Reelle Funktionen: Teil 3

Andreas Henrici

MANIT1 IT18ta_ZH

15. Oktober 2018

Überblick

Überblick über die möglichen Transformationen

- Ursprüngliche Funktion:

$$y = f(x)$$

- Verschobene Funktion:

$$y = c \cdot f(b \cdot x + a) + d$$

- Überblick über den Einfluss der verschiedenen Parameter:
  - a: Verschiebung um $-a$ Einheiten in x-Richtung
  - b: Streckung um Faktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung
  - c: Streckung um Faktor c in y-Richtung
  - d: Verschiebung um d Einheiten in y-Richtung
- Vorsicht auf die Reihenfolge der verschiedenen Transformationen!

Transformationen: Beispiel

Beispiel

Von der Grundfunktion $f(x) = x^3$ zur transformierten Funktion $g(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^3 - 4$:

- Ursprüngliche Funktion: $f(x) = x^3$
- 1. Schritt: Verschiebung in x-Richtung um -1: $f_1(x) = f(x+1) = (x+1)^3$
- 2. Schritt: Streckung in x-Richtung um Faktor 2: $f_2(x) = f_1\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^3$
- 3. Schritt: Streckung in y-Richtung um Faktor $-\frac{1}{3}$:
$$f_3(x) = -\frac{1}{3} \cdot f_2(x) = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right)^3$$
- 4. Schritt: Verschiebung in y-Richtung um -4:
$$g(x) = f_4(x) = f_3(x) - 4 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^3 - 4$$

Rationale Funktionen: Definition

Zur Erinnerung:

- Die Summe, die Differenz und das Produkt von Polynomen $g(x)$, $h(x)$ sind wieder Polynome.
- Der Quotient $\frac{g(x)}{h(x)}$ von Polynomen ist hingegen im Allgemeinen *kein* Polynom!

Definition

Eine *rationale* bzw. *gebrochenrationale Funktion* ist eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots b_1 x + b_0} \quad \text{mit } a_m \neq 0,\ b_n \neq 0$$

$g(x)$: Zählerpolynom vom Grad m
$h(x)$: Nennerpolynom vom Grad n

- $n > m$: *echt (gebrochen) rationale Funktion*
- $n \leq m$: *unecht (gebrochen) rationale Funktion*

Rationale Funktionen: Beispiele

Beispiel

- Echt rationale Funktion:

$$y = \frac{1}{x^n} \qquad (n \geq 1), \qquad y = \frac{x}{x^2+1}$$

- Unecht rationale Funktion:

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

Andere Darstellung einer unecht rationalen Funktion, sodass man den „echt rationalen Anteil" sieht?

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$$

Nullstellen

- Nullstellen einer rationalen Funktion: Nullstellen des Zählers!
- Zusätzlich: Der Nenner darf an der Stelle nicht auch Null sein!

Satz

Ein $x_0 \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Nullstelle der rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wenn

$$p(x_0) = 0, \qquad q(x_0) \neq 0$$

gilt.

Beispiel

Bestimmen Sie die Nullstellen der rationalen Funktion

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Polstellen

- Polstellen einer rationalen Funktion: Nullstellen des Nenners!
- Zusätzlich: Der Zähler darf an der Stelle nicht auch Null sein!

Definition

Ein $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine *Polstelle* bzw. ein *Pol* der rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wenn

$$q(x_0) = 0, \qquad p(x_0) \neq 0$$

gilt.

Beispiel

Bestimmen Sie die Polstellen der rationalen Funktion

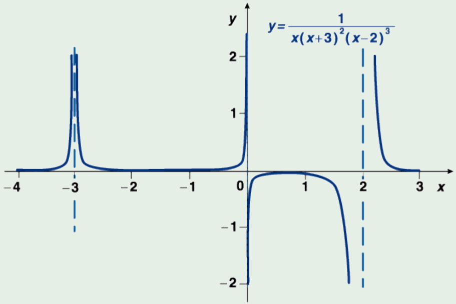
$$y = \frac{x}{x^2 - 4}.$$

Mehrfache Polstellen

Asymptote bei einer Polstelle von $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ bei $x = x_0$:

- Vertikale Gerade $x = x_0$
- Einfache/Dreifache/...Polstelle: Annäherung auf unterschiedlichen Seiten der Geraden
- Doppelte/Vierfache/...Polstelle: Annäherung auf der gleichen Seite der Geraden

Beispiel



Hebbare Definitionslücken: Problemstellung

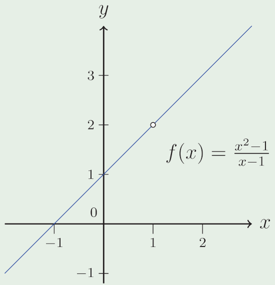
Annahme: Für $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$p(x_0) = q(x_0) = 0$$

(x_0 ist eine einfache Nullstelle von $p(x)$ und von $q(x)$.)

Beispiel

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x_0 = 1$:



Hebbare Definitionslücken: Lücke stopfen

- Annahme: Für $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $p(x_0) = q(x_0) = 0$.
- Kann man einen Faktor $(x - x_0)$ kürzen?
- Jein.
- Die nach Kürzen erhaltene Funktion $\tilde{f}(x)$ erfüllt $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \neq x_0$
- $\tilde{f}(x)$ hat einen grösseren Definitionsbereich als $f(x)$, denn $\tilde{f}(x_0)$ existiert, $f(x_0)$ hingegen nicht.

Beispiel (Fortsetzung)

Wir vergleichen $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ und $\tilde{f}(x) = x + 1$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \neq 1 \\ 2, & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Symmetrie

Symmetrie von $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$: abhängig von den Symmetrien von $p(x)$ und $q(x)$:

Beispiel

Symmetrie der Funktionen

$$y = \frac{1}{x^n}$$

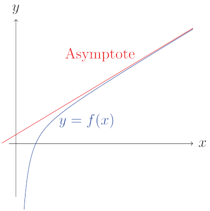
für verschiedene $n \in \mathbb{N}$?

- Falls $p(x)$ und $q(x)$ den *gleichen* Symmetrietyp haben (d.h. beide gerade oder beide ungerade), ist $f(x)$ eine *gerade* Funktion.
- Falls $p(x)$ und $q(x)$ einen *unterschiedlichen* Symmetrietyp haben (d.h. $p(x)$ gerade und $q(x)$ ungerade oder umgekehrt), ist $f(x)$ eine *ungerade* Funktion.
- In den meisten Fällen ist $f(x)$ weder gerade noch ungerade!

Asymptote: Grundkonzept

Definition

Eine *Asymptote* einer Funktion f ist eine Funktion g mit der folgenden Eigenschaft: Der Graph von f nähert sich dem Graphen von g beliebig genau an.



Bemerkung

Vertikale Asymptoten bei Polstellen: Beliebig genaue Annäherung, aber keine Funktionsgraphen!

Asymptote: Beispiele

Beispiel

- Echt gebrochenrationale Funktion: $y = \frac{x}{x^4+1}$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

- Unecht gebrochenrationale Funktion: $y = \frac{x^4-7}{x^4+1}$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

- Unecht gebrochenrationale Funktion: $y = \frac{x^8}{x^4+1}$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Präziser?

Asymptote: Systematische Bestimmung

Satz

Sei $f(x)$ eine rationale Funktion. Dann gibt es eine Polynomfunktion $g(x)$ („Quotient ohne Rest“) und eine echt gebrochenrationale Funktion $r(x)$ („Rest“), sodass $f(x)$ in der Form

$$f(x) = g(x) + r(x)$$

geschrieben werden kann. Diese Zerlegung ist eindeutig.

Bemerkung

- Falls $f(x)$ selbst schon echt gebrochenrational ist, ist die gesuchte Zerlegung: $f(x) = 0 + f(x)$.
- Falls $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ unecht gebrochenrational ist:
  - Polynomdivision $p(x) : q(x)$ durchführen;
  - $g(x)$: Polynomialer Anteil des Ergebnisses
  - $r(x)$: Rest

Asymptote: Beispiel

Beispiel

- $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$
- $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x+2}$