Differentialrechnung: Teil 1

Andreas Henrici

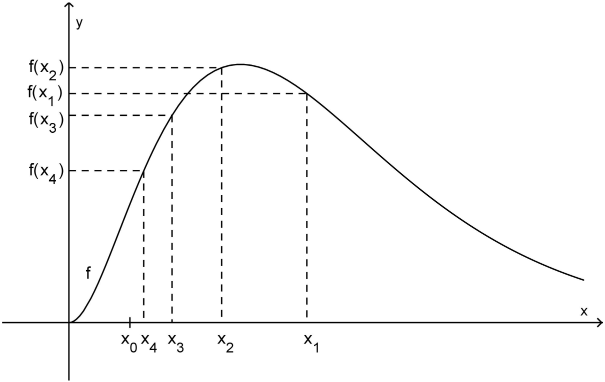
MANIT1 IT18ta_ZH

12.11.2018

Überblick

Fragestellung

- Gegeben: Funktion $y = f(x)$ mit Definitionsbereich D, $x_0 \in \mathbb{R}$
- Es muss nicht unbedingt $x_0 \in D$ gelten
- Grenzwert von $y = f(x)$ an der Stelle x_0?
- Idee: Wir wählen eine Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ und schauen, wie sich die Folge $(f(x_n))$ verhält!



Grenzwert von Funktionen: Beispiel 1

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$ $x_0 \in D$.

n	$x_n = 2 - \frac{1}{n}$	$f(x_n)$	$\tilde{x}_n = 2 + \frac{1}{n}$	$f(\tilde{x}_n)$
1	1	1	3	9
2	1.5	2.25	2.5	6.25
3	1.666...	2.777...	2.333...	5.444...
4	1.75	3.0625	2.25	5.0625
5	1.8	3.24	2.2	4.84
10	1.9	3.61	2.1	4.41
100	1.99	3.9601	2.01	4.0401
1000	1.999	3.996001	2.001	4.004001
Grenzwert für $n \to \infty$	$x_0 = 2$	4	$x_0 = 2$	4

Es gilt

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Grenzwert von Funktionen: Beispiel 2

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ an der Stelle $x_0 = 1$, $x_0 \notin D$!

n	$x_n = 1 - \frac{1}{n}$	$f(x_n)$	$\tilde{x}_n = 1 + \frac{1}{n}$	$f(\tilde{x}_n)$
1	0	1	2	3
2	0.5	1.5	1.5	2.5
3	0.666...	1.666...	1.333...	2.333...
4	0.75	1.75	1.25	2.25
5	0.8	1.8	1.2	2.2
10	0.9	1.9	1.1	2.1
100	0.99	1.99	1.01	2.01
1000	0.999	1.999	1.001	2.001
Grenzwert für $n \to \infty$	$x_0 = 1$	2	$x_0 = 1$	2

Es gilt
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Grenzwert von Funktionen: Beispiel 3

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x}{|x|}$ an der Stelle $x_0 = 0$ $x_0 \notin D$.

n	$x_n = \frac{1}{n}$	$f(x_n)$	$\tilde{x}_n = -\frac{1}{n}$	$f(\tilde{x}_n)$	$\hat{x}_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$f(\hat{x}_n)$
1	1	1	-1	-1	-1	-1
2	0.5	1	-0.5	-1	0.5	1
3	0.333...	1	-0.333...	-1	-0.333...	-1
4	0.25	1	-0.25	-1	0.25	1
5	0.2	1	-0.2	-1	-0.2	-1
10	0.1	1	-0.1	-1	0.1	1
100	0.01	1	-0.01	-1	0.01	1
101	0.0099	1	-0.0099	-1	-0.0099	-1
Grenzwert für $n \to \infty$	$x_0 = 0$	1	$x_0 = 0$	-1	$x_0 = 0$	

Es gibt keinen Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Grenzwert von Funktionen an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$

Definition

- Gegeben: $y = f(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Die Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle x_0 den *Grenzwert* y_0, falls für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.
- Kurz notiert:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \iff \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0 \quad \forall\, (x_n) \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

- Besitzt die Funktion f an der Stelle x_0 keinen Grenzwert, so ist f an der Stelle x_0 *divergent*.

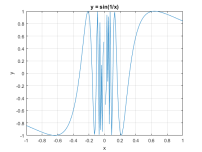
Bemerkung

- Es wird nicht vorausgesetzt, dass $x_0 \in D(f)$ gilt.
- Falls $x_0 \in D(f)$ gilt, wird nicht verlangt, dass $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt (falls das gilt, ist f stetig bei x_0, siehe später).

Grenzwert von Funktionen: Beispiel

Beispiel

Hat $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ an der Stelle $x_0 = 0$ einen Grenzwert?



- Durch Betrachtung des Graphen ist sofort ersichtlich, dass der gesuchte Grenzwert nicht existiert! Die folgenden Überlegungen dienen dazu, diesen Sachverhalt durch Anwendung des Grenzwertkriteriums auszudrücken.
- $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot n}$: $f(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$
- $x_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot n}$: $f(x_n) = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -1$
- Also kann f an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert haben!

Grenzwert von Funktionen für $x \to \infty$: Definition

Definition

- Gegeben: $y = f(x)$
- Die Funktion $y = f(x)$ hat für $x \to \infty$ den Grenzwert y_0, falls für jede Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.
- Kurz notiert:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0 \iff \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0 \quad \forall\,(x_n) \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

- Besitzt die Funktion f für $x \to \infty$ keinen Grenzwert, so ist f für $x \to \infty$ *divergent*.

Bemerkung

- Auch bestimmte Divergenz möglich, d.h. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$
- Im Fall von $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ kann man oft eine Asymptote von $f(x)$ für $x \to \infty$ angeben, siehe rationale Funktionen.

Grenzwert von Funktionen für $x \to \infty$: Beispiele

Beispiel

Grenzwert für $x \to \infty$?

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{7x+1}{5x+6}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

d) $f(x) = \sin(x)$

e) $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$

Grenzwert von Funktionen für $x \to \infty$: Beispiele

Beispiel

Grenzwert für $x \to \infty$?

a) $f(x) = \frac{1}{x}$: konvergent, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

b) $f(x) = \frac{7x+1}{5x+6}$: konvergent, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{7}{5}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$: divergent, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

d) $f(x) = \sin(x)$: divergent, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert nicht

e) $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$: konvergent, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Rechnen mit Grenzwerten

Satz

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei konvergente Funktionen mit

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_1, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = y_2 \qquad (y_1, y_2 \in \mathbb{R}),$$

und seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $\lim_{x\to x_0} (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$

b) $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = y_1 \cdot y_2$

c) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{y_1}{y_2}$, *falls $g(x) \neq 0$ und $y_2 \neq 0$*

Bemerkung

Die Regeln gelten auch für $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_1$ und $\lim_{x\to\infty} g(x) = y_2$, aber nur für $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Mit ∞ kann man nicht rechnen wie mit gewöhnlichen Zahlen!

Stetigkeit: Anschaulich und präzise

Verschiedene Konzepte von Stetigkeit:

- *Anschaulich:* Eine Funktion f heisst *stetig* auf einem Intervall $I \subseteq D$, falls man den zugehörigen Graphen der Funktion von einem Intervallendpunkt zum anderen zeichnen kann, ohne den Stift dabei abzusetzen.
- *Präzise:*

Definition

a) Eine Funktion f, die in einer Umgebung von x_0 (inkl. x_0) definiert ist, heisst *stetig an der Stelle* x_0, falls der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und mit $f(x_0)$ übereinstimmt, d.h. falls gilt:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

b) Eine Funktion f heisst *stetig*, falls sie an jedem Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs stetig ist.

Stetigkeit der Grundfunktionen

Satz

a) *Polynome* $y = a_n x^n + \ldots + a_0$ *sind auf ganz* $\mathbb{R}$ *stetig.*

b) *Gebrochenrationale Funktionen* $y = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ *für Polynome* p_1, p_2 *sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich stetig.*

c) *Exponentialfunktionen* $y = a^x$ *(für* $a > 0$*) sind auf ganz* $\mathbb{R}$ *stetig.*

d) *Logarithmusfunktionen* $y = \log_a(x)$ *(für* $a > 0$*) sind auf ganz* $\mathbb{R}^+$ *stetig.*

Bemerkung

- Sind gebrochenrationale Funktionen $y = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ stetig?
- Ja, denn sie sind für jedes $x_0 \in D(f)$ stetig.
- An den Definitionslücken (hebbar oder Polstelle) sind sie gar nicht definiert, also können sie dort auch nicht unstetig sein
- Die Frage der Stetigkeit an der Stelle x_0 stellt sich nur, wenn $x_0 \in D(f)$ gilt.

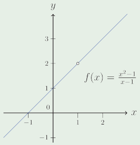
Stetigkeit von rationalen Funktionen: Beispiel

Beispiel

a) Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ist auf ihrem ganzen Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ stetig.



b) Die Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{für } x \neq 1 \\ 2, & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Es gilt nämlich für alle $x \in \mathbb{R}$: $\tilde{f}(x) = x + 1$.

Stetigkeit von rationalen Funktionen: Beispiel

Beispiel

a) Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ist auf ihrem ganzen Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig.

b) Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ c, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, aber an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig.

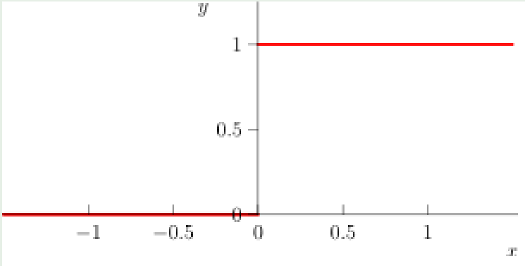
Unstetige Funktionen: Beispiel

Beispiel

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig und überall sonst stetig.



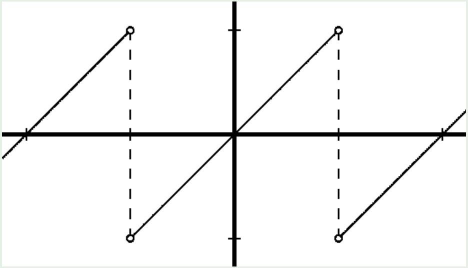
Unstetige Funktionen: Beispiel

Beispiel

Die Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x, & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ (2-\text{periodisch}), & \text{sonst} \end{cases}$$

ist an den Stellen $x_0 = -1, 1, 3, 5, \ldots$ unstetig, an allen anderen Stellen hingegen stetig.



Rechnen mit Grenzwerten

Satz (Rechnen mit Grenzwerten)

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen, die an der Stelle x_0 stetig sind, und seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- **a)** *Die Funktion $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig.*
- **b)** *Die Funktion $f(x) \cdot g(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig.*
- **c)** *Die Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ ist an der Stelle x_0 stetig (falls $g(x_0) \neq 0$).*
- **d)** *Falls $g(x)$ an der Stelle x_0 stetig ist und $f(x)$ an der Stelle $g(x_0)$, so ist die Verknüpfung $(f \circ g)(x)$ an der Stelle x_0 stetig.*

Eigenschaften von stetigen Funktionen

Satz

Die Funktion f sei im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig. Dann gilt:

a) *f ist in $[a, b]$ beschränkt, d.h. es gibt ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.*

b) *f nimmt in $[a, b]$ zwischen zwei Funktionswerten jeden beliebigen Zwischenwert an.*

c) *Insbesondere gilt: Falls f in $[a, b]$ stetig ist, und falls $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt, so gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ (d.h. $a < x_0 < b$) mit $f(x_0) = 0$.*

Bemerkung

Die letzte Tatsache wird zur Konstruktion numerischer Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen verwendet (Bisektion).