课程试卷一参考解答

一、选择题

1、 B. 2、A. 3、D. 4、C. 5、A.

二、填空题

1、$\underline{\quad 18 \quad}$. 2、$\underline{\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1-\cos 2}{2} \\ e-1 & \sin 1 \end{pmatrix}}$.3、$\underline{1,\sqrt{6}}$.4、$\underline{40}$.

5、$\underline{\sin 1+\sin\sqrt{2}+\sin\sqrt{3}}$. 6、$\underline{\quad 3 \quad}$. 7、$\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$.

三、计算题

解：(1) $T(e_1)=(1,4,7)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$，$T(e_2)=(2,5,8)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$

$T(e_2)=(3,6,9)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$ $\quad T(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

(2) $N(A)=\{x\,|\,Ax=0\}$，由于

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad (*)$$

解得$Ax=0$的基础解系为$\xi=\begin{pmatrix}1&-2&1\end{pmatrix}^T$，所以

$$N(A)=\mathrm{span}\{\xi\},\ \xi=\begin{pmatrix}1&-2&1\end{pmatrix}^T \text{ 为 } N(A) \text{ 的一组基}$$

$R(A)=\{y\,|\,y=Ax\}$，令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则

$$Ax=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$$

即$R(A)=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，由$(*)$式知$\alpha_1,\alpha_2$为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个极大线性无关组，故

$R(A)=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}=\mathrm{span}\{(1\ 4\ 7)^T,(2\ 5\ 8)^T\}$， α_1,α_2为$R(A)$一组基.

(3) 由$(*)$式知矩阵A的秩为 2，所以A的正奇异值的个数为 2 个.

四、计算证明题

解：(1) $\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{pmatrix}$ 由于 $\begin{vmatrix}-1 & \lambda\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1$

行列式因子 $D_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=1, D_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

不变因子 $d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

初等因子 $(\lambda-1)^2,(\lambda+1)$

(2) Smith 标准形 $J(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^2(\lambda+1)\end{pmatrix}$

Jordan 标准型 $J=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 或者 $J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

(3) $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda^2-1)(\lambda-1)$，令 $g(\lambda)=\lambda^{2020}-\lambda^{2018}-\lambda^2+1$，则

$$g(\lambda)=\lambda^{2018}(\lambda^2-1)-(\lambda^2-1)=(\lambda^{2018}-1)(\lambda^2-1)=(\lambda^2-1)(\lambda-1)(\lambda^{2017}+\lambda^{2016}+\cdots+1)$$

$$=f(\lambda)(\lambda^{2017}+\lambda^{2016}+\cdots+1)$$

又 $f(A)=0$，所以 $g(A)=0$，即 $A^{2020}=A^{2018}+A^2-I$

五、计算题

解：(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=BC$

(2) $CC^H=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\left(CC^H\right)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B^HB=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix},\left(B^HB\right)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$

$$A^+=C^H\left(CC^H\right)^{-1}\left(B^HB\right)^{-1}B^H=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ -2 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(3) 由于 $AA^+b=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\ 14\\ 10\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 7\\ 5\end{pmatrix}\neq b$，所以方程组 $Ax=b$ 无解，此时，极小范数

最小二乘解为 $x_0 = A^{+}b = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

六、计算证明题

解：（1） $\|A\|_{m_1}=11, \|A\|_F=\sqrt{23}, \|A\|_{m_\infty}=9, \|A\|_2=\sqrt{15}, \|A\|_\infty=5.$

（2） 若 B=0,则 $\|B\|_\alpha=\|P^{-1}BP\|$=0，若 $B\neq 0$,则 $\|B\|_\alpha=\|P^{-1}BP\|>0$；

任意 $k\in C$， $\|kB\|_\alpha=\|P^{-1}kBP\|=|k|\|P^{-1}BP\|=|k|\|B\|_\alpha$；

$\|B+C\|_\alpha=\|P^{-1}(B+C)P\|=\|P^{-1}BP+P^{-1}CP\|\le\|P^{-1}BP\|+\|P^{-1}CP\|=\|B\|_\alpha+\|C\|_\alpha$；

$\|BC\|_\alpha=\|P^{-1}BCP\|=\|P^{-1}BPP^{-1}CP\|\le\|P^{-1}BP\|\|P^{-1}CP\|=\|B\|_\alpha\|C\|_\alpha$.

七、计算题

解： $f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2$

由于 $A(A-I)\neq 0,\ A(A-I)^2=0$，所以 A 的最小多项式为 $\lambda(\lambda-1)^2$

(2) 设 $r(\lambda)=b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2$ 令 $f(\lambda)=e^{\lambda t}$， 则 $f'(\lambda)=te^{\lambda t}$， $r'(\lambda)=b_1+2b_2\lambda$

由 $f(0)=r(0)\,f(1)=r(1),\,f'(1)=r'(1)$ 得

$$\begin{cases} b_0=1 \\ b_0+b_1+b_2=e^t \\ b_1+2b_2=te^t \end{cases} \Rightarrow b_0=1,,b_1=2e^t-te^t-2,b_2=te^t-e^t+1$$

故 $e^{At}=b_0I+b_1A+b_2A^2=\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ e^t-1 & 1 & 0 \\ te^t-e^t+1 & e^t-1 & e^t \end{pmatrix}$

(2)满足初始条件 $x(0)$ 的解为 $x(t)=e^{At}x(0)=\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ (1+t)e^t \end{pmatrix}$