Einführung in die Integralrechnung: Teil 2

Andreas Henrici

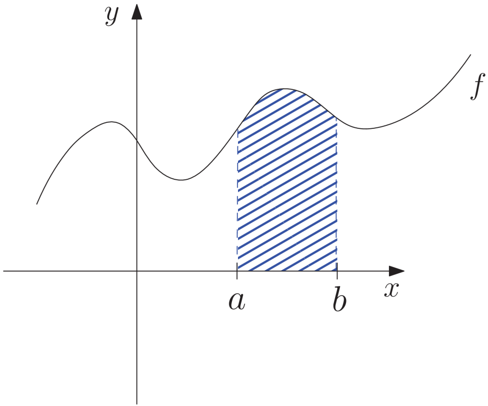
MANIT2 IT18ta_ZH

26.02.2019

Überblick

Fragestellung

Ziel: Fläche zwischen Kurve und x-Achse berechnen:



Grundidee

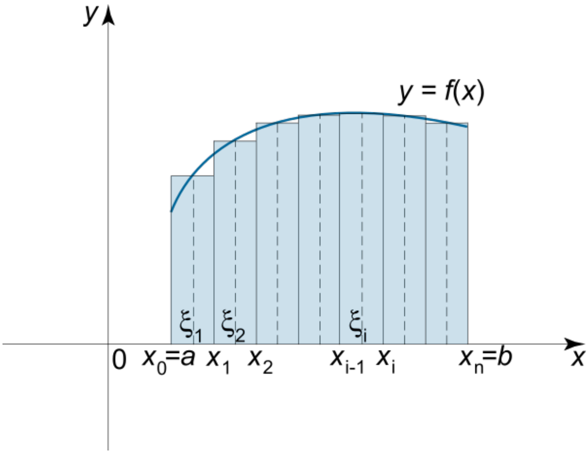


Abbildung: Approximatives Verfahren zur Berechnung von Flächen

Vorgehen zur Flächenberechnung

- Zerlegung von $[a, b]$ in n Teilintervalle, durch Einfügen von Zwischenwerten:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

- Wahl von Zwischenstelle/Messpunkt $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ für $1 \leq i \leq n$
- Approximation des Flächeninhalts im Bereich $[x_{i-1}, x_i]$ durch

$$A_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

- Näherungswert für die ganze Fläche im Bereich $[a, b]$:

$$S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

- Exakte Fläche im Limes $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$:

$$A = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta x \to 0)}} S_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta x \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Definition des bestimmten Integrals

Definition

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion. Der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta x \to 0)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

heisst, falls er existiert, *bestimmtes Integral von f über* $[a, b]$. Man schreibt dafür

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

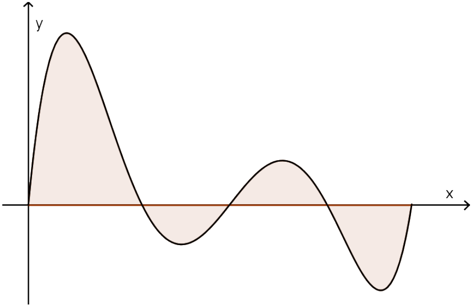
Bemerkung

- Das bestimmte Integral ist eine *Zahl*.
- Umbenennung der Integrationsvariablen:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \dots$$

Zusammenhang mit Flächenberechnungen

- Falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, ist
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
die *Fläche zwischen der Funktionskurve von $f(x)$ und der x-Achse* im Bereich $[a, b]$.
- Falls $f(x) \geq 0$ *nicht* überall gilt auf $[a, b]$, ist das bestimmte Integral immer noch definiert, aber es ist dann *nicht* mehr die Fläche zwischen der Funktionskurve und der x-Achse.



Flächenberechnung: Beispiel

Beispiel

- *Ziel:* Fläche zwischen Kurve $y = x^2$ und x-Achse im Intervall $I = [0, 2]$ berechnen
- Zerlegung von I in n Stücke der Breite $\Delta x = \frac{2}{n}$: das k-te Stück ist

$$[x_{k-1}, x_k] = \left[\frac{2(k-1)}{n}, \frac{2k}{n}\right] \qquad (1 \leq k \leq n)$$

- Messpunkte $\xi_k = x_k = k \cdot \Delta x = \frac{2k}{n}$ (rechter Endpunkt des k-ten Teilstücks)
- n-ter Näherungswert für die Fläche:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Flächenberechnung: Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

- n-ter Näherungswert für die Fläche:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x = \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

- Verwendung der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ergibt für den n-ten Näherungswert

$$S_n = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{4}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

- Im Limes $n \to \infty$:

$$A = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{8}{3}$$

Flächenberechnung: Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

- Fläche unter der Kurve $y = x^2$ im Bereich $I = [0, 2]$: $A = \frac{8}{3}$
- Fläche unter der Kurve $y = x^2$ im Bereich $I = [0, x]$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$: $\Delta x = \frac{x}{n}$, n-ter Näherungswert für die Fläche:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x \cdot k}{n} \right)^2 \cdot \frac{x}{n} = \frac{x^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 .$$

- Verwendung der Formel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ergibt

$$S_n = \frac{x^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{x^3}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) .$$

- Im Limes $n \to \infty$:

$$A(x) = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{x^3}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{x^3}{3}$$

Flächenberechnung

Beispiel (Fortsetzung)

- Fläche $A(x)$ unter der Kurve der Funktion
$$f(x) = x^2$$
im Bereich $I = [0, x]$:
$$A(x) = \frac{x^3}{3}$$
- Beziehung zwischen den Funktionen $f(x) = x^2$ und $A(x) = \frac{x^3}{3}$: $A(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$!
- Fläche $B(x)$ unter der Kurve der Funktion $f(x) = x^2$ im Bereich $I = [2, x]$:
$$B(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$$
- Beziehung zwischen den Funktionen $f(x) = x^2$ und $B(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$: $B(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$!

Feste vs. variable obere Grenze

- Annahme: $f(x) \geq 0$ für alle x im betrachteten Bereich
- Gesehen: Die Fläche “unter der Kurve” im Bereich $[a, b]$ ist

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Wie sieht es aus mit *variabler* oberer Grenze?
- Wir betrachten also die Funktion

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- $F_a(x)$ ist die *Integralfunktion* oder *Flächenfunktion* zu f zur unteren Grenze a.
- *Ziel:* Beziehung zwischen den *Funktionen* $f(x)$ und $F_a(x)$ herstellen

Variable obere Grenze: Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

Die Integralfunktion $F_a(x)$ der Funktion $f(x) = x^2$

- für die untere Grenze $a = 0$ ist $F_0(x) = \frac{x^3}{3}$.
- für die untere Grenze $a = 2$ ist $F_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$.

Beide Integralfunktionen sind *Stammfunktionen* von $f(x) = x^2$.

Beispiel

Bestimmen Sie die Integralfunktion $F_a(x)$ der Funktion $f(x) = x$ für eine beliebige untere Grenze a, indem Sie die Formel für die Fläche eines Trapezes benützen.

Variable obere Grenze: Resultate

Wir beobachten im vorigen Beispiel, dass $F_a'(x) = f(x)$ gilt. Dies ist eine allgemeine Tatsache:

Satz (Erster Hauptsatz der Integralrechnung)

Sei $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion. Dann ist die Integralfunktion $F_a(x)$ von $f(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$F_a'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x).$$

Die Integralfunktion $F_a(x)$ von $f(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

Beweis.

siehe Skript □

Integralfunktion und beliebige Stammfunktion

- Zusammenhang von Integralfunktionen $F_a(x)$ und irgendeiner Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$: Für irgendeine Konstante $C \in \mathbb{R}$ muss gelten
$$F_a(x) = F(x) + C$$
- Einsetzen von $x = a$:
$$\underbrace{F_a(a)}_{=0} = F(a) + C.$$
- Also:
$$C = -F(a)$$
d.h.
$$F_a(x) = F(x) - F(a)$$
- Einsetzen von $x = b$:
$$\underbrace{F_a(b)}_{\text{Fläche unter der Kurve}} = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\substack{\text{kann mit einer beliebigen Stammfunktion von } f(x) \\ \text{berechnet werden}}}$$

Flächenberechnungen mit beliebigen Stammfunktionen

Satz (Zweiter Hauptsatz der Integralrechnung)

Sei $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion, und sei $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Bemerkung

- Für die Differenz $F(b) - F(a)$ gibt es auch die Schreibweisen
$$F(x)\big|_a^b, \qquad [F(x)]_a^b.$$
- Abhängigkeit von $f(x) \geq 0$?
- Die Aussage des zweiten Hauptsatzes ist auch richtig ohne die Voraussetzung $f(x) \geq 0$. Aber falls für $a \leq x \leq b$ (teilweise) $f(x) < 0$ gilt, ist die Grösse $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ nicht mehr die Fläche zwischen Kurve und x-Achse!

Flächenberechnungen/bestimmte Integrale: Beispiele

Beispiel

- Berechnen Sie die Fläche, die durch die Kurve der Funktion $f(x) = x^2$ und die x-Achse im Intervall $I = [0, 2]$ begrenzt wird.
- Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_a^b x \, \mathrm{d}x$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt unter der Sinuskurve in der ersten Halbperiode, d.h. im Intervall $[0, \pi]$.

Flächenberechnungen/bestimmte Integrale: Beispiele

Beispiel

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^3 (24t^2 + 15t)\,\mathrm{d}t$