课程试卷二参考解答

一、选择题

1、B． 2、C. 3、D ． 4、A． 5、D.

二、填空题

1、$\underline{\ 64\ }$. 2、$\underline{\int_0^1 A(t)dt=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1-\cos 1\\ 1-e^{-1} & \frac{\sin 2}{2}\end{pmatrix}}$. 3、$\underline{\left(10x_1+8x_2,10x_2+8x_1\right)}$.

4、$\underline{\ 4\ }$. 5、$\underline{\ 2\ }$.6、$\underline{\ 6\ }$. 7、$\underline{\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2} & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$.

三、计算题

解：(1) 由题意知， $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$

故 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$

经计算 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

(2) 设 $\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，则

$$\xi=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\xi=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

(3) 设 $T(\xi)=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+y_3\alpha_3$，则

$$T(\xi)=T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},$$

由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆知，

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ -2\end{pmatrix}$$

四、计算题

解：(1) $\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ -1 & \lambda+1 & -3\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix}$

由于 $\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-(\lambda-2),\begin{vmatrix}-1 & \lambda+1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=\lambda+2$

行列式因子 $D_1(\lambda)=1,D_2(\lambda)=1,D_3(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+2)$

不变因子 $d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=1,d_3(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+2)$

初等因子 $(\lambda-2)^2,(\lambda+2)$

(2) Smith 标准形 $J(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-2)^2(\lambda+2)\end{pmatrix}$

Jordan 标准型 $J=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$或者 $J=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$

(3) $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+2)=\lambda^3-2\lambda^2-4\lambda+8$，

令 $g(\lambda)=\lambda^{2022}-2\lambda^{2021}-4\lambda^{2020}+8\lambda^{2019}$，则

$g(\lambda)=\lambda^{2018}(\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12)=f(\lambda)\lambda^{2018}$

又 $f(A)=0$，所以 $g(A)=0$，　$A^{2022}-2A^{2021}-4A^{2020}+8A^{2019}=0$.

五、计算题

解：(1) $F(X)=aa^TX=\begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\ 2x_1+4x_2+6x_3\\ 3x_1+6x_2+9x_3\end{pmatrix}$

$$\frac{d(aa^TX)}{dX^T}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

(2) $aa^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix},\|aa^T\|_{m_1}=36,\|aa^T\|_1=18,\|aa^T\|_{m_\infty}=27,\|aa^T\|_\infty=18$

（3）由于$r\left(aa^T\right)=1$，所以aa^T的正奇异值的个数为 1.

六、计算证明题

解：(1)假设 λ, x 为矩阵A的任意特征对，则$Ax=\lambda x\ (x\neq 0)$且

$|\lambda|\|x\|=\|\lambda x\|=\|Ax\|\le\|A\|\|x\|\Rightarrow|\lambda|\le\|A\|$，所以$\rho(A)\le\|A\|$

(2) 由$\rho(A)\le\|A\|_\infty=0.7$知矩阵级数$\sum_{k=0}^{\infty}A^k$收敛且$\sum_{k=0}^{\infty}A^k=(I-A)^{-1}=\frac{5}{24}\begin{pmatrix}6&2\\3&9\end{pmatrix}$

七、计算题

解： $f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-2\\-1&\lambda-1&2\\-2&2&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$

由于$(A-2I)(A+4I)=0$，所以 A的最小多项式为$(\lambda-2)(\lambda+4)$

(2) 设$r(\lambda)=b_0+b_1\lambda$ 令 $f(\lambda)=e^{\lambda t}$，则

由 $f(2)=r(2), f(-4)=r(-4)$得

$$\begin{cases}b_0+2b_1=e^{2t}\\b_0-4b_1=e^{-4t}\end{cases}\Rightarrow b_0=\frac{2e^{2t}+e^{-4t}}{3}, b_1=\frac{e^{2t}-e^{-4t}}{6}$$

故 $$e^{At}=b_0I+b_1A=\begin{pmatrix}\frac{5e^{2t}+e^{-4t}}{6}&\frac{e^{2t}-e^{-4t}}{6}&\frac{e^{2t}-e^{-4t}}{3}\\\frac{e^{2t}-e^{-4t}}{6}&\frac{5e^{2t}+e^{-4t}}{6}&\frac{e^{-4t}-e^{2t}}{3}\\\frac{e^{2t}-e^{-4t}}{3}&\frac{e^{-4t}-e^{2t}}{3}&\frac{e^{2t}+2e^{-4t}}{3}\end{pmatrix}$$

(2)满足初始条件$x(0)$的解为$x(t)=e^{At}x(0)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4e^{2t}-e^{-4t}\\2e^{2t}+e^{-4t}\\e^{2t}+2e^{-4t}\end{pmatrix}$