{g \in W_n} \|f - g\|$, 且最小值仅在 $g = S_n(f)$ 处达到. 另外, $f - S_n(f)$ 垂直于 $W_n$.

证明: 对任意的整数 $0 \leqslant k \leqslant n$, 我们有

$$\begin{aligned} & (f - S_n(f), \cos(kx)) \\ = & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f)(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x \\ = & \pi a_k(f) - \pi a_k(f) = 0. \end{aligned}$$

同样, $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, 均有 $(f - S_n(f), \sin(kx)) = 0$. 于是 $f - S_n(f)$ 与 $\Lambda_n$ 中的任意元素正交, 从而由线性性可知, $f - S_n(f)$ 与 $W_n$ 中的任意元素正交, 也就是说 $f - S_n(f)$ 垂直于线性空间 $W_n$.

$\forall g \in W_n$, 定义 $F_n = f - S_n(f)$, $G_n = g - S_n(f)$, 则 $G_n \in W_n$, 从而 $(F_n, G_n) = 0$ 且我们有

$$\begin{aligned} \|f-g\|^2 &= \|(f - S_n(f)) - (g - S_n(f))\|^2 \\ = \ & \|F_n - G_n\|^2 = \|F_n\|^2 + \|G_n\|^2 \geqslant \|F_n\|^2. \end{aligned}$$

上式恰好表明我们有

$$\min_{g \in W_n} \|f - g\| = \|F_n\| = \|f - S_n(f)\|,$$

并且仅当 $g = S_n(f)$ 时, 取到最小值.

由上述定理立刻可得:

**定理 5. (Bessel 不等式)** $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$, 均有

$$\frac{1}{2}\big(a_0(f)\big)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\big(a_k(f)\big)^2+\big(b_k(f)\big)^2\Big)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

**证明:** 对任意整数 $n \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \|f-S_n(f)\|^2=\|f\|^2+\|S_n(f)\|^2-2(f,S_n(f))\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\big(S_n(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad -2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\Big(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\big)\Big)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \ & \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \big(S_n(f)(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x \\
& -2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \Bigg( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big( a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \big) \Bigg) \, \mathrm{d}x \\
= \ & \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x + \pi \Bigg( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \Bigg) \\
& -\pi \Bigg( a_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} \big( a_k^2 + b_k^2 \big) \Bigg) \\
= \ & \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x - \pi \Bigg( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \Bigg).
\end{aligned}
$$

由此我们立刻可得

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

随后让 $n\to\infty$, 可知

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

推论: 级数 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ 收敛.

再利用三角级数的完全性, 以及积分与积分的可交换性, 我们还可以证明:

**定理 6. (Parseval 等式)** $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$, 均有

$$\frac{1}{2}\big(a_0(f)\big)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\big(a_k(f)\big)^2+\big(b_k(f)\big)^2\Big)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

补充题: 证明下列等式:

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}\ (0<x<2\pi).$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$ 进而求 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n}=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\ (0<x<\pi).$$

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4}\ (0<x<\pi).$$

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx)=\frac{x}{2}\ (|x|<\pi).$$

推论 1. (唯一性) 若 $f, g \in \mathscr{R}[-\pi, \pi]$ 有相同的 Fourier 级数, 则 $f, g$ 几乎处处相等.

证明: 由于 $a_0(f-g) = a_0(f) - a_0(g) = 0$, 而且 $\forall n \geqslant 1$, 同样也有 $a_n(f-g) = 0$, $b_n(f-g) = 0$. 于是由 Parseval 等式可知

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - g(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

由此立刻可知所证结论成立.

注: 若在上述推论中假设 $f, g$ 连续, 则 $f \equiv g$.

推论 2. $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi, \pi]$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\| = 0$.

证明: 由前面的推导可知, $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\|f - S_n(f)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x - \pi\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\Big).$$

再让 $n \to \infty$, 由此立刻可得所证结论成立.

由推论 2, 我们立刻可得广义 Parseval 等式:

定理 7. $\forall f, g \in \mathscr{R}[-\pi, \pi]$, 均有

$$\frac{1}{2}a_0(f)a_0(g) + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g)\big) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 对任意的整数 $n \geqslant 1$, 我们有

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, \mathrm{d}x \\
= \; & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - S_n(f)\big) g(x)\, \mathrm{d}x \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f)(x) g(x)\, \mathrm{d}x \\
= \; & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - S_n(f)\big) g(x)\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} a_0(f) a_0(g) \\
& + \sum_{k=1}^{n} \Big( a_k(f) a_k(g) + b_k(f) b_k(g) \Big).
\end{aligned}
$$

由 Cauchy 不等式, 我们立刻有

$$\begin{aligned} & \left|\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-S_n(f)\big)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ \leqslant\ & \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)|\cdot|g(x)|\,\mathrm{d}x \\ \leqslant\ & \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ =\ & \|f-S_n(f)\|\cdot\|g\|. \end{aligned}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-S_n(f)\|=0$, 于是由夹逼原理可知所证结论成立.

推论. $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$ 以及 $\forall a, x \in [-\pi,\pi]$, 均有

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}a_0(f)(x-a) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x \big(a_k(f)\cos(kt)+b_k(f)\sin(kt)\big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

也即 Fourier 级数求和 (即便它不为点态收敛) 总是可以与积分可交换次序.

注: 对周期为 $T=2\ell$ 的函数, 只需将 $\pi$ 换成 $\ell$, 则上述所有结论依然成立.

证明: 固定 $a, x \in [-\pi, \pi]$. 不失一般性, 我们可假设 $a < x$. $\forall t \in [-\pi, \pi]$, 令

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 若\ t \in [a, x], \\ 0, & 若\ t \notin [a, x], \end{cases}$$

则 $g$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积. 于是我们有

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} a_0(f)a_0(g) \\ &\quad + \pi\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g)\Big) = \frac{1}{2}a_0(f)(x-a) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x \big(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)\big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

例 8. $\forall x \in [-1,1]$, 定义 $f(x)=x^2$. 考虑 $f$ 以 2 为周期的 Fourier 级数展开. 此时 $T=2$, $\ell=1$. 则由 $f$ 在 $[-1,1]$ 上可导且 $f(-1)=f(1)$ 可得

$$\forall x \in [-1,1],\ f(x)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x).$$

从而由 Parseval 等式可知

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3}\Big)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{n^2}\Big)^2=\int_{-1}^{1}\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}.$$

由此我们立刻可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

例 9. $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $f(x) = \log(1 - 2q\cos x + q^2)$, 其中 $|q| < 1$. 求 $f$ 的 Fourier 级数展开.

解: 由周期性, 只需考虑 $x \in [-\pi, \pi]$. 此时

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = 2\log(1-q) + \int_0^x \frac{2q\sin t\,\mathrm{d}t}{1 - 2q\cos t + q^2}$$

$$= 2\log(1-q) + 2\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\log(1-q) + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cdot \frac{1}{n}(1 - \cos(nx))$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}\cos(nx).$$

例 10. (等周不等式) 设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是面积为 $S$ 的有界单连通区域, 其边界是长度为 $L$ 的 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类曲线, 则 $S \leqslant \frac{L^2}{4\pi}$.

证明: 在 $\partial D$ 上任取一点 $A$ 作为起点. 由于 $\partial D$ 为$\mathscr{C}^{(1)}$类曲线, 对任意 $(x, y) \in \partial D$, 从点 $A$ 出发沿逆时针方向到达点 $(x, y)$ 的曲线长度存在, 设为 $s$, 则 $(x, y)$ 由 $s$ 唯一确定, 记作

$$x = f(s),\ y = g(s), \quad s \in [0, L],$$

其中 $f, g$ 是以 $L$ 为周期的 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类周期函数, 则我们有 $(f'(s))^2 + (g'(s))^2 = 1$.

由 Fourier 系数的定义与分部积分可知

$$
\begin{aligned}
&a_0(f') = a_0(g') = 0,\\
&a_n(f') = \frac{2n\pi}{L} b_n(f),\ a_n(g') = \frac{2n\pi}{L} b_n(g), \quad \forall n \geqslant 1,\\
&b_n(f') = -\frac{2n\pi}{L} a_n(f),\ b_n(g') = -\frac{2n\pi}{L} a_n(g), \quad \forall n \geqslant 1,
\end{aligned}
$$

于是由 Green 公式以及广义 Parseval 等式可得

$$
\begin{aligned}
S &= \oint_{\partial D^+} x\mathrm{d}y = \int_0^L f(s)g'(s)\,\mathrm{d}s\\
&= \frac{L}{2}\Big(\frac{1}{2}a_0(f)a_0(g') + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)a_n(g') + b_n(f)b_n(g')\big)\Big)\\
&= \frac{L}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{2n\pi}\big(a_n(f')b_n(g') - b_n(f')a_n(g')\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{L^2}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big(a_n(f')b_n(g')-b_n(f')a_n(g')\big)\\
&\leqslant \frac{L^2}{8\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big((a_n(f'))^2+(b_n(f'))^2+(a_n(g'))^2+(b_n(g'))^2\big)\\
&\leqslant \frac{L^2}{8\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\big((a_n(f'))^2+(b_n(f'))^2+(a_n(g'))^2+(b_n(g'))^2\big)\\
&= \frac{L^2}{8\pi}\cdot\frac{2}{L}\int_0^L\big((f'(s))^2+(g'(s))^2\big)\,\mathrm{d}s=\frac{L^2}{4\pi},
\end{aligned}
$$

其中等号成立当且仅当 $\forall n \geqslant 2$, 均有

$$a_n(f') = b_n(f') = a_n(g') = b_n(f') = 0,$$

且还有 $a_1(f') = b_1(g')$, $b_1(f') = -a_1(g')$. 于是

由 Dirichlet-Jordan 定理可知, 上述等周不等式取等号当且仅当 $\forall s \in \mathbb{R}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
f(s) &= x_0 + a\cos\frac{2\pi}{L}s + b\sin\frac{2\pi}{L}s, \\
g(s) &= y_0 - b\cos\frac{2\pi}{L}s + a\sin\frac{2\pi}{L}s,
\end{aligned}
$$

此时 $D$ 是以 $(x_0, y_0)$ 为圆心、以 $\sqrt{a^2+b^2}$ 为半径的圆盘. 也即在周长给定的平面区域中, 圆所围的面积最大!

# 第 7 章小结

## 1. 形式 Fourier 级数:

- 周期为 $2\pi$ 的三角函数系:

$$\Lambda = \{1,\ \cos x,\ \sin x, \ldots, \cos(nx),\ \sin(nx), \ldots\}.$$

- 上述三角函数系的性质: 正交性, 完全性.

- 周期为 $2\pi$ 的函数的 Fourier 级数:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \ (n \geqslant 0),$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \ (n \geqslant 1),$$

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\big).$$

- 正弦级数 (奇函数), 余弦级数 (偶函数).

## 2. Fourier 级数的性质及点态收敛性:

- 若 $f$ 在 $[a, b]$ 上可积或广义绝对可积, 则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

- $\lim_{n\to\infty} a_n(f) = \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0.$
- Fourier 级数的点态收敛 (Dirichlet-Jordan):
  假设 $f$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数. 如果 $f$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上逐段单调有界或逐段可微, 则 $\forall x \in \mathbb{R}$, 函数 $f$ 的 Fourier 级数在点 $x$ 处收敛到 $S(x) = \frac{1}{2}\big(f(x-0) + f(x+0)\big)$.

  (1) 若 $f$ 在点 $x$ 处连续, 则 $S(x) = f(x)$.

  (2) $S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\big)$.

- 周期为 $2\ell$ 的函数的 Fourier 级数:

$$a_n(f)=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x\ (n\geqslant 0),$$

$$b_n(f)=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x\ (n\geqslant 1),$$

$$f(x)\sim\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(f)\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n(f)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Big).$$

- 上述 Fourier 级数与以 $2\pi$ 为周期的 Fourier 级数具有完全类似的性质.
- 周期性延拓: 零延拓, 奇延拓, 偶延拓.
- 复数形式的 Fourier 级数: 简化运算!

## 3. Fourier 级数的平方平均收敛:

- 投影、最佳逼近定理: $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$, 令

$$S_n(f)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k(f)\cos(kx)+b_k(f)\sin(kx)\Big).$$

则 $\|f-S_n(f)\|=\min\limits_{g\in W_n}\|f-g\|$, 最小值仅在 $g=S_n(f)$ 处达到, 且 $f-S_n(f)$ 垂直于 $W_n$, 其中$W_n$是$1,\cos x,\sin x,\ldots,\cos(nx),\sin(nx)$ 所张成的实线性空间.

- Parseval 等式: $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$, 均有

$$\frac{1}{2}\big(a_0(f)\big)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\big(a_k(f)\big)^2 + \big(b_k(f)\big)^2\Big) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

- 唯一性: 若 $f, g \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$ 有相同的 Fourier 级数, 则 $f, g$ 几乎处处相等. 如果 $f, g$ 还为连续函数, 则 $f \equiv g$.

- 平方平均收敛: $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(f) - f\| = 0.$$

- 广义 Parseval 等式: $\forall f, g \in \mathscr{R}[-\pi, \pi]$, 均有

$$\frac{1}{2}a_0(f)a_0(g) + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g)\big) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

- $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi, \pi]$ 以及 $\forall a, x \in [-\pi, \pi]$, 均有

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a_0(f)(x-a) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x \big(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)\big)\,\mathrm{d}t.$$

谢谢大家!