第七章

矩阵的广义逆

7.1 广义逆的定义

1920年E. H. Moore首先引进了广义逆矩阵这一概念，1955年，Penrose以更明确的形式给出了Moore的广义逆矩阵的定义之后，广义逆矩阵的研究进入一个新的时期。广义逆矩阵在数理统计、系统理论、最优化理论、现代控制理论等许多领域中有着非常重要的应用。

一、广义逆矩阵

定义 7.1.1 设矩阵$A\in C^{m\times n}$，若矩阵$G\in C^{n\times m}$满足如下四个Penrose方程的一个或若干个

（i） $AGA=A$ （ii）$GAG=G$

(iii)$(AG)^H=AG$ (iv)$(GA)^H=GA$

则称 G 为A的广义逆矩阵.

二、常见广义逆矩阵

按照定义7.1.1，共可定义15类不同的广义逆矩阵，几种常用的广义逆矩阵有

A^{-}--------------------A的{1}逆

$A^{(1,2)}$-----------------A的自反广义逆

$A^{(1,3)}$-----------------A的最小二乘广义逆

$A^{(1,4)}$-----------------A的最小范数广义逆

$A^{(1,2,3,4)}$-------------A的Moore-Penrose广义逆

7.2 广义逆 A^{-}

定义 7.2.1 设矩阵$A\in \mathbf{C}^{m\times n}$，若矩阵$G\in \mathbf{C}^{n\times m}$满足第一个Penrose方程

$$AGA = A$$

则称 G 为A的减号逆；又称{1}逆，记为

$$A^{-}\text{或}A^{(1)}$$

定理 7.2.1 设矩阵 $A \in C_r^{m\times n}$，若存在可逆矩阵 P, Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$A^- = Q\begin{pmatrix} I_r & *_1 \\ *_2 & *_3 \end{pmatrix}P$$

其中, $*_1, *_2, *_3$ 为相应阶的任意矩阵。

例1 P127 例7.2.1

已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

求 A^{-}

定理7.2.2 设矩阵 $A^{-}\in C^{n\times m}$是$A\in C^{m\times n}$ 的一个减号逆，则

(1)$Ax=0$的通解为

$$x=(I-A^{-}A)c,\ c\in C^{n}$$

(2) $Ax=b$有解当且仅当 $AA^{-}b=b$

有解时，通解为

$$x=A^{-}b+(I-A^{-}A)c,\ c\in C^{n}$$

例2 **P128** 例7.2.2

已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

试判断线性方程组 $Ax=b$ 是否有解？有解时，求其通解。

7.3 广义逆 A^+

一、Moore-Penrose逆

定义 7.3.1 设矩阵$A\in C^{m\times n}$，若矩阵$G\in C^{n\times m}$满足如下四个Penrose方程

（i） $AGA=A$ （ii）$GAG=G$

(iii)$(AG)^H=AG$ (iv)$(GA)^H=GA$

则称 G 为A的**Moore-Penrose逆**矩阵；记为 A^+ .

定理7.3.1 对任意 $A \in C_r^{m\times n}$，A^+存在且唯一.

证　存在性. 当A=O时，显然A^+存在，就是零矩阵；当A是非零矩阵时，设 $rankA=r$，A 的满秩分解为 $A=BC$，则

$$rank\left(CC^H\right)=rankC=r,\quad rank\left(B^H B\right)=rankB=r$$

说明 CC^H 和 $B^H B$ 是满秩的r阶方阵。现在来证

$$X=C^H\left(CC^H\right)^{-1}\left(B^H B\right)^{-1}B^H$$

就是 A^+，事实上

$$1.\ AXA$$

$$= BCC^H\left(CC^H\right)^{-1}\left(B^HB\right)^{-1}B^HBC = BC$$

$$= A$$

$$2.\ XAX$$

$$= C^H\left(CC^H\right)^{-1}\left(B^HB\right)^{-1}B^HBCC^H\left(CC^H\right)^{-1}\left(B^HB\right)^{-1}B^H$$

$$= C^H\left(CC^H\right)^{-1}\left(B^HB\right)^{-1}B^H = X$$

$$3.\ (XA)^H$$

$$=\left(C^H\left(CC^H\right)^{-1}\left(B^HB\right)^{-1}B^HBC\right)^H$$

$$=\left(C^H\left(CC^H\right)^{-1}C\right)^H=C^H\left(CC^H\right)^{-1}C=XA$$

$$4.\ (AX)^H$$

$$=\left(BCC^H\left(CC^H\right)^{-1}\left(B^HB\right)^{-1}B^H\right)^H$$

$$=\left(B\left(B^HB\right)^{-1}B^H\right)^H=B\left(B^HB\right)^{-1}B^H=AX$$

可见 $A^{+} = X$

唯一性. 设 X 和 Y 均满足方程（i）-（iv），

则

$$X = XAX = XAYAX = X(AY)^{H}(AX)^{H}$$

$$= XY^{H}(AXA)^{H} = XY^{H}A^{H} = X(AY)^{H}$$

$$= XAY = XAYAY = (XA)^{H}(YA)^{H}Y$$

$$= (AXA)^{H}Y^{H}Y = A^{H}Y^{H}Y = (YA)^{H}Y = YAY = Y$$

二、利用满秩分解求Moore-Penrose逆

定理7.3.1 的证明过程告诉我们若 $A \in C^{m\times n}$ ，$rankA=r$， $A=BC$ 是A 的满秩分解，则

$$A^{+}=C^{H}\left(CC^{H}\right)^{-1}\left(B^{H}B\right)^{-1}B^{H}$$

特别地，若 $rankA=m$，则 $A^{+}=A^{H}\left(AA^{H}\right)^{-1}$

因为此时A的满秩分解为 $A=I_{m}A=BC$

类似地，若 $rankA=n$，则 $A^{+}=\left(A^{H}A\right)^{-1}A^{H}$

因为此时A的满秩分解为 $A=AI_{n}=BC$

例1 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\\ 4 & -4\end{pmatrix}$，求 A^{+}

解 因为

$$A=BC=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$$

而 $CC^H = 2 \qquad \left(CC^H\right)^{-1} = \frac{1}{2}$

$$B^H B = 21 \qquad \left(B^H B\right)^{-1} = \frac{1}{21}$$

所以

$$A^+ = C^H \left(CC^H\right)^{-1} \left(B^H B\right)^{-1} B^H$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{21}\right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{42}\right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

例2 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{+}

解 因为

$$A \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$A = BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

于是有

$$B^H B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, CC^H = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

从而

$$A^{+} = C^{H}\left(CC^{H}\right)^{-1}\left(B^{H}B\right)^{-1}B^{H}$$

$$= \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -6 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

三、利用奇异值分解求Moore-Penrose逆

定理 设矩阵 A 的奇异值分解为

$$A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^H$$

则

$$A^{+} = V\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^H$$

例3： 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 求 A^{+}

解 由奇异值分解可得

$$A=U\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}V^{H},$$

其中

$$V=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},U=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $A^{+}=V\begin{pmatrix}D^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix}U^{H}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

四、Moore-Penrose逆的性质

1. $\left(A^{+}\right)^{+}=A$

2. $(\lambda A)^{+}=\lambda^{-1}A^{+},\ \lambda\neq 0$

3. $\left(A^{k}\right)^{+}=\left(A^{+}\right)^{k}$，$k$是正整数，$A$是正规矩阵。

4. $\left(A^{H}\right)^{+}=\left(A^{+}\right)^{H}$

5. $\left(A^{T}\right)^{+}=\left(A^{+}\right)^{T}$

6. $\left(AA^H\right)^+ = \left(A^H\right)^+ A^+, \left(A^H A\right)^+ = A^+ \left(A^H\right)^+$

7、 设$U \in C^{m\times m}, V \in C^{n\times n}$ **都是酉矩阵，则**

$$\left(UAV\right)^+ = V^H A^+ U^H$$

8 . $rank(A) = rank(A^+)$

$= rank(A^+ A) = rank(AA^+)$

注： $(1)\quad (AB)^{+} \neq B^{+}A^{+}$

$(2)\quad AA^{+} \neq A^{+}A$

如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$B^{+}A^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (AB)^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{+} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

如

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad A^{+}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$AA^{+}\neq A^{+}A$$

定理7.3.2 设 A^{+}是A 的Moore-penrose逆，则

(1)$Ax=0$的通解为

$$x=(I-A^{+}A)c,\ c\in C^{n}$$

(2) $Ax=b$有解当且仅当 $AA^{+}b=b$

有解时，通解为

$$x=A^{+}b+(I-A^{+}A)c,\ c\in C^{n}$$

7.4 最小二乘解问题

定义7.4.1 设$A \in C^{m\times n}$，$b \in C^{m}$，当线性方程组 $Ax=b$ 无解时，称之为矛盾方程组（不相容方程组）。

对矛盾方程组 $Ax=b$，若存 x_0，

$$\| Ax_0 - b \|_2 = \min_{x\in R^n} \| Ax - b \|_2$$

就称 x_0 为方程组的最小二乘解，这种方法就称为最小二乘法。

定理7.4.1 不相容方程组 $Ax=b$ 的**最小二乘解**为

$$A^H Ax = A^H b$$

的解。

定理7.4.2 不相容方程组 $Ax=b$ 的**全部最小二乘解**为

$$x = A^+ b + \left(I - A^+ A\right)c$$

其中 $c \in C^n$ 是任意列向量。

例1 求解线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

解 将方程组用矩阵表示为：$Ax=b$ 其中，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

则

$$A^T Ax = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = A^T b$$

得$x_1 = \dfrac{17}{6}, x_2 = -\dfrac{16}{3}, x_3 = -\dfrac{2}{3}$为最小二乘解。

设 $Ax=b$ 为不相容方程组，若有一个最小二乘解 x_0 使得

$$\|x_0\|_2=\min\left\{\|x\|_2 \mid x=A^+b+\left(I-A^+A\right)c, c\text{任意}\right\}$$

则 x_0 是 $Ax=b$ 的极小范数最小二乘解。

定理7.4.3　不相容方程组 $Ax=b$ 有唯一的极小范数最小二乘解

$$\boxed{x_0 = A^{+}b}$$

例 2 求不相容方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

的极小范数最小二乘解。

解：由满秩分解可求出

$$A^{+}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -4 & -1 & 2\\ 6 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

则极小范数最小二乘解为

$$x=A^{+}b=\frac{1}{18}(20,7,-13,27)^{T}$$

例 3 已知线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$$

用广义逆的方法判断方程组有解的情况，若有解，求其通解，若无解，求其最小二乘解和极小范数最小二乘解。(P132 例7.4.1)