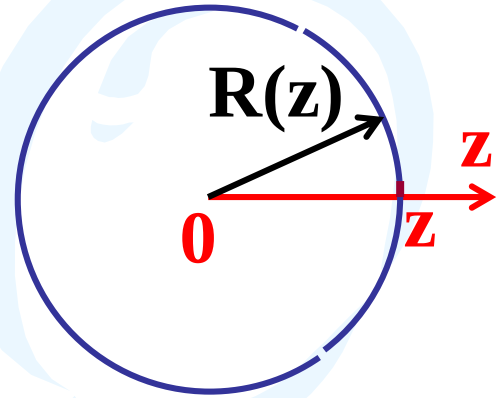
4-4 高斯光束q参数的变换规律 ABCD定律

一、球面波的R参数



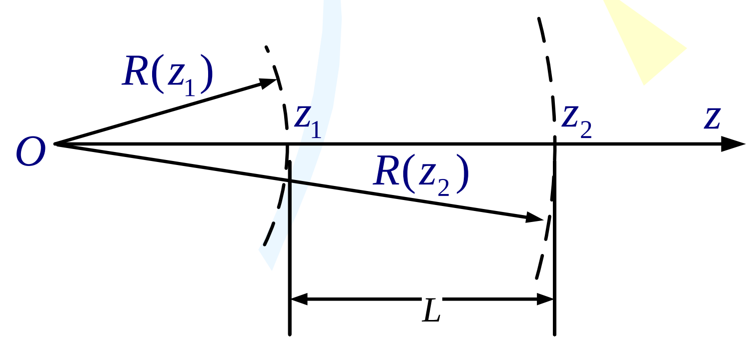
$R(z)$:等相位面曲率半径

1、传播L距离

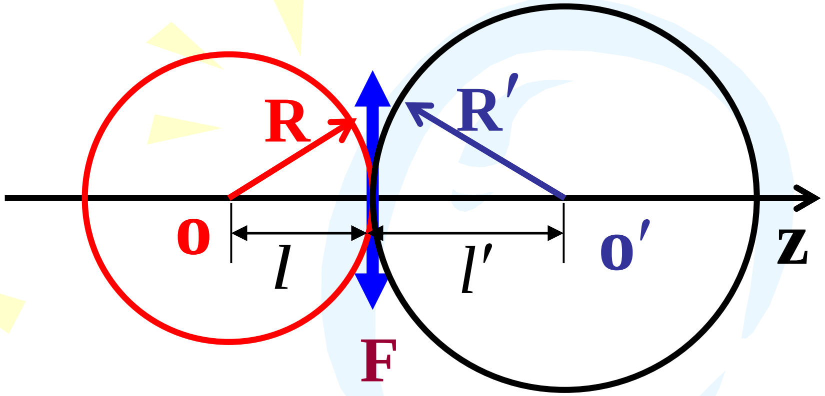
考虑从原点发出的单色球面波，沿z轴方向傍轴传输，从z_1平面传播距离L到达z_2平面，两平面上球面波曲率半径的关系：

$$R \equiv R(z_1) = z_1$$

$$R' \equiv R(z_2) = z_2 = R + L$$



2、通过透镜

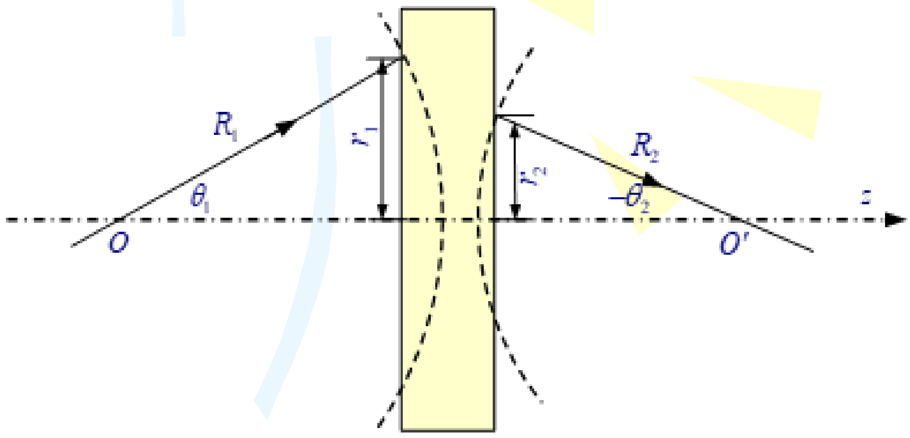


F:透镜焦距(凸透镜为正)

$$\frac{1}{R'}=\frac{1}{R}-\frac{1}{F}=\frac{F-R}{FR} \qquad \therefore R'=\frac{FR}{F-R}$$

(r_1,θ_1)和(r_2,θ_2)分别为入射和出射球面波的一对共轭光线，光学系统的变换矩阵为$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$，则：

$$\begin{pmatrix}r_2\\ \theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1\\ \theta_1\end{pmatrix}$$



$$R_2=\frac{r_2}{\theta_2}=\frac{Ar_1+B\theta_1}{Cr_1+D\theta_1}=\frac{AR_1+B}{CR_1+D}$$

传播L距离的近轴光线传输矩阵

$$R' = R + L = \frac{1\times R + L}{0\times R + 1} = \frac{AR+B}{CR+D}$$

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

薄透镜的近轴光线传输矩阵

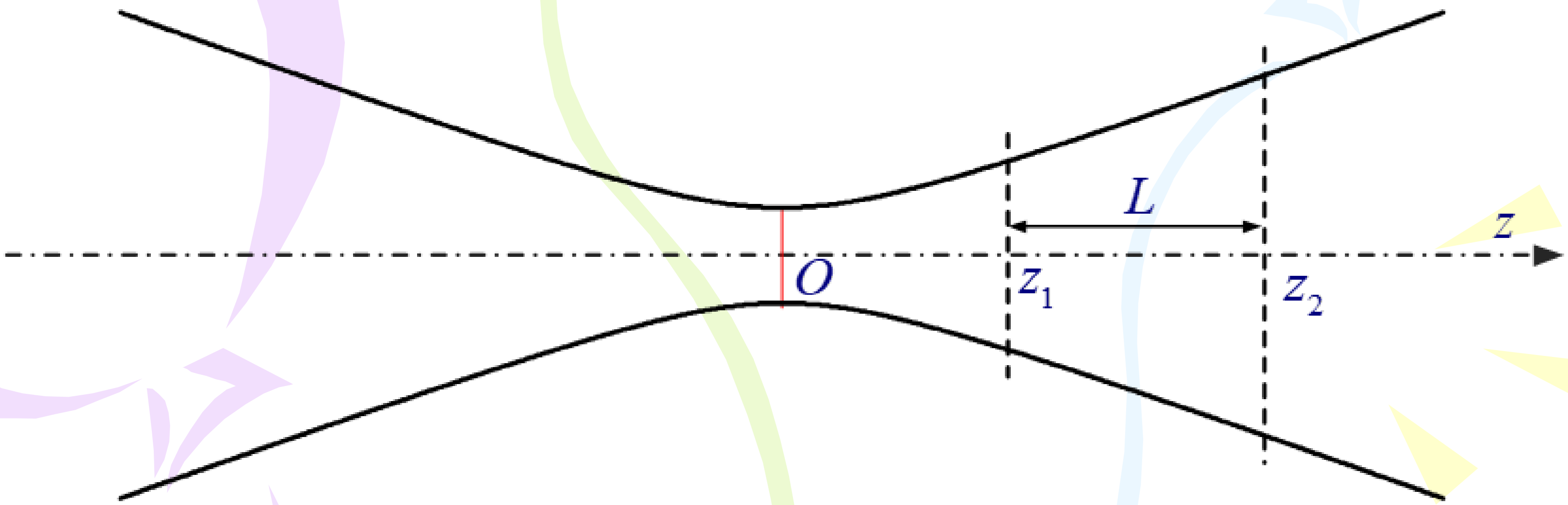
$$\therefore\ R' = \frac{FR}{F-R} = \frac{R}{1-\frac{R}{F}} = \frac{1\times R + 0}{-\frac{1}{F}\times R + 1} = \frac{AR+B}{CR+D}$$

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix}}$$

二、高斯光束q参数的传输规律

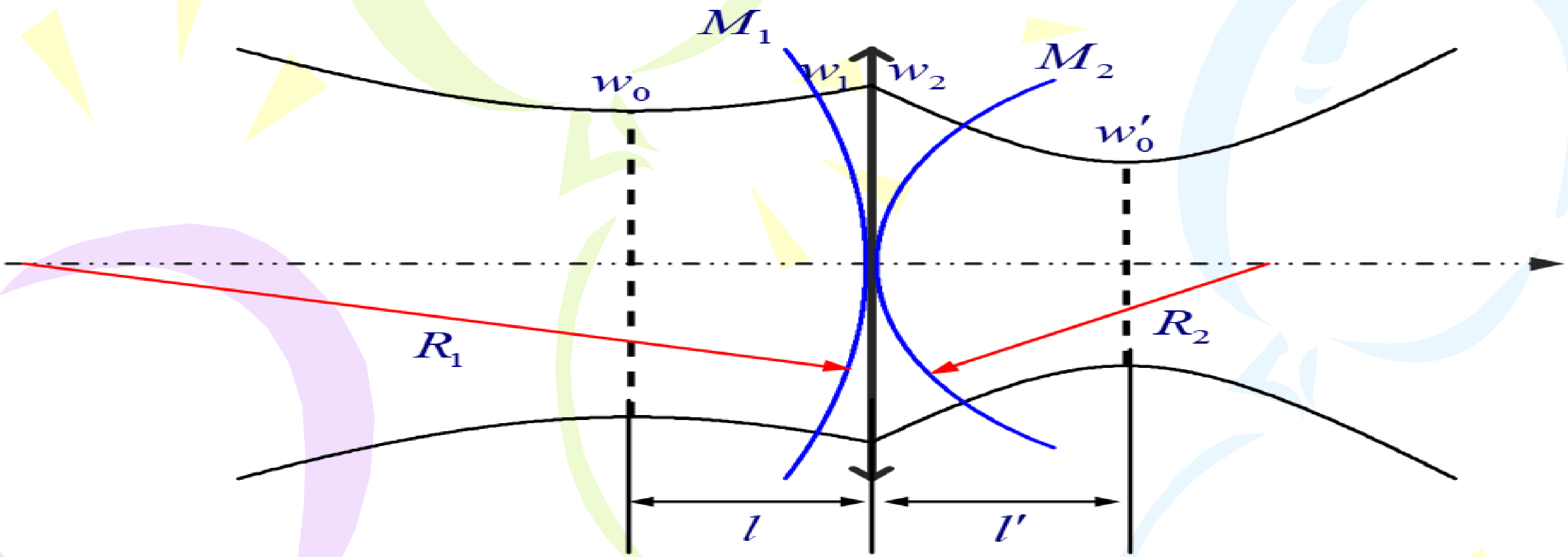
1、传播L距离

高斯光束从z_1平面自由传播距离L到达z_2平面，则



$$\left.\begin{aligned} q &= q(z_1) = z_1 + if \\ q' &= q(z_2) = z_2 + if \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{q' = q + L}$$

2、通过透镜



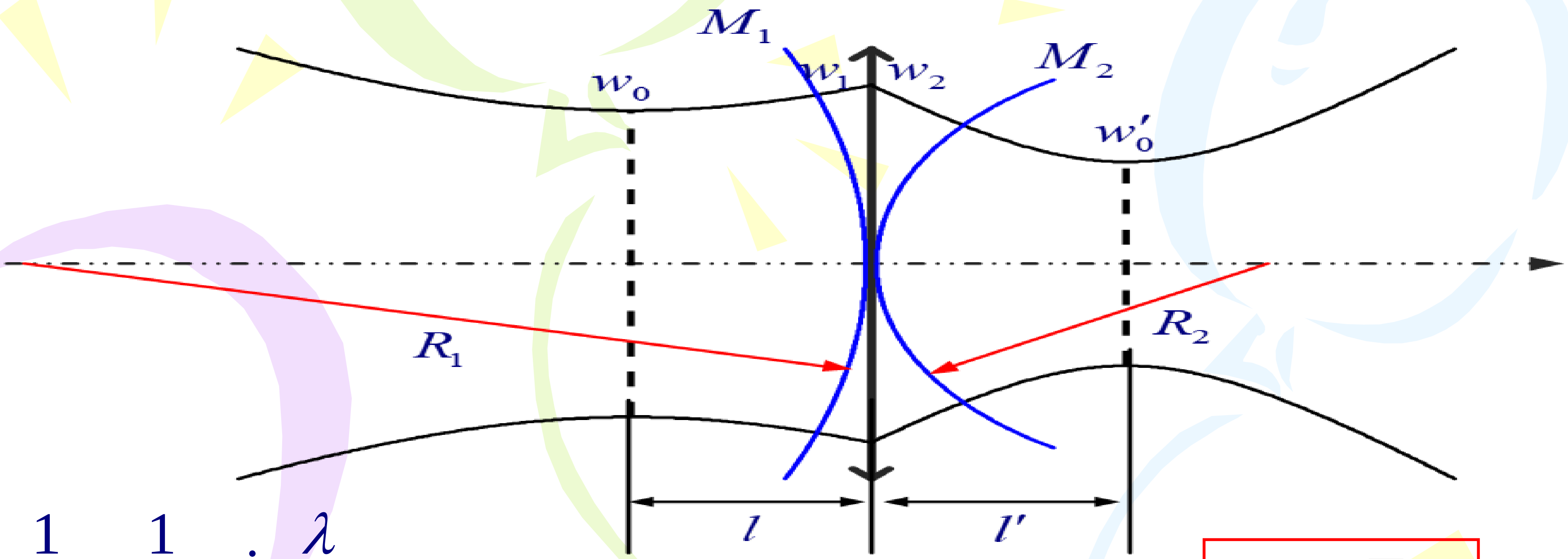
高斯光束的等相位面为球面，根据球面波的传播规律，前表面的球形波面M_1经透镜后变换为另一球形波面M_2；

$$\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_1}-\frac{1}{F}$$

由于透镜很薄，紧贴透镜的两侧等相位面上的光斑大小和光强分布相同；

$$w_2=w_1$$

2、通过透镜



$$\frac{1}{q_1}=\frac{1}{R_1}-i\frac{\lambda}{\pi w_1^2}$$

$$\frac{1}{q_2}=\frac{1}{R_2}-i\frac{\lambda}{\pi w_2^2}$$

$$\boxed{q'=\frac{Fq}{F-q}}$$

$$\boxed{q'=-l'+if'}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{R_2}&=\frac{1}{R_1}-\frac{1}{F}\\ w_2&=w_1\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{1}{q_2}=\frac{1}{R_1}-\frac{1}{F}-i\frac{\lambda}{\pi w_1^2}=\frac{1}{q_1}-\frac{1}{F}$$

4-4 高斯光束q参数的变换规律 ABCD定律

传播L距离的近轴光线传输矩阵

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{L} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q' = q + L = \frac{1\times q + L}{0\times q + 1} = \frac{Aq+B}{Cq+D}$$

薄透镜的近轴光线传输矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix}$$

$$q' = \frac{Fq}{F-q} = \frac{q}{1-\frac{q}{F}} = \frac{1\times q + 0}{-\frac{1}{F}\times q + 1} = \frac{Aq+B}{Cq+D}$$

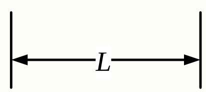
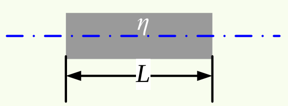
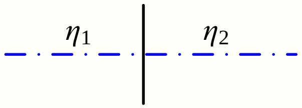
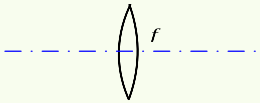
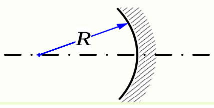
总结：高斯光束ABCD定律

高斯光束通过一般光学系统

$$q' = \frac{Aq+B}{Cq+D}$$

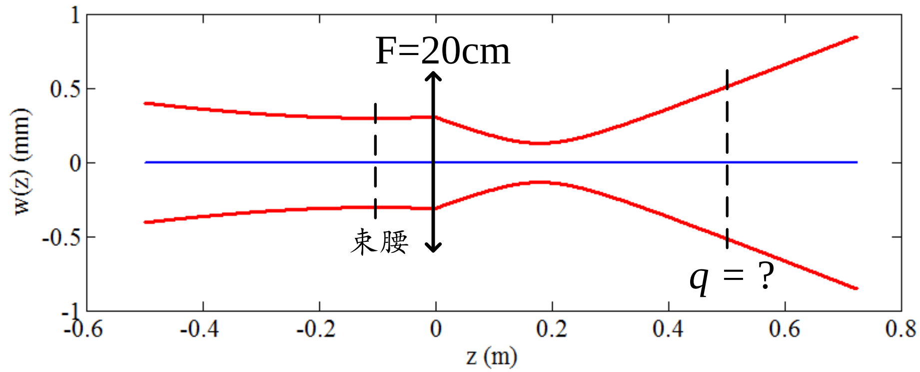
$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$:为该光学系统的光线变换矩阵，这称为高斯光束的ABCD定律

常见光学元件的$ABCD$矩阵

距离为L的自由空间 (折射率η=1)		$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
折射率为η，长为L的均匀介质		$\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{\eta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
界面折射		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\eta_1}{\eta_2} \end{pmatrix}$
薄透镜(焦距为f)		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$
球面反射镜(曲率半径R)		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$

例1：

如图所示，已知高斯光束的腰斑半径w_0=0.3mm，波长λ=632.8nm，左侧束腰距透镜的距离为l_1=10cm，透镜焦距F=20cm，求右侧距离透镜l_2=0.5m处的高斯光束q参数。



解：

左侧高斯光束的共焦参数为：

$$f_1 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{3.14 \times \left(3\times 10^{-4}\right)^2}{632.8\times 10^{-9}} = 0.45\ \text{m}$$

左侧束腰处的q参数为：
$$q_0 = if_1$$

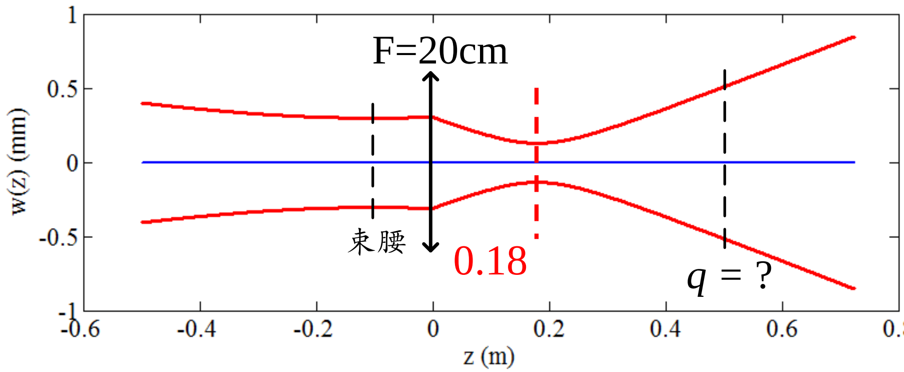
透镜前表面的q参数为：
$$q_1 = q_0 + l_1 = \left(0.1 + 0.45i\right)\ \text{m}$$

透镜后表面的q参数为：

$$q_2 = \frac{Fq_1}{F-q_1} = \frac{0.2\times(0.1+0.45i)}{0.2-(0.1+0.45i)} = -0.18+0.085i$$

透镜右侧距离为$l_2 = 0.5\mathrm{m}$处的q参数为：

$$q_3 = q_2 + l_2 = (0.32+0.085i)\ \mathrm{m}$$

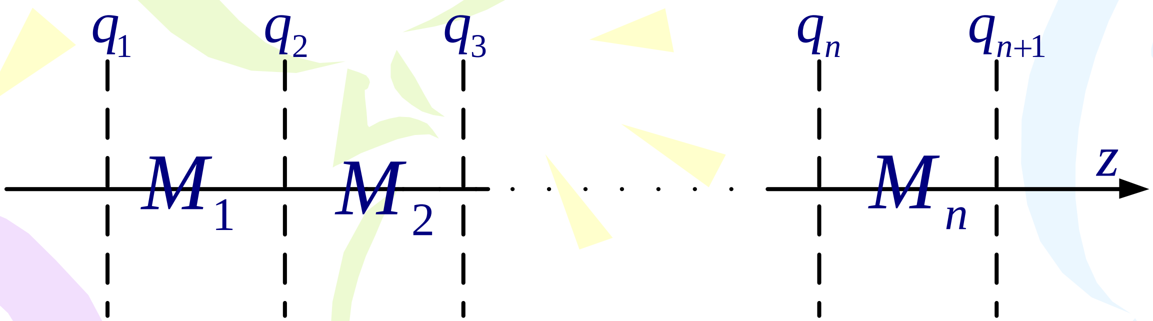


$$\boxed{q' = -l' + if'}$$

$$f' = \frac{\pi(\omega_0')^2}{\lambda} = \frac{3.14\times(\omega_0')^2}{632.8\times10^{-9}} = 0.085\ \mathrm{m}$$

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{0.085\times632.8\times10^{-9}}{3.14}} = 1.3\times10^{-4}\ \mathrm{m}$$

高斯光束连续通过多个光学元件



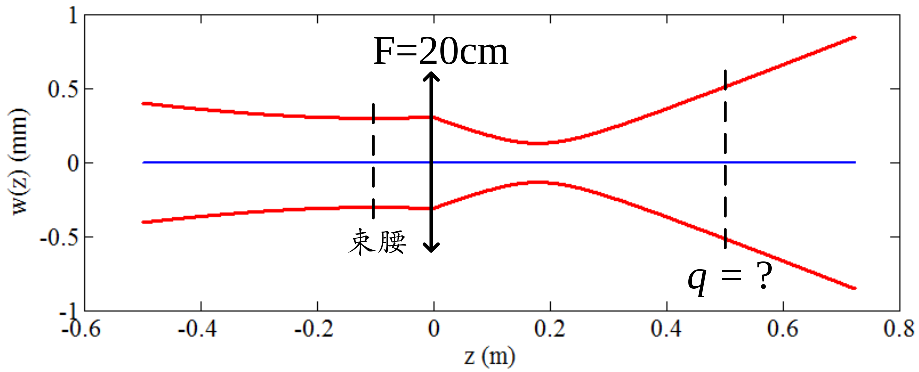
若某截面上q参数为q_1的高斯光束，依次通过光线变换矩阵为$M_1, M_2, \cdots, M_n$的n个光学元件后，q参数为q_{n+1}，

定义：

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \equiv M_n M_{n-1} \cdots M_1$$

则：

$$q_{n+1} = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$



另解： 透镜左侧束腰处： $q_1 = if = 0.45i\ (m)$

依次通过的光学元件的关系变换矩阵为：

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/0.2 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = M_3 M_2 M_1 = \begin{pmatrix} -1.5 & 0.35 \\ -5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

输出光束的q参数为： $$q_4 = \frac{-1.5q_1 + 0.35}{-5q_1 + 0.5} = (0.32 + 0.085i)\ \mathrm{m}$$

例2：某高斯光束共焦参数为f=1m，将焦距F=1m的凸透镜置於其腰右方*l*=2m处，求经透镜变换后的像光束的焦参数f′及其腰距透镜的距离*l*′。

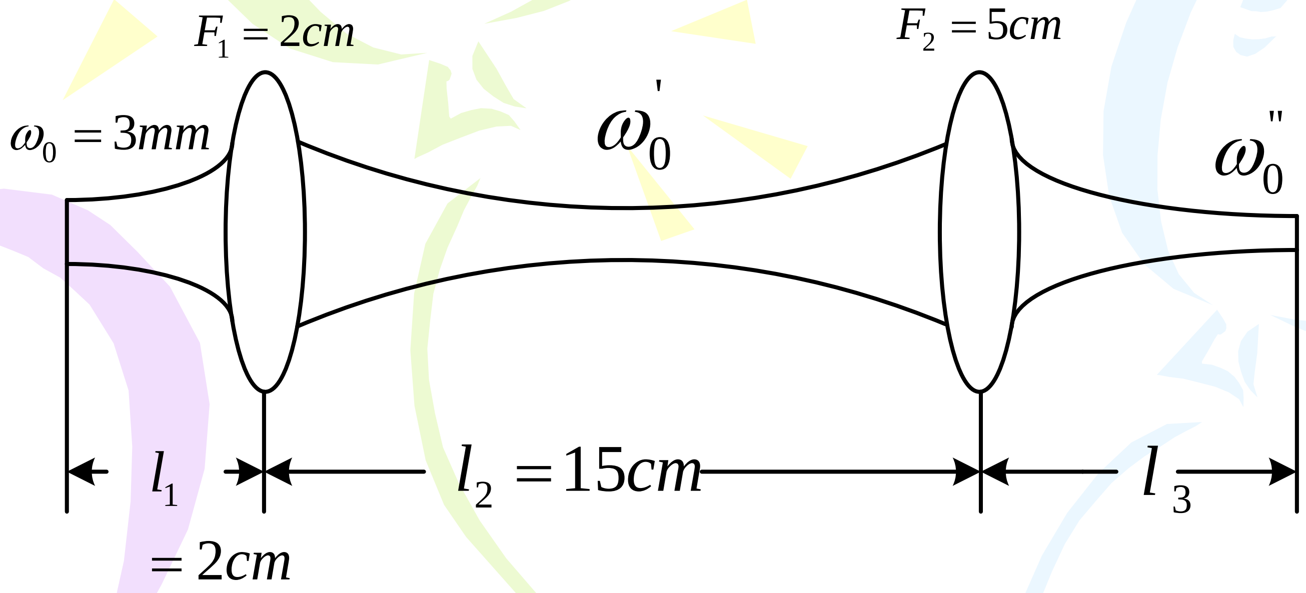
解： $q=2+i$

$$q'=\frac{Fq}{F-q}=\frac{2+i}{1-2-i}=\frac{(2+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}=\frac{-2-i+2i-1}{1+1}=\frac{-3+i}{2}$$
$$=-1.5+0.5i$$

$$\begin{cases} q=l+if \\ q'=-l'+if' \\ q'=\dfrac{Fq}{F-q} \end{cases}$$

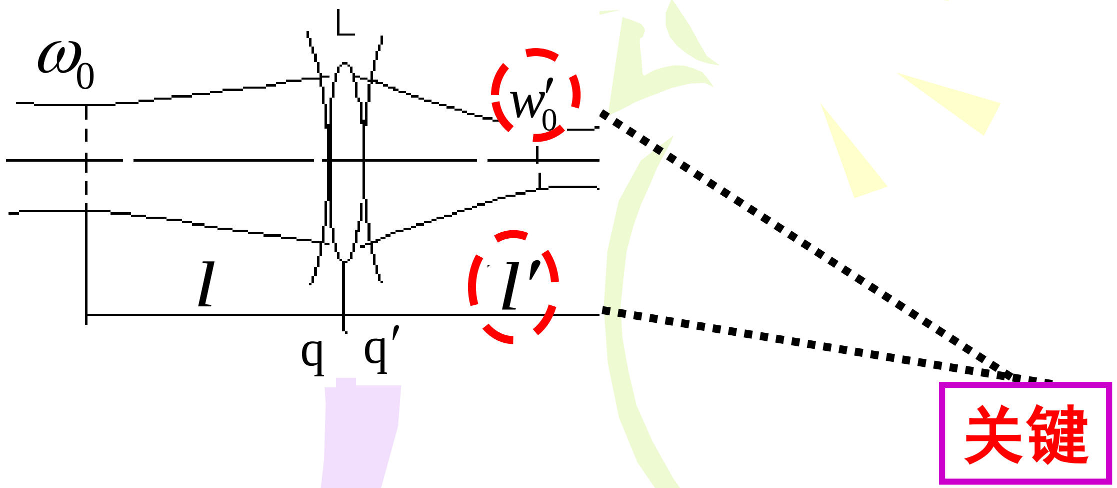
$l'=1.5m \quad f'=0.5m$

作业： 如图光学系统，λ=10.6μm，求l_3和 ω_0''



$\omega_0'' = 14.06\mu m$ $\quad$ $l_3 = 8.12cm$

一、透镜对高斯光束的变换公式



（已知l、f、F, 求l'、f ′）

已知： w_0, l, F

求：通过透镜后，新光腰 w_0' **和**l'

$$q = l + if$$

$$\boxed{q' = \frac{Fq}{F - q}}$$

$$q' = \frac{F(l+if)}{(F-l)-if} = \frac{F(l+if)[(F-l)+if]}{[(F-l)-if][(F-l)+if]} = \frac{[l(F-l)-f^2]+\mathrm{i}fF}{(F-l)^2+f^2}F$$

$$q' = -l' + if'$$

$$\therefore l' = -\frac{l(F-l)-f^2}{(F-l)^2+f^2}F = \frac{l(l-F)+f^2}{(l-F)^2+f^2}F = F + \frac{(l-F)F^2}{(l-F)^2+f^2}$$

$$\therefore f' = \frac{F^2}{(l-F)^2+f^2}f$$

$$\therefore w_0' = \frac{F}{\sqrt{(l-F)^2+f^2}}w_0$$

$$\begin{cases} w_0' = \dfrac{F}{\sqrt{(l-F)^2+f^2}}w_0 \\ f' = \dfrac{F^2}{(l-F)^2+f^2}f \\ l' = \dfrac{l(l-F)+f^2}{(l-F)^2+f^2}F \end{cases}$$

$$w_0' = \frac{F}{\sqrt{(l-F)^2 + f^2}} w_0$$

注意：*l*=*F* 情况，

$$l' = \frac{l(l-F) + f^2}{(l-F)^2 + f^2} F$$

此时： $\omega_0' = \frac{F}{f}\omega_0$ $\boxed{l' = F}$

即当物高斯光束束腰处在透镜物方焦面上时，像高斯光束束腰处在透镜像方焦面上，与几何光学不同之处

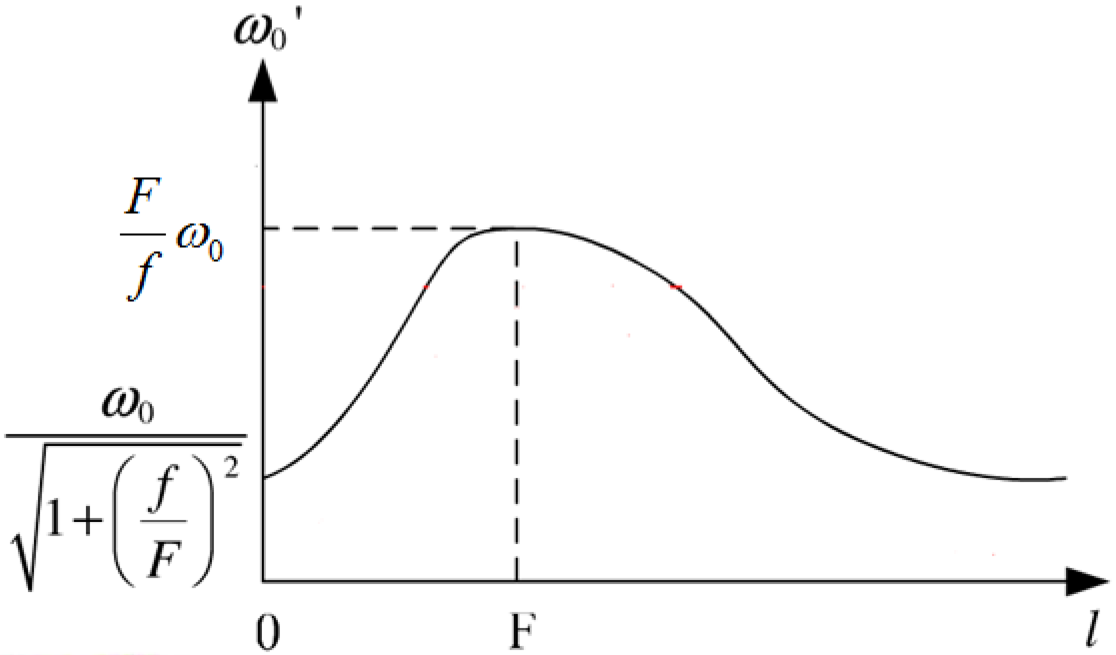
作业：

CO_2激光器输出光 λ=10.6μm， $\boldsymbol{\omega_0}$**=3mm，用一*F*=2cm的凸透镜聚焦，求欲得到** ω_0'=20μm **时透镜应放在什么位置。**

二、高斯光束的聚焦

聚焦：经过光学系统（透镜）使高斯光束的腰斑变小

$$w_0' = \frac{F}{\sqrt{(l-F)^2 + f^2}} w_0$$



1. F一定时，ω_0'随l的变化情况

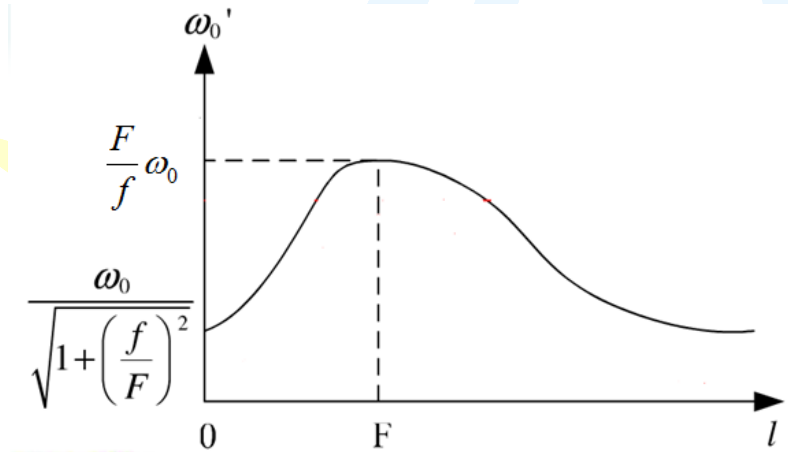
（1）$l<F$情况

① ω_0'随l减小而减小；

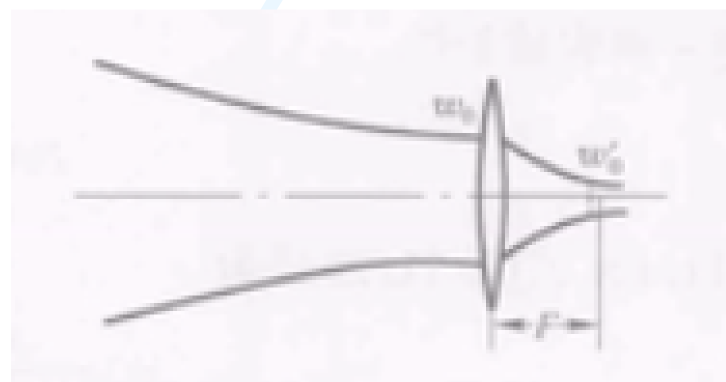
②当$l=0$时，ω_0'最小，此时：

$$\omega_0' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{F}\right)^2}} < \omega_0$$

$$l' = \frac{F}{1+\left(\frac{F}{f}\right)^2} < F$$



可见，当$l=0$时，ω_0'总比ω_0小，因而不论透镜焦距F多大，它都有一定的聚焦作用，并且像方腰斑位置处在前焦点以内。

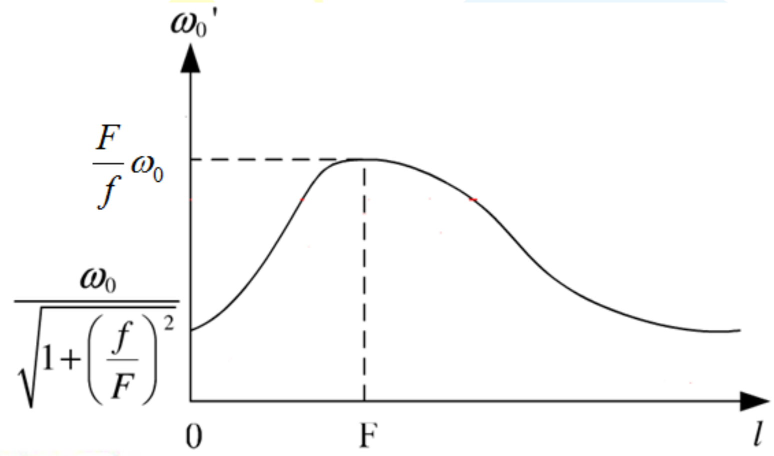


同时，F越小，ω_0'越小

（2）*l*=*F* 情况，此时：

$$\omega_0' = \frac{F}{f}\omega_0$$

$$l' = F$$



像高斯光束束腰处在透镜像方焦面上

当$F<f$（短焦距）时，透镜才有聚焦作用。

（3）*l*>*F* 情况，此时：

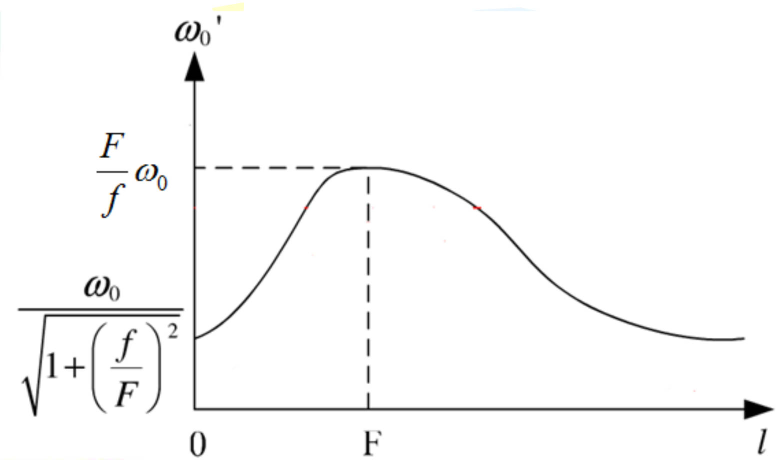
① ω_0'随 *l* 增大而减小；

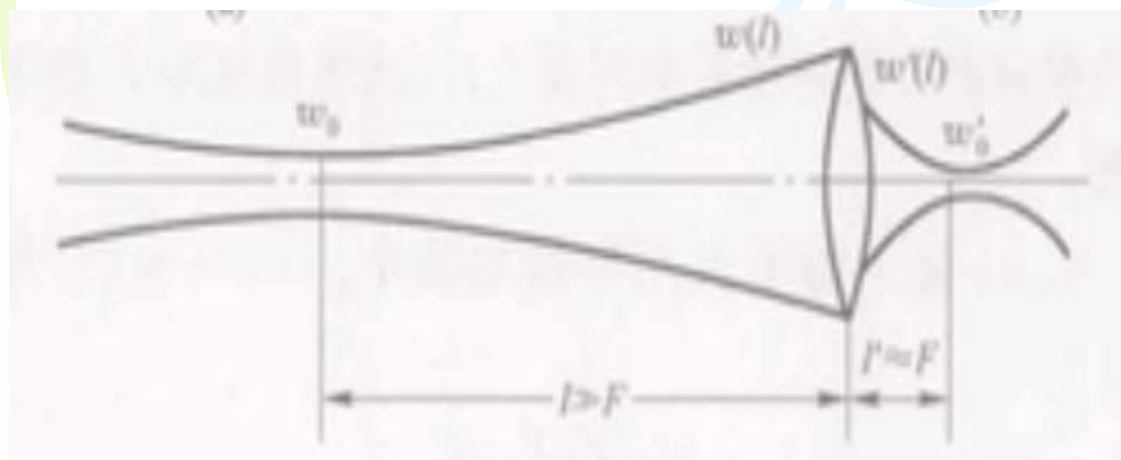
② 当 $l >> F$ 时，有：

$$\omega_0' \approx \frac{\omega_0 F}{\sqrt{l^2+f^2}} = \frac{\omega_0^2 F}{f\omega_0\sqrt{1+(\frac{l}{f})^2}} = \frac{\omega_0^2 F}{f\omega(l)}$$

$$= \frac{\omega_0^2 F}{\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\omega(l)} = \frac{\lambda F}{\pi\omega(l)}$$

$$l' \approx F + \frac{lF^2}{l^2+f^2} \approx F$$





式中$\omega(l)$为入射光束在透镜处的光斑尺寸，
在$l>>F$ 情况下，焦斑半径与波长与透镜焦距成正比，而与透镜处的光斑尺寸成反比。

2. l一定时，ω_0'随F 的变化情况

$$w_0' = \frac{F}{\sqrt{(l-F)^2 + f^2}} w_0$$

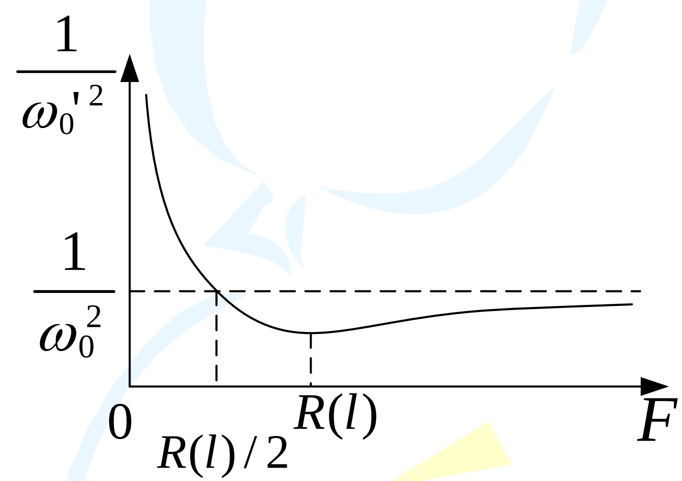
令式中$\omega_0 = \omega_0'$

$$F^2 = (l-F)^2 + f^2$$
$$= l^2 + F^2 - 2lF + f^2$$

$$\therefore \quad F = \frac{1}{2}\left(l + \frac{f^2}{l}\right) = \frac{1}{2}R(l)$$

$R(l)$为透镜处波阵面的曲率半径,

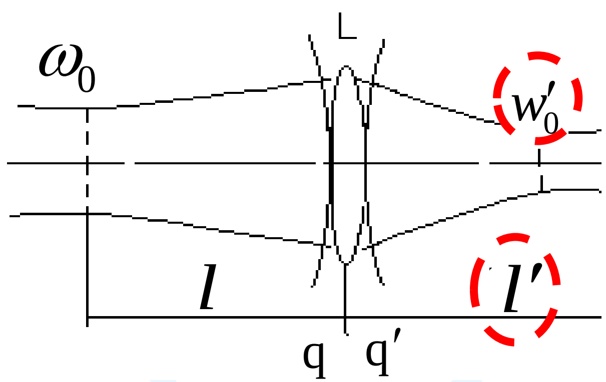
当$F < \frac{1}{2}R(l)$时，$\frac{1}{\omega_0'^2} > \frac{1}{\omega_0^2}$，即$\omega_0' < \omega_0$



当l一定时，透镜的焦距只有小于光束在透镜处波阵面曲率半径的一半时，透镜对高斯光束才有聚焦作用。

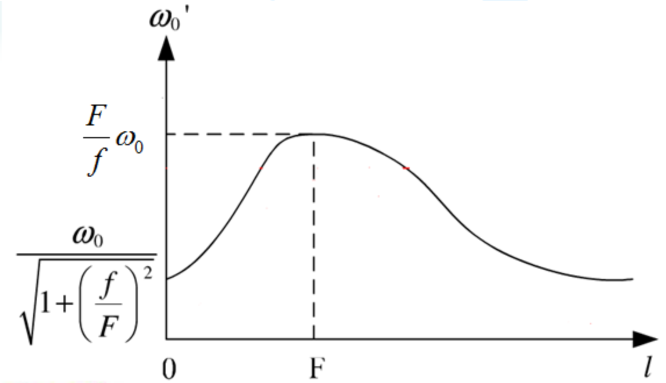
当 $F=\frac{1}{2}R(l)=\frac{1}{2}(l+\frac{f^2}{l})$ 时，

$$l'=l\ ,\quad \omega_0'=\omega_0$$



即：物、像光束实现自再现变化。

3、高斯光束的聚焦方法



$$l=0\text{时}\ \omega_0'=\frac{\omega_0}{\sqrt{1+(\frac{f}{F})^2}}$$

$$l=F\text{时}\ \omega_0'=\frac{F}{f}\omega_0 \qquad l\gg F\text{时}\ \omega_0'\approx\frac{\lambda F}{\pi\omega(l)}$$

（1）使用小焦距透镜（F<f）；

（2）将透镜置于腰处（*l*=0）或距腰足够远处（*l* >>f）。

例1： 波长为3.14μm的高斯光束，腰半径1mm，使用焦距F=0.1m的透镜对它进行聚焦，分别将腰置于透镜处、距离透镜 2 m处，求聚焦后的腰半径及其位置。

解：

$$f=\frac{\pi w_0^2}{\lambda}=\frac{3.14\times10^{-6}}{3.14\times10^{-6}}=1m$$

（1） $l=0 \quad q=i$

$$q'=\frac{Fq}{F-q}=\frac{0.1i}{0.1-i}=\frac{0.1i(0.1+i)}{(0.1-i)(0.1+i)}=-0.099+0.0099i$$

$$l'=0.099m$$

$$w_0'=\sqrt{\frac{\lambda f'}{\pi}}=\sqrt{\frac{3.14\times10^{-6}\times0.0099}{3.14}}=0.0995mm$$

（2） $l=2 \quad q=2+i$

$$q'=\frac{Fq}{F-q}=\frac{0.1(2+i)}{0.1-2-i}=\frac{0.1(2+i)(-1.9+i)}{(-1.9-i)(-1.9+i)}=-0.104+0.00217i$$

$$l'=0.104m \qquad w_0'=\sqrt{\frac{\lambda f'}{\pi}}=\sqrt{\frac{3.14\times10^{-6}\times0.00217}{3.14}}=0.0466mm$$

例2： 波长为3.14μm的高斯光束,腰半径1mm，分别将一个透镜置于腰处、距离腰 2 m处，问使用多大焦距的透镜便可对它有聚焦作用？

解：

$$f=\frac{\pi w_0^2}{\lambda}=\frac{3.14\times10^{-6}}{3.14\times10^{-6}}=1m$$

（1）$l=0$ $\quad \frac{1}{2}R(l)=\infty$

使用多大焦距的透镜都可以有聚焦作用

（2）$l=2$ m

$$\frac{1}{2}R(l)=\frac{l^2+f^2}{2l}=\frac{4+1}{4}=1.25m$$

使用焦距小于1.25m的透镜可以有聚焦作用。

三、高斯光束的准直

准直：利用光学系统改善光束的方向性（压缩束散角）

1. 单透镜对高斯光束发散角的影响

θ-物高斯光束发散角，θ’-像高斯光束发散角。

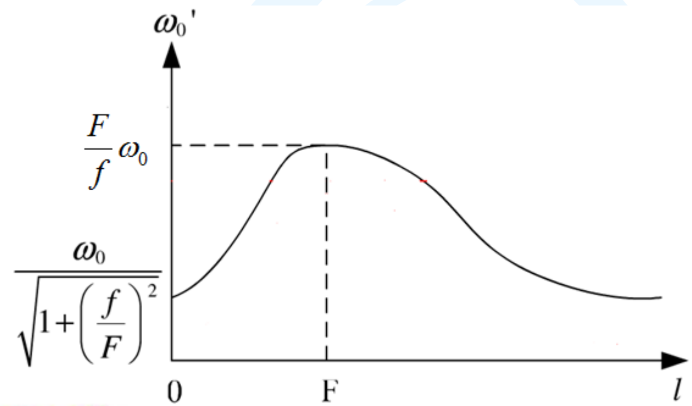
$$\left.\begin{aligned}\theta &= \frac{2\lambda}{\pi\omega_0} \\ \theta' &= \frac{2\lambda}{\pi\omega'_0}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\omega_0}{\omega_0'}$$

若$\omega_0' < \omega_0$(聚焦情况），$\theta' > \theta -$发散角更大了；

只有$\omega_0' > \omega_0$(扩束情况），才有$\theta' < \theta -$准直。

$$\frac{\theta'}{\theta}=\frac{\omega_0}{\omega_0'} \longrightarrow w_0'\uparrow \rightarrow \theta_0'\downarrow$$

$\therefore$ **要使 w_0' 尽量大**



高斯光束通过薄透镜

当 $l = F$ 时，$w_0' = \lambda F/\pi w_0$ 最大

此时：

$$\boxed{\frac{\theta_0'}{\theta_0}=\frac{w_0}{w'_0}=\frac{\pi w_0^2}{\lambda F}=\frac{f}{F}}$$

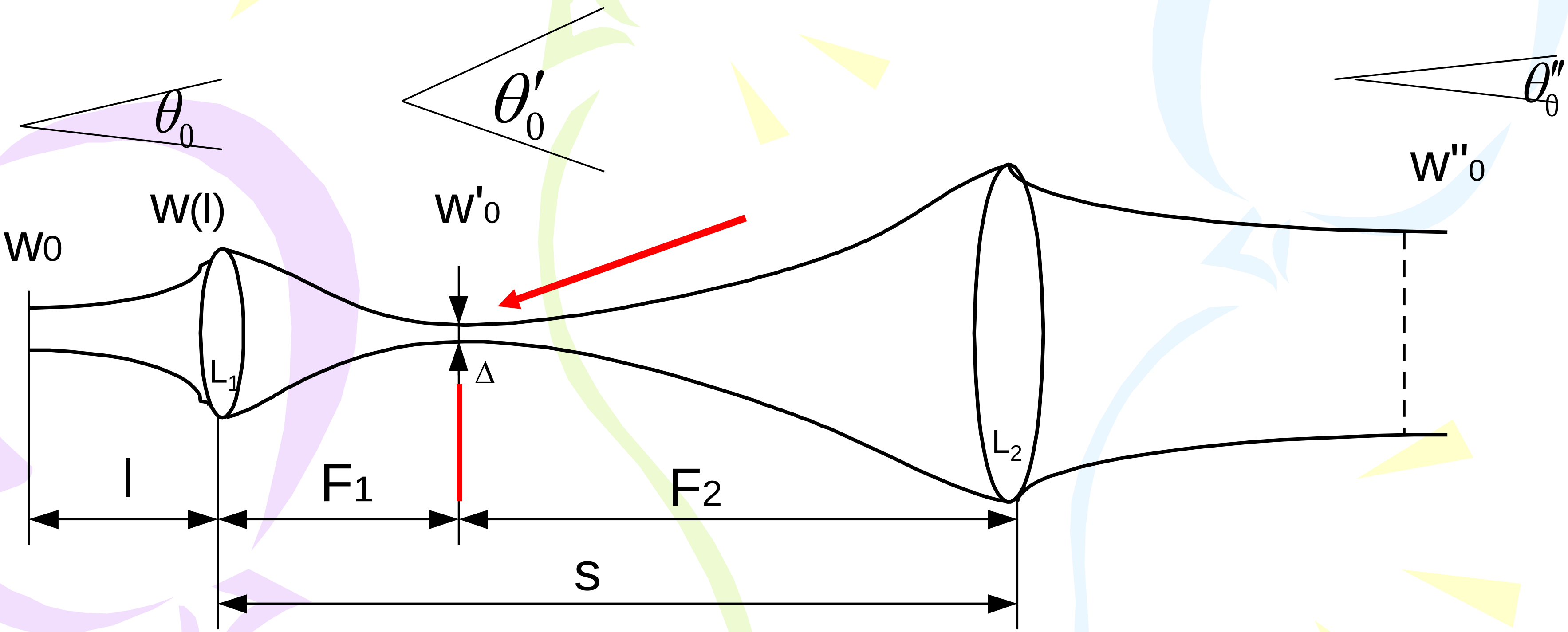
$\therefore$ 1) F↑，长焦距透镜利于准直　2）w_0 尽可能小

注意: (1) w_0 有限，无论 l，F 取何值都不可能使 $w_0' \rightarrow \infty$，说明用单透镜不能实现完全准直。

（2）一个启示：如果预先用一个短焦距的透镜将高斯光束聚焦，得到一个小的腰斑，然后再用一个长焦距透镜来改善其方向性，就可以得到很好的准直效果。

2. 利用倒装望远镜准直

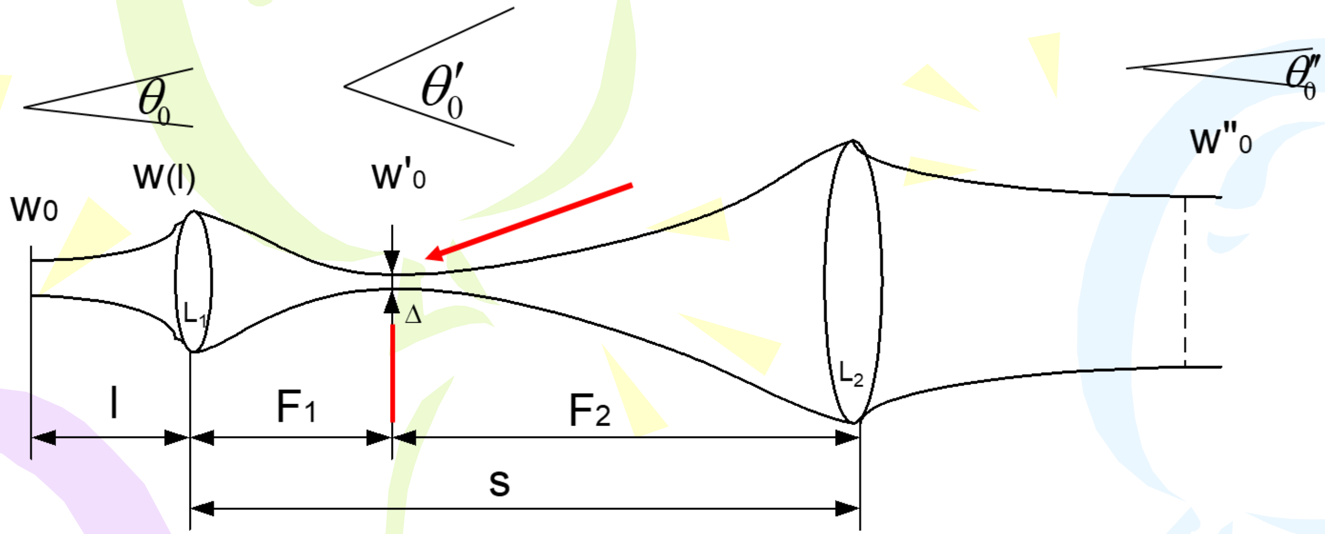
短焦距透镜聚焦，$l >> F_1$ 使 $\omega_0' \downarrow$， 长焦距透镜 F_2 准直



$$w'_0 \approx \frac{\lambda}{\pi w(l)} F_1, \qquad l' = F_1$$

得到最小 w'_0 及其位置

$$\frac{\theta_0'}{\theta_0} = \frac{w_0}{w'_0} = \frac{\pi w_0 w(l)}{\lambda F_1}$$



当 w'_0 位置在 F_2 焦点上时， $w_0''=\lambda F/\pi w_0'$ 最大

$S \approx F_1 + F_2$ **组成一倒装望远镜**

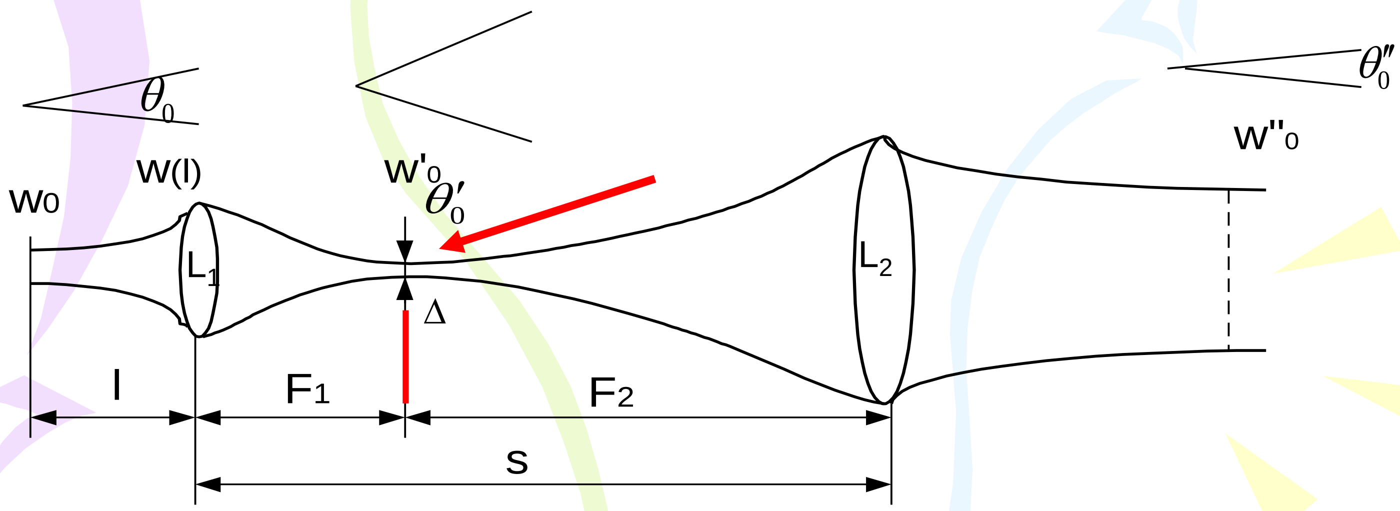
$$\boxed{\frac{\theta''_0}{\theta'_0}=\frac{w'_0}{w''_0}=\frac{\pi w'^2_0}{\lambda F_2}}$$

$$\boxed{\frac{\theta''_0}{\theta_0}=\frac{\theta''_0}{\theta'_0}\cdot\frac{\theta'_0}{\theta_0}=\frac{w'_0}{w''_0}\cdot\frac{w_0}{w'_0}=\frac{w_0}{w''_0}=\frac{F_1}{F_2}\frac{w_0}{w(l)}=\frac{1}{M}\frac{w_0}{w(l)}}$$

望远镜放大倍率M $M=\dfrac{F_2}{F_1}>1$

定义：准直倍率(发散角压缩比)

$$M'=\frac{\theta_0}{\theta_0''}=\frac{F_2}{F_1}\cdot\frac{w(l)}{w_0}=\frac{F_2}{F_1}\sqrt{1+\left(\frac{l}{f}\right)^2}=M\sqrt{1+\left(\frac{\lambda l}{\pi w_0^2}\right)^2}$$



$l \gg F_1$

光腰几乎落在焦平面

例1： 波长为3.14μm的高斯光束，腰半径1mm，使用焦距F_1=0.1m和F_2=1m的两个透镜所组成的倒望远镜系统对它进行扩束准直，分别将腰置于透镜处、距离透镜 2 m处，求扩束后的腰半径。

解：

$$M' = \frac{\theta_0}{\theta_0''} = \frac{F_2}{F_1}\sqrt{1+\left(\frac{l}{f}\right)^2}$$

（1）l=0

$$M = \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{0.1} = 10 \qquad w_0'' = Mw_0 = 10mm$$

（2）l= 2 m

$$f = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{3.14\times10^{-6}}{3.14\times10^{-6}} = 1m$$

$$M = \frac{F_2}{F_1}\sqrt{1+\left(\frac{l}{f}\right)^2} = \frac{1}{0.1}\sqrt{1+\left(\frac{2}{1}\right)^2} = 10\times2.236 = 22.36$$

$$w_0'' = Mw_0 = 22.36mm$$

复习提要：

1、激光器分类及名称：

2、麦克斯韦方程推导波动方程和亥姆霍兹方程

3、写出菲涅耳-基尔霍夫积分公式，并解释每一项的物理意义

4、激光的纵横模

5、谐振腔的损耗有哪些？光子寿命，Q值，线宽等的定义和物理意义

6、常见光线变换矩阵及其应用

7、谐振腔稳定性的判断

8、激光光束质量相关概念及其含义

9、菲涅耳基尔霍夫衍射积分公式及其各部分发物理含义

10、自再现模的定义

11、高阶高斯光束节线位置的求解

12、高斯光束参数的求解

13、等价共焦腔的求解

14、基模高斯光束特征参数和复参数的求解

15、高斯光束ABCD定律及其应用

16、高斯光束的聚焦与准直