第四章

矩阵的标准形

4.1 线性代数基础

4.1.1 矩阵二次型

4.1.2 相似对角化

4.2 Jordan标准形

标准形的理论源自矩阵的相似性，因为相似矩阵有许多相似不变量：特征多项式、特征值、行列式、迹及秩等。这自然导出了寻找相似矩阵集合中的“代表矩阵”的问题。“代表矩阵”当然越简单越好。对于可对角化矩阵，“代表矩阵”就是特征值组成的对角矩阵。特别地，对于正规矩阵，可逆的相似变换矩阵特殊化为酉矩阵或正交矩阵。但是，不是任何一个矩阵都与对角矩阵相似的！！！

因此我们“退而求其次”，寻找“几乎对角的”矩阵。这就引出了矩阵在相似下的各种标准形问题，其中**Jordan**标准形是最接近对角的矩阵。

4.2.1 Jordan 标准形的定义

定义4. 2. 1 形如

$$J_{m_i}(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{m_i\times m_i}$$

的方阵称为 m_i 阶的Jordan块。

例如

$$J_2(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{pmatrix}$$

$$J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

定义4.2.2 由若干个Jordan块组成的分块对角阵

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

称为Jordan标准形。

4.3 λ-矩阵及其Smith标准形

由于Jordan标准形的计算需要特征值、特征向量及广义特征向量的信息，因此与特征多项式关系密切。从函数的眼光看，特征多项式实际上是特殊的函数矩阵（元素是函数的矩阵），这就自然引出对λ-矩阵的研究，并希望能简化Jordan标准形的繁杂计算。

矩阵论 MATRIX THEORY

一、 λ-矩阵及其Smith标准形

定义4. 3. 1 称矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

为 λ-矩阵，其中元素 $a_{ij}(\lambda)$ $(1\le i\le m,\quad 1\le j\le n)$ 为数域 P 上关于 λ 的多项式。

注1: 当 $\lambda=0$ 时， λ-矩阵即为数字矩阵，而数字矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda I-A$ 就是 $A(\lambda)$ 矩阵的一次矩阵。

注2：不恒等于零的子式的最高阶数称为λ- 矩阵的秩，记为$rankA(\lambda)$

例1：

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2+2\lambda & \lambda \\ \lambda & 1\end{bmatrix}$$

$$\det A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda^2+2\lambda & \lambda \\ \lambda & 1\end{vmatrix}=2\lambda\neq 0$$

$$rankA(\lambda)=2$$

定义 称 n 阶 λ- 矩阵 $A(\lambda)$ 是**可逆的**，如果有

$$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=I_n$$

并称 $B(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的**逆矩阵**。反之亦然。

注:与数字矩阵不同的是满秩矩阵未必是可逆的。

例如：数字矩阵的特征矩阵是满秩的但不可逆

定理 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的**充要条件**是其行列式为**非零的常数**。

证 $\Rightarrow$ 设 $A(\lambda)$可逆，则存在$B(\lambda)$，使得

$$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=I_n$$

$$\Rightarrow |A(\lambda)B(\lambda)|=1 \quad \text{即}|A(\lambda)||B(\lambda)|=1$$

由于 $|A(\lambda)|,|B(\lambda)|$均为 λ 的多项式，所以 $|A(\lambda)|,|B(\lambda)|$ 均为常数。

$\Leftarrow$ 设 $|A(\lambda)|=C\neq 0$，则

$$\left(\frac{1}{c}adjA(\lambda)\right)A(\lambda)=A(\lambda)\left(\frac{1}{c}adjA(\lambda)\right)=E_n$$

所以，$A(\lambda)$是可逆的。其中$adjA(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的伴随矩阵。

定义4.3.2 λ-矩阵的**初等变换**是指下面三种变换

（1）任两行（列）互换； $P(i,j)$

（2）用**非零的数**乘以某行（列）； $P(i(k))$

（3）用 λ 的多项式 $\varphi(\lambda)$ 乘以某行（列），并将结果加到另一行（列上去） $P(j\varphi(\lambda),i)$

注：(1) 由单位矩阵经过一次上述三种初等变换得到的矩阵称为相应的初等矩阵，其行列式为一非零常数.

(2) 左乘变行，右乘变列。

(3) 初等变换不改变 $A(\lambda)$ 的秩。

定义4.3.3 如果矩阵 $A(\lambda)$ 经过有限次的**初等变换**化成矩阵 $B(\lambda)$，则称矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ **等价**，记为

$$A(\lambda) \sim B(\lambda)$$

注：（1）等价具有反身性，对称性，传递性。

（2）**两个 $\lambda-$矩阵等价，它们的秩相等，反之不成立。**

例如

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix} \qquad B(\lambda)=\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

显然秩都为2，但由初等变换的定义知，两个等价的 $\lambda-$矩阵行列式只能相差一个不为零的常数因子。因此上述两矩阵不等价。

矩阵论 MATRIX THEORY

定义　形如

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

的 λ-矩阵称为Smith标准形，其中 $d_i(\lambda)$为首一多项式（首项系数为1）且

$$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)\quad (i=1,2,\cdots,r-1)$$

矩阵论 MATRIX THEORY

定理4. 3. 1 设 $A(\lambda)=\left(a_{ij}(\lambda)\right)_{m\times n}$ 且 $rank(A(\lambda))=r$，则

$$A(\lambda)\sim J(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

例2 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

的特征矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 2 & -6\\ 1 & \lambda & -3\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{pmatrix}$$

的 **Smith标准形** 。

$A(\lambda)$ 有非零常数

解: 对矩阵 $A(\lambda)$ 进行初等变换，可得

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 2 & -6\\ 1 & \lambda & -3\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-(\lambda+1)r_3}\begin{pmatrix}0 & -\lambda+1 & -\lambda^2+3\lambda-2\\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda-4 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & -\lambda+1 & -\lambda^2+3\lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3-(\lambda-4)c_1]{c_2-c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & -\lambda+1 & -\lambda^2+3\lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3+c_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & -(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

即为所求的Smith标准形。

例3 求矩阵 $A(\lambda)$ 的 **Smith标准形**，其中

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}$$

$A(\lambda)$ 的元素**有公因子** λ**，可用初等变换把左上角的元素变成** λ。

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{pmatrix}3\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ 2\lambda^2 & \lambda^3-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}c_1}\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ \frac{2}{3}\lambda^2 & \lambda^3-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\frac{2}{3}\lambda r_1}\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ 0 & \frac{\lambda}{3}(\lambda^2-10\lambda-3)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3r_2]{c_2-(\lambda+5)c_1}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda(\lambda^2-10\lambda-3)\end{pmatrix}$$

即为所求的Smith标准形。

例4 求矩阵 $A(\lambda)$ 的 **Smith标准形**，其中

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$A(\lambda)$ 的元素无公因子，也无非零常数，用初等变换把矩阵中的某一个元素变成常数。

$A(\lambda)$的**Smith**标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{pmatrix}$

二、行列式因子、不变因子与初等因子

定义4.3.6 矩阵 $A(\lambda)$ 的所有非零 k 阶子式的首一（最高次项系数为 1 ）最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子。

如 矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

的行列式因子为

$$D_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=\lambda-1, D_3(\lambda)=(\lambda-1)^3.$$

定义4.3.4 矩阵 $A(\lambda)$ 的Smith标准形中的非零对角元

$$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$$

称为 $A(\lambda)$ 的不变因子。

定理4.3.2 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，则它们有相同的秩和相同的行列式因子。

由定理4.3.2，$A(\lambda)$与$J(\lambda)$有相同的行列式因子，因 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$，故$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda)$。因此，

$$d_k(\lambda)=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$$

这说明，$d_k(\lambda)$ 由 $A(\lambda)$ 唯一确定，故Smith标准形唯一。

定理 矩阵 $A(\lambda)$ 的Smith标准形是**唯一的**，并且

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda),\ d_k(\lambda)=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}\quad (k=2,3,\cdots,r)$$

定理说明我们除了可以用初等变换求不变因子还可以用行列式因子来确定不变因子，从而得到唯一的Smith标准形。

定理 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的**充要条件**是它们有相同的**行列式因子**（或相同的**不变因子**）。

定义4.3.5 将 λ-矩阵$A(\lambda)$的不变因子分解成各因式的乘积形式，即

$$d_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_{1s}}$$
$$d_2(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_{2s}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d_r(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{r1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{r2}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_{rs}}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 互异，且由不变因子的整除性，有

$$k_{1i}\le k_{2i}\le\cdots\le k_{ri}\,,\quad(1\le i\le s)$$

所有指数大于零的因子 $(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}}(1\le j\le r,1\le j\le s,k_{ij}>0)$ 都称为 $A(\lambda)$ 的初等因子（相同的必须按出现的次数计算）。

例5 矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1), d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2,$$

$$d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda+1)^3(\lambda-2)$$

则矩阵 $A(\lambda)$ 的所有初等因子为

$$\lambda, \lambda, \lambda^2, \lambda-1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^3, (\lambda+1)^2, (\lambda+1)^3, \lambda-2$$

例6 若已知 $A(\lambda)$ 的秩为4，其初等因子为

$$\lambda,\lambda,\lambda^2,\lambda-1,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^3,(\lambda+1)^2,(\lambda+i)^3,(\lambda-i)^3$$

则矩阵 $A(\lambda)$ 的 所有不变因子为

$$d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda-1)^3(\lambda+i)^3(\lambda-i)^3$$

$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2,$$

$$d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1),$$

$$d_1(\lambda)=1,$$

例7 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

求其特征矩阵 $\lambda I-A$ 的不变因子、初等因子及

Smith标准形。

解：

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$D_3(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$D_2(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$$

于是不变因子为

$$d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$$

$$d_3(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

初等因子为 $\lambda+1, \lambda-1, \lambda-2$

Smith标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2) \end{bmatrix}$$

注： 设有分块对角 λ—矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} A_1(\lambda) & & & \\ & A_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k(\lambda) \end{bmatrix}$$

则 $A_1(\lambda), A_2(\lambda), \cdots, A_k(\lambda)$ 的初等因子的全体就是 $A(\lambda)$ 的初等因子组。

定理　复数域C上两个 n 阶矩阵 A， B 相似的**充要条件**是它们的特征矩阵$\lambda I-A$与 $\lambda I-B$等价。

由定理知，复数域 C 上两个 n 阶矩阵A，B相似的充要条件是它们的特征矩阵$\lambda I-A$与$\lambda I-B$具有相同的初级因子。

定理 4.2.2 每个 n 阶复矩阵 A 都与一个Jordan标准形 J 相似。若不计Jordan块的排列次序，该Jordan标准形完全由 A 唯一确定，即每个矩阵都有唯一的Jordan标准形。

求Jordan标准形的步骤

（1）求特征矩阵的初等因子组，设为

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},(\lambda-\lambda_2)^{m_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_s$ 可能相同，$m_1,m_2,\cdots m_s$ 也有可能相同，$m_1+m_2+\cdots+m_s=n$

（2）写出每个初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}\quad(i=1,2,\cdots s)$
对应的Jordan块。

$$J_{m_i}(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{m_i\times m_i}\qquad(i=1,2,\cdots s)$$

（3）写出这些Jordan块构成的Jordan标准形。

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

求Jordan标准形方法

方法一、利用初等变换，将矩阵A的特征矩阵$\lambda I - A$化成**Smith**标准形，求出不变因子，然后导出初等因子。

方法二、先求出矩阵A的特征矩阵$\lambda I - A$的行列式因子，然后利用行列式因子求出不变因子，再由不变因子导出初等因子。

根据初等因子即可写出Jordan标准形。

例8　求矩阵 A 的 Jordan标准形 J_A，其中

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

方法一： 对矩阵 $\lambda I - A$ 进行初等变换，可得

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & \lambda+1 & 0 \\ \lambda-3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda-3 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

因此 A 的初等因子为 $\lambda-2,(\lambda-1)^2$.

从而所求Jordan标准形为 $J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

方法二：

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$D_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=1, D_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

$$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

因此 A 的初等因子为 $\lambda-2, (\lambda-1)^2.$

从而所求Jordan标准形为 $J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例9 求矩阵 A 的 Jordan标准形 J_A，其中

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

解:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$$

即矩阵 A 有三重特征值 $\lambda=2$

又

$$2I-A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(2I-A)=1$, 对应的线性无关的特征向量有两个，则矩阵 A 的Jordan标准形有两个Jordan块，分别为1阶和2阶，即

$$J=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

注：此方法称为特征向量法，适合较为简单的矩阵，当某个特征值的重数较高时，对应的Jordan块无法确定。

例8中，可求得 $|\lambda I - A| = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$

且 $\mathrm{rank}(2I - A) = 2, \mathrm{rank}(I - A) = 2,$

对应特征值2和1的线性无关的特征向量分别有1个，则矩阵 A 的Jordan标准形有1个对应于特征值2的1阶Jordan块和1个对应于特征值1的2阶Jordan块，即

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 10 已知

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

求可逆矩阵 P ，使 $P^{-1}AP=J$，其中 J 为 A 的Jordan标准形。

解： 对矩阵 $\lambda I - A$ 进行初等变换，可得

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda-4 \\ 1 & \lambda & -3 \\ \lambda+1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

因此 A 的初等因子为 $\lambda-1,(\lambda-1)^2.$

从而所求Jordan标准形为 $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

再求相似变换矩阵：

设所求矩阵为 P，则 $P^{-1}AP = J$，对于P

按列分块记为 $P = [p_1, p_2, p_3]$

于是有

$$AP = A[p_1, p_2, p_3] = [Ap_1, Ap_2, Ap_3]$$

$$= PJ = [p_1, p_2, p_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [p_1, p_2, p_2 + p_3]$$

从而可得

$$Ap_1 = p_1, Ap_2 = p_2, Ap_3 = p_2 + p_3$$

即

$$(I-A)p_1=0$$

$$(I-A)p_2=0$$

$$(I-A)p_3=-p_2$$

前面的两个方程为同解方程组，可以求出它们的一个基础解系：

$$\xi_1=[-1,\ \ 1,\ \ 0]^T,\xi_2=[3,\ \ 0,\ \ 1]^T$$

可以取 $p_1=\xi_1$ ，但是不能简单地取 $p_2=\xi_2$ ，这是因为如果 p_2 选取不当会使得第三个非齐次线性方程组无解。由于 ξ_1,ξ_2

的任意线性组合都是前两个方程组的解，所以应该取

$$p_2 = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$$

使得第三个非齐次方程有解，即其系数矩阵与增广矩阵有相同地秩，容易计算出其系数矩阵的秩为1，从而应该使得增广矩阵

$$\left[I - A, \quad -p_2\right]$$

的秩也为1。即

矩阵论 MATRIX THEORY

$$\begin{bmatrix} I-A, & -p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 & k_1-3k_2 \\ 1 & 1 & -3 & -k_1 \\ 1 & 1 & -3 & -k_2 \end{bmatrix}$$

容易看出只需令 $k_1=1, k_2=1$ 就会使得上述矩阵的秩为1，于是

$$p_2=\xi_1+\xi_2=\begin{bmatrix} 2, & 1, & 1 \end{bmatrix}^T$$

再由第三个方程解出一个特解为

$$p_3=\begin{bmatrix} 2, & 0, & 1 \end{bmatrix}^T$$

那么所求相似变换矩阵为

$$P=\left[p_1,p_2,p_3\right]=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$

4.4 Jordan块的幂运算

定理4. 4. 1 对于r 阶的Jordan块

$$J_r(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{bmatrix}_{r\times r}$$

有

$$\left[J_r(\lambda)\right]^k=\begin{bmatrix}\lambda^k & \frac{1}{1!}\left(\lambda^k\right)' & \frac{1}{2!}\left(\lambda^k\right)'' & \cdots & \frac{1}{(r-1)!}\left(\lambda^k\right)^{(r-1)} \\ & \lambda^k & \frac{1}{1!}\left(\lambda^k\right)' & \cdots & \frac{1}{(r-2)!}\left(\lambda^k\right)^{(r-2)} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \frac{1}{1!}\left(\lambda^k\right)' \\ & & & & \lambda^k\end{bmatrix}_{r\times r}$$

其中，$\left(\lambda^k\right)^{(r-1)}$ 表示 λ^k 对 λ 的 $r-1$ 阶导数。

例1　　对于方阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

求 A^{10} 。

解： 由4.3节例10可知

A 的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad 且 \quad P=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

故

$$P^{-1}AP=J$$

$$A^{10}=PJ^{10}P^{-1}$$

从而

$$A^{10} = PJ^{10}P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -19 & -20 & 60 \\ -10 & -9 & 30 \\ -10 & -10 & 31 \end{bmatrix}$$

4.5 最小多项式

Jordan标准形的计算复杂，而特征多项式与之关系密切。由于Cayley和Hamilton发现矩阵的特征多项式是矩阵的零化多项式，故类比多项式的带余除法理论，以适当的零化多项式为商，将矩阵多项式转化为相应的余式，从而降低多项式的次数，就成了另一种思路。

一、Cayley-Hamilton定理

定理4. 5. 1 （Cayley-Hamilton定理）

n阶方阵 A 是其特征多项式 $f(\lambda)$ 的"根"，即

$$f(A)=O$$

即设$f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$，

则 $f(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0$

由Cayley-Hamilton定理可以简化矩阵计算。

例 1 求矩阵 A 的矩阵多项式 $\varphi(A)$，其中

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

$$\varphi(A)=A^5-4A^4+6A^3-6A^2+6A-3I.$$

解: 矩阵 A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$$

则 $f(A) = O$

令 $\varphi(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^4 + 6\lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda - 3$

可知 $\varphi(\lambda) = (\lambda^2 + 1) f(\lambda) + \lambda - 1$

因此 $\varphi(A) = (A^2 + E) f(A) + A - I$

$$= A - I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二、最小多项式

定义4.5.1 $\varphi(\lambda)$是关于 λ 的多项式。若 $\varphi(A)=0$ 则称 $\varphi(\lambda)$ 是矩阵 A 的零化多项式。

显然矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$ 是矩阵 A 的一个零化多项式。且零化多项式无最高次数者，因此我们关心的是次数最低的零化多项式。

定义4.5.2 在矩阵 A 的所有零化多项式中，次数最低的首一多项式称为 A 的最小多项式，记为 $m_A(\lambda)$.

定理4.5.2 矩阵 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 整除 A 的任一零化多项式，特别地，$m_A(\lambda)$ 能整除特征多项式 $f(\lambda)$ ，且矩阵 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 是唯一的。

证明： 若 $\varphi(\lambda)$ 为 A 的任意零化多项式，则有

$$\varphi(\lambda)=q(\lambda)m(\lambda)+r(\lambda)$$

因此 $$\varphi(A)=q(A)m(A)+r(A)$$

由于 $\varphi(A)=m(A)=O$ 所以 $r(A)=O$

由于 $r(\lambda)$ 的次数小于 $m(\lambda)$ 的次数，所以

$$r(\lambda)=0$$

下证唯一性：

设$m_1(x), m_2(x)$都是A的最小多项式.

由带余除法，$m_1(x)$可表成

$$m_1(x) = q(x)m_2(x) + r(x)$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $\partial(r(x)) < \partial(m_2(x))$.

于是有 $$m_1(A) = q(A)m_2(A) + r(A) = 0$$

$\therefore \quad r(A) = 0$

由最小多项式的定义， $r(x)=0,$

即， $m_2(x)\,|\,m_1(x).$

同理可得， $m_1(x)\,|\,m_2(x).$

$\therefore\ m_1(x)=cm_2(x),\ c\neq 0$

又 $m_1(x),m_2(x)$都是首1多项式， $\therefore c=1$

故 $m_1(x)=m_2(x).$

定理4.5.3 矩阵 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 的根必定是A 的特征值；反之， A 的特征值也必定是 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 的根。

定理4.5.3说明若两矩阵相似，则两矩阵必有相同的最小多项式，（但最小多项式相同的矩阵不一定是相似的），同时也得到求最小多项式的一个方法，即可以从矩阵的特征多项式中寻找矩阵的最小多项式。

如：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

的最小多项式皆为$(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，但A与B不相似.

$$\because\quad |\lambda I-A|=(\lambda-1)^3(\lambda-2),$$

$$|\lambda I-B|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

即 $|\lambda I-A|\neq|\lambda I-B|$.　　所以，A与B不相似.

矩阵 A 的特征多项式

$$\varphi(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

那么 A 的最小多项式必具有如下形式

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{d_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{d_s}$$

这里 $d_i \leq m_i$

例如 求k级 Jordan块

$$J=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

的最小多项式 $m(\lambda)$ 。

解： 矩阵 J 的特征多项式

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^k.$$

而

$$\left(J-\lambda_i I\right)^{k-1}\neq 0$$

故J的最小多项式为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^k.$$

例 2　求矩阵 A 的最小多项式 $m(\lambda)$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

解： 矩阵 A 的特征多项式

$$f(\lambda)=(\lambda-1)^3.$$

因此 A 的最小多项式为 $(\lambda-1)^3$ 的因式

显然，$A-I\neq 0$,而$(A-I)^2=0.$

因此 A 的最小多项式为$(\lambda-1)^2$.

例 3　求矩阵 A 的 最小多项式 $m(\lambda)$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

解： 矩阵 A 的特征多项式

$$f(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-2)^3.$$

因此 A 的最小多项式仅有下述三种可能

$$(\lambda-3)(\lambda-2)$$

$$(\lambda-3)(\lambda-2)^2$$

$$(\lambda-3)(\lambda-2)^3.$$

直接计算得，

$$(A-3I)(A-2I)\neq 0,\ (A-3I)(A-2I)^2=0$$

因此 A 的最小多项式为$(\lambda-3)(\lambda-2)^2$.

注：（1）准对角阵的特征多项式等于各个子块的特征多项式的乘积。

（2）准对角阵的最小多项式等于各个子块的最小多项式的公倍数。

例 4　求下面Jordan矩阵 J 的 最小多项式 $m_J(\lambda)$

$$J=\begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

解： 矩阵 J 的特征多项式

$$f(\lambda)=(\lambda-2)^6.$$

因此 A 的最小多项式仅有下述六种可能

$$(\lambda-2)^i \quad i=1,2,3,4,5,6$$

直接计算得，

$$(J-2I)^3=0,\ (J-2I)^2\neq 0,\ (J-2I)\neq 0$$

因此 J 的最小多项式为$m_J(\lambda)=(\lambda-2)^3$.

例 5 求下面Jordan矩阵 J 的最小多项式 $m_J(\lambda)$

$$J=\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & & \\ & & & & 2 & & & \\ & & & & & 3 & & \\ & & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & & 3 \end{bmatrix}$$

解： 矩阵 J 的特征多项式

$$f(\lambda)=(\lambda-2)^5(\lambda-3)^3.$$

直接计算得，

J 的最小多项式为$m_J(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-3)^2$.

设$A \in C^{n \times n}$，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$是$A$的所有互不相同的特征值，则

$$m_A(\lambda) = m_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{q_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{q_s}$$

其中q_i是A的特征值λ_i对应的**Jordan**块的最高阶数．$i = 1, 2, \cdots, s$

综上有下述定理成立。

定理4.5.5 $A \in C^{n \times n}$，则矩阵 A 的最小多项式为 A 的第 n 个不变因子 $d_n(\lambda)$。

定理4.5.6 $A \in C^{n \times n}$，则矩阵 A 可对角化的充要条件是 A 的最小多项式没有重根。