Grundlagen: Teil 2

Andreas Henrici

MANIT1 IT18ta_ZH

24. September 2018

Überblick

Äquivalenzumformungen

	Gleichungen	**Ungleichungen**
Addition/Subtraktion ...	des gleichen Wertes auf beiden Seiten	
Multiplikation auf beiden Seiten mit ...	einem *beliebigen* Wert $\neq 0$	einem Wert > 0
Division auf beiden Seiten durch ...	einen *beliebigen* Wert $\neq 0$	einen Wert > 0
	Bilden des Kehrwertes (falls beide Seiten $\neq 0$ sind)	

Vorsicht:

- Keine Division durch 0!

Lineare Gleichungen

- Grundmuster:

$$ax + b = 0$$

- Lösungsmenge:

Satz

Die Lösungsmenge der linearen Gleichung $ax + b = 0$ ist:

- *falls $a \neq 0$:* $\mathbb{L} = \{-\frac{b}{a}\}$
- *falls $a = 0$, $b \neq 0$:* $\mathbb{L} = \emptyset$
- *falls $a = b = 0$:* $\mathbb{L} = \mathbb{R}$

- Vorschau auf die lineare Algebra: Die Anzahl Lösungen eines linearen Gleichungssystems ist 0,1 oder ∞.

Quadratische Gleichungen

Satz

Die reellen Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ *(mit* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *und* $a \neq 0$*) sind*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die Anzahl Lösungen lässt sich also am Vorzeichen der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ *ablesen:*

- $D > 0$: *2 reelle Lösungen*
- $D = 0$: *1 reelle Lösung*
- $D < 0$: *keine reelle Lösung*

Herleitung der Formel: Quadratisches Ergänzen

Gleichungen mit Wurzelausdrücken

Allgemeines:

- Vorgehen zur Lösung: Wurzelausdrücke auf einer Seite isolieren, dann quadrieren
- Vorsicht: Diese Operation ist *keine* Äquivalenzumformung
- Durch Quadrieren vergrössert sich die Lösungsmenge, man erhält „Scheinlösungen“
- Notwendiger Zusatzschritt: Am Ende bei allen erhaltenen Lösungen prüfen, ob sie die Gleichung erfüllen!

Beispiel

Die Lösungsmenge der Gleichung

$$x - 3 = 0$$

ist $\mathbb{L} = \{3\}$, aber die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 - 9 = 0$$

ist $\mathbb{L} = \{3, -3\}$.

Gleichungen mit Substitution lösen

- Biquadratische Gleichungen
  - Biquadratische Gleichungen:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

  - Substitution: $u = x^2$
  - Neue Gleichung: $au^2 + bu + c = 0$
  - Die Lösungen der biquadratischen Gleichung sind $x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{u_{1,2}}$, falls $u_{1,2}$ nichtnegative Lösungen von $au^2 + bu + c = 0$ sind.
- Exponentialgleichungen
  - Gleichungen von folgendem Typ:

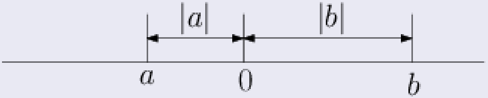
$$ap^{2x} + bp^x + c = 0 \qquad (p > 0)$$

  - Substitution: $u = p^x$
  - Neue Gleichung: $au^2 + bu + c = 0$
  - Die Lösungen der Exponentialgleichung sind $x_{1,2} = \frac{\ln(u_{1,2})}{\ln(p)}$, falls $u_{1,2}$ positive Lösungen von $au^2 + bu + c = 0$ sind.

Betrag: Konzept

Definition

Für eine Zahl a bezeichnet der *Betrag* (Schreibweise: $|a|$) den *Abstand* von a zum Nullpunkt der Zahlengeraden.



Um den Betrag durch eine Formel auszudrücken, braucht man eine *Fallunterscheidung*:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Bemerkung

Formel für $|a|$ ohne Fallunterscheidung:

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Gleichungen mit Betragsausdrücken

Vorgehen bei Gleichungen mit Beträgen:

- Fallunterscheidungen durchführen!