《 计 算 方 法 》(研究生)课程样卷

一、选择题(本题 5 个小题, 每题 2 分, 共 10 分)

1．若 $r=1.000000$ 有 4 个有效数字，则 $s=\pi r^2$ 3.141593 具有(B)位有效数字

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D.7

2．已知 $L(x)$ 和 $N(x)$ 分别为插值结点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ 的 Lagrange 和 Newton 插值多项式，则关于二者的误差正确的是 (C)

A. Lagrange 插值误差大于 Newton 插值误差；
B. Lagrange 插值误差小于 Newton 插值误差；
C. Lagrange 插值误差等于 Newton 插值误差；
D. 不能确定。

3．设 $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，则 A 的 $\infty-$范数定义的条件数 $Cond_\infty(A)$=(B)

A. 4　　B. 8　　C. 2　　D. 7

4．用改进的 Euler 法解初值问题 $\begin{cases}y'=-y\\ y(0)=1.0000\end{cases}$，取步长 $h=0.1$，算得 $y_1=$(D)

A. 0.9000　　B. 0.9010　　C. 0.9030　　D. 0.9050

5．用列选主元解某线性方程组时得到中间线性方程组为 $\begin{cases}x_1+5x_2+7x_3=1\\ \quad 2x_2+6x_3=3\\ \quad 3x_2+4x_3=2\end{cases}$，此时若列选主元, 则主元为 (A)

A. 3　　B. 7　　C. 5　　D. 6

二、填空题(本题 5 个小题, 每小题 3 分，共 15 分)

1．$x_0=-1$，$x_1=0$，$x_2=1$， $l_1(x_i)=\begin{cases}1 & i=1\\ 0 & i\neq 1\end{cases}$，则插值基函数 $l_1(x)=$__$\dfrac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}=1-x^2$_ 。

2． $P[-1,1]$ 表示 [-1,1] 上的所有多项式构成的函数空间，定义空间中函数内积为 $(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$，施密特正交化空间的基 $\{1,x,x^2,\cdots\}$ 可得 Legendre 多项式 $P_0(x)=1$， $P_1(x)=x+b$，则 $b=$ _____0_____ 。

3．函数 $S(x)=\begin{cases}x^3-x^2 & 0\le x\le 1\\ (x-1)^3+b(x-1)^2+(x-1) & 1\le x\le 2\end{cases}$，若 $S(x)$ 是区间[0，2]上以 0，1，2 为节点的三次样条函数，则 $b=$ _____2_____ 。

4．用Romberg方法计算 $I^*=\int_a^b f(x)dx$ 时，其中得到区间 n 等份和 $2n$ 等份时的复化梯形值分

别为$T_n^{(1)}=3.00$，$T_{2n}^{(1)}=3.30$,则经过一次外推加速后可得$T_n^{(2)}=$ ____3.40____ 。

5．$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, 则$A$经过$LU$分解后，矩阵$L$的元素$l_{21}=$ ____2____ 。

三、计算题(本题 12 分)

数值积分公式形如：$\int_0^1 xf(x)dx \approx Af(0)+Bf(1)+Cf'(0)+Df'(1)$，确定求积公式中的系数 A、B、C、D 使其代数精度尽可能高。

解：$f(x)=1$：$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}=4h=A+B$

$f(x)=x$：$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{3}=B+C+D$

$f(x)=x^2$：$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{4}=B+2D$

$f(x)=x^3$：$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{5}=B+3D$

$\Rightarrow A=\frac{3}{20}$，$B=\frac{7}{20}$，$C=\frac{1}{30}, D=-\frac{1}{20}$

所以：$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{20}f(0)+\frac{7}{20}f(1)+\frac{1}{30}f'(0)-\frac{1}{20}f'(1)$ 至少具有 3 次代数精度

但：$f(x)=x^4$：$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{6}\neq\frac{3}{20}f(0)+\frac{7}{20}f(1)+\frac{1}{30}f'(0)-\frac{1}{20}f'(1)=\frac{3}{20}\Rightarrow$ 具有 3 次代数精度

四、计算题(本题 12 分)

设方程$3\text{-}3x-2\sin x=0$在$[0,1]$内的根为x^*，若采用如下迭代公式$x_{n+1}=1-\frac{2}{3}\sin x_n$

(1)证明$\forall x_0\in R$均有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$($x^*$为方程的根)； (2)取$x_0=0$，要迭代多少次能保证误差$\left|x_k-x^*\right|<10^{-6}$？ (3)此迭代的收敛阶是多少，证明你的结论。

解：(1)迭代函数：$g(x)=1-\frac{2}{3}\sin x\Rightarrow g'(x)=-\frac{2}{3}\cos x\Rightarrow\left|g'(x)\right|\le\frac{2}{3}<1\ (\forall x\in R)$

(2) $\left|x_n - x^*\right| \le \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\left|x_1 - x_0\right| \le 3\left(\frac{2}{3}\right)^n \le 10^{-6} \Rightarrow n \ge \dfrac{-6-\log 3}{\log\frac{2}{3}} \approx 36.7828$　　迭代 37 次

(3) $e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = -\frac{2}{3}(\sin x_n - \sin x^*)$，$\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = -\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sin x_n - \sin x^*}{x_n - x^*} \xrightarrow{n\to\infty(x_n\to x^*)} -\dfrac{2}{3}$

收敛阶为 1。

五、计算题(本题 12 分)

给定三维空间的一组点 (x_k, y_k, z_k) 如下表，利用最小二乘法求出空间一张过原点的平面 $Ax + By + z = 0$ 来逼近这些点。

k	1	2	3	4
x_k	1	1	1	1
y_k	0	1	2	3
z_k	30	0	20	10

解：$V = \left(Ax_1 + By_1 + z_1, Ax_2 + By_2 + z_2, Ax_3 + By_3 + z_3, Ax_4 + By_4 + z_4\right)$

$I\left(A, B\right) = \|V\|_2^2 = \sum\left(Ax_i + By_i + z_i\right)^2$

$I'_A = 2A\sum x_i^2 + 2B\sum x_i y_i + 2\sum x_i z_i = 0$，　$A\sum x_i^2 + B\sum x_i y_i + \sum x_i z_i = 0$

$I'_B = 2A\sum x_i y_i + 2B\sum y_i^2 + 2\sum y_i z_i = 0$，　$A\sum x_i y_i + B\sum y_i^2 + \sum y_i z_i = 0$

即：$\begin{cases} 4A + 6B = -60 \\ 6A + 14B = -70 \end{cases}$，　$\begin{cases} 2A + 3B = -30 \\ 6A + 14B = -70 \end{cases}$

解得：$A = -21$，　$B = 4$

所求平面为：$-21x + 4y + z = 0$

六、计算题(本题 13 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix}$，证明：求解方程组 $Ax = b$ 的雅可比方法与高斯－赛德尔方法同时收敛或发散。

解：设 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 \end{pmatrix}$，$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

改写 $Ax=b$ 为：$(D-L-U)x=b$

雅可比方法迭代矩阵为：$B_1=D^{-1}(L+U)$

所以 $\quad |\lambda I-B_1|=|\lambda I-D^{-1}(L+U)|=\dfrac{1}{|D|}|\lambda D-L-U|$

$$=\begin{vmatrix}\lambda & a_{12}\\ a_{21} & \lambda\end{vmatrix}=(a_{11}a_{22}\lambda^2-a_{12}a_{21})=0$$

得 $\quad \lambda_{1,2}=\sqrt{a_{12}a_{21}}\to\rho(B_1)=\sqrt{a_{12}a_{21}}$

高斯一赛德尔方法迭代矩阵为：$B_2=(D-L)^{-1}U$

所以 $\quad |\lambda I-B_2|=|\lambda I-(D-L)^{-1}U|=\dfrac{1}{|D-L|}|\lambda(D-L)-U|$

$$=\begin{vmatrix}\lambda & a_{12}\\ a_{21}\lambda & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-a_{12}a_{21}\lambda)=0$$

得 $\quad \lambda_1=0$，$\lambda_2=a_{12}a_{21}\to\rho(B_2)=a_{12}a_{21}$

所以 $\quad \rho(B_1)<1\Leftrightarrow\rho(B_2)<1$，即 $Ax=b$ 的雅可比与高斯一赛德尔方法同敛或散

七、证明计算题（本题 13 分）

(1)设 $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in R^2$，给出一种算法确定如下形式的正交阵：$Q=\begin{pmatrix}c & s\\ -s & c\end{pmatrix}$，$c^2+s^2=1$.使得 Qx 的第二个分量为零。(2)利用(1)中的算法求出矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ 的 QR 分解(本题需精确解)。

解：(1) $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，$c=\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$，$s=\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$，

$Q=\begin{pmatrix}c & s\\ -s & c\end{pmatrix}$，$Qx=\begin{pmatrix}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\\ 0\end{pmatrix}$，

(2) $x=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，$c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$s=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$Q_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，

$Q_1 x=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$，$Q_1 A=\sqrt{2}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A=\sqrt{2}Q_1^{-1}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\sqrt{2}Q_1^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 3\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

八、计算题（本题 13 分）

给定求解常微分方程初值问题$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$的线性多步公式

$$y_{n+1}=\alpha(y_n+y_{n-1})+h[\beta_0 f_n+\beta_1 f_{n-1}]$$

其中：$f_n=f(x_n,y_n)$，$f_{n-1}=f(x_{n-1},y_{n-1})$，试确定系数$\alpha,\beta_0,\beta_1$，使它具有二阶精度，并推导其局部截断误差主项。

解：局部截断误差:

$$R(x_{n+1})=y(x_{n+1})-\alpha y(x_n)-\alpha y(x_{n-1})-h[\beta_0 f(x_n,y(x_n))+\beta_1 f(x_{n-1},y(x_{n-1})))]$$

$$=y(x_{n+1})-\alpha y(x_n)-\alpha y(x_{n-1})-h[\beta_0 y'(x_n)+\beta_1 y'(x_{n-1}))]$$

$$=y(x_n+h)-\alpha y(x_n)-\alpha y(x_n-h)-h[\beta_0 y'(x_n)+\beta_1 y'(x_n-h))]$$

$$=y(x_n)+hy'(x_n)+\tfrac{h^2}{2}y''(x_n)+\tfrac{h^3}{6}y'''(x_n)+\tfrac{h^4}{24}y^{(4)}(x_n)+O(h^5)-\alpha y(x_n)$$

$$-\alpha[\ y(x_n)-hy'(x_n)+\tfrac{h^2}{2}y''(x_n)-\tfrac{h^3}{6}y'''(x_n)+\tfrac{h^4}{24}y^{(4)}(x_n)+O(h^5)]$$

$$-h\beta_0 y'(x_n)-\beta_1 h\,[y'(x_n)-hy''(x_n)+\tfrac{h^2}{2}y'''(x_n)-\tfrac{h^3}{6}y^{(4)}(x_n)+O(h^5)]$$

$$=(1-\alpha-\alpha)y(x_n)+(1+\alpha-\beta_0-\beta_1)hy'(x_n)+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha+\beta_1)h^2y''(x_n)+$$

$$(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\alpha-\frac{1}{2}\beta_1)h^3y'''(x_n)+O(h^4)$$

令：$1-2\alpha=0$，$1+\alpha-\beta_0-\beta_1=0$，$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha+\beta_1=0$，

解得：$\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta_0=\frac{7}{4}$，$\beta_1=-\frac{1}{4}$

此时公式为二阶。

而且$R(x_{n+1})=\frac{3}{8}h^3y'''(x_n)+O(h^4)$