矩阵论（Matrix Theory）

数理与统计学院
SUES

第九章

矩阵的Kronecker积与Hadamard积

Kronecker积与**Hadamard**积都是从已有的矩阵构造新矩阵的方法，它们不仅是矩阵论中的重要工具，同时在许多领域都有不同程度的应用.

9.1 Kronecker积的定义与性质

线性代数中，两个矩阵A和B的乘积要求A的列数等于B的行数, 而这里引入的矩阵的Kronecker积不受矩阵的行数与列数的限制.

9.1.1 Kronecker积的定义与性质

定义9.1.1 设矩阵 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，$B=(b_{ij})\in C^{p\times q}$

则A与B的**Kronecker积**定义为如下分块矩阵

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}\in C^{mp\times nq}$$

简记为 $A\otimes B=(a_{ij}B)$

A与B的Kronecker积也称直积或张量积，且由定义可知，$A\otimes B$与$B\otimes A$的阶数均为$mp\times nq$，即$A\otimes B$与$B\otimes A$是同阶矩阵.

关于Kronecker积的幂，有如下定义：

$$A^{[k]}=A\otimes A^{[k-1]},\ A^{[1]}=A,\ (k=2,3,\cdots).$$

例1　设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

则

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 2b \\ c & d \\ 2c & 2d \end{bmatrix},$$

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 1A \\ 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}.$$

注： 一般情况下，

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{A}$$

即Kronecker 积和通常的矩阵乘法一样不满足交换律.

Kronecker积具有以下基本性质

（1）对任意的常数k，$A\in \mathbf{C}^{m\times n}, B\in \mathbf{C}^{p\times q}$, 则

$$k(A\otimes B)=(kA)\otimes B = A\otimes (kB)$$

（2）设 $A, B\in \mathbf{C}^{m\times n}, C\in \mathbf{C}^{p\times q}$, 则

$$(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C;$$

$$C\otimes (A+B)=C\otimes A+C\otimes B$$

(3) 设$A \in \mathbf{C}^{m\times n}, B \in \mathbf{C}^{p\times q}, C \in \mathbf{C}^{s\times t}$，则

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

(4) 设$A \in \mathbf{C}^{m\times n}, B \in \mathbf{C}^{p\times q}, C \in \mathbf{C}^{n\times s}, D \in \mathbf{C}^{q\times t}$ ，则

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

(5) 设$A \in \mathbf{C}^{m\times n}, B \in \mathbf{C}^{n\times s}$ ，则

$$(AB)^{[k]} = A^{[k]}B^{[k]}$$

(6）设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}, B \in \mathbf{C}^{p\times q}$, 则

$$(A\otimes B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \otimes B^{\mathrm{T}};(A\otimes B)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}} \otimes B^{\mathrm{H}}$$

(7）若 A,B 为可逆方阵， 则 $A\otimes B$ 也可逆，且

$$(A\otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

更一般地，设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}, B \in \mathbf{C}^{p\times q}$，则

$$(A\otimes B)^{+} = A^{+} \otimes B^{+}.$$

证明： 由定义易证性质(1)-(3).

(4) 由定义可得

$$(A \otimes B)(C \otimes D)$$

$$= (a_{ij}B)(c_{ij}D) = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}c_{kj}BD)$$

$$= (AC)_{ij}BD = AC \otimes BD.$$

（5） 对k利用数学归纳法. 当k=1时，结论显然成立. 假设结论对k−1时成立，则由性质(4)得

$$(AB)^{[k]} = (AB)\otimes(AB)^{[k-1]}$$

$$= (AB)\otimes(A^{[k-1]}B^{[k-1]})$$

$$= (A\otimes A^{[k-1]})(B\otimes B^{[k-1]})$$

$$= A^{[k]}B^{[k]}.$$

（6） 下证 $(A\otimes B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\otimes B^{\mathrm{T}}$

$$[(A\otimes B)^{\mathrm{T}}]_{ij}=[(a_{ij}B)^{\mathrm{T}}]_{ij}=a_{ji}B^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}}\otimes B^{\mathrm{T}})_{ij}.$$

同理可证 $(A\otimes B)^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{H}}\otimes B^{\mathrm{H}}$.

（7） 由性质(4)可知,

$$(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1})=(AA^{-1})\otimes(BB^{-1})=I.$$

由性质(4)及性质(5)易证 $A^{+}\otimes B^{+}$满足 $A\otimes B$ 的Moore-Penrose 逆的四个条件.

推论9.1.1： 若A和B都是对角矩阵、上(下)三角阵、实对称矩阵、Hermite矩阵、正交矩阵、酉矩阵、非负矩阵，则$A \otimes B$ 也分别为此种类型的矩阵.

定理9.1.2： 设 $A \in C^{m \times n}, B \in C^{p \times q}$，则

$$\operatorname{rank}(A \otimes B) = \operatorname{rank}(A)\operatorname{rank}(B).$$

证明 设 $\mathrm{rank}(A) = r_1, \mathrm{rank}(B) = r_2$，则存在可逆矩阵 P_1, Q_1, P_2, Q_2，使得

$$P_1 A Q_1 = \begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = M, \quad P_2 B Q_2 = \begin{bmatrix} I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = N.$$

从而 $A = P_1^{-1} M Q_1^{-1},\ B = P_2^{-1} N Q_2^{-1}$. 于是

$$\begin{aligned} A \otimes B &= (P_1^{-1} M Q_1^{-1}) \otimes (P_2^{-1} N Q_2^{-1}) \\ &= (P_1^{-1} \otimes P_2^{-1})(M \otimes N)(Q_1^{-1} \otimes Q_2^{-1}). \end{aligned}$$

由定理9.1.1知，$P_1^{-1} \otimes P_2^{-1}, Q_1^{-1} \otimes Q_2^{-1}$ 均为可逆矩阵，

则

$$\mathrm{rank}(A \otimes B) = \mathrm{rank}(M \otimes N).$$

而

$$\mathrm{rank}(M \otimes N) = r_1 r_2 = \mathrm{rank}(A)\mathrm{rank}(B),$$

于是

$$\mathrm{rank}(A \otimes B) = \mathrm{rank}(A)\mathrm{rank}(B).$$

下面讨论Kronecker积的特征值问题.

定理9.1.3 设 λ 为 $A\in\mathbf{C}^{m\times m}$ 的特征值，相对应的特征向量为 $x\in\mathbf{C}^{m}$，μ 为 $B\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 的特征值，相对应的特征向量为 $y\in\mathbf{C}^{n}$，则 $A\otimes B$ 的特征值为 $\lambda\mu$，相对应的特征向量为 $x\otimes y$.

证明 由

$$Ax=\lambda x, By=\mu y$$

知

$$x\neq 0, y\neq 0$$

故 $x\otimes y\neq 0$ 且

$$(A\otimes B)(x\otimes y)=(Ax)\otimes(By)$$

$$=(\lambda x)\otimes(\mu y)=\lambda\mu(x\otimes y).$$

定理9.1.4 设 λ 为 $A\in C^{m\times m}$ 的特征值，相对应的特征向量为 $x\in C^{m}$ ，μ 为 $B\in C^{n\times n}$ 的特征值，相对应的特征向量为 $y\in C^{n}$ ，则

$$A\otimes I_n + I_m \otimes B$$

的特征值为 $\lambda+\mu$，相对应的特征向量为 $x\otimes y$.

证明 由

$$Ax = \lambda x, By = \mu y$$

知

$$x \neq 0, y \neq 0$$

故 $x \otimes y \neq 0$ 且

$$(A \otimes \mathrm{I}_n)(x \otimes y) = (Ax) \otimes (I_n y)$$

$$= (\lambda x) \otimes y = \lambda (x \otimes y)$$

$$(I_m \otimes B)(x \otimes y) = (I_m x) \otimes (By)$$

$$= x \otimes (\mu y) = \mu(x \otimes y).$$

于是

$$(A \otimes \mathrm{I}_n + I_m \otimes B)(x \otimes y)$$

$$= (A \otimes \mathrm{I}_n)(x \otimes y) + (I_m \otimes B)(x \otimes y)$$

$$= (\lambda + \mu)(x \otimes y).$$

更一般地, 设

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}c_{ij}x^{i}y^{j}$$

是变量x，y的复系数多项式，对于 $A\in \mathbf{C}^{m\times m}$，

$B\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 定义mn阶矩阵

$$f(A,B)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}c_{ij}A^{i}\otimes B^{j}.$$

其中，$A^{0}=I_{m},B^{0}=I_{n}$ ，则有

定理9.1.5 若A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ ， 相对应的特征向量分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ ， B的特征值为$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，相对应的特征向量分别为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ ，则矩阵 $f(A,B)$ 的特征值为的特征值为 $f(\lambda_s,\mu_t)$，相对应的特征向量分别为 $x_s\otimes y_t(s=1,\cdots,m;t=1,\cdots,n)$.

注：

（1） 若取 $f(x,y)=xy$，则有

$$f(A,B)=A\otimes B.$$

（2） 若取 $f(x,y)=x+y$，则有

$$f(A,B)=A\otimes \mathrm{I}_n+I_m\otimes B$$

称为矩阵A和B的**Kronecker和**.

推论9.1.2 若A的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，$B$ 的特征值 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，则

（1）$A\otimes B$ 的mn个特征值为

$$\lambda_i\mu_j(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n);$$

（2）$A\otimes I_n+I_m\otimes B$ 的mn个特征值为

$$\lambda_i+\mu_j(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n);$$

(3) $\rho(A \otimes B) = \rho(A)\rho(B)$;

(4) $|A \otimes B| = |A|^n |B|^m$;

(5) $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

证明 由定理9.1.3，定理9.1.4易(1)-(3)，且

$$|A\otimes B| = \prod_{i=1}^{m}\left(\prod_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j\right) = \prod_{i=1}^{m}\left(\lambda_i^n\prod_{j=1}^{n}\mu_j\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{m}\lambda_i^n\right)\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_j\right)^m = |A|^n|B|^m,$$

$$\mathrm{tr}(A\otimes B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j\right) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B).$$

例2 求下列矩阵的特征值及相应的特征向量.

$$(1) A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

P166例9.1.2

$$(2)\,A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

解 令

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&1&3\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-2\end{bmatrix},$$

易求得B的特征值为1,2,3, 对应的特征向量分别为

$$x_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},x_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\ x_3=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$$

C的特征值为−1, −2, 对应的特征向量分别为

$$y_1=(1,0)^{\mathrm{T}},y_2=(-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

（1） 经计算可知 $A_1 = B \otimes C$. 所以 A_1 的特征值为

-1,-2,-2,-4,-3,-6，相对应的特征向量分别为

$$p_1 = x_1 \otimes y_1 = (1,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$p_2 = x_1 \otimes y_2 = (-1,1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$p_3 = x_2 \otimes y_1 = (0,0,-1,0,1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$p_4 = x_2 \otimes y_2 = (0,0,1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}},$$

$$p_5 = x_3 \otimes y_1 = (1,0,0,0,2,0)^{\mathrm{T}},$$

$$p_6 = x_3 \otimes y_2 = (-1,1,0,0,-2,2)^{\mathrm{T}}.$$

（2） 经计算可知

$$A_2 = B \otimes I_2 + I_3 \otimes C$$

所以A_2的特征值为0, -1, 1, 0, 2, 1， 相对应的特征向量分别为(1)中所求的

$$p_1, p_2 \cdots, p_6.$$

9.2 Kronecker积的应用

矩阵的Kronecker积在许多领域得到了应用，如系统控制等工程研究领域，常常需要解线性方程，矩阵的Kronecker 积是研究线性方程可解性的有效工具．这里只初步介绍利用Kronecker 积解线性矩阵方程。

9.2.1 矩阵的拉直

定义9.2.1 设

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 分别是矩阵A的列.

记

$$\mathrm{vec}(A)$$

$$=\left[a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1},a_{12},a_{22},\cdots,a_{m2},a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{mn}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$=\ (\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\cdots,\alpha_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}.$$

则称 $\mathrm{vec}(A)$ 为矩阵A的列拉直，

vec 称为拉直算子

类似地，可以定义矩阵的行拉直.

例如,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

则

$$\mathrm{vec}(A)=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\4\end{pmatrix}.$$

由定义易知以下结论成立.

定理9.2.1 设 $A, B \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则

（1）对于任意常数k，有 $\text{vec}(kA) = k\cdot\text{vec}(A)$;

（2） $\text{vec}(A+B) = \text{vec}(A) + \text{vec}(B)$.

定理9.2.1称为vec的线性性质

定理9.2.2 设 $k_i \in \mathrm{C}, A_i \in \mathrm{C}^{m\times n}(i=1,2,\cdots,s)$，则

$$\mathrm{vec}(k_1A_1+k_2A_2+\cdots+k_sA_s)$$

$$=k_1\mathrm{vec}(A_1)+k_2\mathrm{vec}(A_2)+\cdots+k_s\mathrm{vec}(A_s).$$

定理9.2.3 设 $A\in \mathrm{C}^{m\times n}, B\in \mathrm{C}^{n\times s}, C\in \mathrm{C}^{s\times t}$，则

$$\mathrm{vec}(ABC)=(\mathrm{C}^{\mathrm{T}}\otimes A)\mathrm{vec}(B).$$

证明 记

$$B = (b_1, b_2, \cdots, b_s), b_i \in \mathrm{C}^n (i = 1, 2, \cdots, s),$$

$$C = (c_1, c_2, \cdots, c_t), c_j \in \mathrm{C}^s (j = 1, 2, \cdots, t),$$

则

$$\mathrm{vec}(ABC) = \mathrm{vec}(ABc_1, ABc_2, \cdots, ABc_t) = \begin{bmatrix} ABc_1 \\ ABc_2 \\ \vdots \\ ABc_t \end{bmatrix}$$

而 $$ABc_j = c_{1j}Ab_1 + c_{2j}Ab_2 + \cdots + c_{sj}Ab_s$$

$$= (c_{1j}A, c_{2j}A, \cdots, c_{sj}A)\mathrm{vec}(B).$$

所以

$$\mathrm{vec}(ABC) = \begin{bmatrix} c_{11}A & c_{21}A & \cdots & c_{s1}A \\ c_{12}A & c_{22}A & \cdots & c_{s2}A \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1t}A & c_{2t}A & \cdots & c_{st}A \end{bmatrix} \mathrm{vec}(B)$$

$$= (\mathrm{C}^{\mathrm{T}} \otimes A)\mathrm{vec}(B).$$

定理9.2.4 设$A_i \in \mathbf{C}^{m\times m}, B \in \mathbf{C}^{m\times n}, C_i \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则

$$\operatorname{vec}\left[\sum_{i=1}^{s}(A_i B C_i)\right] = \left[\sum_{i=1}^{s}(C_i^{\mathrm{T}} \otimes A_i)\right]\operatorname{vec}(B).$$

推论9.2.1 设 $A \in \mathrm{C}^{m\times m}, B \in \mathrm{C}^{m\times n}, C \in \mathrm{C}^{n\times n}$，则

（1） $\mathrm{vec}(AB) = (I_n \otimes A)\mathrm{vec}(B);$

（2） $\mathrm{vec}(BC) = (\mathrm{C}^{\mathrm{T}} \otimes I_m)\mathrm{vec}(B);$

（3） $\mathrm{vec}(AB + BC)$

$= (I_n \otimes A + \mathrm{C}^{\mathrm{T}} \otimes I_m)\mathrm{vec}(B).$

9.2.2 线性矩阵方程

1. 线性矩阵方程

$$A_1XB_1 + A_2XB_2 + \cdots + A_sXB_s = D \quad (9\text{-}10)$$

的求解问题，其中

$$A_i \in \mathbf{C}^{m\times m}, B_i \in \mathbf{C}^{n\times n} (i = 1, 2, \cdots, s), D \in \mathbf{C}^{m\times n}$$

为已知矩阵， $X \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 为未知矩阵。

定理9.2.5 矩阵X为矩阵方程(1)的解当且仅当

$x=\mathrm{vec}(X)$ 为线性方程组

$$Gx=\mathrm{vec}(D) \qquad (9\text{-}11)$$

的解，其中

$$G=\sum_{i=1}^{s}(B_i^{\mathrm{T}}\otimes A_i).$$

证明: 结合定理9.2.4，对方程(9-10)两边进行拉直运算即得线性方程组(9-11). 于是定理得证.

推论9.2.2 矩阵方程(9-10)的解当且仅当

$$\operatorname{rank}[G, \operatorname{vec}(D)] = \operatorname{rank}(G).$$

推论9.2.3 矩阵方程(9-10)的唯一解当且仅当 G 非奇异。

例1 解矩阵方程 $A_1XB_1 + A_2XB_2 = D$，

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}.$$

解：由定理9.2.5知，上述方程可化为

$$(\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{A}_2)\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{vec}(\boldsymbol{D}).$$

经计算，得

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 5 & 9 \\ 3 & -3 & 1 & -7 \\ -3 & 3 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -8 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

经验证，上述方程组有唯一解，且

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 1$$

故所求方程有唯一解，且为

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. 矩阵方程

$$AX + XB = D \qquad (9\text{-}12)$$

$A \in \mathbf{C}^{m\times m}, B \in \mathbf{C}^{n\times n}, D \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 为已知矩阵,

$X \in \mathbf{C}^{m\times n}$ ，为未知矩阵。

定理9.2.6 设A的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，矩阵$B$的特征值 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$，则方程(9-12) 有唯一解当且仅当$A$和$-B$ 无相同的特征值，即

$$\lambda_i + \mu_j \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, m,\ \ j = 1, 2, \cdots, n).$$

证明 注意到 B^{T} 与B有相同的特征值这个事实,

则根据推论9.1.2，有

$$I_n \otimes A + B^{\mathrm{T}} \otimes I_m \qquad (9\text{-}13)$$

的特征值为

$$\lambda_i + \mu_j (i = 1, 2, \cdots, m,\ \ j = 1, 2, \cdots, n).$$

而由定理9.2.5知，方程（9-12））有唯一解当

且仅当

$$(I_n \otimes A + B^{\mathrm{T}} \otimes I_m)\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(D) \quad (9\text{-}14)$$

有唯一解. 且据推论9.2.3知方程(9-14)有唯一解

当且仅当矩阵(9-13)非奇异. 所以

$$\lambda_i + \mu_j \neq 0(i = 1, 2, \cdots, m,\ \ j = 1, 2, \cdots, n).$$

例2 求解矩阵方程$AX+XB=D$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & 4\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-1 & -7\\ 5 & 11\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x_1 & x_3\\ x_2 & x_4\end{bmatrix}.$$

解 因为A的特征值为1和2, B的特征值为3和4,

所以所求方程有唯一解，且方程可化为

$$(I_2\otimes A+B^{\mathrm{T}}\otimes I_2)\mathrm{vec}(X)=\mathrm{vec}(D)$$

经计算, 即

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

解得 $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 1,$

于是，所求方程的解为

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. 矩阵方程

$$X + AXB = D. \qquad (9\text{-}15)$$

$A \in C^{m\times m}, B \in C^{n\times n}, D \in C^{m\times n}$ 为已知矩阵,

$X \in C^{m\times n}$ 为未知矩阵.

定理9.2.7 设A的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，矩阵$B$的特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，则方程(9-15）有唯一解当且仅当

$$\lambda_i\mu_j \neq -1,(i=1,2,\cdots,m;\ \ j=1,2,\cdots,n).$$

证明 类似于定理9.2.6的证明.

$X + AXB = D$有唯一解

$\Leftrightarrow \ (I_n \otimes I_m + B^{\mathrm{T}} \otimes A)\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(D)$有唯一解

$\Leftrightarrow \ (I_n \otimes I_m + B^{\mathrm{T}} \otimes A)$非奇异

$\Leftrightarrow (I_n \otimes I_m + B^{\mathrm{T}} \otimes A)$特征值全不为0

又 $(I_n \otimes I_m + B^{\mathrm{T}} \otimes A)$ 的特征值为

$$1 + \lambda_i \mu_j (i = 1, 2, \cdots, m;\ \ j = 1, 2, \cdots, n)$$

所以

$$\lambda_i \mu_j \neq -1, (i = 1, 2, \cdots, m;\ \ j = 1, 2, \cdots, n).$$

例3 求解矩阵方程$X+AXB=D$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&3\\0&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3&0\\-1&1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1&5\\5&3\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x_1&x_3\\x_2&x_4\end{bmatrix}.$$

解 因为A的特征值为1和2, B的特征值为3和1, 所以所求方程有唯一解，且方程可化为

$$(I_2\otimes I_2+B^{\mathrm{T}}\otimes A)\mathrm{vec}(X)=\mathrm{vec}(D).$$

经计算，即

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

解得 $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1,$

于是，所求方程的解为

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9.3 Hadamard积

矩阵的**Hadamard**积是一种特殊的矩阵乘积，指两个相同行数和列数的矩阵对应元素相乘而得到新矩阵的一种算法，在许多领域都有重要应用.

定义9.3.1 设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in C^{m\times n}$，则称

$$A\circ B=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$$

为矩阵A和B的**Hardmard积**，简记为

$$A\circ B=(a_{ij}b_{ij}).$$

关于Hadamard积的基本性质，有如下结论.

定理9.3.1 设 $A,B,C,D\in \mathbf{C}^{m\times n}$，则

(1) $k(A\circ B)=(kA)\circ B=A\circ(kB)$，$k$ 为常数；

(2) $A\circ B=B\circ A$；

(3) $(A\circ B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\circ B^{\mathrm{T}},(A\circ B)^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{H}}\circ B^{\mathrm{H}}$；

(4) 若A,B对称，则 $A\circ B$ 对称；

(5) 若A,B为Hermite矩阵，则 $A\circ B$ 为Hermite矩阵；

$$(6) A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C = A \circ B \circ C;$$

$$(7) (A \pm B) \circ C = (A \circ C) \pm (B \circ C);$$

$$(8) (A + B) \circ (C + D) = (A \circ C) + (A \circ D) + (B \circ C) + (B \circ D);$$

$$(9) \mathrm{vec}(A \circ B) = \mathrm{vec}(A) \circ \mathrm{vec}(B);$$

$$(10) \mathrm{tr}\left[A^{\mathrm{T}}(B \circ C)\right] = \mathrm{tr}\left[(A^{\mathrm{T}} \circ B^{\mathrm{T}})C\right].$$

证明 由定义易证(1)-(9). 下证(10). 记

$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}), C=(c_{ij})$. 则

$$\left[A^{\mathrm{T}}(B\circ C)\right]_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}b_{ki}c_{ki}=\left[(A^{\mathrm{T}}\circ B^{\mathrm{T}})C\right]_{ii}.$$

所以,

$$A^{\mathrm{T}}(B\circ C)\text{与}(A^{\mathrm{T}}\circ B^{\mathrm{T}})C$$

具有相同的对角元素, 即证(10)成立.

下面的定理说明了$A \circ B$ 与 $A \otimes B$ 之间的关系.

定理9.3.2 设$A, B \in \mathrm{C}^{n\times n}$，则 $A \circ B$是 $A \otimes B$ 的位于 $1, n+2, 2n+3, \cdots, n^2$行和列的主子矩阵.

证明 设$\mathrm{e}_i \in \mathrm{R}^n$ 是第i个标准单位向量. 即 e_i 的第i个分量为1，其余分量为0. 记

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), M = (\mathrm{e}_1 \otimes \mathrm{e}_1, \cdots, \mathrm{e}_n \otimes \mathrm{e}_n).$$

则

$$
\begin{aligned}
a_{ij}b_{ij} &= (\mathrm{e}_i^{\mathrm{T}} A \mathrm{e}_j) \otimes (\mathrm{e}_i^{\mathrm{T}} B \mathrm{e}_j) \\
&= (\mathrm{e}_i \otimes \mathrm{e}_i)^{\mathrm{T}} (A \otimes B)(\mathrm{e}_j \otimes \mathrm{e}_j) \\
&= \mathrm{e}_i^{\mathrm{T}} [M^{\mathrm{T}} (A \otimes B) M] \mathrm{e}_j .
\end{aligned}
$$

于是

$$
A \circ B = M^{\mathrm{T}} (A \otimes B) M .
$$

定理9.3.3 设$A,B\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则

$$\operatorname{rank}(A\circ B)\leqslant\operatorname{rank}(A)\operatorname{rank}(B).$$

证明 由定理9.1.2

$$\operatorname{rank}(A\otimes B)=\operatorname{rank}(A)\operatorname{rank}(B).$$

又 $A\circ B$ 为 $A\otimes B$ 的一个主子阵，所以

$$\operatorname{rank}(A\circ B)\leqslant\operatorname{rank}(A)\operatorname{rank}(B).$$

此结论对 $A,B\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 时也成立.

定理9.3.4 设$A,B\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若$A,B$半正定，则 $A\circ B$ 半正定；若A,B正定，则$A\circ B$正定.

证明 假设A,B半正定，则 $A\circ B$ 为Hermite矩阵，由定理9.1.3知，$A\otimes B$半正定，又由定理9.3.2知，$A\circ B$为$A\otimes B$ 的一个主子阵，所以 $A\circ B$ 半正定，类似的，可证明正定情形。

定理9.3.5 设$A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$，若$A, B$半正定，则

$$(1)\lambda_{\min}(A\circ B) \geqslant \lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B);$$

$$(2)\lambda_{\max}(A\circ B) \leqslant \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B).$$

上述定理是特征值的一个较弱的定量估计，而下述定理给出了有实用价值的下界.

定理9.3.6 设$A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$，若$A, B$半正定，则

$$(1)\lambda_{\min}(A\circ B) \geqslant \lambda_{\min}(AB^{\mathrm{T}});$$

$$(2)\lambda_{\min}(A\circ B) \geqslant \lambda_{\min}(AB).$$

定理9.3.7 设$A, B \in \mathrm{C}^{n\times n}$，若$A, B$半正定，则

$$\det(A \circ B) \geqslant \det A \det B.$$

若A, B为非负矩阵，则Hadamard积还有如下结论.

定理9.3.8 设$A, B \in \mathrm{C}^{n\times n}$，若$A, B$为非负矩阵，则

(1)$A \circ B$非负;

(2)$\rho(A \circ B) \leqslant \rho(A)\rho(B)$.