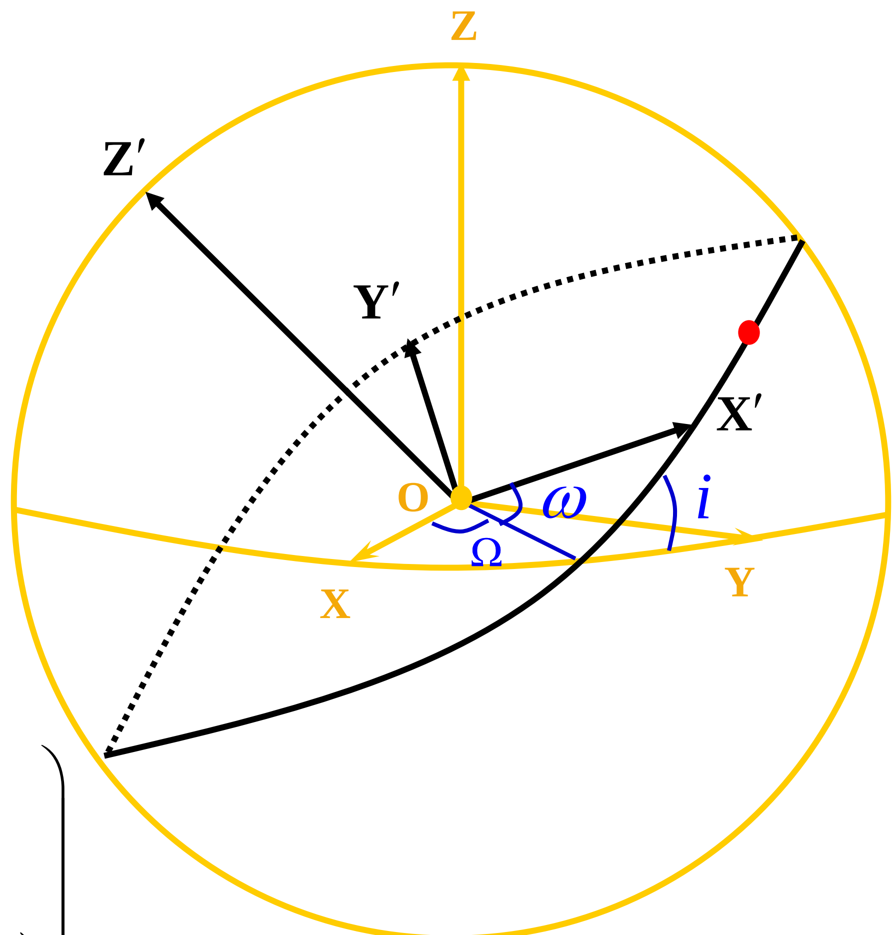
2.3.1 空间固定坐标系中的二体轨道

NANJING UNIVERSITY

以某一时刻两个天体中的一个m_1作为原点**O**的某参考系**O - XYZ**是固定参考系, **OX**指向空间中的某一固定点. **O - X′Y′**是二体运动的不变平面, **OX′**指向轨道的近点. 两个坐标系之间的关系由3个角度 Ω (升交点经度), ω (近点角距), i (轨道倾角) 确定.



天体 m_2 在坐标系**O - X′Y′Z′**中的位置 $\mathbf{r}$ 及速度 $\dot{\mathbf{r}}$ 分别由下式给出:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r\cos f \\ r\sin f \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{h}{p}\sin f \\ \dfrac{h}{p}(e+\cos f) \\ 0 \end{pmatrix}$$

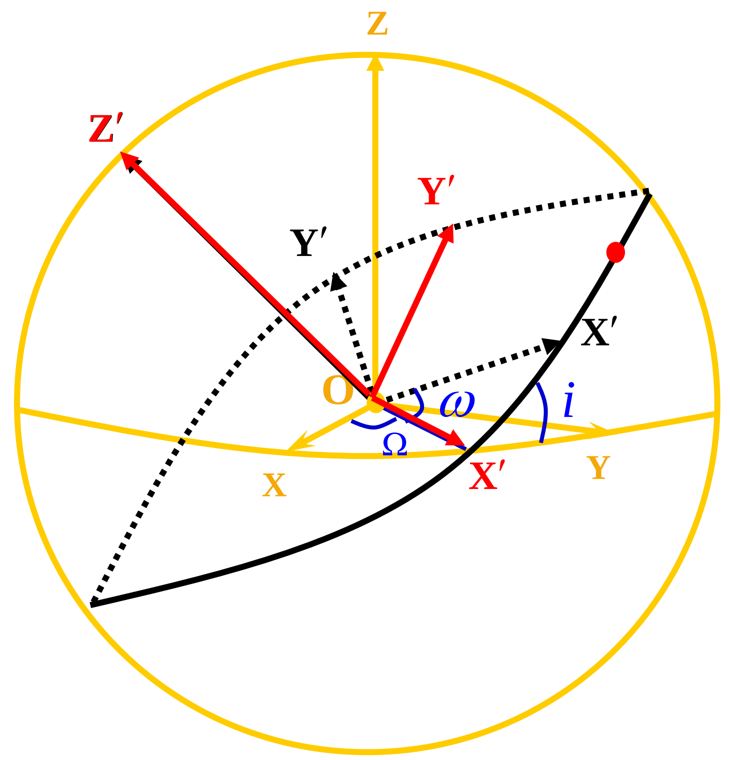
$$\boxed{r^2\dot{f} = h = \sqrt{\mu p}}$$

该表达式对椭圆、抛物线、双曲线轨道都适用.

2.3.1 空间固定坐标系中的二体轨道

若要将参考系$\mathbf{O-X'Y'Z'}$中的轨道表达转换到固定参考系$\mathbf{O-XYZ}$中, 需执行以下操作：

1. 以$\mathbf{OZ'}$为轴，反向旋转ω角度



该操作数学表达式是：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{R_z}(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \boxed{\theta = -\omega}$$

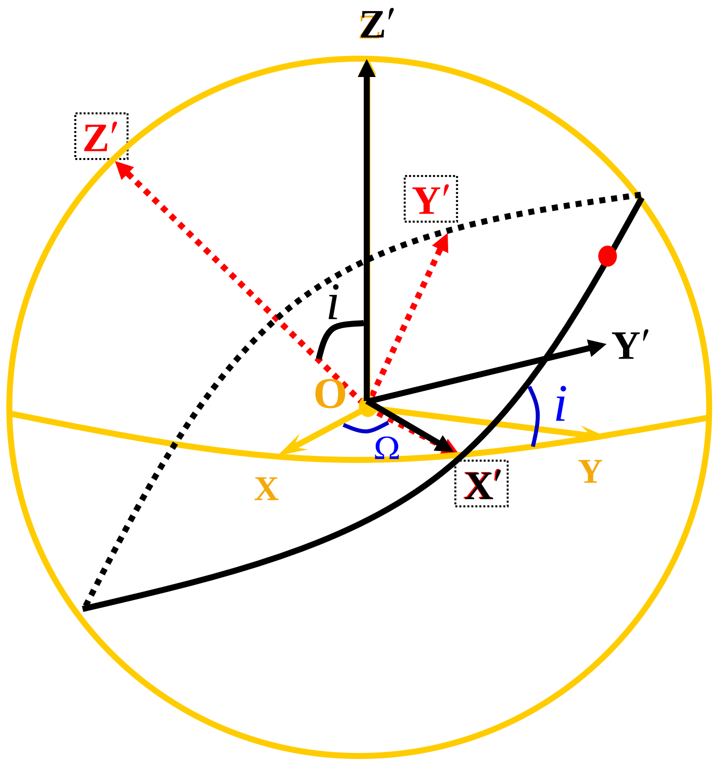
2.3.1 空间固定坐标系中的二体轨道

若要将参考系**O - X′Y′Z′**中的轨道表达转换到固定参考系**O - XYZ**中, 需执行以下操作：

~~1. 以**OZ′**为轴，反向旋转 ω 角度；~~

2. 以**OX′**为轴，反向旋转 i 角度

该操作数学表达式是：



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\theta = -i}$$

2.3.1 空间固定坐标系中的二体轨道

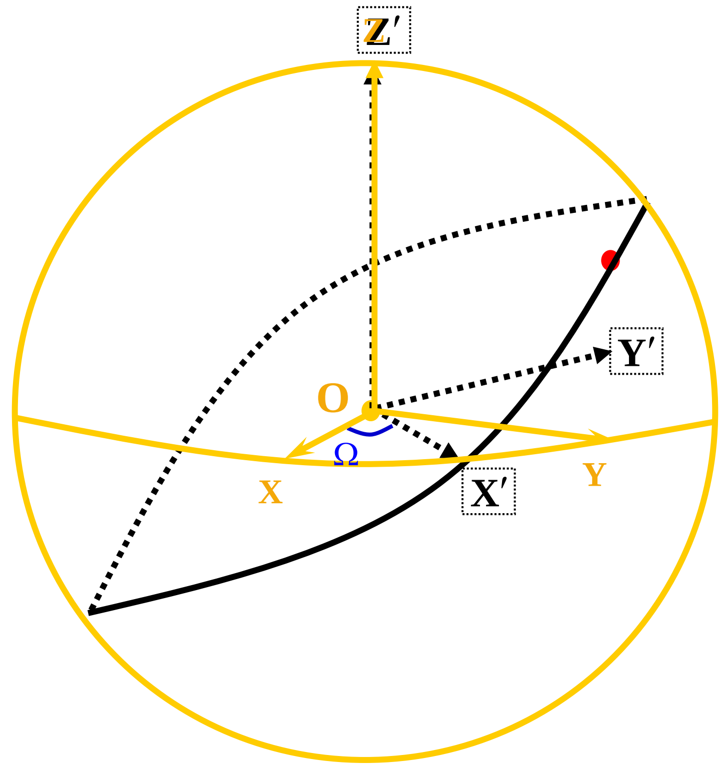
将参考系**O - X′Y′Z′**转换到**O - XYZ**：

~~1. 以**OZ′**为轴，反向旋转 ω 角度；~~

~~2. 以**OX′**为轴，反向旋转 i 角度~~

3. 以**OZ′**为轴，反向旋转 Ω 角度

该操作数学表达式是：



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{R}_z(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \boxed{\theta = -\Omega}$$

另外, 绕Y轴旋转θ角的操作是:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{R}_y(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.3.1 空间固定坐标系中的二体轨道

最后，可以把整个过程写成：

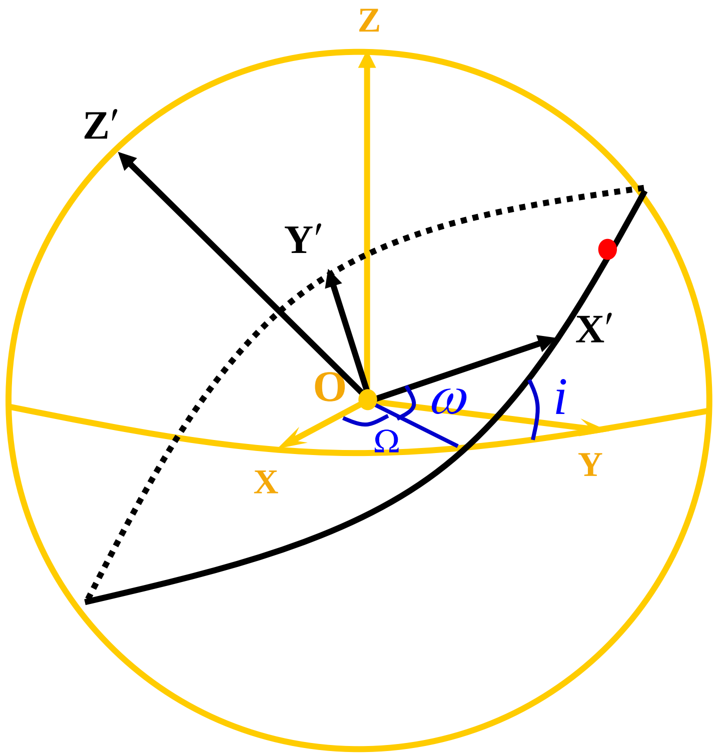
$$\mathbf{r}=\mathbf{R}_z(-\Omega)\mathbf{R}_x(-i)\mathbf{R}_z(-\omega)\mathbf{r}$$

$$\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{R}_z(-\Omega)\mathbf{R}_x(-i)\mathbf{R}_z(-\omega)\dot{\mathbf{r}}$$

$$\boxed{\mathbf{r}=\left(r\cos f, r\sin f, 0\right)^T,\quad \dot{\mathbf{r}}=\left(-\frac{h}{p}\sin f, \frac{h}{p}\left(e+\cos f\right), 0\right)^T}$$

$$\mathbf{r}=r\cos f\ \mathbf{P}+r\sin f\ \mathbf{Q}$$

$$\dot{\mathbf{r}}=-\frac{h}{p}\sin f\ \mathbf{P}+\frac{h}{p}\left(e+\cos f\right)\mathbf{Q}$$



$$\mathbf{R}_z(-\Omega)\mathbf{R}_x(-i)\mathbf{R}_z(-\omega)$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega-\sin\Omega\sin\omega\cos i & -\cos\Omega\sin\omega-\sin\Omega\cos\omega\cos i & \sin\Omega\sin i \\ \sin\Omega\cos\omega+\cos\Omega\sin\omega\cos i & -\sin\Omega\sin\omega+\cos\Omega\cos\omega\cos i & -\cos\Omega\sin i \\ \sin\omega\sin i \quad \mathbf{P} & \cos\omega\sin i \quad \mathbf{Q} & \cos i \end{pmatrix}$$

2.3.1 空间固定坐标系中的二体轨道

另一方面, 二体椭圆运动的不变平面由 **h** 定义, 它在 **O - XYZ**中表示为

$$\mathbf{h}=\mathbf{R}_z(-\Omega)\mathbf{R}_x(-i)\mathbf{R}_z(-\omega)\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h\sin\Omega\sin i\\-h\cos\Omega\sin i\\h\cos i\end{pmatrix}$$

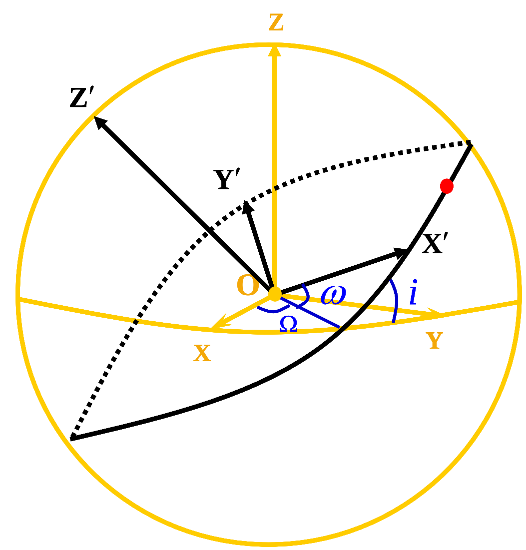
由以上固定坐标系中轨道的表达我们看到， h, f, Ω, ω, i 出现在 $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ 的表达式中. 而一般地 $h=\sqrt{\mu a(1-e^2)}$, 并且 $f=f(e,M)$是e, M 的函数, 所以椭圆运动的解在空间可以由以下六个参数来表述：

$$a, e, i, \Omega, \omega, M$$

这六个轨道根数分别称为：

a	轨道半长径	e	轨道偏心率	i	轨道倾角
Ω	升交点经度	ω	近点角距	M	平近点角

i, Ω 决定轨道平面； a, e 决定轨道形状； ω 决定轨道取向；
M 决定某时刻在轨道上的位置，仅有 M 中显含时间



2.3.2 轨道计算

利用上述公式，可以从轨道根数出发计算某天体的位置与速度，这一过程称为星历表计算. 反之，从观测到的天体位置速度数据出发，计算轨道根数的过程则称为轨道计算.

$$\boxed{\text{轨道根数}} \quad \underset{\text{轨道计算}}{\overset{\text{星历表计算}}{\rightleftarrows}} \quad \boxed{\text{观测资料}}$$

在星历表计算时，往往会要用偏近点角计算位置和坐标，我们写出用偏近点角表示的位置和坐标如下

$$\mathbf{r} = a\left(\cos E - e\right)\mathbf{P} + a\sqrt{1-e^2}\,\sin E\,\mathbf{Q}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = -\frac{a^2 n}{r}\sin E\,\mathbf{P} + \frac{a^2 n}{r}\sqrt{1-e^2}\,\cos E\,\mathbf{Q}$$

$$r\cos f = a\left(\cos E - e\right)$$

$$r\sin f = b\sin E = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E$$

$$\dot{E} = \frac{n}{1-e\cos E}$$

2.3.2 轨道计算

轨道计算　已知 $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$, 计算轨道根数

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$$

$$\mathbf{h} = \left(y\dot{z} - z\dot{y}, z\dot{x} - x\dot{z}, x\dot{y} - y\dot{x}\right)^T = \left(h_x, h_y, h_z\right)^T$$

$$\dot{r} = \pm\sqrt{v^2 - \frac{h^2}{r^2}}$$

---

1. 计算 a

$$a = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}\right)^{-1}$$

$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$, 由 a 还可以得到 n

2.3.2 轨道计算

2. 计算 e

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}}$$

$$\boxed{h = \sqrt{\mu a\left(1 - e^2\right)}}$$

3. 计算 i

$$i = \cos^{-1}\left(\frac{h_z}{h}\right)$$

$$\boxed{\cos i = \frac{h_z}{h}}$$

4. 计算 Ω

$$\Omega = \tan^{-1}\left(\frac{h_x}{h_y}\right)$$

$$\boxed{\tan\Omega = \frac{h_x}{h_y}, \Omega \in [0, 360^\circ)}$$

5. 计算 E

$$e\cos E = 1 - \frac{r}{a}, \quad e\sin E = \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{na^2}$$

$r = a\left(1 - e\cos E\right), \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = na^2 e\sin E$

由Kepler方程可计算 M

2.3.2 轨道计算

6. 计算 ω

$$\sin f=\frac{a\left(1-e^2\right)\dot{r}}{he},\ \cos f=\frac{1}{e}\left[\frac{a\left(1-e^2\right)}{r}-1\right]$$

$$\boxed{r=\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos f},\ \dot{r}=\frac{he\sin f}{a\left(1-e^2\right)}}$$

$$\sin(\omega+f)=\frac{z}{r\sin i},\ \cos(\omega+f)=\sec\Omega\left[\frac{x}{r}+\sin\Omega\sin(\omega+f)\cos i\right]$$

计算各轨道根数可以有其他的过程及公式。

2.3.2 轨道计算

偏心率向量 e

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$
$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

因为

$$\mathbf{h}=\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}},\quad \ddot{\mathbf{r}}=-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{h}\times\ddot{\mathbf{r}}=(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})\times\left(-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}\right)=-\mu\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r}-\frac{\dot{r}}{r^2}\mathbf{r}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\mu\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

$$\mathbf{h}\times\ddot{\mathbf{r}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{h}\times\dot{\mathbf{r}})$$

所以:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{h}\times\dot{\mathbf{r}}+\mu\frac{\mathbf{r}}{r}\right)=0$$

定义常向量 $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{h}\times\dot{\mathbf{r}}+\mu\frac{\mathbf{r}}{r}=-\mu\mathbf{e}$$

一个积分不变量

可以证明, $\mathbf{e}$ 的方向即为近日点方向, $\mathbf{e}$ 的大小即为偏心率.

2.3.3 质心坐标系中的二体轨道

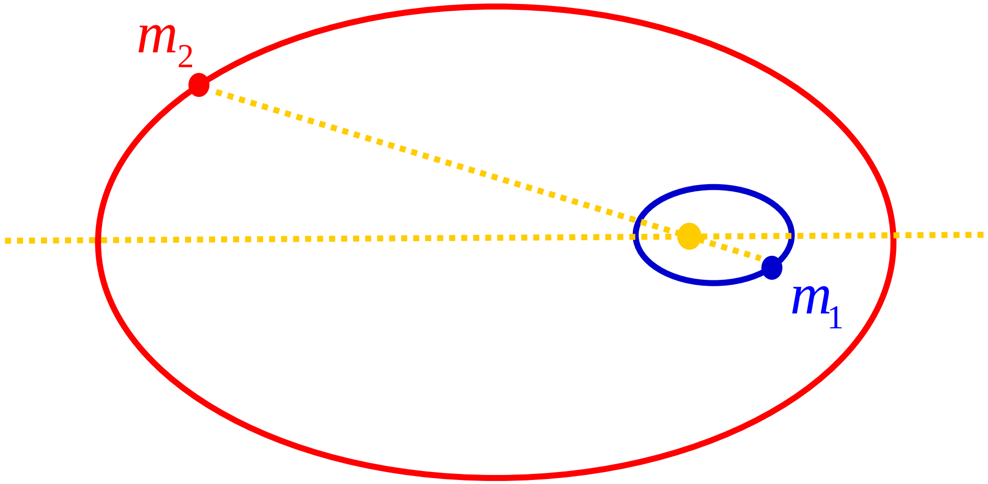
质心系下的坐标：

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}_2 = +\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}$$

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 的轨道形状即为 $\mathbf{r}$ 的轨道形状

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 的轨道周期即为 $\mathbf{r}$ 的轨道周期



质心系下的运动方程：

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = +\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}$$

即：

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^3\frac{\mu}{r_1^3}\mathbf{r}_1, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^3\frac{\mu}{r_2^3}\mathbf{r}_2$$

相对运动：$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$

2.3.3 质心坐标系中的二体轨道

与解相对运动方程类似，得到这两个方程的解为：

$$r_1=\frac{a_1\left(1-e_1^2\right)}{1+e_1\cos\left(\theta_1-\omega_1\right)},\quad r_2=\frac{a_2\left(1-e_2^2\right)}{1+e_2\cos\left(\theta_2-\omega_2\right)}$$

与 $r=\dfrac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\left(\theta-\omega\right)}$ 比较并考虑到求解过程，有

$$e_1=e_2=e,$$

$$a_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}a,\quad a_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}a$$

因为 r_1,r_2 始终同时达到极大与极小，

所以两个轨道的方向必然相差 π，即

$$\omega_1=\omega,\quad \omega_2=\pi+\omega$$

$$\theta_1=\theta,\quad \theta_2=\pi+\theta$$

$$r_{1\min}=\frac{m_2}{m_1+m_2}r_{\min},\ r_{1\max}=\frac{m_2}{m_1+m_2}r_{\max}$$

$$a_1(1-e_1)=\frac{m_2}{m_1+m_2}a(1-e)$$

$$a_1(1+e_1)=\frac{m_2}{m_1+m_2}a(1+e)$$

$$\frac{1-e_1}{1+e_1}=\frac{1-e}{1+e}\Rightarrow e_1=e$$

2.3.3 质心坐标系中的二体轨道

质心系中的角动量

$$H_1 = m_1 r_1^2 \dot{\theta}_1 = m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 r^2 \dot{\theta} = m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 h$$

$$H_2 = m_2 r_2^2 \dot{\theta}_2 = m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 r^2 \dot{\theta} = m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 h$$

方向同**h**的方向

总角动量

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{h}$$

$$h = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) H^*$$

二体的总能量：

$$E^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

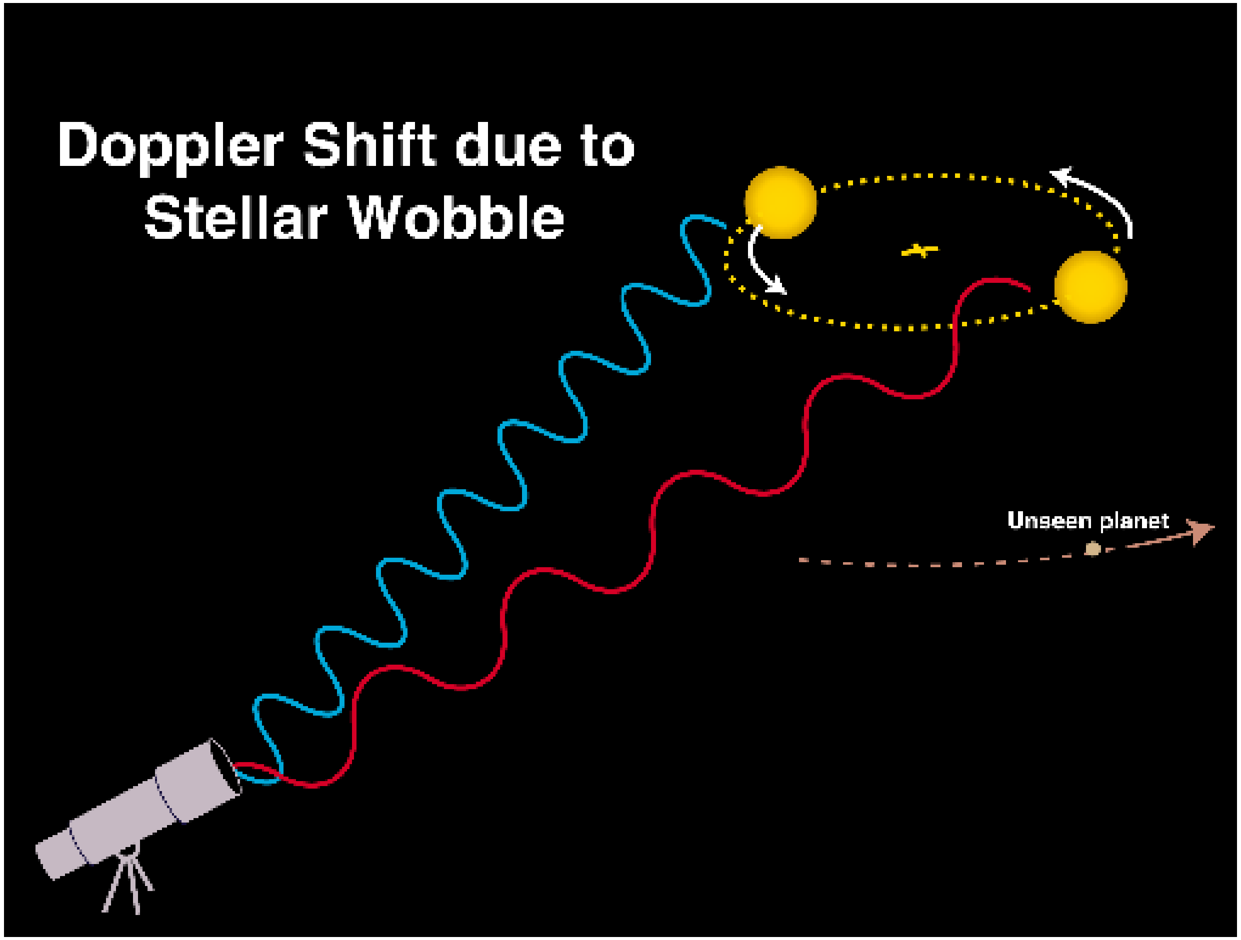
$$= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\theta}_2^2 \right) - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} C = -\frac{G m_1 m_2}{2a}$$

$$C = \frac{\mu}{2a} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) E^*$$

2.3.3 质心坐标系中的二体轨道

行星与中心天体的相互绕转运动将导致二者围绕共同质心的运动，利用二体运动的这一特点，可以发现太阳系外的行星



2.3.3 质心坐标系中的二体轨道

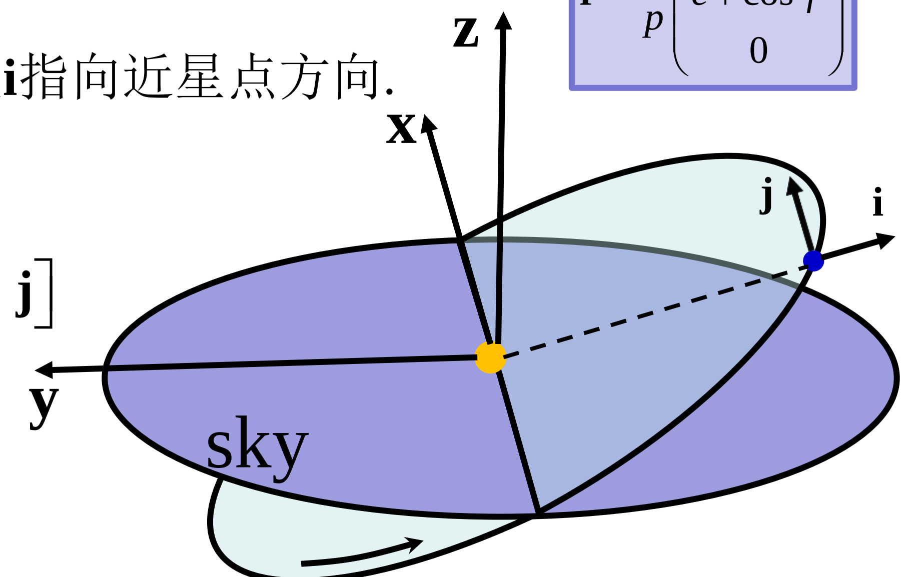
多普勒方法测恒星视向速度

在中心位于恒星的坐标系内，行星的位置和速度分别为

$$\mathbf{r} = r\cos f\ \mathbf{i} + r\sin f\ \mathbf{j},\quad \dot{\mathbf{r}} = -\frac{2\pi a}{T\sqrt{1-e^2}}\left[\sin f\ \mathbf{i} - (e+\cos f)\ \mathbf{j}\right].$$

$$\mathbf{r} = r\begin{pmatrix}\cos f\\ \sin f\\ 0\end{pmatrix},\quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{h}{p}\begin{pmatrix}-\sin f\\ e+\cos f\\ 0\end{pmatrix}$$

位于轨道面上的单位向量**i**, **j**相互垂直且**i**指向近星点方向.



恒星相对于质心的速度为

$$\mathbf{V} = -\frac{m}{m+M}\frac{2\pi a}{T\sqrt{1-e^2}}\left[\sin f\ \mathbf{i} - (e+\cos f)\ \mathbf{j}\right]$$

其中m, M分别为行星和恒星的质量.

两个坐标系的关系由下式决定：

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix}\cos\omega\\ \sin\omega\cos i\\ -\sin\omega\sin i\end{pmatrix},\quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix}-\sin\omega\\ \cos\omega\cos i\\ -\cos\omega\sin i\end{pmatrix},\quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix}0\\ \sin i\\ \cos i\end{pmatrix}.$$

由此可以计算恒星在**O-xyz**坐标系内的表达式.

2.3.3 质心坐标系中的二体轨道

NANJING UNIVERSITY

V只有z方向分量能被测量

$$V_z = -\frac{m}{m+M}\frac{2\pi a}{T\sqrt{1-e^2}}\left[-\sin f\sin\omega\sin i + (e+\cos f)\cos\omega\sin i\right]$$

$$= -\frac{m}{m+M}\frac{2\pi a}{T}\frac{\sin i}{\sqrt{1-e^2}}\left[\cos(f+\omega)+e\cos\omega\right].$$

该式中的未知数有: m, a, T, i, e, f, ω.

其中a, T通过Kepler第三定律联系起来 $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m+M)}{4\pi^2}$, 上式写成:

$$V_z = -\left[\frac{m^3\sin^3 i}{(m+M)^2}\frac{2\pi G}{T(1-e^2)^{3/2}}\right]^{1/3}\left[\cos(f+\omega)+e\cos\omega\right],$$

其中$\frac{m^3\sin^3 i}{(m+M)^2}$称为质量函数.

通过测量得到视向速度(与上式相差一个符号),

由此分析计算轨道. 应该注意到, f是时间的函数,

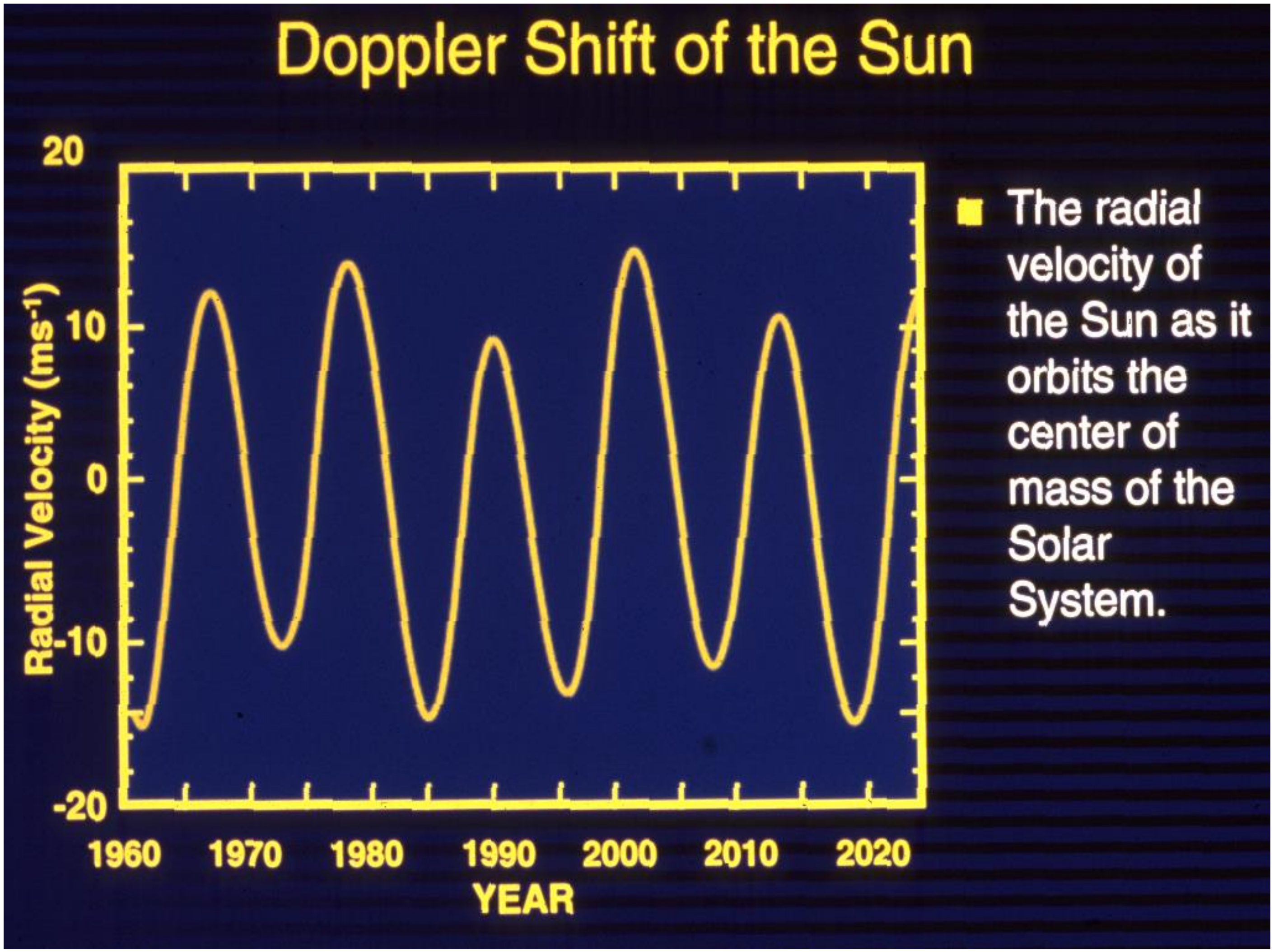
$m\sin i$不可分离.

Planet	Period (years)	Doppler Shift Of Sun (M/sec)
Earth	1.0	0.09
Jupiter	11.9	13
Uranus	84.0	0.3

http://astro.unl.edu/naap/esp/animations/radialVelocitySimulator.html

2.3.3 质心坐标系中的二体轨道

因行星的存在和运动，造成太阳的运动。最大幅度约为13米/秒。



地面通过多普勒频移测量速度时，要减去观测者自身运动速度的影响。

太阳自行线速度：220,000m/s.

地球公转线速度：29,790m/s.

地球自转线速度（赤道处）：465m/s.

绕地月系质心的线速度：13m/s .

2.3.3 质心坐标系中的二体轨道

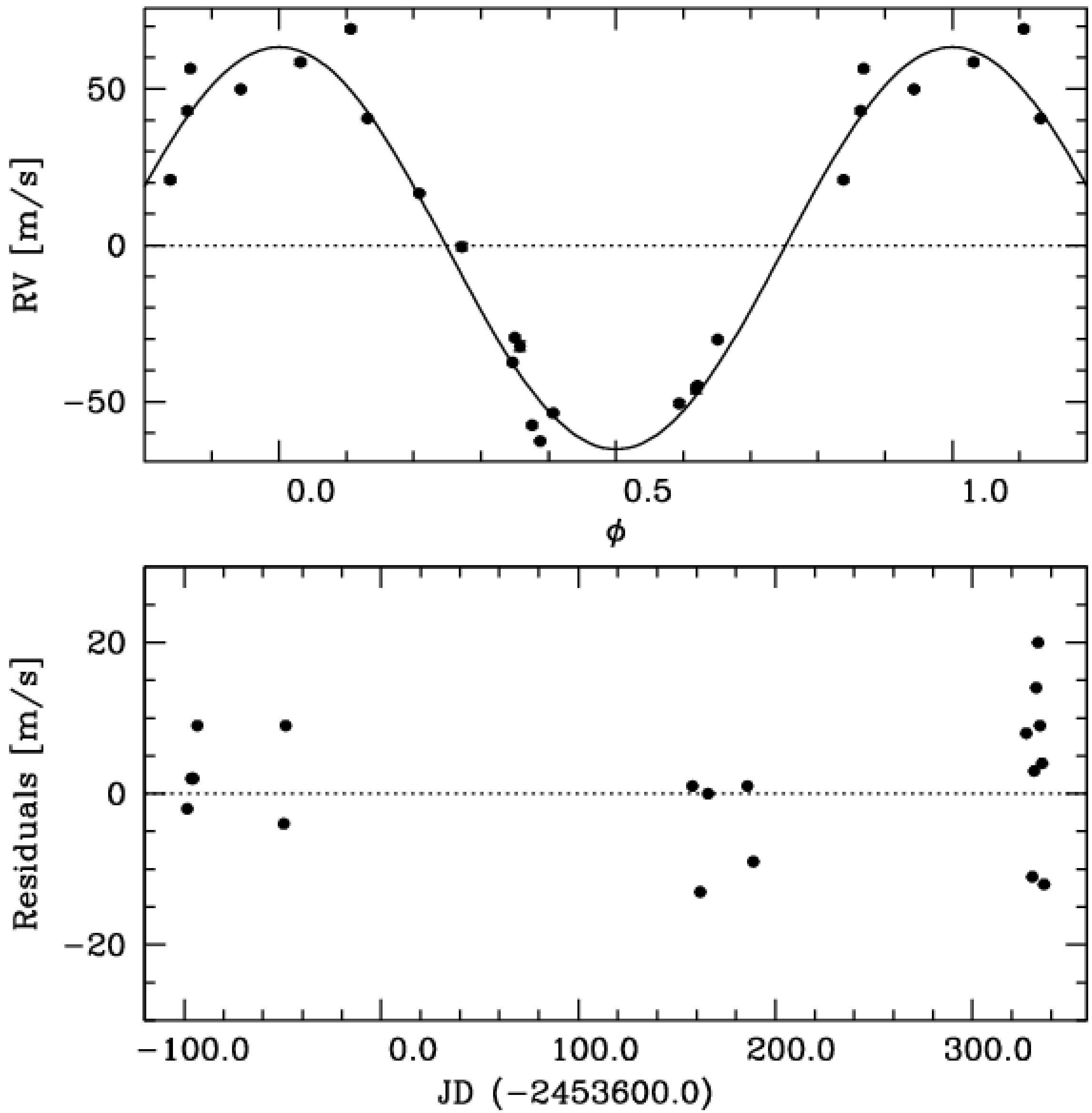
单行星系统的例子

HD 102195

该视向速度变化由一个轨道周期为4.1天的圆轨道上的行星运动引起.

上图已将多个周期内观测到的数据点都叠加到一个轨道周期内.其横坐标为周期相位; 纵坐标为视向速度;实线是拟合计算的视向速度.

下图则显示了观测的视向速度值和最佳拟合之间的偏差(O − C),横坐标为儒略日.



2.3.3 质心坐标系中的二体轨道

单行星系统的例子

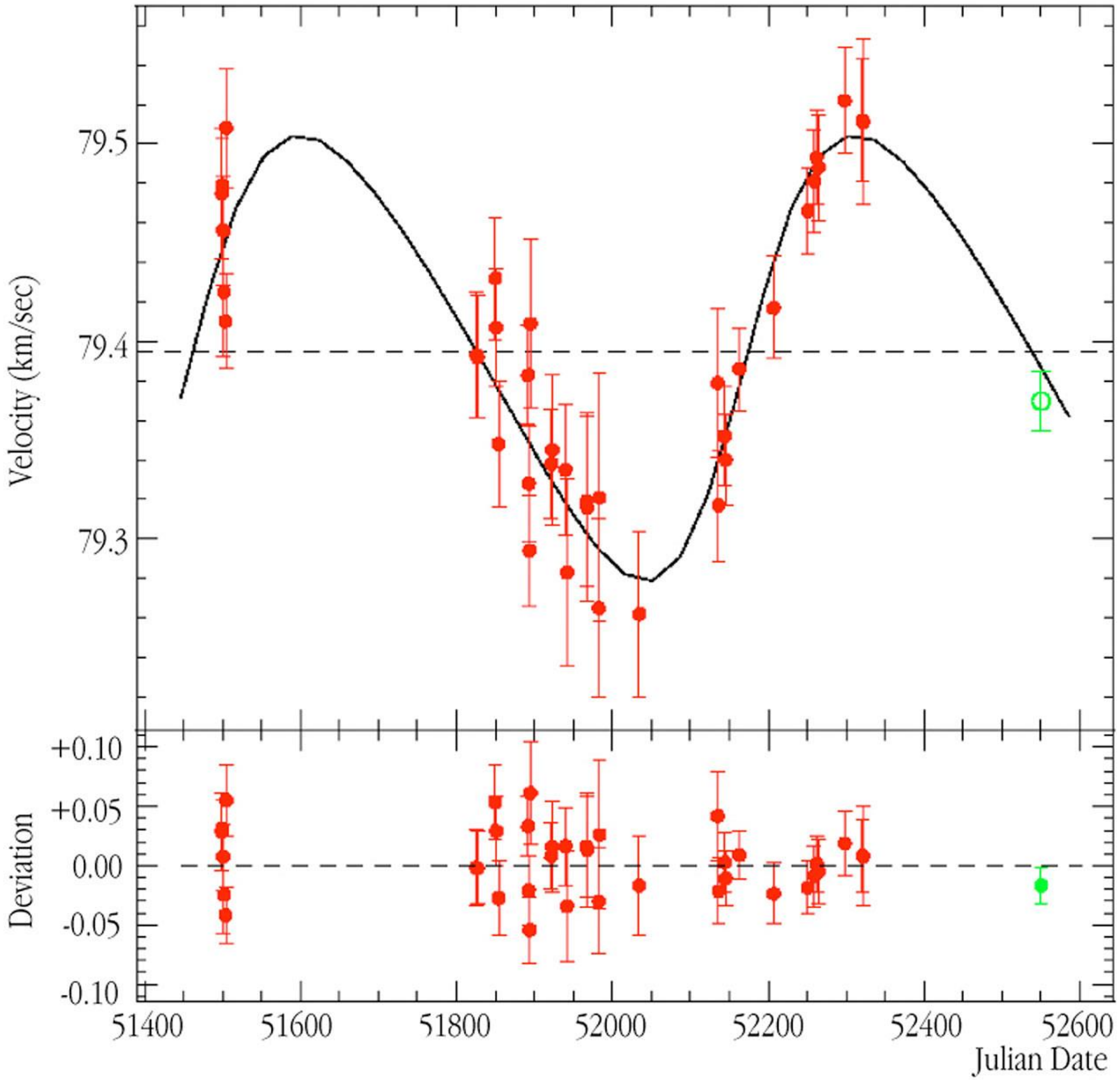
HD 47536

该视向速度曲线由一个轨道周期为712天的行星运动引起,它的轨道偏心率较大.

横坐标为 JD − 2400000;纵坐标为视向速度;同时显示了测量误差;实线是拟合计算的视向速度.

下图则显示了观测到的视向速度值和最佳拟合之间的偏差（O − C）,平均大约 25米/秒.

注：更多的观测资料表明，该系统中至少有两颗行星，周期也不是712天！



2.3.3 质心坐标系中的二体轨道

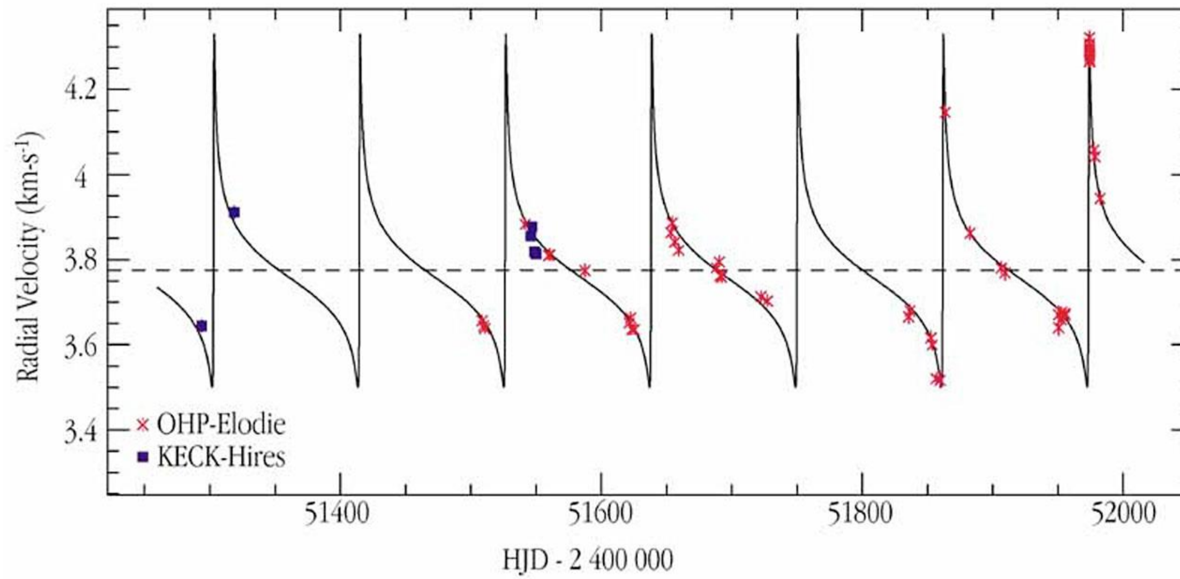
NANJING UNIVERSITY 南京大学

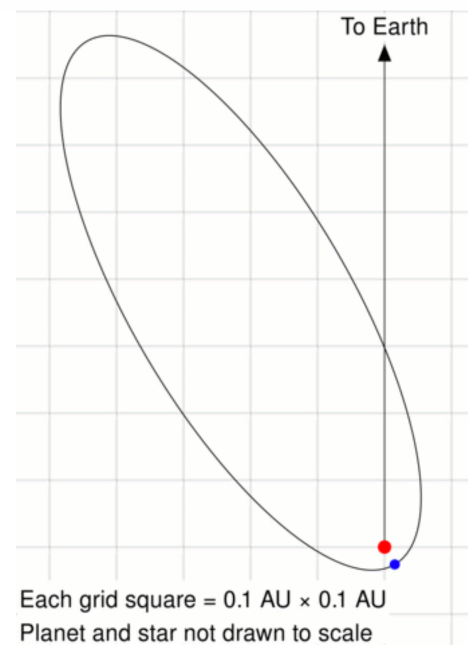
单行星系统的例子

HD 80606

该视向速度由一个轨道周期为111.5天、高轨道偏心率、大约4倍木星质量的行星运动引起.

横坐标为 JD－2400000;纵坐标为视向速度;不同颜色的点表示来源于不同望远镜的数据;实线是拟合计算的视向速度.





a	0.453±0.015AU
e	0.9336±0.0002
P	111.436±0.003 d
i	89.285±0.023°
τ	JD2,454,424.857±0.05

2.3.3 质心坐标系中的二体轨道

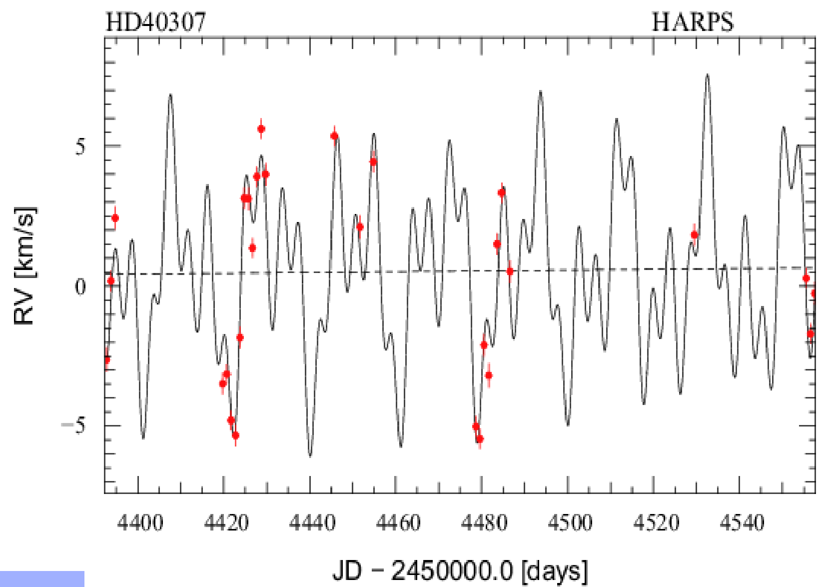
多行星系统的例子

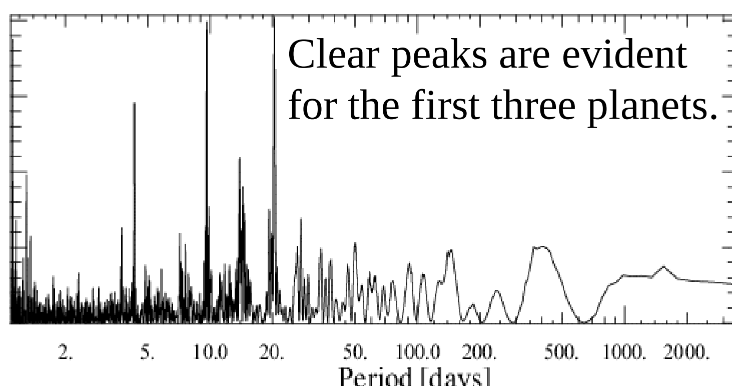
HD 40307

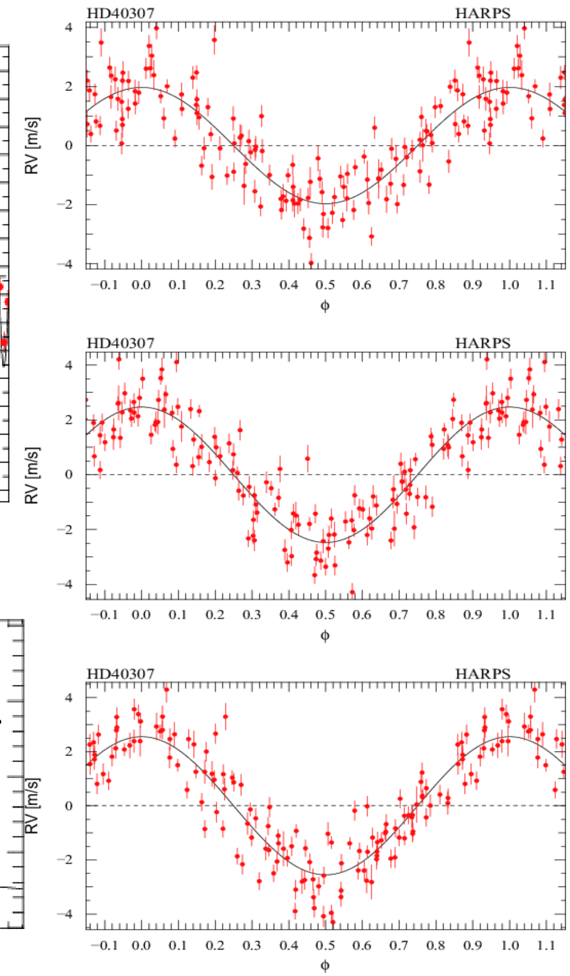
该视向速度主要由三个轨道周期分别为4.2天、9.6天和20.5天的行星运动引起. 对视向速度的傅里叶分析给出非常清晰的峰.

Planet	Mass ($M_{\oplus}$)	a (AU)	Period (days)	e
b	4.0	0.0468	4.3123	0.20
c	6.6	0.0799	9.6184	0.06
d	9.5	0.1321	20.432	0.07
e	3.5	0.1886	34.62	0.15
f	5.2	0.247	51.76	0.02
g	7.1	0.600	197.8	0.29

2008年该系统中发现三颗行星。2012年，更多的数据和更多的分析再次发现三颗行星。



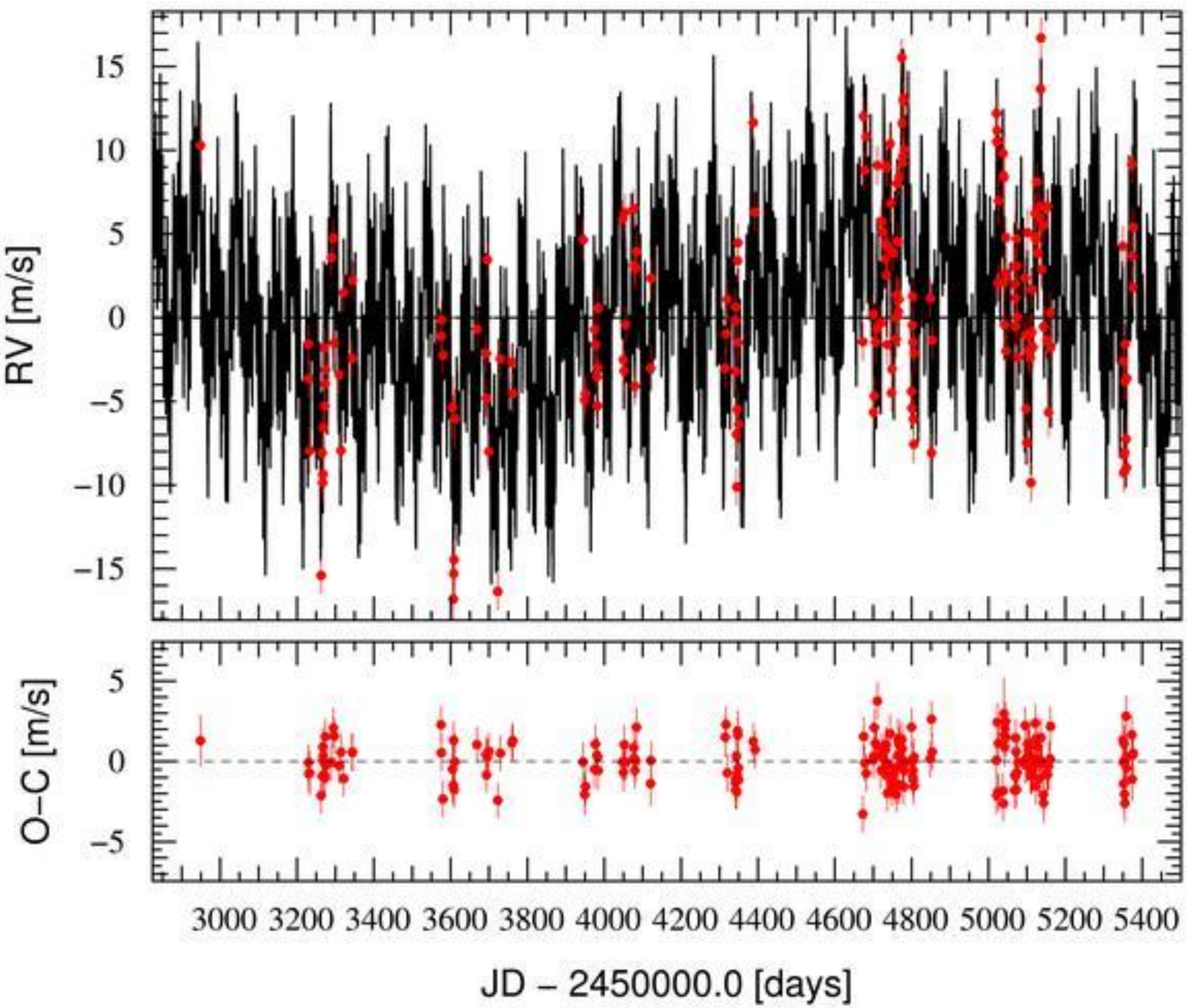




左图是观测数据、三颗行星拟合曲线、傅里叶分析;右图为三个Kepler轨道(去除其他两颗行星效果)的拟合效果.

2.3.3 质心坐标系中的二体轨道

视向速度法发现的多行星的系统 HD 10180



上图为HD 10180的视向速度测量（红点）及包含七个行星的动力学模拟。

下图为模拟结果和观测数据之差。

注：第七个行星有待进一步证实