

# 矩阵论 (Matrix Theory)

数理与统计学院  
SUES

## 第三章 范数理论

## 3.1 向量范数

对于实数和复数，由于定义了它们的**绝对值或模**，这样我们就可以用这个**度量**来表示它们的大小（几何上就是**长度**），进而可以考察两个实数或复数的**距离**。

对于 $n$  维线性空间，定义了**内积**以后，向量就有了**长度**（大小）、**角度**、**距离**等度量概念，这显然是3维现实空间中相应概念的推广。利用**公理化的方法**，可以进一步把向量长度的概念推广到**范数**。

## 3.1.1 向量范数的定义

**例 1** 复数  $x = (a, b) = ai + bj$  的长度或模指的是

$$\|x\| \equiv \sqrt{a^2 + b^2}.$$

显然复向量  $x$  的模  $\|x\|$  具有下列三条性质:

- (1)  $\|x\| \geq 0$  , 当且仅当  $x = 0$  时, 等号成立.
- (2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in R,$
- (3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, x, y \in C.$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例 2**  $n$  维欧氏空间中向量  $\boldsymbol{x}$  的长度或模定义为

$$\|\boldsymbol{x}\| \equiv \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

显然向量  $\boldsymbol{x}$  的模  $\|\boldsymbol{x}\|$  也具有下列三条性质:

- (1)  $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$  , 当且仅当  $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$  时, 等号成立.
- (2)  $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|, \forall \lambda \in \boldsymbol{R},$
- (3)  $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n.$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

## 一、 向量范数的概念

**定义3.1.1** 如果  $V$  是数域  $P$  上的线性空间，对  $V$  中的任意向量  $x \in V$ ，都有一个非负实数  $\|x\|$  与之对应，并且具有下列三个条件（正定性、齐次性和三角不等式）：

(1) (正定性)  $\|x\| \geq 0$ ;  $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$

(2) (齐次性)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in P$

(3) (三角不等式)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, x, y \in V$

则称  $\|x\|$  是向量  $x$  的向量范数，称定义了范数的线性空间  $V$  为赋范线性空间.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例 3** 设  $V$  是内积空间，则由

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in V$$

定义的  $\|\cdot\|$  是  $V$  上的向量范数，称为由内积  $(\cdot, \cdot)$  导出的范数. 这说明范数未必都可由内积导出.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例 4** 在赋范线性空间  $V$  中，定义任意两向量之间的距离为

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V$$

则称此距离  $d(\cdot, \cdot)$  为由范数  $\|\cdot\|$  导出的距离. 此时按此式定义了距离的  $V$  满足度量空间的距离三公理（对称性、三角不等式和非负性），所以赋范线性空间按由范数导出的距离构成一个特殊的度量空间.



# 矩阵论(MATRIX THEORY)

## 二、常用的向量范数

**例 5** 对任意  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in P^n$  , 由

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

定义的  $\|\cdot\|_1$  是  $P^n$  上的向量范数, 称为**1-范数**或  $l_1$  范数.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例 6** 对任意  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in P^n$  , 由

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2}$$

定义的  $\|\cdot\|_2$  是  $P^n$  上的向量范数, 称为**2-范数**或  $l_2$  范数, 也称为 **Euclid 范数**.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例 7** 对任意  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in P^n$  , 由

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

定义的  $\|\cdot\|_p$  是  $P^n$  上的向量范数, 称为 **p-范数** 或  $l_p$  范数.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

在广义实数范围内， $P$ 能否取到正无穷大呢？具体而言，如何计算这种范数呢？

**例 8** 对任意  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in P^n$ ，由

$$\|x\|_{\infty} = \max_j |x_j| \quad (= \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p)$$

定义的  $\|\cdot\|_{\infty}$  是  $P^n$  上的向量范数，称为  $\infty$ -范数或  $l_{\infty}$  范数.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**证明:** 验证  $\|x\|_{\infty} \equiv \max_j |x_j|$  是向量范数显然很容易. 下证  $\max_j |x_j| = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p$

令  $|x_k| = \max_j |x_j|$ , 则有

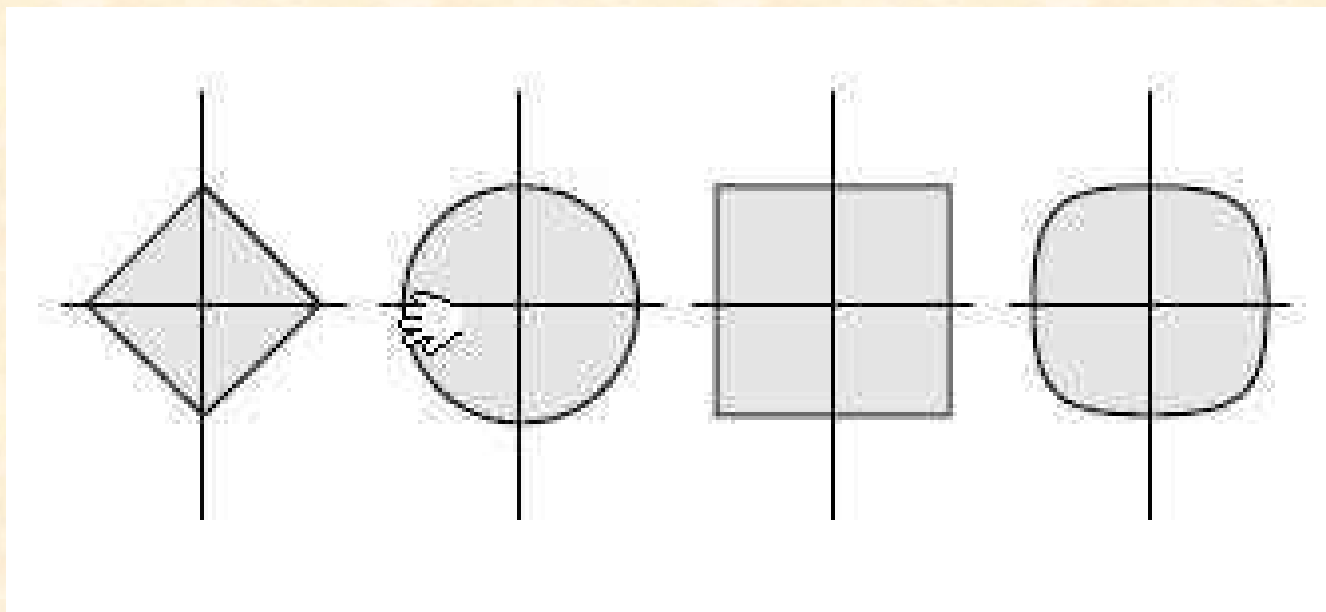
$$\begin{aligned}\|x\|_{\infty} = |x_k| &\leq \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p \\ &\leq (n |x_k|^p)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_{\infty}\end{aligned}$$

由极限的两边夹法则, 并注意到  $\lim_{p \rightarrow +\infty} n^{1/p} = 1$ , 即得欲证结论.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

这些范数在几何上如何理解呢？

对任意  $x = (x_1, x_2)^T \in C^2$ ，对应于  $1, 2, \infty, p$  四种范数的闭单位圆  $\|x\| \leq 1$  的图形分别为：



# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例9** 计算 $C^5$  中向量 $\alpha=(i,-2,i+1,0,1)^T$  的1, 2,  $\infty$ 范数.

**解**

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^5 |x_j| = 4 + \sqrt{2},$$

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{j=1}^5 |x_j|^2 \right)^{1/2} = 2\sqrt{2},$$

$$\|x\|_\infty = \max_j |x_j| = 2.$$

## 3.1.2 向量范数的等价性

### 一、利用已知向量范数构造新的范数

设  $\|\cdot\|_\alpha$  是  $C^m$  上的向量范数, 且

$$A \in C^{m \times n}, \quad \text{rank}(A) = n$$

则由

$$\|x\|_\beta = \|Ax\|_\alpha, \quad x \in C^n$$

所定义的  $\|\cdot\|_\beta$  是  $C^n$  上的向量范数.



# 矩阵论(MATRIX THEORY)

设  $V$  是数域  $P$  上的  $n$  维线性空间,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  为其一组基, 则  $V$  中的任意一个向量  $\alpha$  可唯一地表示成

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in P^n$$

又设  $\|\cdot\|$  是  $P^n$  上的向量范数, 则由

$$\|\alpha\|_{\mu} = \|X\|$$

所定义的  $\|\alpha\|_{\mu}$  是  $V$  上的向量范数.

## 二、向量范数的等价

**定义3.1.2** 设  $\|\alpha\|_a$ ,  $\|\alpha\|_b$  是  $n$  维线性空间  $V$  上定义  
的两种向量范数, 如果存在两个与  $\alpha$  无关的正数  
 $c_1, c_2$  使得

$$c_1 \|\alpha\|_b \leq \|\alpha\|_a \leq c_2 \|\alpha\|_b, \quad \forall \alpha \in V$$

则称该两范数等价.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

如：对于  $C^n$  上向量的1, 2,  $\infty$ 范数有以下不等式.

$$(1) \quad \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_{\infty},$$

$$(2) \quad \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_{\infty},$$

$$(3) \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_2.$$



此处改成  $\sqrt{n}$   
也成立

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

验证 (2) , 一方面, 由

$$\begin{aligned}\|x\|_{\infty}^2 &= [\max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}]^2 \\ &= \max\{|x_1|^2, |x_2|^2, \cdots, |x_n|^2\} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|_2^2,\end{aligned}$$

可得

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 .$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

另一方面， 由

$$\begin{aligned}\|x\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \\ &\leq n \max\{|x_1|^2, |x_2|^2, \dots, |x_n|^2\} \\ &= n \|x\|_\infty^2,\end{aligned}$$

可得

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**定理3.1.2** 有限维线性空间上的**不同范数是等价的**.

注意这个结论对**无限维**未必成立. 另外, 根据等价性, 处理向量问题 (例如向量序列的敛散性) 时, 我们可以基于一种范数来建立理论, 而使用另一种范数来进行计算.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

## 三、向量序列的收敛性

**定义** 设  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T \in P^n, k = 1, 2, \dots, n$   
若存在  $x_i \in P, i = 1, 2, \dots, n$  且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

则称  $P^n$  中的向量序列  $\{x^{(k)}\}$  收敛于向量

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

并记为  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \quad \text{or} \quad x^{(k)} \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty)$

否则, 称  $\{x^{(k)}\}$  发散.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例 1** 试判断下列向量序列的收敛性.

(1)  $\{x^{(k)}\}$ , 其中  $x^{(k)} = (1 - \frac{1}{k}, 2 + \frac{1}{k}, \frac{1}{k})^T$

(2)  $\{x^{(k)}\}$ , 其中  $x^{(k)} = (\frac{k}{k+1}, \frac{\sin k}{k}, \cos k)^T$

**解** (1)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = (1, 2, 0)^T$ , 故  $\{x^{(k)}\}$  收敛。

(2)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$  不存在, 故  $\{x^{(k)}\}$  发散。



# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**定理3.1.3** 设  $\{x^{(k)}\}$  为  $P^n$  的向量序列,  $\|\bullet\|$  为  $P^n$

中的任一向量范数, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x\| = 0.$$

## 3.2 矩阵范数

向量是特殊的矩阵,  $m \times n$  矩阵可以看成是一个  $m n$  维向量, 因此自然想到将向量范数推广到矩阵范数.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

## 3.2.1 方阵的矩阵范数

### 一、 方阵范数的定义

**定义3.2.1** 对  $P^{n \times n}$  中的任意矩阵  $A$ , 都有一个非负实数  $\|A\|$  与之对应, 并且具有下列四个条件:

- (1) (正定性)  $\|A\| \geq 0$ ;  $A = O \Leftrightarrow \|A\| = 0$ ;
- (2) (齐次性)  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ ,  $\forall \lambda \in P$ ;
- (3) (三角不等式)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ,  $A, B \in P^{n \times n}$ ;
- (4) (相容性)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ ,  $A, B \in P^{n \times n}$ ;

则称  $\|A\|$  是矩阵  $A$  的矩阵范数.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

## 二、常用矩阵范数

**例1** 对任意  $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$  , 由

$$\|A\|_{m_1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

定义的  $\|\cdot\|_{m_1}$  是  $P^{n \times n}$  上的矩阵范数, 称为  $m_1$  范数.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**证明：** 只需要验证此定义满足矩阵范数的四条性质即可. 非负性，齐次性与三角不等式容易证明. 现在验证乘法的相容性.

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \right) \left( \sum_{k=1}^n |b_{kj}| \right) \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \right) \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{kj}| \right) = \|A\| \|B\|.\end{aligned}$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例2** 对任意  $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$  , 由

$$\|A\|_F = \|A\|_{m_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^H A)}.$$

定义的  $\|\cdot\|_F$  是  $P^{n \times n}$  上的矩阵范数, 称为  $m_2$  范数, **Euclid 范数**或**Frobenius范数(F---范数)**.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**证明** 此定义的非负性、齐次性是显然的. 利用 **Minkowski**不等式容易证明三角不等式. 现在我们验证乘法的相容性.

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2 ,\end{aligned}$$

于是有

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F .$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**问：** 对任意  $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$ ，由

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

能不能构成  $P^{n \times n}$  上的矩阵范数？ **不能**

$$\text{取 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{而 } \|A\| = 1, \|B\| = 1, \|AB\| = 2.$$



# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例3** 对任意  $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$ , 由

$$\|A\|_{m_\infty} = n \max_{i,j} |a_{ij}|$$

定义的  $\|\cdot\|_{m_\infty}$  是  $P^{n \times n}$  上的矩阵范数, 称为  $m_\infty$  范数.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**证明** 非负性、齐次性和三角不等式容易证得. 现在考虑乘法的相容性. 那么

$$\begin{aligned}\|AB\| &= n \max_{i,j} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \\ &\leq n \max_{i,j} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &\leq n \max_{i,k} |a_{ik}| \cdot n \max_{k,j} |b_{kj}| \\ &= \|A\| \|B\|.\end{aligned}$$

因此  $\|A\|$  为矩阵  $A$  的范数.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例4** 对任意  $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$ , 由

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

定义的  $\|\cdot\|_1$  是  $P^{n \times n}$  上的矩阵范数, 称为**列和范数**.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例5** 对任意  $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$  , 由

$$\|A\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

定义的  $\|\cdot\|_{\infty}$  是  $P^{n \times n}$  上的矩阵范数, 称为**行和范数**.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例6** 对任意  $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$  , 由

$$\|A\|_2 = \left[ \lambda_{\max}(A^H A) \right]^{1/2},$$

定义的  $\|\cdot\|_2$  是  $P^{n \times n}$  上的矩阵范数, 称为谱范数.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例7** 设  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  , 计算  $\|A\|_1$  ,  $\|A\|_2$  ,  $\|A\|_\infty$  ,  $\|A\|_F$

**解**  $\|A\|_1 = 5$  ,  $\|A\|_\infty = 5$  ,  $\|A\|_F = \sqrt{23}$  ,

$$A^H A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix} , \quad \|A\|_2 = \sqrt{15} .$$

## 三、矩阵范数的等价

**定理**  $\mathbf{P}^{n \times n}$  上任意两种矩阵范数  $\|A\|_\alpha$ ,  $\|A\|_\beta$  都是等价的, 即存在两个与  $A$  无关的正数  $C_1, C_2$ , 使得

$$C_1 \|A\|_\beta \leq \|A\|_\alpha \leq C_2 \|A\|_\beta.$$

## 3.2.2 矩阵范数和向量范数的关系

**定义3.2.2** 设  $\|X\|_\alpha$  是向量范数,  $\|A\|_\beta$  是矩阵范数,

如果对于任何矩阵  $A$  与向量  $X$  都有

$$\|AX\|_\alpha \leq \|A\|_\beta \|X\|_\alpha$$

则称矩阵范数  $\|A\|_\beta$  与向量范数  $\|X\|_\alpha$  是相容的.



# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**例1** 矩阵的Frobenius范数与向量的2-范数是相容的.

**证明:**

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2},$$

$$\|X\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = (X^H X)^{1/2}.$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

根据Holder不等式可以得到

$$\begin{aligned}\|AX\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[ \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right) \right] \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right) \\ &= \|A\|_F^2 \|X\|_2^2,\end{aligned}$$

于是有  $\|AX\|_2 \leq \|A\|_F \|X\|_2.$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**定理3.2.1**  $P^{n \times n}$  上每种矩阵范数都存在  $P^n$  上与之相容的向量范数.

**定理3.2.2** 设  $\|X\|_\alpha$  是向量的范数, 则

$$\|A\| = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}$$

满足矩阵范数的定义, 且  $\|A\|$  是与向量范数  $\|X\|_\alpha$  相容的矩阵范数. 称为由向量范数  $\|X\|_\alpha$  所诱导的诱导范数或算子范数.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**证明** 首先我们验证此定义满足范数的四条性质. 非负性, 齐次性与三角不等式易证. 现在考虑矩阵范数的相容性. 设  $B \neq 0$ , 那么

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \max_{X \neq 0} \frac{\|ABX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha} = \max_{X \neq 0} \left( \frac{\|A(BX)\|_\alpha}{\|BX\|_\alpha} \frac{\|BX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha} \right) \\ &\leq \max_{X \neq 0} \frac{\|A(BX)\|_\alpha}{\|BX\|_\alpha} \max_{X \neq 0} \frac{\|BX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha} \\ &\leq \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha} \max_{X \neq 0} \frac{\|BX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha} = \|A\| \|B\|\end{aligned}$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

因此  $\|A\|$  满足矩阵范数的定义. 最后证明  $\|A\|$  与  $\|X\|_\alpha$  是相容的. 由上面的结论可知

$$\|AX\|_\alpha \leq \|A\| \|X\|_\alpha$$

这说明  $\|A\|$  与  $\|X\|_\alpha$  是相容的.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

注: (1)

$$\|A\|_1 = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1};$$

$$\|A\|_2 = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2};$$

$$\|A\|_\infty = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}.$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

注：(2) 设  $\|\cdot\|_M$  是  $P^{n \times n}$  上的矩阵范数，任取  $P^n$  中的非零向量  $y$ ，则范数

$$\|x\|_\alpha = \|xy^T\|_M$$

是  $P^n$  上的向量范数. 且与  $\|\cdot\|_M$  相容.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

## 3.2.3 长方阵的矩阵范数

对任意  $A = (a_{ij}) \in P^{m \times n}$  , 则

$$\|A\|_{m_1} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|;$$

$$\|A\|_F = \|A\|_{m_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^H A)};$$

$$\|A\|_{m_\infty} = \max\{m, n\} \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|.$$



# 矩阵论(MATRIX THEORY)

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$

$$\|A\|_2 = \left[ \lambda_{\max}(A^H A) \right]^{1/2}.$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

## 3.3 条件数

在实际应用中，经常需要计算  $A^{-1}$ ，若  $A$  有微小的扰动，则我们需要研究  $A^{-1}$  与  $(A + \Delta A)^{-1}$  的误差有多大。

怎样刻画矩阵求逆问题对扰动的敏感度呢？

解线性方程组时，由于原方程组本身的固有性质导致原始数据的小扰动引起解的很大变化。

如何定量分析系数矩阵和常数项的扰动对线性方程组解的影响？

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

## 一、矩阵求逆的扰动分析

在实际应用中，经常需要计算  $A^{-1}$ ，若  $A$  有微小的扰动，则我们需要研究  $A^{-1}$  与  $(A + \Delta A)^{-1}$  的误差有多大.

例1  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.999 \\ 0.999 & 0.998 \end{pmatrix}$ ,  $\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{pmatrix}$

计算  $A^{-1}$  与  $(A + \Delta A)^{-1}$

及相对误差  $\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}$  与  $\frac{\|A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1}\|_2}{\|A^{-1}\|_2}$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

解：经计算

$$A^{-1} \approx 10^5 \times \begin{pmatrix} -9.980 & 9.990 \\ 9.990 & -10.000 \end{pmatrix},$$

$$(A + \Delta A)^{-1} \approx 10^3 \times \begin{pmatrix} 1.000 & -1.000 \\ -1.000 & 1.001 \end{pmatrix}.$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

$$\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} \approx 5.005 \times 10^{-4}, \quad \frac{\|A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1}\|_2}{\|A^{-1}\|_2} = 1.001.$$

该例说明了尽管  $\Delta A$  的相对误差小，但却引起了

$(A + \Delta A)^{-1}$  的相对误差很大，我们说该矩阵的求逆问

题对扰动特别敏感.

怎样刻画矩阵求逆问题对扰动的敏感度呢？

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**定理** 设  $B \in P^{n \times n}$  , 若对  $P^{n \times n}$  上某一矩阵范数  $\|\bullet\|$  ,  $\|B\| < 1$  , 则

$$I - B$$

可逆.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**证：** 设  $I - B$  不可逆，则  $(I - B)x = 0$  有非零解  $\alpha$ ，使得  $\alpha = B\alpha$ ，设  $\|\cdot\|_a$  是  $C^n$  上与矩阵范数  $\|\cdot\|$  相容的向量范数，则

$$\|\alpha\|_a = \|B\alpha\|_a \leq \|B\| \|\alpha\|_a$$

因为  $\|\alpha\|_a > 0$ ，上式两端除以  $\|\alpha\|_a$  得

$$\|B\| \geq 1$$

矛盾，故可逆.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**定理** 设  $A \in \mathbf{P}^{n \times n}$  , 且  $A$  可逆, 若对  $\mathbf{P}^{n \times n}$  上某一矩阵范数  $\|\bullet\|$ , 如果  $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$ , 则

(1)  $A + \Delta A$  可逆;

$$(2) \left\| (A + \Delta A)^{-1} \right\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|};$$

$$(3) \frac{\left\| A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1} \right\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|}.$$



# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**证: (1)**  $A + \Delta A = AE + AA^{-1}\Delta A = A(E + A^{-1}\Delta A)$   
 $= A(E - (-A^{-1}\Delta A))$

因为  $\| -A^{-1}\Delta A \| = \| A^{-1}\Delta A \| < 1$

由**定理**得  $E - (-A^{-1}\Delta A)$  可逆, 故  $A + \Delta A$  可逆.

**(2)**  $(A + \Delta A)(A + \Delta A)^{-1} = E$

即  $A(A + \Delta A)^{-1} + \Delta A(A + \Delta A)^{-1} = E$

$$A(A + \Delta A)^{-1} = E - \Delta A(A + \Delta A)^{-1}$$

左乘  $A^{-1}$  有

$$(A + \Delta A)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}\Delta A(A + \Delta A)^{-1}.$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

由范数三角不等式得

$$\left\| (A + \Delta A)^{-1} \right\| \leq \|A^{-1}\| + \|A^{-1} \Delta A\| \left\| (A + \Delta A)^{-1} \right\|$$

移项得  $\left\| (A + \Delta A)^{-1} \right\| (1 - \|A^{-1} \Delta A\|) \leq \|A^{-1}\|.$

由  $1 - \|A^{-1} \Delta A\| > 0$  知

$$\left\| (A + \Delta A)^{-1} \right\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1} \Delta A\|}.$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

$$\begin{aligned} (3) \quad & A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1} \\ &= A^{-1} (A + \Delta A) (A + \Delta A)^{-1} - A^{-1} A (A + \Delta A)^{-1} \\ &= A^{-1} \Delta A (A + \Delta A)^{-1} \end{aligned}$$

两边取范数, 由相容性与(2)得

$$\begin{aligned} \left\| A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1} \right\| &\leq \|A^{-1} \Delta A\| \left\| (A + \Delta A)^{-1} \right\| \\ &\leq \|A^{-1} \Delta A\| \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1} \Delta A\|} \\ \text{即 } \frac{\left\| A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1} \right\|}{\|A^{-1}\|} &\leq \frac{\|A^{-1} \Delta A\|}{1 - \|A^{-1} \Delta A\|}. \end{aligned}$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

**推论** 设  $A \in \mathbf{P}^{n \times n}$  , 且  $A$  可逆, 若对  $\mathbf{P}^{n \times n}$  上某一矩阵范数  $\|\bullet\|$  , 如果  $\|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1$  , 则

$$\frac{\|A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}{1 - \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}.$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

上式说明如果**相对误差**  $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$  很小，且  $\|A\|\|A^{-1}\|$  不大，则  $(A + \Delta A)^{-1}$  的**相对误差**一定**很小**，反之，如果  $\|A\|\|A^{-1}\|$  很大，则  $(A + \Delta A)^{-1}$  的**相对误差**就可能很大（**实际计算表明一般都是很大**）。因此  $\|A\|\|A^{-1}\|$  从量上刻画了矩阵求逆的**敏感程度**。

## 二、线性方程组解的扰动分析

例 2 线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的精确解为  $x_1 = 100, x_2 = -100$

如果系数矩阵和常数项分别有一个扰动

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

则扰动后的线性方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

它的精确解为

$$x_1 + \Delta x_1 = -0.1, x_2 + \Delta x_2 = 10/9$$

显然，由于原方程组本身的固有性质导致原始数据的小扰动引起解的很大变化，我们称这样的问题是病态的（敏感的）或不稳定的。



# 矩阵论(MATRIX THEORY)

如何定量分析系数矩阵和常数项的扰动对线性方程组解的影响?

设非奇异线性方程组  $Ax = b$  , 经扰动后仍有唯一解  $x + \Delta x$  , 即成立

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b,$$

因此  $A \cdot \Delta x = -\Delta A \cdot x + \Delta b - \Delta A \cdot \Delta x,$

$$\Delta x = -A^{-1}\Delta A \cdot x + A^{-1}\Delta b - A^{-1}\Delta A \cdot \Delta x.$$



# 矩阵论(MATRIX THEORY)

两边取范数，并缩放，得

$$\begin{aligned}\|\Delta x\| &\leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x\| + \|A^{-1}\| \|\Delta b\| \\ &\quad + \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|\Delta x\|\end{aligned}$$

如果有  $\|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1$ ，则移项得

$$\|\Delta x\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} (\|\Delta A\| \|x\| + \|\Delta b\|).$$

**绝对误差估计式**

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|} \left( \|\Delta A\| + \frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} \right).$$

再由  $Ax = b$ ，可得  $\|b\| \leq \|A\|\|x\|$ .

即  $\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$ ，因此

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|} \left( \|\Delta A\| + \|\Delta b\| \frac{\|A\|}{\|b\|} \right).$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

$$= \frac{\|A^{-1}\| \|A\|}{1 - \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

## 相对误差估计式

显然在相对误差估计式中， $\|A^{-1}\| \|A\|$  反映了方程组解  $x$  的相对误差对于系数矩阵  $A$  和常数项  $b$  的相对误差的依赖程度. 一般地， $\|A^{-1}\| \|A\|$  越大，方程组解的相对误差也越大. 则矩阵  $A$  对于求解线性方程组是病态的，或不稳定的.

## 三、条件数的定义与性质

**定义3.3.1** 设  $A \in P^{n \times n}$ , 且  $A$  可逆, 则称数

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

为矩阵  $A$  的条件数.

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

所以, 设  $A \in P^{n \times n}$ , 且  $A$  可逆, 若对  $P^{n \times n}$  上某一矩阵范数  $\|\bullet\|$ , 如果  $\|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1$

则求逆相对误差

$$\frac{\|A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}.$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

设  $A \in P^{n \times n}$  非奇异且  $\Delta A \in P^{n \times n}$ . 如果扰动矩阵满足条件  $\|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1$ .

则非齐次线性方程组  $Ax = b$  经过扰动后的方程组  $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$  的解满足:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{Cond(A)}{1 - Cond(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

## 四、常用条件数

$$\mathbf{Cond}_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1;$$

$$\mathbf{Cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2;$$

$$\mathbf{Cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty.$$

**注：**当 $A$ 为正规矩阵时，

$$\mathbf{Cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|}.$$

# 矩阵论(MATRIX THEORY)

例 3 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

求相对于矩阵范数  $\|\cdot\|_\infty$  的条件数.

解:

$$\text{Cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 21.$$



# 矩阵论(MATRIX THEORY)

## 性质:

- (1) 矩阵的条件数总是不小于1;
- (2) 酉（正交）矩阵的条件数等于1;
- (3)  $Cond(A) = Cond(A^{-1})$ ;
- (4)  $Cond(kA) = Cond(A)$ ;
- (5) 奇异矩阵的条件数为无穷大.