矩阵论（Matrix Theory）

数理与统计学院
SUES

第八章

特殊矩阵

8.1 非负矩阵

元素都是非负实数的矩阵称为**非负矩阵**. 这类矩阵在数理经济学、概率论、弹性系统的微振动理论等许多领域都有重要的应用. 随着非负矩阵应用的日益扩展，它的基本特征已被认为是矩阵理论的经典性内容之一. 为此，本节将介绍非负矩阵的一些基本性质，包括著名的 **Perron-Frobenius定理**.

8.1.1 非负矩阵的定义与性质

定义8. 1. 1 设矩阵 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{m\times n}$ ， 若 A 中所有元素都是非负实数，则称 A 为非负矩阵，记为 $A\geq 0$，若 A 中所有元素都是正数，则称 A 为正矩阵，记为 $A>0$

设 $A,B\in\mathbf{R}^{m\times n}$ ，若 $A-B\geq 0$ ，则记为 $A\geq B$ 若 $A-B>0$，则记为 $A>B$.

对于任意的$A \in \mathbf{C}^{m\times n}$，记$|A| = (|a_{ij}|)$，表示$A$的元素取模后所得的非负矩阵，

特别地，当$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^n$时，

$$|x| = (|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)^{\mathrm{T}}$$

表示非负向量。若$x_i > 0 (i = 1, \cdots, n)$，则称$x$为正向量。

需要指出的是，此处非负矩阵、正矩阵的概念不同于非负定矩阵与正定矩阵，本节的记号$|A|$，$|x|$切勿与“行列式”与“向量的长度”概念混淆。

关于非负矩阵，有以下性质：

性质1 设$A,B\in \mathbf{C}^{n\times n}$, $x\in \mathbf{C}^{n}$,则

(1) $|Ax|\le |A||x|$;

(2) $|AB|\le |A||B|$;

(3) $|A^m|\le |A|^m$，m为任意正整数;

(4)若$0\le A\le B$,则$0\le A^m\le B^m$，m为任意正整数;

(5)若$|A|\le B$,则$\|A\|_2\le \||A|\|_2\le \|B\|_2$.

证明 由定义易证(1–4)，下证(5). 由于对于任意 $x\in \mathbf{C}^n$ 都有 $|Ax|\le|A||x|\le B|x|$,

则 $\|Ax\|_2=\||Ax|\|_2\le\||A||x|\|_2\le\|B|x|\|_2$.

于是
$$\max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2=\max_{\|x\|_2=1}\||Ax|\|_2$$
$$\le\max_{\|x\|_2=1}\||A||x|\|_2\le\max_{\|x\|_2=1}\|B|x|\|_2 .$$

由上式有
$$\|A\|_2\le\||A|\|_2\le\|B\|_2 .$$

关于正矩阵，有以下性质：

性质2 设$A \in R^{n\times n}, x \in C^n$,则

(1)若$A > 0$,则$A^m > 0$, m为任意正整数;

(2)若$A > 0, x \geq 0$,则$Ax > 0$.

定理8.1.1 $A, B \in C^{n\times n}$,若$|A| \leq B$, 则

$$\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B).$$

证明 由性质1 的(3)和(4)知，对于任意正整数 m，有 $|A^m| \le |A|^m \le B^m$.

由性质1的（5），有

$$\| A^m \|_2 \le \| |A|^m \|_2 \le \| B^m \|_2,$$

从而

$$\| A^m \|_2^{\frac{1}{m}} \le \| |A|^m \|_2^{\frac{1}{m}} \le \| B^m \|_2^{\frac{1}{m}}.$$

上式中令 $m \to \infty$ 即得

$$\rho(A) \le \rho(|A|) \le \rho(B).$$

事实上，由于

$$(\rho(A))^m = \rho(A^m) \le \| A^m \|_2$$

所以

$$\rho(A) \le \| A^m \|_2^{\frac{1}{m}} \quad (m = 1, 2, \cdots).$$

另一方面，对于任意的 $\varepsilon > 0,$

$$\widetilde{A} = [\rho(A) + \varepsilon]^{-1} A$$

的谱半径严格小于1,

从而 $$\lim_{m\to\infty} \widetilde{A}^m = 0.$$

于是 $$\lim_{m\to\infty} \| \widetilde{A}^m \|_2 = 0.$$

因此，存在正整数k，使得当m>k时，有

$$\| \widetilde{A}^m \|_2 < 1$$

即对所有的m>k有

$$\| A^m \|_2 \le [\rho(A)+\varepsilon]^m \text{ 或 } \| A^m \|_2^{\frac{1}{m}} \le \rho(A)+\varepsilon.$$

故
$$\lim_{m\to\infty} \| A^m \|_2^{\frac{1}{m}} = \rho(A)$$

同理可证

$$\lim_{m\to\infty} \| |A|^m \|_2^{\frac{1}{m}} = \rho(|A|),$$

$$\lim_{m\to\infty} \| B^m \|_2^{\frac{1}{m}} = \rho(B).$$

推论8.1.1 设$A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$,若$0 \le A \le B$, 则

$$\rho(A) \le \rho(B).$$

推论8.1.2 设$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$,若$A \ge 0$, $\tilde{A}$是A的任一主子阵,则

$$\rho(\tilde{A}) \le \rho(A).$$

关于非负矩阵的谱半径，有如下估计．其在理论上尤其在矩阵迭代分析中有重要作用．

定理8.1.2 设$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，若$A \geq 0$，则

(1)若A的每一行元素之和是常数，则$\rho(A) = \|A\|_\infty$；

(2)若A的每一列元素之和是常数，则$\rho(A) = \|A\|_1$；

(3) $\min\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$；

(4) $\min\limits_{1\leq j\leq n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max\limits_{1\leq j\leq n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$.

证明：(3)设$\alpha=\min\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$，构造 n 阶实矩阵$B=(b_{ij})$.

若$\alpha=0$，令$B=0$；若$\alpha>0$，令$b_{ij}=\alpha a_{ij}(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij})^{-1}$.

则$0\le B\le A$，且$\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}=\alpha(i=1,2,\cdots n)$

由(1)知，$\rho(B)=\alpha(i=1,2,\cdots n)$,

由推论8.1.1知，$\rho(B)=\rho(A)$,

从而，$\alpha=\rho(A)\le\|A\|_{\infty}$.

推论8.1.3 设$A\in \mathbf{R}^{n\times n}, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in \mathbf{R}^n$.
若$A\geq 0$, 且$x>0$, 则有

$$\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=\rho(A)$$

或者有

$$\min_{1\leq i\leq n}\left(\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\leq \rho(A)\leq \max_{1\leq i\leq n}\left(\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right),$$

$$\min_{1\leq j\leq n}\left(x_j\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ij}}{x_i}\right)\leq \rho(A)\leq \max_{1\leq j\leq n}\left(x_j\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ij}}{x_i}\right).$$

证明：对于$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T > 0.$

记对角矩阵$\boldsymbol{D} = diag(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,并注意到

$$\rho(A) = \rho(D^{-1}AD).$$

由定理8.1.2即证.

推论8.1.4 设$A \geq 0$,且$x > 0$,则存在实数$c,d(\geq 0)$,使得

$$cx \leq Ax \leq dx,$$

则

$$c \leq \rho(A) \leq d.$$

8.1.2 本原矩阵

定义8.1.2 设A 是n阶非负矩阵，如果存在一个正整数m, 使得

$$A^m > 0$$

则称 A 为本原矩阵或素矩阵.

显然，正矩阵都是本原矩阵，但反之不真.

例如，非负矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

不难验证$A^2>0, B^4>0$, 故A,B均为本原矩阵，但均不是正矩阵.

关于本原矩阵，易证其具有以下性质：

性质3 设A, B均为n阶非负矩阵，且A为本原矩阵，则

（1） A^{T} 也是本原矩阵；

（2） A^{k} 也是本原矩阵，k为正整数；

（3） $A+B$ 也是本原矩阵.

8.1.3 不可约非负矩阵

定义8.1.3 设 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ，若 A 的每一行和每一列都只有某个元素为1，其余的元素为0，则称 A 为**置换矩阵**.

例如
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

定义8.1.4 设 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，若存在n阶置换矩阵 P ，使得

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中，$A_{11} \in \mathbf{R}^{k\times k}(1 \le k \le n-1)$ ，则称 A 为可约矩阵。

否则，称为不可约矩阵。

例如

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&1\\1&3&2&0\\1&0&0&1\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

由

$$PAP^T=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\3&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

可知非负矩阵 A 可约.

显然，正矩阵以及本原矩阵均是不可约的，且由定义可得如下性质：

性质4 设 A, B 均为 n 阶矩阵，则

（1） A 为不可约非负矩阵当且仅当 A^{T} 为不可约非负矩阵；

（2） A 为不可约非负矩阵，B 为非负矩阵，则 $A+B$ 是不可约非负矩阵.

对于给定的n阶矩阵，由于n阶矩阵共有n!个置换矩阵，故若根据定义判定其是否可约，几乎是不可能的. 下面给出一个判断非负矩阵是否可约的可行办法.

定理8.1.3 $n(\geq 2)$ 阶矩阵 A 为非负不可约当且仅当存在正整数 $s \leq (n-1)$，使得

$$(I + A)^s > 0.$$

证明:必要性，只需证明对$\forall x \geq 0$ $(x \neq 0)$ 都有

$$(I+A)^{n-1}x > 0.$$

对于任意$\forall x \geq 0$ $(x \neq 0)$,由于$(I+A)$的对角线非零,

所以 $y=(I+A)x$ 中零坐标的个数不可能多于向量x中零坐标的个数.

若y与x中有相同的零坐标的个数(不为0),则可设

$$x=\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, u,v>0,$$

此处u和v具有相同的维数t. 将A写成分块形式

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

则由$y=(I+A)x$, 即

$$\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

可得$A_{21}u=0$, 又$u>0$, 故$A_{21}=0$, 这与A不可约矛盾.

所以 y 中零坐标的个数小于向量x 中零坐标的个数.

这说明每用$(I+A)$左乘x一次，零坐标的个数(如果有的话)至少减少一个，所以

$$(I+A)^{n-1}x>0,\ \ x\geq 0(x\neq 0).$$

充分性. 设存在正整数$s\leq(n-1)$使得$(I+A)^s>0$,

若A为非负可约矩阵,则存在置换矩阵P使得

$$PAP^T=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

于是

$$P(A+I)P^T=\begin{bmatrix} A_{11}+I & A_{12} \\ 0 & A_{22}+I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \widetilde{A_{11}} & A_{12} \\ 0 & \widetilde{A_{22}} \end{bmatrix},$$

从而对于任意正整数k，都有

$$P(A+I)^k P^T=\begin{bmatrix} \widetilde{A_{11}} & A_{12} \\ 0 & \widetilde{A_{22}} \end{bmatrix}^k,$$

由于P为置换矩阵，上式说明无论k取何值，

$(I+A)^k$中永远有零元素，与$(I+A)^s>0$矛盾.

故A为不可约非负矩阵.

例如非负矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

是不可约的. 因为s=3-1=2时,

$$(I+A)^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}>0.$$

8.2 Perron定理

1907年， Perron给出了正矩阵有一个正特征值为谱半径，且此特征值是单特征值的性质，1912年，Frobenius将此推广到了非负不可约矩阵中，从而建立了 Perron- Frobenius定理。Perron- Frobenius定理也是线性代数的基本定理，在研究非负矩阵理论方面有着重要的作用。

定理8.2.1 设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为正矩阵，且 $\rho(A)$ 为 A 的谱半径，则

（1） $\rho(A)$ 为A的正特征值，且存在一个对应于 $\rho(A)$ 的正特征向量；

（2） A的任何一个其他特征值λ，都有 $|\lambda|<\rho(A)$；

（3） $\rho(A)$ 为A的单特征值.

对于正矩阵还有如下性质，此结果在数理经济学中有直接的应用。

定理8.2.2 设 $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$，如果 $A>\mathbf{0}$，x是A对应于特征值 $\rho(A)$ 的正特征向量，y 是 A^{T}对应于特征值 $\rho(A)$ 的正特征向量，则

$$\lim_{k\to\infty}[(\rho(A))^{-1}A]^{k}=(y^{\mathrm{T}}x)^{-1}xy^{\mathrm{T}}.$$

注：定理8.2.1与定理8.2.2可直接推广到本原矩阵情形。

值得注意的是，定理8.2.1对于一般的非负矩阵未必成立.

对于一般的非负矩阵，有如下结论成立

定理8.2.5 设 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，如果 $A \geq 0$，则 $\rho(A)$ 是 A 的特征值，且其对应的特征向量 $x \geq 0$.

由上述定理可知，非负矩阵的结论比正矩阵、本原矩阵的结论要弱，但若在非负矩阵的基础上加上不可约的条件，则有类似于Perron定理的结论，这就是1912 年Frobenius 将Perron 定理推广到不可约非负矩阵上的Frobenius定理.

定理8.2.6 设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为非负不可约矩阵，且 $\rho(A)$ 为 A 的谱半径，则

(1) $\rho(A)$ 为A的正特征值，且存在一个对应于 $\rho(A)$ 的正特征向量；

(2) $\rho(A)$ 为A的单特征值；

(3) 当A的任一元素增加时，$\rho(A)$ 增加.

8.3 随机矩阵

随机矩阵具有重要的应用价值，在诸如理论物理、数理经济、概率论、信号处理、网络安全、图像处理、基因统计、股票市场等领域均可以见到随机矩阵．随机矩阵是一类特殊的非负矩阵，因此具有非负矩阵的所有性质，但又有别于一般的非负矩阵，具有其特殊性．

定义8.3.1 设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为非负矩阵，若A的每一行上的元素之和都等于1，则称A为随机矩阵. 若还满足A的每一列上的元素之和都等于1，则称A为双随机矩阵.

性质1 记 $e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，则有

（1）设A是随机矩阵，则 $\rho(A)=1$, 且$Ae=e$;

（2）设 $A\geq 0$，则A是随机矩阵当且仅当 $Ae=e$;

（3）设A，B为同阶随机矩阵，则AB也是随机矩阵.

以下定理揭示了随机矩阵与非负矩阵(具有正谱半径对应的正特征向量)之间的密切关系.

定理8.3.1 设n阶非负矩阵A的谱半径 $\rho(A)>0$,

且对应的特征向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}>0$ ，则

$(D^{-1}AD)/\rho(A)$ 为随机矩阵，其中

$$D=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

证明:

记$D=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $P=(D^{-1}AD)/\rho(A)$

则有

$$p_{ij}=(x_i^{-1}a_{ij}x_j)/\rho(A)\ge 0\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

又$Ax=\rho(A)x$,即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\rho(A)x_i\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

所以$\sum_{j=1}^{n}p_{ij}=1\ (i=1,2,\cdots,n)$, 即证.

随机矩阵在随机过程中有着重要的应用，而在实际应用中常要考虑随机矩阵A的幂序列A^m的收敛性.

定理8.3.2 设A为n阶随机矩阵，则 $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$ 存在，当且仅当A的特征值除 $\rho(A)=1$ 外，其余特征值的模均小于1.

定理8.3.3 设A为n阶不可约随机矩阵，则$\lim\limits_{m\to\infty} A^m$存在当且仅当$A$为本原矩阵.

8.4 协方差矩阵与相关矩阵

随机向量的协方差矩阵与相关矩阵在统计、计量、金融工程、随机分析、人脸识别等方面应用广泛. 协方差矩阵与相关矩阵为特殊的对称矩阵。

定义8.4.1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是m个实随机变量，

则由它们组成的向量

$$X = (X_1, X_2, \cdots, X_m)^{\mathrm{T}}$$

称为m维实**随机向量**.

定义8.4.2 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_m)^{\mathrm{T}}$，若

$$E(X_i)=u_i(i=1,2,\cdots,m)$$

存在，则称

$$E(X)=\begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_m) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}=\mu$$

为**均值向量**.

容易验证均值向量具有以下性质：

$$(1)E(AX)=AE(X);$$

$$(2)E(AXB)=AE(X)B;$$

$$(3)E(AX+BY)=AE(X)+BE(Y).$$

均值向量是随机向量的一阶矩，与均值向量不同，随机向量的二阶矩为矩阵，它描述随机向量分布的散布情况.

定义8.4.3 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_m)^{\mathrm{T}}$，则称$X$的**自协方差矩阵**

$$\Sigma=\operatorname{cov}(X,X)=E\{[X-E(X)][X-E(X)]^{\mathrm{T}}\}=D(X)$$

$$=\begin{bmatrix} D(X_1) & \operatorname{cov}(X_1,X_2) & \cdots & \operatorname{cov}(X_1,X_m) \\ \operatorname{cov}(X_2,X_1) & D(X_2) & \cdots & \operatorname{cov}(X_2,X_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \operatorname{cov}(X_m,X_1) & \operatorname{cov}(X_m,X_2) & \cdots & D(X_m) \end{bmatrix}$$

$$=(\sigma_{ij})$$

为X的**协方差矩阵**. 有时也记为 $\operatorname{var}(X)$.

矩阵论(MATRIX THEORY)

其中

$$\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$
$$= E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}.$$

由于

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

所以协方差矩阵$\sum$ 为对称矩阵.

例1 设二维随机向量

$$X = (X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

写出X的协方差矩阵.

解： 由概率论与数理统计知识可知

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

且

$$E(X_1) = \mu_1, E(X_2) = \mu_2, D(X_1) = \sigma_1^2, D(X_2) = \sigma_2^2$$

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \operatorname{cov}(X_2, X_1)$$
$$= E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\}$$
$$= \rho\sigma_1\sigma_2.$$

所以 $X = (X_1, X_2)$ 的协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

推广自协方差矩阵的概念，则有**互协方差矩阵**.

定义8.4.4 设随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_m)^{\mathrm{T}}$,

$Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)^{\mathrm{T}}$，则称

$$\operatorname{cov}(X,Y)=(\operatorname{cov}(X_i,Y_j)),i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n$$

为随机向量X和Y的**互协方差矩阵**

设A, B为常数矩阵， b为常数向量． 由定义易验证协方差矩阵具有以下性质：

$$(1) D(AX+b)=AD(X)A^{\mathrm{T}};$$

$$(2) \operatorname{cov}(X,Y)=[\operatorname{cov}(Y,X)]^{\mathrm{T}};$$

$$(3) \operatorname{cov}(AX,BY)=A\operatorname{cov}(X,Y)B^{\mathrm{T}}.$$

若X和Y具有相同的维数， 则

$$(4) D(X+Y)=D(X)+\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{cov}(Y,X)+D(Y);$$

$$(5) \operatorname{cov}(X+Y,Z)=\operatorname{cov}(X,Z)+\operatorname{cov}(Y,Z).$$

定义8.4.5 若随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_m)^{\mathrm{T}}$ 的协方差矩阵存在，且每个分量的方差大于零，则称矩阵 $R=(r_{ij})$ 为随机向量X的**相关矩阵**，其中

$$r_{ij}=\frac{\operatorname{cov}(X_i,X_j)}{\sqrt{D(X_i)}\sqrt{D(X_j)}}=\frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{jj}}},\ (i,j=1,\cdots,m)$$

为**相关系数**.

在处理数据时，为了克服由于指标的量纲不同对统计分析结果带来的影响，往往在使用某种统计分析方法前，将每个指标“标准化”，即做如下变换：

$$\widetilde{X}_j=\frac{X_j-E(X_j)}{\sqrt{D(X_j)}},j=1,\cdots,m.$$

于是，$\widetilde{X}=(\widetilde{X}_1,\cdots,\widetilde{X}_m)^{\mathrm{T}}$ 且

$$E(\widetilde{X})=0,D(\widetilde{X})=R$$

即标准化数据的协方差矩阵刚好是原指标的相关矩阵.

令

$$V^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\sigma_{mm}} \end{bmatrix}$$

则有

$$\Sigma = V^{\frac{1}{2}} R V^{\frac{1}{2}},\ R = (V^{\frac{1}{2}})^{-1} \Sigma (V^{\frac{1}{2}})^{-1}.$$

例2 设

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 1 & 9 & -1\\ 2 & -1 & 16\end{bmatrix}$$

则可得

$$V^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\sqrt{\sigma_{11}} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{\sigma_{33}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix},$$

$$(V^{\frac{1}{2}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

从而相关矩阵为

$$R = (V^{\frac{1}{2}})^{-1}\Sigma(V^{\frac{1}{2}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix}$$

8.5 Fourier矩阵

Fourier矩阵是一种特殊结构的Vandermonde矩阵，在信号处理、图像处理、生物医学和生物信息、模式识别、自动控制等领域有着广泛的应用。

离散时间信号 $x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}$ 的Fourier变换称为信号的离散Fourier变换(DFT)或频谱，定义为

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{nk}, k = 0, 1, \cdots, N-1.$$

写成矩阵形式，有

矩阵论(MATRIX THEORY)

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

或简记为 $\hat{x} = Fx$，其中，

$x = (x_0, x_1, \cdots, x_{N-1})^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{x} = (X_0, X_1, \cdots, X_{N-1})^{\mathrm{T}}$

分别为离散时间信号向量和频谱向量，

矩阵论(MATRIX THEORY)

而

$$F=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{N-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \omega^{N-1} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)}\end{bmatrix},\quad \omega=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N}$$

称为**原始Fourier矩阵**，其中 (i,k) 元素为

$$F(i,k)=\omega^{(i-1)(k-1)}$$

由定义知，**Fourier**矩阵为一种具有特殊结构的**Vandermonde**矩阵，且具有以下性质：

（1）**Fourier**矩阵为对称矩阵，即 $F^{\mathrm{T}}=F.$

（2）**Fourier**矩阵可逆，且

$$F^{-1}=\frac{1}{N}F^{\mathrm{H}}=\frac{1}{N}F^{*}$$

其中 F^{*} 为F的共轭矩阵.

如：Fourier矩阵

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix},$$

则

$$F_4^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}.$$

矩阵论(MATRIX THEORY)

由 $\hat{x} = Fx$ 可得 $x = F^{-1}\hat{x} = \dfrac{1}{N}F^{*}\hat{x}$

写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{*} & \cdots & (\omega^{N-1})^{*} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (\omega^{N-1})^{*} & \cdots & (\omega^{(N-1)(N-1)})^{*} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}$$

即有 $x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nk/N}, \ n = 0, 1, \cdots, N-1$

为离散Fourier变换的逆变换.