《计算机图形学》5 月报告

211240045，杨镇源，211240045@smail.nju.edu.cn

2024 年 5 月 21 日

目录

1　综述

1.1　2024 年 3 月

- 完成绘制直线（DDA 算法）
- 完成绘制直线（Bresenham 算法）
- 实现 gui 重置画布
- 实现 gui 保存画布

1.2　2024 年 4 月

- 完成绘制多边形（DDA 算法）
- 完成绘制多边形（Bresenham 算法）
- 完成绘制椭圆（中点圆生成算法）
- 完成绘制曲线（Bezier 算法）
- 完成绘制曲线（B-spline 算法）
- 完成图元平移
- 完成图元旋转
- 完成图元缩放
- 实现 gui 设置画笔颜色

1.3　2024 年 5 月

- 完成图元（线段）裁减（Cohen-Sutherland 算法）
- 完成图元（线段）裁减（Liang-Barsky 算法）
- 完成命令行界面（CLI）程序

2　图元绘制算法介绍

2.1　绘制直线

2.1.1　DDA 算法

算法原理： DDA 算法的核心思想是通过计算斜率来确定每个像素点的位置，从而形成一条连续的直线。通过坐标轴上以单位间隔取样（$\Delta x = 1$ 或 $\Delta y = 1$），因为取单位间隔，所以显见对应的 $\Delta y = k, -k$ 或 $\Delta x = \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$（记直线为 $y = kx + b$）。当起始点在左侧取值，起始点在右侧取负值。

算法改进： 可利用直线构成的连贯性，通过将增量 k 和 $\frac{1}{k}$ 分离成整数和小数部分从而使所有的计算都简化为整数操作来改善 DDA 算法的性能。

2.1.2　Bresenham 算法

算法原理: 通过坐标轴上以单位间隔取样($\Delta x = 1$ 或 $\Delta y = 1$),不失一般性取 $0 \leq k < 1$。假设 (x_k, y_k) 为已经确定的像素坐标, 那么下一个像素坐标为 $(x_k + 1, y_k)$ 或 $(x_k + 1, y_k + 1)$,

确定 y 轴坐标选择哪一个的依据是判断直线和 $x = x_k + 1$ 的交点的 y 轴坐标与 $y_k + 1, y_k$ 哪个的绝对差值更小。若与 y_k 绝对差值更小，则下一个点选择 $(x_k + 1, y_k)$；若与 $y_k + 1$ 绝对差值更小，则下一个点选择 $(x_k + 1, y_k + 1)$。

算法改进： 为进一步提高算法效率，可以利用线段本身的对称性。用 Bresenham 算法产生起点一侧的半条线段，至于终点一侧的半条线段，可以看作以终点为起点线段的生成。起点一侧的线段像素坐标在 x 或 y 方向每前进一个坐标单位，终点一侧的线段像素坐标就在 x 或 y 方向后退一个坐标单位。

2.1.3 方法对比

DDA 算法的优点在于适用面广，实现简单。但是它存在一个问题，在计算斜率时会产生精度损失，从而使得绘制出来的直线可能出现明显的锯齿状。因此，在对线条的精度有较高要求的情况下，可以采用 Bresenham 算法。

Bresenham 算法通过整数计算来绘制线条，避免了 DDA 算法中的精度损失问题。因此，Bresenham 算法具有更高的绘制速度和较好的像素级别的控制，可以在需要绘制直线的情况下带来更好的性能和画质。

总的来说，Bresenham 算法比 DDA 算法绘制直线更准确高效。

2.2 绘制多边形

绘制多边形的方法基于绘制直线的算法，对于多边形的每条边，获得其两端点后利用直线绘制算法进行绘制即可。

2.3 绘制椭圆

2.3.1 中心椭圆生成算法

算法原理： 算法类似于 Bresenham 算法，不失一般性，考虑中心在原点处的椭圆，研究第一象限。将第一象限中椭圆切线绝对值等于 1 所对应的切点记作临界点 P，P 上方的点 $\frac{dy}{dx} < 1$，P 下方的点 $\frac{dy}{dx} > 1$，由此可利用 Bresenham 算法解决选点问题。根据参数方程定义椭圆函数为：

$$f_{ellipse}(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$$

在 P 上方的点，取 x 方向单位步长，再通过决策函数判断真实值与两候选像素之间哪个位置更近，更新对应的 y 值；在 P 下方的点，取 y 方向单位步长，再通过决策函数判断真实值与两候选像素之间哪个位置更近，更新对应的 x 值。又因为椭圆四个象限是互相对称的，可以通过改变对应的符号补全其余象限，最后结合中心点的实际坐标即可计算出待绘制椭圆的点坐标。

2.4 绘制曲线

2.4.1 Bezier 算法

算法原理： Bezier 算法是由多边形控制，逼近多边形的一种曲线。其做法是通过 Bezier 基函数来得到绘制点的坐标。Bezier 基函数的原型比较复杂，但我了解到 Bezier 曲线基函

数已被证明可简化为伯恩斯坦基函数，其形式为：

$$C_n^i t^i (1-t)^i$$

有了基函数，自然可以用参数 t，取某一个步长，来近似绘制曲线。下面以 4 个点控制的曲线为例，介绍算法执行步骤，其中算法接受参数中的顶点序列应当是有序的：

1. 对两两相邻点求中点，得到三个中点
2. 对得到的三个中点再次求中点，得到两个中点
3. 对得到的两个中点再次求中点，得到一个中点
4. 将得到的最接近曲线的 7 个点根据最后计算得到的中点对半分为每方 4 个，即：$P_0^0, P_0^1, P_0^2, P_0^3$ 和 $P_0^3, P_1^2, P_2^1, P_3^0$
5. 分别对这两组 4 个点调用上述算法，递归直到误差在可接受范围内

2.4.2 B-spline 算法

算法原理： 由于 Bezier 曲线调整的时候有“牵一发而动全身”的缺点，因此引入 B-spline（B 样条）曲线。B 样条曲线同样拥有自己的基函数，这些基函数在定义曲线时起到关键作用。与贝塞尔曲线不同，B 样条曲线的基函数具有局部影响的特点，即当调整曲线上的一个控制点时，只有曲线的一小部分会受到影响，而不是整个曲线。这种局部影响的特性是通过基函数的支撑区间 (support interval) 概念来实现的。

支撑区间指的是基函数值非零的区间。对于三次贝塞尔曲线，其四个基函数的支撑区间都是整个定义域 [0,1]，这意味着任何一个控制点的调整都会对曲线的整体形状产生影响。而 B 样条曲线的基函数则具有更短的支撑区间，这允许控制点的局部调整，从而提高了曲线的可控性和灵活性。

B 样条曲线的基函数产生使用递推形式，即 de-BoorCox 递推定义：

$$\begin{cases} N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1, & u_i < u < u_{i+1} \\ 0, & o.t. \end{cases} \\ N_{i,k}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i-1}} N_{i+1,k-1}(u) \end{cases}$$

$$\textbf{规定 } \tfrac{0}{0} = 0$$

其中 k 是阶数，u 是参数。

均匀 B 样条基函数是指当节点向量按照等间隔排列，即节点向量为 $0, 1, 2, ..., n+k$ 时，其中 n 是控制点的数量，而 k 是基函数的阶。这种均匀分布的节点向量保证了 B 样条曲线的基函数在整个定义域内具有相同的支撑区间，从而使得曲线在各个部分的局部控制能力相同。相对地，准均匀 B 样条基函数则是指节点向量的前 k 个和后 k 个元素相等，而中间的元素则均匀分布。这种分布方式允许基函数在曲线的某些部分具有更大的控制力，而在其他部分则相对较小。

针对实验要求使用均匀 B 样条函数的情况，为了优化性能，我们可以选择一个简化的节点向量，即仅包含从 0 到 $n+k$ 的连续整数序列。在实际的编程实现中，代码可以按照如下形式编写：

```
Function DeBoorCox(i, k, u):
    if k == 1 then
        if i ≤ u ∧ u < i + 1 then
            return 1
        end
        else
            return 0
        end
    else
        return (u−i)/(k−1) × DeBoorCox(i, k - 1, u) + (i+k−u)/(k−1) ×
         DeBoorCox(i + 1, k - 1, u)
    end
end
```

Algorithm 1: De Boor-Cox Algorithm

2.4.3 方法对比

- **控制点影响范围**：
  - 贝塞尔曲线：任一控制点的移动都会影响整条曲线。
  - B 样条曲线：控制点主要影响曲线的局部区域。
- **曲线表达式**：
  - 贝塞尔曲线：$\vec{P}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{p}_i B_{i,n}(t)$.
  - B 样条曲线：$\vec{P}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{p}_i B_{i,d}(t)$.
- **参数 t 的取值范围**：
  - 贝塞尔曲线：t 的取值通常为 $[0,1]$.
  - B 样条曲线：t 的取值范围更广，由节点向量定义。
- **局部性与连续性**：
  - 贝塞尔曲线：不具备局部性，但连续性容易满足。
  - B 样条曲线：具有局部性，可以构造出高阶连续的曲线。
- **几何属性**：
  - 贝塞尔曲线：几何属性简单，易于理解。
  - B 样条曲线：具有变差缩减性、凸包性、仿射不变性等复杂几何属性。
- **应用场景**：
  - 贝塞尔曲线：适用于简单图形设计，如字体设计。
  - B 样条曲线：适用于复杂曲面建模，如 CAD/CAM 系统。
- **计算复杂度**：
  - 贝塞尔曲线：计算简单，适合实时应用。

  - B 样条曲线：计算复杂，提供更高的设计灵活性。

- **节点向量 (Knot Vector)**：
  - 贝塞尔曲线：不使用节点向量。
  - B 样条曲线：使用节点向量来定义曲线的局部控制范围。

3 图元变换算法介绍

3.1 图元平移

3.1.1 算法原理

不妨设 dx 为水平方向平移量，dy 为垂直方向平移量。

x, y 为原始坐标，x', y' 为平移后坐标，则：

$$\begin{cases} x' = x + dx \\ y' = y + dy \end{cases}$$

3.1.2 算法实现

需要实现或改动的函数有：

- start_translate 函数
- mousePressEvent 函数
- mouseMoveEvent 函数
- mouseReleaseEvent 函数
- MainWindow 类中连接槽函数，实现 translate_action 函数

在 start_translate 函数将当前系统状态调整为 translate；在 mousePressEvent 函数中确定平移对象并记录初始位置；在 mouseMoveEvent 函数中随着鼠标指针移动，调用 alg.translate 函数更新平移对象的点集坐标，然后刷新界面。由此，即可实现平移功能。

3.2 图元旋转

3.2.1 算法原理

不妨设 x_r, y_r 为旋转中心点坐标，θ 为旋转角度。

x, y 为原始坐标，x', y' 为旋转后坐标，则：

$$\begin{cases} x' = x_r + (x - x_r)\cos\theta - (y - y_r)\sin\theta \\ y' = y_r + (x - x_r)\sin\theta + (y - y_r)\cos\theta \end{cases}$$

3.2.2 算法实现

需要实现或改动的函数有：

- start_rotate 函数
- mousePressEvent 函数
- mouseMoveEvent 函数
- mouseReleaseEvent 函数
- MainWindow 类中连接槽函数，实现 rotate_action 函数

在 start_rotate 函数将当前系统状态调整为 rotate；在 mousePressEvent 函数中第一次点击确定旋转中心，第二次点击确定旋转起始位置；在 mouseMoveEvent 函数中随着鼠标指针移动，计算顺时针旋转角度参数 r，调用 alg.rotate 函数更新旋转对象的点集坐标，然后刷新界面。由此，即可实现旋转功能。

3.3 图元缩放

3.3.1 算法原理

不妨设 x_f, y_f 为缩放中心点坐标，s 为缩放倍数。

x, y 为原始坐标，x', y' 为缩放后坐标，则：

$$\begin{cases} x' = x \cdot s + x_f \cdot (1 - s) \\ y' = y \cdot s + y_f \cdot (1 - s) \end{cases}$$

3.3.2 算法实现

需要实现或改动的函数有：

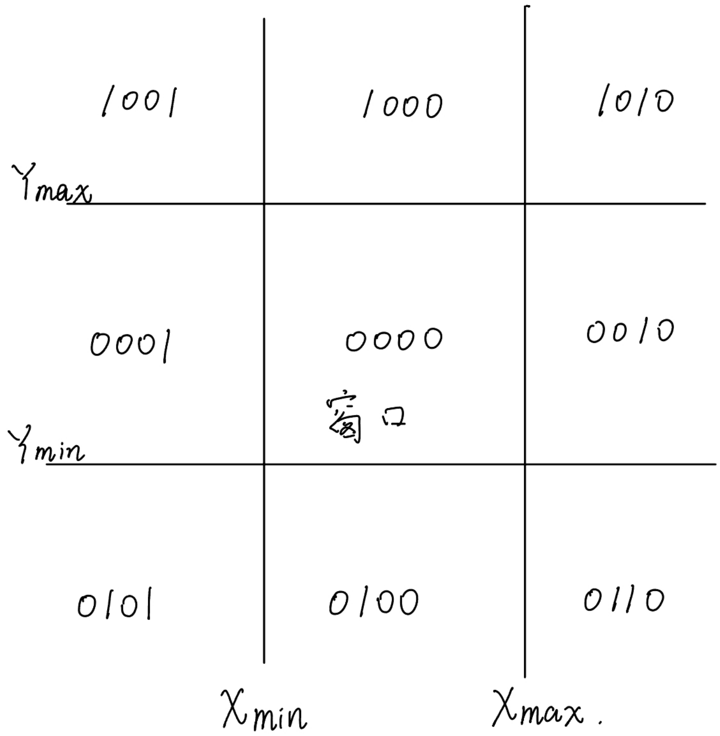
- start_scale 函数
- mousePressEvent 函数
- mouseMoveEvent 函数
- mouseReleaseEvent 函数
- MainWindow 类中连接槽函数，实现 scale_action 函数

在 start_scale 函数将当前系统状态调整为 scale；在 mousePressEvent 函数中第一次点击确定缩放中心，第二次点击确定缩放起始位置；在 mouseMoveEvent 函数中随着鼠标指针移动，计算缩放倍率参数 s，调用 alg.scale 函数更新缩放对象的点集坐标，然后刷新界面。由此，即可实现缩放功能。

3.4 图元裁剪

3.4.1 算法原理——Cohen-Sutherland 算法

编码算法将整个画布分成九个区域，如下图所示：



根据线段端点所在位置，给每个端点一个四位二进制码（称为区域码）。四位区域码的 4 位从左到右以此表示为上、下、右、左。区域码的任何位赋值为 1 代表端点落在相应的区域中，否则为 0。

据区域编码规则可知，在确定区域码每位的值时，可通过比较端点坐标值 (x, y) 和裁剪边界来确定区域码各位的值：

如果 $x < x_{min}$，表示该点在裁剪窗口左边界的左方，则第 1 位置 1, 否则置 0；

如果 $x > x_{max}$，表示该点在裁剪窗口右边界的右方，则第 2 位置 1, 否则置 0；

如果 $y < y_{min}$，表示该点在裁剪窗口下边界的下方，则第 3 位置 1, 否则置 0；

如果 $y > y_{max}$，表示该点在裁剪窗口上边界的上方，则第 4 位置 1, 否则置 0。

根据线段和裁剪窗口的关系，可分三种情况进行处理：

线段完全在裁剪窗口之内，两个端点的区域码都为 0000，则该线段完全在裁剪窗口内；

线段完全在裁剪窗口之外，两个端点的区域码相与的结果不为 0000，则该线段完全在裁剪窗口之外；

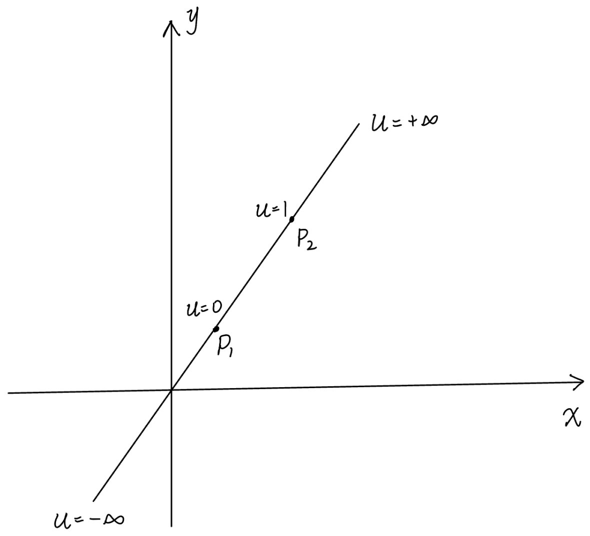
其他情况下，显见属于一半落在窗口内一半落在窗口外，线段将被裁剪，需要进行求交运算。首先对线段外端点（落在窗口外的点）与一条裁剪边界比较来确定需要裁剪多少线段；然后，将线段的剩下部分与其他裁剪边界对比，直到该直线完全落在窗口内或者被舍弃。实际算法实现只有在检测到区域码的某位为 1 时，才把线段和对应裁剪窗口进行求交运算。

3.4.2 算法原理——Liang-Barsky 算法

Liang-Barsky 算法有两个主要思想：用参数方程表示直线；将待裁剪直线看作一有方向的线。

用参数方程表示直线

设待裁剪线段为 P_1P_2，其中 $P_1=(x_1,y_1),P_2=(x_2,y_2)$，用参数 u 表示如下直线：



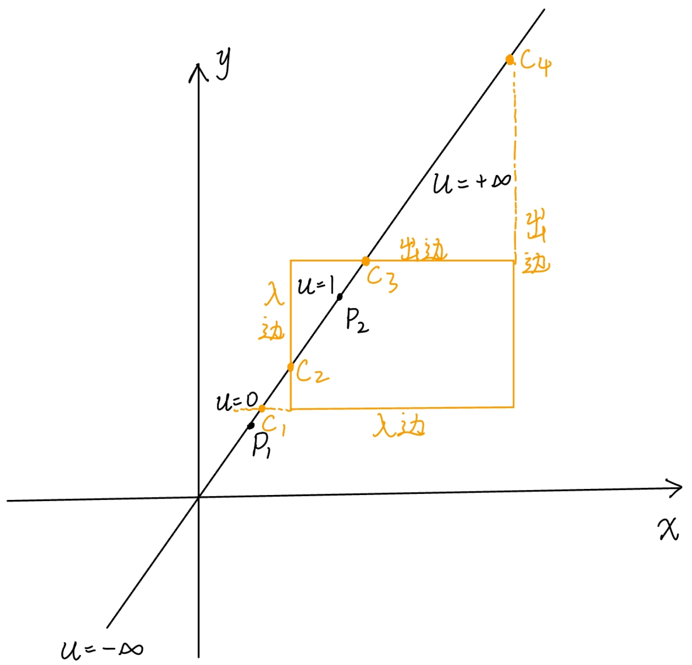
$$\begin{cases} x = x_1 + u(x_2 - x_1) = x_1 + u\Delta x \quad 0 \le u \le 1 \\ y = y_1 + u(y_2 - y_1) = y_1 + u\Delta y \quad 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

当 $u=0$ 时，$x=x_1,y=y_1$，也就是 P_1；当 $u=1$ 时，$x=x_2,y=y_2$，也就是 P_2；当 $u=0.5$ 时，为 P_1P_2 中点。

将待裁剪直线看作一有方向的线

根据 u 的取值，可以确定所需裁剪的线段的多少，那么 u 如何取值?

我们将裁剪窗口的四个边分为入边和出边两类，其中入边是从裁剪窗口之外进入到裁剪窗口之内方向的边，出边是从裁剪窗口之内延伸到裁剪窗口之外的边。待裁剪线段和裁剪窗口必定会有四个交点(包括与裁剪窗口延长线的交点)分别设四个交点分别为 c_1,c_2,c_3,c_4。设待裁剪直线为 P_1P_2。则有下图：



显然裁剪得到的目标线段应该是 c_2 和 P_2 所夹线段，所以 u 的选取需要从 c_2 和 P_2 所对应的 u_1, u_2 入手，有以下关系：

$u_1 = max(P_1, c_1, c_2)$，u_1 是两个入边和 P_1 对应的 u 值的最大值；$u_2 = min(P_2, c_3, c_4)$，u_2 是两个出边和 P_2 对应 u 的最小值；且 $u_1 < u_2$。

因此问题转化为求出 c_1, c_2, c_3, c_4 所对应的 u 值，同时确定哪两条边是入边，哪两条边是出边。

对于第一个问题，结合上述等式组，考虑裁剪窗口的上边界为 y_{max}，下边界为 y_{min}，左边界为 x_{min}，右边界为 x_{max}，有：

$$\begin{cases} x_{min} \leq x_1 + u\Delta x \leq x_{max} \\ y_{min} \leq y_1 + u\Delta y \leq y_{max} \end{cases}$$

于是当以下等式中某一条满足时，u 所对应的值为裁剪直线和四个边界直线的交点。

$$\begin{cases} x_1 + u\Delta x = x_{min} \\ x_1 + u\Delta x = x_{max} \\ y_1 + y\Delta y = y_{min} \\ y_1 + u\Delta y = y_{max} \end{cases}$$

对于第二个问题，考虑上述不等式的一般情况：

$$
\begin{cases}
u(-\Delta x) \le x_1 - x_{min} \\
u\Delta x \le x_{max} - x_1 \\
u(-\Delta y) \le y_1 - y_{min} \\
u\Delta y \le y_{max} - y_1
\end{cases}
$$

可归纳为 $up_k \le q_k, k \in \{1,2,3,4\}$，当 $p_k < 0$ 时，线段从裁剪边界延长线的外部延伸到内部，即对应入边；当 $p_k > 0$ 时，线段从裁剪边界延长线的内部延伸到外部，即对应出边。同时当 $p_k = 0$ 时，若 $q_k < 0$，则线段完全在边界外；若 $q_k > 0$，则线段完全在边界内。

3.4.3 算法实现

需要实现或改动的函数有：

- start_clip 函数
- mousePressEvent 函数
- mouseMoveEvent 函数
- mouseReleaseEvent 函数
- MainWindow 类中连接槽函数，实现 clip_action 函数

在 start_clip 函数将当前系统状态调整为 clip；在 mousePressEvent 函数中第一次点击确定裁剪窗口对角线的起始位置；在 mouseMoveEvent 函数中随着鼠标指针移动，实时更新裁剪窗口对角线另一端点的位置，然后调用 alg.clip 函数更新待裁剪线段的端点坐标，然后刷新界面。由此，即可实现裁剪功能。

4 用户交互功能介绍

4.1 gui 重置画布

实现 reset_canvas_action 函数即可：

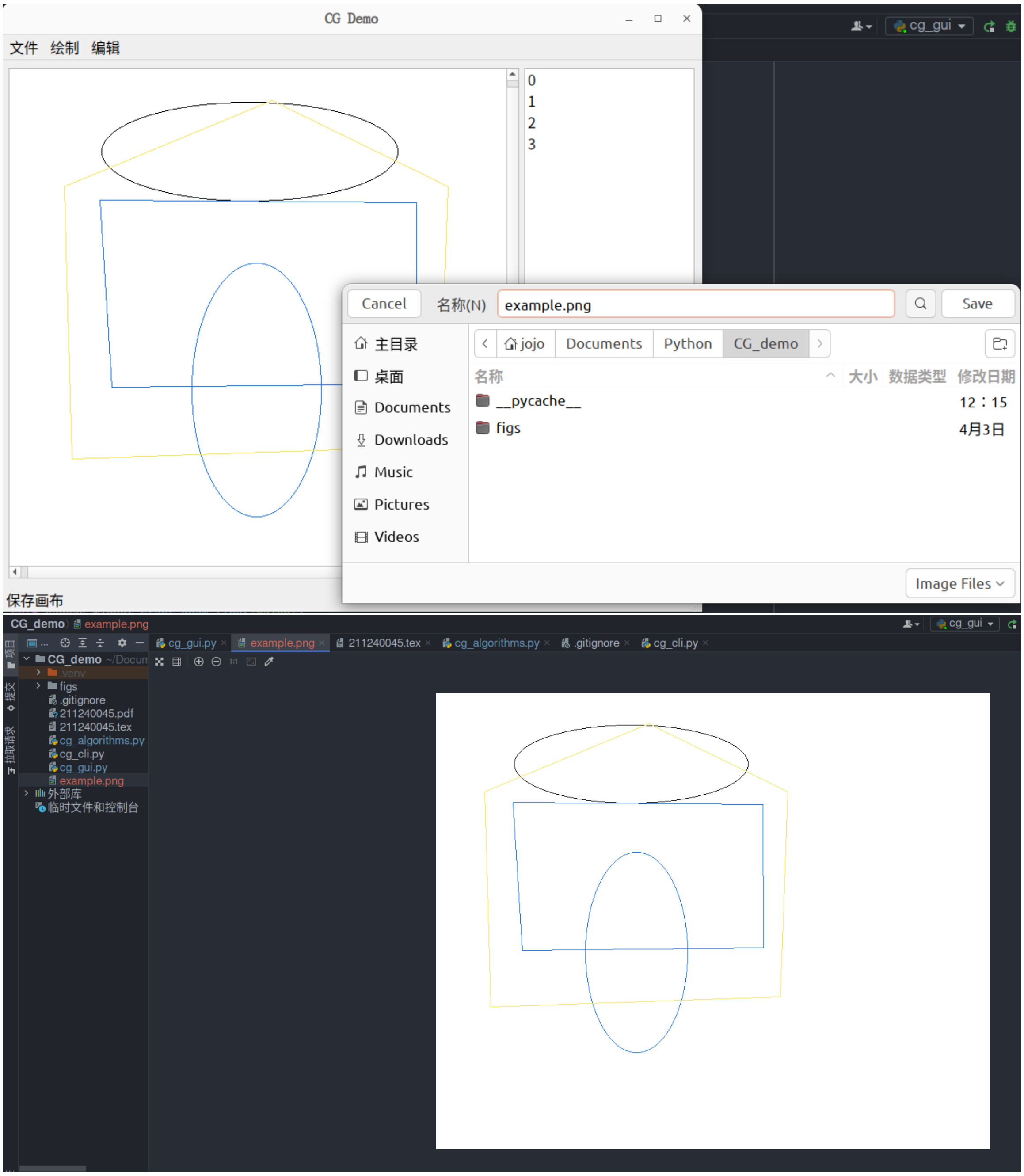
- 将所有画好的图形都删掉，并且将各参数重置为初始值
- 通过 QDialog 获取并记录新设置的宽和高
- 将画布的宽和高设置为 Dialog 中得到的宽和高

4.2 gui 保存画布

添加 save_canvas_act 信号，实现 save_canvas_action 槽函数，并将其连接即可：

- 通过 QFileDialog 创建一个文件对话框对象，用于选择保存文件的路径和设置文件名
- 通过 getSaveFileName 获取并记录设置的文件名，并且限定文件类型为 jpg、png 和 bmp 格式
- 使用 Pixmap 对象，存储绘制的图像内容

4.2.1 实现效果



4.3 gui 设置画笔颜色

1. 首先实现 set_pen_action 函数：

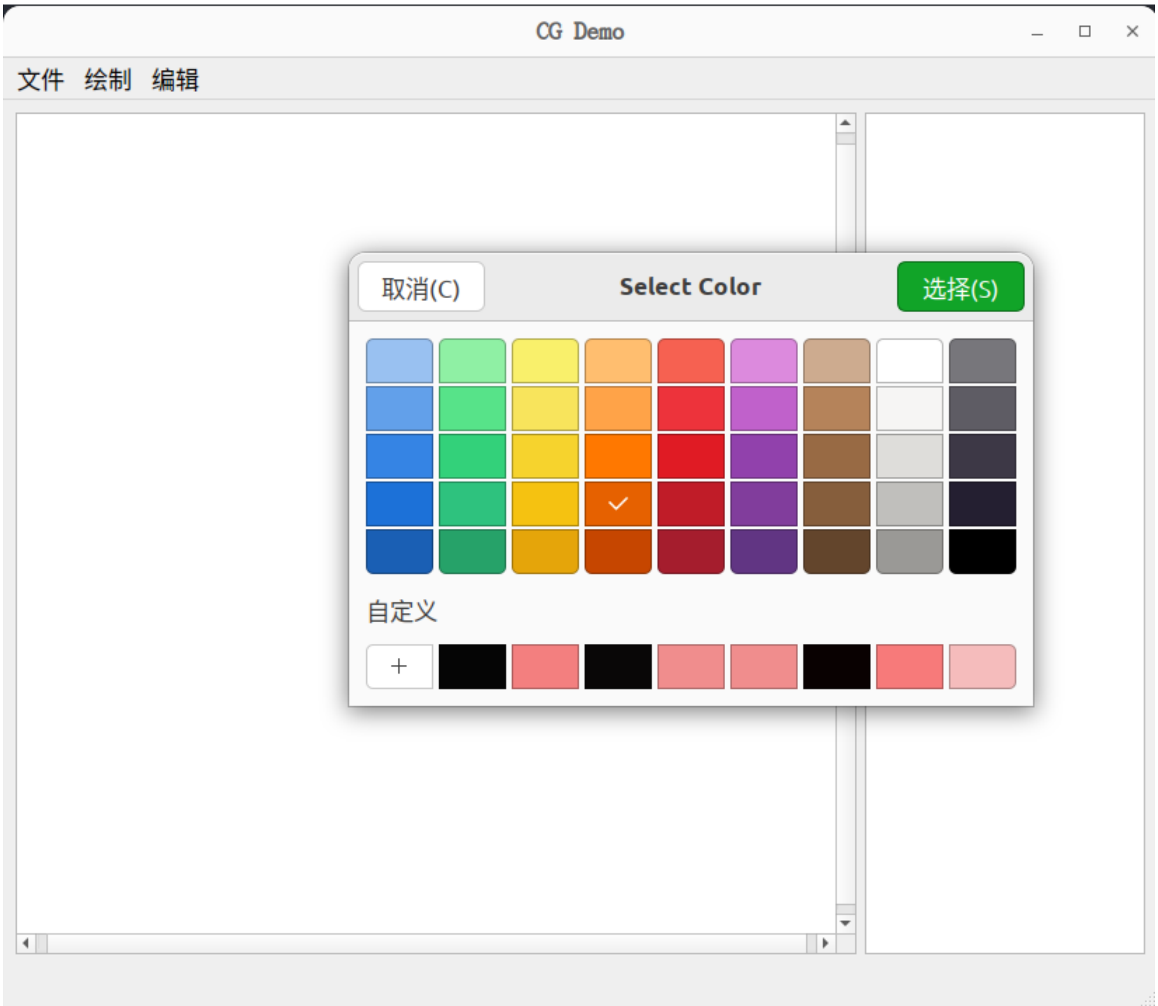
• 调用 QColorDialog 类中的 getColor 函数获得新的颜色值

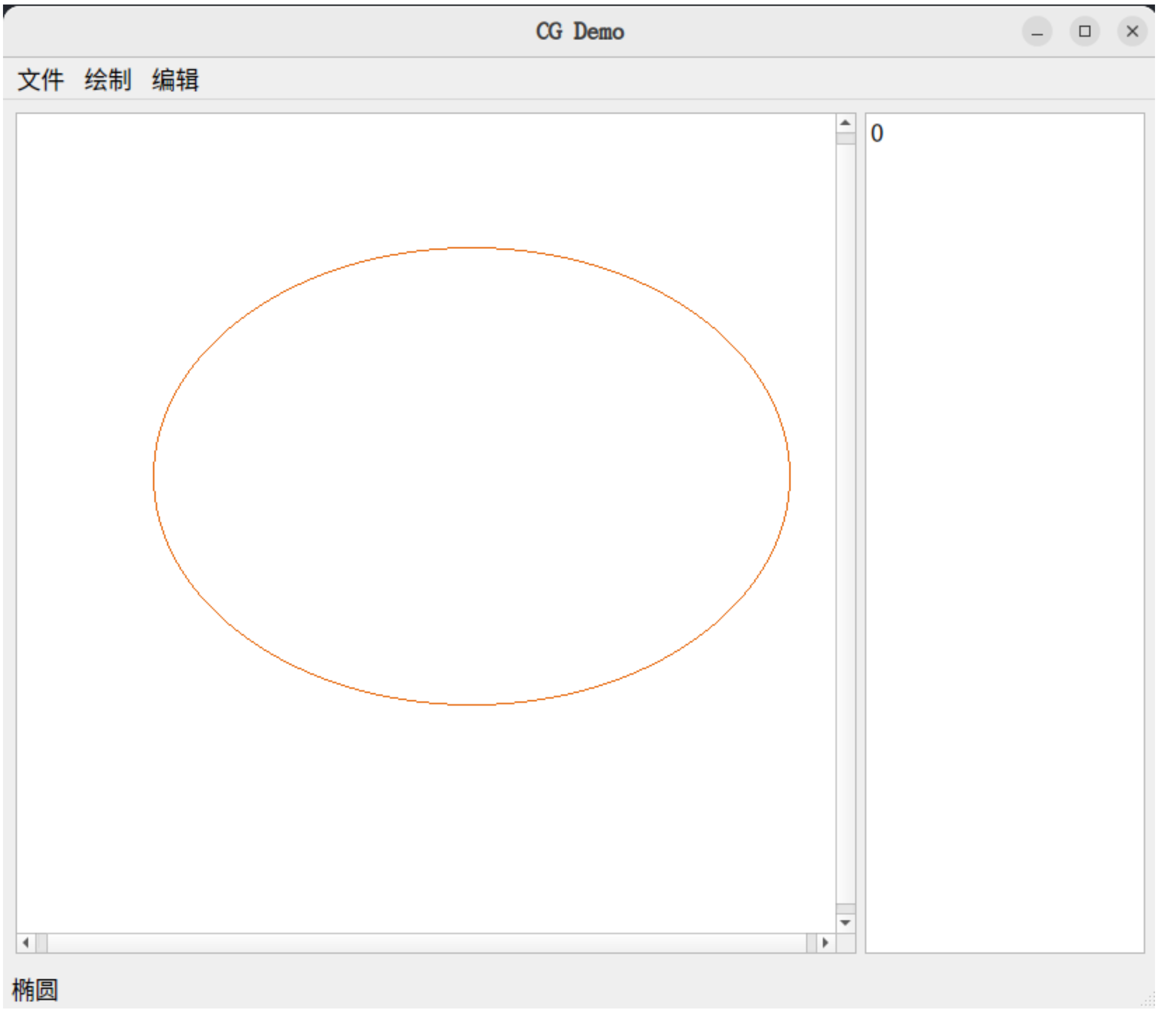
• 将颜色值存入画布的 temp_color 成员中

2. 后在 MyCanvas 类中创建新的图形 Item 时，将 temp_color 作为参数传入构造函数，初始化图形 Item 的 color 成员

3. 调用 painter.drawPoint 函数画图前，使用 setPen 函数设置画笔颜色，保证图形颜色符合预期

4.3.1 实现效果





4.4 cli 命令行界面

使用 readline() 方法读取指令文件中的命令，使用 line.strip().split(' ') 拆分传入的参数。对于绘图指令，需要将传入的关键参数保存；对于图元变换指令，需要调用算法库 (cg_algorithms.py) 中的对应图元变换函数生成新的点坐标集 (pointSet)，并存入 item_dict；对于保存指令，需要根据图元类型调用算法库（cg_algorithms.py）中的对应图元绘制函数生成待绘制点集（pixels），然后保存为.bmp 文件。

值得注意的是，在实验手册中规定绘制坐标系的坐标原点在屏幕左上方（往右为 x 正方向，往下为 y 正方向），因此将模板程序中的 canvas[height - 1 - y, x] 修改为 canvas[y, x]。

5 总结

...

参考文献