第5章　基本解方法

§5. 1　δ 函数与广义函数简介

§5. 2　Lu=0 型方程的基本解

§5. 3　Poisson方程格林函数法

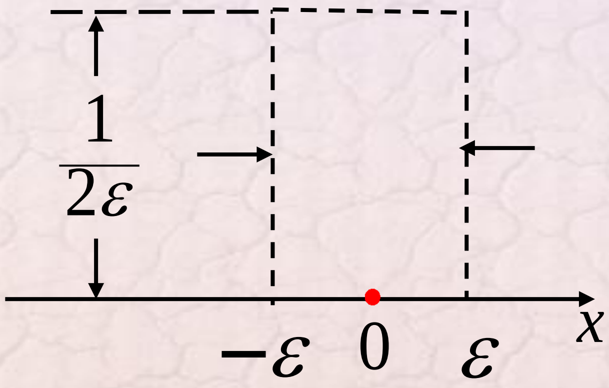
§5. 4　初值问题的基本解方法

§5.1 δ 函数与广义函数简介

§5.1.1 δ 函数

δ函数的引入起源于物理中对集中分布物理量的数学描述。

例：（点电荷的线密度）



点电荷事实上是一种理想化的情况，它可以看做一种分布电荷的极限。

设在数轴上分布有电荷，其线密度为

$$\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x|\le\varepsilon, \\ 0, & |x|>\varepsilon\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \text{总电荷 } Q=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_\varepsilon(x)dx=1$$

令 $\varepsilon\to 0$，$\rho_\varepsilon(x)$ 的极限可以看做x=0点单位点电荷的分布：

$$\rho(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0, \\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

将集中于$x=0$点单位物理量引起的密度函数称为δ函数，

记为$\delta(x)$, $\delta(x)$满足条件

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq 0\end{cases}\quad (1)\qquad 及\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1.\quad \boxed{(2)}$$

δ函数 的几个重要性质

（1）对称性，即它是偶函数：$\delta(-x)=\delta(x)$,

（2）筛选性，$$\int_a^b\varphi(x)\delta(x)dx=\begin{cases}\varphi(0), & 0\in[a,b]\\ 0, & 0\notin[a,b]\end{cases}\qquad (\forall\varphi\in C(\mathbb{R}))$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x-\xi)dx=\varphi(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(\xi-x)dx$$

$$\Rightarrow\quad(\varphi*\delta)(\xi)=(\delta*\varphi)(\xi)=\varphi(\xi)$$

注：筛选性与条件（2）是等价的。

（3）$H(x) := \int_{-\infty}^{x} \delta(y)\,dy = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}$ （Heaviside 函数）

(4) 设 $u(x) \in C^1(\mathbb{R})$, 且在实轴上只有单零点 $x_k\,(k = 1, 2, \cdots, N)$

则复合函数

$$\delta[u(x)] = \sum_{k=1}^{N} \frac{\delta(x - x_k)}{|u'(x_k)|}.$$

（练习）

例： $\delta(ax) = \dfrac{\delta(x)}{|a|}, \quad a \neq 0,$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a)}{2|a|} + \frac{\delta(x+a)}{2|a|} = \frac{\delta(x-a)}{2|x|} + \frac{\delta(x+a)}{2|x|}, \quad a \neq 0,$$

$$\delta(\sin x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\pi).$$

思考: 如何理解 $\delta(x^2), \ \delta(x^3), \cdots ?$

§5.1.2 广义函数

定义：从一个函数空间V（定义域）到数域 F 的映射T 称为一个泛函。如果函数空间V是数域F上的线性空间，对F中任意两个数a,b以及V中任意两个函数u, v有

$$T(au+bv)=aTu+bTv,$$ 称T为V上一个线性泛函。

例： 令 $V=C(\mathbb{R})$, 对 $\forall\varphi(x)\in C(\mathbb{R})$, 定义

pair

$$\langle\delta(x),\varphi(x)\rangle \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx$$

则 δ函数 确定了连续函数空间 $C(\mathbb{R})$ 上一个线性泛函T_δ,

$$T_\delta(\varphi(x))=\langle\delta(x),\varphi(x)\rangle=\varphi(0)\in\mathbb{R}.$$

再如：以$\mathrm{supp}(f) \triangleq \overline{\{x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0\}}$ 表示实函数 f 的支集，

记 $L_0(\mathbb{R}) =: \left\{ f(x): \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty, \text{且}\ \mathrm{supp}(f)\ \text{有界} \right\}$

则对$\forall f \in L_0(\mathbb{R})$，$f$ 确定了$C(\mathbb{R})$ 上一个线性泛函

$$T_f(\varphi(x)) = \langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \in \mathbb{R}.$$

这样，从线性泛函角度上看，$\delta(x), f(x)$ 并无不同。我们把

$V = C(\mathbb{R})$ 上所有线性泛函均称为广义函数。

为方便起见，我们以 $\delta(x), f(x)$ 直接表示广义函数 T_δ, T_f 本身。

$\delta(x)$ 称作奇异广义函数，$f(x)$称作正则广义函数，

易见：$C(\mathbb{R})$ 上所有线性泛函全体构成一个线性空间，称作

基本函数空间$C(\mathbb{R})$的共轭空间（或称对偶空间），记作 $C'(\mathbb{R})$.

一般的，基本空间V上所有线性泛函全体构成一个线性空间，
称作V 的的共轭空间(或称对偶空间)，记作V'.

基本空间V不同，那么V 的 的共轭空间 V'一般 也不同。又如假设

基本空间是 $C^{\infty}(\mathbb{R})$, 上述$\delta(x), f(x) \in (C^{\infty}(\mathbb{R}))'$.

从物理上看,$\delta(x)$是一种特殊分布；从数学上看,$\delta(x)$是基本函数空间

上特殊的线性泛函。建立在线性泛函基础上的广义函数理论，允许

在广义函数中不受经典性限制，进行各种代数与分析运算。

例如，广义函数上将可以定义导数，卷积，Fourier（逆）变换等。

注：两个广义函数$f \doteq g$的寓意是$T_f = T_g$. 譬如说 f, g 可以在可列个
点上不相等，但在线性泛函意义下，它们却表示同一个广义函数。

1. 广义函数的导数与原函数

置 $D(\mathbb{R})=C_0^\infty(\mathbb{R})=:\left\{f(x)\in C^\infty(\mathbb{R}):\ \mathbf{supp}(f)\text{ 有界}\right\}$

设广义函数 $f(x)\in D'(\mathbb{R})$，通过如下方式定义 $f^{(n)}(x)$：

$$\left\langle f^{(n)}(x),\varphi(x)\right\rangle=(-1)^n\left\langle f(x),\varphi^{(n)}(x)\right\rangle,\ \forall\varphi(x)\in D(\mathbb{R}),$$

$$\Leftrightarrow\quad\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(n)}(x)\varphi(x)dx=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi^{(n)}(x)dx.$$

检验函数

$$\Rightarrow\quad f^{(n)}(x)\in D'(\mathbb{R}).$$

特别的，对于 $\delta(x)\in D'(\mathbb{R})$，$\forall\varphi(x)\in D(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(x)\varphi(x)dx=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi^{(n)}(x)dx=(-1)^n\varphi^{(n)}(0).$$

$\Rightarrow$ 任意一个广义函数都是无穷阶可导的（泛函意义下）

定义 设广义函数 $f(x), g(x) \in D'(\mathbb{R})$，若$g'(x) \doteq f(x)$, 则称 $g(x)$是 $f(x)$的一个原函数。

此时 $g(x)+const.$ 也是 $f(x)$的一个原函数。

例： $H'(x) \doteq \delta(x).$ $\forall \varphi(x) \in D(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H'(x)\varphi(x)dx = (-1)\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dx = (-1)\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx$$

$$= (-1)\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx.$$

类似地，若令 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ 则 $\operatorname{sgn}' x \doteq 2\delta(x).$ （如何证明？）

2. 广义函数的卷积

定义 给定两个广义函数 $f(x), g(x) \in D'(\mathbb{R})$，卷积 $h(x) = f(x) * g(x)$ 是一个广义函数，通过如下方式确定

$$\langle h(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle, \quad \forall \varphi(x) \in D(\mathbb{R})$$

形式上，仍记

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi$$

形式运算

$$\langle h(x), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) g(x-\xi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi+y) g(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+y) g(y) dy = \left\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle$$

例：$\delta(x)*f(x)=f(x)$，$\delta'(x)*f(x)=\delta(x)*f'(x)=f'(x)$（验证）

$$\Rightarrow \delta^{(n)}(x)*f(x)=\delta(x)*f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)$$

一般的，$L(f(x)*g(x))=L(f(x))*g(x)=f(x)*L(g(x))$

其中，L 是常系数线性微分算子。

3. 广义函数的Fourier 变换

速降函数空间$\mathscr{L}(\mathbb{R})$是$C^{\infty}(\mathbb{R})$一个子空间，$\forall\varphi\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$，满足

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^m\varphi^{(n)}(x)=0,\ \forall m,n\in\mathbb{Z}^+.$$

如$\varphi(x)=p(x)e^{-ax^2}$, $p(x)$是多项式，$a>0$.

注：$C_0^{\infty}(\mathbb{R})\subset\mathscr{L}(\mathbb{R})\subset C^{\infty}(\mathbb{R})$

给定广义函数 $f(x)\in\mathscr{L}'(\mathbb{R})$,

$f(x)$的Fourier变换与逆变换$F[f]$, $F^{-1}[f]$也是广义函数，定义如下：

$$\langle F[f]),\varphi\rangle=\langle f,F[\varphi]\rangle,\ \langle F^{-1}[f]),\varphi\rangle=\langle f,F^{-1}[\varphi]\rangle,\forall\varphi(x)\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$$

FT, $F^{-1}T$ 作用转移到基本函数上,它们保持着经典意义下的基本性质。

形式上，仍记

$$F[f](\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx=\hat{f}(\xi)$$

$$F^{-1}[\hat{f}](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)d\xi$$

$$FT:\mathscr{L}'(\mathbb{R})\xrightarrow{1-1}\mathscr{L}'(\mathbb{R})$$

$$f(x)\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}\hat{f}(\xi)$$

例： $\delta(x)\in\mathscr{L}'(\mathbb{R})$,

$$F[\delta(x)](\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\delta(x)dx=1$$

$$\delta(x)\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}1 \qquad \boxed{1\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}2\pi\ \delta(\xi)}$$

又如： $e^{iax}\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}2\pi\delta(\xi-a)$

$$\delta'(x)\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}i\xi$$

$$\cos ax\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}\pi[\delta(\xi+a)+\delta(\xi-a)]$$

$$x\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}2\pi i\delta'(\xi)$$

$$\sin ax\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}i\pi[\delta(\xi+a)-\delta(\xi-a)]$$

$$x^2\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}-2\pi\delta''(\xi)$$

4. Fourier展开

$$\delta(x-\xi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L},\qquad x,\xi\in(-L,L)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\delta(x-\xi)\frac{\cos n\pi x}{L}dx=\frac{1}{L}\cos\frac{n\pi\xi}{L},\qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\delta(x-\xi)\frac{\sin n\pi x}{L}dx=\frac{1}{L}\sin\frac{n\pi\xi}{L},\qquad n=1,2,\cdots$$

5. 广义函数序列的收敛性

定义 $f_n(x),\ n=1,2,\cdots$ 为广义函数序列，$f(x)$为一个广义函数，若对基本函数空间中任意一个函数 $\varphi(x)$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n(x),\varphi(x)\rangle=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\varphi(x)dx$$

$$=\langle f(x),\varphi(x)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx,$$

则称 $f_n(x)$ **弱收敛**到 $f(x)$，$f(x)$称作$f_n(x)$ 的**弱极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\overset{w}{=}f(x).$$

定理 设基本函数空间为$\mathscr{D}(\mathbb{R})$，则

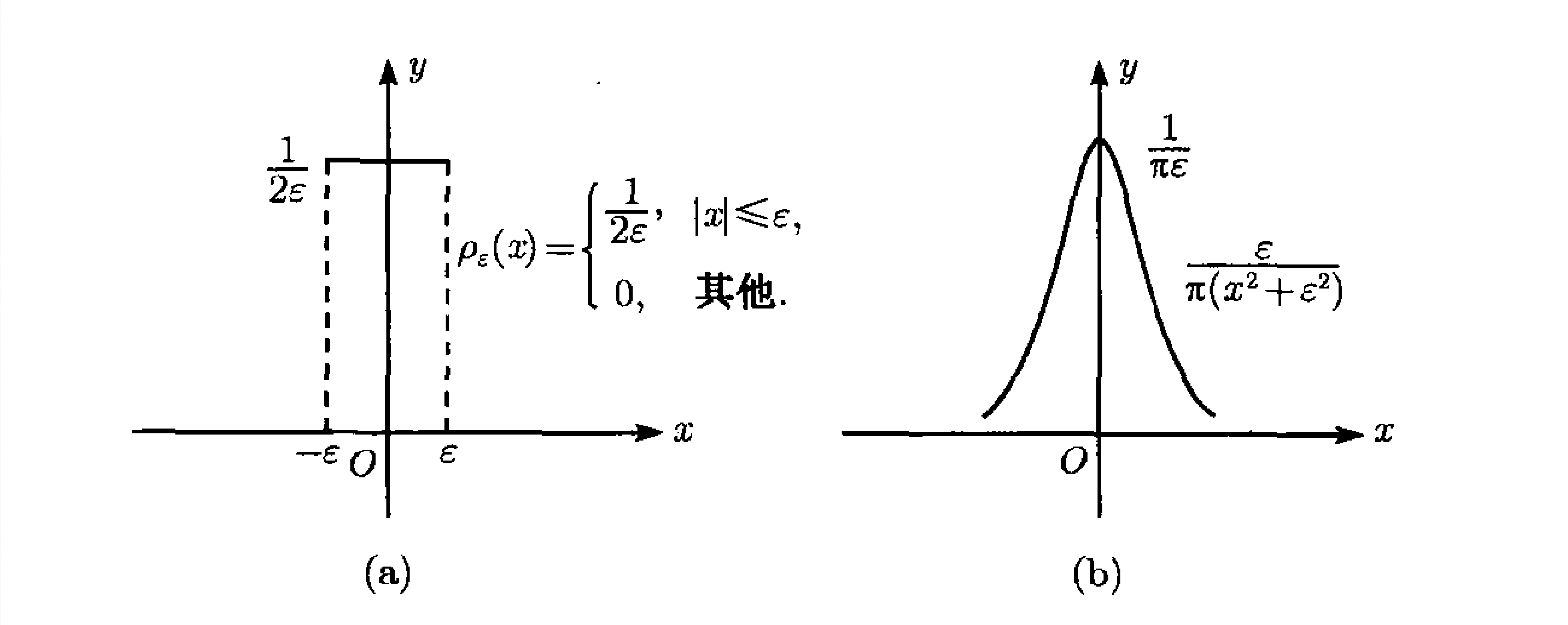
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\overset{w}{=}f(x)\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}f_n'(x)\overset{w}{=}f'(x).$$

（证明略）

定义 弱收敛到 $\delta(x)$ 的序列称作 **δ 序列**。

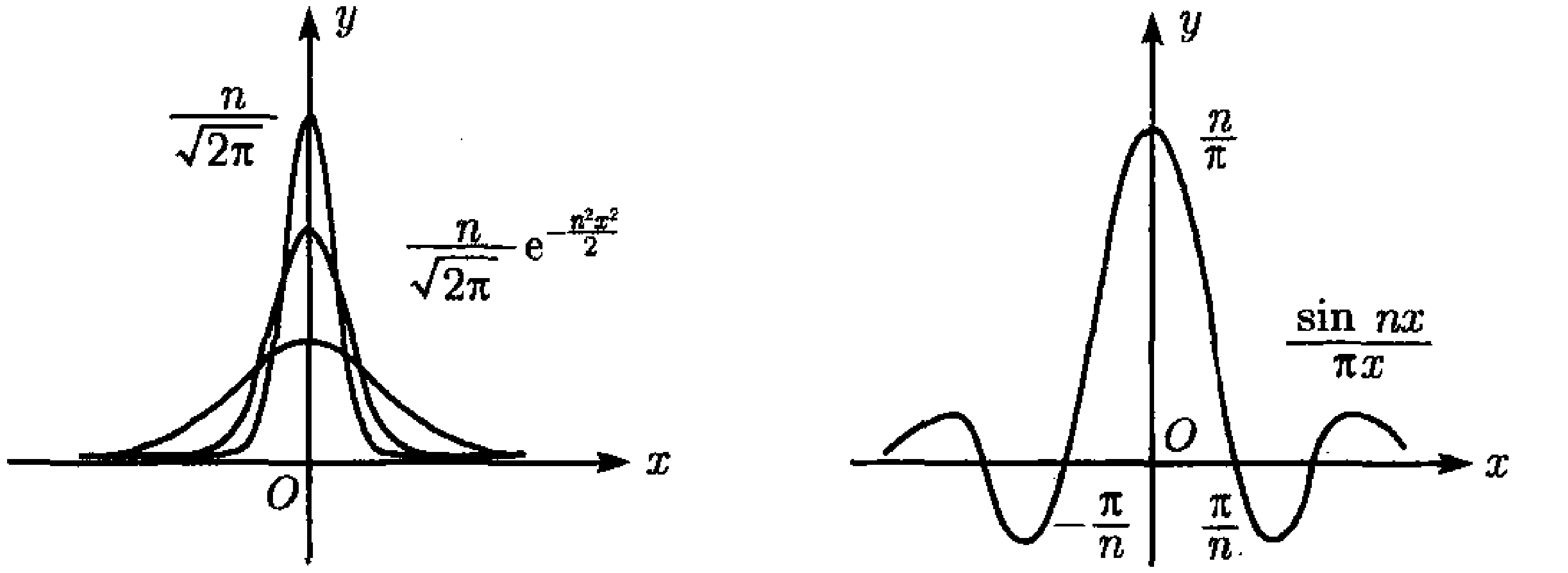
例： (a) 矩形脉冲序列 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \rho_\varepsilon(x) \overset{w}{=} \delta(x)$

(b) Cauchy脉冲序列 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)} \overset{w}{=} \delta(x)$



(c) Gauss脉冲序列 $$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t^2}}\overset{w}{=}\delta(x)$$

(d) 采样脉冲序列 $$\lim_{n\to +\infty}\frac{\sin nx}{\pi x}\overset{w}{=}\delta(x)$$



(c) (d)

练习：设基本函数空间为$C_0^\infty(\mathbb{R})$，则

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\cos nx \overset{w}{=} 0\\ \lim_{n\to\infty}\sin nx \overset{w}{=} 0\end{aligned}\right\} \qquad \left(\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} e^{inx} \overset{w}{=} 0\right)$$

回忆：微积分中的Riemann引理

§5.1.3 高维 δ 函数与广义函数

设 $M=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $M_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$,

$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$

$$D(\mathbb{R}^n)=C_0^\infty(\mathbb{R}^n)=:\left\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^n):\ \mathbf{supp}(f)\text{有界}\right\}$$

速降函数空间$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$是$C^\infty(\mathbb{R}^n)$一个子空间,$\forall\varphi\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$，满足

$$\lim_{|M|\to+\infty}|M|^m\frac{\partial^k\varphi(M)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}=0,\ \forall m,k=k_1+\cdots+k_n\in\mathbb{Z}^+.$$

类似可以定义 $\mathbb{R}^n$ 上基本函数空间V 上的线性泛函，即广义函数，

如$V=D(\mathbb{R}^n)$, $f(M)$是一个局部可积函数，则

$$\left\langle f(M),\varphi(M)\right\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f(M)\varphi(M)dM$$ 决定了线性泛函 $f\in D'(\mathbb{R}^n)$,

1. δ函数

$$\delta(M-M_0)=\begin{cases}+\infty, & M=M_0\\ 0, & M\neq M_0\end{cases}\quad \text{及}\quad \int_{\mathbb{R}^n}\delta(M-M_0)dM=1.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\delta(M-M_0)\varphi(M)dM=\varphi(M_0),\quad \forall\varphi\in C(\mathbb{R}^n).$$

$\delta(M)\in C'(\mathbb{R}^n)$ 是一种奇异广义函数。

- $\delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n)$

若作可逆变量代换 $\xi_j=\psi_j(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ j=1,2\cdots,n$

使得 M_0 对应到 $\xi^0=(\xi_1^0,\xi_2^0,\cdots,\xi_n^0)$，则

- $\delta(M-M_0)=|J|\delta(\xi-\xi^0),\qquad J=\dfrac{\partial(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)}{\partial(x_1,x_2\cdots,x_n)}\neq 0.$

2. 广义函数的偏导数

基本函数空间 $D(\mathbb{R}^n)=C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$， 设广义函数 $f(M)\in D'(\mathbb{R}^n)$，

$$\frac{\partial^m f(M)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}\in D'(\mathbb{R}^n),\ m=k_1+\cdots+k_n,$$ 定义如下

$$\left\langle \frac{\partial^m f(M)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\varphi(M)\right\rangle=(-1)^m\left\langle f(M),\frac{\partial^m \varphi(M)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}\right\rangle,\quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}^n),$$

检验函数

特别的，对于$\delta(M)\in D'(\mathbb{R}^n)$，

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^m \delta(M)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}\varphi(M)dM=(-1)^m\int_{\mathbb{R}^n}\delta(M)\frac{\partial^m \varphi(M)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}dM$$

$$=(-1)^m\frac{\partial^m \varphi(0,\cdots,0)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}.$$

例：（1） $H(x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq H(x_1)H(x_2)\cdots H(x_n)$

$$\frac{\partial^n H(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}=\delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n)$$

（2）

$$\delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\pi}\Delta_2\ln\dfrac{1}{r}, & n=2\\[2ex] \dfrac{1}{(2-n)\omega_n}\Delta_n\dfrac{1}{r^{n-2}}, & n\geq 3\end{cases}$$

(练习)

$r=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots x_n{}^2}$，其中 ω_n 为 n-1 维单位球面的面积

3. 广义函数的卷积

设 f,g 是两个广义函数,卷积 $h(M)=f(M)*g(M)$

仍确定一个广义函数，如下定义

$$\langle h(M),\varphi(M)\rangle=\langle f(M),\langle g(\xi),\varphi(M+\xi)\rangle\rangle,\quad \forall\varphi(M)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}),$$

形式上，仍记 $f(M)*g(M)=\int_{\mathbb{R}^n}f(\xi)g(M-\xi)d\xi$

例：$$\frac{\partial^{(n)}\delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}*f(M)=\delta(M)*\frac{\partial^{(n)}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}$$

（验证）

$$=\frac{\partial^{(n)}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}\qquad(\delta(M)*f(M)=f(M))$$

一般的,$L(f(M)*g(M))=L(f(M))*g(M)=f(M)*L(g(M))$

其中，L 是常系数线性偏微分算子。

4. 广义函数的Fourier 变换

设广义函数 $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $F[f]$, $F^{-1}[f]$ 也是广义函数，定义如下

$$\langle F[f]), \varphi \rangle = \langle f, F[\varphi] \rangle,$$

$$\forall \varphi(M) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\langle F^{-1}[f]), \varphi \rangle = \langle f, F^{-1}[\varphi] \rangle,$$

形式上，仍记

$$F[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot M} f(M) dM = \hat{f}(\xi) \qquad FT : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{1-1} \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

$$F^{-1}[\hat{f}](M) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot M} \hat{f}(\xi) d\xi \qquad f(M) \underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}} \hat{f}(\xi)$$

例：$\delta(M)\in \mathscr{L}'(\mathbb{R}^n)$,

$$F[\delta(M)](\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\cdot M}\delta(M)dM=1 \qquad \delta(M)\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}1 \qquad \boxed{1\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}(2\pi)^n\,\delta(\xi)}$$

又如：$e^{i\alpha\cdot M}\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}(2\pi)^n\delta(\xi-\alpha)$

$$\frac{\partial\delta(M)}{\partial x_j}\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}} i\xi_j \qquad x_j\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}(2\pi)^n i\frac{\partial\delta(\xi)}{\partial\xi_j}$$

$$\frac{\partial^2\delta(M)}{\partial x_j^2}\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}-\xi_j^2 \qquad -x_j^2\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}(2\pi)^n\frac{\partial^2\delta(\xi)}{\partial\xi_j^2}$$

$$\Delta_n\delta(M)\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}-\sum_{j=1}^n\xi_j^2 \qquad -\sum_{j=1}^n x_j^2\underset{F^{-1}T}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}}(2\pi)^n\Delta_n\delta(\xi)$$

预备知识：Green 公式

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n\ (n\geq 2)$ 为**非空有界开集**且边界 $\partial\Omega$ 光滑

$\forall u,v\in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\bar{\Omega})$

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div}(\vec{X})\,dV=\int_{\partial\Omega}\vec{X}\cdot\vec{n}\,dS}$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(v\nabla u)\,dV=\int_{\partial\Omega} v\nabla u\cdot\vec{n}\,dS$$

单位外法向量场

$$\Rightarrow\quad \int_\Omega v\Delta u\,dV=\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,dS-\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,dV$$

（第一 Green 公式）

$$\Rightarrow\quad \int_\Omega (u\Delta v-v\Delta u)\,dV=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dS$$

（第二 Green 公式）

这里 $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}=\nabla u\cdot\vec{n}$

§5. 2 $Lu=0$ 型方程的基本解

方程： $Lu(M)=f(M),\ M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$ （1）

其中，L 是常系数线性偏微分算子。

从现在起，我们视 f,u 为广义函数，它们在广义函数空间里可以自由地进行各种运算和交换。通过这种方式得到的解叫广义函数解，简称作广义解。

如果解是一个正则广义函数，甚至还有足够的光滑性，那么这种解是经典解。

定义 方程 $Lu(M)=\delta(M)$ 的解$U(M)$ 称作Lu=0 型方程的基本解。

特别地，基本解不是经典解，而是一种广义解。

物理意义：基本解可理解为点源产生的物理场，对一般的函数 $f(M)$，其对应的解是一般的源所产生的物理场。故基本解也叫点源函数。

分析：设 $Lu=0$ 型方程有基本解$U(M)$，即它满足

$$LU(M)=\delta(M),\ M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \tag{2}$$

$$\Rightarrow\quad LU(M-M_0)=\delta(M-M_0),\ M_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3 \tag{3}$$

注意 $f(M)=\delta(M)*f(M)=\int_{\mathbb{R}^3}\delta(M-M_0)f(M_0)dM_0$

若令 $u(M)=U(M)*f(M)=\int_{\mathbb{R}^3}U(M-M_0)f(M_0)dM_0$

则由积分叠加原理　　（或自由交换原则）

$$Lu(M)=L\int_{\mathbb{R}^3}U(M-M_0)f(M_0)dM_0$$

$$=\int_{\mathbb{R}^3}LU(M-M_0)f(M_0)dM_0=\int_{\mathbb{R}^3}\delta(M-M_0)f(M_0)dM_0$$

$$=f(M),\ M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

定理 设$U(M)$是 $Lu=0$ 型方程的一个基本解，则

$$u(M)=U(M)*f(M)=\int_{\mathbb{R}^3}U(M-M_0)f(M_0)dM_0 \qquad (4)$$

满足方程 $Lu(M)=f(M)$，$M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

注: 基本解未必唯一，可以相差齐次方程 $Lu=0$的解，

原非齐次方程（1）的解同样未必唯一。

例 求常微分方程$y'(x)+ay(x)=f(x)$ 的基本解，这里常数$a>0$.

解: 设$U(x)$为其基本解，即求解方程 $U'+aU=\delta(x)$

$\Rightarrow$ $\dfrac{d}{dx}(e^{ax}U)=e^{ax}\delta(x)$ $=\delta(x)$， 注意 $H'(x)=\delta(x)$

$\Rightarrow$ 可取基本解 $U(x)=e^{-ax}H(x)$

$\Rightarrow$ 非齐次方程 $y'(x)+ay(x)=f(x)$ 有解

$$y(x)=U(x)*f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\xi}H(\xi)f(x-\xi)d\xi$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-a\xi}f(x-\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{x}e^{-a(x-\xi)}f(\xi)d\xi.$$

例 求3维Helmholtz方程 $\Delta_3 u+cu=0$ 的基本解，其中c 为实常数。

解法1： 基本解满足方程

$$LU=\Delta_3 U+cU=\delta(x,y,z),\ M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

由于只有一个点源，方程具有对称性，可设方程有球对称解$U(r)$.

$\Rightarrow$ 当 $r>0$ 时，在球坐标系下方程可写成

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dU}{dr})+cU=0,\qquad \boxed{r>0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dU}{dr})+crU=\frac{d^2(rU)}{dr^2}+c(rU)=0$$

Case 1. $c=0,\quad (rU)''=0$ （Laplace方程）

$$rU=A+Br \;\Rightarrow\; U(r)=\frac{A}{r}+B$$

注意积分条件 $\int_{B_r}\Delta_3 U dV=\int_{B_r}\delta(x,y,z)dV=1,\quad B_r: x^2+y^2+z^2<r^2.$

$$\Rightarrow \int_{B_r}\Delta_3 U dV=\int_{\partial B_r}\frac{\partial U}{\partial n}dS=1,$$ (利用Green公式)

$$\Rightarrow \int_{\partial B_r}-\frac{A}{r^2}dS=1 \;\Rightarrow\; A=-\frac{1}{4\pi} \quad \Rightarrow\; U(r)=B-\frac{1}{4\pi r},\;\forall B\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ 可取基本解：$U(r)=-\dfrac{1}{4\pi r}.$ （想想：还有哪些非对称基本解）

Case 2. $c=-k^2<0,\ \ k>0,\qquad (rU)''-k^2(rU)=0$

$$rU = Ae^{-kr}+Be^{kr}\quad\Rightarrow\quad U(r)=A\frac{e^{-kr}}{r}+B\frac{e^{kr}}{r}$$

利用积分条件

$$1=\int_{B_r}\delta(x,y,z)dV=\int_{B_r}(\Delta_3 U-k^2U)dV=\int_{\partial B_r}\frac{\partial U}{\partial n}dS-\int_{B_r}k^2UdV=-4\pi(A+B),$$

简单说明

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\partial B_r}\frac{\partial U}{\partial n}dS-\int_{B_r}k^2UdV=\int_{\partial B_r}\left.\frac{\partial U}{\partial\rho}\right|_{\rho=r}r^2d\omega-\int_{B_r}k^2U\rho^2d\rho d\omega \\ \displaystyle\int_{\partial B_r}\frac{\partial\left(\frac{e^{\pm k\rho}}{\rho}\right)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=r}r^2d\omega-\int_{B_r}k^2\frac{e^{\pm k\rho}}{\rho}\rho^2d\rho d\omega=4\pi(\pm kr-1)e^{\pm kr}-4\pi k^2\int_0^r\rho e^{\pm k\rho}d\rho \\ \displaystyle=4\pi(\pm kr-1)e^{\pm kr}-4\pi k^2\frac{1}{k^2}[(\pm kr-1)e^{\pm kr}+1]=-4\pi\end{cases}$$

$$\boxed{d\omega=\sin\theta d\theta d\phi}$$

$\Rightarrow$ A, B 满足： $A+B=-\dfrac{1}{4\pi}$,

特别的，可取基本解：$U(r)=-\dfrac{e^{-kr}}{4\pi r}$ or: $U(r)=-\dfrac{e^{kr}}{4\pi r}$

Case 3. $c=k^2>0,\ k>0,$ $(rU)''+k^2(rU)=0$

$$rU=A\cos kr+B\sin kr \quad \Rightarrow \quad U(r)=A\frac{\cos kr}{r}+B\frac{\sin kr}{r}$$

利用积分条件

$$1=\int_{B_r}\delta(x,y,z)dV=\int_{B_r}(\Delta_3 U+k^2U)dV=\int_{\partial B_r}\frac{\partial U}{\partial n}dS+\int_{B_r}k^2UdV=-4\pi A,$$

$\Rightarrow$ $A=-\dfrac{1}{4\pi},\ \forall B\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ 可取基本解：$U(r)=-\dfrac{\cos kr}{4\pi r}$

问题： $-\dfrac{\sin kr}{4\pi r}$ 为什么不能做基本解 ？

或在复数意义下，可得 $$U(r) = A\frac{e^{-ikr}}{r} + B\frac{e^{ikr}}{r}$$

利用积分条件

$$1 = \int_{B_r} \delta(x,y,z)dV = \int_{B_r} (\Delta_3 U + k^2 U)dV = \int_{\partial B_r} \frac{\partial U}{\partial n}dS + \int_{B_r} k^2 U dV = -4\pi(A+B),$$

$\Rightarrow$ A, B 满足： $A + B = -\dfrac{1}{4\pi}$，

特别的，可取复基本解：

$$U(r) = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad or: \; U(r) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

解法2： Fourier变换法

$$LU = \Delta_3 U + cU = \delta(x,y,z),\ X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$(\xi,\eta,\zeta) = \vec{\rho},\quad \rho = |\vec{\rho}| = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, r = |X| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$U(\xi,\eta,\zeta) = \hat{U}(\vec{\rho}) = F[U(X)]$$

$$\Rightarrow \quad -\rho^2\hat{U}(\vec{\rho}) + c\hat{U}(\vec{\rho}) = 1,$$

$$\Rightarrow \quad \hat{U}(\vec{\rho}) = \frac{1}{c-\rho^2}$$

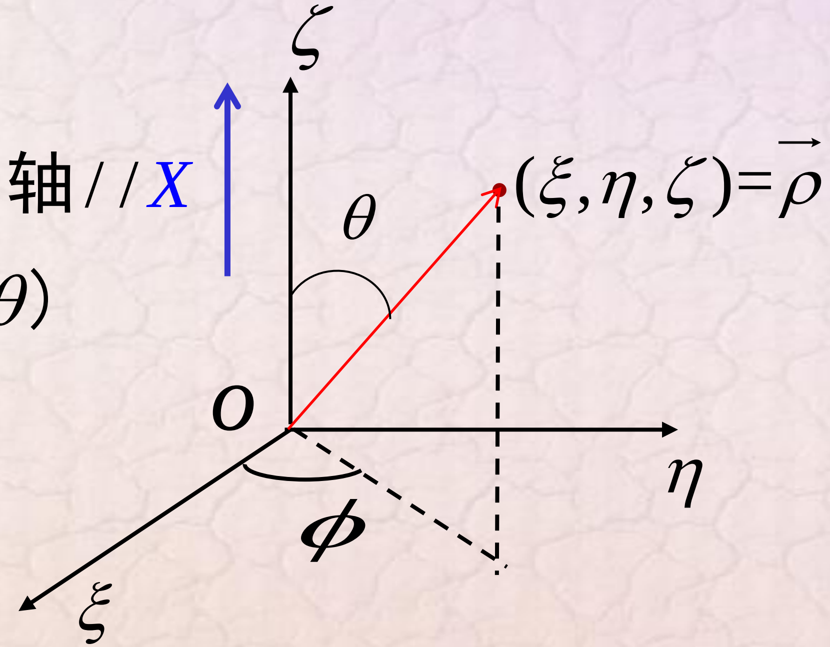
$$\Rightarrow \quad U(X) = F^{-1}[\hat{U}(\vec{\rho})] = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{c-\rho^2} e^{i(\xi x+\eta y+\zeta z)} d\xi d\eta d\zeta$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{c-\rho^2} e^{i\rho r\cos\theta} d\xi d\eta d\zeta,$$

θ 是 $\vec{\rho}$ 与 X 的夹角

由于积分是全空间的，被积函数关于向量X是轴对称的（想一想），对固定的 $X=(x,y,z)$，为方便计算，

选择（ξ,η,ζ）坐标系，使得ζ轴//X，



如图所示，可以建立球坐标变换 （$\rho,\ \phi,\theta$）

$$\begin{cases} \xi = \rho \sin\theta \cos\phi & (0 \le \theta \le \pi) \\ \eta = \rho \sin\theta \sin\phi & (0 \le \phi < 2\pi) \\ \zeta = \rho \cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ U(X) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}\frac{\rho^2}{c-\rho^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{i\rho r\cos\theta}\sin\theta d\theta d\phi d\rho$$

$$= \frac{-1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\rho^2}{c-\rho^2}\int_0^{\pi} e^{i\rho r\cos\theta} d\cos\theta d\rho \ = \frac{-1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\rho^2}{c-\rho^2}\left.\frac{e^{i\rho r\cos\theta}}{i\rho r}\right|_0^{\pi} d\rho$$

$$=\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{\infty}\frac{\rho\sin\rho r}{c-\rho^2}d\rho=\frac{-1}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho\sin\rho r}{\rho^2-c}d\rho$$

Case 1. $c=0$, $LU=\Delta_3 U=\delta(x,y,z)$, （Poisson方程）

$$\Rightarrow\quad U(X)=\frac{-1}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\rho r}{\rho}d\rho=-\frac{1}{4\pi r}.$$

Case 2. $c=-k^2<0$, $k>0$, $LU=\Delta_3 U-k^2 U=\delta(x,y,z)$,

$$\Rightarrow\quad U(X)=\frac{-1}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho\sin\rho r}{\rho^2+k^2}d\rho=\frac{-1}{4\pi^2 r}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho e^{i\rho r}}{\rho^2+k^2}d\rho$$

$$=\frac{-1}{4\pi^2 r}\operatorname{Im}\left\{2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{\rho e^{i\rho r}}{\rho^2+k^2},\rho=ik\right]\right\}$$

$$=-\frac{e^{-kr}}{4\pi r}$$

Case 3. $c=k^2>0,\quad k>0,\quad LU=\Delta_3 U+k^2U=\delta(x,y,z),$

$$\Rightarrow\quad U(X)=\frac{-1}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho\sin\rho r}{\rho^2-k^2}\,d\rho=\frac{-1}{4\pi^2 r}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho e^{i\rho r}}{\rho^2-k^2}\,d\rho$$

$$=\frac{-1}{4\pi^2 r}\operatorname{Im}\left\{\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{\rho e^{i\rho r}}{\rho^2-k^2},\rho=k\right]+\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{\rho e^{i\rho r}}{\rho^2-k^2},\rho=-k\right]\right\}$$

$$=-\frac{\cos kr}{4\pi r}.$$

例 求2维Helmholtz方程 $\Delta_2 u+cu=0$ 的基本解，其中c为实常数。

答案：Case 1. $c=0$ （Laplace方程）

$$U(r)=B-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r},\forall B\in\mathbb{R},$$

Case 2. $c=-k^2<0$，$k>0$

$$U(r)=-\frac{1}{2\pi}K_0(kr),$$

$K_0(\cdot)$为 0 阶虚变量Bessel函数，详见教材 P124

Case 3. $c=k^2>0$，$k>0$ （见教材P177：例5.2.3）

$$U(r)=\frac{1}{4}N_0(kr),$$

$N_0(\cdot)$为 0 阶Neumann函数，详见教材 P92

注：2维情形不合适使用Fourier变换法求取基本解。

课后补充作业：

求1维Helmholtz方程 $u''(x)+cu(x)=0$ 的基本解，其中c为实常数。

§5. 3 Poisson方程格林函数法

§5.3.1 Poisson方程的Green函数与解的积分公式

Poisson方程第I边值问题

$$\begin{cases}\Delta u(M) = -f(M),\ M=(x,y,z)\in V\subseteq \mathbb{R}^3, \\ u|_{\partial V} = \varphi(M)\end{cases} \quad (1)$$

物理上看，这是静电场的基本问题：空间区域V内有电荷体密度 $\rho(M) = -\varepsilon f(M)$，边界上电位已知为 $\varphi(M)$，求 V 内电位 $u(M)$.

由叠加原理，$u=v+w$, v, w分别满足

$$\begin{cases}\Delta v(M) = -f(M),\ M\in V, \\ v|_{\partial V} = 0\end{cases} \quad (2) \quad 及 \quad \begin{cases}\Delta w(M) = 0,\ M\in V, \\ w|_{\partial V} = \varphi(M)\end{cases} \quad (3)$$

其中v表示在边界接地条件下体内电荷产生的电场，w表示由边界约束引起的电场。

注意 $f(M)=\delta(M)*f(M)=\int_V \delta(M-M_0)f(M_0)dM_0$

如果求出点源 $\delta(M-M_0)$在齐次边界条件下产生的电场，通过积分叠加可以得到连续源 $f(M)$在齐次边界条件下产生的电场。

定义　定解问题

广义函数下

$$\begin{cases}\Delta G(M;M_0)=-\delta(M-M_0), & M,M_0\in V,\\ G|_{M\in\partial V}=0\end{cases} \qquad (4)$$

的解 $G(M;M_0)$ 称为Poisson第Ⅰ边值问题（1）的Green函数。

物理上看，Green函数就是边界接地条件下，置于V内M_0点电荷为$+\varepsilon$的点源在V内M点产生的电场，仍然是一个点源函数，一个基本解。

定理　设 $G(M;M_0)$ 为Poisson第Ⅰ边值问题（1）的Green函数，

则（1）的解为

$$u(M)=\int_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0-\int_{\partial V}\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}dS_0$$

Poisson公式

Proof. $u(M)=\int_V u(M_0)\delta(M-M_0)\,dM_0=-\int_V u(M_0)\Delta G(M;M_0)dM_0$

$$=-\int_V G(M;M_0)\Delta u(M_0)\,dM_0$$

$$\int_\Omega u\Delta v-v\Delta u\,dV=\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}dS$$

$$+\int_V G(M;M_0)\Delta u(M_0)\,dM_0-\int_V u(M_0)\Delta G(M;M_0)dM_0$$

$$=\int_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0+\int_{\partial V}G(M;M_0)\frac{\partial u}{\partial n}dS_0-\int_{\partial V}u(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}dS_0$$

$$=\int_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0-\int_{\partial V}\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}dS_0$$

$$\Delta u(M)=-f(M)$$
$$u|_{\partial V}=\varphi(M)$$

Green函数的性质

（1）$G(M;M_0)|_{M\in\partial V}=0,\quad M_0\in V.$ （2）$\displaystyle\int_{\partial V}\frac{\partial G}{\partial n}dS_0=-1.$

（3）对称性（倒易性）$G(M_1;M_2)=G(M_2;M_1),\quad M_1,M_2\in V.$

Proof. $G(M_1;M_2)-G(M_2;M_1)$

$$=\int_V\delta(M-M_1)G(M;M_2)\,dM-\int_V\delta(M-M_2)G(M;M_1)\,dM$$

$$=-\left[\int_V\Delta G(M;M_1)G(M;M_2)\,dM-\int_V\Delta G(M;M_2)G(M;M_1)\,dM\right]$$

$$=-\left[\int_{\partial V}G(M;M_1)\frac{\partial G(M;M_2)}{\partial n}dS-\int_{\partial V}G(M;M_2)\frac{\partial G(M;M_1)}{\partial n}dS\right]$$

$$=0-0=0$$

$$\Rightarrow\quad G(M_1;M_2)=G(M_2;M_1).$$

§5. 3. 2 Green函数求法

本小节主要考虑Poisson方程第I边值问题的Green函数。

Fourier方法是求Green函数的基本方法，但对于一些特殊的区域，可以采用一些特殊方法，如镜像法，共形变换法（适用于二维）。

1. 镜像法（或电位法、电像法）

Poisson方程第I边值问题的Green函数是下面定解问题的解 $G(M;M_0)$.

$$\begin{cases} \Delta G(M;M_0) = -\delta(M-M_0),\ M, M_0 \in V, \\ G|_{M\in\partial V} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

由叠加原理得 $G(M;M_0) = U(M;M_0) + g(M;M_0).$

其中 U 满足 $\Delta U(M;M_0) = -\delta(M-M_0).$ （2）

是 M_0 的点电荷产生的电场。

$g(M;M_0)$ 满足Dirichlet问题

$$\begin{cases} \Delta g(M;M_0)=0, & M,M_0\in V, \\ g|_{M\in\partial V}=-U(M;M_0)|_{M\in\partial V} \end{cases} \qquad (3)$$

是 M_0 的点电荷在边界上的感应电荷产生的电场。

借助Laplace方程的基本解结果，可取

$$U(M;M_0)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r(M,M_0)}, & n=2 \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\dfrac{1}{[r(M,M_0)]^{n-2}}, & n\geq 3 \end{cases} \qquad (4)$$

其中 ω_n 为 $n-1$ 维单位球面的面积, $r(M,M_0)$表示M,M_0之间的距离

区域外的点源在V 内产生的电场满足Laplace方程，可以将边界感应电荷产生的电场$g(M;M_0)$看作区域外某些虚设电荷产生的等效电场，这种来源于物理效应的方法叫**镜像法**。

它的关键困难在于如何在区域外合适地**虚设电荷**，对应某些特殊的区域如半空间、球域等等，可以用较直观的方法找到。

例 求上半空间V（$z>0$）Poisson方程第I边值问题的Green函数

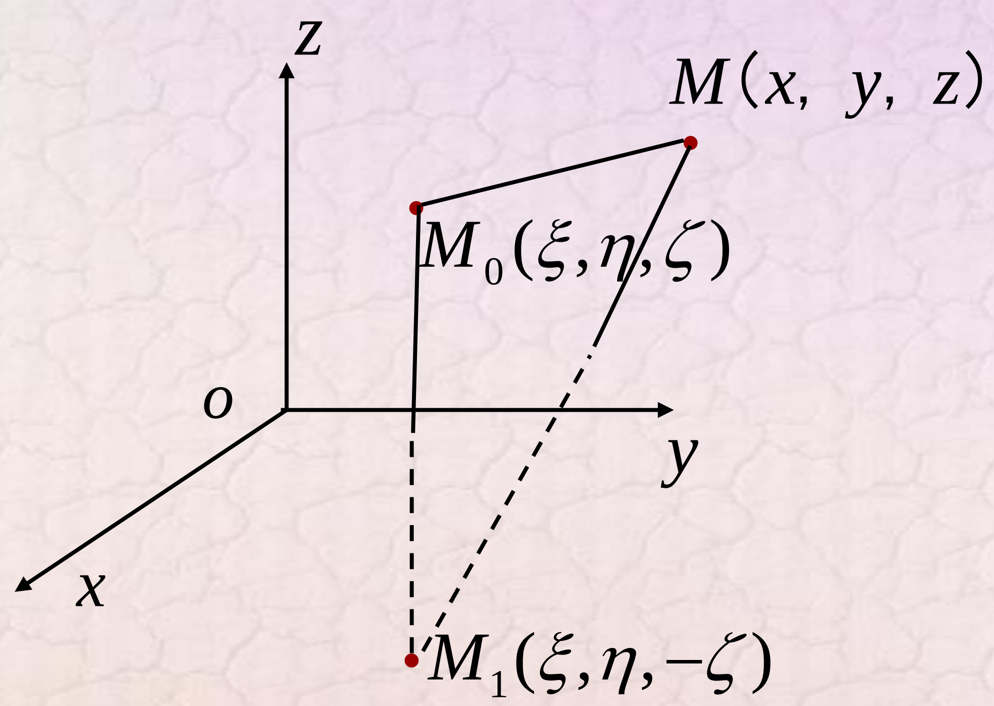
$$\begin{cases} \Delta G(M;M_0) = -\delta(M-M_0),\ M=(x,y,z), M_0=(\xi,\eta,\zeta)\in V, \\ G|_{z=0}=0 \end{cases}$$

V内M_0点的正电荷ε 在空间产生的电场为

$$U_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r(M,M_0)},\quad r(M,M_0)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

在边界$z=0$平面上

$$U_0|_{z=0}=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}},$$



可虚设电荷于M_0关于$z=0$平面对称的点$M_1(\xi,\eta,-\zeta)$，电荷量为$-\varepsilon$,

则此虚设电荷在空间产生的电场为

$$U_1=\frac{-1}{4\pi}\frac{1}{r(M,M_1)},\quad r(M,M_1)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2},$$

在边界$z=0$ 平面上

$$U_1|_{z=0}=\frac{-1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}}=-U_0|_{z=0},$$

$\Rightarrow$ 求上半空间Poisson方程第I边值问题的Green函数为

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r(M,M_1)}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right],$$

$z,\ \zeta>0$

$$\Rightarrow\quad \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\zeta=0}=-\left.\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0}=\frac{-z}{2\pi\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$\Rightarrow$ 上半空间Dirichlet问题　解的Poisson公式

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0, \quad z>0,\\ u|_{z=0}=\varphi(x,y)\end{cases}\qquad u(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{z\varphi(\xi,\eta)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\xi d\eta$$

练习 求上半平面H（y>0）Poisson方程第I边值问题的Green函数

答案： $$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\ln\frac{1}{r(M,M_1)}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},\quad y,\eta>0,$$

其中 $M_0(\xi,\eta),\ M_1(\xi,-\eta)$ 关于x 轴对称。

$\Rightarrow$ 上半平面Dirichlet问题 解的Poisson公式

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0, & y>0,\\ u|_{y=0}=\varphi(x)\end{cases}\qquad u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi\,.$$

例　求半径为R的球域内Poisson方程第I边值问题的Green函数

$$\begin{cases}\Delta_3 G(M;M_0)=-\delta(M-M_0),\ 0\le r<R,\\ G|_{r=R}=0\end{cases}$$

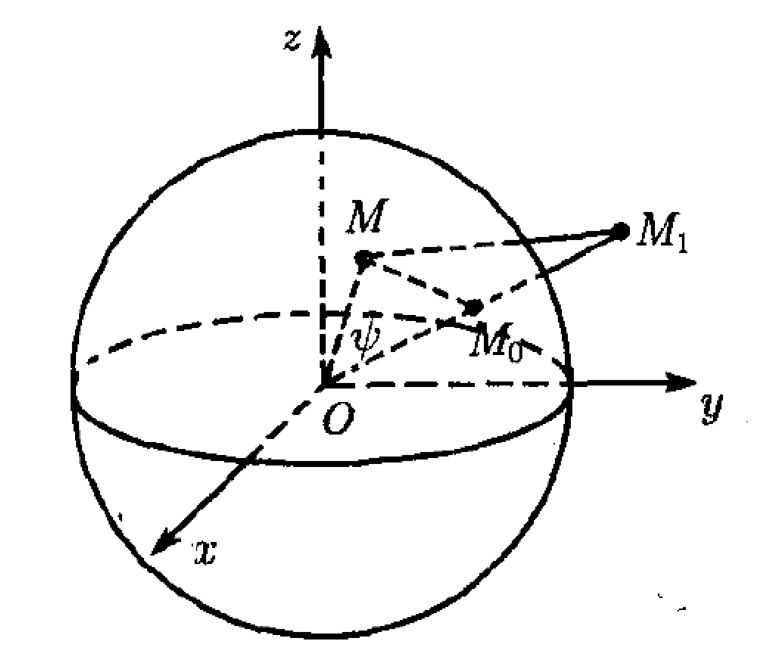
球内M_0点的正电荷ε在空间产生的电场为

$$U_0=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r(M,M_0)},\quad r(M,M_0)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

由于上面电场关于射线OM_0对称，

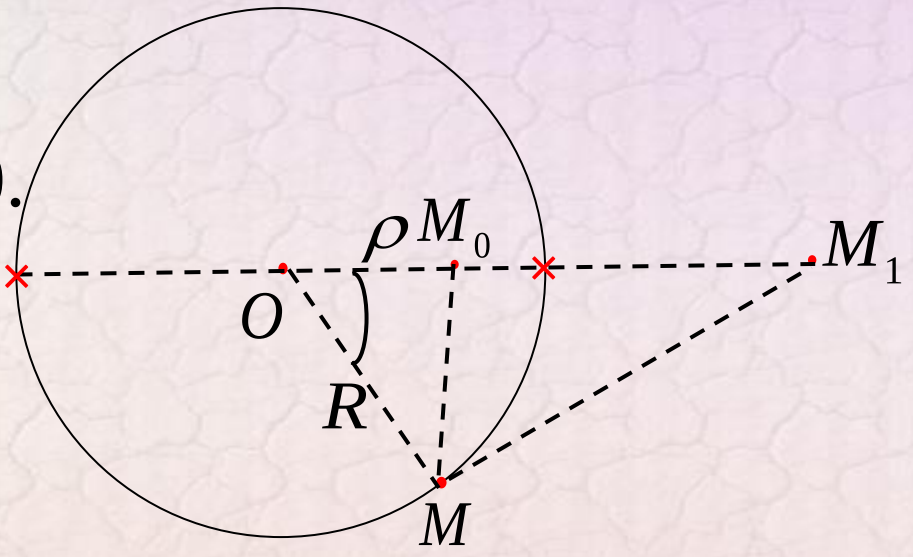
应虚设电荷$-Q$于射线OM_0的某一点M_1上，

虚设电荷与M_0点真实电荷在球面上产生的电位要抵消，即



对$\forall$球面上点M

$$U_0+U_1=\frac{1}{4\pi r(M,M_0)}-\frac{1}{4\pi}\frac{Q/\varepsilon}{r(M,M_1)}\equiv 0.$$



$$\Rightarrow \quad \frac{r(M,M_1)}{r(M,M_0)}=\frac{Q}{\varepsilon}\equiv const.$$

通过分析，发现可取 M_1 为 M_0 关于球面的对称点（又叫反演点），

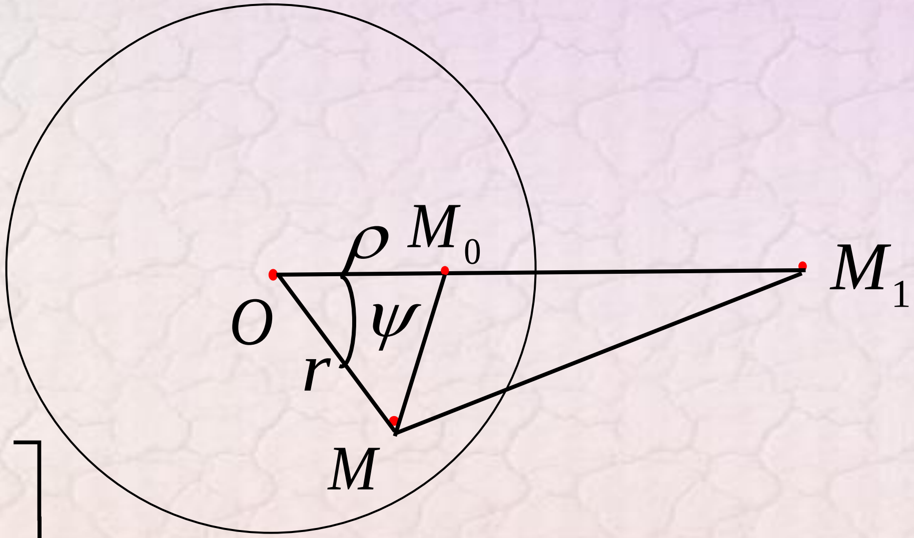
即满足： $r(O,M_0)\bullet r(O,M_1)=R^2.$

$$\Leftrightarrow \quad r(O,M_0)\bullet r(O,M_1)=\left[r(O,M)\right]^2 \Rightarrow \frac{r(O,M_1)}{r(O,M)}=\frac{r(O,M)}{r(O,M_0)}$$

$$\Rightarrow \Delta OM_0M \sim \Delta OMM_1 \Rightarrow \frac{r(M,M_1)}{r(M,M_0)}=\frac{r(O,M_1)}{r(O,M)}=\frac{r(O,M)}{r(O,M_0)}=\frac{R}{\rho}$$

可虚设电荷与M_0点关于球面的对称点M_1

电荷量为$-Q=-\frac{R}{\rho}\varepsilon.$



$\Rightarrow$ 球内Green函数

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r(M,M_1)}\right]$$

使用球坐标，记 $M=(r,\theta,\phi)$， $M_0=(\rho,\theta_0,\phi_0)$，$\psi=\angle M_0OM$

$$r(M,M_1)=\sqrt{r^2+(\frac{R^2}{\rho})^2-2r\frac{R^2}{\rho}\cos\psi}=\frac{1}{\rho}\sqrt{\rho^2r^2+R^4-2\rho rR^2\cos\psi}$$

$$\cos\psi=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)\bullet(\sin\theta_0\cos\phi_0,\sin\theta_0\sin\phi_0,\cos\theta_0)$$

$$=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)$$

$$\Rightarrow G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+\rho^2-2\rho r\cos\psi}}-\frac{R}{\sqrt{\rho^2 r^2+R^4-2\rho r R^2\cos\psi}}\right]$$

在球面上 $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\rho=R}=\left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=R}=\frac{R^2-r^2}{4\pi R(R^2+r^2-2Rr\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}$

$\Rightarrow$ 球域内Dirichlet问题 解的Poisson公式

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0, & 0\le r<R,\\ u|_{r=R}=\varphi(\theta,\phi)\end{cases}\quad u(r,\theta,\phi)=\frac{1}{4\pi R}\oiint_{S_R}\frac{R^2-r^2}{(R^2+r^2-2Rr\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}\varphi(\theta_0,\phi_0)dS_0$$

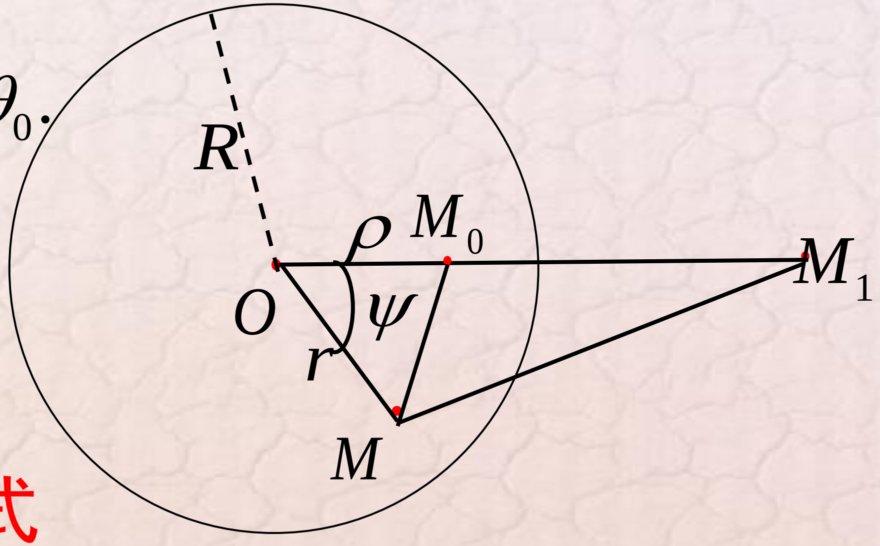
其中 S_R 为以O为中心，R 为半径的球面。

$$\Rightarrow u(O)=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint_{S_R}\varphi(M)dS \longleftarrow \boxed{\text{调和函数平均值性质}}$$

练习 求半径为R的圆盘内Poisson方程第I边值问题的Green函数

答案：$G(M;M_0)=\dfrac{1}{2\pi}\left[\ln\dfrac{1}{r(M,M_0)}-\ln\left(\dfrac{R}{\rho}\dfrac{1}{r(M,M_1)}\right)\right]$

$$=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{R^4+\rho^2r^2-2R^2\rho r\cos\psi}{R^2\left(r^2+\rho^2-2\rho r\cos\psi\right)},\quad \psi=\theta-\theta_0.$$



其中 $M_0(\rho,\theta_0), M_1(\dfrac{R^2}{\rho},\theta_0)$ 关于圆周对称。

$\Rightarrow$ 圆盘内Dirichlet问题 解的Poisson公式

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0, \quad 0\le r<R,\\ u|_{r=R}=\varphi(\theta)\end{cases} \quad u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\theta_0)}\varphi(\theta_0)d\theta_0 .$$

$$M=(r,\theta)$$

问题1　在球域或圆域上，若取 $M_0 = O$, 此时的Green函数是什么？

问题2　针对Poisson方程第I边值问题

（1）如何用镜像法求出半球或半圆盘上格林函数

（2）如何用镜像法求出第一卦（八分之一）空间或四分之一平面上格林函数

2. 共形变换法（不作要求）

此方法只在二维情形适用，它的主要思想是把一个区域共形映射到另外一个区域，然后建立两者间Green函数的对应。

定理1 设 Ω，$D\subseteq\mathbb{C}$ 为两个平面区域，$w=\varphi(z)$ 是将 Ω 映为 D 的共形映射。设 $z_0\in\Omega$，$w_0=\varphi(z_0)\in D$，Ω，D 上的Green函数分别为 $G_\Omega(z;z_0), G_D(w;w_0)$，则 $G_\Omega(z;z_0)=G_D(\varphi(z);\varphi(z_0))$.

特别的，对于单连通区域而言， Green函数有下面的形式

定理2 设 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 为单连通区域，$w=\varphi(z)$ 将 Ω 共形地映为单位圆盘 $D:|w|<1$，且将 $z_0=\xi+i\eta\in\Omega$ 映为w=0，则Ω 上的Green函数

$$G(x,y;\xi,\eta)=G(z;z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\varphi(z)|},\quad z=x+iy\in\Omega.$$

例 已知上半平面H（$y>0$）Poisson方程第I边值问题的Green函数

$$G_H(z;z_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{|z-z_0|}-\ln\frac{1}{|z-\overline{z}_0|}\right]\quad (z=x+iy,\ z_0=\xi+i\eta)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},\quad y,\eta>0,$$

求半径为R的圆盘上Poisson方程第I边值问题的Green函数$G(z;z_0)$.

解：记 $D_R:|w|<R$. 设$w=\varphi(z)$是将 D_R 共形地映为上半平面H的共形映射，且将$z_0=\xi+i\eta\in D_R$ 映为 $w_0=\varphi(z_0)=i\in H$.

可取 $w=\varphi(z)=\dfrac{\overline{w}_0R(z-z_0)-w_0(R^2-\overline{z}_0z)}{R(z-z_0)-(R^2-\overline{z}_0z)}=-i\dfrac{R(z-z_0)+(R^2-\overline{z}_0z)}{R(z-z_0)-(R^2-\overline{z}_0z)}$

则由定理1得知 $G(z;z_0)=G_H(\varphi(z);\varphi(z_0))=G_H(\varphi(z);i)$.

$$\Rightarrow G(z;z_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{|w-w_0|}-\ln\frac{1}{|w-\bar{w}_0|}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{|\varphi(z)-i|}-\ln\frac{1}{|\varphi(z)+i|}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\left|\frac{R(z-z_0)-(R^2-\bar{z}_0 z)}{2R(z-z_0)}\right|-\ln\left|\frac{R(z-z_0)-(R^2-\bar{z}_0 z)}{2(R^2-\bar{z}_0 z)}\right|\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{|z-z_0|}-\ln\frac{R}{|R^2-\bar{z}_0 z|}\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{|z-z_0|}-\ln\left(\frac{R}{|\bar{z}_0|}\frac{1}{\left|z-\frac{R^2}{\bar{z}_0}\right|}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r(z,z_0)}-\ln\left(\frac{R}{\rho}\frac{1}{r(z,z_1)}\right)\right],\ \rho=|\bar{z}_0|=|z_0|,\quad z_1=\frac{R^2}{\bar{z}_0}=\frac{R^2}{|z_0|^2}z_0.$$

3. Fourier方法

Fourier 方法 是求Green函数的基本方法，主要思想是按照特征函数作广义Fourier展开，包括分离变量与积分变换。

例： 求矩形区域 $\Omega=[0,L]\times[0,M]$ 上第I类边值Poisson 方程的 Green 函数

解： 问题等价于求解

$$\begin{cases}\Delta_2 G(x,y;\xi,\eta)=-\delta(x-\xi,y-\eta), & 0\le x,\xi\le L, 0\le y,\eta\le M,\\ G\big|_{x=0}=G\big|_{x=L}=G\big|_{y=0}=G\big|_{y=M}=0.\end{cases}$$

由第二章讨论可知：

矩形区域 $\Omega=[0,L]\times[0,M]$ 上Laplace算子

满足第I类齐次边值的特征值与特征函数为

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{M}\right)^2, \qquad \phi_{mn} = \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{M} \quad (m,n=1,2,\cdots)$$

利用Fourier 展开法可得（练习）

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{4}{LM}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{M}\right)^2\right]^{-1}\sin\frac{m\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi\eta}{M}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{M}$$

练习：求长方体$\Omega=[0,L]\times[0,M]\times[0,N]$上第I类边值Poisson 方程的Green 函数

$$\begin{cases} \Delta_3 G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = -\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta), & 0\le x,\xi\le L, 0\le y,\eta\le M, \\ & 0\le z,\zeta\le N, \\ G|_{x=0} = G|_{x=L} = G|_{y=0} = G|_{y=M} = G|_{z=0} = G|_{z=N} = 0. \end{cases}$$

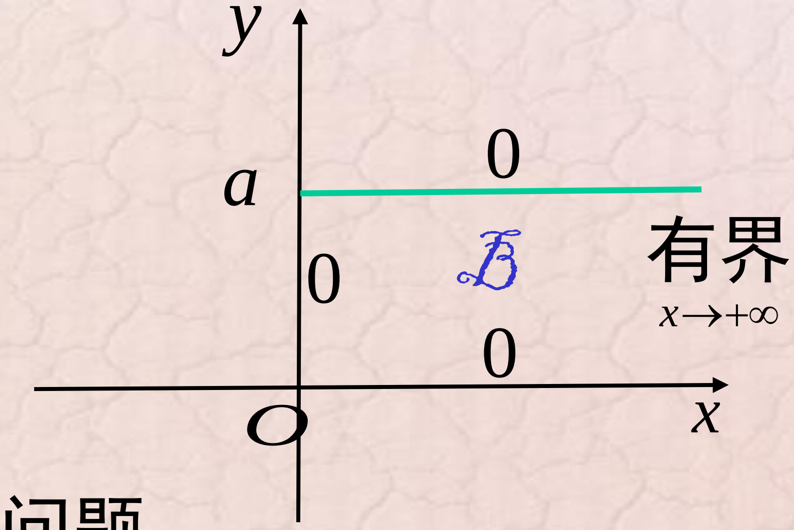
例：求半条形区域$\mathscr{B}$上Dirichlet问题的 Green 函数

解：问题等价于求解

$$\begin{cases} \Delta_2 G(x,y;\xi,\eta) = -\delta(x-\xi, y-\eta), \quad 0<x,\xi, \quad 0<y,\eta<a, \\ G\big|_{y=0} = G\big|_{y=a} = G\big|_{x=0} = 0, \\ G\big|_{x\to+\infty} \text{ 有界}. \end{cases}$$

考虑$\mathscr{B}$上Laplace算子相应特征值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0, \quad 0<x, \quad 0<y<a, \\ v\big|_{y=0} = v\big|_{y=a} = v\big|_{x=0} = 0, \\ v\big|_{x\to+\infty} \text{ 有界}. \end{cases}$$



令 $v(x,y) = X(x)Y(y)$ 分离出两个特征值问题

$$\begin{cases} X''+\alpha X=0, & 0<x<+\infty, \\ X(0)=0, & X(+\infty)\text{有界} \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''+\beta Y=0, & 0<y<a, \\ Y(0)=Y(a)=0 \end{cases}$$

其中，$\alpha+\beta=\lambda$，　分别解得

$$\alpha=\omega^2, \qquad X(x,\omega)=\sin\omega x, \qquad \omega>0,$$

$$\beta_n=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \qquad Y(y)=\sin\frac{n\pi y}{a}, \qquad n=1,2,\cdots$$

$\Rightarrow$　相应的特征值与特征函数

$$\lambda_{n\omega}=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2, \qquad v_{n\omega}(x,y)=\sin\omega x\sin\frac{n\pi y}{a}.$$

设　$G=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}C_n(\omega)\sin\omega x d\omega\sin\frac{n\pi y}{a}$，　代入$G$的方程，得

$$-\Delta_2 G=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^{+\infty} C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2\right]\sin\omega x d\omega\right\}\sin\frac{n\pi y}{a}=\delta(x-\xi,y-\eta),$$

$\delta(x-\xi,y-\eta)$关于$\left\{\sin\frac{n\pi y}{a}\right\}$进行正弦展开，

$\Rightarrow$ 对应Fourier系数

$$\int_0^{+\infty} C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2\right]\sin\omega x d\omega=\frac{2}{a}\int_0^a \delta(x-\xi,y-\eta)\sin\frac{n\pi y}{a}dy$$

$$=\frac{2}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{a}\delta(x-\xi)$$

上式又可以看作 $C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2\right]$ 的正弦变换，进行反变换可得

$$C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{a}\delta(x-\xi)\right]\sin\omega x dx$$

$$=\frac{4}{a\pi}\sin\frac{n\pi\eta}{a}\sin\omega\xi,$$

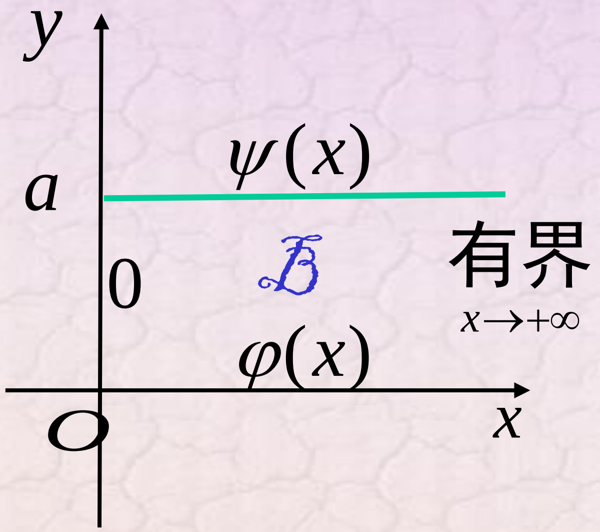
$$\Rightarrow \quad C_n(\omega)=\frac{4a}{\pi[(n\pi)^2+(a\omega)^2]}\sin\frac{n\pi\eta}{a}\sin\omega\xi$$

$\Rightarrow$ Green函数

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\xi\sin\omega x}{(n\pi)^2+(a\omega)^2}d\omega\right]\sin\frac{n\pi\eta}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial G}{\partial\eta}=\sum_{n=1}^{\infty}4n\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\xi\sin\omega x}{(n\pi)^2+(a\omega)^2}d\omega\right]\cos\frac{n\pi\eta}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}$$

例：求解 $\begin{cases} \Delta_2 u = 0, \quad 0 < x, \quad 0 < y < a, \\ u\big|_{y=0} = \varphi(x), \ \ u\big|_{y=a} = \psi(x), \ \ u\big|_{x=0} = 0, \\ u\big|_{x\to+\infty} \text{ 有界}. \end{cases}$



解：

$$u(x,y) = -\left[\int_0^{+\infty} \varphi(\xi)\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_{\eta=0} d\xi + \int_0^{+\infty} \psi(\xi)\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_{\eta=a} d\xi\right]$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(\xi)\frac{\partial G}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=0} d\xi - \int_0^{+\infty} \psi(\xi)\frac{\partial G}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=a} d\xi$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 4n\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{[\varphi(\xi)+(-1)^{n+1}\psi(\xi)]\sin\omega\xi\sin\omega x}{(n\pi)^2+(a\omega)^2} d\omega d\xi \sin\frac{n\pi y}{a}.$$

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial \eta} = \sum_{n=1}^{\infty} 4n\left[\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega\xi\sin\omega x}{(n\pi)^2+(a\omega)^2} d\omega\right]\cos\frac{n\pi\eta}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}}$$

§5. 3. 3 Poisson方程第II、III边值问题的Green函数

Poisson方程第III边值问题

$$
\begin{cases}
\Delta u(M) = -f(M),\ M \in V \subseteq \mathbb{R}^n, \\
\left(\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial V} = \varphi(M),
\end{cases}
\qquad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0 \qquad (1)
$$

定义 定解问题

$$
\begin{cases}
\Delta G(M;M_0) = -\delta(M - M_0),\ M, M_0 \in V \subseteq \mathbb{R}^n, \\
\left[\alpha G(M;M_0) + \beta \dfrac{\partial G(M;M_0)}{\partial n}\right]\Bigg|_{M \in \partial V} = 0
\end{cases}
\qquad (2)
$$

的解 $G(M;M_0)$ 称为Poisson第III边值问题（1）的Green函数。

此时（1）的解

$$u(M)=\int_V u(M_0)\delta(M-M_0)\,dM_0=-\int_V u(M_0)\Delta G(M;M_0)dM_0$$

$$=-\int_V G(M;M_0)\Delta u(M_0)\,dM_0$$

$$+\int_V G(M;M_0)\Delta u(M_0)\,dM_0-\int_V u(M_0)\Delta G(M;M_0)dM_0$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta u(M)=-f(M)\\&(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n})|_{\partial V}=\varphi(M)\end{aligned}}$$

$$=\int_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0+\int_{\partial V} G(M;M_0)\frac{\partial u}{\partial n}dS_0-\int_{\partial V} u(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}dS_0$$

而 $\int_{\partial V} G(M;M_0)\frac{\partial u}{\partial n}dS_0-\int_{\partial V} u(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}dS_0$

$$\boxed{(\alpha G+\beta\frac{\partial G}{\partial n})|_{\partial V}=0}$$

$$=\int_{\partial V}\left[G(M;M_0)\frac{\varphi(M_0)-\alpha u(M_0)}{\beta}-u(M_0)\frac{-\alpha G(M;M_0)}{\beta}\right]dS_0$$

$\Rightarrow$

$$u(M) = \int_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0 + \frac{1}{\beta}\int_{\partial V}\varphi(M_0)G(M;M_0)dS_0 \quad (3)$$

$$\text{or:} = \int_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0 + \frac{1}{\beta}\int_{\partial V}\varphi(M_0)\frac{-\beta\frac{\partial G(M;M_0)}{\partial n}}{\alpha}dS_0$$

$$= \int_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0 - \frac{1}{\alpha}\int_{\partial V}\varphi(M_0)\frac{\partial G(M;M_0)}{\partial n}dS_0 \quad (4)$$

当$\beta = 0$时，（1）退化为第I边值问题，我们已经有充分的讨论；

当$\alpha = 0$时，（1）退化为第II边值问题（取$\beta = 1$），

$$\left(\alpha G + \beta\frac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_{\partial V} = 0$$

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -f(M),\ M \in V \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial V} = \varphi(M), \end{cases} \quad (5)$$

但由
$$\begin{cases} \Delta G(M;M_0) = -\delta(M-M_0),\ M,M_0 \in V \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \left.\dfrac{\partial G(M;M_0)}{\partial n}\right|_{M\in\partial V} = 0 \end{cases}$$

定义的Green函数却不存在！（为什么？）

因此引入广义的Green函数

定义
$$\begin{cases} \Delta G(M;M_0) = -\delta(M-M_0) + \dfrac{1}{\upsilon},\ M,M_0 \in V \subseteq \mathbb{R}^n,\ \upsilon \text{ 为 } V \text{ 的体积} \\ \left.\dfrac{\partial G(M;M_0)}{\partial n}\right|_{M\in\partial V} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

的解 $G(M;M_0)$ 称为第II边值问题（5）的Green函数。

也可以用下面方式引入广义的Green函数

定义
$$\begin{cases} \Delta G(M;M_0) = -\delta(M-M_0) \quad M, M_0 \in V \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \left.\dfrac{\partial G(M;M_0)}{\partial n}\right|_{M\in\partial V} = -\dfrac{1}{S}, \end{cases} \qquad (7)$$

S 为 ∂V 的面积

的解 $G(M;M_0)$ 称为第II边值问题（5）的Green函数。

无论哪种定义，（5）在满足相容性条件下的解都可表为

$$u(M) = \int_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0 + \int_{\partial V} \varphi(M_0)G(M;M_0)dS_0 + const.$$

相容性条件 $-\int_V f(M)dM = \int_{\partial V} \varphi(M)dS.$

1 维Poisson方程第I边值问题的 Green 函数

例：
$$\begin{cases} \Delta_1 u = u''(x) = -f(x), \quad x \in (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

它的Green函数 $G(x;\xi)$ 是下面定解问题的解

$$\begin{cases} G''_{xx}(x;\xi) = -\delta(x-\xi), \quad x,\xi \in (a,b), \\ G(a,\xi) = G(b,\xi) = 0 \end{cases} \qquad \text{(B)}$$

如果求出 $G(x;\xi)$, 则（A）的解为 $\boxed{u(x) = \int_a^b f(\xi)G(x;\xi)d\xi}$

为方便运算，令 $s = x - \xi, \ \forall \xi \in (a,b)$. 设

$$\begin{cases} g''(s) = -\delta(s), \quad s \in (a-\xi, b-\xi), \\ g(a-\xi) = g(b-\xi) = 0 \end{cases} \qquad \text{(C)}$$

的解为$g(s)$，则 $G(x;\xi) = g(x-\xi)$，$x,\xi \in (a,b)$.

课后补充作业中已经求得一维Laplace方程

$$g''(s)=0$$

有基本解 $g_1(s)=\begin{cases} s, & s\ge 0, \\ 0, & s<0 \end{cases}$

为使得基本解同时满足（C）中的边界条件，我们取更一般的基本解

$$g(s)=g_1(s)+As+B=\begin{cases} s+As+B, & s\ge 0, \\ As+B, & s<0 \end{cases}$$

A, B 满足

$$\begin{cases} b-\xi+A(b-\xi)+B=0 \\ A(a-\xi)+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{\xi-b}{b-a} \\ B=\dfrac{(\xi-a)(\xi-b)}{b-a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad g(s)=g(x-\xi)=\begin{cases}\dfrac{(\xi-a)(x-b)}{b-a}, & \xi\le x\\ \dfrac{(\xi-b)(x-a)}{b-a}, & x<\xi\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad G(x;\xi)=\begin{cases}\dfrac{(\xi-a)(x-b)}{b-a}, & \xi\le x\le b\\ \dfrac{(\xi-b)(x-a)}{b-a}, & a\le x<\xi\end{cases}$$

易验证 (1) $G(a,\xi)=G(b,\xi)=0,\quad a<\xi<b$

(2) $\boxed{G(\xi;\eta)=G(\eta;\xi)},\quad a<\xi,\eta<b$

(3) $G'_x(\xi;\eta)-G'_x(\eta;\xi)=\mathrm{sgn}(\xi-\eta),\quad a<\xi,\eta<b.$

特别地， $G'_x(\xi^+;\xi)-G'_x(\xi^-;\xi)=1,\quad a<\xi^-<\xi\le\xi^+<b.$

§5.4　初值问题的基本解方法

本节主要用基本解方法来求解发展方程，如：$u_t = Lu, u_{tt} = Lu$，

并讨论热传导方程与波动方程初值问题的解。

这里所涉及的 L 是关于空间变量 M 的常系数线性偏微分算子。

1. $u_t = Lu$ 型方程初值问题的基本解

$$\begin{cases} u_t = Lu + f(M,t), \ M \in \mathbb{R}^n, \ \ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(M) \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

由叠加原理，$u=v+w$, v, w分别满足

$$\begin{cases} v_t = Lv, \ M \in \mathbb{R}^n, \ \ t > 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(M) \end{cases} \qquad (1) \qquad \begin{cases} w_t = Lw + f(M,t), \ M \in \mathbb{R}^n, \ \ t > 0, \\ w|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

考虑初值问题

$$\begin{cases} U_t = LU,\ M \in \mathbb{R}^n,\ t>0, \\ U|_{t=0} = \delta(M) \end{cases} \quad (3)$$

从物理上看，该方程的解（效应）是由点源函数$\delta(M)$引起的。

由于 $\varphi(M)=\delta*\varphi(M)$，根据叠加原理，

定解问题（1）的解（效应）是由连续源函数$\varphi(M)$引起的，故有

$$v(M,t)=U(M,t)*\varphi(M)=\int_{\mathbb{R}^n} U(M-M_0,t)\varphi(M_0)dM_0.$$

再由齐次化原理，定解问题（2）解为

$$w(M,t)=\int_0^t U(M,t-s)*f(M,s)ds,$$

这里 $U(M,t-s)*f(M,s)=\int_{\mathbb{R}^n} U(M-M_0,\ t-s)f(M_0,s)dM_0.$

定义 初值问题

$$\begin{cases} U_t = LU, \ M \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ U|_{t=0} = \delta(M) \end{cases}$$

的解$U(M,t)$称作$u_t = Lu$型方程初值问题(A)的基本解。

定理 设$U(M,t)$是$u_t = Lu$型方程初值问题(A)的基本解，则

$$u(M,t) = U(M,t) * \varphi(M) + \int_0^t U(M,t-s) * f(M,s)ds, \quad (4)$$

是初值问题（A）的解。

证明： 只验证$v(M,t) = U(M,t) * \varphi(M)$是初值问题（1）的解。

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[U(M,t) * \varphi(M)\right] = LU(M,t) * \varphi(M) = L\left[U(M,t) * \varphi(M)\right] = Lv,$$

$$v|_{t=0} = U(M,t) * \varphi(M)|_{t=0} = U(M,t)|_{t=0} * \varphi(M) = \delta(M) * \varphi(M) = \varphi(M).$$

2. 热传导方程的初值问题

第四章中我们用Fourier变换法求解了热传导方程初值问题，现用基本解法求解。

例：n 维热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta_n u + f(X,t), & X \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(X,0) = \varphi(X), & X \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (1)$$

先求解基本解

$$\begin{cases} U_t = a^2\Delta_n U, & X \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ U(X,0) = \delta(X), & X \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (2)$$

依旧使用 Fourier 变换（关于空间变量 X）

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{U}_t(\xi,t) = -a^2\rho^2\hat{U}(\xi,t), & \xi \in \mathbb{R}^n, t>0 \\ \hat{U}(\xi,0)=1, & \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad \rho = |\xi| = \sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}$$

$$\Rightarrow \hat{U}(\xi,t) = e^{-a^2\rho^2 t} = e^{-a^2(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)t}$$

$$\Rightarrow U(X,t) = F^{-1}[e^{-a^2(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)t}] = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n e^{-\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{4a^2 t}}$$

$\Rightarrow$ n 维热传导方程（1）的解

$$u(X,t) = U(X,t) * \varphi(X) + \int_0^t U(X,t-s) * f(X,s)ds,$$

$$= \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|X-\xi|^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)d\xi + \int_0^t \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-s)}}\right)^n ds \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|X-\xi|^2}{4a^2(t-s)}} f(\xi,s)d\xi$$

观察：不同维数热传导方程初值问题的基本解和一般解形式上相同。

练习 求左（右）行单波初值问题 $(a>0)$

$$\begin{cases} u_t = \pm a\, u_x + f(x,t), & x \in \mathbb{R}, \quad t>0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的基本解，并且利用基本解给出上述问题的解。

答案： $U(x,t) = \delta(x \pm at).$

$$u(x,t) = ?$$

3. $u_{tt} = Lu$ 型方程初值问题的基本解

考虑初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = Lu + f(M,t), \ M \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(M), \ u_t|_{t=0} = \psi(M) \end{cases} \qquad \text{(B)}$$

定义 初值问题

$$\begin{cases} U_{tt} = LU, \ M \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ U|_{t=0} = 0, \ U_t|_{t=0} = \delta(M) \end{cases} \qquad \text{(1)}$$

的解$U(M,t)$称作 $u_{tt} = Lu$ 型方程初值问题(B)的基本解。

由叠加原理，$u=g+v+w$, g, v, w 分别满足

$$\begin{cases} g_{tt} = Lg, \ M \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ g|_{t=0} = \varphi(M), \ g_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad \text{(2)}$$

$$\begin{cases} v_{tt} = Lv, \ M \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ v|_{t=0} = 0, \ v_t|_{t=0} = \psi(M) \end{cases} \qquad \text{(3)}$$

$$\begin{cases} w_{tt} = Lw + f(M,t), \ M \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ w|_{t=0} = 0, \ w_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

类似于前面的分析，由点源叠加效应以及齐次化原理，定解问题（3）（4）的解分别为

$$v(M,t) = U(M,t) * \psi(M) = \int_{\mathbb{R}^n} U(M - M_0, t)\psi(M_0)dM_0,$$

$$w(M,t) = \int_0^t U(M, t-s) * f(M,s)ds,$$ （*是关于空间变量的卷积）

下面考虑初值问题（2）

$$\begin{cases} g_{tt} = Lg, \ M \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ g|_{t=0} = \varphi(M), \ g_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解 $g(M,t)$.

令 $\vartheta(M,t)=\int_0^t g(M,s)ds$, 则 $\vartheta(M,t)$ 满足 $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial t}=g$,

以及 $\vartheta|_{t=0}=0$, $\vartheta_t|_{t=0}=g|_{t=0}=\varphi(M)$.

又 $\dfrac{\partial g_t}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}=Lg \Rightarrow g_t-g_t|_{t=0}=\int_0^t Lg(M,s)ds$

$$\Rightarrow \quad g_t=\int_0^t Lg(M,s)ds=L\left[\int_0^t g(M,s)ds\right]=L\vartheta$$

即 $\vartheta_{tt}=g_t=L\vartheta \Rightarrow$ ϑ 满足定解问题

$$\begin{cases}\vartheta_{tt}=L\vartheta,\ M\in\mathbb{R}^n,\ \ t>0,\\ \vartheta|_{t=0}=0,\ \vartheta_t|_{t=0}=\varphi(M)\end{cases} \quad (3)$$

（形式上似曾相识？）

$$\Rightarrow \quad \vartheta(M,t)=U(M,t)*\varphi(M)$$

$$\Rightarrow \quad g(M,t)=\frac{\partial \vartheta(M,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[U(M,t)*\varphi(M)\right].$$

定理 设$U(M,t)$ 是 $u_{tt}=Lu$ 型方程初值问题（**B**）的基本解，则

$$u(M,t)=U(M,t)*\psi(M)+\frac{\partial}{\partial t}\left[U(M,t)*\varphi(M)\right]$$
$$+\int_0^t U(M,t-s)*f(M,s)ds, \qquad (5)$$

是初值问题（**B**）的解。

注: $\int_0^t U(M,t-s)*f(M,s)ds=\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^n} U(M-M_0,\ t-s)f(M_0,s)dM_0$

$$=\int_{\mathbb{R}^n} dM_0\int_0^t U(M-M_0,\ t-s)f(M_0,s)ds.$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n} U(M-M_0,\ t)*f(M_0,t)dM_0.$$

第一个*是关于空间变量的卷积，第二个*理解为关于时间变量 t 的卷积。

4. 波动方程的初值问题

第四章中我们用Fourier变换法求解波动方程初值问题时，发现如果维数高于 1，则求Fourier反变换带来了现实困难。

现再次尝试用基本解法求解。

例：n 维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta_n u, & X \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(X,0) = \varphi(X), \quad u_t(X,0) = \psi(X), & X \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (1)$$

先考虑基本解方程

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 \Delta_n U, & X \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ U(X,0) = 0, \quad U_t(X,0) = \delta(X), & X \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (2)$$

使用 Fourier 变换（关于空间变量 X）

$$\Rightarrow\begin{cases}\hat{U}_{tt}(\xi,t)=-a^2\rho^2\hat{U}(\xi,t), & \xi\in\mathbb{R}^n, t>0, \quad \rho=|\xi|=\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}\\ \hat{U}(\xi,0)=0, \quad \hat{U}_t(\xi,0)=1, & \xi\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \hat{U}(\xi,t)=\frac{\sin a\rho t}{a\rho}$$

$$\Rightarrow U(X,t)=F^{-1}[\hat{U}(\xi,t)]=F^{-1}[\frac{\sin a\rho t}{a\rho}]$$

我们面临的困难：对一般的n，上面的Fourier反变换不容易得到。下面对维数n不超过3时，我们利用广义函数给出对应的基本解。

- **n=3** 为简化表达，使用通常的3维坐标表示

$$X=(x,y,z),\ (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\sim(\xi,\eta,\zeta)=\vec{\rho}$$

$$U(X,t)=F^{-1}[\frac{\sin a\rho t}{a\rho}]=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}e^{i(\xi x+\eta y+\zeta z)}d\xi d\eta d\zeta$$

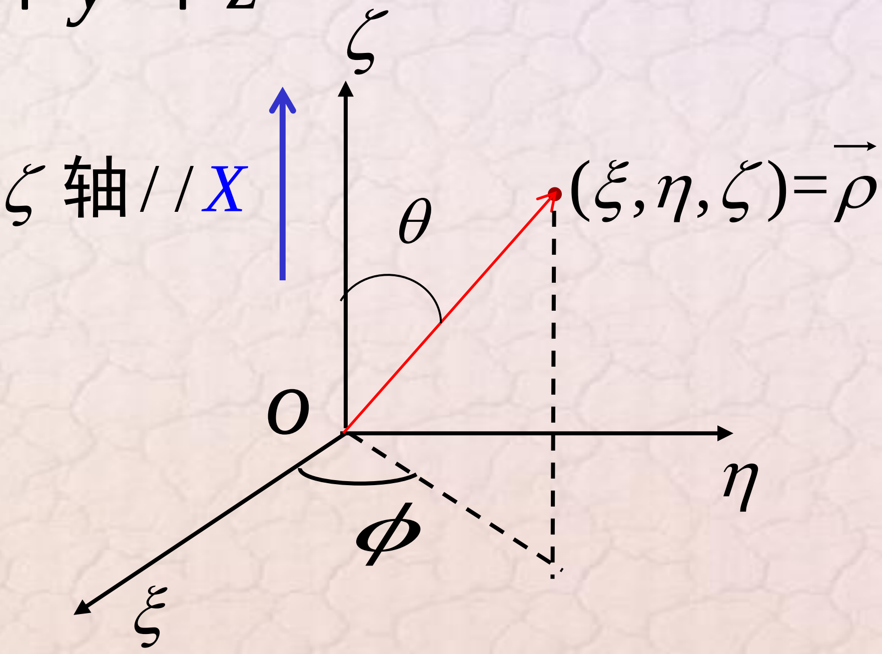
注意：$\xi x+\eta y+\zeta z = X\cdot\vec{\rho} = \rho r\cos\theta$， θ 是 $\vec{\rho}$ 与 X 的夹角

$$\rho = |\vec{\rho}| = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, r = |X| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

对固定的 $X=(x,y,z)$, 为方便计算，

选择（ξ,η,ζ）坐标系，使得 ζ 轴 $//X$，

如图所示，可以建立球坐标表示



$(\rho,\ \phi,\ \theta)$

$$\begin{cases}\xi = \rho\sin\theta\cos\phi & (0\le\theta\le\pi) \\ \eta = \rho\sin\theta\sin\phi & (0\le\phi<2\pi) \\ \zeta = \rho\cos\theta\end{cases}$$

$$U(X,t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}e^{i\rho r\cos\theta}d\xi d\eta d\zeta$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi e^{i\rho r\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\theta d\phi d\rho$$

$$=\frac{-1}{4\pi^2 a}\int_0^\infty\sin a\rho t\int_0^\pi e^{i\rho r\cos\theta}\rho d\cos\theta d\rho$$

$$=\frac{-1}{4\pi^2 a}\int_0^\infty\sin a\rho t\left.\frac{e^{i\rho r\cos\theta}}{ir}\right|_0^\pi d\rho=\frac{1}{2\pi^2 ar}\int_0^\infty\sin a\rho t\sin\rho r\,d\rho$$

$$=\frac{1}{8\pi^2 ar}\int_{-\infty}^\infty\left[\cos\rho(r-at)-\cos\rho(r+at)\right]d\rho$$

$$=\frac{1}{8\pi^2 ar}\int_{-\infty}^\infty\left[e^{i\rho(r-at)}-e^{i\rho(r+at)}\right]d\rho=\frac{1}{4\pi ar}\left[\delta(r-at)-\delta(r+at)\right]$$

$$=\frac{\delta(r-at)}{4\pi ar}\qquad(t>0)$$

对3维波动方程而言

$$u(X,t)=U(X,t)*\psi(X)+\frac{\partial}{\partial t}\left[U(X,t)*\varphi(X)\right]$$

$$U(X,t)*\psi(X)=\frac{\delta(r-at)}{4\pi ar}*\psi(X)$$

$$\boxed{r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\delta(r-at)}{r}\psi(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\int_0^{+\infty}\frac{\delta(r-at)}{r}\left[\oiint_{S_r^M}\psi(\xi,\eta,\zeta)dS\right]dr \qquad M=M(x,y,z)$$

$$\overset{r=at}{=}\frac{1}{4\pi a^2 t}\oiint_{S_{at}^M}\psi(\xi,\eta,\zeta)dS=t\overline{\psi}(at)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u(X,t)=t\overline{\psi}(at)+\frac{d}{dt}\left(t\overline{\varphi}(at)\right)}$$

- **n=1**

$$U(x,t)=F^{-1}[\frac{\sin at\xi}{a\xi}]=\frac{1}{2a}F^{-1}[\frac{e^{iat\xi}-e^{-iat\xi}}{i\xi}]$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}F^{-1}[e^{iat\xi}-e^{-iat\xi}](s)ds=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}[\delta(s+at)-\delta(s-at)]ds$$

$$=\frac{1}{2a}[H(x+at)-H(x-at)]$$

$$u(x,t)=U(x,t)*\psi(x)+\frac{\partial}{\partial t}\Big[U(x,t)*\varphi(x)\Big]$$

$$U(X,t)*\psi(x)=\frac{1}{2a}[H(x+at)-H(x-at)]*\psi(x)$$

$$U(X,t)*\psi(x)=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}[H(x+at-s)-H(x-at-s)]\psi(s)ds$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[U(x,t)*\varphi(x)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(s)ds\right]=\frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right)$$

$$\Rightarrow\qquad \boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds.}$$

• **n=2** $X=(x,y),\ (\xi_1,\xi_2)\sim(\xi,\eta)=\vec{\rho}$

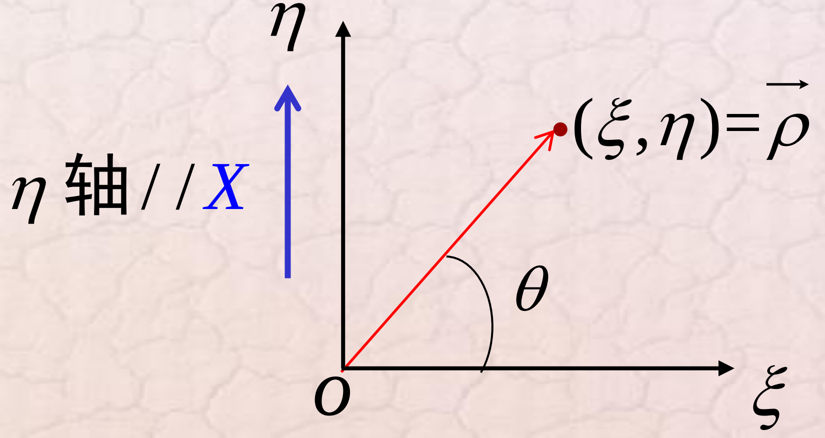
$$\rho=|\vec{\rho}|=\sqrt{\xi^2+\eta^2},\ r=|X|=\sqrt{x^2+y^2}$$

对固定的 $X=(x,y)$, 为方便计算,

选择 (ξ,η) 坐标系，使得 η轴$//X$,

如图所示，可以建立极坐标表示(ρ,θ)

$$\begin{cases}\xi=\rho\cos\theta\\ \eta=\rho\sin\theta\end{cases}\quad(0\le\theta<2\pi)$$



$\xi x+\eta y=X\cdot\vec{\rho}=\rho r\sin\theta$, θ是$\vec{\rho}$与ξ轴的夹角

$$U(X,t)=F^{-1}\left[\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\right]=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 a}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{\sin a\rho t}{\rho}e^{i\rho r\sin\theta}\rho d\rho d\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 a}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\sin a\rho t[\cos(\rho r\sin\theta)+i\sin(\rho r\sin\theta)]d\rho d\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 a}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\sin a\rho t\cos(\rho r\sin\theta)d\rho d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\int_0^\infty\sin at\rho J_0(\rho r)d\rho$$

$$\underset{k=r}{\overset{b=at}{=}}\frac{1}{2\pi a}\frac{H(at-r)}{\sqrt{|(at)^2-r^2|}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(k\sin\theta)d\theta=J_0(k)\qquad k>0}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}J_0(kx)\sin bxdx=\frac{H(b-k)}{\sqrt{|b^2-k^2|}}\qquad k>0,b>0}$$

这里 $J_0(\bullet)$ 为 0 阶第一类 Bessel函数，详见教材 P90.

对2维波动方程而言 $u(X,t)=U(X,t)*\psi(X)+\frac{\partial}{\partial t}\left[U(X,t)*\varphi(X)\right]$

$$U(X,t)*\psi(X)=\frac{1}{2\pi a}\frac{H(at-r)}{\sqrt{|(at)^2-r^2|}}*\psi(X)$$

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{H(at-r)}{\sqrt{|(at)^2-r^2|}}\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\iint_{D_{at}}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta$$

其中$D_{at}=\left\{(\xi,\ \eta)\,|\,(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\le a^2t^2\right\}$

$$\Rightarrow\quad u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{D_{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint_{D_{at}}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}.$$

•参考《**数学物理方法知识要点与习题解析**》，于涛，罗跃生著，P144.

5. 混合问题的Green函数（基本解）

Poisson 方程的Green 函数法有时也称为基本解法。

发展方程的混合问题一般采用分离变量法或积分变换法求解，也可以建立相应的Green函数（基本解）方法。

下面以一维波动方程混合问题为例

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le L. \end{cases} \tag{1}$$

第一种定义　如果函数 $G(x,t;\xi,\tau)$ 满足

$$\begin{cases} G_{tt} = a^2 G_{xx} + \delta(x-\xi)\delta(t-\tau), & 0 < x,\xi < L, t,\tau > 0, \\ G|_{x=0} = G|_{x=L} = 0, & 0 \le \xi \le L, t,\tau > 0, \\ G|_{t=0} = G_t|_{t=0} = 0, & 0 \le x, \ \xi \le L, \tau > 0, \end{cases} \tag{2}$$

则称G是波动方程混合问题（1）的Green函数。

利用Fourier方法或齐次化原理，可得

$$G(x,t;\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{L}{na\pi}\int_0^t \delta_n(s)\sin\frac{na\pi}{L}(t-s)ds\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

其中　$\delta_n(s) = \frac{2}{L}\int_0^L \delta(x-\xi)\delta(s-\tau)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\delta(s-\tau)\sin\frac{n\pi\xi}{L}$

$$\Rightarrow \ G(x,t;\xi,\tau)$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{na\pi}\sin\frac{na\pi}{L}(t-\tau)\sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi}{L}x, & t>\tau,\ \ 0\le x,\ \ \xi\le L \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \qquad (3)$$

一维波动方程混合问题（1）的解可表为

$$u(x,t)=\int_0^L\psi(\xi)\,G(x,t;\xi,0)d\xi+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L\varphi(\xi)\,G(x,t;\xi,0)d\xi \qquad (4)$$

$$+\int_0^t\int_0^L f(\xi,\tau)\,G(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau$$

第二种定义 如果函数 $U(x,t;\xi,\tau)$ 满足

$$\begin{cases} U_{tt}=a^2U_{xx}, \quad 0<x,\xi<L, t>\tau>0, \\ U|_{x=0}=U|_{x=L}=0, \quad 0\le\xi\le L, t>\tau>0, \\ U|_{t=\tau}=0, \ U_t|_{t=\tau}=\delta(x-\xi), \quad 0\le x,\ \xi\le L. \end{cases} \qquad (5)$$

则称U是波动方程混合问题（1）的Green函数。

利用Fourier方法，可得

$$U(x,t;\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{na\pi}\sin\frac{na\pi(t-\tau)}{L}\sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}, \quad t>\tau \qquad (6)$$

一维波动方程混合问题（1）的解可表为

$$u(x,t)=\int_0^L\psi(\xi)U(x,t;\xi,0)d\xi+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L\varphi(\xi)U(x,t;\xi,0)d\xi \qquad (7)$$
$$+\int_0^t\int_0^L f(\xi,\tau)U(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau$$

利用冲量原理，不难证明上面两种定义中Green函数间的关系

$$G(x,t;\xi,\tau) = \int_0^t \int_0^L \delta(\xi'-\xi)\delta(\tau'-\tau)U(x,t;\xi',\tau')d\xi'd\tau'$$

$$= \begin{cases} U(x,t;\xi,\tau), & \tau \in [0,t],\ 0 \le \xi \le L, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (8)$$

附：第三种定义　如果函数 $Q(x,t;\xi)$ 满足

$$\begin{cases} Q_{tt} = a^2 Q_{xx}, \quad 0 < x, \xi < L, t > 0, \\ Q|_{x=0} = Q|_{x=L} = 0, \quad 0 \le \xi \le L, t > 0, \\ Q|_{t=0} = 0, \ \ Q_t|_{t=0} = \delta(x-\xi), \quad 0 \le x, \ \ \xi \le L. \end{cases} \tag{9}$$

则称 Q 是波动方程混合问题（1）的Green函数。

利用Fourier方法，可得

$$Q(x,t;\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{na\pi} \sin\frac{na\pi t}{L} \sin\frac{n\pi\xi}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{10}$$

易见　$Q(x,t;\xi) = U(x,t;\xi,0)$

一维波动方程混合问题（1）的解可表为

$$u(x,t)=\int_0^L \psi(\xi)Q(x,t;\xi)d\xi+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L \varphi(\xi)Q(x,t;\xi)d\xi \qquad (11)$$
$$+\int_0^t\int_0^L f(\xi,s)Q(x,t-s;\xi)d\xi ds$$

利用冲量原理，可以证明第一、第三种定义中Green函数间的关系

$$G(x,t;\xi,\tau)=\int_0^t\int_0^L \delta(\xi'-\xi)\delta(t-\tau-s)Q(x,t;\xi')d\xi' ds$$
$$=\begin{cases} Q(x,t-\tau;\xi), & \tau\in[0,t],\ 0\le\xi\le L, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (12)$$

练习　一维热传导方程混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le L. \end{cases} \qquad (13)$$

(1) 分别给出Green函数的第一、第二种定义，

(2) 给出两种Green函数之间的关系，

(3) 利用第一种定义给出（13）的解。

注:（1）对于半无界区域上边值混合问题的Green函数可类似定义；

（2）涉及第II、III边值混合问题的Green函数可类似定义，从略；

（3）对于一般的方程 $u_t = Lu + f,\ u_{tt} = Lu + f$ 在三类边界条件下的混合问题，也可以类似给出Green函数的定义和解的积分表达式；

（4）高维情形Green函数（基本解）定义类似；

特别注意：边界条件必须是齐次的。

（5）Fourier 方法求取Green函数比较有效。