Anwendungen der Integralrechnung: Teil 1

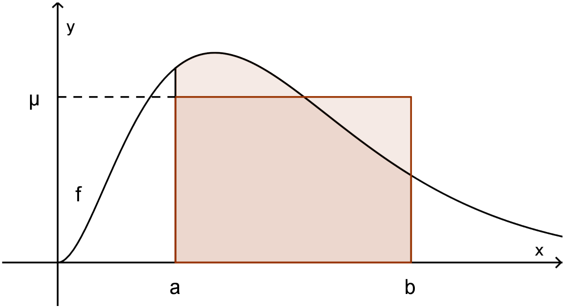
Andreas Henrici

MANIT2 IT18ta_ZH

19.03.2019

Überblick

Mittelwert einer Funktion: Konzept



- *Idee* des Mittelwerts von $f(x)$ auf $[a, b]$: Durchschnitt aller Funktionswerte
- *Definition* des *Mittelwert* μ der Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$: Höhe des Rechtecks, das
  - eine Grundlinie der Länge $b - a$ hat und
  - dessen Flächeninhalt der Fläche unter der Kurve von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ entspricht.

Mittelwert einer Funktion: Berechnung

Satz

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Der Mittelwert μ von $f(x)$ auf $[a, b]$ ist gegeben durch

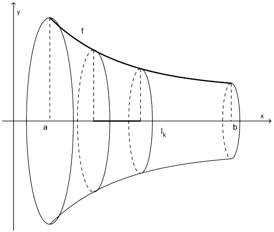
$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel

Berechnen Sie den Mittelwert von $f(x) = x^2 + 2$ auf dem Intervall $[2, 4]$.

Rotationsvolumen: Konzept

Rotationskörper einer Funktionskurve:



Idee zur Berechnung des Rotationsvolumens:

- Approximation des Körpers durch Zylinderstücke
- Approximatives Volumen als Summe der Volumina aller Zylinderstücke
- Exaktes Volumen im Limes unendlich feiner Unterteilung

Rotationsvolumen: Berechnung

- Volumen eines senkrechten Kreiszylinders mit Radius r und Höhe h:
$$V = \pi r^2 h$$
- Zerlegung in n Stücke; Volumen v_k des k-ten Zylinderstücks:
$$v_k = \pi \cdot (f(\xi_k))^2 \cdot \Delta x_k \quad (x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1})$$
- Approximation des Gesamtvolumens:
$$V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$
- Exakte Formel im Limes $n \to \infty$:
$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k))^2 \cdot \Delta x_k .$$
- Notation als Integral:
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x .$$

Rotationsvolumen: Resultat und Beispiel

Satz

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion. Das Volumen des durch Rotation von $f(x)$ um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers ist

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

Beispiel

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers der Funktion $f(x) = 3x + 2$ im Intervall $I = [1, 2]$

a) mit einer elementargeometrischen Formel,

b) mit der Integralformel.

Rotationsvolumen: Beispiele

Beispiel

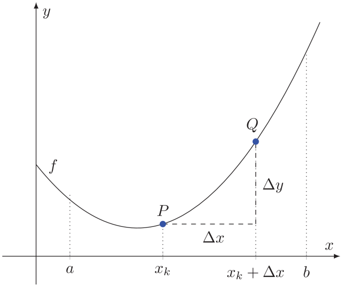
Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers der Funktionen

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ im Intervall $I = [0, 3]$

c) $f(x) = \cos(x)$ im Intervall $I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Bogenlänge einer Kurve: Konzept

Ziel: *Länge* einer Kurve berechnen



Berechnungsidee:

- Approximation der Kurve durch Geradenstücke
- Approximative Länge als Summe der Längen aller Geradenstücke
- Exakte Länge im Limes unendlich feiner Unterteilung

Bogenlänge einer Kurve: Berechnung

- Zerlegung in n Stücke; Länge l_k des k-ten Geradenstücks:

$$l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta f_k^2} = \Delta x_k \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_k}{\Delta x_k}\right)^2}.$$

- Approximation für die Gesamtlänge:

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} l_k$$

- Exaktes Resultat im Limes $n \to \infty$:

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_k}{\Delta x_k}\right)^2}.$$

- Notation als Integral:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Bogenlänge einer Kurve: Resultat, Beispiel

Satz

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion. Die Länge der Funktionskurve von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ ist

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Beispiel

Berechnen Sie die Länge der Funktionskurve der Funktion $f(x) = 3x + 2$ im Intervall $I = [0, 2]$

i) mit einer elementargeometrischen Formel,

ii) mit der Integralformel.

Bogenlänge einer Kurve: Beispiele

Beispiel

Berechnen Sie die Länge der Funktionskurve der Funktionen

i) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ im Intervall $I = [0, 3]$.

iii) $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $I = [0, \pi]$.