第 3 次作业题解答

1. 求向量值函数 $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$ 的逆映射的 Jacobi 矩阵与 Jacobi 行列式.

解: 由题设可知 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, 于是 $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = 4(x^2+y^2)$, 从而所求逆映射的 Jacobi 行列式为 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{4(x^2+y^2)}$ 该逆映射的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{4(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix}.$$

2. 求下列曲面在给定点处的切平面方程和法线方程:

(1) $z = x^2 + y^2$, 点 $P(1,2,5)$,

(2) $(2a^2 - z^2)x^2 = a^2y^2$, 点 $P(a,a,a)$, 其中 $a > 0$,

(3) $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$, 点 $(u,v) = (1,2)$.

解: (1) 由题设可知 $\frac{\partial z}{\partial x}(P) = 2$, $\frac{\partial z}{\partial y}(P) = 4$, 从而所求切平面方程为

$$z - 5 = 2(x-1) + 4(y-2),$$

相应的法线方程为 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$.

(2) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, 令 $F(x,y,z) = (2a^2 - z^2)x^2 - a^2y^2$, 则 F 为初等函数, 故连续可导, 并且我们还有

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(P) &= 2x(2a^2 - z^2)\big|_P = 2a^3, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(P) &= -2a^2y\big|_P = -2a^3, \\ \frac{\partial F}{\partial x}(P) &= -2zx^2\big|_P = -2a^3, \end{aligned}$$

于是所求切平面为 $2a^3(x-a) - 2a^3(y-a) - 2a^3(z-a) = 0$, 也即 $x - y - z = -a$, 相应的法线方程为 $x - a = a - y = a - z$.

(3) 由题设可知 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \\ 3u^2 & 3v^2 \end{pmatrix}\Big|_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$, 由此可得 $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}(1,2) = 12$, $\frac{D(z,x)}{D(u,v)}(1,2) = -9$, $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(1,2) = 2$, 则所求切平面方程为 $12(x-3) - 9(y-5) + 2(z-9) = 0$, 相应的法线方程为

$$\frac{x-3}{12} = \frac{y-5}{-9} = \frac{z-9}{2}.$$

3. 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上求点 P 使过该点的法线与坐标轴成等角.

解: 椭球面在其上任意点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2})^T$, 于是过点 P 的法线与坐标轴成等角当且仅当 $\frac{2x_0}{a^2}=\frac{2y_0}{b^2}=\frac{2z_0}{c^2}$, 此时令

$$\alpha=\frac{x_0}{a^2}=\frac{y_0}{b^2}=\frac{z_0}{c^2},$$

则 $x_0=a^2\alpha$, $y_0=b^2\alpha$, $z_0=c^2\alpha$. 但 P 为椭球面上的点, 则

$$\frac{(a^2\alpha)^2}{a^2}+\frac{(b^2\alpha)^2}{b^2}+\frac{(c^2\alpha)^2}{c^2}=1,$$

由此可知 $\alpha=\frac{\pm1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, 从而所求点为 $\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$, 以及 $\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},-\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},-\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$.

4. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上平行于 $x+4y+6z=0$ 的切平面.

解: 设所求切平面切曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 于点 (x_0,y_0,z_0), 则上述曲面在该点处的法向量为 $\begin{pmatrix}2x_0\\4y_0\\6z_0\end{pmatrix}$. 由于所求切平面平行于平面

$$x+4y+6z=0,$$

则 $\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6}$, 于是 $y_0=z_0=2x_0$. 又 $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21$, 于是

$$x_0=\pm1,\ y_0=z_0=\pm2,$$

从而所求的切平面有两个, 它们的方程分别为

$$x-1+4(y-2)+6(z-2)=0,\ \text{以及}\ x+1+4(y+2)+6(z+2)=0.$$

5. 求曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $P(1,-2,1)$ 的切线与法平面方程.

解: $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 我们定义

$$F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6,\ F_2(x,y,z)=x+y+z,$$

则 F_1,F_2 为初等函数, 因此连续可导且

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y,z)}(P)=\begin{pmatrix}2x&2y&2z\\1&1&1\end{pmatrix}\Big|_P=\begin{pmatrix}2&-4&2\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

于是所求切线方程为

$$\begin{cases}2(x-1)-4(y+2)+2(z-1)=0,\\x+y+z=0,\end{cases}$$

进而可知所求切线方向为

$$\vec{T}=\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix},$$

因此所求切线方程为

$$\frac{x-1}{-6}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{6},$$

从而相应的法平面方程为

$$-6(x-1)+6(z-1)=0,$$

也即所求法平面方程为 $x=z$.

6. 证明: 螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos t\\y=a\sin t\\z=bt\end{cases}$ 的切线与 z 轴成定角.

证明: 由题设知螺旋线上与任意参数 t 对应的点 $P(x,y,z)$ 处的切线方向为

$$\begin{pmatrix}-a\sin t\\a\cos t\\b\end{pmatrix}.$$

将过该点的切线与 z 轴所成夹角记作 θ, 则

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}-a\sin t\\a\cos t\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

从而夹角 θ 不依赖参数 t, 因此所证结论成立.

7. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义 $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$. 求 f 在原点一阶带 Lagrange 余项和二阶带 Peano 余项的 Taylor 公式.

解: 由于 f 为初等函数, 故二阶连续可导且

$$\begin{aligned}J_f(x,y)&=(2xe^{x^2-y^2},-2ye^{x^2-y^2}),\\H_f(x,y)&=\begin{pmatrix}2(1+2x^2)e^{x^2-y^2}&-4xye^{x^2-y^2}\\-4xye^{x^2-y^2}&2(2y^2-1)e^{x^2-y^2}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

由此可立刻导出

$$J_f(0,0)=(0,0),\ H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}.$$

进而可得所求一阶带 Lagrange 余项的 Taylor 公式为

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 1+\frac{1}{2}(x,y)H_f(\theta x,\theta y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= 1+\frac{1}{2}\Big(2(1+2\theta^2x^2)x^2e^{\theta^2(x^2-y^2)}-8\theta^2x^2y^2e^{\theta^2(x^2-y^2)} \\
&\quad +2(2\theta^2y^2-1)y^2e^{\theta^2(x^2-y^2)}\Big) \\
&= 1+\big((1+2\theta^2x^2)x^2-4\theta^2x^2y^2+(2\theta^2y^2-1)y^2\big)e^{\theta^2(x^2-y^2)},
\end{aligned}$$

其中 $\theta\in(0,1)$. 而所求二阶带 Peano 余项的 Taylor 公式则为

$$f(x,y)=1+x^2-y^2+o(x^2+y^2)\quad (x,y)\to(0,0).$$

8. 研究下列函数的极值:

(1) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$;

(2) $z=x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{2}{x_n}$ $(x_i>1,\ 1\leqslant i\leqslant n)$.

解: (1) 由于函数 z 为初等函数, 故二阶连续可导且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2e^{2x}(y+1),$$

从而函数 z 的驻点为 $P=(\frac{1}{2},-1)$. 在该点处, 我们有

$$H_z(P)=\begin{pmatrix} 4e^{2x}(x+y^2+2y+1) & 4e^{2x}(y+1) \\ 4e^{2x}(y+1) & 2e^{2x} \end{pmatrix}\Big|_P=\begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{pmatrix}.$$

由此可知点 P 为函数 z 唯一的极值点, 相应的极小值为 $-\frac{e}{2}$.

(2) **方法 1.** 由于函数 z 为初等函数, 故二阶连续可导且

$$J_z=\Big(1-\frac{x_2}{x_1^2},\frac{1}{x_1}-\frac{x_3}{x_2^2},\dots,\frac{1}{x_{k-1}}-\frac{x_{k+1}}{x_k^2},\dots,\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{2}{x_n^2}\Big),$$

从而函数 z 的驻点满足 $x_k=2^{\frac{k}{n+1}}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$. 在该点处, 我们有

$$H_z=\begin{pmatrix}
\frac{2}{x_1} & -\frac{1}{x_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-\frac{1}{x_1^2} & \frac{2}{x_1^3} & -\frac{1}{x_1^4} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{x_1^{2(k-1)}} & \frac{2}{x_1^{2k-1}} & -\frac{1}{x_1^{2k}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{x_1^{2(n-1)}} & \frac{4}{x_1^{3n}}
\end{pmatrix}.$$

对任意整数 $1\leqslant 2\leqslant n$, 记 D_k 为上述海赛矩阵 H_z 的第 k 阶主子式, 则

$$D_1=\frac{2}{x_1},\ D_2=\frac{3}{x_1^4},\ D_n=\frac{4}{x_1^{3n}}D_{n-1}-\frac{1}{x_1^{4(n-1)}}D_{n-2},$$

而对于 $3 \leqslant k \leqslant n-1$, 则有 $D_k = \frac{2}{x_1^{2k-1}} D_{k-1} - \frac{1}{x_1^{4(k-1)}} D_{k-2}$. 利用数学归纳法立刻可知, 当 $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 时, 我们有 $D_k = \frac{k+1}{x_1^{k^2}} > 0$, 而

$$D_n = \frac{4}{x_1^{3n}} D_{n-1} - \frac{1}{x_1^{4(n-1)}} D_{n-2} = \frac{4n-(n-1)x_1^{n+1}}{x_1^{n^2+n+1}} = \frac{2n+2}{x_1^{n^2+n+1}} > 0,$$

于是上述驻点为函数 z 唯一的极值点, 相应的极小值为 $(n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$.

方法 2. 由于函数 z 为初等函数, 故二阶连续可导且

$$J_z = \Big(1 - \frac{x_2}{x_1^2}, \frac{1}{x_1} - \frac{x_3}{x_2^2}, \ldots, \frac{1}{x_{k-1}} - \frac{x_{k+1}}{x_k^2}, \ldots, \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{2}{x_n^2}\Big),$$

则函数 z 的驻点 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ 满足 $x_k^{(0)} = 2^{\frac{k}{n+1}}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. 若函数 z 有极值, 则该驻点为其唯一的极值点. 又由经典的算术–几何平均不等式可知

$$\begin{aligned} z &= x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n} \\ &\geqslant (n+1)\Big(x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{2}{x_n}\Big)^{\frac{1}{n+1}} = (n+1)2^{\frac{1}{n+1}}, \end{aligned}$$

且等号成立当且仅当 $x_1 = \frac{x_2}{x_1} = \cdots = \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{2}{x_n}$, 即 $x_k = 2^{\frac{k}{n+1}}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. 这表明上述驻点为函数 z 唯一的极值点且相应的极小值为 $(n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$.

9. 求由方程 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{2}{3}z = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x,y)$ 的极值.

解: $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, 定义 $F(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{2}{3}z$, 则 F 为初等函数, 从而该函数为二阶连续可导. 由隐函数定理知, 由方程 $F(x,y,z) = 0$ 确定的隐函数 $z = z(x,y)$ 的驻点满足

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{\frac{2}{9}z - \frac{2}{3}},\ 0 = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{1}{2}y}{\frac{2}{9}z - \frac{2}{3}}.$$

于是 $x = y = 0$, 带入隐函数方程可得 $z = 0$ 或 6.

在驻点处, 我们有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{2x}{\frac{2}{9}z - \frac{2}{3}}\Big) = -\frac{2}{\frac{2}{9}z - \frac{2}{3}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{2x}{\frac{2}{9}z - \frac{2}{3}}\Big) = 0,$$

同样我们也有 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\big(-\frac{\frac{1}{2}y}{\frac{2}{9}z - \frac{2}{3}}\big) = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{9}z - \frac{2}{3}}$. 由此立刻可得

$$H_z\Big|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad H_z\Big|_{(0,0,6)} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

于是所求隐函数 $z = z(x,y)$ 的极小值为 0, 极大值为 6.

注: 在该题中, 由方程在点 $(0,0,0)$ 和 点$(0,0,6)$ 各自邻域内分别确定了一个隐函数 $z = z(x,y)$, 这两个隐函数在点 $(0,0)$ 处给出不同的值 0 和 6.