Folgen und Reihen: Teil 3

Andreas Henrici

MANIT1 IT18ta_ZH

Folgen und Reihen: Teil 3

Überblick

Grenzwerte von Folgen: Beispiele zur Motivation

Beispiel

Wie verhalten sich diese Folgen für $n \to \infty$?:

a) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

b) $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$

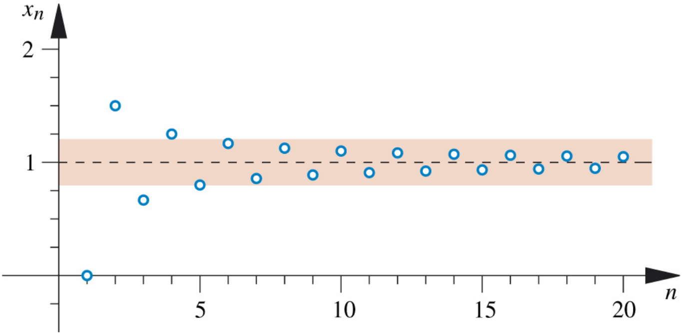
c) $(a_n) = \left(3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right)$

d) $(a_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$

Grenzwerte von Folgen: Graphische Erklärung

Grenzwert *a* einer Folge (a_n):

- Der Grenzwert selbst muss von der Folge *nicht* exakt erreicht werden.
- Die Folge muss aber jede noch so kleine Umgebung des Grenzwerts *erreichen* und *nicht mehr verlassen*.



Aus: Arens et al., *Mathematik*, ISBN: 978-3-8274-1758-9

Grenzwerte von Folgen: Formelle Definition

Definition

- Eine reelle Zahlenfolge (a_n) hat als *Grenzwert*/*Limes* die Zahl $a \in \mathbb{R}$, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:
    - Zu jeder Fehlerschranke $\epsilon > 0$ gibt es eine Index-Untergrenze $N \in \mathbb{N}$, sodass alle Folgenglieder a_n mit Index $n > N$ im Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ liegen, bzw. falls gilt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : \; |a_n - a| < \epsilon$$

- Eine Folge heisst *konvergent*, falls sie einen Grenzwert besitzt, ansonsten *divergent*.

Satz

Eine Folge (a_n) besitzt höchstens einen Grenzwert.

Grenzwerte von Folgen: Beispiele von Grenzwerten

Beispiel (Fortsetzung)

Folgen mit Grenzwert:

a) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

b) $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

c) $(a_n) = \left(3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right)$: $\lim\limits_{n\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$

d) $(a_n) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Folgen ohne Grenzwert: Beispiele

Beispiel (Fortsetzung)

Folgen ohne Grenzwert:

a) $(a_n) = ((-1)^n)$:

$$(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$$

Oszillation zwischen zwei *Häufungspunkten*

b) $(a_n) = (3 + 2n)$

$$(b_n) = (5, 7, 9, 11, \ldots)$$

Wachstum gegen ∞

“Bestimmte Divergenz” bzw. Wachstum gegen $\pm\infty$

- Folgen mit beliebig gross werdenden Gliedern:
  - Zu jeder Schranke $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Index-Untergrenze $N \in \mathbb{N}$, sodass alle Folgenglieder a_n mit Index $n > N$ im Intervall (a, ∞) liegen, d.h. grösser als a sind:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : \ a_n > a$$

- Folgen mit beliebig klein werdenden Gliedern:
  - Zu jeder Schranke $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Index-Untergrenze $N \in \mathbb{N}$, sodass alle Folgenglieder a_n mit Index $n > N$ im Intervall $(-\infty, a)$ liegen, d.h. kleiner als a sind:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : \ a_n < a$$

- Solche Folgen nennt man “bestimmt divergent”; sie sind nicht konvergent, wir sprechen *nicht* von “Konvergenz gegen ∞”, aber wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Grenzwerte von arithmetischen und geometrischen Folgen

- Grenzwerte von arithmetischen Folgen: $a_n = A + (n-1) \cdot d$
  - $d > 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
  - $d < 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
  - $d = 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$
- Grenzwerte von geometrischen Folgen: $a_n = A \cdot q^{n-1}$?

Beispiel

Verhalten von (q^n) für $n \to \infty$ für unterschiedliche Werte von q?

a) $q = 0.6$:

b) $q = -0.6$:

c) $q = 2$:

d) $q = -2$:

e) $q = 1$:

f) $q = -1$:

Grenzwerte von geometrischen Folgen

Beispiel

Verhalten von (q^n) für $n \to \infty$ für unterschiedliche Werte von q:

- **a)** $q = 0.6$: konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
- **b)** $q = -0.6$: konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
- **c)** $q = 2$: divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$
- **d)** $q = -2$: divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ existiert nicht
- **e)** $q = 1$: konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$
- **f)** $q = -1$: divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ existiert nicht

Also:

- **a)** $|q| < 1$: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, d.h. Folge (q^n) konvergent.
- **b)** $|q| > 1$: $\lim_{n\to\infty} |q|^n = \infty$, d.h. Folge (q^n) divergent.
- **c)** $q = 1$: $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$, d.h. Folge (q^n) konvergent.
- **d)** $q = -1$: $\lim_{n\to\infty} q^n$ existiert nicht, d.h. Folge (q^n) divergent.

Grenzwerte von geometrischen Folgen

Konsequenz für die Konvergenz der geometrischen Folge (a_n):

Satz

Sei (a_n) eine geometrische Folge mit Anfangsglied $A \neq 0$ und Quotient $q \neq 0$. Dann gilt:

a) *Für $|q| < 1$ ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, d.h. die Folge (a_n) ist konvergent.*

b) *Für $|q| > 1$ ist $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, d.h. die Folge (a_n) ist divergent.*

c) *Für $q = 1$ ist $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, d.h. die Folge (a_n) ist konvergent.*

d) *Für $q = -1$ existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$ nicht, d.h. die Folge (a_n) ist divergent.*

Rechnen mit Grenzwerten

Satz

Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt:

a) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

b) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *falls* $b_n \neq 0$ *und* $b \neq 0$

d) $\lim_{n\to\infty} (a_n)^k = a^k$

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 - 2n^2 + 5n - 8}{-7n^3 + 4n^2 - 6n + 1} =$$

Grenzwerte von Reihen: Definition

Erinnerung: Sei (a_k) eine Folge

- Die Reihe ist die Folge der Partialsummen
- Konvergenz der Reihe bedeutet Konvergenz der Folge der Partialsummen!

Definition

- Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst *konvergent* bzw. *divergent*, falls die Teilsummenfolge (s_n) konvergent bzw. divergent ist.
- Falls die unendliche Reihe konvergent ist, ist $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ die *Summe* der unendlichen Reihe:
$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$
- Falls die Folge (s_n) bestimmt divergent ist, d.h. $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ebenfalls bestimmt divergent:
$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty.$$

Konvergenz der Folge und Konvergenz der Reihe

Frage: Beziehung zwischen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

Beispiel

Für die Folge

$$(a_n) = \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$$

gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, d.h. (a_n) ist konvergent mit Grenzwert $a = 0$.
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = 2$, d.h. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = 2$ ist konvergent.

Satz

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente unendliche Reihe. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Grenzwerte von Reihen: Beispiele

Beispiel

Untersuchen Sie, ob die zu den Folgen (a_n) gehörenden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergieren:

- $(a_n) = (1, 1.5, 2, 2.5, 3, \ldots)$:
- $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$:
- $(a_n) = (1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots)$:
- $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$:

Grenzwerte von Reihen: Beispiele, fortgesetzt

Beispiel (Fortsetzung)

- $(a_n) = (1, 1.5, 2, \ldots)$: Reihe $(s_n) = (1, 2.5, 4.5, 7, \ldots)$ divergent
- $(a_n) = (1, -1, 1, \ldots)$: Reihe $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ divergent
- $(a_n) = (1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots)$: Geometrische Reihe $(s_n) = (1, 1.1, 1.11, 1.111, \ldots)$ konvergent mit Grenzwert

$$s = \frac{A}{1-q} = \frac{1}{1-0.1} = \frac{10}{9} = 1.1111\ldots$$

- $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$: Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

heisst *harmonische Reihe*. Sie ist *divergent*, obwohl die Folgenglieder gegen Null konvergieren, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Grenzwerte von Reihen: Weitere Beispiele

Beispiel

- $(a_n) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\right)$: (alternierende harmon. R.)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots = \ln(2)$$

- $(a_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

- $(a_n) = \left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right) = \left(1, \frac{1}{2^{1+\epsilon}}, \frac{1}{3^{1+\epsilon}}, \frac{1}{4^{1+\epsilon}}, \ldots\right)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\epsilon}} \text{ ist konvergent für jedes } \epsilon > 0$$