Taylorreihen: Teil 2

Andreas Henrici

MANIT2 IT18ta_ZH

07.-14.05.2019

Überblick

Symmetrie: Repetition

Symmetrie von Funktionen:

- *Gerade Funktionen:* Eine Funktion $y = f(x)$ ist eine *gerade* Funktion, falls der Graph achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse ist, bzw. falls gilt: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- *Ungerade Funktionen:* Eine Funktion $y = f(x)$ ist eine *ungerade* Funktion, falls der Graph punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs ist, bzw. falls gilt: $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Beispiel

- Die Potenzfunktion $y = x^n$ ist eine gerade bzw. ungerade Funktion, falls n gerade bzw. ungerade ist.
- Die Polynomfunktion $y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ ist eine gerade bzw. ungerade Funktion, falls sie nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen enthält.
- Die Funktion $y = \cos(x)$ ist eine gerade Funktion.
- Die Funktion $y = \sin(x)$ ist eine ungerade Funktion.

Symmetrie von Potenzreihen und Taylorreihen

Symmetrie von Potenzreihen:

- Eine Potenzreihe

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

  ist eine gerade bzw. ungerade Funktion, falls sie nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen enthält.

Symmetrie von Taylorreihen:

- Falls die betrachtete Funktion eine *gerade* Funktion ist, enthält die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit *geraden* Exponenten, d.h. es gilt $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
- Falls die betrachtete Funktion eine *ungerade* Funktion ist, enthält die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit *ungeraden* Exponenten, d.h. es gilt $a_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Symmetrie von Taylorreihen: Beispiel

Beispiel

- Erinnerung an die Taylorreihen von $y = \cos(x)$ bzw. $y = \sin(x)$:

$$
\begin{aligned}
t_{\cos}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
t_{\sin}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}
$$

- Zusammenhang mit Symmetrie:
  - $y = \cos(x)$ ist eine gerade Funktion, also enthält die Taylorreihe $t_{\cos}(x)$ nur gerade Potenzen.
  - $y = \sin(x)$ ist eine ungerade Funktion, also enthält die Taylorreihe $t_{\sin}(x)$ nur ungerade Potenzen.

Binomialreihe: Grundidee

- *Ziel:* Taylorreihe von Potenzen mit beliebigen (nicht-natürlichen) Exponenten bestimmen, d.h. von Funktionen vom Typ $f(x) = x^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$
- Untersuchung bei $x_0 = 0$ ungeeignet, da x^α für negative x evtl. nicht definiert und an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.
- Besser: Untersuchung bei $x_0 = 1$, oder äquivalent: Untersuchung der Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$ an der Stelle $x_0 = 0$.
- Ausganspunkt: Falls $\alpha \in \mathbb{N}$, ist $f(x) = (1+x)^\alpha$ ein Polynom (binomische Formel):

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \; (0 \leq k \leq n)$$

- Beobachtung: Diese binomische Formel ist in diesem Fall auch die Taylorreihe der Funktion, denn es gilt:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Binomialreihe: Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten

- *Ziel:* Taylorreihe von $f(x) = (1+x)^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig
- Taylorkoeffizienten von $f(x) = (1+x)^\alpha$:

$$f^{(k)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1) \cdot (1+x)^{\alpha-k}$$

also

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$$

- Falls $\alpha \in \mathbb{N}$, sind das die bekannten Binomialkoeffizienten:

$$\frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)! \cdot k!} = \binom{\alpha}{k}$$

- Falls $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig, *definieren* wir die *verallgemeinerten Binomialkoeffizienten*:

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$$

Binomialreihe: Allgemeine Formel

- *Ziel:* Taylorreihe von $f(x) = (1+x)^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig
- Taylorkoeffizienten:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

- Taylorreihe:

$$t_f(x) = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

- Diese Reihe heisst *Binomialreihe*: Verallgemeinerung der binomischen Formel

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + x^n$$

auf nicht-natürliche Exponenten

Binomialreihe: Beispiele

Beispiel

Bestimmen Sie explizit einige Terme der Binomialreihe

$$1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

für die Exponenten

- $\alpha = \frac{1}{2}$
- $\alpha = -1$

Berechnung von Integralen via Taylorpolynome

- *Idee:* Integrale können via Taylorpolynome näherungsweise berechnet werden, wenn der Integrand keine analytisch darstellbare Stammfunktion hat.

Beispiel

- Wir betrachten das Integral
$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$
- Die Funktion $f(t) = e^{-t^2}$ hat *keine* analytisch darstellbare Stammfunktion.
- Wir berechnen das Integral näherungsweise, indem wir für $f(t)$ ein Taylorpolynom hoher Ordnung einsetzen und dann das Integral für dieses Polynom berechnen.

Berechnung von Integralen via Taylorpolynome

Beispiel (Fortsetzung)

- Wir betrachten das Integral

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

- Taylorreihe von $f(x) = e^{-x^2}$: entweder direkt mit der Formel

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

oder via die bekannte Taylorreihe von e^x:

$$t_{e^x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

also

$$t_{e^{-x^2}} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} \mp \dots$$

Berechnung von Integralen via Taylorpolynome

Beispiel (Fortsetzung)

- Wir betrachten das Integral $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
- Einsetzen des Taylorpolynoms ins Integral:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\approx 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} \end{aligned}$$

- Einsetzen von $x = 1$:

$$F(1) = \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \approx 1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5\cdot 2!} - \frac{1^7}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} = 0.7475\ldots$$

- Dies entspricht einer Genauigkeit von 3 Nachkommastellen.

Ausgangslage

Erinnerung:

- Gegeben: Funktion $y = f(x)$, Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$
- Taylorpolynome: Polynome $y = p_n(x)$ vom Grad $\leq n$ mit

$$p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

für alle $0 \leq k \leq n$

- Taylorreihe: Potenzreihe $t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ mit

$$t_f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$

- Die Taylorpolynome und die Taylorreihe sollen die Funktion $y = f(x)$ in der Nähe von x_0 so gut wie möglich approximieren.

Approximation durch die Taylorreihe

- Ist die Taylorreihe $t_f(x)$ eine perfekte "Approximation" von $f(x)$? D.h. gilt
$$t_f(x) = f(x) \text{ für alle } x \in D(f) \quad ?$$
- "Ja" in den Beispielen $y = \cos(x)$, $y = \sin(x)$, $y = e^x$
- "Nein" im Beispiel $y = \ln(x)$
- Allgemeiner: Für welche $x \in D(f)$ gilt $t_f(x) = f(x)$?
- Dies kann nur gelten, wenn
  - **i)** die Taylorreihe $t_f(x)$ eine konvergente Reihe ist, und
  - **ii)** die Werte der Funktion und der konvergenten Reihe übereinstimmen.
- Wir untersuchen nur den Punkt i); man kann aber Beispiele konstruieren, wo $t_f(x)$ zwar konvergent ist, aber trotzdem $t_f(x) \neq f(x)$ gilt für alle $x \neq x_0$

Konvergenz von Potenzreihen: Definition

- Sei
$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$
eine Potenzreihe.
- Die Konvergenz von $p(x)$ hängt von x ab! D.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $p(x)$ eine (Zahlen-)Reihe, die konvergent oder divergent sein kann.
- Die Frage der Konvergenz stellt sich auch dann, wenn $p(x)$ keine Taylorreihe einer gegebenen Funktion ist.

Definition

Die Menge

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ ist konvergent} \right\}$$

heisst der *Konvergenzbereich* der Potenzreihe $p(x)$.

Konvergenz von Potenzreihen: Grundlegendes

- Intuitiv: Ein $x \in \mathbb{R}$ gehört eher zum Konvergenzbereich von $p(x)$, wenn es nahe beim Entwicklungspunkt x_0 liegt, als wenn es weit davon entfernt liegt.
- Der Konvergenzbereich ist immer ein *Intervall mit Zentrum* x_0.
- Der Abstand zwischen dem Entwicklungspunkt x_0 und dem Rand des Konvergenzbereichs heisst der *Konvergenzradius* der Potenzreihe und wird mit ρ bezeichnet.

Definition

Der *Konvergenzradius* ρ einer Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist eine Zahl mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$ konvergiert die Reihe $p(x)$.
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > \rho$ divergiert die Reihe $p(x)$.

- Über die Konvergenz in den Fällen $|x - x_0| = \rho$ (d.h. $x = x_0 + \rho$ oder $x = x_0 - \rho$) kann keine allgemeine Aussage gemacht werden.

Konvergenz von Potenzreihen: Resultat

Satz

Sei $\rho \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius einer Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. Der (reelle) Konvergenzbereich von $p(x)$ ist das Intervall

$$(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

zusammen mit 0,1 oder 2 Randpunkten dieses Intervalls.

Bemerkung

Es können also auch folgende Extremfälle von Konvergenzradien auftreten:

- Konvergenzradius $\rho = 0$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ nur für $x = x_0$.
- Konvergenzradius $\rho = \infty$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Berechnung des Konvergenzradius

- Wie können wir den Konvergenzradius einer Potenzreihe berechnen?
- Erinnerung an geometrische Reihen: Die Reihe $s(q) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ gilt.
- Idee zur Berechnung des Konvergenzradius beliebiger Potenzreihen: Vergleich mit geometrischen Reihen!
- D.h. wir betrachten den Quotienten von zwei Gliedern der Reihe:

$$q_k = \frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k(x-x_0)^k} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot (x-x_0)$$

- Damit $|q_k| < 1$ gilt, sollte $|x-x_0| < \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ gelten
- Dies ist aber nicht für ein einzelnes k wichtig, sondern nur im Limes $k \to \infty$!
- Darum gilt $\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$.
- Falls dieser Limes nicht existiert, brauchen wir eine andere Formel.

Konvergenzradius: Formel

Satz

Der Konvergenzradius ρ einer Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ kann mit folgenden Formeln berechnet werden:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \qquad oder \qquad \rho = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

Bemerkung

- Diese Formeln sind beide richtig und ergeben das gleiche Resultat, wenn beide Grenzwerte existieren.
- Es kann aber vorkommen, dass einer (oder beide) Grenzwerte nicht definiert sind.
- Falls beide Grenzwerte nicht definiert sind, muss auf kompliziertere Formeln zurückgegriffen werden.

Konvergenzradius von Taylorreihen: Beispiele

Beispiel (Fortsetzung)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe

$$t_{e^x}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

der Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Beispiel (Fortsetzung)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe

$$t_{\ln(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$$

der Funktion $f(x) = \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Taylorreihen: Verhalten am Rand des Konvergenzbereichs

- Bei Taylorreihen ist innerhalb des Konvergenzbereichs $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ die Approximation der Funktion durch die Taylorreihe (in den meisten Fällen) perfekt, d.h. es gilt $t_f(x) = f(x)$ für $x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$.
- An den beiden Rändern des Konvergenzbereichs, d.h. für $x = x_0 - \rho$ und $x = x_0 + \rho$, muss die Konvergenz separat untersucht werden.

Beispiel (Fortsetzung)

Untersuchen Sie die Konvergenz der Taylorreihe

$$t_{\ln(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$$

der Funktion $f(x) = \ln(x)$ am Rand des Konvergenzbereichs, d.h. für $x = 0$ und $x = 2$.

Taylorpolynome: Güte der Approximation

- Bei Taylorpolynomen ist die Approximation im Allgemeinen nicht perfekt, d.h. es gilt $p_n(x) \neq f(x)$ für $x \neq x_0$
- Für die Abschätzung des Fehlers bzw. *Restglieds*

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

gibt es Formeln:

Satz (Restgliedformel nach Lagrange)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindestens $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, und sei $p_n(x)$ das Taylorpolynom n-ten Grades von $f(x)$ an der Stelle x_0. Dann gibt es ein ξ zwischen x_0 und x, so dass für das Restglied $R_n(x)$ gilt:

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| .$$

Abschätzung des Restglieds: Beispiel

Satz (Restgliedformel nach Lagrange)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindestens $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, und sei $p_n(x)$ das Taylorpolynom n-ten Grades von $f(x)$ an der Stelle x_0. Dann gibt es ein ξ zwischen x_0 und x, so dass für das Restglied $R_n(x)$ gilt:

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| .$$

Beispiel

Sei f zweimal stetig differenzierbar, $n = 1$. Das Taylorpolynom 1. Grades im Entwicklungspunkt x_0, $p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, (d.h. die Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0) hat für $x \geq x_0$ die Fehlerschranke

$$|p_1(x) - f(x)| \leq \max_{\xi \in [x_0, x]} \frac{|f''(\xi)|}{2}(x - x_0)^2.$$