微积分 A2 数项级数习题课 May. 17-23, 2021

本次习题课是关于级数理论. 主要有两个部分: I. 级数理论总结. II. 习题及其解答

第 I 部分: 级数理论总结

一. 级数的基本概念

- 无穷级数, 简称级数, 是指记号 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, 常简写作 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 或 $\sum a_n$, 其中 $\{a_n\}$ 为一个数列;
- $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 称为级数 $\sum a_n$ 的前 n 项和;
- 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛是指级数的部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛. 设 $S_n \to S$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛于和 S, 并记作 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S$.
- 若级数 $\sum a_n$ 不收敛, 则称级数 $\sum a_n$ 发散.
- 无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与无穷限广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 有许多类似的性质和结论.

二. 级数的基本性质

- 线性性质: 若两个级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 均收敛, 则级数 $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ 也收敛, 且
$$\sum(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum a_n + \mu \sum b_n.$$
- 收敛级数的一般项趋于零, 即若级数 $\sum a_n$ 收敛, 则 $a_n \to 0$, $n \to +\infty$.
- 对一个级数增加有限项或减少有限项, 不改变这个级数的收敛性质.
- 加括号级数: 如果一个级数收敛, 则它的任意加括号级数均收敛. 反之不成立. 但是如果一个加括号级数收敛, 且每个括号中的各项有相同的符号, 则原级数收敛.

三. 一般级数的收敛性判别

- Cauchy 收敛准则: 级数 $\sum a_n$ 收敛, 当且仅当对任给 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 使得

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon, \quad \forall n, m, \quad n \geq m \geq N.$$

- Leibniz 判别法: 如果数列 $\{a_n\}$ 单调趋向于零, 则交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

  (这样的级数称为 Leibniz 级数)

- Dirichlet 判别法: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛, 如果 (i) 部分和序列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 有界, 且 (ii) 数列 b_n单调趋向于零.

- Abel 判别法: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛, 如果 (i) 级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 且 (ii) 数列 b_n 单调有界.

四. 非负级数的收敛性判别

- 非负级数收敛, 当且仅当它的部分和序列有上界.

- 比较判别法: 设 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 为两个非负级数, 且 $a_k \leq b_k, \forall k \geq k_0$.

  (i) 若级数 $\sum b_n$ 收敛, 则 $\sum a_n$ 收敛;

  (ii) 若级数 $\sum a_n$ 发散, 则 $\sum b_n$ 发散.

- 比较判别法的极限形式: 设 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 为两个非负级数, 且当 n 充分大时 $b_n > 0$. 假设极限 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$ 存在, 包括情形 $\ell = +\infty$.

  (i) 若 $0 < \ell < +\infty$, 则级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 同时收敛或同时发散;

  (ii) 若 $\ell = 0$ 且 $\sum b_n$ 收敛, 则 $\sum a_n$ 也收敛;

  (iii) 若 $\ell = +\infty$ 且 $\sum b_n$ 发散, 则 $\sum a_n$ 也发散.

  注: 经常用于级数比较的标准级数:

  (1) $\sum q^n$ (级数收敛, 当且仅当 $|q| < 1$);

  (2) $\sum \frac{1}{n^p}$ (级数收敛, 当且仅当 $p > 1$);

(3) $\sum \frac{\ln n}{n^p}$ (级数收敛, 当且仅当 $p>1$);

(4) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ (级数收敛, 当且仅当 $p>1$);

(5) $\sum \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$ (级数收敛, 当且仅当 $p>1$).

- 比值判别法 (ratio test): 设 $\sum a_n$ 为正项级数,

  (i) 如果 $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, 则正项级数 $\sum a_n$ 收敛;

  (ii) 如果 $\underline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, 则正项级数 $\sum a_n$ 发散.

- 根值判别法 (root test): 设 $\sum a_n$ 为非负级数, 记 $a=\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt{a_n}$.

  (i) 若 $a<1$, 则级数 $\sum a_n$ 收敛;

  (ii) 若 $a>1$, 则级数 $\sum a_n$ 发散.

- Raabe 判别法: 对于正项级数 $\sum a_n$,

  (i) 如果存在正数 $\rho>1$, 使得 $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}+1)\geq\rho, \forall n\geq n_0$, 则级数 $\sum a_n$ 收敛;

  (ii) 如果 $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}+1)\leq 1, \forall n\geq n_0$, 则级数 $\sum a_n$ 发散.

五. 级数的绝对收敛, 条件收敛, 以及级数重排

- 称级数 $\sum a_n$ 绝对收敛, 如果级数 $\sum |a_n|$ 收敛; 称级数 $\sum a_n$ 为条件收敛, 如果级数 $\sum a_n$ 收敛, 但级数 $\sum |a_n|$ 发散.

- 如果一个级数绝对收敛, 那么它自身收敛;

- 如果一个级数绝对收敛, 那么它的任何重排级数也收敛, 并且每个重排级数和原级数有相同的和.

- Riemann 重排定理: 如果一个级数条件收敛, 那么对于任给一个数 S (可取 $\pm\infty$), 存在这个级数的重排级数收敛于 S. (这个结果有时称为 4R 定理, Riemann's Remarkable Rearrangement Result)

六. 无穷乘积

- 设 $p_1, p_2, \cdots$ 为一个数列, 记号 $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$ 称为无穷乘积.

- $P_n = p_1p_2\cdots p_n$ 称为无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$ 的前 n 项部分乘积. 若部分乘积序列 $\{P_n\}$ 有极限 P 且 $P\neq 0$, 则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$ 收敛, 并记作 $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n = P$.

- 若部分乘积序列 $\{P_n\}$ 无极限, 或有极限零, 则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$ 发散.

- 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$ 收敛的必要条件是通项趋向于 1, 即 $p_n \to 1$.

- 若无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$ 收敛, 则它的余项 $R_n \triangleq \prod_{k=n+1}^{+\infty} p_k \to 1$, $n\to +\infty$.

- 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ 收敛, 当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛. 假设 $a_n\geq 0$, $\forall n\geq 1$, 则 $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ 收敛, 当且仅当 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

- 假设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛, 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ 收敛, 当且仅当 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

第 II 部分: 习题及其解答

一. 级数的基本概念练习

1. 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 判断如下哪些级数必收敛.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2$; (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n-u_{2n})$; (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+u_{n+1})$;

解：仅级数 (iv) 必收敛. 因为级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+1}$ 也收敛, 从而它们的和 $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+u_{n+1})$ 收敛, 即级数 (iv) 收敛. 其他级数均可能发散. 例如, 取 $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 时, 级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ 收敛, 但级数 (i) 和 (ii) 均发散. 若取 $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 同样收敛, 但级数 (iii) 发散. 因为若 $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n-u_{2n})$ 收敛, 则由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n} = \sum[u_n-(u_n-u_{2n})]$ 收敛, 即 $\sum\frac{1}{2n}$ 收敛. 矛盾. 解答完毕.

2. 设 $0<nu_n\leq 1$, 判断下列哪些级数收敛.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$; (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{u_n}$; (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2\ln n$;

解: 级数 (iv) 必收敛. 因为级数 (iv) 的一般项满足

$$u_n^2 \ln n \leq \frac{\ln n}{n^2},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 收敛, 故级数(iv)收敛. 以下举例说明其他级数不一定收敛. 取 $u_n = \frac{1}{n}$ 满足 $0 < nu_n \leq 1$, 级数 $\sum \frac{1}{n}$ 和 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. 即级数 (i) 和 (iii) 发散. 取 $u_1 = u_2 = 1/2$,

$$u_n = \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{2n\ln n}, \quad \forall n \geq 3,$$

则

$$0 < nu_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2\ln n} \leq 1, \quad \forall n \geq 3.$$

易证级数

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n u_n = \sum_{n=3}^{+\infty} \Big[\frac{(-1)^n}{2n} + \frac{1}{2n\ln n}\Big]$$

发散. 即级数 (ii) 发散. 解答完毕.

3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 判断以下哪些结论正确.

(i) 极限 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$;

(ii) 极限 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$;

(iii) 若极限 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 则极限值小于1;

(iv) 若极限 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 则极限值小于等于1.

解：仅结论 (iv) 正确. 注意仅仅假设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 并不足以保证极限 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在. 例如级数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$ 显然收敛, 但极限 $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在. 参见课本第 243 页例 5.2.7. 因此结论 (i) 和 (ii) 不成立. 此外对于收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 而言, 极限 $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. 这说明结论 (iii) 不成立. 解答完毕.

二. 求收敛级数之和.

<u>注</u>: 一般而言, 求出收敛级数之和是困难的, 不存在普适的求和方法. 然而有两种方法常用于求一些特殊的级数之和: (a) 裂项消去法; (b) 利用已知结果求级数之和. 下述习题的前三题可用裂项消去法求和; 后四题可用已知结论求和.

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+2)(n+3)}$ 之和.

解: 对一般项 $\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$ 作分解. 令

$$\frac{1}{n(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3}, \quad \forall n \geq 1,$$

其中 A, B, C 为待定常数. 用 $n(n+2)(n+3)$ 乘以上述等式得

$$1 = A(n+2)(n+3) + Bn(n+3) + Cn(n+2) = A(n^2+5n+6) + B(n^2+3n) + C(n^2+2n).$$

比较上式两边关于 n^k 的系数 $(k = 2, 1, 0)$ 得

$$\begin{cases} A+B+C &= 0, \\ 5A+3B+2C &= 0, \\ 6A &= 1. \end{cases}$$

解上述线性代数方程组得 $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{-1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$. 由此得如下分解式

$$\frac{1}{n(n+2)(n+3)} = \frac{1}{6n} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{3(n+3)}.$$

于是级数的部分和为

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)(n+3)} = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+3} = \frac{1}{6}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n}$$

$$+\frac{1}{6}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\Big) + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}\Big)$$

$$= \frac{1}{6}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\Big) + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}\Big)$$

$$\to \frac{1}{6}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{36}, \quad N \to +\infty.$$

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+m)}$ 之和, 其中 m 为正整数. (注: 这是课本习题 5.1 题 7)

解: 令

$$\frac{1}{n(n+m)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+m}, \quad \forall n \geq 1,$$

则 $1 = A(n+m) + Bn$. 解之得 $A = \frac{1}{m}$, $B = -\frac{1}{m}$. 于是

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\Big) = \frac{1}{m}\Big(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} + \sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{N+m}\frac{1}{n}\Big)$$

$$= \frac{1}{m}\Big(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{N+m}\frac{1}{n}\Big) \to \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}, \quad N \to +\infty.$$

故所求级数的和为

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}.$$

3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \arctan\frac{1}{2n^2}$ 之和. (注: 这是课本习题 5.1 题 6 (7))

解: 用裂项消去法求级数之和的关键在于适当分解一般项. 对于级数 $\sum\limits_{n=1} \arctan\frac{1}{2n^2}$, 一般项至少有如下三种分解

$$\begin{aligned}
\arctan\tfrac{1}{2n^2} &= \arctan\tfrac{1}{2n-1} - \arctan\tfrac{1}{2n+1} \\
&= \arctan\tfrac{n}{n+1} - \arctan\tfrac{n-1}{n} \\
&= \arctan(2n+1) - \arctan(2n-1).
\end{aligned}$$

上述三个分解式的证明思想: 根据正切差角公式 $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+(\tan\alpha)(\tan\beta)}$, 不难得到反正切差角公式

$$\arctan x - \arctan y = \arctan\frac{x-y}{1+xy}.$$

由此不难得到上述三个分解式. 利用这三个分解式的任何一个, 可以求出级数的和. 例如利用第一个分解式 $\arctan\frac{1}{2n^2} = \arctan\frac{1}{2n-1} - \arctan\frac{1}{2n+1}$ 可知

$$\sum_{n=1}^{N} \arctan\frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{N}\Big(\arctan\frac{1}{2n-1} - \arctan\frac{1}{2n+1}\Big)$$

$$= \arctan 1 + \sum_{n=2}^{N}\arctan\frac{1}{2n-1} - \sum_{n=2}^{N}\arctan\frac{1}{2n-1} - \arctan\frac{1}{2N+1}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2N+1} \to \frac{\pi}{4}, \quad N \to +\infty.$$

因此所求级数的和为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\frac{\pi}{4}$. 解答完毕.

4. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 之和.

解: 记级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的部分和为 S_n. 观察

$$\begin{aligned} S_n &= \quad\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2^2}+\tfrac{5}{2^3}+\cdots+\tfrac{2n-3}{2^{n-1}}+\tfrac{2n-1}{2^n} \\ 2S_n &= 1+\tfrac{3}{2}+\tfrac{5}{2^2}+\tfrac{7}{2^3}+\cdots+\tfrac{2n-1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

可知

$$S_n=2S_n-S_n=1+\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=1+2\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}\to 3,\quad n\to+\infty.$$

因此所求级数的和为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3$.

5. 设收敛级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=S$, 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Big(na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots+2a_{n-1}+a_n\Big).$$

解: 记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, 则 $S_n\to S$, 且由熟知的结论得 $\frac{1}{n}(S_1+S_2+\cdots+S_n)\to S$. 另一方面

$$\begin{aligned} S_1+S_2+\cdots+S_n &= a_1 \\ &\quad + a_1+a_2 \\ &\quad + a_1+a_2+a_3 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \\ &= na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots+a_n \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Big(na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots+2a_{n-1}+a_n\Big)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Big(S_1+S_2+\cdots+S_n\Big)=S.$$

解答完毕.

6. 考虑交错级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

的一个重排级数

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots, \tag{1}$$

排列规则为按顺序两正一负. 证明上述重排级数收敛, 并求出这个级数的和.

解: 记调和级数的前 n 项和为 H_n, 即

$$H_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

则根据上个学期所学的知识可知, H_n 可表为 $H_n=\ln n+\gamma+\varepsilon_n$, 其中 $\gamma=0.577\cdots$ 为 Euler 常数, 且 $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$. 我们来考虑重排级数 (1), 其前 n 项部分和记为 S_n. 于是根据重排级数的排列规则可知 S_{3n} 包含 $2n$ 个正项, n 个负项, 即

$$S_{3n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2n}\Big).$$

注意部分和 S_{3n} 还可以写作

$$S_{3n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdot+\frac{1}{4n}-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{4n}\Big)-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2n}\Big)$$
$$=H_{4n}-\frac{1}{2}H_{2n}-\frac{1}{2}H_n=\ln(4n)+\gamma+\varepsilon_{4n}-\frac{1}{2}\Big(\ln(2n)+\gamma+\varepsilon_{2n}+\ln n+\gamma+\varepsilon_n\Big)$$
$$=\ln(4n)-\frac{1}{2}\Big(\ln(2n)+\ln n\Big)+\varepsilon_{4n}-\frac{1}{2}(\varepsilon_{2n}+\varepsilon_n)$$
$$=\frac{3}{2}\ln 2+\varepsilon_{4n}-\frac{1}{2}(\varepsilon_{2n}+\varepsilon_n).$$

由此可见数列 S_{3n} 收敛, 且 $S_{3n} \to \frac{3}{2}\ln 2$. 由于级数的一般项趋向于零. 因此重排级数 (1) 收敛, 且重排级数的和为 $\frac{3}{2}\ln 2$. 解答完毕.

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 绝对收敛, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n = 2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1} = 5$. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的和.

解：注意到

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n = 2\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1}.$$

由此得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 2\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n = 2\cdot 5 - 2 = 8.$$

解答完毕.

三. 级数的收敛性判别

1. 证明下述级数发散.

(i) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} - \cdots$

(ii) $\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{8} + \cdots$

证: 以下我们利用 Cauchy 收敛准则来证明这两个级数发散. (注: 也可以利用公式 $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ 证明.) 考虑级数 (i), 它的一般项排列规则为 $+, +, -, +, +, -, \cdots$. 设级数的一般项为 u_n, 则

$$u_{3n+1} + \cdots + u_{6n} = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n}$$
$$> \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+4} + \cdots + \frac{1}{6n-2} > \frac{n}{6n-2} > \frac{1}{6}.$$

上述不等式对任意 n 均成立. 故由 Cauchy 收敛准则可知级数 (i) 发散.

考虑级数 (ii). 其排列规则为 $+, -, +, +, -, +, \cdots$. 记级数的一般项为 u_n, 则

$$u_{3n+1} + \cdots + u_{6n} = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n-2} - \frac{1}{6n-1} + \frac{1}{6n}$$

$$> \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+6} + \cdots + \frac{1}{6n} > \frac{n}{6n} = \frac{1}{6}.$$

根据 Cauchy 收敛准则原理可知级数发散. 解答完毕.

2. 假设正项级数 $\sum a_k$ 发散, 判断级数 $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ 的收敛性.

解. 级数 $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ 发散. 以下分两种情况证明.

(i) 假设序列 $\{a_k\}$ 有界, 即存在正数 $M > 0$, 使得 $0 < a_k \le M, \forall k \ge 1$. 于是

$$\frac{a_k}{1+a_k} \ge \frac{a_k}{1+M},$$

显然级数 $\sum \frac{a_k}{1+M}$ 发散. 因此级数 $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ 发散.

(ii) 假设序列 $\{a_k\}$ 无界, 即存在一个子列 $a_{n_k} \to +\infty, k \to +\infty$. 由此得

$$\frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}} \to 1, \quad k \to +\infty.$$

这说明级数 $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ 不满足收敛级数的必要条件, 即一般项趋向于零. 故级数 $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ 发散.

3. 设 $a > 0$, 讨论如下交错级数的收敛性, 以及绝对收敛性

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{a}{1+a^n}. \tag{2}$$

解：记级数的一般项为 $(-1)^n u_n$, 其中 $u_n = \frac{a}{n(1+a^n)} > 0$.

(i) 当 $a > 1$ 时, 由于

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{a}{n(1+a^n)}} = \frac{1}{a}\left[\frac{a}{n(1+a^{-n})}\right]^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{a} < 1,$$

故由根值判别法知 $\sum u_n$ 收敛. 因此级数 $\sum (-1)^n u_n$ 绝对收敛.

(ii) 当 $a = 1$ 时, $u_n = \frac{1}{2n}$, 可见级数 $\sum (-1)^n u_n$ 条件收敛.

(iii) 当 $0 < a < 1$ 时, 由于级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

收敛, 且 $\frac{a}{1+a^n}$ 关于 n 单调有界, 故根据 Abel 判别法知级数 (2) 收敛. 由于

$$\frac{a}{n(1+a^n)} > \frac{a}{2n},$$

且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{2n}$ 发散, 故级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n(1+a^n)}$$

发散. 因此级数 (2) 条件收敛. 解答完毕.

4. 设 $a \neq 0$, 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right) \tag{3}$$

的收敛性, 以及绝对收敛性.

解：将级数的一般项改写如下

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2} - n\pi\right) = (-1)^n \sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}.$$

易证

$$\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$$

关于 n 单调下降并趋向于零. 因此级数 (3) 是 Leibniz 型级数, 故收敛. 显然级数 (3) 为条件收敛. 因为当 n 充分大时,

$$\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} > 0,$$

且

$$\frac{\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}{\frac{\pi a^2}{2n}} = \frac{\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}{\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}} \cdot \frac{\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}{\frac{\pi a^2}{2n}} \to 1, \quad n \to +\infty,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi a^2}{2n}$ 发散. 解答完毕.

5. 讨论如下级数的条件收敛和绝对收敛性

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right], \quad p > 0. \tag{4}$$

解: 将级数的一般项展开如下

$$\ln\Big[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\Big]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+O\Big(\frac{1}{n^{3p}}\Big). \tag{5}$$

(i) $p\in(0,\frac{1}{2}]$. 由于 (a) 级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 收敛; (b) 级数 $\sum_{n\geq 2}\frac{-1}{n^{2p}}$ 发散, 从而级数

$$\sum_{n\geq 2}\Big[-\frac{1}{2n^{2p}}+O\Big(\frac{1}{n^{3p}}\Big)\Big]$$

也发散 (根据比较判别法的极限形式). 因此级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p}]$ 发散.

(ii) $p\in(\frac{1}{2},1]$. 由于级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛, 且级数

$$\sum_{n\geq 2}\Big[-\frac{1}{2n^{2p}}+O\Big(\frac{1}{n^{3p}}\Big)\Big]$$

绝对收敛, 故级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p}]$ 条件收敛.

(iii) $p>1$. 由于级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$, 以及级数

$$\sum_{n\geq 2}\Big[-\frac{1}{2n^{2p}}+O\Big(\frac{1}{n^{3p}}\Big)\Big]$$

均绝对收敛, 故级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p}]$ 绝对收敛. 解答完毕.

四. 级数杂题

1. 假设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 且

$$\lim_{n\to+\infty}[n^p(e^{1/n}-1)a_n]=1, \tag{6}$$

其中 $p>0$, 求正数 p 的取值范围.

解: 由于

$$n^p(e^{1/n}-1)a_n=\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{p-1}}},$$

且 $\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\to 1$, 故由假设条件 (6) 可得 $\frac{a_n}{\frac{1}{n^{p-1}}}\to 1$, $n\to+\infty$. 根据比较定理的极限形式可知, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p-1}}$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 有相同的收敛性. 由假设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p-1}}$ 收敛. 由此可见 $p>2$. 解答完毕.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上二阶连续可微, 且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明级数

$$\sum_{n=2}^{+\infty} f\Big(\frac{1}{n}\Big) \tag{7}$$

绝对收敛.

证明: 由假设 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 可知 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=0$. 由此可见

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

其中 ξ 介于 0 和 x 之间. 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{1}{2}f''(0).$$

因此

$$\lim_{n\to +\infty}\frac{|f(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n^2}}=\Big|\frac{1}{2}f''(0)\Big|.$$

由比较判别法的极限形式可知级数

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\Big|f\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big|$$

收敛. 即级数 (7) 绝对收敛. 证毕.

3. 设

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx,\quad \forall n\geq 1, \tag{8}$$

讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}, \tag{9}$$

的收敛性, 其中 $p>0$.

解: 对定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$ 作变量代换 $u=\tan x$ 得

$$a_n=\int_0^1\frac{u^n du}{1+u^2}<\int_0^1 u^n du=\frac{1}{1+n}.$$

于是
$$0<\frac{a_n}{n^p}<\frac{1}{n^p(1+n)}<\frac{1}{n^{p+1}}.$$
因此级数 (9) 收敛. 解答完毕

4. 设正项数列 $\{x_n\}$ 单调下降, 且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x_n$ 发散. 判断级数
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{1+x_n}\Big)^n \tag{10}$$
的收敛性, 并说明理由.

解. 级数 (10) 收敛. 理由如下. 因为正项数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界零, 所以序列收敛. 记它的极限为 a. 若 $a=0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x_n$ 是 Leibniz 型级数, 收敛. 此与假设矛盾. 故 $a>0$. 由于 $x_n\to a$, 故存在 N, 使得 $n\geq N$ 时, $x_n>\frac{a}{2}$. 于是
$$\frac{1}{1+x_n}<\frac{1}{1+\frac{a}{2}}<1,\quad \forall n\geq N.$$
由此可见级数 (10) 收敛. 解答完毕.

5. 若正项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}x_n$ 收敛, 且数列 $\{x_n\}$ 单调下降, 证明 $\lim_{n\to+\infty}nx_n=0$.

证. 由假设级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}x_n$ 收敛, 利用 Cauchy 收敛准则可知对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得
$$0<\sum_{k=n+1}^{n+p}x_n<\varepsilon,\quad \forall n\geq N,\forall p\geq 1. \tag{11}$$
取 $p=n$ 并注意到 x_n 单调下降, 故
$$0<nx_{2n}\leq\sum_{k=n+1}^{2n}x_k<\varepsilon.$$
这表明 $\lim_{n\to+\infty}nx_{2n}=0$, 从而 $\lim_{n\to+\infty}2nx_{2n}=0$. 在式 (11) 中, 取 $p=n+1$, 我们有
$$0<(n+1)x_{2n+1}\leq\sum_{k=n+1}^{2n+1}x_k<\varepsilon.$$

这表明 $\lim_{n\to+\infty}(n+1)x_{2n+1}=0$. 由此进一步得到

$$\lim_{n\to+\infty}(2n+1)x_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2n+1}{n+1}\cdot(n+1)x_{2n+1}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}(n+1)x_{2n+1}=2\cdot 0=0$$

这就证明了$\lim_{n\to+\infty}nx_n=0$. 证毕.

6. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 为正项级数, 其部分和记作 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 收敛.

证 $\Rightarrow$: 设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛. 由于 $a_k>0$, $\forall k\geq 1$, 故 $S_n\geq a_1>0$, $\forall n\geq 1$, 从而 $\frac{a_n}{S_n}\leq\frac{a_n}{a_1}$, $\forall n\geq 1$. 于是

$$0<\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{S_n}\leq\frac{1}{a_1}\sum_{n=1}^{N}a_n<\frac{1}{a_1}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.$$

这表明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 的部分和序列有界, 从而收敛.

$\Leftarrow$: 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 收敛. 要证级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛. 反证. 假设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散, 即 $S_n\to+\infty$, 则

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\geq\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_{n+p}}=\frac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=\frac{1}{S_{n+p}}(S_{n+p}-S_n)=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}.$$

对任意固定的正整数 n, $S_{n+p}\to+\infty$, $p\to+\infty$. 故对于充分大的正整数 p, $0<\frac{S_n}{S_{n+p}}\leq\frac{1}{2}$, 于是

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\geq 1-\frac{S_n}{S_{n+p}}\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

根据 Cauchy 收敛准则可知, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散. 矛盾. 命题得证. □

7. 证明 (i) 对于任意收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, 存在一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$, 使得 $\frac{a_n}{b_n}\to 0$, $n\to+\infty$; (ii) 对于任意发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, 存在一个发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$, 使得 $\frac{b_n}{a_n}\to 0$, $n\to+\infty$.

注: (i) 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 为两个正项级数, 均收敛. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$. 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, 则 $S_n \to A$, $T_n \to B$. 当 $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ 时, 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A-S_n}{B-T_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k}{\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = 0.$$

故此时可以说, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛的速度, 比级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛的速度要慢. 例如级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 比级数 $\sum \frac{1}{n^3}$ 收敛得慢, 因为 $\frac{1/n^3}{1/n^2} = \frac{1}{n} \to 0$.

(ii) 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 为两个正项级数, 均发散. 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, 则 $S_n \to +\infty$, $T_n \to +\infty$. 当 $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ 时, 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{T_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{T_n - T_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

故此时可以说, 正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散的速度比 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散的速度要慢. 例如级数 $\sum \frac{1}{n\ln n}$ 比级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散得慢, 因为 $\frac{1/(n\ln n)}{1/n} = \frac{1}{\ln n} \to 0$.

(iii) 习题中的结论说明, 不存在收敛最慢的正项级数, 也不存在发散最慢的正项级数.

证 (i): 由假设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 故其余项 $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ 单调下降且收敛于零. 令 $b_n = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, 其中 $R_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. 于是

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{R_{n-1} - R_n}{\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}} = \sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n} \to 0.$$

另一方面, 正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛, 因为它的部分和为

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}\right) = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_N} \to \sqrt{R_0}, \quad N \to +\infty.$$

故结论(i)成立.

证 (ii): 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为正项级数, 发散. 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $b_n = \frac{a_n}{S_n}$, 则 $S_n \to +\infty$. 于是

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{S_n} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

由上一个习题的结论知, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散. 结论 (ii) 得证. □