2014-2015 年度第二学期《天体力学基础》

期末考试（A 卷）

院系________________年级_______学号_______________姓名________

时间：14:00-16:00, 2015-6-28　　**地点：**仙 II-305　　**考试方式：**闭卷　　**总分：**100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、简要回答：（共 30 分，每小题 5 分）

1、　假定在地面的一个高塔上水平抛出一个物体，不考虑除地球引力之外的其他力的作用，这个物体的运动轨线是什么样的曲线？抛出点是该轨道的近地点还是远地点？

2、　柯伊伯带中有数百个小天体位于与海王星发生 3:2 共振（轨道周期约为海王星的 1.5 倍）的轨道，称为 Plutinos. 现考虑太阳、海王星、Plutino 这样的三体模型，精确到偏心率和轨道倾角的二阶，写出描写小天体运动的所有的共振角.

3、　在大气阻尼为摄动的受摄二体问题中，设大气阻尼的方向始终与质点运动速度相反，问该质点运动中什么轨道根数不随时间变化，为什么？

4、　假设恒星是弹性体，行星是质点. 如果恒星自转角速度比行星公转角速度大，恒星与行星间的潮汐作用将导致行星轨道如何变化，为什么？反之，若恒星自转较行星公转慢呢？

5、　在卫星自转因潮汐耗散逐渐减慢的过程中，它的自转和公转频率之比经历了由大到小的变化。简要解释为什么太阳系内大多数轨旋共振的卫星都处于 1:1（而非 2:1、3:1 等）的共振状态？水星为什么可以处于 3:2 轨旋共振？

二、 （15 分）一质点在势场$U=-\left(x^2+y^2+2x^2y\right)$下运动，**问：**

1. 列出其运动方程；
2. 求其平衡解；
3. 讨论平衡解的线性稳定性.

提示：可写出哈密顿函数，再写出正则运动方程；也可直接写出运动方程.

三、 （15 分）为模拟行星的轨道迁移（半长径随时间变化），可以将一个虚拟的力作用在行星上，一种常见的作用力具有形式：$\mathbf{F}=\dfrac{\alpha}{\tau}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\hat{\mathbf{v}}$，其中$\hat{\mathbf{v}}$是大行星的速度方向向量，$\alpha,\tau$是非零常数，$\tau$为远远大于行星运动轨道周期的时标. **问：**

1. 在与行星轨道速度方向相同的虚拟力的作用下，行星半长径变大还是变小？
2. 近圆轨道上的行星在虚拟力$\mathbf{F}$作用之下，其半长径如何变化？设初始半长径为a_0，写出a随时间变化的近似表达式.

四、 （15 分）受摄二体问题中摄动函数$R=\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}\left(2+\cos i\right)$. **问：**采用正则轨道根数，列出受摄哈密顿函数、受摄运动方程并解出该方程。

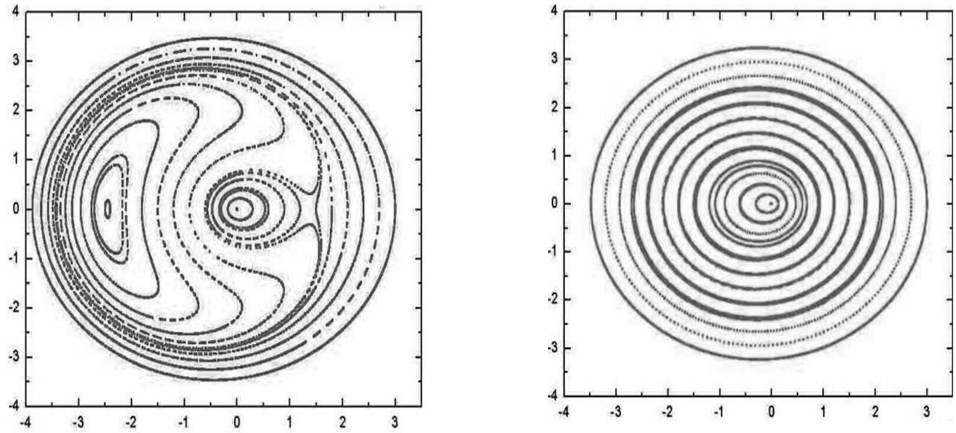
五、 （15 分）太阳辐射在行星际粒子上一方面可产生辐射压，另一方面可产生 Poynting- Robertson 效应，粒子因辐射受到的力可表示为$\mathbf{F}=\dfrac{L_\odot Q_{\rm pr}A}{4\pi cr^2}\hat{\mathbf{r}}-\dfrac{L_\odot Q_{\rm pr}A}{4\pi cr^2}\left(\dfrac{2v_r}{c}\hat{\mathbf{r}}+\dfrac{v_\theta}{c}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$，其中第一项表示辐射压，第二项代表 PR 效应. 各符号意义如下：$L_\odot$太阳光度，$Q_{\rm pr}$辐射压系数，A粒子截面积，c光速，r粒子日心距离，$\hat{\mathbf{r}}$、$\hat{\boldsymbol{\theta}}$径向、横向单位矢量，$v_{\rm r}$、$v_\theta$径向、横向速度分量. **问：**

1. 请定性地给出受太阳辐射时，不同大小尺度、处于不同轨道的粒子的运动轨迹如何（说明其半长径、偏心率的变化趋势），并说明原因.
2. 在合理近似下估计 1 天文单位处厘米大小的粒子的轨道寿命.

注意：辐射压系数指粒子吸收太阳辐射的比例，它与粒子大小有关.

六、 （15 分）平面圆型限制性三体模型下，二阶平运动共振的“第二基本模型”的哈密顿函数有形式：$H=\delta I+I^2+I\cos 2\varphi$，其中$I\propto e^2$，$\varphi=\left[j\lambda'+\left(2-j\right)\lambda-2\varpi\right]/2$，符号含义同课程习惯. **问：**

1. 试举两个二阶平运动共振的例子，写出相应的共振角；
2. 利用生成函数$S=\dfrac{1}{2}x^2\tan 2\varphi$构造正则变换$\left(I,\varphi\right)\to\left(x,y\right)$，并写出新的哈密顿函数；
3. 在新变量$\left(x,y\right)$下该哈密顿系统的相图如下（左右两幅对应不同的参数δ值），在图上直接标出发生共振的位置，并简要说明偏心率的变化情形.



2014-2015 年度第二学期《天体力学基础》期末考试（A 卷）　　　　姓名：__________

试卷中可能用到的参数值及公式:

Gauss型(摄动力$\mathbf{F}=V\,\hat{\mathbf{v}}+W\,\hat{\mathbf{w}}+N\,\hat{\mathbf{n}}$)

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{n\Gamma}V,$$
$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\Gamma}{na}\left[2V\left(e+\cos f\right)-W\beta\sin E\right],$$
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=N\frac{\beta}{na}\frac{\cos\left(\omega+f\right)}{1+e\cos f},$$

Gauss型(摄动力$\mathbf{F}=\bar{R}\,\hat{\mathbf{r}}+\bar{T}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+\bar{N}\,\hat{\mathbf{z}}$)

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{n\beta}\left[\bar{R}e\sin f+\bar{T}\left(1+e\cos f\right)\right],$$
$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\beta}{na}\left[\bar{R}\sin f+\bar{T}\left(\cos f+\cos E\right)\right],$$
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\beta}{na}\frac{\bar{N}\cos\left(\omega+f\right)}{1+e\cos f}.$$

Lagrange型(摄动函数R):

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial\lambda},$$
$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=-\frac{\beta}{na^2e}\left[\left(1-\beta\right)\frac{\partial R}{\partial\lambda}+\frac{\partial R}{\partial\varpi}\right],$$
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{na^2\beta}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial\lambda}+\frac{\partial R}{\partial\varpi}\right)\tan\frac{i}{2}+\frac{\partial R}{\partial\Omega}\csc i\right].$$

其中:$\beta=\sqrt{1-e^2}$, $\Gamma=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}$.

常数:

$$\begin{pmatrix} G: & 6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2} \\ \mathrm{AU}: & 1.496\times10^{11}\,\mathrm{m} \\ M_\odot: & 1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg} \\ L_\odot: & 3.845\times10^{26}\,\mathrm{W} \\ c: & 2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \end{pmatrix}$$

正则根数:

$$\begin{pmatrix} \text{Delaunay正则变量:} & l=M \\ L=\sqrt{\mu a}, & \\ G=\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}, & g=\omega \\ H=\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}\cos i, & h=\Omega \end{pmatrix}$$

正则根数:

$$\begin{pmatrix} \text{Poincare正则变量:} & \\ L'=\sqrt{\mu a}, & l'=M+\omega+\Omega \\ G'=\sqrt{\mu a}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right), & g'=-\left(\omega+\Omega\right)=-\varpi \\ H'=\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}\left(1-\cos i\right), & h'=-\Omega \end{pmatrix}$$

请由此处开始答题