电磁场数值计算

邢庆子

Tel: 62781684(o), 13661226717

E-mail: xqz@tsinghua.edu.cn

清华大学工物系加速器实验室 刘卿楼**309**

1.4 波动方程

在均匀各向同性媒质中，从麦克斯韦方程组可导出场量的波动方程和亥姆霍兹方程。

引入动态位：$\boldsymbol{A}$ 和 φ，用以描述、分析和计算电磁场，它们是空间坐标和时间的函数。

$$\begin{cases} \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \end{cases} \xRightarrow[\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}]{\text{洛伦兹规范}} \begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{J} \\ \nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

达朗贝尔方程

一、二维场情况下，写出直角坐标系中标量磁位、矢量磁位满足的微分方程？（ μ=常数）

$$\nabla^2 \boldsymbol{\Phi}_m = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}_m}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_z$$

二、二维场情况下，写出直角坐标系中标量磁位、矢量磁位与场量的关系？

$$\vec{H} = -\nabla \boldsymbol{\Phi}_m = -\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_m}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_m}{\partial y}\vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y}\vec{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x}\vec{e}_y$$

- 矢量磁位与磁感应强度的关系： $B = \nabla \times A$

直角坐标系

$$
\left.
\begin{aligned}
B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\
B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\
B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}
\end{aligned}
\right\}
$$

二维平面场：

$$
\begin{cases}
A = A_z e_z \\
A_x = A_y = 0
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
B_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} \\
B_y = -\dfrac{\partial A_z}{\partial x}
\end{cases}
$$

圆柱坐标系

$$
\left.
\begin{aligned}
B_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\
B_\theta &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\
B_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}
\end{aligned}
\right\}
$$

轴对称平面场：

$$
\begin{cases}
A = A_\theta e_\theta \\
A_r = A_z = 0
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
B_r = -\dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \\
B_z = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)
\end{cases}
$$

本节内容：

- 边界条件与边值关系

1.5 边界条件与边值关系

- 电磁场计算中的定解条件

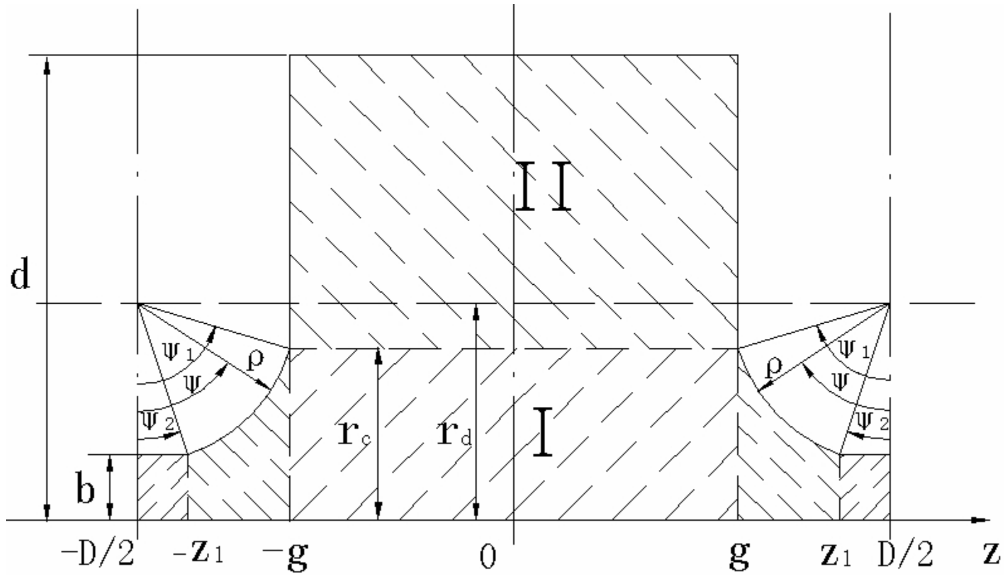
电磁场的分析与计算通常归结为求 **微分方程** **的解**。

在电磁场计算中，标量磁位及矢量磁位所满足的方程都属于 **偏微分方程，使方程具有唯一解的条件是给定** **边界条件和初始条件，合称为定解条件。**

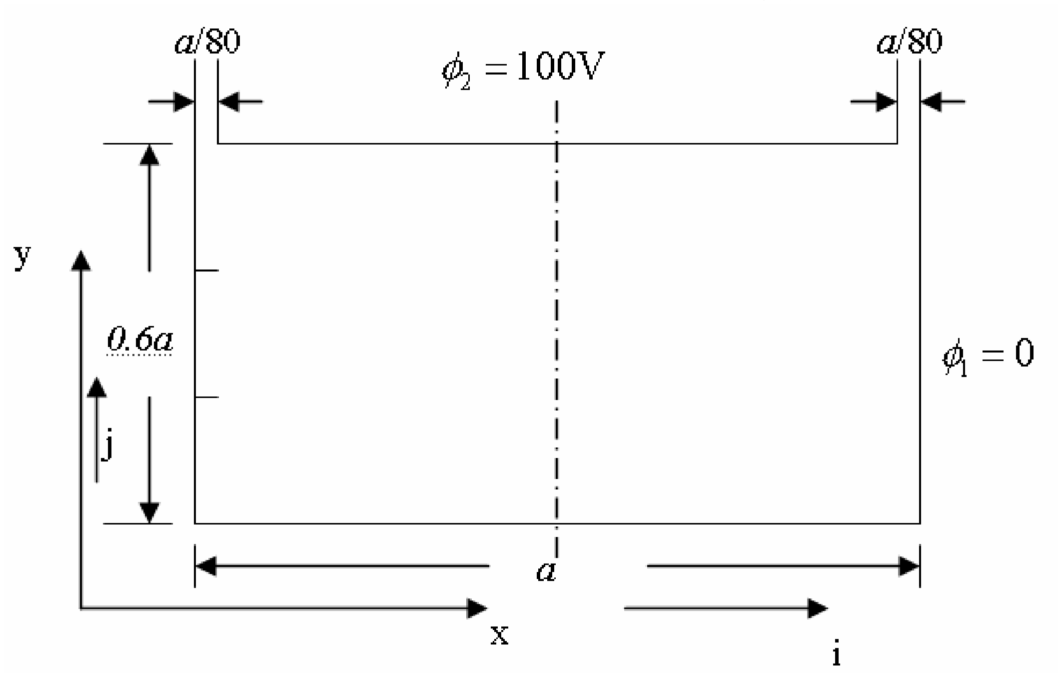
- 恒定电磁场的定解问题

1）确定**数学模型（包括选取位函数和相应的偏微分方程）。**

2）给出**定解条件。对于恒定电磁场问题只需给出边界条件。**



盘荷波导中的电磁场计算



长接地金属槽中的电场计算

1.5.1 边界条件分类

物理量 $\boldsymbol{u}$ (ϕ_e, ϕ_m, A)

恒定电磁场的边界条件通常归结为三种典型情况：

（1）第一类边界条件——狄利赫利(**Dirichlet**)问题

物理量 $\boldsymbol{u}$ 在边界上的值为给定值。

$u\big|_s = f_1(s)$ 称为**第一类边界条件。**

当 $u\big|_s = 0$ 时，称为 **第一类齐次边界条件。**

（2）第二类边界条件——诺曼(Neumann)问题

物理量 $\boldsymbol{u}$ 的法向导数在边界上的值为给定值。

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_s = f_2(s)$ 称为**第二类边界条件。**

当 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_s = 0$ 时，称为 **第二类齐次边界条件。**

（3）第三类边界条件——劳平(Robin)问题

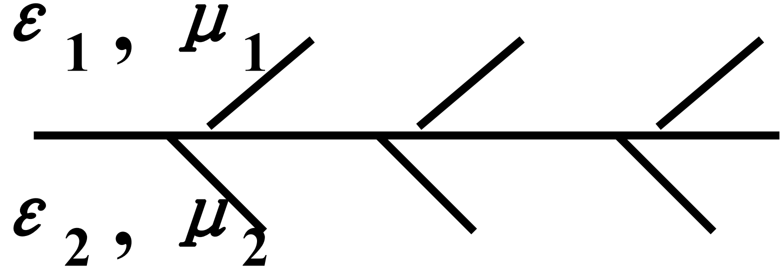
物理量 ***u*** 及其法向导数的某一线性组合在边界上为给定值。

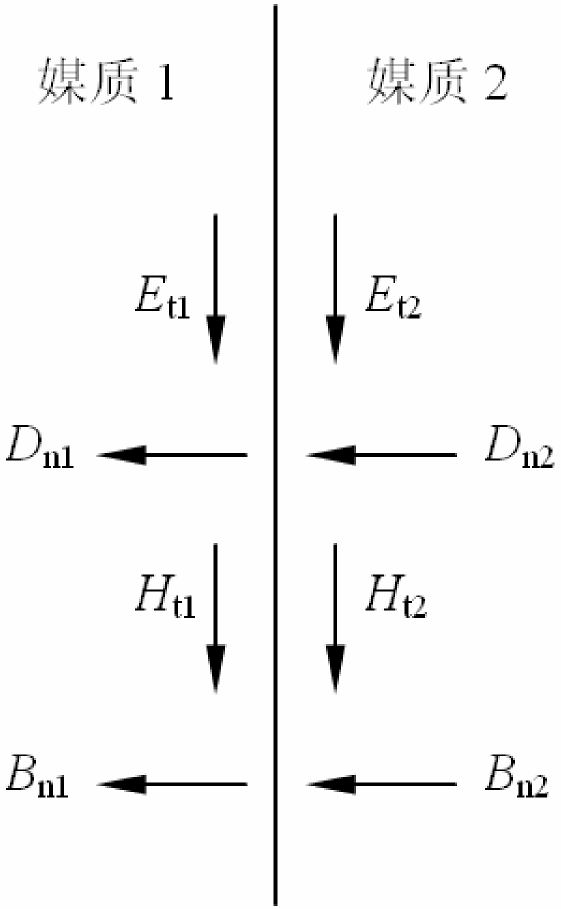
$$\frac{\partial u}{\partial n}+h(u-f_s)=f_3(s)$$

前两类边界条件可看成是它的特例。

1.5.2 媒质交界面条件

当电磁场的场域由不同媒质构成时，在不同媒质分界面上，媒质的特性系数 ε、μ 发生突变，相应的场量一般也发生突变，这时，为给出对应不同媒质的二个偏微分方程组的定解条件，还必须规定分界面上的场量所应满足的关系。





J_s：面电流密度

σ_s：面电荷密度

- **用场量表示**

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \bullet (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{t1} = E_{t2} \\ D_{n1} - D_{n2} = \sigma_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \\ \vec{e}_n \bullet (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_{t1} - H_{t2} = J_s \\ B_{n1} = B_{n2} \end{cases}$$

- **用位函数表示**

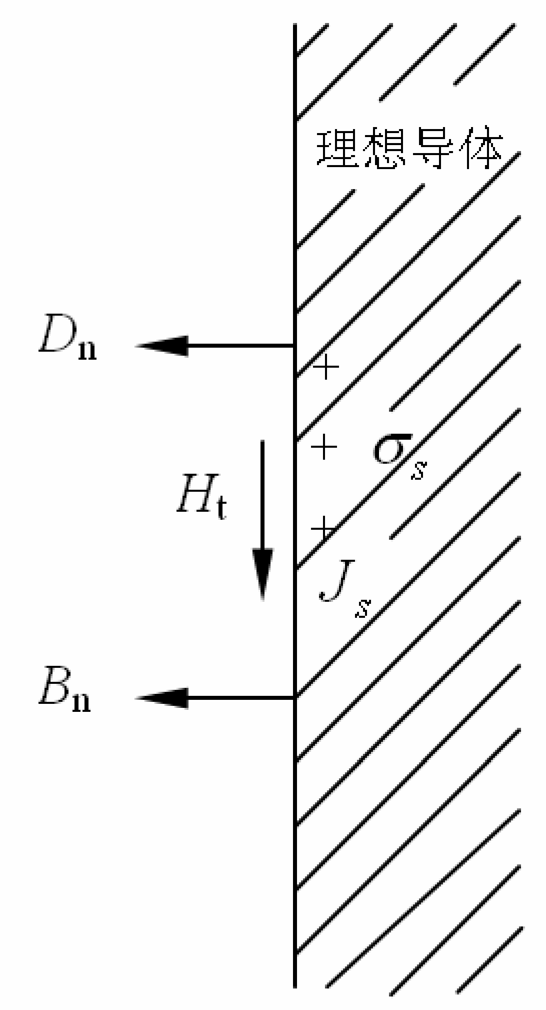
1) 恒定电场问题

$$\begin{cases} \Phi_1\big|_s = \Phi_2\big|_s \\ \varepsilon_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \sigma_s \end{cases}$$

2) 恒定磁场问题

$$\begin{cases} A_1\big|_s = A_2\big|_s \\ \dfrac{1}{\mu_1} \dfrac{\partial A_1}{\partial n}\bigg|_s - \dfrac{1}{\mu_2} \dfrac{\partial A_2}{\partial n}\bigg|_s = J_s \end{cases}$$

1.5.3 理想导体面条件（内部无磁通条件下）



$$\begin{cases} \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = J_s \\ \vec{e}_n \bullet (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times \vec{H} = J_s \\ \vec{e}_n \bullet \vec{B} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} H_t = J_s \\ B_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \bullet (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times \vec{E} = 0 \\ \vec{e}_n \bullet \vec{D} = \sigma_s \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} E_t = 0 \\ D_n = \sigma_s \end{cases}$$

1.5 边界条件与边值关系

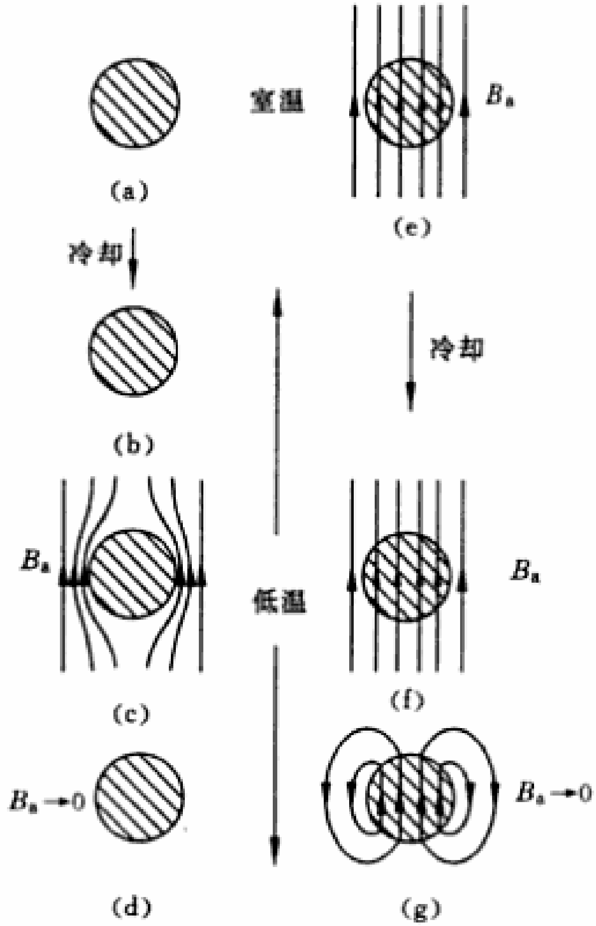


图 4.2.5 “理想”导体的磁性能

(a)～(b)样品在无磁场时变为无电阻；

(c) 施加于无电阻样品的磁场；

(d) 磁场除去；

(e)～(f) 样品在外加磁场中变为无电阻；

(g) 外加磁场除去。

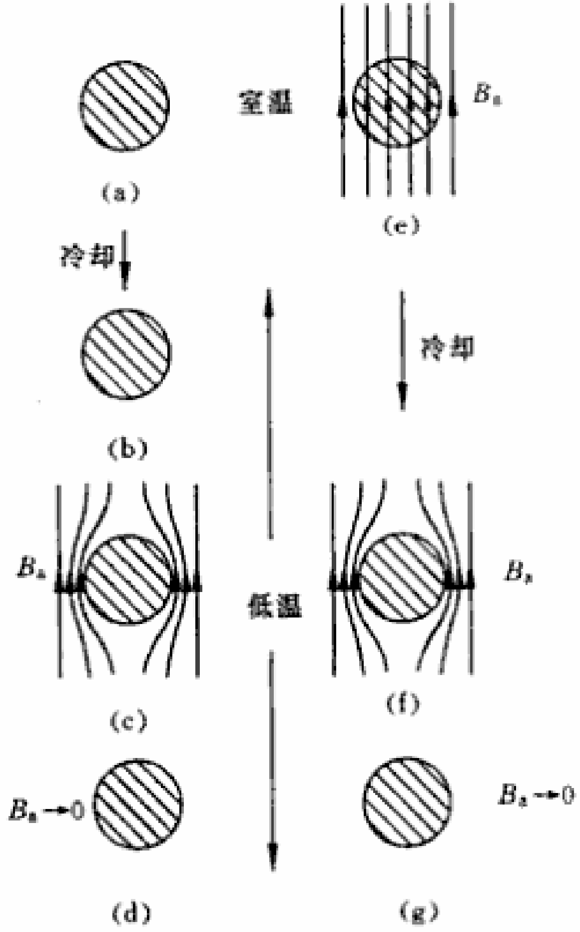


图 4.2.6 超导体的磁性能

(a)～(b) 样品在无磁场情况下变为无电阻；

(c) 施加于超导样品的磁场；

(d) 磁场除去；

(e)～(f) 样品在外加磁场中变为超导的；

(g) 外加磁场除去。

<u>From:</u>

<u>李言荣 等，电子材料导论，清华大学出版社</u>

单选题 1分

设置

二维情况下，取 $\mu \to \infty$ 的铁磁物质表面为边界，属于第几类边界条件？

A 第一类边界条件

B 第二类边界条件

C 无法判断

提交

1.5.4 讨论

- 边界条件的类型与选取的边界面、采用的位函数均有关

➢ 对于静电场：（标量电位）

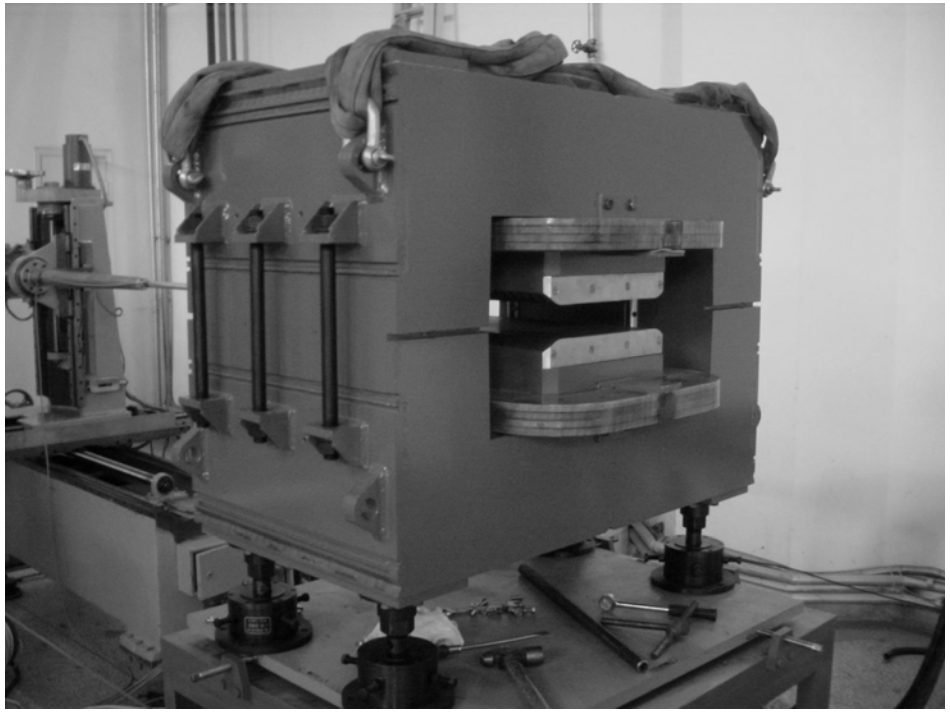
1）$\boldsymbol{E}$ 垂直于边界面（如导体表面）：(E_t=0)　第一类

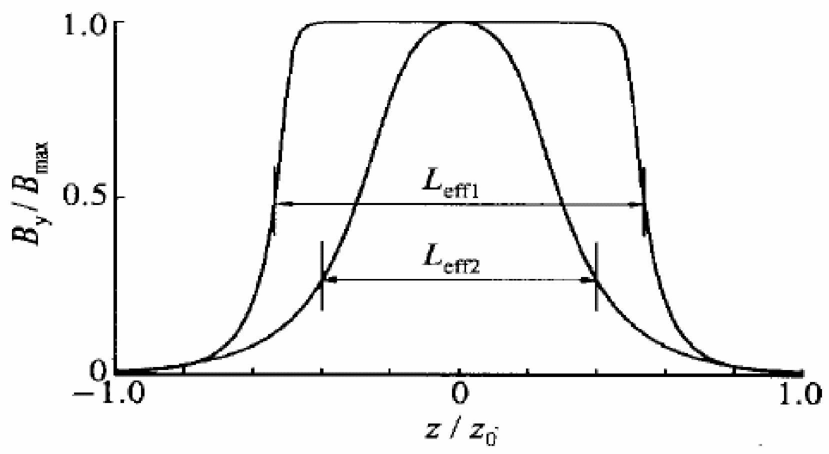
2）取 $\boldsymbol{E}$ 线为边界线：(E_n=0)　第二类

➢ 对于静磁场：（矢量磁位）

1）取 $\mu\rightarrow\infty$ 的铁磁物质表面为边界（$\boldsymbol{B}$线平行于边界）：(H_n=0)　第一类

2）$\boldsymbol{B}$ 线垂直于边界面：(H_t=0)　第二类





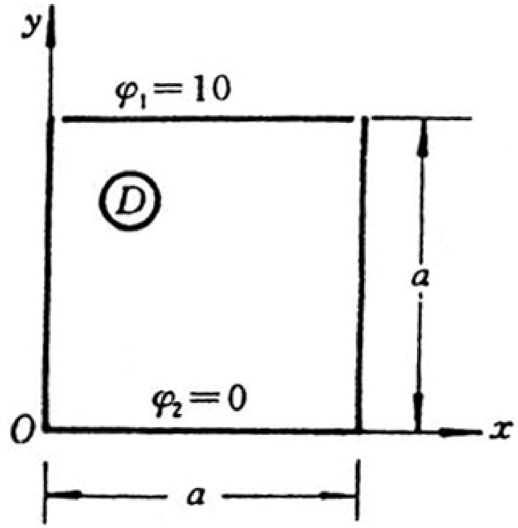
L_{eff1}为长磁铁等效长度，L_{eff2}为短磁铁等效长度

作业：习题1.5

补3：导出动态电磁场中的达朗贝尔方程。

●有限差分法上机题

1. 计算长直接地金属槽中的电场分布。金属槽横截面如图所示，其侧壁与底面电位均为零，顶盖电位相对值为**10**。槽内电位函数满足拉普拉斯方程。计算槽内电位分布。



要求：（**1**）先用正方形网格粗分，每边取**4**个网格计算，取不同的松弛因子，比较其收敛速度。取计算精度为千分之一。（**2**）划分网格加倍，计算电位分布，并与上面计算结果比较。

2. 习题 **2.3 (3)**。（取网格步长为**1**。设 **g=8, h=66, BC=6, DE=5**）

上机题**11**月**17**日（第九周）之前交。