Theoretische Informatik

Teil 6
Turing-Maschinen (TM)

Frühlimgssemester 2019

L. Di Caro
D. Flumini
O. Stern

Universelle TM

Bisheriges Vorgehen:

- Für jedes Entscheidungsproblem wurde eine spezifische TM entworfen, die genau dieses lösen kann (wie auch bei den EA und KA).
- Jede Modifikation des Problems erforderte eine Anpassung oder sogar den kompletten Neuentwurf der TM.

Fragen:

- Gibt es **eine** TM,
  - die **alle** Entscheidungsproblem lösen kann?
  - bei der die Spezifikation für das jeweilige Entscheidungsproblem zusätzlich über Eingabe mit eingegeben wird (und darüber die TM für die spezifische Berechnung "programmiert" wird.)?
- Wie muss eine solche *universelle* TM aufgebaut sein?
- Wie kann die Spezifikation einer beliebigen TM für die Eingabe **codiert** werden?

Codierung einer TM als Zeichenreihe

1. Schritt: Die Zustände Q einer TM werden codiert als:

q_1: für den Startzustand,
q_2: für den akzeptierenden Zustand[1] und
q_3, ..., q_i: für alle weiteren Zustände.

2. Schritt: Die Bandsymbole Γ einer TM werden codiert als:

X_1: für das Symbol 0,
X_2: für das Symbol 1,
X_3: für das Symbol $\sqcup$ (*Blank*) und
X_4, ..., X_j: für alle weiteren Symbole.

[1] Jede TM mit mehreren akzeptierenden Zuständen kann in eine äquivalente TM mit nur einem akzeptierenden Zustand überführt werden.

Codierung einer TM als Zeichenreihe

3. Schritt: Codierung der Richtung des Lese-Schreibkopfes D einer TM:

D_1: für die Richtung L und
D_2: für die Richtung R.

4. Schritt: Repräsentation der Übergangsfunktion δ einer TM:

Ein Übergang $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ einer TM wird codiert über die Zeichenreihe:

$0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$ mit $(i, j, k, l, m \in \mathbb{N})$

Die einzelnen Übergangsfunktionen werden durch „11" voneinander getrennt (jedes C_i steht für eine Transition):

$C_1 11 C_2 11 C_3 11 \ldots$

Codierung einer TM als Zeichenreihe

Beispiel

Gegeben sei die TM M

$$M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \{0,1,\sqcup\}, \delta, q_1, \sqcup, \{q_2\}) \text{ mit:}$$

$$\delta(q_1, 1) = (q_3, 0, R), \qquad \delta(q_3, 0) = (q_1, 1, L),$$
$$\delta(q_3, 1) = (q_2, 0, R), \qquad \delta(q_3, \sqcup) = (q_3, 0, L).$$

Wie lautet die Codierung für M?

$\delta(q_1, 1) = (q_3, 0, R)$ entspricht 0100100010100,
$\delta(q_3, 0) = (q_1, 1, L)$ entspricht 000101010010,
$\delta(q_3, 1) = (q_2, 0, R)$ entspricht 00010010010100 und
$\delta(q_3, \sqcup) = (q_3, 0, L)$ entspricht 00010001000101010.

$$M = \{0100100010100\ 11\ 000101010010\ 11\ 00010010010100\ 11\ 00010001000101010\}$$

Universelle TM

Eine TM M_1, die als Teil der Eingabe eine codierte TM (z. B. mit der soeben vorgestellten Codierung) verarbeitet und das Verhalten der codierten Turingmaschine auf der ebenfalls gegebenen Eingabe simuliert, wird als **universelle Turingmaschine** bezeichnet:

- Codierung Cod_M einer TM M (M ist eine beliebige TM)
- Eingabe w (für M)
- TM M_1, die "$Cod_M 111w$" verarbeitet und als Resultat das Ergebnis der TM M angesetzt auf w liefert (für alle w).

Anmerkung: Die Folge "111" in der Eingabe für M_1 dient wiederum als eindeutiges Trennzeichen zwischen der Zeichenfolge, die M codiert, und der Eingabezeichenfolge w für M.

Universelle TM

Anmerkungen:

- Für eine TM M existieren viele Codierungsmöglichkeiten. Beispielsweise können die Codes für die Übergangsfunktionen in unterschiedlicher Reihenfolge notiert werden.
- In der Vergangenheit wurden universelle TM intensiv untersucht, u. a. auch die Frage nach der universellen TM mit der geringsten Komplexität.

  Claude Shannon zeigte bereits 1956, dass es eine universelle TM mit 2 Zuständen mit beliebig vielen Symbolen bzw. mit 2 Symbolen bei beliebig vielen Zuständen gibt.

  In der Folge wurden universelle TM mit 15 Zuständen bei 2 Symbolen bzw. 2 Zuständen mit 18 Symbolen gefunden.

  Als aktuell "kleinste" universelle TM gilt eine TM von Rogozhin, die mit nur 4 Zuständen, 6 Symbolen und 22 Übergängen auskommt.