第一章：线性空间与线性变换

一、线性空间的基本概念（P2-P7）

1、线性空间的概念及判定，维数、基的概念；常见线性空间的维数及其基（自然基）

2、向量在基下的坐标；基与基之间的过渡矩阵

例：P2-P7 例 1.1.2-例 1.1.16，P30 习题 1.1 (1)-(3)

注：线性空间不能离开某一数域来定义，实际上，对于不同数域，同一个集合构成的线性空间会不同，维数也会不同，甚至一种能成为线性空间而另一种不能成为线性空间。

二、子空间与维数定理

1、**子空间的概念（P8）**；常见子空间(如$N(A), R(A), span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\}$等)及其维数，基；子空间的判定。

例：P30 习题 1.1 (2)，(5)；　P31 习题 1.4

2、**子空间的运算（P9）**

V_1与V_2是V的两个子空间, 则V_1+V_2与$V_1\bigcap V_2$也是V子空间.

V_1与V_2是V的两个子空间, 求V_1+V_2与$V_1\bigcap V_2$的维数和基.

例：已知$V_1=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$V_2=span\{\beta_1,\beta_2\}$，其中，$\alpha_1=(1,2,-1,-3)^T$，$\alpha_2=(-1,-1,2,1)^T$，$\alpha_3=(-1,-3,0,5)^T$ $\beta_1=(-1,0,4,-2)^T$，$\beta_2=(0,5,9,-14)^T$，求V_1+V_2与$V_1\bigcap V_2$的基和维数。

解：因为$V_1+V_2=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}+span\{\beta_1,\beta_2\}=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2\}$，

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的一个极大无关组就是$V_1+V_2$的一组基

$$而(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&0\\2&-1&-3&0&5\\-1&2&0&4&9\\-3&1&5&-2&-14\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-2&0&1\\0&1&-1&0&-3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由行最简形知$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的一个极大线性无关组，所以和空间的维数是 3，基为$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$，且$\beta_2=\alpha_1-3\alpha_2+4\beta_1$。由行最简形知$\dim(V_1)=\dim(V_2)=2,$ 由

$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\bigcap V_2)$可得$\dim(V_1\bigcap V_2)=1$

又 $\beta_2=\alpha_1-3\alpha_2+4\beta_1$，故 $\xi=\alpha_1-3\alpha_2=\beta_2-4\beta_1=(4,5,-7,-6)^T\in V_1\cap V_2$

所以 $(4,5,-7,-6)^T$ 为 $V_1\cap V_2$ 的一组基。

3、**维数定理（P10）** 设 V 是线性空间，V_1 与 V_2 是 V 的两个子空间，则

$$\dim(V_1+V_2)=(\dim V_1+\dim V_2)-\dim(V_1\cap V_2)。$$

4、**直和及充要条件（P12）**

二、 线性变换及其在某组基下矩阵

1、 **线性变换的定义及其性质**（P13-P15）

设 V 是数域 F 上的线性空间，映射 $T:V\to V$ 称为线性变换，若对于 $\forall\alpha,\beta\in V,\ \lambda\in F$ 有

$$T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta),\qquad T(\lambda\alpha)=\lambda T(\alpha)$$

2、 线性变换的值域与核（P16-P17）

例： P17 例 1.2.6

3、线性变换的矩阵表示（P18）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 是线性空间 V 的一组基，T 是 V 上的线性变换，则

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)A$$

其中 A 称为 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 下的矩阵。

设线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 下的矩阵为 A，向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 下的坐标为 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$. $T(\alpha)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 下的坐标为 $y=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$，则 $y=Ax$.

注：同一线性变换在不同基下得矩阵相似。

例： P21 例题 1.2.8-例 1.2.10，PPT 1.2.5 节 例 4，P32 习题 1.9，习题 1.11

第二章：内积空间

一、实内积及实内积空间的概念、性质及判定，常见实内积及实内积空间（P34-P35）

例：P34-P35 例 2.1.1-例 2.1.5

例： 设向量 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 R^n 中任意两个向量，A 为 n 阶正定矩阵，则实函数 $(\alpha,\beta)=\alpha A\beta^T$ 构成 R^n 上的内积，在此意义下，R^n 构成一欧式空间。

二、复内积及复内积空间的概念、性质及判定，常见复内积及复内积空间（P44-P45）

三、标准正交基（P38 例 2.2.4， 例 2.2.5）

四、正交变换及其等价条件（P40）

第三章：范数理论

一、几种常用向量范数与矩阵范数

1.向量范数及其等价（P50-P52）

设 V 是数域 P 上的线性空间，且对于 V 的任意一向量 x，对应着一个实值函数 $\|x\|$，它满足以下 3 个条件，则称 $\|x\|$ 为 V 上向量 x 的范数.

(1) 非负性 $\|x\|\ge 0$，$\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$；

(2) 齐次性 $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|,\ \lambda\in P$；

(3) 三角不等式 $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|,\ x,y\in V$.

$\|x\|_1=\sum_{j=1}^{n}|x_j|$（和范数或1范数），$\|x\|_2=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$（欧式范数或2范数）

$\|x\|_p=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$（$p\ge 1$）（$p$ 范数），$\|x\|_\infty=\max_{1\le j\le n}|x_j|$（最大范数或 ∞ 范数）

注：（1）$\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le n\|x\|_\infty,\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\sqrt{n}\|x\|_\infty,\|x\|_2\le\|x\|_1\le n\|x\|_2$

（2）设 α 是 C^n 上的向量范数，$A\in C^{n\times n}$，则 $\|A\alpha\|$ 也是 C^n 上的向量范数当且仅当 A 为可逆矩阵。

2.矩阵范数（P53-P56）

$C^{n\times n}$ 到 R 的一个映射 $\|\bullet\|$，若满足以下 4 个条件，则称 $\|A\|$ 为 A 的范数.

(1) 非负性 $\|A\| \ge 0$，$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$；

(2) 齐次性 $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|,\ \lambda \in C$；

(3) 三角不等式 $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|,\ A,B \in C^{n\times n}$.

(4) 相容性 $\|AB\| \le \|A\|\|B\|,\ A,B \in C^{n\times n}$

$\|A\|_{m_1} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，$\|A\|_{m_2} = \|A\|_F = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{tr(A^H A)}$（F 范数），

$\|A\|_{m_\infty} = n\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$，$\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$（列范数），$\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$（行范数）

$\|A\|_2 = \left(\rho(A^H A)\right)^{\frac{1}{2}}$（谱范数）

例：已知 $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 8 \\ 4 & -6 & 7 & 4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

试求$\|Ax\|_1, \|Ax\|_2, \|Ax\|_\infty, \|A\|_{m_1}, \|A\|_F, \|A\|_{m_\infty} \|A\|_1, \|A\|_\infty$.

解：$Ax = (3\quad 4\quad 3\quad 13)^T$ $\|Ax\|_1 = 23$，$\|Ax\|_2 = \sqrt{203}$，$\|Ax\|_\infty = 13$，

$\|A\|_{m_1} = 47,\ \|A\|_F = \sqrt{237},\ \|A\|_{m_\infty} = 32$，$\|A\|_1 = 15$，$\|A\|_\infty = 21$

二、条件数

通常使用的条件数 （P57）

例：P64 习题 3.1(3), 习题 3.3

第四章：矩阵的标准形

一、λ-矩阵及行列式因子，不变因子，初等因子概念与计算（PPT 课件）

二、smith 标准形（P68）与 Jordan 标准形（P66）概念

三、Smith 标准形，Jordan 标准形的求法

1. 初等变换法

用初等变换求出 A 的 Smith 标准形，得到不变因子，由不变因子得到初等因子，再根据初等因子，给出 Jordan 标准形。

例：$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-4&0&3\end{pmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形

解：$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda+1&0&-1\\-1&\lambda-2&0\\4&0&\lambda-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&\lambda-2&0\\(\lambda-1)^2&0&0\end{pmatrix}$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&(\lambda-1)^2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&(\lambda-1)^2(\lambda-2)&0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

故 A 的不变因子为 $d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=1,d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，

Smith 标准形为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{pmatrix}$

初等因子为 $(\lambda-2)$，$(\lambda-1)^2$

故 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 或 $J=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

2. 行列式因子法

先求行列式因子，然后利用 $d_k\left(\lambda\right)=\dfrac{D_k\left(\lambda\right)}{D_{k-1}\left(\lambda\right)}$ 得不变因子，求出 Smith 标准形，进一步得初等因子，最后由初等因子写出 Jordan 标准形。

例：已知 $A=\begin{pmatrix}1&4&-1\\-1&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 J.

解：$\left|\lambda I-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-4&1\\1&\lambda+3&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}$，由 $\begin{vmatrix}1&0\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)$，$\begin{vmatrix}-4&1\\\lambda+3&0\end{vmatrix}=-(\lambda+3)$，

所以，行列式因子 $D_1(\lambda)=1,D_2(\lambda)=1,D_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$

不变因子 $d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$

初等因子 $(\lambda-1), \quad (\lambda+1)^2$

Smith 标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$，Jordan 标准形 $J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

例：已知 $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{pmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 J.

解：经计算，行列式因子 $D_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=(\lambda-1), D_3(\lambda)=(\lambda-1)^3$

不变因子 $d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=(\lambda-1), d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2$

初等因子 $(\lambda-1), \quad (\lambda-1)^2$

Smith 标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$，Jordan 标准形 $J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

四、Cayley-Hamilton 定理与最小多项式

1、Cayley-Hamilton 定理（P74）：设 $A\in C^{n\times n}, f(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|$, 则 $f(A)=0$。

例：P74 例 4.5.1

2、 最小多项式及其性质（P75-P77）：

设 $A\in C^{n\times n}$，在 A 的零化多项式中，次数最低的首一多项式称为 A 的最小多项式。

3、最小多项式的求法

例：P76 例 4.5.2

例： 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的最小多项式

解：$\left|\lambda I-A\right|=\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-2\right)^2$，经计算，由于 $(A-I)(A-2I)=0$，

所以最小多项式为 $\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-2\right)$

注：准对角阵的最小多项式为其诸对角块的最小多项式的最小公倍式

第五章：矩阵分析

一、向量和矩阵序列的极限（P82）

例：已知 $A^{(k)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{k} & \frac{k+1}{k}\\ 2 & \left(1-\frac{1}{k}\right)^k\end{pmatrix}$，求 $\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}$ 解：$\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & e^{-1}\end{pmatrix}$

例：P106 习题 5.2（2），5.3

二、谱半径（P83）

设 A 是 n 阶矩阵，它的特征值的全体称为矩阵 A 的谱，称特征值模长的最大值为矩阵 A 的谱半径，记为 $\rho(A)$。

谱半径估计 $\rho(A)\le\|A\|$，此处 $\|A\|$ 为矩阵 A 的任意一种范数。

三、矩阵序列 $\{A^k\}$ 收敛条件（P83）

A 为收敛矩阵，即 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=0$ 当且仅当 $\rho(A)<1$。

若对矩阵某一种范数 $\|A\|<1$，则 A 为收敛矩阵.

四、矩阵级数的概念，矩阵级数的敛散性，绝对收敛.（P84-P85）

五、矩阵幂级数（P85）

1. 矩阵幂级数收敛的充要条件及和函数

设 $A\in C^{n\times n}$ 且幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ 的收敛半径为 R，则当 $\rho(A)<R$ 时，矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k A^k$ 收敛。

特别地，当 $\rho(A)<1$ 时，矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛，且收敛的和为 $(I-A)^{-1}$。

例：当 $\rho(A)<a$ 时，矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{a^k}$ 收敛，且收敛的和为 $(I-\frac{A}{a})^{-1}$

例：P105 习题 5 ，5.1 (2)（4）

例：已知 $A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.3\\ 0.7 & 0.6\end{pmatrix}$，$\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$ 是否收敛，若收敛，求和.

解：由于 $\rho(A)<1$ 时，矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛，且收敛的和为 $(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}8/3 & 2\\ 14/3 & 6\end{pmatrix}$.

2. 矩阵函数的求法：对角化法，待定系数法（P87-P89）

例：P88 例 5.2.1；P89 例 5.2.2

六、函数矩阵的微分和积分的概念 、性质、计算（**P92-P93**）

例：设 $e^{At}=\begin{bmatrix} e^{2t} & 12e^{t}-12e^{2t}+13te^{2t} & -4e^{t}+4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & -3e^{t}+3e^{2t} & e^{t} \end{bmatrix}$，则 $A=?$

解：$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{2t} & 12e^{t}-12e^{2t}+13te^{2t} & -4e^{t}+4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & -3e^{t}+3e^{2t} & e^{t} \end{bmatrix}$两边对 t 求导得

$$Ae^{At}=\left(e^{At}\right)'=\begin{bmatrix} 2e^{2t} & 12e^{t}-11e^{2t}+26te^{2t} & -4e^{t}+8e^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} & 0 \\ 0 & -3e^{t}+6e^{2t} & e^{t} \end{bmatrix}$$

令上式中 t=0，则 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

例：设 $A(t)=\begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$，试求 $A'(t)$, $\int_0^a A(t)dt$

解：$A'(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$，$\int_0^a A(t)dt=\begin{pmatrix} \int_0^a \sin tdt & \int_0^a -\cos tdt \\ \int_0^a \cos tdt & \int_0^a \sin tdt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\cos a & -\sin a \\ \sin a & 1-\cos a \end{pmatrix}$

数量值函数求导；矩阵值函数求导（P94-P97）

例： P94-P96 例 5.3.2—例 5.3.6，P107 习题 5.9—习题 5.10

七、矩阵函数的应用（**P97-P98**）

线性齐次微分方程组的求解

例：P98 例 5.4.1，P106 习题 5.6，习题 5.8

第六章：矩阵分解

一.LU 分解（P108-P110）

利用初等行变换（不能进行行的交换）　　$(A,I)\to(U,L^{-1})$

例： P109 例 6.1.1，P124 习题 6.1

二. QR 分解（P111-P113）

例：P112 例 6.2.1

三. 满秩分解（P114 及课件）

$A=BC$，B 为列满秩矩阵，C 为行满秩矩阵.

例：P114 例 6.3.1

四.奇异值分解（P115-P118）

设 A 为 mxn 阶矩阵，A 的秩为 $r(A)=r$，则 $r(A^HA)=r(A)=r$，且

若 n 阶矩阵 A^HA 特征值为 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_r\ge\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots\lambda_n=0$，称 $\sqrt{\lambda_1}\ge\sqrt{\lambda_2}\ge\cdots\ge\sqrt{\lambda_r}\ge\sqrt{\lambda_{r+1}}=\sqrt{\lambda_{r+2}}=\cdots\sqrt{\lambda_n}=0$ 为矩阵 A 的奇异值。

例：P117 例 6.4.1

第七章：矩阵的广义逆

一、广义逆矩阵

1. 减号逆的概念及求法（P125-P127）

例：P127 例 7.2.1

2.Moore-penrose 逆的概念，性质（ppt）及求法（P128-P130）

满秩分解求广义逆

设 $A=BC$ 为 A 的满秩分解，则 $A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$

例：P129 例 7.3.1

二、最小二乘问题（**P130-P133**）

最小二乘解，极小范数最小二乘解

例：P132 例 7.4.1，习题 7.2

第八章：特殊矩阵

1、非负矩阵、正矩阵、本原矩阵、非负不可约矩阵、随机矩阵的概念、判别

第九章矩阵的 **Kronecker** 积与 **Hadamard** 积

1、**Kronecker** 积的定义与性质，特征值，谱半径，秩，行列式，迹等 P162-166

2、**Hadamard** 积的定义与性质，特征值，秩，行列式等 P172-175

3. 矩阵的拉直及性质，三类方程组的求解 P167-172