# Differentialrechnung: Teil 3

Andreas Henrici

MANIT1 IT18ta_ZH

26.11.2018

# Überblick

## Ableitung von Potenzfunktionen

- Erinnerung:

### Satz

*Die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar, und es gilt*

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

- Erweiterung:

### Satz

*Die Potenzfunktion $f(x) = x^\alpha$ ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt*

$$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \qquad (x > 0).$$

### Beweis.

- Direktes Nachrechnen für spezielle Fälle wie $\alpha = -1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ (Übungen)
- Allgemeiner Fall via $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$

$\square$

# Ableitung von Potenzfunktionen: Beispiele

## Beispiel

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

**a)** $f(x) = \frac{1}{x^4}$

**b)** $f(x) = \sqrt{x}$

**c)** $f(x) = \frac{x^2 \cdot x^3}{\sqrt[3]{x^5}}$

# Ableitung der Exponentialfunktion $y = e^x$

## Satz

*Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist überall differenzierbar, und es gilt*

$$f'(x) = e^x.$$

## Beweis.

Wir setzen $f(x) = e^x$ in die Definition der Ableitung ein und erhalten

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= e^x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x \cdot 1 = e^x \end{aligned}$$

$\square$

## Ableitung der Exponentialfunktion $y = a^x$

### Satz

*Sei $a > 0$. Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist überall differenzierbar, und es gilt*

$$f'(x) = a^x \cdot \ln(a).$$

### Beweis.

Wir schreiben $f(x) = a^x$ als

$$f(x) = a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{x \cdot \ln(a)}.$$

Dann benützen wir die Kettenregel (siehe später). □

### Beispiel

Die Ableitung von $f(x) = 2^x$ ist

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln(2).$$

# Ableitung der Logarithmusfunktion $y = \ln(x)$

**Satz**

*Die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ ist für alle $x > 0$ differenzierbar, und es gilt*

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

**Beweis.**

Folgerung aus der Regel über die Ableitung von Umkehrfunktionen (siehe später). □

# Ableitung der trigonometrischen Funktionen

## Satz

*Die trigonometrischen Funktionen* $f(x) = \sin(x)$ *und* $f(x) = \cos(x)$ *sind überall differenzierbar, und es gilt*

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x) \end{aligned}$$

## Beweis.

Für $f(x) = \sin(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \sin(x) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}}_{=0} + \cos(x) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{=1} \\ &= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \cos(x) \end{aligned}$$

# Überblick

**Beispiel**

Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \left( \frac{\sin(x) + x^7}{e^{2x} + x^2} \right)^4$$

Regeln über die Ableitung von Zusammensetzungen von Funktionen:

- Summen und Differenzen von Funktionen, Produkte von Funktionen mit einem konstanten Faktor
- Produkte und Quotienten von Funktionen

- Verkettungen von Funktionen

- Potenzausdrücke, bei denen sowohl Basis wie auch Exponent nichtkonstante Funktionen sind
- Umkehrfunktionen bekannter Funktionen

# Summen und Differenzen von Funktionen

## Satz

*Die Ableitung der Funktion $f(x) = \lambda_1 u(x) + \lambda_2 v(x)$ für differenzierbare Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ sowie beliebige $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ist*

$$f'(x) = \lambda_1 u'(x) + \lambda_2 v'(x).$$

## Beispiel

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

**a)** $f(x) = 4x^7 - x + 2$

**b)** $f(x) = 2e^x + 4\ln(x) - \frac{2}{\sqrt{x}}$

**c)** $f(x) = \log_a(x)$ (für $a > 0$)

# Produkte von Funktionen: Theorie

- Ableitung eines Produkts $f(x) = u(x) \cdot v(x)$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

- Resultat:

**Satz**

*Die Ableitung der Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ für differenzierbare Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ ist*

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Bei 3 Faktoren, $f(x) = u(v) \cdot v(x) \cdot w(x)$:

$$f'(x) = u'(v) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(v) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(v) \cdot v(x) \cdot w'(x)$$

# Produkte von Funktionen: Beispiele

## Beispiel

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

**a)** $f(x) = 2x^2 e^x$

**b)** $f(x) = x^7 \ln(x)$

**c)** $f(x) = e^x (x^2 + 5x - 8) \ln(x)$

# Quotienten von Funktionen: Theorie

- Idee, um die Ableitung von $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ zu berechnen: Produktregel benützen in der Darstellung $f(x) = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$!
- Konkret:

$$f'(x) = \left(u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \left(\frac{1}{v(x)}\right)'.$$

- Wir benötigen:

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$$

- Alles zusammen:

**Satz**

*Die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ für differenzierbare Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ (mit $v(x) \neq 0$ für alle $x$) ist*

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \qquad (\textit{falls } v(x) \neq 0).$$

# Quotienten von Funktionen: Beispiele

## Beispiel

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

**a)** $f(x) = \frac{4x^2+1}{x^3-x}$

**b)** $f(x) = \frac{e^x}{x^4+1}$

**c)** $f(x) = \tan(x)$

# Kettenregel: Theorie

- Ziel: Ableitung von $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ berechnen; z.B. $f(x) = \sin(2x)$
- Ergebnis:

## Satz

*Die Ableitung der Funktion $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ für differenzierbare Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ ist*

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$

## Bemerkung

- Man nennt die beiden Faktoren in $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ die äussere bzw. innere Ableitung: $u'(v(x))$ ist die äussere, $v'(x)$ die innere Ableitung.
- In den Anwendungen besteht meistens die Gefahr, dass man die innere Ableitung vergisst.

# Kettenregel: Beispiele

**Beispiel**

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

**a)** $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x}$

**b)** $f(x) = (x^2 + e^x)^{100}$

**c)** $f(x) = \sin(2x)$