课程试卷一

（本卷考试时间 120 分钟）

题号	一	二	三	四	五	六	七	总得分
题分	15	28	12	12	12	9	12	100
得分								

一、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、设T是 3 维向量空间R^3上的变换，则下列T中为线性变换的是(　　　).

(A) $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1^3,x_2^3,x_3^3)$；　　(B) $T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2-x_3,x_3)$；

(C) $T(x_1,x_2,x_3)=(\cos x_1,\sin x_2,0)$；　(D) $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,0,0)$.

2、矩阵A取下列何值时，矩阵级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}A^k$收敛(　　　).　.

(A) $\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix}-1&3\\2&4\end{pmatrix}$；　(C) $\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}$.

3、已知$\sin At=\begin{pmatrix}2\sin 2t-\sin 3t & \sin 3t-\sin 2t\\ 2\sin 2t-2\sin 3t & 2\sin 3t-\sin 2t\end{pmatrix}$，则矩阵$A=$ (　　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix}-1&1\\2&4\end{pmatrix}$；　(C) $\begin{pmatrix}1&1\\2&-4\end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix}1&1\\-2&4\end{pmatrix}$.

4、关于矩阵的 Hadamard 积和 Kronecker 积，下列说法**不正确**的是(　　　).

(A) $A\circ B=B\circ A$；　　(B) $(A\circ B)\circ C=A\circ(B\circ C)$；

(C) $A\otimes B=B\otimes A$；　　(D) $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$.

5、关于最小多项式，下列说法不正确的是(　　　).

(A) 矩阵A,B相似当且仅当A,B具有相同的最小多项式;

(B) 矩阵A的最小多项式的根必定是A的特征值;

(C) 矩阵A的特征值必定是A的最小多项式的根;

(D) 矩阵A可对角化当且仅当A的最小多项式没有重根

二、填空题（本题共 7 小题，每小题 4 分，共 28 分）

1、已知 $A=\begin{pmatrix}1&7&8\\4&2&9\\5&6&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}$，则 $A\otimes B$ 的迹 $tr\left(A\otimes B\right)=$________.

2、设 $A(t)=\begin{pmatrix}2t&\sin 2t\\e^t&\cos t\end{pmatrix}$，则 $\int_0^1 A(t)dt=$________.

3、已知 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$，则 A 的全部奇异值为_____.

4、已知 $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&6\end{pmatrix}$，则 $cond_{\infty}(A)=$____.

5、设 $A=\begin{pmatrix}\sin 1&\sin\sqrt{2}&\sin\sqrt{3}\\\sin\sqrt{2}&\sin\sqrt{3}&\sin 1\\\sin\sqrt{3}&\sin 1&\sin\sqrt{2}\end{pmatrix}$，则 A 的谱半径 $\rho(A)=$______________.

6、已知 $\alpha_1=\left(1,1,1,2\right)^T,\alpha_2=\left(1,2,-1,1\right)^T,\beta_1=\left(-1,1,1,2\right)^T,\beta_2=\left(1,2,0,2\right)^T$，且 $V_1=span\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$V_2=span\{\beta_1,\beta_2\}$，则 $\dim(V_1+V_2)=$ _____.

7、已知 $A^{(k)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\arctan k}{e^k}&\cos\dfrac{1}{k+k^2}\\\dfrac{3k^2+1}{k^2}&\dfrac{\sin k}{k}\end{pmatrix}$，则 $\lim\limits_{k\to+\infty}A^{(k)}=$_________.

三、计算题（本题 12 分）

在线性空间 R^3 中，设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)$，线性变换 T 满足

$$T(\alpha)=(x_1+2x_2+3x_3,4x_1+5x_2+6x_3,7x_1+8x_2+9x_3)$$

(1) 求线性变换 T 在自然基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵 A；

(2) 求 A 的零空间 $N(A)$ 和值域 $R(A)$，并指出 $N(A)$ 和 $R(A)$ 的基；

(3) 试给出矩阵 A 的正奇异值的个数，并说明理由.

四、计算证明题（本题 12 分）

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

(1)求 A 的行列式因子、不变因子、初等因子；

(2)求 A 的 Smith 标准形 $J(\lambda)$ 及 Jordan 标准形 J；

(3)证明 $A^{2020}=A^{2018}+A^2-I$.

五、计算题（本题 12 分）

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&3\\0&1&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

(1)求 A 的满秩分解；

(2)求 A^+；

(3)用广义逆的方法判断线性方程组 $Ax=b$ 的是否有解，若有解，求其通解，若无解，求其极小范数最小二乘解.

六、计算证明题（本题 9 分）

(1) 已知 $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&3\\1&2&0\end{pmatrix}$，求 $\|A\|_{m_1},\|A\|_F,\|A\|_{m_\infty},\|A\|_2,\|A\|_\infty$；

(2) 若 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 的矩阵范数，P 是 n 阶可逆矩阵，令 $\|B\|_\alpha=\|P^{-1}BP\|$，试证明 $\|B\|_\alpha$ 也是 $C^{n\times n}$ 中的一个矩阵范数.

七、计算题（本题 12 分）

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$， $x(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的最小多项式；

(2) 求 e^{At}；

(3) 求微分方程 $\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)$ 满足初始条件 $x(0)$ 的解.