Differentialrechnung: Teil 2

Andreas Henrici

MANIT1 IT18ta_ZH

19.11.2018

Überblick

Fragestellung

Worum geht es in der Differentialrechnung?

- Geometrisch: *Steigung* einer Funktionskurve $y = f(x)$ an einer beliebigen Stelle
- Analytisch: Änderungstendenz der Funktion
- Physikalisch: Geschwindigkeit und Beschleunigung berechnen, wenn die Ortskurve gegeben ist
- Ökonomisch: Wachtumsraten etc.
- …

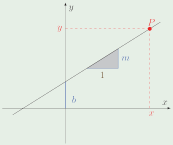
Notwendige Hilfsmittel:

- Umgang mit unendlich kleinen Grössen
- Übergang zum Grenzwert
- Untersuchung von Termen der Form $\frac{0}{0}$

Beispiel zur Einführung

Beispiel

Lineare Funktion $f(x) = mx + b$: Die Steigung hat überall den Wert m.



Beobachtung: Die Steigung m ist gleich dem Verhältnis der Änderung Δf der Funktionswerte $f(x_0)$ und $f(x_0 + h)$ für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\Delta > 0$ zur Änderung Δx der x-Werte x_0 und $x_0 + h$ ist, und zwar an jeder Stelle x_0:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{m(x_0+h) + b - (mx_0 + b)}{h} = \frac{mh}{h} = m.\end{aligned}$$

Beispiel

Beispiel

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{2}.$$

Bestimmen Sie das Verhältnis

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a) für $x_0 = 1$ und $h = 2$,

b) für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h > 0$.

Differenzenquotient und Sekantensteigung

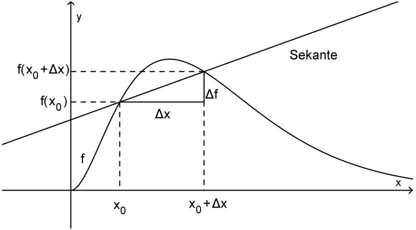
Definition

Sei f eine Funktion und $[x_0, x_0 + h]$ ein Intervall, das im Definitionsbereich von f liegt. Der Quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

heisst *Differenzenquotient* von f.

Der Differenzenquotient von f entspricht also der Steigung einer *Sekanten* des Graphen der Funktion f.



Beispiel

Beispiel

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{2}.$$

Bestimmen Sie den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a) für $x_0 = 1$ und $h = 2$,

b) für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h > 0$.

c) für $x_0 = 1$ und $h \to 0$

d) für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h \to 0$.

Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0: Definition

Definition

Wenn für eine Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert, so heisst f an der Stelle x_0 *differenzierbar*. Den Grenzwert selbst bezeichnet man als *Ableitung* (oder *Differentialquotient*) von f an der Stelle x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Der Differentialquotient bzw. die Ableitung bezeichnet geometrisch also die *Tangentensteigung* an die Funktionskurve an der Stelle x_0.

Ableitungsfunktion von $f(x)$: Definition

Durch Bilden der Ableitung $f'(x)$ für jedes $x \in D$ entsteht eine neue Funktion, die Ableitungsfunktion:

Definition

Sei $y = f(x)$ eine Funktion mit Definitionsbereich D, die an jeder Stelle des Definitionsbereichs differenzierbar ist. Die *Ableitungsfunktion* bzw. *Ableitung*

$$y' = f'(x)$$

von f ist die Funktion, die jedem $x \in D$ die Ableitung $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ zuordnet.

Beispiel (Fortsetzung)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{2}$.

a) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x_0)$ an einer beliebigen Stelle x_0.

b) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$.

Differenzierbare Funktionen: Anschauliche Vorstellungen

Betrachung der Funktionskurve $y = f(x)$:

a) Die Funktion ist *stetig*, falls die Kurve keine Sprünge macht.

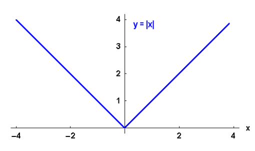
b) Die Funktion ist *differenzierbar*, falls die Kurve keine Knicke macht.

Beispiel

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion

$$f(x) = |x|$$

an der Stelle $x_0 = 0$.



Beispiel

Ableitungspuzzle!

Ableitung einer konstanten Funktion

- Konstante Funktion: Der Graph ist eine horizontale Gerade
- Steigung?
- Ableitung?

Satz

Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = 0.$$

Beweis.

Wir setzen $f(x) = c$ in die Definition der Ableitung ein und erhalten

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$\square$

Ableitung einer Potenzfunktion

Beispiel (Fortsetzung)

Die Ableitung der Funktion

$$y = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{2}$$

ist

$$y' = \frac{1}{5} \cdot x.$$

Beispiel

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $y = x^8$.

Satz

Die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Ableitung einer Potenzfunktion: Beweis

Beweis.

Wir setzen $f(x) = x^n$ in die Definition der Ableitung ein und erhalten

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Unter Benützung der binomischen Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + na^{n-1}b + \dots$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + h^2 \cdot (\dots) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + h^2 \cdot (\dots)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (nx^{n-1} + h \cdot (\dots)) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Höhere Ableitungen

Definition

- Eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D heisst n-mal differenzierbar an der Stelle x_0, wenn alle Ableitungen $f'(x_0)$, $f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ existieren.
- Eine Funktion $f(x)$ n-mal differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle des Definitionsbereichs n-mal differenzierbar ist.
- Die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ ist dann die Funktion, die jedem $x_0 \in D$ die n-te Ableitung an der Stelle x_0 zuordnet.

Physikalische Bedeutung: Der 2. Ableitung $y'' = f''(x)$ ist die *Beschleunigung* der Bewegung $y = f(x)$.

Bemerkung

Keine neuen Ableitungsregeln: Für die Bestimmung höherer Ableitungen braucht man die gleichen Regeln wie zur Bestimmung der 1. Ableitung.