课程试卷二

（本卷考试时间 120 分钟）

题号	一	二	三	四	五	六	七	总得分
题分	15	28	12	12	12	9	12	100
得分								

一、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$，则 A 的零空间 $N(A)=\{x\in R^3\mid Ax=0\}$ 的维数和 A 的值域 $R(A)=\{y\mid y=Ax, x\in R^3\}$ 的维数分别为(　　　)

(A) $\dim N(A)=1, \dim R(A)=1$；　　(B) $\dim N(A)=1, \dim R(A)=2$；

(C) $\dim N(A)=2, \dim R(A)=1$；　　(D). $\dim N(A)=2, \dim R(A)=2$.

2、已知 $\alpha_1=(1,0,1,2)^T, \alpha_2=(0,-1,-1,0)^T, \alpha_3=(1,0,1,2)^T, \alpha_4=(1,1,2,2)^T$，

$V_1=span\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$V_2=span\{\alpha_3,\alpha_4\}$，则 V_1+V_2 与 $V_1\bigcap V_2$ 的维数分别为（　　　）. .

(A) $\dim(V_1+V_2)=1, \dim(V_1\bigcap V_2)=3$；(B) $\dim(V_1+V_2)=3, \dim(V_1\bigcap V_2)=1$；

(C) $\dim(V_1+V_2)=2, \dim(V_1\bigcap V_2)=2$；(D) 以上说法都不对.

3、已知矩阵 $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{2t} & 0\\ 2te^{2t} & e^{2t}\end{pmatrix}$，则矩阵 $A=$（　　　）.

(A) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 8\end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 9\end{pmatrix}$；　(C) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

4、设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in C^n$，则下列

① $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$，② $\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2}$，③ $\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots|x_n|\}$

中可以作为 x 的向量范数的有几个（　　　）.

(A) 3 个；　(B) 2 个；　(C) 1 个；　(D) 0 个.

5、设矩阵 $A,B,C,D\in C^{n\times n}$, k 为任意常数，则关于矩阵 Kronecker 积，下列说法**错误**的是（　　　）.

(A) $k(A\otimes B)=(kA)\otimes B$； (B) $\left(A+B\right)\otimes C=A\otimes C+B\otimes C$；

(C) $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$； (D) $(A\otimes B)(C\otimes D)=AD\otimes BC$.

二、填空题（本题共 7 小题，每小题 4 分，共 28 分）

1、已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$，则 $A\otimes B$ 的行列式 $|A\otimes B|=$_________.

2、设 $A(t)=\begin{pmatrix}t&\sin t\\e^{-t}&\cos 2\mathrm{t}\end{pmatrix}$，则 $\int_0^1 A(t)dt=$_____________.

3、已知 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&0\end{pmatrix}$，若 $x=\left(x_1,x_2\right)$，$h(x)=xA^TAx^T$，则 $\dfrac{dh(x)}{dx}=$ ____________.

4、已知 $A=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$，则 $cond_\infty(A)=$_________.

5、设 $W=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in R^{2\times 2}\middle| a_{11}+a_{22}=0,a_{12}-a_{21}=0\right\}$，则 W 的维数为_________.

6、已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\\0&1&2&3\end{pmatrix}$，则 A 的谱半径 $\rho(A)=$ __________.

7、已知 $A^{(k)}=\begin{pmatrix}\arctan k&\cos\dfrac{1}{k}\\e^{-k}&k\sin\dfrac{1}{k}\end{pmatrix}$，则 $\lim\limits_{k\to+\infty}A^{(k)}=$_____________ .

三、计算题（本题 12 分）

在线性空间 R^3 中，线性变换 T 将基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 变为基 β_1,β_2,β_3，其中

$$\alpha_1=(1,0,0)^T,\quad \alpha_2=(0,-1,1)^T,\quad \alpha_3=(2,1,0)^T,$$

$$\beta_1=(1,-1,2)^T,\quad \beta_2=(1,-2,3)^T,\quad \beta_3=(1,-3,3)^T,$$

(1) 求线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 A；

(2) 求向量 $\xi=(1,1,1)^T$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标；

(3) 求$T(\xi)$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标.

四、计算题（本题 12 分）

已知$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&-1&3\\1&1&1\end{pmatrix}$.

(1)求A的行列式因子、不变因子、初等因子；

(2)求A的 Smith 标准形$J(\lambda)$及 Jordan 标准形J；

(3) 求$A^{2022}-2A^{2021}-4A^{2020}+8A^{2019}$.

五、计算题（本题 12 分）

已知$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $a=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

(1) 求$\dfrac{d(aa^TX)}{dX^T}$；

(2) 求$\|aa^T\|_{m_1},\|aa^T\|_1,\|aa^T\|_{m_\infty},\|aa^T\|_\infty$；

(3) 求aa^T的正奇异值的个数，并说明理由.

六、计算证明题（本题 9 分）

(1) 设$A\in C^{n\times n}$，证明$\rho(A)\le\|A\|$，其中$\|A\|$是A的任意一种范数；

(2) 已知$A=\begin{pmatrix}0.1&0.2\\0.3&0.4\end{pmatrix}$，试判别矩阵级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$是否收敛，若收敛，求其和.

七、计算题（本题 12 分）

已知$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-2\\2&-2&-2\end{pmatrix}$， $x(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(1) 求A的最小多项式；

(2) 求e^{At}；

(3) 求微分方程$\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)$满足初始条件$x(0)$的解.