

基于对流传热和热辐射的回焊炉混合模型

摘要

本文主要就各温区的温度和传送带过炉速度对炉温曲线进行研究。

针对问题一，对焊接区域和炉内空气进行传热分析。首先计算出焊接区域的传热毕渥数，其值小于 0.1，可以认为焊接区域温度均匀分布，焊接区域中心温度变化于表面一致，不考虑内部热传导。考虑热传递和热辐射两种传热方式，建立三种非稳态传热模型，分别对附录已知数据进行拟合。经分析，热辐射和热对流的混合模型的拟合效果最好。对于问题一，用该模型进行求解，通过插值很容易导出每隔 0.5 s 焊接区域中心的温度表格（见表 result.csv）和温区任意一点的温度。其中：小温区 3、6、7 中点的焊接区域中心温度分别为 133.62°C、170.57°C、189.11°C。电子板离开小温区 8 时焊接区域中心温度为 219.47°C。

针对问题二，首先以最大传送带过炉速度为目标函数，传送带的过炉速度范围和制程界限为约束条件建立单目标优化模型。问题二各小温区温度较问题一有所变化，初值温度可能也会改变。对问题一建立的模型进行灵敏度分析，发现初值温度对模型的影响可以忽略。故利用问题一的非稳态模型，采用穷举遍历法，得到满足条件的速度优化区间：[65,72]；得到最大传送带过炉速度为 72cm/min。

针对问题三，问题三也是一个单目标优化问题。主要针对题干中“焊接区域中心的温度超过 217°C 的时间不宜过长”，“峰值温度也不宜过高”进行分析。基于制程界限，认为持续时间在区域[80, 90]为“时间过长”；峰值在[248,250]区间内为“温度过高”。基于问题二的约束条件，改变炉温曲线峰值高度、曲线超 217°C 的持续时长的取值范围。以炉温曲线从 217°C 到峰值温度覆盖面积最小为目标函数，建立单目标优化模型。利用 Mathematica 程序遍历搜寻最优解，最终得到问题三的结果：传送带过炉速度为 76cm/min，小温区 1~5 的设定温度为 166°C，小温区 6 设定温度为 185°C，小温区 7 设定温度 225°C，小温区 8-9 设定温度为 264°C，阴影部分面积为 335.6235°C·s。

针对问题四，问题四是一个多目标优化模型。希望得到以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线尽量对称。对此，以峰值温度为中心，与中心距离相等处的点斜率大小近似相等，由此建立一个新的目标函数。在问题三优化模型的基础上，问题四为双目标优化模型。再将双目标优化模型转化为单目标问题。采用线性加权求和法确定其权重，最终确定优化模型，编写 Mathematica 程序代码求解得到结果：过炉速度为 76cm/min，小温区 1-5 的设定温度为 166°C，小温区 6 设定温度为 185°C，小温区 7 设定温度 225°C，小温区 8-9 设定温度为 264°C，阴影部分面积为 335.6235°C·s

关键词：回焊炉、对流传热、热辐射、优化问题、穷举遍历法

一、问题重述

1.1 问题背景

随着集成电路行业快速发展，SMT（表面贴装技术）得到了广泛的推广与应用。回流焊技术是 SMT 工艺的核心。该技术通过加热，将电子元件自动焊接到电路板上。在这个生产过程中，让回焊炉的各部分保持工艺要求的温度，对产品质量至关重要。因此设计合理的回流焊技术工艺，对提高产品质量和可靠性具有重要意义。基于本题背景和内容，提取出以下关键信息和指标：

1.回焊炉内部从功能上可分成 4 个大温区：预热区、恒温区、回流区、冷却。传送带匀速进入回焊炉。回焊炉内共有 13 个区域：11 个小温区、炉前区域、炉后区域。每个小温区长度为 30.5cm，且相邻小温区之间的间隙为 5cm。炉前区域和炉后区域长度均为 25cm。

2.回焊炉内空气温度在启动后的短时间内会达到稳定状态。此后，回焊炉才能进行焊接工作。由此假定开始进行焊接工作时，炉内空气温度稳定。

3.生产车间的温度保持在 25℃。炉前区域、炉后区域以及小温区之间的间隙不做特殊的温度控制，其温度与相邻温区的温度有关，各温区边界附近的温度也可能受到相邻温区温度的影响。

4.各温区的温度和传送带的过炉速度是决定产品质量的两个重要因素。通过温度传感器测试某些位置上焊接区域中心的温度，形成炉温曲线。可以检测电路板上温度分布情况，避免温度过高或者过低造成产品质量不佳。电路板进入回焊炉开始计时。当焊接区域中心的温度达到 30℃时，温度传感器开始工作。

5.各小温区设定温度可以进行 $\pm 10^{\circ}\text{C}$ 范围内的调整。调整时要求小温区 1~5 中的温度保持一致，小温区 8~9 中的温度保持一致，小温区中的温度保持 25℃。传送带的过炉速度调节范围为 65 cm/min。

6.在回焊炉电路板焊接生产中，炉温曲线应满足一定的要求，称为制程界限（见表 1）

表 1 制程界限

界限名称	最低值	最高值	单位
温度上升斜率	0	3	$^{\circ}\text{C}/\text{s}$
温度下降斜率	-3	0	$^{\circ}\text{C}/\text{s}$
温度上升过程中在 $150^{\circ}\text{C}\sim 190^{\circ}\text{C}$ 的时间	60	120	s
温度大于 217°C 的时间	40	90	s
峰值温度	240	250	$^{\circ}\text{C}$

1.2 问题重述

根据题目和相关背景建立数学模型，主要解决以下问题：

问题一：

题中给出一次实验的设定数据及在设定条件下对电路板中心测温的炉温曲线数据。需要对焊接区域的温度变化规律建立数学模型。问题一给定传送带过炉速度和各温区温度的设定值，要求出焊接区域中心的温度变化情况，并列出小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度，画出相应的炉温曲线，并将每隔 0.5 s 焊接区域中心的温度存放在提供的 result.csv 中。

问题二：

问题二给定各温区的温度：设定值分别为 182°C （小温区 1~5）、 203°C （小温区 6）、 237°C （小温区 7）、 254°C （小温区 8~9），要求在满足制程界限的情况下，确定最大传送带过炉速度。

问题三：

在焊接过程中，焊接区域中心的温度超过 217°C 的时间不宜过长，峰值温度也不宜过高。理想的炉温曲线应使超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积（图 1 中阴影部分）最小。请确定在此要求下的最优炉温曲线，以及各温区的设定温度和传送带的过炉速度，并给出相应的面积。

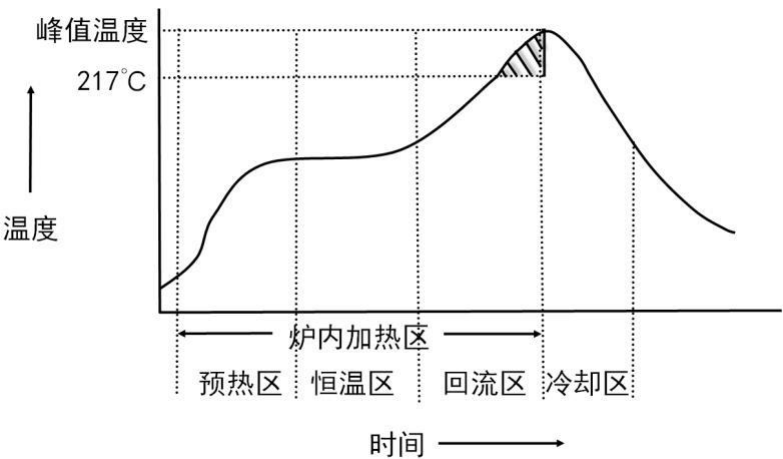


图 1 炉温曲线示意图

问题四：

在焊接过程中，除满足制程界限外，还希望以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称（参见图 1）。请结合问题 3，进一步给出最优炉温曲线，以及各温区设定的温度及传送带过炉速度，并给出相应的指标值。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

问题一给定了传送带过炉速度以及各温区的温度，要求炉温曲线以及小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度。题目附件中给出了某次实验中炉温曲线的数据，充分利用这些数据，通过拟合来确定模型和模型参数。

首先计算出焊接区域的毕渥数值小于 0.1，则可忽略焊接区域的热传导过程，主要分析焊接区域与炉内空气的热辐射和热对流两种传热方式，建立非稳态传热模型。我们一共用了三个模型来进行拟合，得出拟合效果最佳的模型，将问题一的已知条件代入模型中求解。

2.2 问题二的分析

问题二给定各温区的温度，要求在满足制程界限的情况下，确定最大传送带的过炉速度。首先以制程界限和传送带的过炉速度调节范围确定约束条件，传送带的过炉速度最大为目标函数，建立单目标优化模型。考虑温度初值的变化对模型一的影响。对温度初始值进行灵敏度分析，若初始值的变化使模型的

差异性增大，则问题二不能继续用问题一的模型参数。若初始值改变，模型相对稳定，则问题二可由问题一的模型直接求解。

2.3 问题三的分析

问题三在问题二的基础上，重新建立单目标优化模型。目标函数为超过 217℃ 到峰值温度所覆盖的面积最小。对于约束条件，还应该考虑在焊接过程中，焊接区域中心的温度超过 217℃ 的时间不宜过长和峰值温度不宜过高的两个约束条件。根据定义的“时间过长”和“温度过高”，分别更改炉温曲线超过 217℃ 的持续时间的范围和峰值温度的范围。建立新的约束条件。通过程序遍历计算出满足条件的面积最小值并得到最优炉温曲线。

2.4 问题四的分析

问题四希望得到以峰值温度为中心线的两侧超过 217℃ 的炉温曲线尽量对称。可处理为以峰值温度为中心，两侧曲线上对应位置、与中心距离相等处的点斜率大小近似相等，由此可以建立一个新的目标函数。在问题三优化模型的基础上，问题四为双目标优化模型。再将双目标优化模型转化为单目标问题。采用线性加权求和法确定其权重，最终确定优化模型。

三、模型假设

- 1. 生产车间的温度保持在 25℃。
- 2. 回焊炉进行焊接加工时，炉内空气温度稳定。
- 3. 假设电路板通过炉前区域到达第一温区的初始温度不会随着第一温区的温度变化而变化。
- 4. 炉壁内表面不吸收辐射热。

四、符号说明

符号	说明	单位
Q_1	对流传热速率	W
Q_2	辐射产热速率	W
α	对流传热系数	$W/(m^2 \cdot K)$
C	总辐射传热系数	$W/(m^2 \cdot K^4)$
$T(t)$	在时刻 t 时焊接区域的表面温度	$^{\circ}C$
T_i	第 i 个温区的温度	$^{\circ}C$
T_{top}	炉温曲线的峰值温度	$^{\circ}C$
v	传送带过炉速度	cm/min

T_{C_i}	第 i 与第 i+1 个温区之间的间隙温度	℃
u_i	第 i 段温区的温度	℃

注：未列出符号及重复的符号以出现处为准

五、模型准备

5.1 相关名词解释

1. 热导率 λ ：热导率的大小表征物质的导热能力，他是物质的一个重要热物性参数。热导率 λ 在数值上等于温度梯度为 $1^{\circ}\text{C}/\text{m}$ ，单位时间内通过单位传热面积的热量。

2. 对流传热系数 α ：对流换热速率，反应了对流传热的快慢，对流传热系数越大，表示对流传热越快。单位为 $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$

5.2 相关定律定理

1. 传热原理

传热是一种复杂的物理现象，根据不同的物理本质，传热过程可分为三种基本传热方式：

- (1) 热传导：介质内无宏观运动，通过微观粒子的热运动产生的热传递现象。
- (2) 热对流：流体中质点发生相对位移而引起的热量传递过程。
- (3) 热辐射：具有温度的物体能够辐射电磁波。

2. 傅里叶定律

在导热过程中，单位时间内通过给定截面的导热量，正比于垂直于该截面方向上的温度变化率和截面面积，而热量传递的方向则与温度升高的方向相反。

3. 牛顿冷却定律

牛顿冷却定律是温度高于周围环境的物体向周围媒质传递热量逐渐冷却时所遵循的规律。当物体表面与周围存在温差时，单位时间从单位面积散失的热量与温度差成正比，比例系数为热传导率^[1]。

4. 斯蒂芬-玻尔兹曼定律

玻尔兹曼定律是热辐射的基本定律，其表达式为

$$E = \varepsilon C_b \left(\frac{T}{100} \right)^4$$

其中：E 为实际物体的辐射能力， ε 为黑度， C_b 为黑体的辐射系数， $C_b = 5.67\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ 。

6. 传热毕渥数

传热毕渥数是传热学中的一个重要参数，在非稳态导热中，用来描述固体内部与外部热阻的分配比例。其表达式：

$$Bi = \delta h / \lambda$$

式中： h 为对流传热系数； λ 为固体导热系数； δ 为物体特征长度。对于厚度为 $2L$ 的平板，其 $\delta = L$ 。

由传热理论可知，当系统毕渥数 $Bi \leq 0.1$ 时，系统内部的温度梯度可以忽略不计，即系统的各点温度近似均匀分布。此时可以利用集中参数法研究问题。

六、问题一的模型建立与求解

6.1 问题分析

问题一给定了传送带过炉速度以及各温区的温度，要求炉温曲线。根据题目已知条件，首先算出焊接区域的毕渥数，再对电路板焊接区域进行分析，考虑三种基本传热方式，建立非稳态传热模型。利用附件中某次实验炉温曲线的数据，考虑三种不同的模型进行拟合，观察拟合曲线，得到一个最佳拟合模型。在此条件下，进而得出给定条件下的炉温曲线和其他参数值。具体的思路流程图如下：

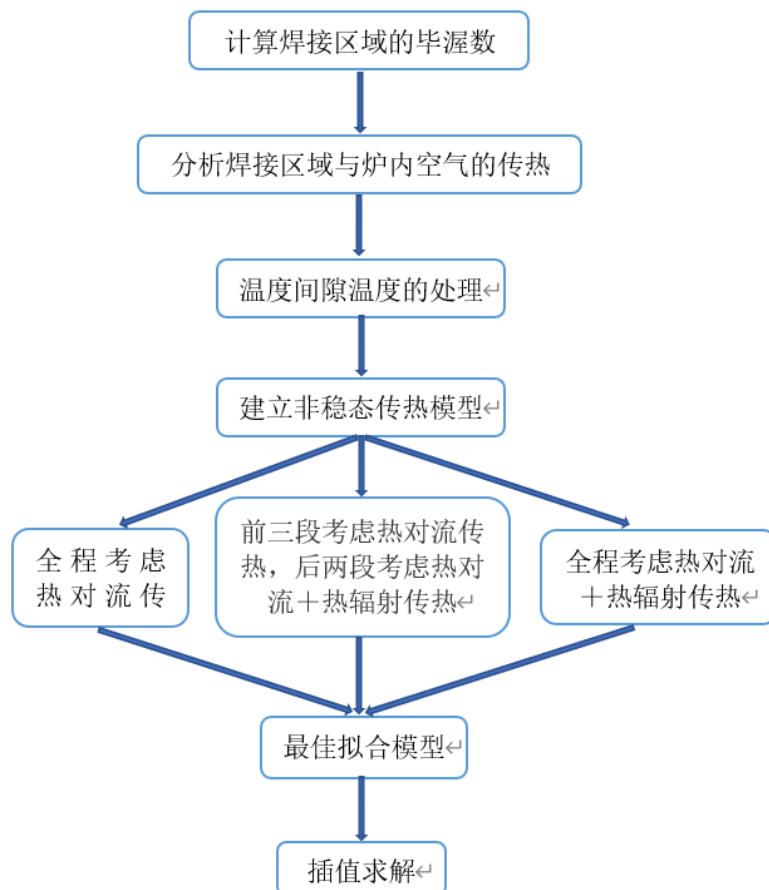


图 2 问题一思路流程图

6.2 模型建立

6.2.1 焊接区域毕渥数大小的计算

传热毕渥数的大小可以衡量整个焊接区域温度的均匀性。利用模型准备里面的毕渥数计算公式，得到焊接区域的毕渥数值小于 0.1。根据传热理论可知，焊接区域的内部热阻可以忽略不计，焊接区域中心的温度近似等于其表面温度。故不考虑内部热传导过程。在整个系统中，考虑焊接区域表面与炉内空气的热对流和热辐射的作用，根据热力学内容，建立一维非稳态传热模型。

6.2.2 回焊炉内的传热模型

1. 对流传热

流体流过物体表面时，若两者存在温度差，相互间会发生热传递，这种传热过程称为对流传热。在回焊炉中，炉内空气与焊接区域形成对流传热系统。牛顿冷却公式可以用来描述炉内空气与焊接中心区域表面复杂的换热过程：

$$Q_1 = \alpha A (T(t) - T_i)$$

式中： Q_1 为对流传热速率； A 为对流传热面积， $T(t)$ 为焊接区域的表面温度； T_i 为在第 i 个温区的温度； α 为对流传热系数。

$$\text{令 } K_1 = \alpha A$$

$$\text{则 } Q_1 = K_1 (T(t) - T_i)$$

2. 热辐射

当物体温度较高时，热辐射成为主要的传热方式。对于回焊炉的传热模型，主要考虑焊接区域与炉内空气的辐射传热作用，则焊接区域表面与炉内空气的辐射传热速率 Q_2 的表达式为：

$$Q_2 = CA \left[\left(\frac{T(t)}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_i}{100} \right)^4 \right]$$

式中： Q_2 为辐射传热速率； C 为总辐射系数； A 为辐射传热面积； $T(t)$ 为焊接区域的表面温度； T_i 为在第 i 个温区的温度。

$$\text{令 } K_2 = \frac{CA}{100^4}$$

$$\text{则 } Q_2 = K_2 [(T(t))^4 - (T_i)^4]$$

3. 辐射与对流的联合传热^[2]

当电路板焊接中心表面温度与周围空气的温度不同时，会从焊接中心表面向炉内空气辐射传热，同时也会有焊接中心表面与空气之间的对流传热，两者同时考虑：

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$\Rightarrow \frac{dT(t)}{dt} = K_1 (T(t) - T_i) + K_2 [(T(t))^4 - (T_i)^4]$$

6.3 模型求解

6.3.1 温区间隙的温度处理

炉前区域、炉后区域以及小温区之间的间隙不做特殊的温度控制，其温度与相邻温区的温度有关。我们假设不考虑各温区边界附近的温度受到相邻温区温度的影响。利用简单算术平均法求解小温区间隙的温度：

$$T_{C_i} = \frac{T_i + T_{i+1}}{2}, i = 1, 2, \dots, 10$$

得到 10 个小温区间隙的温度分布如下表所示

表 2 间隙温度分布表

间隙 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T_{C_i}/^\circ\text{C}$	175	175	175	175	185	215	245	255	140	25

6.3.2 牛顿冷却定律与热辐射混合模型的有限差分法求解法

本问题采用有限差分法，将模型一用 Taylor 公式展开，方程中的导数用划分出节点上的函数值的差商代替来进行离散，建立分段节点上的值为未知数的代数方程组。其基本思想是将连续定解区域用有限个离散点构成的节点代替，离散点称为划分节点；将连续定解区域内连续变量的函数用在节点上定义的离散变量函数近似；原方程和定解条件中的微商用差商近似；积分用积分和近似，于是将原微分方程与定解条件近似地代之以代数方程组，即为有限差分方程组；解方程组便能得到原问题在离散点上的近似解，再利用插值法从离散解中得到定解问题在整个区域上的近似解。

1、区域剖分：

按照一定规则将定义域分为若干小区域一维时间轴划分：取 $\tau=0.5$ ， $t=t_n=n\tau$ ， $n=0, 1, 2, 3\cdots$ ，节点 t_n 记为 n ，时间间隔 τ 称为时间步长。

2、方程化为差分格式

设 T 是 $\frac{dT(t)}{dt} = K_1(T(t) - T_i) + K_2[(T(t))^4 - (T_i)^4]$ 的解。

对于任何节点 (n) ， T 的微商与差商之间的关系式，将方程后向欧拉法展开：

$$\frac{T(t_n) - T(t_{n-1})}{\tau} = k_1(T(t_n) - T_i) + k_2(T_{t_n}^4 - T_i^4) + o(\tau)$$

实际步长 τ 是较小的量，这样可以用方程

$$\frac{T_n - T_{n-1}}{\tau} = k_1(T_n - T_i) + k_2(T_n^4 - T_i^4) \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

近视代替，其中 T_n 表示 $T(t_n)$ 的近视值

初始条件差分方程

$$T(19) = 30.3$$

3、根据初值可逐步算出

$$T_{20} = T_{19} + k_1 \tau (T_{19} - T_i) + k_2 \tau (T_{19}^4 - T_i^4)$$

$$T_{21} = T_{20} + k_1 \tau (T_{20} - T_i) + k_2 \tau (T_{20}^4 - T_i^4)$$

建立差分格式后，原问题化为代数方程组，解代数方程组，得到离散点上的近似值组成的离散解；

4、利用插值方法，从离散解得到定解问题在整个区域上的近似解。

6.3.2 用牛顿冷却定理进行拟合

根据小温区温度的不同将其分为五个段，即前五个温度相同的小温区为第一段，小温区 6 为第二段，小温区 7 为第三段，小温区 8、9 为第四段，小温区 10、11 为第五段。对每个段，根据每个段的数据进行牛顿冷却公式拟合，即只考虑对流热传递。拟合发现对前四段拟合比较好，第 5 段出现大的误差。我们考虑将前四段的拟合出来的 K_1 值取算数平均值。

为了使得问题的分析适当简化以及保证模型的合理性，模型的建立基于以下规则：

i) 间隙温度为相邻两个温区的平均值，间隙也用牛顿冷却定律拟合。

ii) 假定上面求出的 K_1 值适用于全过程，即在不同的温区，对流传热公式发生变化，但是 K_1 值不会变化。

iii) 假设电路板通过炉前区域到达第一温区的初始温度不会随着第一温区的温度变化而变化。

由上述规则，可知电路板刚到第一温区的时间和初始温度是已知的（起始点），建立参数为速度 v 和各个段温度列表的函数，通过迭代的方法获得整个区域的焊接元器件中心温度的时间变化点集（见代码），拟合出来后和附件炉温区在 10-11 段有误差。（见下图）

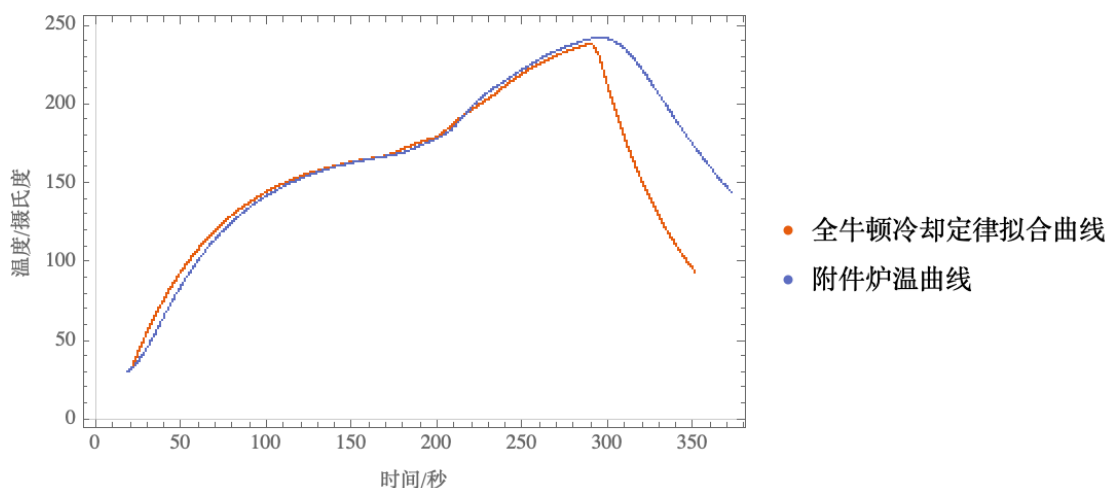


图 3 拟合与真实的炉温曲线对比图

6.3.2 模型改进

观察图 1，发现最后几段的拟合效果不好。因此要考虑到热辐射的影响。我们有两种解决方法：

(i) 前三段及间隙用牛顿冷却定律拟合，后面几段用对流和热辐射共同拟合。重新建立参数为速度 v 和各个段温度列表的函数，通过迭代的方法获得整个区域的焊接元器件中心温度的时间变化点集（见代码），再重新拟合附件中的炉温曲线。见图 4。

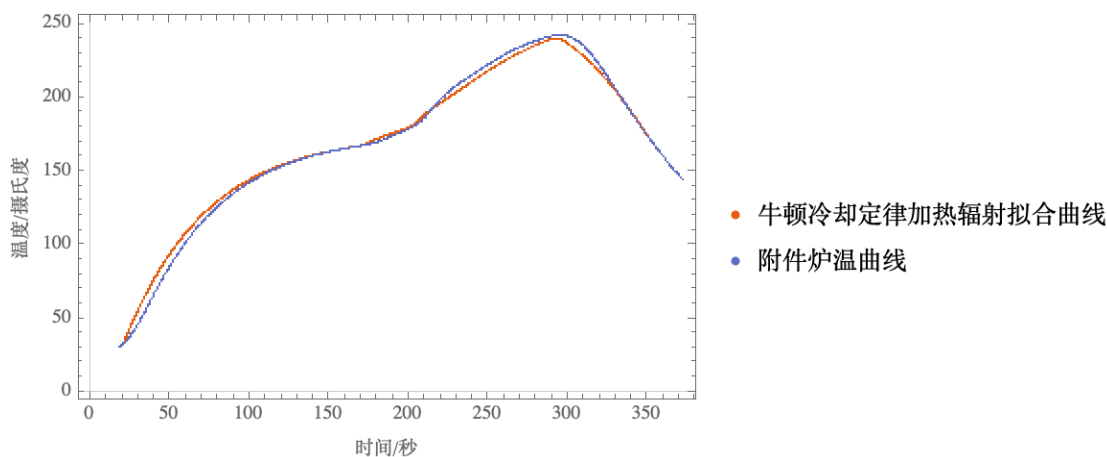


图 4 拟合与真实的炉温曲线对比图

(ii) 全程使用对流和热辐射传热，跟全过程考虑对流传热一样，对五段分别进行拟合，采用差分法（见代码）。拟合出来发现每段段 K_1 ， K_2 值都不一样，假设 K_1 ， K_2 在每段区域保持不变。建立参数为速度 v 和各个段温度列表的

函数，通过迭代的方法获得整个区域的焊接元器件中心温度的时间变化点集（见代码），再重新拟合附件中的炉温曲线。见图 5

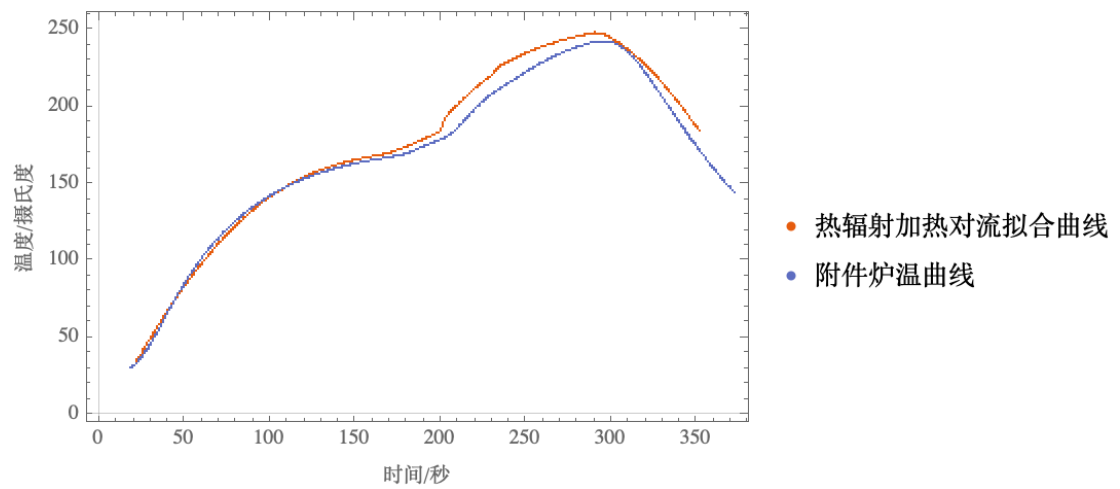


图 5 拟合与真实的炉温曲线对比图

6.3.3 问题一的求解

根据观察，两种方法拟合的效果都得到了提升，其中方法(i)的拟合曲线更接近真实的炉温曲线。由此我们采用方法(i)对问题一进行求解。

将题目一给定的各温区温度以及传送带过炉速度代入，得到问题一的炉温曲线。如图 6 所示。

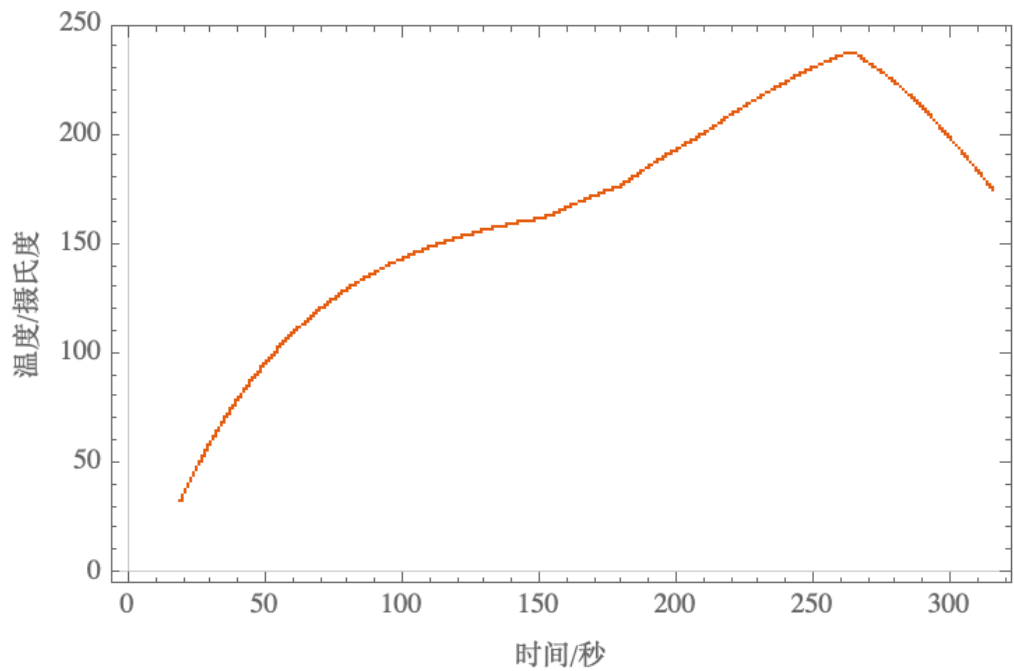


图 6 问题一的炉温曲线

为了更准确的给出温度表格和温区区域中心的温度，我们对拟合的炉温曲线进行插值，得到插值函数。很容易导出每隔 0.5 s 焊接区域中心的温度表格（详细数据见表 result.csv）和温区任意一点的温度。由此我们得到问题一的求解结果：

- ①小温区 3、6、7 中点的焊接区域中心温度分别为 133.623°C、170.567°C、189.109°C。
- ②电子板离开小温区 8 时焊接区域中心温度为 219.471°C。

七、问题二的模型建立与求解

7.1 问题分析

问题二给定各温区温度的设定值，要求出最大传送带过炉速度。问题二中各温区温度的设定值与问题一中的不同，由于各温区边界附近的温度可能会受到相邻温区温度的影响，因此要考虑温度初始值的变化。问题一的模型是建立在差分方程基础上，对差分方程的初始值进行灵敏度分析。若初始值的变化使模型的差异性增大，则问题二不能继续用问题一的模型参数。若初始值改变，模型相对稳定，则问题二可由问题一的模型直接求解。

问题二是一个单目标优化问题。最大传送带过炉速度为目标函数，传送带的过炉速度范围和制程界限为约束条件。通过穷举遍历法，对传送带的过炉速度（65~100 cm/min）进行穷举遍历，得到满足条件的速度区间，其中最大的速度值为目标函数的解。

7.2 模型建立

7.2.1 灵敏度分析

第一问给出了电路板的初始温度，而第二问只给出有各温区的温度值，现考虑初始温度对炉温曲线的影响。

初始温度对炉温曲线的影响

在第一问初始温度 t_0 的基础上，对它进行一扰动 Δt ，即初始温度变为 $t_0 + \Delta t$ 。现将十个不同初始温度带入问题一条件下的模型求解，得到如图不同初温下的炉温曲线。

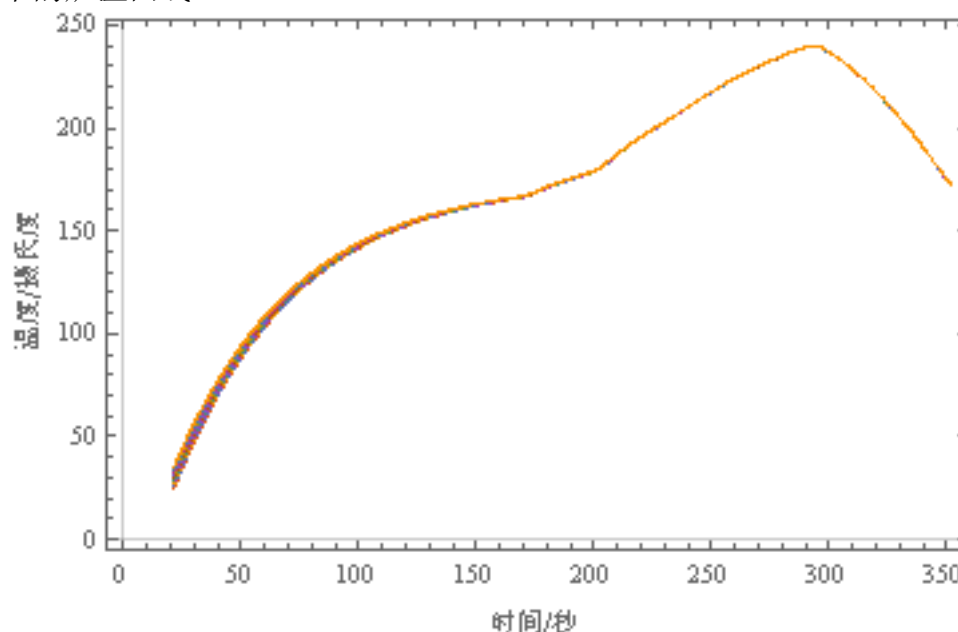


图 7 不同初始温度下的炉温曲线

通过观察炉温曲线，发现不同初始温度对炉温曲线的影响很小，因此可以将问题二的初始温度默认为与问题一相同

7.2.2 确定目标函数

给出各温区温度的设定值，在满足一定条件下，确定允许的传送带过炉速度达到最大：

$$\max v$$

7.2.2 确定约束条件

根据制程界限以及传送带的速度限制，整理出如下约束条件：

$$s.t. \begin{cases} 65 \leq v \leq 100 \\ 0 \leq \left| \frac{dT(t)}{dt} \right| \leq 3 \\ 60 \leq t_u \leq 120 \\ 60 \leq T(t) \leq 120 \\ 240 \leq T_{top} \leq 250 \\ 40 \leq t \leq 50 \\ T > 217^\circ\text{C} \end{cases}$$

7.2.3 建立单目标优化模型

结合上述目标函数和约束条件，建立传送带过炉速度的单目标优化模型：

$$\max v$$

$$s.t. \begin{cases} 65 \leq v \leq 100 \\ 0 \leq \left| \frac{dT(t)}{dt} \right| \leq 3 \\ 60 \leq t_u \leq 120 \\ 60 \leq T(t) \leq 120 \\ 240 \leq T_{top} \leq 250 \\ 40 \leq t \leq 50 \\ T > 217^\circ\text{C} \end{cases}$$

7.3 模型求解

制程界限中，对温度变化斜率、温度上升过程中在 $150^\circ\text{C} \sim 190^\circ\text{C}$ 的时间、温度大于 217°C 的时间、温度峰值均有约束。经分析容易得到，在各温区温度一定的情况下，约束条件主要对传送带过炉速度产生影响。采取穷举遍历法，对传送带的过炉速度进行穷举遍历，所有满足条件的速度得到一个速度优化区间，目标函数的值即为此优化区间的最大值。

用 Mathematica 进行遍历，得到优化区间为： $65^\circ\text{C} \sim 72\text{cm/min}$ 。故问题二所求最大传送带过炉速度为 72cm/min 。

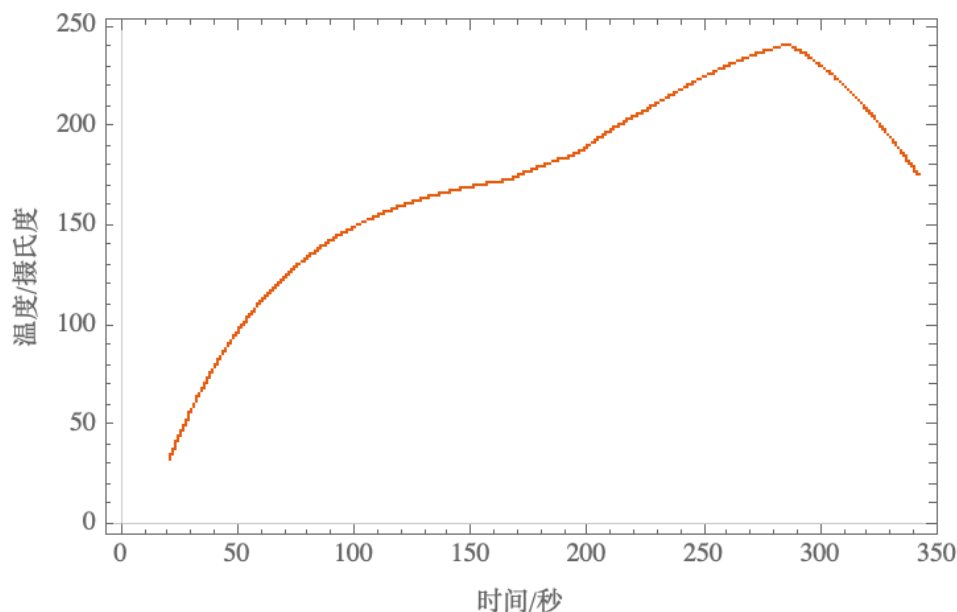


图 8 最大传送带过炉速度的炉温曲线

八、问题三的模型建立与求解

8.1 问题分析

问题三是一个单目标优化模型。已知理想的炉温曲线应使超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小。覆盖面积可用炉温曲线在对应区间内的积分值减去矩形区域面积，以该面积为目标函数。

在问题二的约束条件基础上，还应该考虑在焊接过程中，焊接区域中心的温度超过 217°C 的时间不宜过长和峰值温度不宜过高的两个约束条件。

对于该模型，不能简单使用 lingo 求解，故采用遍历算法搜索满足约束条件的最优解。

8.2 模型建立

8.2.1 确定目标函数

对于问题三，要求炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小，只需要分析升温的过程。以覆盖面积最小为目标函数，建立优化模型：

$$\min \int_{t_1}^{t_m} (T(t) - 217) dt$$

其中， $\frac{dT}{dt} \Big|_{t=t_1} > 0$ ，且 $T(t_1) = 217^\circ\text{C}$ ； t_m 为炉温曲线达到峰值时对应的

时刻，被积函数 $T(t)$ 为炉温曲线方程。

由于炉温曲线方程难以用连续的函数表示出来，因此采用微元法对模型二求解。将 $[t_1, t_m]$ 分成 n 个小区间，炉温曲线在 $[t_1, t_m]$ 区间内与时间轴围成的面积等于各个部分的面积之和。而阴影部分的面积可以用下面式子表示：

$$S_{\text{阴}} = \sum_{i=1}^n \Delta t \cdot [T(t_1 + i \cdot \Delta t) - 217]$$

8.2.1 确定约束条件

对约束条件进行分析

(1) 炉温曲线要满足制程界限

(2) 传送带的过炉速度调节范围为 65~100 cm/min。

(3) 时间“不宜过长”、温度“不宜过高”

制程界限要求炉温曲线的峰值不低于 240°C 且不高于 250°C。炉温曲线温度大于 217°C 的持续时间不低于 40s 且不高于 90s。在实际焊接过程中，焊接区域中心的温度超过 217°C 的时间不宜过长，峰值温度也不宜过高，否则会影响产品的质量。因此，对持续时间区间[40,90]进行划分，认为持续时间在区域[80, 90]为“时间过长”；同样对炉温曲线的峰值区间[240,250]进行划分，认为峰值在[248,250]区间内为“温度过高”。

8.2.3 建立单目标优化模型

根据定义的“时间过长”和“温度过高”，分别更改炉温曲线超过 217°C 的持续时间的范围和峰值温度的范围：

$$240 \leq \underset{T \geq 217^{\circ}C}{t} \leq 248$$

$$40 \leq T_{top} \leq 80$$

优化模型的决策变量为五段温区的温度 u_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$)，以及过炉速度 v ；过炉曲线满足制程界限。结合目标函数，建立单目标优化模型：

$$\min S_{\text{阴}} = \sum_{i=1}^n \Delta t \cdot [T(t_1 + i \cdot \Delta t) - 217]$$

$$s.t \left\{ \begin{array}{l} \text{温度界限} \left\{ \begin{array}{l} 165 \leq T_1 \leq 185 \\ 185 \leq T_2 \leq 205 \\ 225 \leq T_3 \leq 245 \\ 245 \leq T_4 \leq 265 \\ T_5 = 25 \end{array} \right. \\ \text{速度约束: } 65 \leq v \leq 100 \\ \text{制程界限} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \left| \frac{dT(t)}{dt} \right| \leq 3 \\ 60 \leq t_u \leq 120 \\ 240 \leq T_{top} \leq 250 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

8.3 模型求解

8.3.1 程序思路分析

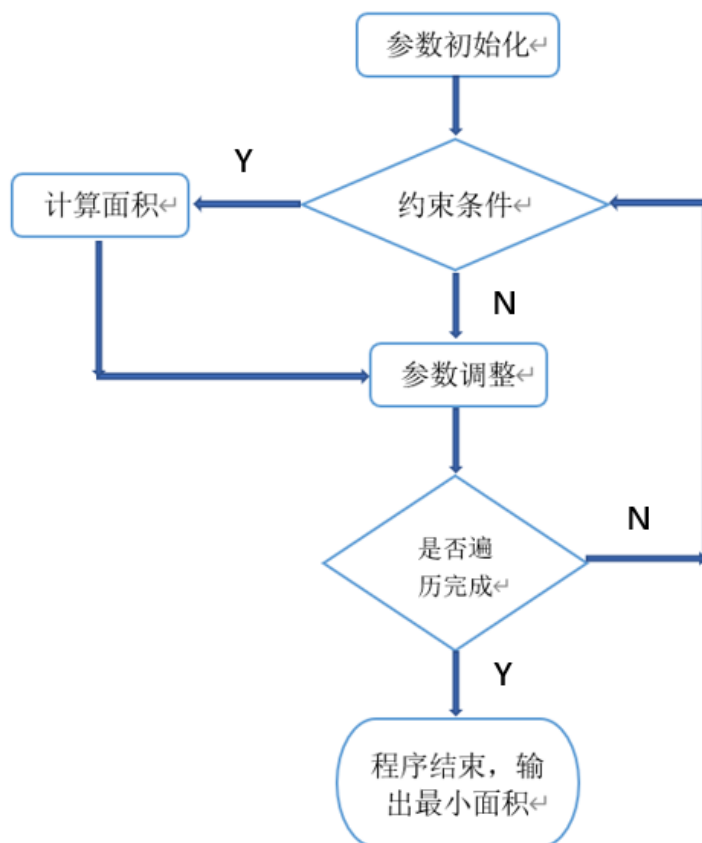


图 9 问题三的程序流程图

根据程序流程图，建立如下求解思路步骤：

首先，程序中定义参变量过炉速度 v ，前四段温区温度分别为 T_1, T_2, T_3, T_4 ，对它们初始化取取值范围的最小值。带入问题一建立的模型计算相关参数，判断是否满足约束条件。若满足约束条件，表示这一组数据符合要求，在该情况下计算出阴影部分的面积；若不满足约束条件，则需要调整参变量的值，之后判断是否全部遍历完成，若没有遍历完成，此时将调整后的参变量返回约束条件进行判断，重复进行程序流程，若遍历完成则结束程序，计算出面积的最小值。

8.3.2 求解模型

运行程序，得到满足约束条件下的最优炉温曲线。

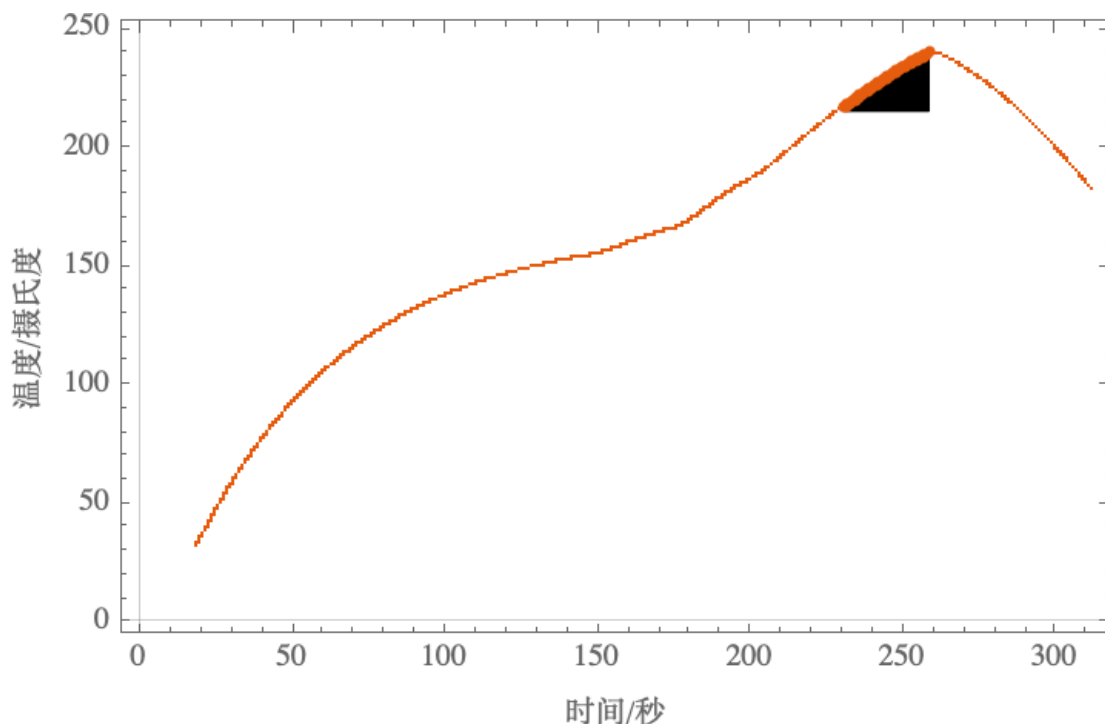


图 10 问题三炉温曲线

求得过炉速度为 76cm/min，小温区 1~5 的设定温度为 166°C ，小温区 6 设定温度为 185°C ，小温区 7 设定温度 225°C ，小温区 8-9 设定温度为 264°C ，阴影部分面积为 $335.6235^{\circ}\text{C} \cdot \text{s}$ 。

九、问题四的模型建立与求解

9.1 问题分析

在焊接过程中，除满足制程界限外，还希望以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称。在问题三的模型基础上，增加一个目标函数。

9.2 模型建立

9.2.1 曲线对称的处理

曲线对称即满足对称轴一边的点与它在对称轴另一端对应的点（两点到对称轴距离相同）处的斜率大小相等。

取 $T(t_1) = T(t_2) = 217^{\circ}\text{C}$ ， $t_1 < t_2$ 。

$$\text{令 } k_0 = \frac{\min\{(t_2 - t_m), (t_m - t_1)\}}{100},$$

曲线严格对称时，满足

$$\sum_{n=1}^{100} \left| \frac{dT}{dt} \Big|_{t=t_m - nk_0} + \frac{dT}{dt} \Big|_{t=t_m + nk_0} \right|^2 = 0$$

9.2.2 目标函数确定

(i) 与第三问相同，炉温曲线应使超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小，目标函数：

$$\min S_{\text{阴}} = \sum_{i=1}^n \Delta t \cdot [T(t_1 + i \cdot \Delta t) - 217]$$

(ii) 以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称,目标函数:

$$\min \sum_{n=1}^{100} \left| \frac{dT}{dt} \Big|_{t=t_m-nk_0} + \frac{dT}{dt} \Big|_{t=t_m+nk_0} \right|^2$$

9.2.3 多目标转化为单目标

1. 综合两个目标函数:

$$\min \alpha \sum_{n=1}^{100} \left| \frac{dT}{dt} \Big|_{t=t_m-nk_0} + \frac{dT}{dt} \Big|_{t=t_m+nk_0} \right|^2 + \beta \int_{t_1}^{t_m} [T(t) - 217] dt$$

2. 确定权重: 先对目标函数单独处理, 算出第一约束条件阴影面积最大值为 826.78, 最小值为 335.62, 第二约束条件“曲线对称”最大值 1.17, 最小值

1.37×10^{-6} 。分别得到他们的权重: $\frac{117}{116357}, \frac{82678}{116357}$

9.2.3 多目标优化模型的建立

$$\min \frac{82678}{116357} \sum_{n=1}^{100} \left| \frac{dT}{dt} \Big|_{t=t_m-nk_0} + \frac{dT}{dt} \Big|_{t=t_m+nk_0} \right|^2 + \frac{117}{116357} \int_{t_1}^{t_m} [T(t) - 217] dt$$

$$s.t \left\{ \begin{array}{l} \text{温度界限} \left\{ \begin{array}{l} 165 \leq T_1 \leq 185 \\ 185 \leq T_2 \leq 205 \\ 225 \leq T_3 \leq 245 \\ 245 \leq T_4 \leq 265 \\ T_5 = 25 \end{array} \right. \\ \text{速度约束: } 65 \leq v \leq 100 \\ \text{制程界限} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \left| \frac{dT(t)}{dt} \right| \leq 3 \\ 60 \leq t_u \leq 120 \\ 240 \leq T_{top} \leq 250 \\ 40 \leq t \leq 50 \\ T > 217^\circ \text{C} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

9.3 模型求解

9.3.1 求解步骤

Step1: 参数初始化。程序中定义变量依然是过炉速度, 前四段温区温度分别为 T_1, T_2, T_3, T_4 , 对它们初始化取取值范围的最小值。

Step2: 判断约束条件。利用对流传热和热辐射混合模型计算相关参数 K_1, K_2 , 并判断此时是否满足约束条件。若不满足约束条件, 则需要调整参变量的值。

Step3: 遍历全部参数取值。若没有遍历完成, 返回 step2; 变量完成, 进入 step4.

Step4: 输出最优各温区设定的温度及传送带过炉速度指标值。

9.3.2 求解结果

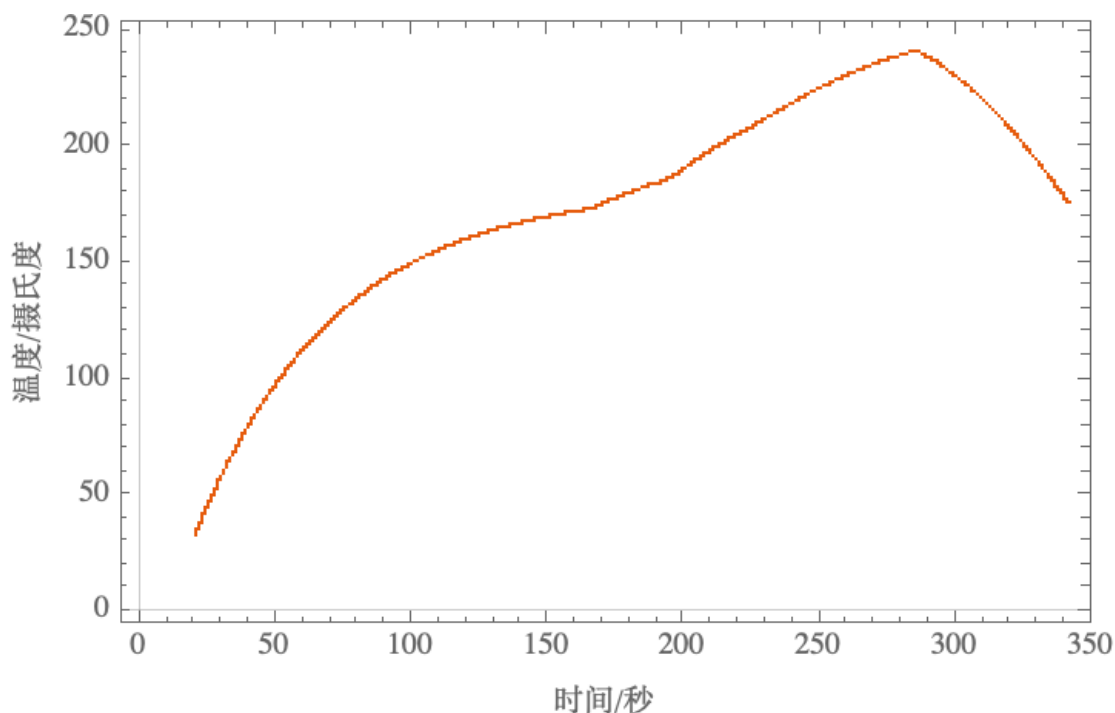


图 11 问题四炉温曲线

结果显示，得到过炉速度为 76cm/min ，小温区 1-5 的设定温度为 166°C ，小温区 6 设定温度为 185°C ，小温区 7 设定温度 225°C ，小温区 8-9 设定温度为 264°C ，阴影部分面积为 $335.6235^{\circ}\text{C}\cdot\text{s}$

十、模型的评价

10.1 模型的优点

- (1) 建立的对流传热与热辐射混合模型，对附件中给出的数据拟合的很好。
- (2) 使用有限差分法对微分方程进行求解。后向欧拉法在保证结的稳定性的基础上，进一步保证解的收敛性。
- (3) 考虑到毕渥数可以衡量整个焊接区域温度的均匀性，故不考虑内部热传导过程，使论文结构更严谨。

10.2 模型的缺点

- (1) 两温区间隙温度，处理得过于简单。
- (2) 对于问题三中，时间不宜过长，温度不宜过高，自定义其含义，夹杂很大的主观因素。

十一、参考文献

[1] 牛顿冷却定律

<https://baike.baidu.com/item/%E7%89%9B%E9%A1%BF%E5%86%B7%E5%8D%B4%E5%AE%9A%E5%BE%8B/10142410?fr=aladdin>

[2] 王志魁. 化工原理[M]. 北京: 化学工业出版社, 2017, 128~180

[3] 许永贵, 段振, 陈光. 加热室炉温控制数学模型的研究[J]. 华东冶金学院学报, 1994, (02): 61-71.

[4]火树鹏,邵柏华. 关于热处理加热炉的有效加热区炉温均匀性及保温精度[J]. 铸锻热, 1989, (01):22-23+15.

[5]汤宗健,谢炳堂,梁革英. 回流焊炉温曲线的管控分析[J]. 电子质量, 2020, (08):15-19+23.

附录

附录 1: 问题一的代码

```
1. (*数据导入*)
2. data=Import["/Users/yangyongkang/Downloads/CUMCM2020Probelms/A/附件.xlsx", "Data"][[1]][[2;;]];
3. (*附件炉温曲线*)
4. Export["/Users/yangyongkang/Desktop/2020 数学建模/附件炉温曲线.png",
5. ListPlot[data, PlotTheme->"Scientific", FrameLabel->{"时间/秒", "温度/摄氏度"}]];
6. (*约束条件*)
7. constrainint=(Or@@Take[Table[150/7+213/7 (-1+k)<=Indexed[x,1]<=333/7+213/7 (-1+k), {k,1,11}], #]&/@{{1,5},{6,6},{7,7},{8,9}}]~Append~(Indexed[x,1]>291+30/7);
8. 7},{8,9}}]~Append~(Indexed[x,1]>291+30/7);
9. (*非间隙区数据*)
10. data1=Select[data, Function[{x}, #]&/@constrainint;
11. (*牛顿冷却定律拟合模拟*)
12. np=With[{tmp={175,195,235,255,25}},
13. NonlinearModelFit[data1[[#]], tmp[[#]]-E^(-k*t)*(tmp[[#]]-data1[[#,1,2]])/E^(-k*data1[[#,1,1]]), k, t]&/@Range@5];
14. (*全牛顿冷却定律公式*)
15. function2[v_Real, tmperature_List,
16. k_Real:Mean[Normal@np[[;;-2]]/.a_+b_*E^(c_+d_*t):>-d],
17. distancelist_List:Partition[FoldList[Plus,25,{172.5`,5,30.5`,5,30.5`,5,66.`,5,66.`}],2,1]]:=
18. Block[{tmp=Riffle[#,Mean/@Partition[#,2,1]]&@tmperature, timelist=(distancelist/v),
19. time=(distancelist/v)[[All,1]], fittingfunction, fittingfunctionlist},
20. fittingfunction[0][x_]:=32.411632653061226`;
21. Flatten[Table@@@Table[fittingfunction[i][t_]=tmp[[i]]-E^(-k*t)*(tmp[[i]]-fittingfunction[i-1][time[[i]])]/E^(-k*time[[i]]);
22. {{t, fittingfunction[i][t]}, Join[{t}, timelist[[i]], {0.1}]], {i,1,9}], 1]]
23. (*全牛顿冷却定律拟合图形*)
24. Export["/Users/yangyongkang/Desktop/2020 数学建模/附件炉温曲线和全牛顿冷却定律拟合对比.png",
25. ListPlot[{function2[7/6., {175,195,235,255,25}], data},
26. PlotLegends->{"全牛顿冷却定律拟合曲线", "附件炉温曲线"}, PlotTheme->"Scientific", FrameLabel->{"时间/秒", "温度/摄氏度"}]];
27. (*热辐射加对流差分方程拟合*)
28. npfunction[tmp_List]:=Table[NonlinearModelFit[MapThread[List,
29. {(#-tmp[[k]])&/@data1[[k]][[All,2]][[;;-2]], (#^4-tmp[[k]]^4)&/@data1[[k]][[All,2]][[;;-2]], #
30. 2/#1&@@@Differences@data1[[k]]}], a*x+b*y, {a,b}, {x,y}], {k,1,Length@tmp}]
31. (*拟合系数因子*)
```

```

32. data3=Normal@npfunction[{175,195,235,255,25}]/.a_*x+b_*y:>{a,b};
33. (*全对流加热辐射模拟*)
34. npfunction[tmp_List]:=
35. Table[NonlinearModelFit[MapThread[List,{(#+
    tmp[[k]])&/@data1[[k]][[All,2]][[;;-2]],
36. (#^4-tmp[[k]]^4)&/@data1[[k]][[All,2]][[;;-2]],
37. #2/#1&@@@Differences@data1[[k]]}],a*x+b*y,{a,b},{x,y}],{k,1,Length@tmp}]
38. (*各温区系数*)
39. data3=Normal@npfunction[{175,195,235,255,25}]/.a_*x+b_*y:>{a,b};
40. (*牛顿冷却定律加热辐射*)
41. function[v_Real,tmperature_List,k_Real:0.01918189383347094`,
42. distancelist_List:Partition[FoldList[Plus,25,{172.5`,5,30.5`,5,30.5`,5,66.
    `,5,66.`}],2,1],
43. ab_List:{{0.023984019158063287`, -8.011724895980368`*^-10},
44. {0.023984019158063287`, -8.011724895980368`*^-10},
45. {-0.01566960505173086`, 8.194905445225778`*^-10}}]:=
46. Block[{tmp=Riffle[#,Mean/@Partition[#,2,1]]&@tmperature,timelist=(distance
    list/v),
47. time=(distancelist/v)[[All,1]],fittingfunction,fittingfunctionlist,pointda
    ta},
48. fittingfunction[0][t_]:=32.411632653061226`;
49. fittingfunctionlist=Table[
50. fittingfunction[i][t_]=tmp[[i]]-E^(-k*t)*(tmp[[i]]-fittingfunction[i-
    1][time[[i]]])/E^(-k*time[[i]]);
51. {{t,fittingfunction[i][t]},Join[{t},timelist[[i]],{0.1}]],{i,1,6}}];
52. pointdata[0]={{time[[7]],fittingfunction[6][time[[7]]]}};
53. Table[pointdata[i]=NestWhileList[{#1[[1]]+0.5,1/2 (-ab[[i,1]] tmp[[6+i]]-
    ab [[i,2]]tmp[[6+i]]^4+2 #1[[2]]+ab[[i,1]]#1[[2]]+ab [[i,2]]#1[[2]]^4)&,
54. {pointdata[i-1][[-1,1]],pointdata[i-1][[-1,2]]},#1[[1]]<=timelist[[-4+i,-
    1]]&},{i,1,3}];
55. Flatten[Join[(Table@@@fittingfunctionlist),{pointdata[1],pointdata[2],poin
    tdata[3]}],1]]
56. (*全对流加热辐射*)
57. function1[v_Real,tmperature_List,k_Real:0.01918189383347094`,
58. distancelist_List:Partition[FoldList[Plus,25,{172.5`,5,30.5`,5,30.5`,5,66.
    `,5,66.`}],2,1],
59. ab_List:Riffle[data3,data3[[-2]]]:=Block[{tmp=Riffle[#,Mean/@Partition[#,2,1]]&@tmperature,
60. timelist=(distancelist/v),time=(distancelist/v)[[All,1]],pointdata1,pointd
    ata1list},
61. pointdata1[0]={{150/7,32.411632653061226`}};
62. pointdata1list=Table[

```

```

63. pointdata1[i]=NestWhileList[{#1[[1]]+0.5,1/2 (-ab[[i,1]] tmp[[i]]-
    ab [[i,2]]tmp[[i]]^4+2 #1[[2]]+ab[[i,1]]#1[[2]]+ab [[i,2]]#1[[2]]^4)}&,
64. {pointdata1[i-1][[-1,1]],pointdata1[i-1][[-1,2]]},
65. #1[[1]]<=timelist[[i,-1]]&},{i,1,9}];Flatten[pointdata1List,1]]
66. (*附件炉温曲线和牛顿冷却定律加热辐射拟合曲线对比*)
67. Export["/Users/yangyongkang/Desktop/2020 数学建模/附件炉温曲线和牛顿冷却定律加
    热辐射拟合曲线对比.png",
68. ListPlot[{function[7/6.,{175,195,235,255,25}],data},
69. PlotLegends->{"牛顿冷却定律加热辐射拟合曲线","附件炉温曲线"},
70. PlotTheme->"Scientific",FrameLabel->{"时间/秒","温度/摄氏度"}]];
71. (*附件炉温曲线和热辐射加热对流拟合曲线拟合曲线对比*)
72. Export["/Users/yangyongkang/Desktop/2020 数学建模/附件炉温曲线和热辐射加热对流
    拟合曲线拟合曲线对比.png",
73. ListPlot[{function1[7/6.,{175,195,235,255,25}],data},PlotLegends->{"热辐射
    加热对流拟合曲线","附件炉温曲线"},
74. PlotTheme->"Scientific",FrameLabel->{"时间/秒","温度/摄氏度"}]];
75. (*问题一炉温曲线*)
76. Export["/Users/yangyongkang/Desktop/2020 数学建模/问题一拟合曲线.png",
77. ListPlot[function[78/60.,{173,198,230,257,25}],
78. PlotTheme->"Scientific",FrameLabel->{"时间/秒","温度/摄氏度"}]];
79. (*问题一炉温曲线插值*)
80. ipf=Interpolation[Union@function[78/60.,{173,198,230,257,25}]];
81. (*导出表格*)
82. Export["/Users/yangyongkang/Downloads/CUMCM2020Probelms/A/result.csv",
83. {{{"time/s","temperature\\!\\(*SuperscriptBox[\\(/\\), \\(0\\)\\)C"}~Join~Table
    [{x,ipf[x]},{x,18.4,315,0.5}]]];
84. (*温区中心温度*)
85. temperature[n_Integer]:=ipf[(25+35.5*(n-1)+30.5/2)/(78/60)];

```

附录 2: 问题二的代码

```

1. (*灵敏度分析*)
2. sensitivity[T_,v_Real:7/6.,tmperature_List:{175,195,235,255,25},k_Real:0.0
    1918189383347094`,
3. distancelist_List:Partition[FoldList[Plus,25,{172.5`,5,30.5`,5,30.5`,5,66.
    `,5,66.`}],2,1],
4. ab_List:{{0.023984019158063287`,-8.011724895980368`*^-10},
5. {0.023984019158063287`,-8.011724895980368`*^-10},
6. {-0.01566960505173086`,8.194905445225778`*^-10}}]:=
7. Block[{tmp=Riffle[#,Mean/@Partition[#,2,1]]&@tmperature,timelist=(distance
    list/v),
8. time=(distancelist/v)[[All,1]],fittingfunction,fittingfunctionlist,pointda
    ta},
9. fittingfunction[0][t_]:=T;
10. fittingfunctionlist=Table[

```

```

11. fittingfunction[i][t_]=tmp[[i]]-E^(-k*t)*(tmp[[i]]-fittingfunction[i-1][time[[i]]])/E^(-k*time[[i]]);
12. {{t,fittingfunction[i][t]},Join[{t},timelist[[i]],{0.1}]],{i,1,6}};
13. pointdata[0]={{time[[7]],fittingfunction[6][time[[7]]]}};
14. Table[pointdata[i]=NestWhileList[{#1[[1]]+0.5,1/2 (-ab[[i,1]] tmp[[6+i]]-ab [[i,2]]tmp[[6+i]]^4+2 #1[[2]]+ab[[i,1]]#1[[2]]+ab [[i,2]]#1[[2]]^4)}&,
15. {pointdata[i-1][[-1,1]],pointdata[i-1][[-1,2]]},#1[[1]]<=timelist[[-4+i,-1]]&],{i,1,3}];
16. Flatten[Join[(Table@@@fittingfunctionlist),{pointdata[1],pointdata[2],pointdata[3]}],1]]
17. (*问题二遍历代码*)
18. Do[
19. With[{numdata=Union@function[v/60.,{182,203,237,254,25}]}],
20. If[And[AllTrue[#2/#1&@@@Differences@numdata,-3<=#<=3&],
21. 240<=Max[numdata[[All,2]]]<=250,60<=(SelectFirst[numdata,#[[2]]>=190&][[1]]-SelectFirst[numdata,#[[2]]>=150&][[1]])<=120,
22. 40<=((#[[-1,1]]-#[[1,1]])&@Select[numdata,#[[2]]>=217&]<=90)==True,Print[v];Break[ ]]],{v,100,65,-1}]
23. (*问题二炉温曲线*)
24. Export["/Users/yangyongkang/Desktop/2020 数学建模/问题二拟合曲线.png",
25. ListPlot[function[72/60.,{182,203,237,254,25}],
26. PlotTheme->"Scientific",FrameLabel->{"时间/秒","温度/摄氏度"}]];

```

附录 3： 问题三的代码

```

1. area1[v_Real,tmperature_List,k_Real:0.01918189383347094`,
2. distancelist_List:Partition[FoldList[Plus,25,{172.5`,5,30.5`,5,30.5`,5,66.`,5,66.``}],2,1],
3. ab_List:{{0.023984019158063287`,-8.011724895980368`*^-10},
4. {0.023984019158063287`,-8.011724895980368`*^-10},
5. {-0.01566960505173086`,8.194905445225778`*^-10}}]:=
6. Block[{tmp=Riffle[#,Mean@Partition[#,2,1]]&@tmperature,timelist=(distancelist/v),
7. time=(distancelist/v)[[All,1]],fittingfunction,fittingfunctionlist,pointdata,numdata,pos,pos1,bool,benchdata},
8. fittingfunction[0][t_]:=32.411632653061226`;
9. fittingfunctionlist=Table[
10. fittingfunction[i][t_]=tmp[[i]]-E^(-k*t)*(tmp[[i]]-fittingfunction[i-1][time[[i]]])/E^(-k*time[[i]]);
11. {{t,fittingfunction[i][t]},Join[{t},timelist[[i]],{0.1}]],{i,1,6}};
12. pointdata[0]={{time[[7]],fittingfunction[6][time[[7]]]}};

```

```

13. Table[pointdata[i]=NestWhileList[{#1[[1]]+0.5,1/2 (-ab[[i,1]] tmp[[6+i]]-
    ab [[i,2]]tmp[[6+i]]^4+2 #1[[2]]+ab[[i,1]]#1[[2]]+ab [[i,2]]#1[[2]]^4)}&,
14. {pointdata[i-1][[-1,1]],pointdata[i-1][[-1,2]]},#1[[1]]<=timelist[[-4+i,-
    1]]&},{i,1,3}];
15. numdata=Flatten[Join[(Table@@@fittingfunctionlist),{pointdata[1]}],1];
16. benchdata=Select[numdata,#[[2]]>=217&];If[And[240<=numdata[[-
    1,2]]<=250,60<=(#[[-1,1]]-
    #[[1,1]]&@Select[numdata,150<=#[[2]]<=190&])<=120,
17. 40<=Select[pointdata[3],#[[2]]>=217&][[-1,1]]-benchdata[[1,1]]<=90,
18. (#2/#1&@@(numdata[[2]]-numdata[[1]]))<=3&&(#2/#1&@@(pointdata[3][[-1]]-
    pointdata[3][[-2]]))>=-3],
19. {v,tmperature,
20. Total[(#2+#4)*(#3-#1)/2&@@@Partition[Flatten@benchdata,4,2]]-
    benchdata[[1,2]]*(benchdata[[-1,1]]-benchdata[[1,1]])},{}]
21. ]
22. (*问题三遍历最优组合*)
23. min=1000000;Do[Do[If[Length@(list=area1[v/60.,{i,j,k,l,25}])!=0,
24. If[list[[-1]]<=min,minlist=list;min=list[[-1]]],Break[]],
25. {v,65,100}],{i,165,185},{j,185,205},{k,225,245},{l,245,265}]/AbsoluteTimi
    ng
26. (*问题三最优炉温曲线*)
27. Export["/Users/yangyongkang/Desktop/2020 数学建模/问题三最优炉温曲
    线.png",Show[ListPlot[#[[1;;1935]]~Join~#[[1992;;]],
28. PlotTheme->"Scientific",FrameLabel->{"时间/秒","温度/摄氏度"}],
29. ListPlot[#[[1936;;1991]],Filling->Bottom,
30. PlotTheme->"Scientific",FillingStyle->Black]]&@(function@@minlist[;;-
    2]]);

```

附录 4：问题四的代码

```

1. (*问题四终极最优化炉温曲线*)
2. productdata[v_Real,tmperature_List,k_Real:0.01918189383347094`,
3. distancelist_List:Partition[FoldList[Plus,25,{172.5`,5,30.5`,5,30.5`,5,66.
    `,5,66.`}],2,1],
4. ab_List:{{0.023984019158063287`, -8.011724895980368`*^-10},
5. {0.023984019158063287`, -8.011724895980368`*^-10},
6. {-0.01566960505173086`, 8.194905445225778`*^-10}}]:=
7. Block[{tmp=Riffle[#,Mean/@Partition[#,2,1]]&@tmperature,timelist=(distance
    list/v),
8. time=(distancelist/v)[[All,1]],fittingfunction,fittingfunctionlist,pointda
    ta,numdata,pos,pos1,bool,benchdata},
9. fittingfunction[0][t_]:=32.411632653061226`;
10. fittingfunctionlist=Table[

```



```

11. fittingfunction[i][t_]=tmp[[i]]-E^(-k*t)*(tmp[[i]]-fittingfunction[i-1][time[[i]]])/E^(-k*time[[i]]);
12. {{t,fittingfunction[i][t]},Join[{t},timelist[[i]],{0.1}]],{i,1,6}};
13. pointdata[0]={{time[[7]],fittingfunction[6][time[[7]]]}};
14. Table[pointdata[i]=NestWhileList[{#1[[1]]+0.5,1/2 (-ab[[i,1]] tmp[[6+i]]-ab [[i,2]]tmp[[6+i]]^4+2 #1[[2]]+ab[[i,1]]#1[[2]]+ab [[i,2]]#1[[2]]^4)}&,
15. {pointdata[i-1][[-1,1]],pointdata[i-1][[-1,2]]},#1[[1]]<=timelist[[-4+i,-1]]&},{i,1,3}];
16. numdata=Flatten[Join[(Table@@@fittingfunctionlist),{pointdata[1]}],1];
17. benchdata=Select[numdata,#[[2]]>=217&;If[And[240<=numdata[[-1,2]]<=250,60<=(#[[-1,1]]-#[[1,1]]&@Select[numdata,150<=#[[2]]<=190&])<=120,
18. 40<=Select[pointdata[3],#[[2]]>=217&][[-1,1]]-benchdata[[1,1]]<=90,
19. (#2/#1&@@(numdata[[2]]-numdata[[1]]))<=3&&(#2/#1&@@(pointdata[3][[-1]]-pointdata[3][[-2]]))>=-3],
20. {v,tmperature,
21. Total[(#2+#4)*(#3-#1)/2&@@@Partition[Flatten@benchdata,4,2]]-benchdata[[1,2]]*(benchdata[[-1,1]]-benchdata[[1,1]]),
22. RealAbs@Total[#2/#1&@@@Differences@Union@Join[benchdata,Select[Join[pointdata[2],pointdata[3]],#[[2]]>=217&]]],{}}
23. ];
24. (*问题四数据集*)
25. Data={};Do[Do[If[Length@(list=productdata[v/60.,{i,j,k,l,25}])!=0,
26. AppendTo[Data,list],Break[]],{v,65,100}],{i,165,185},{j,185,205},{k,225,245},{l,245,265}];
27. Export["/Users/yangyongkang/Desktop/2020 数学建模/Data.wl",Data];//AbsoluteTiming
28. With[{max1=MaximalBy[Data,Last][[1,-1]],
29. max2=MaximalBy[Data,#[[2]]&][[1,-1]]},
30. MinimalBy[{#1,#2,#3/max2+#4/max1}&@@@Data,Last]]

```

支撑材料目录

- 1、A 题全部代码
- 2、result.csv
- 3、2020 数学建模（包含数据、代码、图片）