Einführung in die Integralrechnung: Teil 1

Andreas Henrici

MANIT2 IT18ta_ZH

19.02.2019

Überblick

1. **Das unbestimmte Integral**
   - Stammfunktion und unbestimmtes Integral
   - Integrale der elementaren Funktionen
   - Elementare Integrationsregeln

Unbestimmtes Integral: Ein Beispiel zur Einführung

Beispiel

Ein Objekt bewegt sich längs der x-Achse. Zum Zeitpunkt t beträgt seine momentane Geschwindigkeit

$$v(t) = 4t^2 + 5t + 6.$$

Bestimmen Sie den Standort $x(t)$ dieses Objekts zur Zeit t.

Stammfunktion

Definition

Sei $f(x)$ eine auf einem Intervall I definierte Funktion. Eine Funktion $F(x)$ heisst *Stammfunktion* von $f(x)$, falls für alle $x \in I$ gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Beispiel

Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ für die Funktionen

a) $f(x) = 3(x-2)^2$

b) $f(z) = 2e^{\frac{z}{2}}$

Verschiedene Stammfunktionen der gleichen Funktion

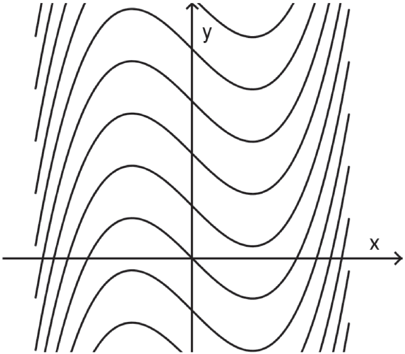

Abbildung: Verschiedene Stammfunktionen der gleichen Funktion

Verschiedene Stammfunktionen der gleichen Funktion

Satz

- *Voraussetzung: $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$ auf dem Intervall I, d.h.*
$$F'(x) = f(x).$$
- *Aussage: Für eine beliebige Konstante $C \in \mathbb{R}$ ist die Funktion*
$$G(x) = F(x) + C$$
ebenfalls eine Stammfunktion von $f(x)$.

Beweis.

- Voraussetzung: $F'(x) = f(x)$
- Also: $(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$
- Dies bedeutet: $F(x) + C$ ist auch eine Stammfunktion von $f(x)$.

$\square$

Verschiedene Stammfunktionen der gleichen Funktion

Satz

- *Voraussetzung: $F(x)$ und $G(x)$ sind zwei verschiedene Stammfunktionen von $f(x)$ auf dem Intervall I, d.h.*
$$F'(x) = f(x), \qquad G'(x) = f(x)$$
- *Aussage: $F(x)$ und $G(x)$ unterscheiden sich nur um eine Konstante, d.h. es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass gilt:*
$$F(x) = G(x) + C.$$

Beweis.

- Voraussetzung: $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(x)$.
- Für die Differenz $F(x) - G(x)$ gilt dann:
$(F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$
- Dies bedeutet: $F(x) - G(x)$ muss konstant sein!
- D.h. es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:
$F(x) - G(x) = C$. $\square$

Unbestimmtes Integral: Definition

Definition

- Das *unbestimmte Integral* einer Funktion $f(x)$ auf einem Intervall I ist die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$.
- Notation:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Die Funktion $f(x)$ heisst auch der *Integrand* des Integrals.

Unbestimmtes Integral: Beispiele

Beispiel

Das unbestimmte Integral das Funktion $f(x) = x^3$ ist

$$\int x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Beispiel

Bestimmen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \sin(3x) \, \mathrm{d}x.$$

Integrale der elementaren Funktionen

Satz

Unbestimmte Integrale von Potenzfunktionen:

a) $$\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$$

b) $$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

Beweis.

Nachrechnen durch Ableiten! □

Bemerkung

- Man beachte das Betragszeichen bei $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$!
- Die Funktion $\frac{1}{x}$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert, die Funktion $\ln(x)$ nur auf $\mathbb{R}_{>0}$, aber die Funktion $\ln|x|$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Integrale der elementaren Funktionen

Satz

Unbestimmte Integrale von Exponential- und Logarithmusfunktionen:

c) $$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$$

d) $$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0)$$

e) $$\int \ln(x) \, \mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x + C$$

f) $$\int \log_a(x) \, \mathrm{d}x = \frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0)$$

Beweis.

Nachrechnen durch Ableiten! □

Integrale der elementaren Funktionen

Satz

Unbestimmte Integrale von trigonometrischen Funktionen:

g) $$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

h) $$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

i) $$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + C$$

Beweis.

Nachrechnen durch Ableiten! □

Integrale der elementaren Funktionen

Satz

Unbestimmte Integrale von weiteren Funktionen:

j) $$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

k) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$$

l) $$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos(x) + C$$

Beweis.

Nachrechnen durch Ableiten! □

Integrale von Linearkombinationen

Satz

- *Voraussetzung: Es seien die unbestimmten Integrale* $F(x) + C$ *und* $G(x) + C$ *der Funktionen* $f(x)$ *bzw.* $g(x)$ *bekannt, d.h.*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \qquad \int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x) + C$$

- *Aussage: Das unbestimmte Integral der Linearkombination* $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ *ist*

$$\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + C \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Beweis.

Nachrechnen durch Ableiten! $\square$

Integrale von verschobenen Funktionen

Satz

- *Voraussetzung: Es sei das unbestimmte Integral $F(x) + C$ der Funktion $f(x)$ bekannt, d.h.*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

- *Aussage: Das unbestimmte Integral der um den Betrag k in x-Richtung verschobenen Funktion $g(x) = f(x-k)$ ist*

$$\int f(x-k)\,\mathrm{d}x = F(x-k) + C \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Beweis.

Nachrechnen durch Ableiten! $\square$

Integrale von gestreckten Funktionen

Satz

- *Voraussetzung: Es sei das unbestimmte Integral $F(x) + C$ der Funktion $f(x)$ bekannt, d.h.*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

- *Aussage: Das unbestimmte Integral der um den Faktor k in x-Richtung gestreckten/gestauchten Funktion $g(x) = f(k \cdot x)$ ist*

$$\int f(k \cdot x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0).$$

Beweis.

Nachrechnen durch Ableiten! $\square$

Integrationsregeln: Beispiele

Beispiel

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int 25e^x \, \mathrm{d}x$

b) $\int (-13x^3) \, \mathrm{d}x$

c) $\int e^{\frac{3}{2}x} \, \mathrm{d}x$

d) $\int \frac{1}{x-6} \, \mathrm{d}x$

e) $\int (8x^3 - 4x + 2) \, \mathrm{d}x$