概率论与数理统计

任课教师: 胡家信

清华大学数学科学系

2022 年 11 月 19 日

复习

- 随机变量X的拉氏变换

$$E\left(e^{-\lambda X}\right), \quad \lambda > 0.$$

- 随机变量X的矩母函数（见下面）

$$E\left(e^{\lambda X}\right), \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

- 随机变量X的特征函数

$$E\left(e^{i\lambda X}\right), \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

以上都是随机变量X变换后的期望，即分别是$e^{-\lambda X}$、$e^{\lambda X}$、$e^{i\lambda X}$的期望，他们均是变量λ的函数。实际中使用哪个，要看上面积分或级数是否存在。

复习

Bernoulli分布:

- 概率质量函数（或概率分布）:

$$\mathbb{P}(X=1)=p, \quad \mathbb{P}(X=0)=1-p.$$

- 期望和方差:

$$\mathbb{E}(X)=p, \quad \sigma^2(X)=\mathrm{Var}(X)=pq\text{（}q=1-p\text{）}.$$

- 生成函数:

$$g(z)=q+pz.$$

复习

二项式分布: 固定正整数n和$p \in [0, 1]$.

- 概率质量函数（或概率分布）:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

- 期望和方差:

$$\mathbb{E}(X) = np, \sigma^2(X) = npq.$$

- 生成函数:

$$g(z) = (q + pz)^n.$$

复习

Poisson分布: 固定$\alpha > 0$.

- 概率质量函数（或概率分布）：
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\alpha}}{k!}\alpha^k, \quad k = 0, 1, \cdots .$$
- 期望和方差：
$$\mathbb{E}(X) = \sigma^2(X) = \alpha.$$
- 生成函数：
$$g(z) = e^{\alpha(z-1)}.$$

复习

Poisson 极限定律:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k}=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}.$$

证明思想：令$b_k(n):=\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k}$。

- 先证明$\lim_{n\to\infty}b_0(n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n=e^{-\alpha}$。
- 再证明$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{k+1}(n)}{b_k(n)}=\frac{\alpha}{k+1}$，进而递推证明

$$\lim_{n\to\infty}b_k(n)=\frac{\alpha}{k}\lim_{n\to\infty}b_{k-1}(n)=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}.$$

Poisson 极限定律:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k}=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}.$$

证明方法2（直接证明）：

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\alpha^k}{n^k}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k}\\ &= \frac{\alpha^k}{k!}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-k}\\ &\to \frac{\alpha^k}{k!}\,e^{-\alpha}.\end{aligned}$$

证毕。

复习

Stirling 公式:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}=\sqrt{2\pi}.$$

即

$$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}=\left(ne^{-1}\right)^n\sqrt{2\pi n}.$$

今天主要内容

今天主要内容:

- Laplace 定理。
- 正态分布。
- 中心极限定理。

定理1：设$0 < p < 1$，$q = 1 - p$，$A > 0$，$|x_{nk}| \le A$，其中

$$x_{nk} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad 0 \le k \le n.$$

则当$n \to \infty$，下列极限成立

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x_{nk}^2/2}.$$

（这是利用Stirling公式微积分问题）。

证：由于$k = np + \sqrt{npq}x_{nk}$，$n - k = nq - \sqrt{npq}x_{nk}$，得到

$$k \sim np, n - k \sim nq.$$

由Stirling公式

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}\\ &\sim \frac{\left(ne^{-1}\right)^n \sqrt{2\pi n}p^k q^{n-k}}{\left(ke^{-1}\right)^k \sqrt{2\pi k}\left((n-k)e^{-1}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)}}\\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\varphi(n,k) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi npq}}\varphi(n,k),\end{aligned}$$

这里注意$k \sim np$，其中,

$$\varphi(n,k) = \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}.$$

利用Taylor展开式估计$\varphi(n,k)$:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

定理1

$$\log\left(\frac{np}{k}\right)^k = k\log\left(1-\frac{\sqrt{npq}x_{nk}}{k}\right) = k\left(-\frac{\sqrt{npq}x_{nk}}{k} - \frac{npqx_{nk}^2}{2k^2} - \cdots\right),$$

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} &= (n-k)\log\left(1+\frac{\sqrt{npq}x_{nk}}{n-k}\right)\\ &= (n-k)\left(\frac{\sqrt{npq}x_{nk}}{n-k} - \frac{npqx_{nk}^2}{2(n-k)^2} + \cdots\right),\end{aligned}$$

只要下列条件满足

$$\left|\frac{\sqrt{npq}x_{nk}}{k}\right| < 1, \quad \left|\frac{\sqrt{npq}x_{nk}}{n-k}\right| < 1.$$

但$|x_{nk}| \le A$一致有界，且$k \sim np$，所以该条件对充分大n成立。

上面两式相加得,

$$\log\varphi(n,k)=\log\left(\frac{np}{k}\right)^k+\log\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}\sim-\frac{npqx_{nk}^2}{2k}-\frac{npqx_{nk}^2}{2(n-k)}$$
$$\sim-\frac{n^2pqx_{nk}^2}{2k(n-k)}\sim-\frac{x_{nk}^2}{2},$$

所以得

$$\varphi(n,k)\sim e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}}.$$

证毕.

De Moivre-Laplace 定理

定理：设掷硬币正面出现的概率为$0 < p < 1$，反面出现的概率为q，S_n表示掷n次硬币正面出现的次数，则对任意实数$-\infty < a < b < +\infty$，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

证：令$x_k = x_{nk} = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$如上，则左边概率为

$$\sum_{a<x_{nk}\leq b} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{a<x_{nk}\leq b} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

由前一个定理知:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x_k^2}{2}}.$$

De Moivre-Laplace 定理（续）

注意到

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

故有

$$\sum_{a<x_{nk}\le b} \mathbb{P}(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{a<x_k\le b} e^{-\frac{x_k^2}{2}} (x_{k+1} - x_k)$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \text{ (为什么?)}$$

证毕。

密度函数为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\quad -\infty<x<+\infty,$$

的分布称为**正态分布**，其分布函数为

$$\Phi(x):=\mathbb{P}(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt.$$

正态分布也称为**Gauss分布**，或**Laplace-Gauss分布**, 等等。验证一下:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt=1.$$

正态分布（续）

密度函数$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ 满足下列性质:

- **对称性：**$\varphi(-x) = \varphi(x)$，即为偶函数。验证

$$2\Phi(x) - 1 = \Phi(x) - \Phi(-x) = \int_{-x}^{x} \varphi(t)dt.$$

事实上，

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int_{-x}^{\infty} \varphi(t)dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 1,$$

$$2\Phi(x) - 1 = \int_{-x}^{\infty} \varphi(t)dt + \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt - 1 = \int_{-x}^{x} \varphi(t)dt.$$

正态分布（续）

- **无穷可微性**: 各阶导数$\varphi^{(k)}(x)$存在。验证: 对任何$x > 0$,

$$1 - \Phi(x) = \int_x^{\infty} \varphi(u)du \leq \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x}.$$

- **总质量为1**：$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$.

正态分布（续）

课堂练习： **(1).** 计算其力矩生成函数(moment-generating function)或矩母函数:

$$M(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta u} \varphi(u) du.$$

(2). 计算其力矩:

$$m^{(n)} = \mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} u^n \varphi(u) du, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

答案： **(1).**$M(\theta)=\mathbb{E}(e^{\theta X})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta u}\varphi(u)du=e^{\theta^2/2}$。事实上，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\theta X}) &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta u}\varphi(u)du=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta u}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta u-\frac{u^2}{2}}du \quad \text{（利用}\theta u-\frac{u^2}{2}=-\frac{1}{2}(u-\theta)^2+\frac{\theta^2}{2}\text{）} \\
&= \frac{e^{\theta^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(u-\theta)^2}du \quad \text{（令}x=u-\theta\text{）} \\
&= \frac{e^{\theta^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\
&= e^{\theta^2/2}.
\end{aligned}
$$

（这是纯粹微积分计算）

正态分布（续）

答案： **(2).** 力矩: $m^{(2n-1)} = 0, \quad m^{(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$。 事实上，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^{2n-1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = 0 \text{（因为被积函数是奇函数）} \\
\mathbb{E}(X^{2n}) &= \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u^{2n} e^{-u^2/2} du \text{（作变换} u = \sqrt{2x}\text{）} \\
&= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^{n-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma(n + \frac{1}{2}) \\
&= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \cdot (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \cdots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) \quad \text{用公式} \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) \\
&= 2^n (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \cdots \frac{1}{2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.
\end{aligned}$$

正态分布（续）

定义：对任意实数m和任意$\sigma > 0$，称随机变量X具有**正态分布**$N(m, \sigma^2)$，如果**变形的随机变量**

$$X^* = \frac{X - m}{\sigma}$$

服从单位正态分布，即具有分布函数Φ:

$$\Phi(x) := \mathbb{P}(X^* \le x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

当$m = 0, \sigma = 1$时，$X^* = X$是原来的**单位正态分布**。

X的密度函数为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

正态分布（续）

事实上，X的分布函数为

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}\left(X^* \le \frac{x-m}{\sigma}\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \varphi(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-u^2/2}du,$$

求F的一阶导数：

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), -\infty < x < \infty.$$

此为X的密度函数，得证。

现计算X的**矩母函数**：

$$M_X(\theta) = \mathbb{E}\left(e^{\theta X}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\theta(m+\sigma X^*)}\right) = e^{m\theta}\mathbb{E}\left(e^{(\theta\sigma)X^*}\right)$$
$$= e^{m\theta}M(\sigma\theta) = e^{m\theta+\sigma^2\theta^2/2}.$$

正态分布（续）

定理：设随机变量X_j独立，具有正态分布$N(m_j, \sigma_j^2)$，则

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

具有正态分布$N(m_1 + \cdots + m_n, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)$.

证明：仅考虑情况$n = 2$。由独立性，

$$\begin{aligned} M_{X_1+X_2}(\theta) &= M_{X_1}(\theta) M_{X_2}(\theta) = e^{m_1\theta + \sigma_1^2\theta^2/2} e^{m_2\theta + \sigma_2^2\theta^2/2} \\ &= e^{(m_1+m_2)\theta + (\sigma_1^2+\sigma_2^2)\theta^2/2} \end{aligned}$$

和正态分布$N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$的力矩生成函数一样，再由唯一性得证（**即若两随机变量的力矩生成函数一样，则它们的概率分布相同**）。

设X_j是独立的Bernoulli随机变量，令

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n \geq 1.$$

知$\mathbb{E}(X_j) = p, \sigma^2(X_j) = pq$，且$\mathbb{E}(S_n) = np, \sigma^2(S_n) = npq$。令

$$X_j^* = \frac{X_j - \mathbb{E}(X_j)}{\sigma(X_j)}; \quad S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j^*.$$

则

$$\mathbb{E}(X_j^*) = 0, \quad \sigma(X_j^*) = 1,$$
$$\mathbb{E}(S_n^*) = 0, \quad \sigma(S_n^*) = 1.$$

易知

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = k) &= \mathbb{P}(S_n^* = x_{nk}) = \mathbb{P}\left(S_n^* = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) \\ &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.\end{aligned}$$

令$\mathbb{P}(S_n^* \le x) = F_n(x)$。由De Moivre-Laplace定理

$$\lim_{n\to\infty} (F_n(b) - F_n(a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt.$$

更一般，设$\{X_j, j \ge 1\}$是独立的具有相同分布的随机变量（不一定是**Bernoulli**分布）。令$\mathbb{E}(X_j) = m, \sigma^2(X_j) = \sigma^2$, 其中$0 < \sigma < \infty$。

中心极限定理（续）

设S_n, S_n^*如前，即

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}.$$

知

$$\mathbb{E}(S_n) = nm, \sigma^2(S_n) = n\sigma^2.$$

同样，令

$$X_j^* = \frac{X_j - \mathbb{E}(X_j)}{\sigma(X_j)}; \quad S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j^*.$$

则一样成立下列式子：

$$\mathbb{E}(X_j^*) = 0, \quad \sigma\left(X_j^*\right) = 1,$$
$$\mathbb{E}(S_n^*) = 0, \quad \sigma\left(S_n^*\right) = 1.$$

定理（中心极限）：设S_n, m, σ^2 **如上，则对任意实数** $-\infty < a < b < +\infty$**，**

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

证： 先证一个引理和一个定理。

引理1： 设随机变量X满足$E(X)=0, \sigma^2(X)=1$，则特征函数h满足

$$h(\theta)=1-\frac{\theta^2}{2}(1+\varepsilon(\theta))$$

其中$\lim_{\theta\to 0}\varepsilon(\theta)=0$.（这是纯微积分问题。）

证： 由Taylor展开知

$$h(\theta)=h(0)+h'(0)\theta+\frac{h''(0)}{2}\theta^2(1+\varepsilon(\theta)).$$

但$h(\theta)=\mathbb{E}(e^{i\theta X})$，形式微分

$$h'(\theta)=\mathbb{E}(e^{i\theta X}iX), \quad h''(\theta)=\mathbb{E}(e^{i\theta X}(iX)^2).$$

$$h'(0)=0, \quad h''(0)=-1.$$ 代入。证毕。

定理

定理：设$\psi_n(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta S_n^*})$是$S_n^*$的特征函数，且对每个$\theta$,

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(\theta) = e^{-\theta^2/2},$$

即随机变量S_n^*的特征函数$\psi_n(\theta)$收敛到**单位正态分布的特征函数**$e^{-\theta^2/2}$，则对每个实数x,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n^* \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du = \Phi(x),$$

即随机变量S_n^*的分布函数$F_n(x) = \mathbb{P}(S_n^* \le x)$收敛到**单位正态的分布函数**。

证明见钟书**p.235**（略）。

此定理说明：**若随机变量$\{Y_n\}$的特征函数收敛单位正态的特征函数，则$\{Y_n\}$的分布函数也同样收敛到单位正态的分布函数**。

中心极限定理的证明

证：考虑S_n^*的特征函数，并利用有独立性:

$$\mathbb{E}\left(e^{i\theta S_n^*}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\theta(X_1^*+\cdots+X_n^*)/\sqrt{n}}\right) = h^n(\theta/\sqrt{n}),$$

其中h为X_1^*的特征函数。由引理，当$n\to\infty$，

$$h^n(\theta/\sqrt{n}) = \left(1-\frac{\theta^2}{2n}(1+\varepsilon(\theta/\sqrt{n}))\right)^n \to e^{-\theta^2/2},$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(e^{i\theta S_n^*}\right) = e^{-\theta^2/2}$$

此极限函数和单位正态分布的特征函数一样。再利用前面定理，其对应的分布函数F_n收敛到单位正态分布的分布函数Φ。证毕。

中心极限定理（续）

中心极限定理可写成

$$\mathbb{P}\left(x_1\sigma\sqrt{n} < S_n - mn < x_2\sigma\sqrt{n}\right) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

或者（令$x_2 = x, x_1 = -x$）

$$\mathbb{P}\left(|S_n - mn| < x\sigma\sqrt{n}\right) \approx \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1.$$

例子

例题：检测仪器的精确性有误差，误差是随机变量，设服从$[-1,1]$均匀分布。取n次检测值的平均值，问其与精确值相差δ的概率是多少？

- 知道：n次检测值
- 不知道：精确值
- 目的：想通过检测知道精确值，但每次检测有误差，检测值可能不一样。

解答

解：设精确值为m，检测值为$X_j, 1 \le j \le n$, 误差值为ξ_j，则$X_j = m + \xi_j$。误差值ξ_j的密度函数为$f(u) = \frac{1}{2}, -1 \le u \le 1$。故

$$\mathbb{E}(\xi_j) = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2} dx = 0, \quad \sigma^2(\xi_j) = \mathbb{E}(\xi_j^2) = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{3}.$$

于是，$\mathbb{E}(X_j) = m, \quad \sigma^2(X_j) = \frac{1}{3}$。要计算$\mathbb{P}\left(|S_n/n - m| < \delta\right)$。

由中心极限定理，该概率等于

$$\begin{aligned} P\left(|S_n/n - m| < \delta\right) &= \mathbb{P}\left(|(S_n - mn)/\sqrt{n/3}| < \delta\sqrt{3n}\right) \\ &\approx 2\Phi(\delta\sqrt{3n}) - 1. \end{aligned}$$

解答

例如，$n = 25, \delta = 1/5$，回忆函数

$$\Phi(x) := \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

于是，

$$2\Phi(\delta\sqrt{3n}) - 1 \approx 2\Phi(1.73) - 1 = 2 * 0.95818 - 1 \approx 0.92,$$

这里计算（或查表）

$$\Phi(1.73) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1.73} e^{-t^2/2} dt \approx 0.95818.$$

解毕。

P. 200, 第38题：Let $S_n = T_1 + \cdots + T_n$, where the T_j's are independent random variables all having the density $\lambda e^{-\lambda t}$. Find the Laplace transform of S_n, and identify the distribution of S_n.（关键点：求出S_n的密度函数）

解：事实上，

- 每个随机变量T_j的Laplace 变换为: 对任意$\mu \geq 0$,

$$\mathbb{E}(e^{-\mu T_j}) = \int_0^\infty e^{-\mu t}\{\lambda e^{-\lambda t}\}dt = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

- 利用独立性，S_n的Laplace 变换为

$$\mathbb{E}(e^{-\mu S_n}) = \mathbb{E}(e^{-\mu(T_1+\cdots+T_n)}) = \mathbb{E}(e^{-\mu T_1})\cdots\mathbb{E}(e^{-\mu T_n}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n.$$

- 另一方面，若S_n的密度函数为f，则

$$\mathbb{E}(e^{-\mu S_n}) = \int_0^\infty e^{-\mu t} f(t) dt \quad \text{而}$$
$$\mu^{-n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\mu t} dt \quad \forall \mu > 0.$$

故得, $\forall \mu > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} f(t) dt = \mathbb{E}(e^{-\mu S_n}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\lambda+\mu)t} dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-\mu t} \left\{\frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}\right\} dt$$

由Laplace 变换的惟一性（**见下面**）知，$f(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}$。

- 最后，S_n的分布为

$$\mathbb{P}(a < S_n < b) = \int_a^b f(t)dt = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_a^b t^{n-1}e^{-\lambda t}dt.$$

解毕。

Laplace 变换的惟一性：若f, g满足某种增长性条件（如不超过指数增长），且它们的**Laplace**变换相同，即

$$\int_0^\infty e^{-\mu t}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-\mu t}g(t)dt, \quad \forall \mu > 0,$$

则$f = g$.

题目讲解（另一种解法）：P. 197, 第24题

题目：电子元件的使用寿命服从指数密度$\lambda e^{-\lambda t}$（单位：小时），已知电子元件已经使用了n个小时，问还可以平均使用多长时间？（此题求条件期望）

解：若X为取非负值的连续随机变量，则

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq u)du.$$

上次答案：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T|T > n) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T > n + t|T > n)dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda},\end{aligned}$$

其中$\mathbb{P}(T > t) = \int_t^\infty f(u)du = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda u}du = e^{-\lambda t}$。

题目讲解（另一种解法）

解法二：设T表示电子元件的使用寿命，是一个随机变量，密度函数为$f(u) = \lambda e^{-\lambda u}, u > 0$。令

$$X = \begin{cases} n, & T \leq n, \\ n + T, & T > n, \end{cases}$$

它表示已经使用了n个小时的电子元件的使用寿命，也是一个随机变量，且$P(X < n) = 0$。欲求

$$\mathbb{E}(X) - n,$$

即欲求电子元件**再可以平均使用多长时间**。事实上，

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq u)du = \int_0^n \mathbb{P}(X \geq u)du + \int_n^\infty \mathbb{P}(X \geq u)du.$$

题目讲解（另一种解法）

现分别计算上述两项。**第一项**

$$\int_0^n \mathbb{P}(X \geq u)du = \int_0^n (1 - \mathbb{P}(X < u))du = \int_0^n (1-0)du = n,$$

因为当$u \leq n$时，$\mathbb{P}(X < u) \leq \mathbb{P}(X < n) = 0$。同时，**第二项**

$$\begin{aligned}\int_n^\infty \mathbb{P}(X &\geq u)du = \int_n^\infty \mathbb{P}(n+T \geq u)du = \int_n^\infty \mathbb{P}(T \geq u-n)du \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T \geq t)du \text{（做变换}t = u-n\text{）} \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}du = \frac{1}{\lambda},\end{aligned}$$

这里用到当$u \geq n$时，由X的定义，$X = n + T$，故

$$\mathbb{P}(X \geq u) = \mathbb{P}(n + T \geq u).$$

题目讲解（另一种解法）

从而，

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^n \mathbb{P}(X \geq u)du + \int_n^\infty \mathbb{P}(X \geq u)du = n + \frac{1}{\lambda}.$$

所以，电子元件再可以平均使用

$$\mathbb{E}(X) - n = n + \frac{1}{\lambda} - n = \frac{1}{\lambda} \text{（小时）。}$$

解毕。

课后思考题：求随机变量X的**密度函数**？

作业

第9次作业（钟书）

P. 247-248：第10，12，13，15，16, 17题.

下周采用雨课堂教学模式，请携带手机

预习内容：各种分布（**3S**书第**108-150**页）