

1 初等变换和LU分解

1. 用初等变换求下列矩阵的LU分解，并用得到的L和U判断矩阵是否可逆。如果可逆，求出该矩阵的逆（提示：尽量利用你已经得到的结果，而不是直接对原矩阵重新使用Gauss-Jordan消元法）。

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 19 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 13 & 9 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

2. 假设 $A = LU$,

(a) 证明：解 $Ax = b$ 等价于解方程组 $Ly = b$ 和 $Ux = y$ 。

(b) 若

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 2 & -7 & -7 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ -4 & -1 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

并且

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

分别解方程组 $Ly = b$, $Ux = y$ 和 $Ax = b$ ，并且记录解每一个方程时解出全部未知数至少需要的算术运算（加减乘除）的数目。解前两个方程组所需的算术运算的数目之和是否小于解第三个方程组需要的算术运算？

- (c) （附加题）假设 A 是一般的 n 阶方阵，已知 $A = LU$ 。再假设 $Ax = b$ 有解，估算解方程组 $Ly = b$, $Ux = y$ 和 $Ax = b$ 分别需要做多少次算术运算，估算时只需要保留 n 的最高次项即可。（提示：结果可以参考Lay书中18页和127页“数值计算的注解”，但是你要给出具体过程）