

电磁场数值计算

邢庆子

Tel: 62781684(o), 13661226717

E-mail: xqz@tsinghua.edu.cn

清华大学工物系加速器实验室 刘卿楼309



本节内容

第 4 章 积分方程法

4.1 电流场量的积分方程

4.2 积分方程法的物理概念和基本公式

4.5 轴对称静电场计算的电荷密度法



引言

● 积分方程法的发展

- 1) 微分方程法对某些问题的解，需要内存多，计算精度难于提高；
- 2) 与此同时，一些从事解析方法和均匀磁化法磁场计算的研究人员，从微分方程法的离散概念中吸取有用经验，将源区进行离散，发展成积分方程法，代表程序有 **GFUN**（可计算二维、三维场）、**BIM**等程序。



- 积分方程法的应用：

- 求解区域内介质数目少，交界面形状不特别复杂的情况。
- 不需要对全部求解区域划分网格，只需对有源区和感应（或极化）产生的“第二次源”区划分网格，节点数大大减少，系数矩阵阶数比有限元（或差分法）的系数矩阵阶数低得多，在求解时计算时间短、费用低。

本章只做概念性介绍。



4.1 电流场量的积分方程

本节内容自学。

积分方程法用于求解平行平面场、轴对称场情况，加深对积分方程法的理解。

4.1.1 毕奥-萨伐定律

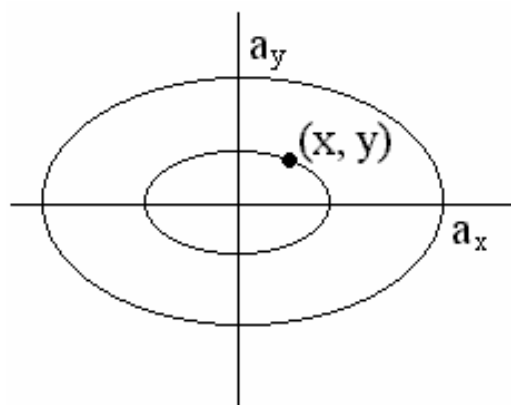
4.1.2 平行平面场载流导体产生的矢量磁位

4.1.3 轴对称场电流源产生的磁场

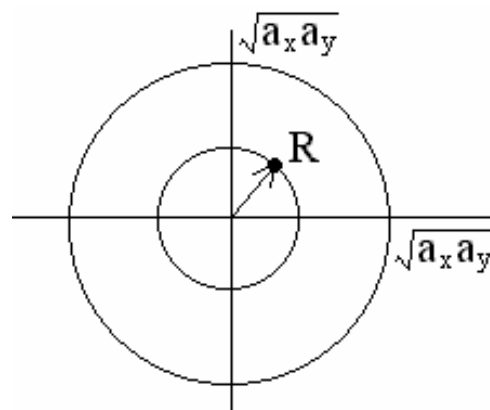


4.1 电流场量的积分方程

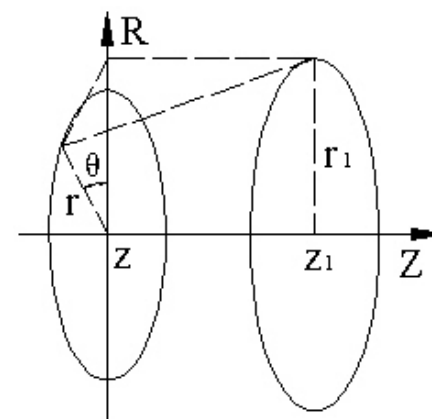
补充：带电荷(椭)圆环产生的电场的求解？



(a) 带电荷的椭圆环
(坐标变换前)



(b) 带电荷的圆环
(坐标变换后)



(c) 求(r, z)处电荷环在(r1, z1)处产生的电势示意图

可推导出带电荷圆环在 (r_1, z_1) 处产生的电场分别为：

$$\begin{cases} E_r(r_1, z_1) = \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0} \cdot \frac{1}{2r_1 \sqrt{d^2 + b}} \left[K(k) - \frac{E(k)}{d^2 + c} (r^2 - r_1^2 + d^2) \right] \\ E_z(r_1, z_1) = \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0} \cdot \frac{d}{(d^2 + b)^{1/2}} \cdot \frac{E(k)}{d^2 + c} \end{cases}$$

$K(k)$: 第一类完全椭圆积分
 $E(k)$: 第二类完全椭圆积分

其中：

$$b = (r_1 + r)^2, \quad c = (r_1 - r)^2, \quad d = z_1 - z, \quad k = \sqrt{\frac{4rr_1}{d^2 + b}}, \quad Q \text{ 为圆环所带电荷量。}$$



4.2 积分方程法的物理概念和基本公式

- 积分方程法从宏观的角度来描述场，场区中每点的值仅取决于所有场源对它的影响。场点和源点的联系是通过毕奥—萨伐定律实现。
- 离散只在源区和铁区内进行，使得数据输入和网格剖分大为简化。



4.2 积分方程法的物理概念和基本公式

- 磁场积分方程法主要采取的方法：
 - (1) 磁化值直接解法；
 - (2) 标量磁位的边界积分法 —— 边界元法。

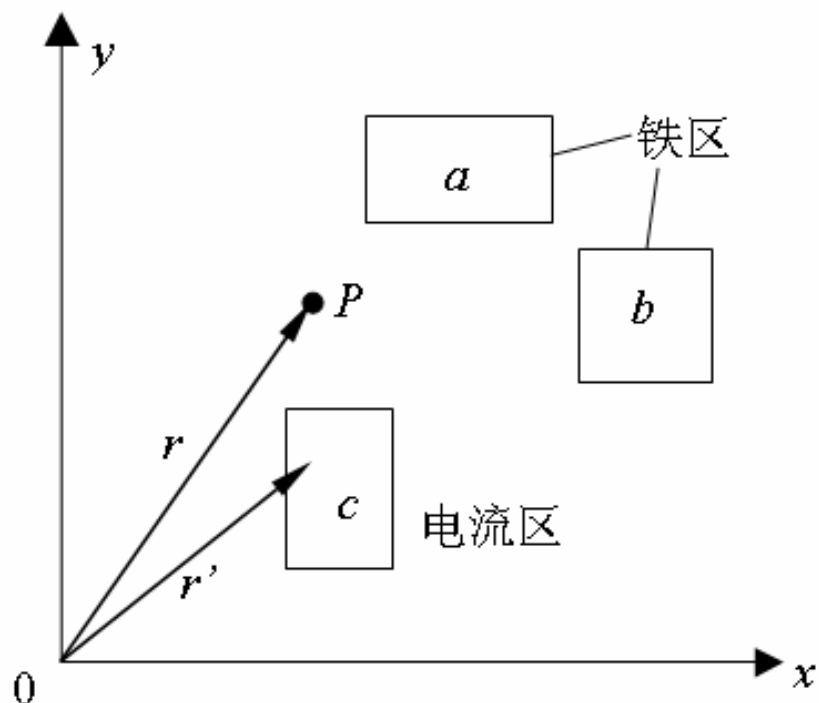


4.2 积分方程法的物理概念和基本公式

● 磁化值直接解法

4.2.1 积分方程法物理概念

基本思想：认为在空间任一点的场是由电流源所产生的磁场和介质被磁化所产生的磁场迭加而成：



$$\mathbf{H}(r) = \mathbf{H}_m(r) + \mathbf{H}_c(r')$$

下标为 m 的量表示由磁介质磁化所产生的磁场。 c 表示电流源产生的磁场。

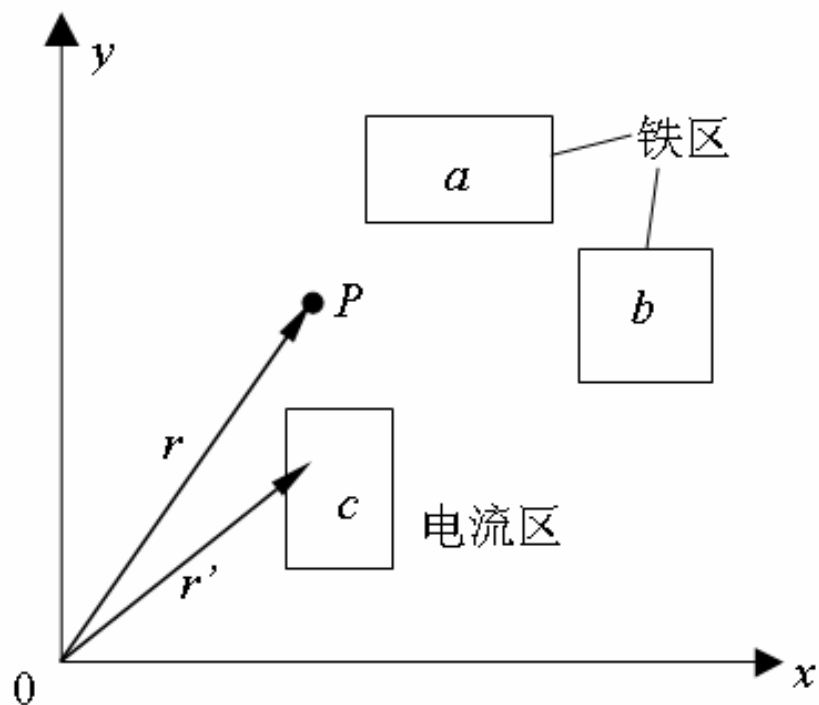


4.2 积分方程法的物理概念和基本公式

4.2.2 基本公式

关键问题是求出产生磁场的源在所求场点的场强表达式。

a) 电流源 c 在空间 r 处所产生的磁场



根据毕奥—萨伐定律，对二维平面场和轴对称场，讲义中已经给出了推导。因此导线电流在 P 点产生的场量可认为是已知量。

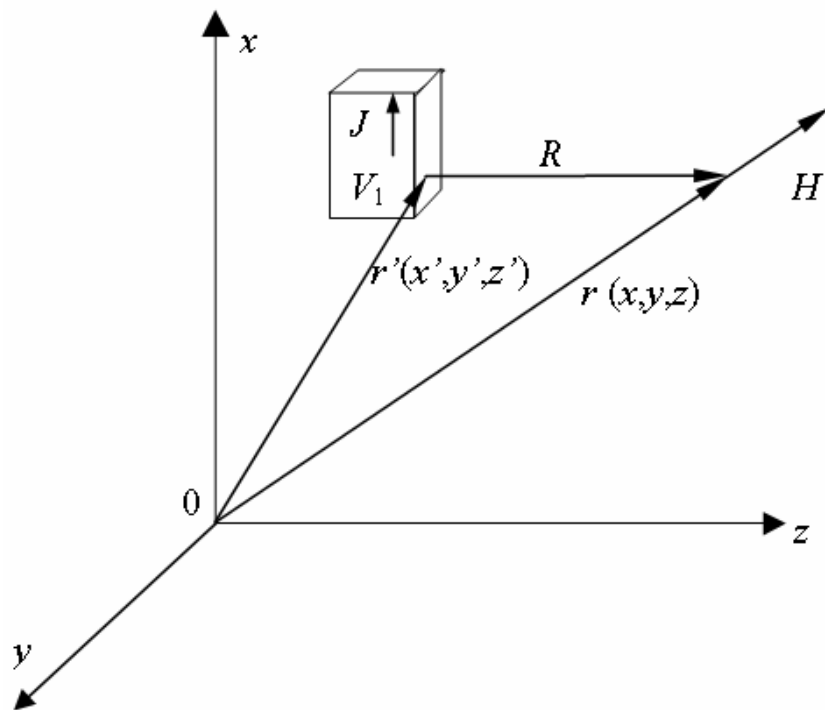


4.2 积分方程法的物理概念和基本公式

毕奥—萨伐定律如何得出？

泊松方程 $\nabla^2 A = -\mu_0 J$ 的特解为：

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J(r')}{|r - r'|} dV'$$



r : 场点坐标矢量;

r' : 源点坐标矢量;

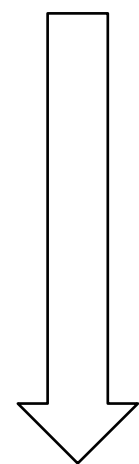
$R = r - r'$:

其方向由源点指向场点。



4.2 积分方程法的物理概念和基本公式

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] = -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \nabla \left| \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right| = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$



4.2 积分方程法的物理概念和基本公式

b) 磁介质在场点所产生的磁场

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\mathbf{M} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} dV' \\ &= C_{rr'} \mathbf{M} \end{aligned}$$

此公式利用矢量磁位与磁矩概念可以导出，推导过程略。

利用此公式可以求出磁介质在空间所产生的磁场分布，但须先知道磁化强度 \mathbf{M} 。实际上一一般 \mathbf{M} 是未知的，因此只有采用先假设的方法，把磁介质剖分为许多单元。



4.2 积分方程法的物理概念和基本公式

- I. 假设磁化体单元 a 的磁化强度为 M_a ，并为常数，同样 b 单元中磁化强度为 M_b ，也为常数。
- II. 取源点为 b ，场点为 a ，单元内 M 看成常数，可从积分中提出。剩下的积分参数只与单元几何形状、场点位置有关，在确定位置情况下，积分为常数，用 C_{ab} 表示：

$$\begin{aligned} H_m(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\mathbf{M} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} dV' \\ &= C_{rr'} \mathbf{M} \\ &= C_{ab} \mathbf{M} \end{aligned}$$



4.2 积分方程法的物理概念和基本公式

III. 对所有的场源写出联立方程组：

$$\begin{cases} \mathbf{H}_a = \mathbf{H}_{ac} + C_{aa}\mathbf{M}_a + C_{ab}\mathbf{M}_b \\ \mathbf{H}_b = \mathbf{H}_{bc} + C_{ba}\mathbf{M}_a + C_{bb}\mathbf{M}_b \end{cases}$$

$$\text{又 } \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{H} = \chi \mathbf{H} \quad (\text{各向同性媒质})$$

代入上式得

$$\begin{cases} (C_{aa}\chi_a - 1)\mathbf{H}_a + C_{ab}\chi_b\mathbf{H}_b = -\mathbf{H}_{ac} \\ C_{ba}\chi_a\mathbf{H}_a + (C_{bb}\chi_b - 1)\mathbf{H}_b = -\mathbf{H}_{bc} \end{cases}$$

得到含有 6 个方程的联立方程组。



4.2 积分方程法的物理概念和基本公式

$$\begin{cases} (C_{aa}\chi_a - 1)\mathbf{H}_a + C_{ab}\chi_b\mathbf{H}_b = -\mathbf{H}_{ac} \\ C_{ba}\chi_a\mathbf{H}_a + (C_{bb}\chi_b - 1)\mathbf{H}_b = -\mathbf{H}_{bc} \end{cases}$$

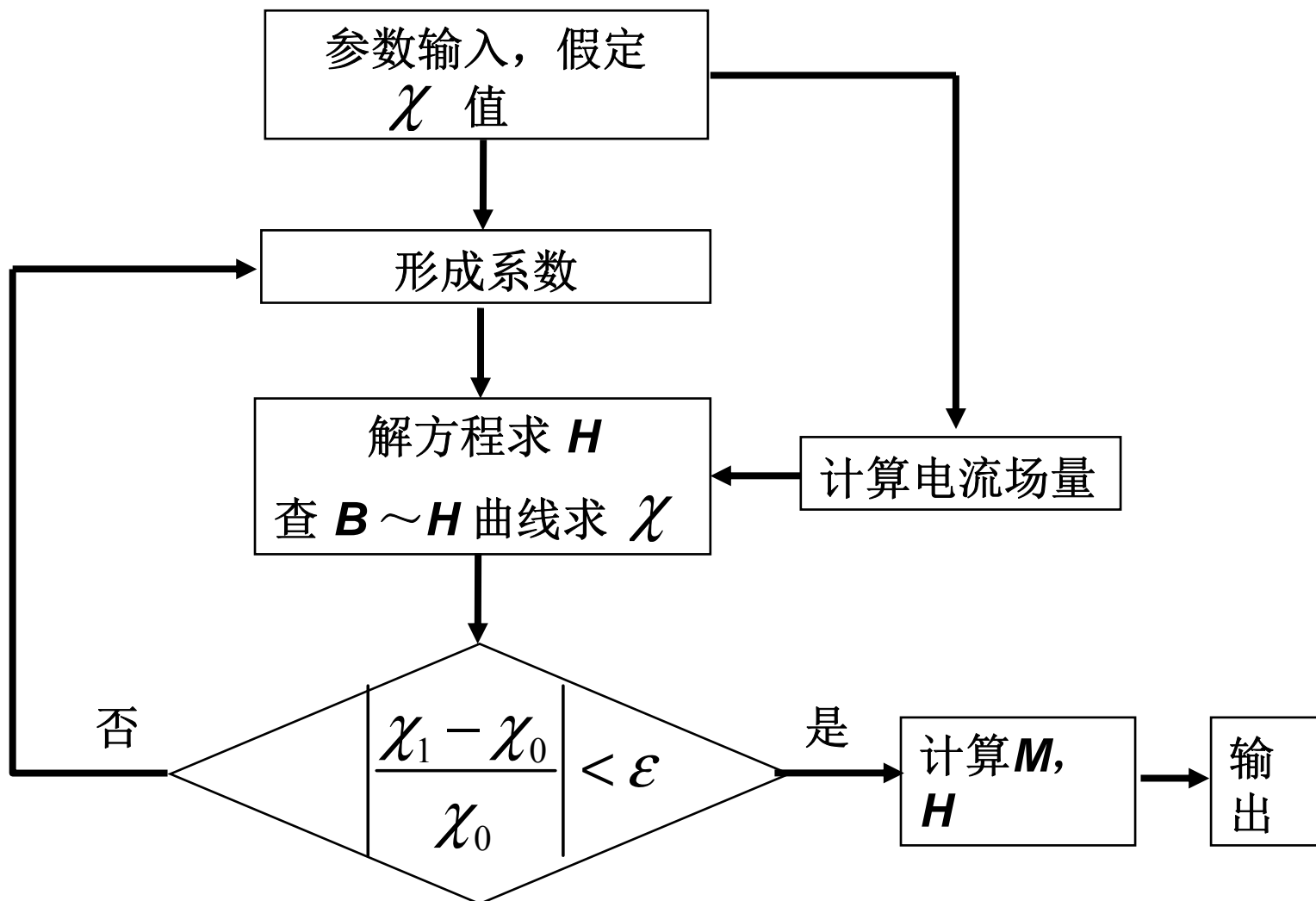
若磁化率 χ_a 和 χ_b 是已知的，可写成六个线性方程，有六个未知数： H_{ax} ， H_{ay} ， H_{az} ， H_{bx} ， H_{by} ， H_{bz} 。

但实际上 χ_a 和 χ_b 不是常数，要经过反复迭代进行求解。



4.2 积分方程法的物理概念和基本公式

IV. 计算框图:





4.2 积分方程法的物理概念和基本公式

4.2.3 积分方程法的特点

- 1) 离散区域：只需对电流源和磁性介质进行离散；
- 2) 不需要考虑边界条件；
- 3) 使用局限：系数矩阵是满矩阵，离散单元数受到限制，故此法对有限小的无源区的封闭边界问题或饱和情况较复杂的铁区不适用。
- 4) 计算时间较长：离散铁区与场点的耦合系数以积分形式表示，二维场是二重积分，三维场是三重积分，虽然可以用格林定理、高斯定理和椭圆函数等数学手段加以简化，但简化后的结果通常仍需要较复杂的数学运算。



● 积分方程法与微分方程法（有限元及有限差分法）的比较

	积分法	微分法
基本原理	Maxwell方程+媒质特性方程	同左
处理问题 方法	从宏观角度描述磁场特性	研究场域内各点的具体特点
边界条件	不需要处理边界条件	需要处理边界条件
离散区域	电流区和铁区	整个区域（包括边界在内）
网格划分	有限多个	单元较多，复杂，需自动划分



4.6 积分方程法与微分方程法的比较

	积分法	微分法
方程组	系数矩阵是满秩矩阵	系数矩阵是稀疏矩阵
计算方法	多用高斯消元法，计算时间与 $(3N)^3$ 成比例	多用迭代法，计算时间与 $(3N)^2$ 成比例
计算精度	三维场可达百分之一 二维场可达千分之一	二维场可达万分之一
应用范围	(1) 大气隙、开放式磁铁； (2) 永久磁铁。	(1) 饱和差异大，间隙小的磁铁； (2) 具有比较规则的场； (3) 计算边界条件一定的场。



4.5 轴对称静电场计算的电荷密度法

4.5.1 概述

- 电荷密度法从库仑定律出发，最适用于求解开放性边界的问题。
- 与有限差分法、有限元法不同，电荷密度法只对边界进行离散化处理，并不在整个区域进行剖分，所以又被称为边界元素法（**Boundary Element Method**）。
- 电子光学系统中一般只要求求解轴上及近轴区的场分布，适合于使用电荷密度法求解。



4.5 轴对称静电场计算的电荷密度法

电子光学：

是研究电子在电磁场中聚焦、成像、偏转等规律的一门科学，以经典力学、经典电动力学和光学作为理论基础，依据电子在电磁场中的运动和光在光学媒质中传播之间的相似性，采用类似于光学的概念和方法，建立的电子光学。其侧重点不在于粒子的能量变化，而在于约束粒子的轨迹。

关于电子光学的参考书目：

- 陈文雄，西门纪业： 《电子光学基础》，北京大学出版社，1986
- 刘祖平： 《束流光学》，中国科学技术大学出版社，2005
- 应根裕 等： 《电子光学》，清华大学出版社，1984



4.5 轴对称静电场计算的电荷密度法

- 电荷密度法求解一个三维区域的电磁场分布时，只对该区域的边界面进行剖分；对一个二维区域求解电磁场分布时，只对该区域的边界线进行剖分，这样能降低方程维数，简化问题。

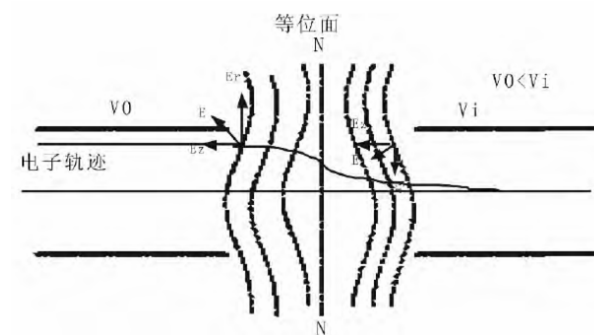
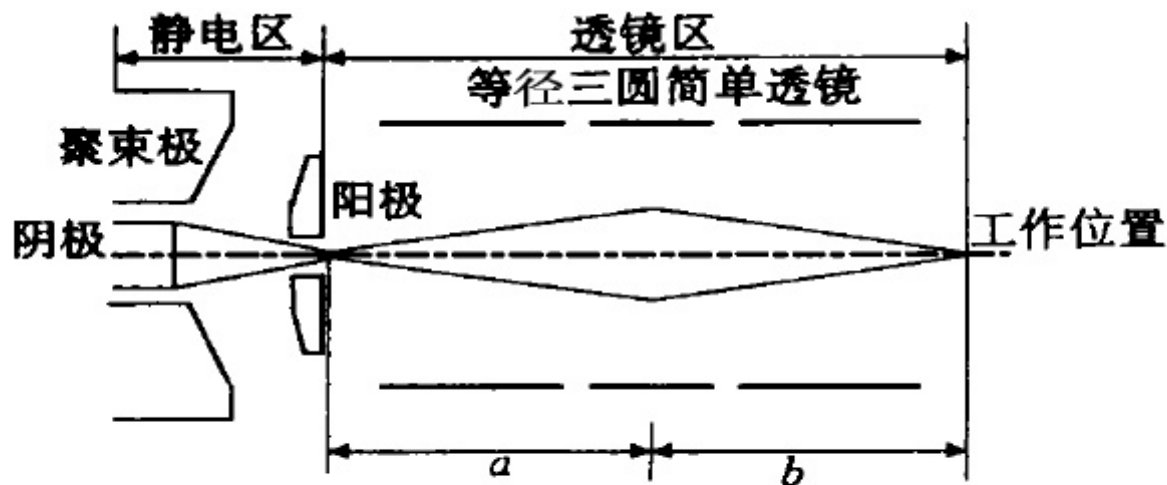


图1 用等径三圆简单透镜作主透镜的电子束焊枪原理图

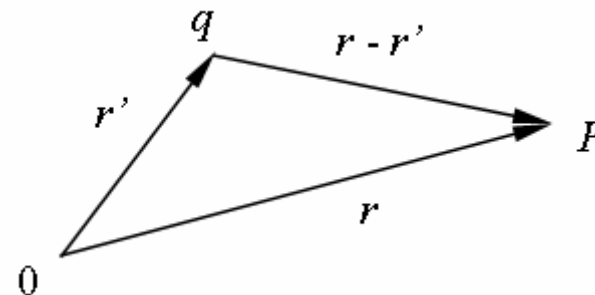


4.5 轴对称静电场计算的电荷密度法

4.5.2 电荷密度法计算静电场的基本原理及公式

库仑定律:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$



对点电荷、线电荷、面电荷和体电荷均适用:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{s'} \frac{\rho_s dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$



4.5 轴对称静电场计算的电荷密度法

- 若同时存在 N 个充满电荷的各种源，它们在空间任意一点 P 处产生的电位，应该是各个子源在 P 点产生的电位之和，即

$$\Phi(r) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(r)$$

- 只要知道空间电荷分布，就可利用库仑定律和场的叠加原理，求出空间电位分布，而且这种分布是唯一的。

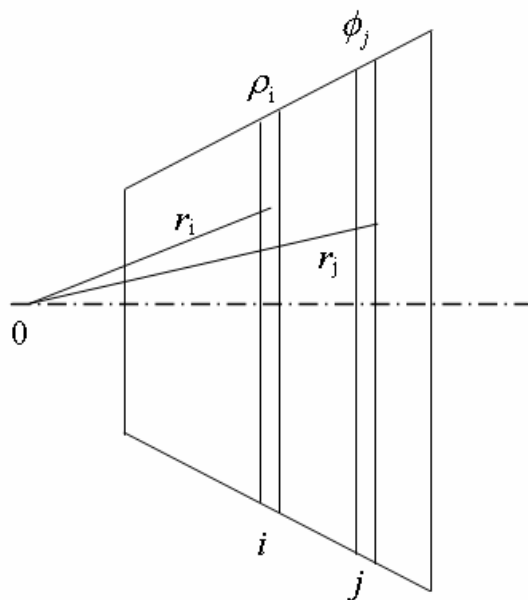


4.5 轴对称静电场计算的电荷密度法

环 i 上电荷在环 j 上产生电位为:
$$\Phi_{ji} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_i} \frac{\rho_i(\mathbf{r}_i) dS_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

所有子环在 j 环上产生电位为:
$$\Phi_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \frac{\rho_i(\mathbf{r}_i) dS_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

式中 N 为剖分总环数。若令
$$A_{ji} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_i} \frac{dS_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$



A_{ji} 是仅与电极结构及位置有关的几何参数（求 A_{ji} 归结为求椭圆积分）。则

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^N A_{ji} \rho_i$$



4.5 轴对称静电场计算的电荷密度法

求每个环上电位，可得到关于 ρ_i 的线性方程组：

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^N A_{ji} \rho_i$$

解这个方程组则可求出每个环上电荷密度 ρ_i 的分布，下步就可求出空间任意点的电位分布。（可由积分形式的泊松方程求解）



4.5 轴对称静电场计算的电荷密度法

4.5.4 奇异点的处理

在系数矩阵计算中会出现奇异点，在这些点处，被积函数出现断点。

1) 当 r_i 靠近电极端面时，曲率半径小的地方电荷分布多：

$$\rho_i(r_i) \rightarrow \infty$$

处理方法：

- ① 采用不均匀划分子区域办法。
- ② 仍采用均匀划分区域，但区域里电荷密度不再是常量，可看作是连续变化函数：

$$\rho_s = f(t) = a_0 + a_1 t$$



4.5 轴对称静电场计算的电荷密度法

- 2) 第二类奇异点发生在 $i=j$ 情况，即计算小环本身处电荷对电位分布的贡献。在求系数矩阵中 A_{ii} 时，要作特殊处理。

在参考文献4中，求解 A_{ii} 归结为一个旁义积分，旁义积分收敛为：

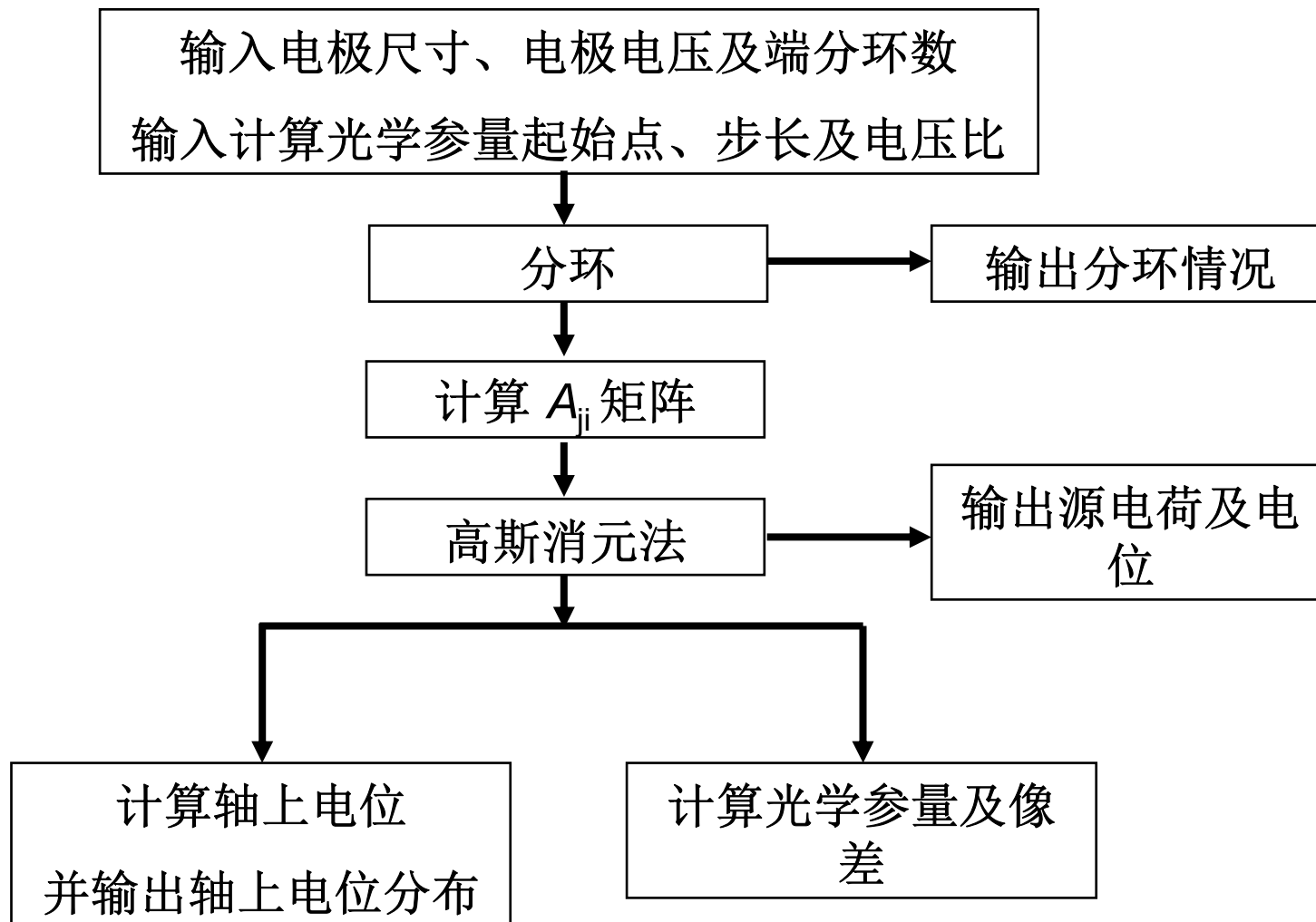
$$A_{ii} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} \left[\left(\ln \frac{16r_i}{W_i} + 1 \right) - \frac{W_i^2}{576r_i^2} \right] \cdot \left(3 \ln \frac{16r_i}{W_i} + 4 \right)$$

W_i 表示环宽度， r_i 为环中点半径。



4.5 轴对称静电场计算的电荷密度法

- 电荷密度法程序计算框图:





4.5 轴对称静电场计算的电荷密度法

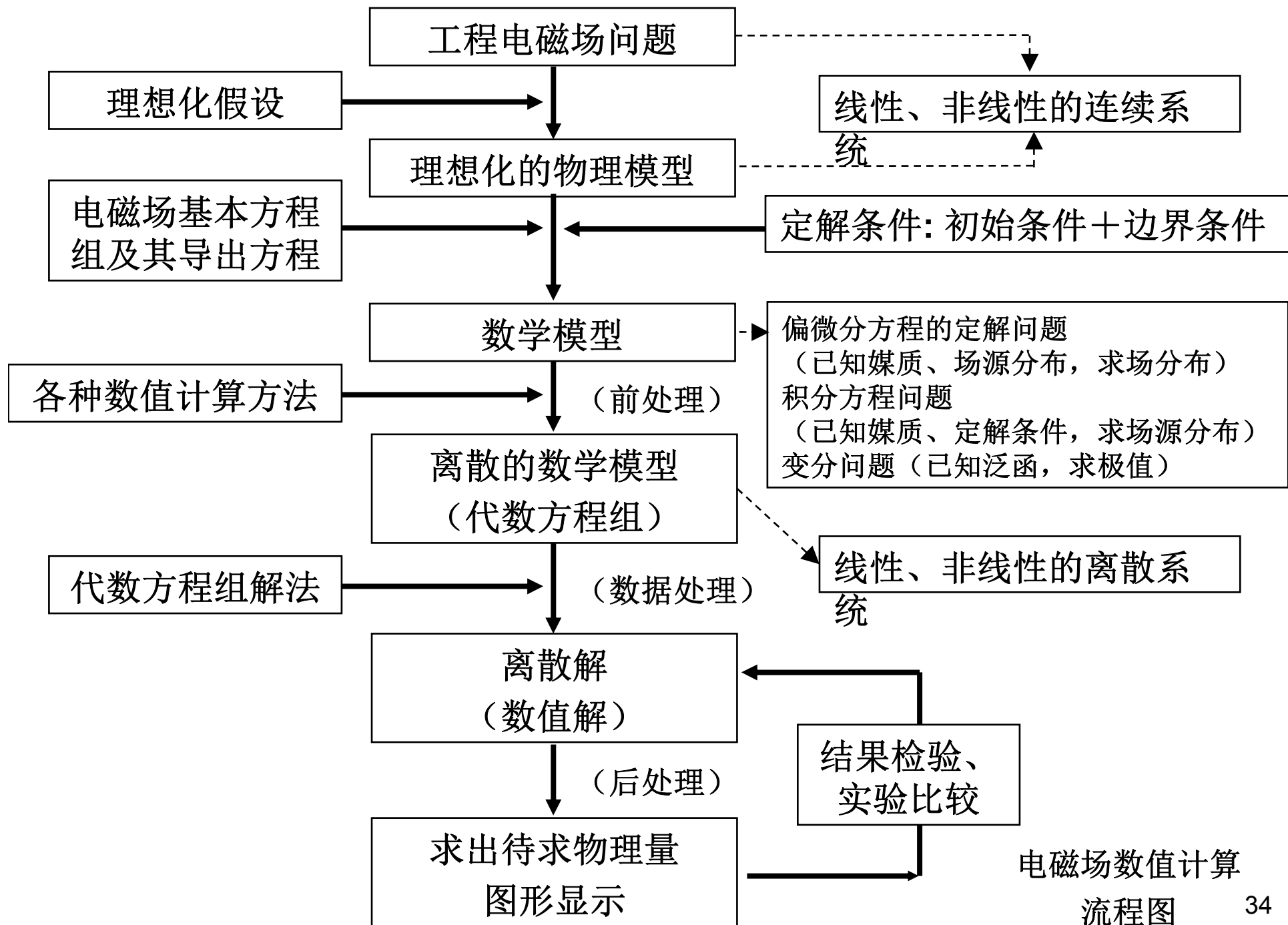
4.5.6 主要特点

- 可计算无界开域问题，计算精度较高；
- 输入数据简单，只要对电极表面离散化，输入数据工作量减少。
- 可提供连续解，而不是分立值。
- 计算量随离散单元数剧增，因此不合适过密离散。一般小于500。在100~250之间，计算可具有足够的精度。

知识要点:

- 电磁场基本理论（恒定场、时谐场）
- 标量位、矢量位（导磁率为线性和非线性情况讨论）
- 边界条件与边值关系
- 有限差分法求解过程及其特点
- 平行平面场、轴对称场中泊松方程与边界条件的差分离散
- 准泊松方程的差分离散（泰勒级数法、积分法）
- 非线性方程组的解法

- 有限元法求解过程及其特点
- 平行平面场、轴对称场中泊松方程的有限元方程组
(导磁率为线性和非线性情况讨论)
- 有限元方程组的求解 (非线性、牛顿-拉夫逊迭代)
- 有限元的自动剖分、等势剖分
- 积分方程法的物理概念和基本公式
- 轴对称静电场计算的电荷密度法
- 各种不同数值计算方法的比较





本节无作业。