偏序关系：设A是一个非空集，P是A上的一个关系，若关系P是自反的、反对称的、和传递的，则称P是[集合](https://so.csdn.net/so/search?q=%E9%9B%86%E5%90%88&spm=1001.2101.3001.7020)A上的偏序关系。

自反性：a≤a;  
反对称性：如果a≤b且b≤a，则有a=b;  
传递性：如果a≤b且b≤c，则a≤c 。

偏序集：带有偏序关系的集合称为偏序集。

令(X,≤)是一个偏序集，对于集合中的两个元素a、b，如果有a≤b或者b≤a，则称a和b是可比的，否则a和b不可比。

在X中，对于元素a，如果任意元素b，由b≤a得出b=a，则称a为极小元。

一个反链A是X的一个子集，它的任意两个元素都不能进行比较。  
一个链C是X的一个子集，它的任意两个元素都可比。

定理1 令（X,≤）是一个有限偏序集，并令r是其最大链的大小。则X可以被划分成r个但不能再少的反链。  
其对偶定理称为[Dilworth](http://www.gnocuil.cn/blog/tag/dilworth/)定理：  
定理2 令（X,≤）是一个有限偏序集，并令m是反链的最大的大小。则X可以被划分成m个但不能再少的链。

**证明**：设p为最少反链个数

(1)先证明X不能划分成小于r个反链。由于r是最大链C的大小，C中任两个元素都可比，因此C中任两个元素都不能属于同一反链。所以p>=r。

(2)设X1＝X，A1是X1中的极小元的集合。从X1中删除A1得到X2。注意到对于X2中任意元素a2，必存在X1中的元素a1，使得a1<=a2。令A2是X2中极小元的集合，从X2中删除A2得到X3……最终，会有一个Xk非空而X(k+1)为空。于是A1,A2,...,Ak就是X的反链的划分，同时存在链a1<=a2<=...<=ak，其中ai在Ai内。由于r是最长链大小，因此r>=k。由于X被划分成了k个反链，因此r>=k>=p。因此r=p，定理1得证。

搞清楚了反链和链的定义，就能够很好的从Hasse Diagram中得到理解。链就是从纵向的角度看 Hasse Diagram ,反链是从横向的角度看Hasse Diagram。

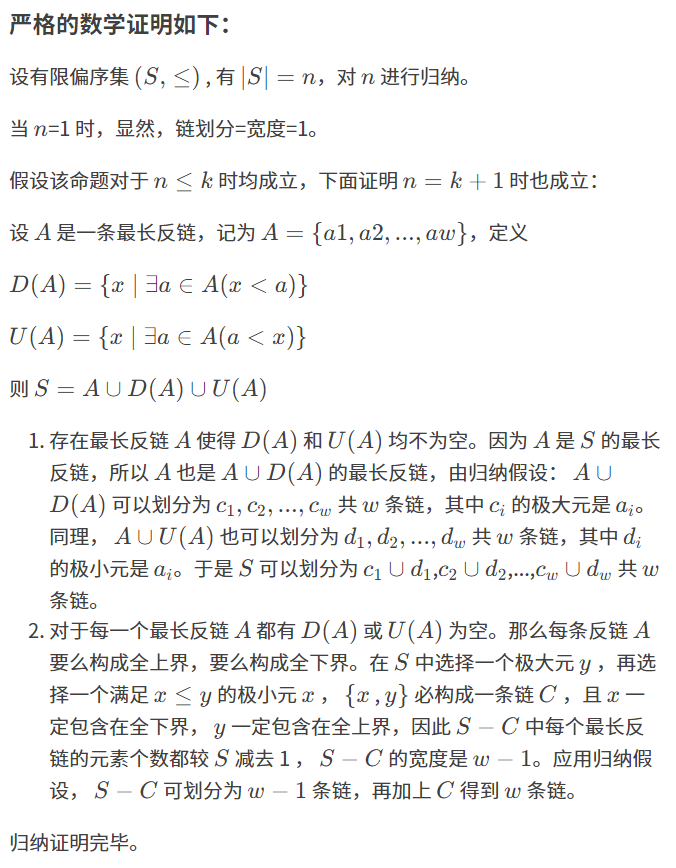
定理一，就是至少有r行构成反链关系。

定理二，就是至少有m列构成链关系。

原文链接：<https://blog.csdn.net/xuzengqiang/article/details/7266034>

例题：[导弹拦截](https://www.luogu.com.cn/problem/P1020)

**归纳法证明dilworth定理**

****