微积分 A (2)

姚家燕

第 25 讲

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

第 25 讲

第 6 章 函数项级数

§1. 函数项级数的收敛性

定义 1. 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为非空集合，而 $\{v_n\}$ 为定义在 I 上的一列函数，称为 I 上的函数列.

(1) 设 $x_0 \in I$. 若数列 $\{v_n(x_0)\}$ 收敛，则称点 x_0 为上述函数列的收敛点，否则称为发散点.

(2) 记 J 是由上述函数列的所有收敛点组成的集合，称为该函数列的收敛域.

(3) $\forall x \in J$, 定义 $v(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(x)$. 由此得到的定义在 J 上的函数 v 称为函数列的极限函数.

(4) 称函数列 $\{v_n\}$ 在 J 上一致收敛到它的极限函数 v, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$ 以及 $\forall x \in J$, 均有 $|v_n(x) - v(x)| < \varepsilon$. 也即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$, 均有 $\sup\limits_{x\in J} |v_n(x) - v(x)| < \varepsilon$. 而这又等价说 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in J} |v_n(x) - v(x)| = 0$.

(5) 称函数列 $\{v_n\}$ 在 I 上一致有界, 若 $\exists M > 0$ 使得 $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x \in I$, 均有 $|v_n(x)| \leqslant M$.

例 1. $\forall n \geqslant 1$ 及 $\forall x \in [0,1]$, 令 $v_n(x) = x^n$. 则

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x \in [0,1), \\ 1, & 若\ x = 1. \end{cases}$$

又 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|v_n(x) - v(x)\right| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1,$$

故函数列 $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上收敛, 但非一致收敛.

作业题: 第 6.1 节第 271 页第 7 题.

定义 2. 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为非空集合, 而 $\{u_n\}$ 为定义在 I 上的一列函数, 我们称形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为 I 上的函数项级数.

(1) 设 $x_0 \in I$. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 x_0 为上述函数项级数的收敛点, 否则称为发散点.

(2) 记 J 为上述函数项级数所有收敛点组成的集合, 称为该函数项级数的收敛域.

(3) $\forall x \in J$, 令 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 由此得到 J 上函数 S, 称为上述函数项级数的和函数.

(4) 称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 J 上为一致收敛, 如果 $\{S_n\}$ 在 J 上一致收敛, 其中 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall x \in J$ 以及 $\forall n > N$,

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon,$$

而这等价于说 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in J} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = 0.$

(5) 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 J 上一致收敛, 则 $\{u_n\}$ 在 J 上一致趋于 0.

证明: 由题设以及 Cauchy 准则立刻知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall m \geqslant n > N$ 以及 $\forall x \in J$, 均有

$$\Big| \sum_{k=n}^{m} u_k(x) \Big| < \varepsilon.$$

特别地, $\forall n > N$ 以及 $\forall x \in J$, 均有 $|u_n(x)| < \varepsilon$, 这表明函数列 $\{u_n\}$ 在 J 上一致趋于 0.

例 2. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^n$ 的收敛域.

解: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, 我们均有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}|2x+1|} = \frac{1}{|2x+1|}.$$

由根值判别法可知, 原级数在 $|2x+1| > 1$ 也即 $x > 0$ 或 $x < -1$ 时收敛, 而 $x \in (-1, 0)$ 时发散. 当 $x = 0$ 时, 原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 则由 Leibniz 判别法可知它收敛. 当 $x = -1$ 时, 原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 发散. 故收敛域为 $(-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$.

例 3. 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的函数项级数, 它的收敛域为 $(-1,1)$, 而和函数为 $S(x)=\frac{1}{1-x}$. 另外, $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned} \sup_{x\in(-1,1)} \left| \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - S(x) \right| &= \sup_{x\in(-1,1)} \left| \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| \\ &= \sup_{x\in(-1,1)} \frac{|x|^n}{|1-x|} = +\infty. \end{aligned}$$

由此可知几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ 在 $(-1,1)$ 上收敛, 但在 $(-1,1)$ 上不为一致收敛.

函数列，函数项级数与含参广义积分

由定义立刻知，研究函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 其实就等同于研究它的部分和函数列 $\{S_n(x)\}$，其中 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$. $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall y \in [n-1, n)$，令 $f(x, y) = u_n(x)$，则我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \int_0^N f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

三者关系

上述关系式表明:

函数列, 函数项级数, 以及无穷限含参广义积分三者统一!

其中一个收敛或绝对收敛或一致收敛, 相应的另外两个也是如此. 于是关于上述理论的任何定理均有三种不同表述, 例如 Cauchy 准则.

定理 1. (Weierstrass 判别法) 若存在非负常数项收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 使得 $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x \in J$, 均有 $|u_n(x)| \leqslant M_n$, 那么函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 J 上绝对收敛且一致收敛.

注: 通常称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的控制级数.

证明: 方法 1. 直接应用关于广义含参积分一致收敛性的 Weierstrass 判别法.

方法 2. $\forall x \in J$, 由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对收敛. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} M_k = 0.$ 但 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$0 \leqslant \sup_{x\in J} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{x\in J} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k,$$

于是由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in J} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = 0.$ 因此所证结论成立.

例 4. 问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 是否在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛?

解: $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$, 则

$$u_n'(x) = 2xe^{-nx} - nx^2 e^{-nx} = (2-nx)xe^{-nx}.$$

故 u_n' 在 $(0, \frac{2}{n})$ 上严格正而在 $(\frac{2}{n}, +\infty)$ 上严格负, 则 u_n 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值点为 $x = \frac{2}{n}$, 也即 $\forall x \geqslant 0$, 我们有 $0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{4}{n^2} e^{-2}$. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2} e^{-2}$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法可知原函数项级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

定理 2. (Dirichlet 判别准则) 如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和函数列为一致有界, 而函数列 $\{v_n\}$ 单调且一致趋于 0, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 一致收敛.

定理 3. (Abel 判别准则) 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为一致收敛, 而函数列 $\{v_n\}$ 单调并且一致有界, 则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 一致收敛.

例 5. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛, 其中我们假设 $\delta \in (0, \pi)$.

证明: $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x \in [\delta, 2\pi-\delta]$, 我们有

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\Big| \leqslant \left|\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x-\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

而 $\{\frac{1}{n}\}$ 单调且一致趋于 0, 于是由 Dirichlet 判别准则知原函数项级数在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛.

作业题: 第 6.1 节第 270 页第 2 题第 (3), (4) 题, 第 271 页第 3 题第 (1), (3) 题.

§2. 一致收敛的函数项级数的和函数的性质

定理 1. 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为非空集合, 而 $\{v_n\}$ 为定义在 I 上的连续函数列, 并且在 I 上一致收敛到函数 v, 则 v 在 I 上连续.

证明: 固定 $x_0 \in I$.$\forall \varepsilon > 0$, 由一致收敛性可知, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n \geqslant N$ 以及 $\forall x \in I$, 均有

$$|v_n(x) - v(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由于 v_N 在点 x_0 连续, 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in I$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 均有 $|v_N(x) - v_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

由此我们立刻可得

$$
\begin{aligned}
|v(x)-v(x_0)| &\leqslant |v(x)-v_N(x)| \\
&+|v_N(x)-v_N(x_0)|+|v_N(x_0)-v(x_0)|<\varepsilon,
\end{aligned}
$$

故 v 在点 x_0 连续. 由 x_0 的任意性知所证成立.

注: 一致收敛的连续函数序列的极限函数连续, 即在一定条件下, 数列极限与函数极限可交换:

$$
\begin{aligned}
\lim_{I\ni x\to x_0}\lim_{n\to\infty} v_n(x) &= \lim_{I\ni x\to x_0} v(x) = v(x_0) \\
&= \lim_{n\to\infty} v_n(x_0) = \lim_{n\to\infty}\lim_{I\ni x\to x_0} v_n(x).
\end{aligned}
$$

推论. 如果定义在 (a,b) 上的连续函数列 $\{v_n\}$ 在 (a,b) 的任意闭子区间上一致收敛到函数 v, 则函数 v 在区间 (a,b) 上连续且为上述函数列在 (a,b) 上的极限函数.

证明: 任取 $x \in (a,b)$, 则存在 (a,b) 的闭子区间 $[c,d]$ 使得 $x \in (c,d)$. 又由于连续函数序列 $\{v_n\}$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛到函数 v, 则 v 在 $[c,d]$ 上连续. 特别地, v 在点 x 处连续且数列 $\{v_n(x)\}$ 收敛到 $v(x)$. 故所证结论成立.

定理 2. (极限与级数求和可交换性)

假设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为非空集合, 而 $\{u_n\}$ 为 I 上的连续函数组成的函数列使函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 I 上一致收敛到函数 S, 则 S 在 I 上连续.

证明: $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x \in I$, 令 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$. 则函数列 $\{S_n\}$ 在 I 上连续且在 I 上一致收敛到函数 S, 故 S 在 I 上连续.

注: 只需假设在每点邻域上有一致收敛性.

例 1. 证明: $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $(0,2\pi)$ 上连续.

证明: 取 $\delta\in(0,\pi)$. $\forall n\geqslant 1$ 以及 $\forall x\in[\delta,2\pi-\delta]$, 令 $u_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n}$, 则 u_n 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上连续. 又函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上为一致收敛, 于是由极限与级数求和的可交换性可知和函数 S 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上连续, 进而 $S\in\mathscr{C}(0,2\pi)$.

作业题: 第 6.2 节第 281 页第 4 题.

定理 3. (积分与级数求和可交换性)

假设 $\{u_n\}$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数组成的函数列使得函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到函数 S, 则 S 在 I 上连续且 $\forall x \in [a,b]$, 均有

$$\int_a^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

并且右边作为变量 x 的函数项级数在 $[a,b]$ 上为一致收敛.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 由题设条件立刻知, $\exists N > 0$ 使得 $\forall m > N$ 以及 $\forall t \in [a,b]$, 我们均有

$$\left|\sum_{n=1}^{m} u_n(t) - S(t)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a+1}.$$

于是 $\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x S(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^x\Big(\sum_{n=1}^{m} u_n(t) - S(t)\Big)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \int_a^x \left|\sum_{n=1}^{m} u_n(t) - S(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \frac{\varepsilon}{b-a+1}\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

因此所证结论成立.

例 2. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (e^x - 1) x^2 e^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

解: $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x \in [0,1]$, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant u_n(x) := (e^x - 1) x^2 e^{-nx} \\ &\leqslant (e-1) x^2 e^{-nx} \leqslant \frac{4}{n^2} e^{-2} (e-1). \end{aligned}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} e^{-2}(e-1)$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法可知, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

又通项 u_n 均为连续函数, 于是由积分与级数求和可交换性立刻可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(e^x-1)x^2e^{-nx}\,\mathrm{d}x\\
=\ &\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(e^x-1)x^2e^{-nx}\,\mathrm{d}x\\
=\ &\int_0^1(e^x-1)\frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

例 3. 计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^n x)(\cos x)\,\mathrm{d}x$.

解: $\forall n \geqslant 0$ 以及 $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 我们有

$$0 \leqslant u_n(x) := (\sin^n x)(\cos x) \leqslant \sin^n x \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法可知, 函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上一致收敛.

又因通项 u_n 均为连续函数, 于是由积分与级数求和可交换性立刻可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^n x)(\cos x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(\sin^n x)(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x=-\log(1-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\log\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

作业题: 第 6.2 节第 281 页第 2 题.

定理 4. (求导与级数求和可交换性)

设 $\{u_n\}$ 为 (a,b) 上的连续可导函数列. 假设

(1) $\exists x_0 \in (a,b)$ 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛,

(2) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ 在 (a,b) 上一致收敛,

那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛, 和函数 S 在 (a,b) 上连续可导且 $\forall x \in (a,b)$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = S'(x).$$

证明: 由于 $\{u_n'\}$ 为区间 (a,b) 上的连续函数列, 而函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ 在 (a,b) 上一致收敛, 于是由极限与级数求和可交换性可知, 它的和函数 σ 在 (a,b) 上连续, 进而再利用积分与级数求和可交换性可知, $\forall x \in (a,b)$, 我们有

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \big(u_n(x) - u_n(x_0)\big),$$

且右边的函数项级数在 (a,b) 上内闭一致收敛.

又由题设可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则由级数的线性性可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 也收敛, 设其和为 $S(x)$. 故 $\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,\mathrm{d}t = S(x) - S(x_0)$. 又 σ 连续, 于是 S 可导且 $S'(x) = \sigma(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, 从而 S 为连续可导函数, 故所证结论成立.

注: 为保证和函数为连续可导, 只需假设相关的级数在 (a, b) 的任意的闭子区间上为一致收敛, 也即 内闭一致收敛.

例 4. 证明: $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \in \mathscr{C}^{(1)}(0, 2\pi)$.

证明: $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall x \in (0, 2\pi)$, 令 $u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$,

则 u_n 在 $(0, 2\pi)$ 上连续可导, 且 $u_n'(x) = -\frac{\sin(nx)}{n}$.

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ 在 $(0, 2\pi)$ 上内闭一致收敛并且常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛, 由此知和函数 S 在 $(0, 2\pi)$ 上连续可导.

作业题: 第 6.2 节第 281 页第 6 题.

§3. 幂级数, 函数的幂级数展开

定义 1. 设 $\{a_n\}$ 为常数项数列, 而 $x_0 \in \mathbb{R}$. 我们称如下形式的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

为幂级数. 出于简便, 我们通常取 $x_0 = 0$, 一般情形可由此特殊情形通过平移而得到.

定理 1. (Abel 定理) 设 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 而 $\{a_n\}$ 为常数项数列使得 $\{a_n x_0^n\}$ 有界, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内绝对收敛且内闭一致收敛.

证明: 由题设可知, $\exists M > 0$ 使得 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $|a_n x_0^n| \leqslant M$. 从而 $\forall x \in (-|x_0|, |x_0|)$, 我们有

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

又 $|\frac{x}{x_0}| < 1$, 则由比较判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛.

固定 $r \in (0, |x_0|)$. $\forall x \in [-r, r]$, 我们有

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{r}{x_0}\right|^n.$$

又因为 $|\frac{r}{x_0}| < 1$, 于是由 Weierstrass 判别法可知

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, r]$ 上一致收敛, 进而知

该幂级数在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 的任意的闭子区间上

一致收敛, 故所证结论成立.

推论 1. 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 收敛, 那么它在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内绝对收敛, 并且在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 的任意闭子区间上一致收敛.

推论 2. 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 发散, 那么它在 $[-|x_0|, |x_0|]$ 外发散, 即 $\forall x \in \mathbb{R}$, 若 $|x| > |x_0|$, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

评注

(1) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 x_0 处收敛并不意味着它在点 $-x_0$ 处收敛. 例如, 由 Leibniz 判别准则立刻知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$ 在点 $x = 1$ 处收敛, 但它却在点 $x = -1$ 处发散.

(2) 由前面讨论可知, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是一个区间. 事实上, 只能有以下三种可能性:

(a) 仅在点 $x = 0$ 处收敛;

(b) 在任意点 $x \in \mathbb{R}$ 收敛;

(c) $\exists R > 0$ 使得当 $|x| < R$ 时, 幂级数在点 x 处收敛; 而当 $|x| > R$ 时, 幂级数在点 x 处发散; 至于在点 $x = \pm R$ 处, 幂级数可为收敛或发散.

我们将幂级数收敛域的半径称为它的收敛半径.

在上述三种情形, 幂级数的收敛半径分别为:

$$0, +\infty, \text{和 } R.$$

(3) 由幂级数的收敛半径的定义, 我们立刻可得, $R\in[0,+\infty]$ 恰好为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径当且仅当下列性质成立:

(a) 当 $|x|<R$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛;

(b) 当 $|x|>R$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

我们称 $(-R,R)$ 为收敛开区间. 为得到收敛域, 还需讨论幂级数在点 $x=\pm R$ 处的收敛性.

谢谢大家!