Reelle Funktionen: Teil 1

Andreas Henrici

MANIT1 IT18ta_ZH

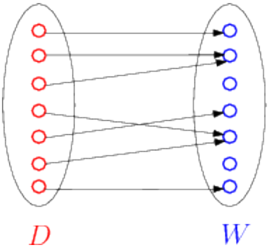
1. Oktober 2018

Überblick

Funktion: Begriff

Definition

- Eine *Funktion* f ist eine Vorschrift, die jedem Element einer Menge D genau ein Element einer Menge W zuordnet.
- D: Definitionsbereich
- W: Wertebereich
- $f : D \to W$, f ist eine Funktion von D nach W



Funktion: Beispiele

Beispiel

- Jeder Person der Klasse IT18ta_ZH wird ihr Geburtsjahr zugeordnet. Hier ist also $D = \{\text{Studierende der Klasse } IT18ta\_ZH\}$, $W = \mathbb{N}$, d.h.
$$f(p) = \text{Geburtsjahr von } p$$
- Einem Quadrat mit Seitenlänge x wird seine Fläche zugeordnet,
$$f(x) = x^2.$$
Hier ist also $D = W = \mathbb{R}^+$.

Bemerkung

Nicht jedes Element aus W muss als Funktionswert vorkommen.

Funktionen von mehreren Variablen

Funktionen können auch von mehreren Variablen abhängen!

Beispiel

- Flächeninhalt eines Rechtecks mit Länge x und Breite y:

$$F(x, y) = x \cdot y.$$

  Hier ist also $D = (\mathbb{R}^+)^2$, $W = \mathbb{R}$.

- Die kinetische Energie eines Körpers,

$$E_{\text{kin}}(m, v) = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

  (m und v bezeichnen die Masse bzw. Geschwindigkeit des Körpers). Hier ist also $D = (\mathbb{R}^+)^2$, $W = \mathbb{R}$.

Funktionsdarstellung: Tabelle

Darstellung mit Tabelle nur sinnvoll/eindeutig, falls D eine endliche Menge ist.

Beispiel

Geburtsjahre der Studierenden der Klasse IT18ta_ZH: ...

Beispiel

Die folgende Tabelle beschreibt die Funktion $y = 2 \cdot x + 2$, wenn sie auf den Definitionsbereich $D = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ eingeschränkt wird:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22

Hier haben wir aber schon eine Formel gegeben: $y = 2 \cdot x + 2 \ldots$

Funktionsdarstellung: Formel

- Darstellung durch eine Formel:

$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & W \\ x & \mapsto & f(x) = \ldots \end{array}$$

- Kurznotation:

$$f(x) = \ldots \quad \text{oder } y = \ldots, \qquad \text{(wenn } D \text{ und } W \text{ klar sind)}$$

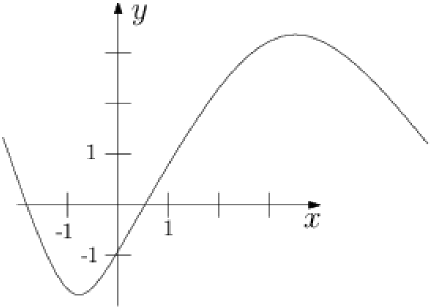
Beispiel

Typisches Beispiel einer reellen Funktion:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x + 2 \end{array}$$

Funktionsdarstellung: Graph

- Graphische Darstellung einer Funktion:



- Abstrakte Definition des Graphen:

Definition

Der *Graph* einer Funktion $f : D \to W$ ist die Menge

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) | x \in D\} \subseteq D \times W.$$

Spezielle Funktionen

Wichtige Beispiele von Funktionen:

Beispiel

- Identitätsfunktion:

$$f(x) = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Graph: siehe unten

- Konstante Funktion:

$$f(x) = c \quad \text{für ein festes } c \in \mathbb{R}$$

Graph: siehe unten

Nullstellen von Funktionen

Definition

Ein $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst *Nullstelle* von f, falls

$$f(x_0) = 0$$

gilt.

Bemerkung

Graphisch bedeutet dies, dass an der Stelle x_0 die Funktionskurve von f die x-Achse schneidet.

Beispiel

Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 9$?

Polynome: Definition

Definition

Eine *Polynomfunktion* bzw. ein *Polynom* oder eine *ganzrationale Funktion* ist eine Funktion der Form:

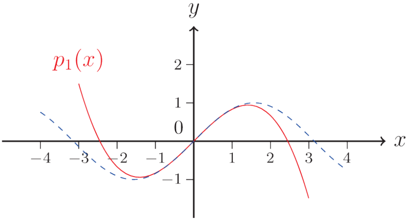
$$y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \quad \text{mit } a_n \neq 0$$

n : *Grad* der Polynomfunktion
$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$: *Koeffizienten*
Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

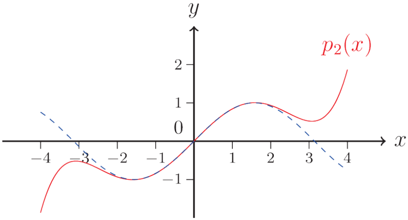
Bedeutung von Polynomen:

- Einfachste Funktionen mit vielfältigen Anwendungen
- Alle Operationen der Analysis (Ableitung, Integration) führen wieder auf Polynome
- Analysis: Kompliziertere Funktionen können durch Polynome approximiert werden (siehe nächste Folie)
- Theoretische Informatik: P-NP-Problem

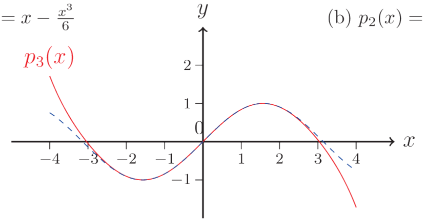
Approximation durch Polynome



(a) $p_1(x) = x - \frac{x^3}{6}$



(b) $p_2(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$



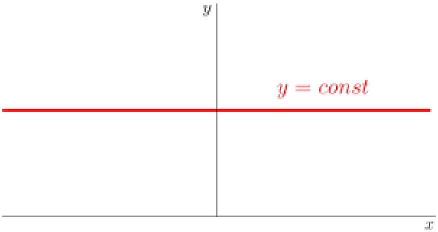
(c) $p_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$

Polynome vom Grad $n = 0$

Polynome vom Grad $n = 0$:

$$y = a_0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

Graph:



Bemerkung

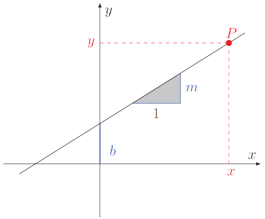
Nach Konvention hat das Polynom $y = 0$ den Grad $-\infty$!

Polynome vom Grad $n = 1$

Polynome vom Grad $n = 1$:

$$y = mx + b \qquad (m \neq 0)$$

Graph:



Bemerkung

Vertikale Geraden, d.h. Geraden parallel zur y-Achse, sind keine Graphen von Funktionen. Sie können aber durch eine Gleichung der Form $x = a$ dargestellt werden.

Lineare Funktionen: Andere Darstellungen

Andere Darstellungen einer linearen Funktion:

- Punkt-Steigungsform:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

- Zwei-Punkte-Form:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

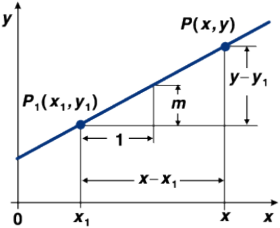


Abbildung: Punkt-Steigungsform

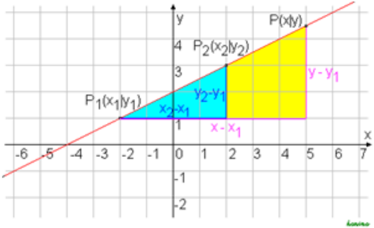


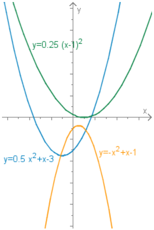
Abbildung: Zwei-Punkte-Form

Polynome vom Grad $n = 2$

Polynome vom Grad $n = 2$:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Graph:



Bemerkung

Alle quadratischen Funktionen können durch Koordinatentransformationen aus $y = x^2$ erhalten werden!

Quadratische Funktionen: Andere Darstellungen

Andere Darstellungen einer quadratischen Funktion:

- Produktform, falls reelle Nullstellen existieren:

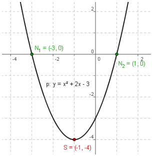
$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

  Bestimmung von x_1, x_2: Quadratische Gleichung lösen!

- Scheitelpunktsform:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

  Bestimmung von x_0, y_0: Quadratische Ergänzung oder direkt $S = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$



Nullstellen von Polynomen: Abspalten von Nullstellen

Satz

Ist x_0 eine Nullstelle der Polynomfunktion $y = f(x)$ vom Grad n, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Polynomfunktion $q(x)$ vom Grad $n-1$, so dass gilt:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot q(x) \quad \textit{für jedes } x \in \mathbb{R}$$

Bestimmung von $q(x)$ bei bekanntem x_0: mit Polynomdivision!

Beispiel

- Polynom:
$$y = x^3 - 1$$
- Nullstelle: $x_0 = 1$
- Darstellung der Form
$$y = (x - 1) \cdot q(x)?$$

Nullstellen von Polynomen: Mehrfache Nullstellen

Definition

Sei $y = f(x)$ eine Polynomfunktion vom Grad n. Ein $x_0 \in \mathbb{R}$ heisst *m-fache Nullstelle* (oder *Nullstelle der Multiplizität/Vielfachheit m*) der Polynomfunktion $f(x)$, falls es eine Polynomfunktion $g(x)$ vom Grad $n - m$ gibt, so dass gilt:

$$f(x) = (x - x_0)^m \cdot g(x) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}$$

Beispiel

- Polynom:
$$y = x^3 + 8x^2 + 13x + 6$$
- Nullstelle: $x_0 = -1$
- Vielfachheit dieser Nullstelle?

Nullstellen von Polynomen: Überblick

Satz

Eine Polynomfunktion vom Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

Satz (Zerlegung in Linearfaktoren)

Falls eine Polynomfunktion n-ten Grades genau n reelle Nullstellen (mit Vielfachheiten) hat, so lässt sie sich darstellen als

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \\ &= a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung)

- Polynom:

$$y = x^3 + 8x^2 + 13x + 6$$

- Zerlegung in Linearfaktoren?