Vorlesung Numerische Mathematik 2

Kapitel 8: Interpolation

23. Oktober 2017

Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

Gliederung des Kapitels

Einführung

- Das Wort “Interpolation” stammt vom lateinischen “interpolare” (auffrischen, umgestalten, verfälschen) und bezeichnet den Versuch, fehlende Daten aufgrund bestehender Daten zu schätzen (bzw. zu interpolieren).
- Wir lernen in diesem Kapitel einige dieser Verfahren kennen.

Lernziele

Lernziele:

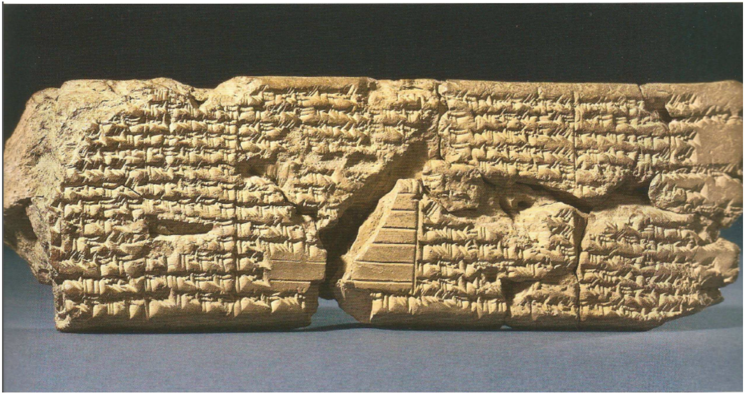
- Sie können mittels der Lagrange - Interpolationsformel und dem Aitken-Neville Schema eine Anzahl Messpunkte durch ein Polynom interpolieren und dieses Schema in MATLAB implementieren.
- Sie können für vorgegebene Stützpunkte die natürliche kubische Splinefunktion berechnen.

8.1 Zur historischen Entwicklung

Zur historischen Entwicklung

- Die ersten Verfahren zur Interpolation gehen zurück in die frühesten Anfänge der Astronomie bzw. dem Versuch, anhand der jährlichen Veränderungen am Firmament Kalender zu entwickeln und Voraussagen zu ermöglichen.
- Die Positionen von astronomischen Objekten wie Sonne, Planeten, Kometen etc. wurden hierzu in sogn. Ephemeriden (Positionstabellen) festgehalten.
- In den Keilschriften der Babylonier bzw. eines Nachfolgereichs der Selekuiden (3.-1. Jhr. v.Chr.) wurde basierend auf solchen Ephemeriden Interpolations-Verfahren (lineare Interpolation, aber offenbar auch komplexere Verfahren) verwendet, um Lücken zu füllen.

Zur historischen Entwicklung



Fragmentarische Ephemeriden (69 v.Chr.) aus der Selekuidenzeit. Aus »Astronomie und Astrologie« in Babylonien, M. Ossendrijver.

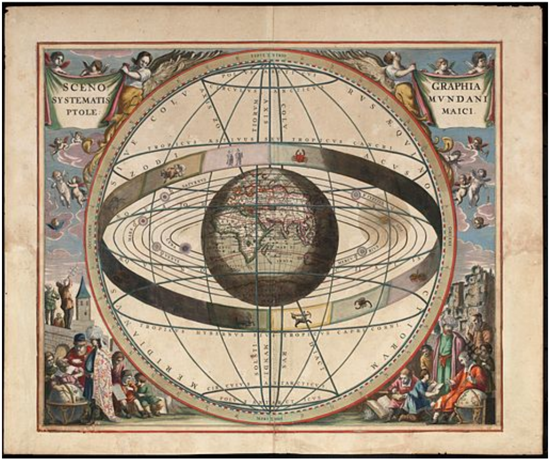
Zur historischen Entwicklung

- Die griechischen Astronomen Hipparchos (190-120 v.Chr.) und Ptolomäus (100-160 n.Chr.) verwendeten lineare Interpolation in ihren astronomischen Werken.
- Das Hauptwerk von Ptolomäus, der Almagest, zementierte das geozentrische Weltbild in Europa bis ins 16. Jahrhundert.
- Beispiele von nichtlinearer Interpolation (also z.B. die Bestimmung einer Parabel durch drei gegebene Punkte) finden sich in mehreren chinesischen (6. Jhr. n.Chr.), persichen und arabischen Werken (11. und 15. Jhr. n.Chr.).

Zur historischen Entwicklung

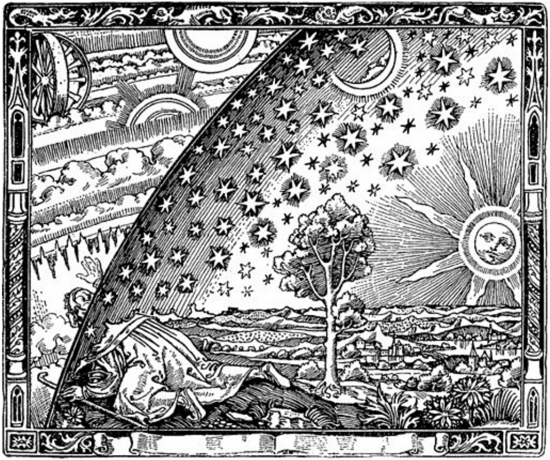
Links: Hipparchus (Phantasiebild). Rechts: Claudius Ptolomäus (neuzeitliches Porträt)

Zur historischen Entwicklung



Ptolomäisches (geozentrisches) Weltbild. By Loon, J. van (Johannes), ca. 1611–1686.

Zur historischen Entwicklung



Ablösung des geozentrischen (ptolomäischen) Weltbilds durch das kopernikanische (heliozentrische). Holzstich von Camille Flammarions (1888).

Zur historischen Entwicklung

- In Europa lieferten die Astronomen Nikolaus Kopernikus (1473-1543), Johannes Kepler (1572-1630) und Galileo Galilei (1564-1642) wichtige Beiträge zur Theorie der Interpolation, welche in den Verfahren von Issac Newton (1643-1727) weiterentwickelt wurden.
- So stellte Newton das Problem "To find a curved line of the parabolic kind which shall pass through any given number of points" (hier ist parabolisch gleichzusetzen mit polynominal) und wendete dessen Lösung im darauffolgenden Lemma an " Certain observed places of a comet being given, to find the place of the same at any intermediate given time" (vgl. nachstehende Abb.).

Zur historischen Entwicklung

COR. 2. But their orbits will be so near to parabolas, that parabolas may be used for them without sensible error.

COR. 3. And, therefore, by Cor. 7, Prop. XVI, Book 1, the velocity of every comet will always be to the velocity of any planet, supposed to be revolved at the same distance in a circle about the sun, nearly in the subduplicate proportion of double the distance of the planet from the centre of the sun to the distance of the comet from the sun's centre, very nearly. Let us suppose the radius of the *orbis magnus*, or the greatest semi-diameter of the ellipsis which the earth describes, to consist of 100000000 parts; and then the earth by its mean diurnal motion will describe 1720212 of those parts, and 71675½ by its horary motion. And therefore the comet, at the same mean distance of the earth from the sun, with a velocity which is to the velocity of the earth as $\surd 2$ to 1, would by its diurnal motion describe 2432747 parts and 101364½ parts by its horary motion. But at greater or less distances both the diurnal and horary motion will be to this diurnal and horary motion in the reciprocal subduplicate proportion of the distances, and is therefore given.

COR. 4. Wherefore if the *latus rectum* of the parabola is quadruple of the radius of the *orbis magnus*, and the square of that radius is supposed to consist of 100000000 parts, the area which the comet will daily describe by a radius drawn to the sun will be 1216373½ parts, and the horary area will be 50682¼ parts. But, if the *latus rectum* is greater or less in any proportion, the diurnal and horary area will be less or greater in the subduplicate of the same proportion reciprocally.

LEMMA V.

To find a curve line of the parabolic kind which shall pass through any given number of points.

Let those points be A, B, C, D, E, F, &c., and from the same to any right line HN, given in position, let fall as many perpendiculars AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c.

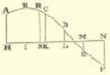
$b \quad 2b \quad 3b \quad 4b \quad 5b$

$c \quad 2c \quad 3c \quad 4c$

$d \quad 2d \quad 3d$

$e \quad 2e$

f



CASE 1. If HI, IK, KL, &c., the intervals of the points H, I, K, L, M, N, &c., are equal, take $b, 2b, 3b, 4b, 5b$, &c., the first differences of the perpendiculars AH, BI, CK, &c.; their second differences $c, 2c, 3c, 4c$, &c.; their third, $d, 2d, 3d$, &c., that is to say, so as AH — BI may be $= b$, BI

— CK $= 2b$, CK — DL $= 3b$, DL + EM $= 4b$, — EM + FN $= 5b$, &c., then $b - 2b = c$, &c., and so on to the last difference, which is here f. Then, erecting any perpendicular RS which may be considered as an ordinate of the curve required, in order to find the length of this ordinate, suppose the intervals HI, IK, KL, LM, &c., to be units, and let AH $= a$, — HS $= p$, ½p into — IS $= q$, ⅓q into + SK $= r$, ¼r into + SL $= s$, ⅕s into + SM $= t$; proceeding, to wit, to ME, the last perpendicular but one, and prefixing negative signs before the terms HS, IS, &c., which lie from S towards A; and affirmative signs before the terms SK, SL, &c., which lie on the other side of the point S; and, observing well the signs, RS will be $= a + bp + cq + dr + es + ft$, + &c.

CASE 2. But if HI, IK, &c., the intervals of the points H, I, K, L, &c., are unequal, take $b, 2b, 3b, 4b, 5b$, &c., the first differences of the perpendiculars AH, BI, CK, &c., divided by the intervals between those perpendiculars; $c, 2c, 3c, 4c$, &c., their second differences, divided by the intervals between every two; $d, 2d, 3d$, &c., their third differences divided by the intervals between every three; $e, 2e$, &c., their fourth differences, divided by the intervals between every four; and so forth; that is, in such manner, that b may be $= \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c., then $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c., then $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. And those differences being found, let AH be $= a$, — HS $= p$, p into — IS $= q$, q into + SK $= r$, r into + SL $= s$, s into + SM $= t$; proceeding, to wit, to ME, the last perpendicular but one; and the ordinate RS will be $= a + bp + cq + dr + es + ft$, + &c.

COR. Hence the areas of all curves may be nearly found; for if some number of points of the curve to be squared are found, and a parabola be supposed to be drawn through those points, the area of this parabola will be nearly the same with the area of the curvilinear figure proposed to be squared: but the parabola can be always squared geometrically by methods vulgarly known.

LEMMA VI.

Certain observed places of a comet being given, to find the place of the same to any intermediate given time.

Let HI, IK, KL, LM (in the preceding Fig.), represent the times between the observations; HA, IB, KC, LD, ME, five observed longitudes of the comet; and HS the given time between the first observation and the longitude required. Then if a regular curve ABCDE is supposed to be drawn through the points A, B, C, D, E, and the ordinate RS is found out by the preceding lemma, RS will be the longitude required.

Zur historischen Entwicklung

- Eine elegante alternative Formulierung von Newtons Interpolationsformeln gelang 1795 dem italienischen Astronom und Mathematiker Giuseppe Lodovico Lagrangia (1736-1813), besser bekannt als Joseph-Louis Lagrange (siehe Kap. 8.2 zur Lagrange-Interpolationsformel).
- Weiterentwicklungen bzw. Verallgemeinerungen wurden von den französichen Mathematikern Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) und Charles Hermite (1822-1901) publiziert.

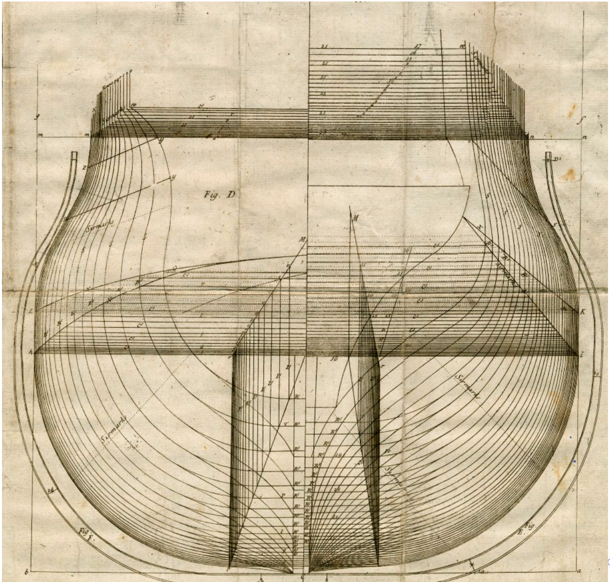
Zur historischen Entwicklung

- Ergänzend zur Theorie der Polynom-Interpolation wurde der Ansatz der stückweisen Intepolation durch sogn. Splines (siehe Kap. 8.3) entwickelt.
- Zu den Pionieren der Splineforschung gehörte der rumänsich-amerikanischen Mathematiker Isaac Jacob Schoenberg (1903-1990).
- Der Begriff Spline beschreibt hier eine glatte mathematische Kurve, stückweise zusammengesetzt aus Polynomen höherer (z.B. dritter) Ordnung.
- Im Schiffbau ist ein Spline eine lange dünne Latte, die an einzelnen Punkten fixiert wird und z.B. die Form des Schiffrumpfes definiert.
- Splines und weitere Interpolationstechniken kommen heute vor allem in der Signal- und Bildverarbeitung zum Einsatz.

Zur historischen Entwicklung

Isaac Jacob Schoenberg (1976)

Zur historischen Entwicklung



8.2 Problemstellung

Problemstellung

- Bei der Interpolation geht es darum, bei einer Wertetabelle, die Lücken aufweist, die fehlenden Funktionswerte anzunähern.
- Es sei also eine Wertetabelle einer Funktion f mit $y_i = f(x_i)$ der Art

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_{j-1}	x_j	x_{j+1}	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_{j-1}	**?**	y_{j+1}	$\dots$	y_n

  gegeben. Die $n+1$ Wertepaare (x_i, y_i) heissen Stützpunkte, die x_i Stützstellen und die y_i Stützwerte.

Problemstellung

- Gesucht ist nun eine möglichst gute Näherung des fehlenden Wertes y_j.
- Wir möchten also eine (stetige) Funktion finden, welche die eigentliche Funktion $f(x)$ an der Stelle $f(x_j)$ möglichst gut approximiert und exakt durch die bekannten Stützpunkte in der Umgebung von x_j geht.
- Eine solche Funktion nennt man Interpolierende.
- Interpolation kommt vor allem zur Anwendung, wenn die Funktion $f(x)$ nicht genügend bekannt oder nur schwer exakt zu berechnen ist. Auch in der digitalen Bildbearbeitung wird häufig interpoliert.

Problemstellung

Definition 8.1: Interpolationsproblem [1]

- Gegeben sind $n+1$ Wertepaare (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$, mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Gesucht ist eine stegige Funktion g mit der Eigenschaft $g(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, \dots, n$.

Beispiel 8.1

- Aus einer Temperaturmessung ergeben sich im Tagesverlauf die Werte. Gesucht ist zum Beispiel die Temperatur um 11 Uhr.

t	08.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00	Uhr
T	11.2	13.4	15.3	19.5	18.9	16.1	$^\circ C$

- Wir betrachten die (nicht einfach zu berechnende) Funktion $f(x) = \int_0^x e^{\sin t} dt$, welche in tabellierter Form vorliegt. Gesucht ist der Wert $f(0.66) = ?$

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
y	0.4904	0.6449	0.8136	0.9967	1.1944	1.4063

Beispiel 8.1

- Bildverarbeitung: Ein Bild mit der Auflösung 800×800 Pixel soll vergrössert werden auf die neue Auflösung 1200×1200.
- Die zusätzlichen Pixel müssen 'gefüllt' bzw. interpoliert werden.
- Dabei werden nicht neue Informationen erzeugt, sonder nur die bestehenden Pixel sozusagen 'gestreckt'.
- Das vergrösserte Bild erscheint deshalb unscharf, aber dafür ohne Lücken[1].

Problemstellung

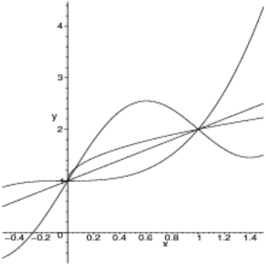
- Die Interpolation geschieht also ach dem folgenden Prinzip: man sucht eine Interpolierende $g(x)$, welche leicht berechenbar sein soll und für die gilt

$$g(x_i) = f(x_i)$$

  für einige Stützstellen in der Nähe von x_j.
- Es ist offensichtlich, dass bei einer solchen Fragestellung unendlich viele Lösungen möglich sind, wie im folgenden Beispiel gezeigt:

Beispiel 8.2

- Es soll eine Interpolierende für die beiden Stützpunkte (0, 1) und (1, 2) gefunden werden.
- Lösung: im einfachsten Fall könnte man eine Gerade durch die beiden Punkte legen, also $g(x) = x + 1$. Aber auch $g(x) = \sqrt{x} + 1$, $g(x) = x^3 + 1$ oder $g(x) = \sin(\pi x) + x + 1$ sind Lösungen, wie in der folgenden Abbildung[2] dargestellt.



[2] Übernommen aus Knorrenschild

8.3 Polynominterpolation

Polynominterpolation

- Im Folgenden betrachten wir den Fall, bei dem die Interpolierende ein Polynom ist.
- Gegeben sind $n+1$ Stützpunkte

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

- Gesucht ist ein Polynom $P_n(x)$, welches diese Punkte interpoliert. Wenn wir uns das Polynom in der üblichen Form nach Potenzen von x entwickelt denken, dann ist

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Polynominterpolation

- Folglich gibt uns jeder Stützpunkt eine lineare Gleichung für die Bestimmung der Koeffizienten a_k.
- Wenn der Grad des Polynoms gleich n gewählt wird, erhalten wir ein lineares Gleichungssystem mit gleichvielen Gleichungen wie unbekannten Koeffzienten:

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n &= y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n &= y_1 \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n &= y_n
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Die hierbei auftretende Matrix wird Vandermonde-Matrix genannt.

Polynominterpolation

- Im Prinzip könnten wir dieses lineare Gleichungssystem mit den uns bekannten Verfahren nach den Koeffizienten nun auflösen.
- Allerdings ist dies unntötig aufwendig und die Matrix des Systems ist typischerweise schlecht konditioniert.
- Durch eine andere Darstellung des Polynoms P_n lässt sich die Berechnung vereinfachen.
- Dazu ist zu sagen, dass die Polynom-Interpolation früher beim Handrechnen einen wichtigen Stellenwert hatte. Allerdings ist die Berechnung für grosse $n \gtrsim 20$ numerisch instabil.
- Aus diesem Grund kommen, wenn viele Stützpunkte berücksichtigt werden müssen, neuere Techniken wie die Spline-Interpolation zum Zug. Zur Einführung konzentrieren wir uns aber vorderhand auf die Polynom-Interpolation.

Satz 8.1: Lagrange Interpolationsformel [2]

- Durch $n+1$ Stützpunkte mit verschiedenen Stützstellen (d.h. $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$) gibt es genau ein Polynom $P_n(x)$ vom Grade $\leq n$, welches alle Stützpunkte interpoliert, d.h. wo gilt

$$P_n(x) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$$

- $P_n(x)$ lautet in der Lagrangeform

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i\,,$$

dabei sind die $l_i(x)$ die Lagrangepolynome vom Grad n definiert durch

$$l_i(x) \quad = \quad \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\ i = 0, 1, \ldots, n$$

Beispiel 8.3

- Wir nehmen die Temperaturmessung aus Beispiel 8.1 und bestimmen die Temperatur um 11 Uhr. Um die Rechnung etwas zu vereinfachen, benutzen wir nur die ersten vier Messwerte.

t	08.00	10.00	12.00	14.00	Uhr
T	11.2	13.4	15.3	19.5	$^\circ C$

Beispiel 8.3: Lösung

- Zur Demonstration bestimmen wir das Interpolationspolynom vollständig (d.h. für beliebige x-Werte).
- Wir haben $n+1=4$ Stützpunkte, also ist $n=3$ und das Interpolationspolynom hat die Form

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{3} l_i(x)y_i = 11.2\cdot l_0(x)+13.4\cdot l_1(x)+15.3\cdot l_2(x)+19.5\cdot l_3(x)$$

Die Lagrangepolynome berechnen sich zu

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-10)(x-12)(x-14)}{(-2)(-4)(-6)} = -\frac{1}{48}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{107}{12}x+35\\
l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-8)(x-12)(x-14)}{(2)(-2)(-4)} = +\frac{1}{16}x^3-\frac{17}{8}x^2+\frac{47}{2}x-84\\
l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-8)(x-10)(x-14)}{(4)(2)(-2)} = -\frac{1}{16}x^3+2x^2-\frac{83}{4}x+70\\
l_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-8)(x-10)(x-12)}{(6)(4)(2)} = +\frac{1}{48}x^3-\frac{5}{8}x^2+\frac{37}{6}x-20
\end{aligned}$$

Beispiel 8.3: Lösung

- Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 11.2 \cdot l_0(x) + 13.4 \cdot l_1(x) + 15.3 \cdot l_2(x) + 19.5 \cdot l_3(x) \\ &= +\frac{13}{240}x^3 - \frac{133}{80}x^2 + \frac{2137}{120}x - \frac{263}{5} \end{aligned}$$

bzw. $P_n(11) = 14.225^\circ C$

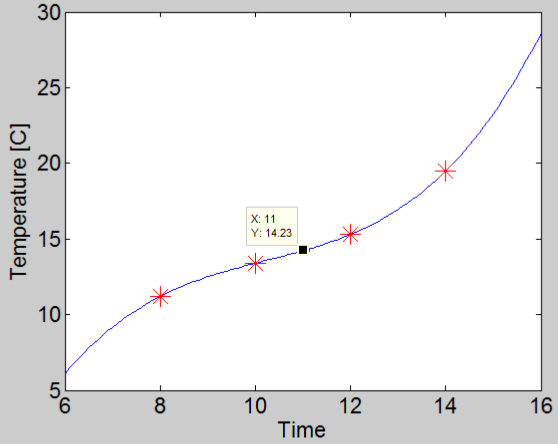
- Falls man wirklich nur den einen Wert bei $x = 11$ sucht, wäre die Rechnung einiges einfacher:

$$\begin{aligned} l_0(11) &= \frac{(11-10)(11-12)(11-14)}{(-2)(-4)(-6)} = \frac{(1)(-1)(-3)}{(-2)(-4)(-6)} = -\frac{1}{16} \\ l_1(11) &= \frac{(11-8)(11-12)(11-14)}{(2)(-2)(-4)} = \frac{(3)(-1)(-3)}{(2)(-2)(-4)} = \frac{9}{16} \\ l_2(11) &= \frac{(11-8)(11-10)(11-14)}{(4)(2)(-2)} = \frac{(3)(1)(-3)}{(4)(2)(-2)} = \frac{9}{16} \\ l_3(11) &= \frac{(11-8)(11-10)(11-12)}{(6)(4)(2)} = \frac{(3)(1)(-1)}{(6)(4)(2)} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

und damit $P_n(11) =$ $11.2 \cdot l_0(11) + 13.4 \cdot l_1(11) + 15.3 \cdot l_2(11) + 19.5 \cdot l_3(11) = 14.225$, wie zuvor.

Beispiel 8.3: Lösung

- Die folgende Abbildung zeigt die vier Messpunkte (rot) und das Interpolationspolynom (blau) sowie den interpolierten Punkt (schwarz):



Aufgabe 8.1

- Wir betrachten die Funktion $f(x) = \int_0^x e^{\sin t} dt$ aus Beispiel 8.1. Berechnen Sie den Wert $f(0.66) =$? anhand der drei Punkte

x	0.6	0.7	0.8
y	0.8136	0.9967	1.1944

Aufgabe 8.1: Lösung

Bemerkung

- Wie man schnell sieht, ist es für viele Aufgabenstellungen einfacher, nicht ein Interpolationspolynom für alle gegebenen Stützpunkte zu berechnen, sondern nur die Punkte in unmittelbarer Umgebung des gesuchten Wertes zu berücksichtigen.
- Im einfachsten Fall nimmt man jeweils die zwei benachbarten Stützpunkte und verbindet sie mit einer Geraden.
- Das Interpolationspolynom ist dann also erster Ordnung und man spricht deshalb auch von *(stückweise) linearer Interpolation*.

Fehlerabschätzung

- Wie gross ist nun aber der Fehler, den wir bei einer Interpolation machen? Dazu gilt der folgende Satz:

Satz 8.2: Fehlerabschätzung [2]

- Sind die y_i Funktionswerte einer genügend oft stetig differenzierbaren Funktion f (also $y_i = f(x_i)$), dann ist der Interpolationsfehler an einer Stelle x gegeben durch

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq \xi \leq x_n} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

- Das heisst, wir müssen das Maximum der $(n+1)$-ten Ableitung der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[x_0, x_n]$ kennen.
- Die Fehlerabschätzung ist also nur anwendbar, wenn wir die Funktion $f(x)$ bzw. ihre Ableitungen selbst kennen.

Aufgabe 8.2

- Von der Funktion $y = f(x) = 2^x$ seien die folgenden drei Stützpunkte gegeben:

x	-1	1	3
y	0.5	2	8

- Wie gross ist der Interpolationsfehler im Punkt $x = 2$, wenn diese Punkte durch ein Polynom interpoliert werden?
- Man schätze den Fehler mittels der obigen Fehlerabschätzung und berechne anschliessend das (allgemeine) Polynom und den exakten Fehler.

Aufgabe 8.2: Lösung

Aufgabe 8.2: Lösung

Aitken-Neville Schema

- Die Lagrange-Polynome zu berechnen kann aufwendig sein.
- Nun wollen wir eine Rekursionsformel kennen lernen, die die Berechnung des Interpolationspolynoms $P_n(x)$ effizienter macht, das sogenannte *Aitken-Neville Schema*.
- Es bezeichne dafür $p_{ij}(x)$ das Interpolationspolynom vom Grad $\leq j$ durch die Stützpunkte

x	x_{i-j}	x_{i-j+1}	$\dots$	x_i
y	y_{i-j}	y_{i-j+1}	$\dots$	y_i

Aitken-Neville Schema

Satz 8.3: Aitken-Neville Schema [2]

- Die Polynome $p_{ij}(x)$ lassen sich folgendermassen rekursiv berechnen: für $i = 1, 2, 3, ...$ und $j = 1, 2, ..., i$ gilt

$$
\begin{aligned}
p_{i0} &= y_i \\
p_{ij} &= \frac{(x_i - x)p_{i-1,j-1} + (x - x_{i-j})p_{i,j-1}}{x_i - x_{i-j}}
\end{aligned}
$$

Aitken-Neville Schema

Dies lässt sich in folgendem Schema darstellen:

x	y						
x_0	$y_0 = p_{00}$						
x_1	$y_1 = p_{10}$	p_{11}					
x_2	$y_2 = p_{20}$	p_{21}	p_{22}				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$			
x_i	$y_i = p_{i0}$	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ii}		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\ddots$	
x_n	$y_n = p_{n0}$	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{ni}	$\dots$	p_{nn}

Aitken-Neville Schema: Bemerkungen

- Dabei müssen die x_i in der ersten Spalte nicht unbedingt der Grösse nach sortiert sein.
- Ein Polynom p_{ii} entsprecht also dem Interpolationspolynom, welches die Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_i$interpoliert, es gilt deshalb $P_i(x) = p_{ii}(x)$ bzw. $P_n(x) = p_{nn}(x)$.
- Analog ist z.B. $p_{42}(x)$ das Interpolationspolynom, welches die Punkte x_2, x_3, x_4 interpoliert etc.
- In Anwendungen wird dieses Schema jedoch nur für ein gegebenes, festes x berechnet, die $p_{ii}(x)$ sind dann reine Zahlen.

Beispiel 8.4

- Stellen Sie das Aitken-Neville Schema auf für die Stützpunkte und die kompletten Polynome $p_{ij}(x)$.

x	0	5	-1	2
y	-5	235	-9	19

Beispiel 8.4: Lösung

$$
\begin{array}{r|r|c|c|c}
x & y & & & \\
\hline
0 & -5 & & & \\
5 & 235 & 48x-5 & & \\
-1 & -9 & \frac{122}{3}x+\frac{95}{3} & \frac{22}{3}x^2+\frac{34}{3}x-5 & \\
2 & 19 & \frac{28}{3}x+\frac{1}{3} & \frac{94}{9}x^2-\frac{10}{9}x-\frac{185}{9} & \frac{14}{9}x^3+\frac{10}{9}x^2+\frac{32}{9}x-5
\end{array}
$$

Aufgabe 8.3

- Von der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-x^2}{2}}$ kennt man die unten angegebenen Werte. Interpolieren Sie für $x = 0.52$ unter Verwendung des Aitken-Neville Schemas für alle Stützpunkte.

x	0.5	0.6	0.7	0.8
y	0.6915	0.7257	0.7580	0.7881

Aufgabe 8.3: Lösung

8.4 Spline-Interpolation

Spline-Interpolation

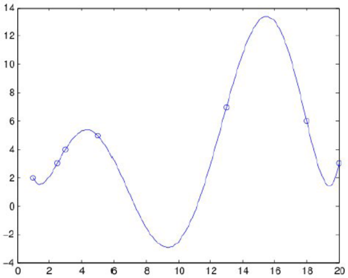
- Polynome mit einem hohen Grad oszillieren.
- Dieses Verhalten führt dazu, dass bei einer grossen Anzahl Stützpunkten das Interpolationspolynom meist keine gute Näherung mehr für die zu interpolierende Funktion $f(x)$ darstellt, wie im folgenden Beispiel dargestellt (aus [2]).

Beispiel 8.5

- Durch die Stützpunkte

x	1	2.5	3	5	13	18	20
y	2	3	4	5	7	6	3

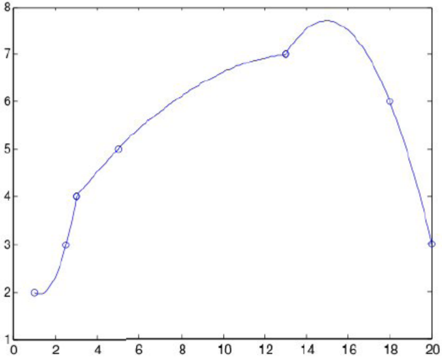
verläuft das folgenden Interpolationspolynom



- Wahrscheinlich ist dieses Polynom keine gute Näherung für die zugrundeliegende Funktion. Es könnte sich z.B. um physikalische Messwerte handeln, die immer positiv sein müssen. Dann ist eine Funktion, die zwischendurch negativ wird, nicht brauchbar.

Spline-Interpolation

- Als Alternative könnte man versuchen, die Stützpunkte stückweise zu interpolieren, z.B. jeweils drei aufeinanderfolgende Punkte durch eine Parabel anzunähern. Man erhält dann das folgende Bild (aus Gander):



Spline-Interpolation

- Hier stören jetzt vor allem die Knicke an den Übergängen.
- Die Idee der Spline-Interpolation besteht nun darin, durch Polynome niederen Grades zu interpoliern und damit die Schwingungen zu unterdrücken, wobei man gleichzeitig sicherstellt, dass keine Knicke entstehen.
- Um dies zu erreichen, müssen die Polynome an den Anschlusstellen nicht nur denselben Funktionswert, sondern auch *dieselbe Ableitung* haben.

Spline-Interpolation

- Man kann z.B. für jedes Intervall

$$[x_i, x_{i+1}],\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

genau ein Polynom s_i ansetzen (der Index i bezeichnet hier nicht den Grad des Polynoms sondern die Nummer des Intervalls).

- Das Polynom muss dann folgende Bedingung erfüllen:

$$\begin{aligned} s_i(x_i) &= y_i,\ s(x_{i+1}) = y_{i+1}, \ldots && \textbf{Interpolation} \\ s_i(x_{i+1}) &= s_{i+1}(x_{i+1}),\ s_{i+1}(x_{i+2}) = s_{i+2}(x_{i+2}) \ldots && \textbf{stetiger Übergang} \\ s_i'(x_{i+1}) &= s_{i+1}'(x_{i+1}), \quad s_{i+1}'(x_{i+2}) = s_{i+2}'(x_{i+2}), \ldots && \textbf{keine Knicke} \end{aligned}$$

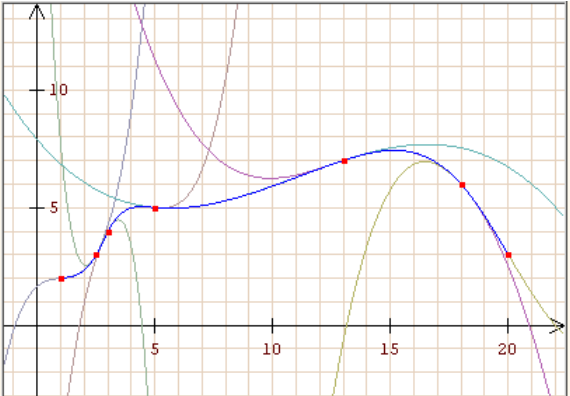
Spline-Interpolation

- Zusätzlich sollen die Polynome in den Übergangspunkten die gleiche Krümmung aufweisen, d.h. auch die zweite Ableitung soll übereinstimmen:

$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}), \quad s_{i+1}''(x_{i+2}) = s_{i+2}''(x_{i+2}), \dots \quad \textbf{gleiche Krümmung}$$

Spline-Interpolation

Polynome, die all diese Bedingungen erfüllen, müssen mindestens den Grad 3 haben (siehe folgendes Beispiel). Man spricht dann auch von *kubischen Splines*.Folgende Abbildung zeigt die Approximation der obigen Stützpunkte durch kubische Splines



Spline-Interpolation

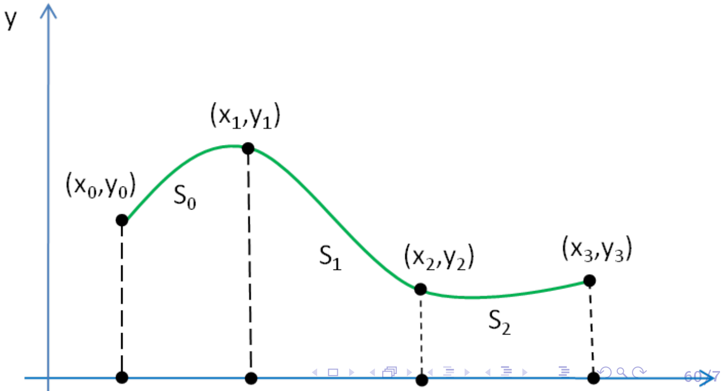
- Die Bezeichnung 'Spline' kommt aus dem Englischen und bezeichnet eine schlanke, biegsame Holzlatte, die im Schiffsbau eingesetzt wurde, um durch eine Anzahl vorgegebener Punkte eine möglichst glatte Kurve zu legen (beispielsweise für die Planken des Schiffsrumpfes).
- Kubische Splines werden unter anderem zur Berechnung des Bahnverlaufes bei Achterbahnen verwendet, um ruckartige Beschleunigungswechsel für die Fahrgäste zu vermeiden.
- Kubische Splines finden weitere Anwendung bei der exakten Verlegung der Schienen bei Hochgeschwindigkeitsstrecken der Eisenbahn.
- Auch beim Entwurf von Kurven und Oberflächen (sogen. „Freiformkurven und -flächen“), wie sie häufig im Schiff-, Flugzeug- und Automobilbau vorkommen, sind Splines von Bedeutung.

Spline-Interpolation

- Die Eignung von Splines für solche Anwendungen liegt daran, dass für jeden Polynomabschnitt Randbedingungen erstens in Form von Punkten aber auch in Form von Werten für erste und zweite Ableitung (und in Abhängigkeit davon Steigung und Krümmung/Kurvenradius) vorgeben lassen.
- Dadurch kann erreicht werden, dass die Krümmung entlang der Kurve immer stetig ist. Das hat den Vorteil, dass Querbeschleunigungen beim Abfahren der Kurve immer allmählich aufgebaut werden bzw. an den Knotenpunkten vorgegebene Werte einhalten

Beispiel 8.6

- Gegeben sind die vier Stützpunkte (x_i, y_i) für $i = 0, \dots, 3$. Wir suchen nun die Splinefunktion S, die durch diese vier Punkte geht und sich zusammensetzt aus den drei kubischen Polynomen S_0, S_1 und S_2.



Beispiel 8.6

- Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3,\ x \in [x_0, x_1] \\ S_1 &= a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3,\ x \in [x_1, x_2] \\ S_2 &= a_2 + b_2(x-x_2) + c_2(x-x_2)^2 + d_2(x-x_2)^3,\ x \in [x_2, x_3] \end{aligned}$$

müssen wir $3 \cdot 4 = 12$ Koeffizienten berechnen, wofür wir 12 Bedingungen benötigen.

Beispiel 8.6

- Diese lauten:
  1. Interpolation der Stützpunkte:

$$\begin{aligned} S_0(x_0) &= y_0 \\ S_1(x_1) &= y_1 \\ S_2(x_2) &= y_2 \\ S_2(x_3) &= y_3 \end{aligned}$$

  2. Stetiger Übergang an den Stellen x_1 und x_2:

$$\begin{aligned} S_0(x_1) &= S_1(x_1) \\ S_1(x_2) &= S_2(x_2) \end{aligned}$$

Beispiel 8.6

1. Erste Ableitung an den Übergangsstellen muss übereinstimmen (keine Knicke):

$$\begin{aligned} S_0'(x_1) &= S_1'(x_1) \\ S_1'(x_2) &= S_2'(x_2) \end{aligned}$$

2. Zweite Ableitung an den Übergangsstellen muss übereinstimmen (gleiche Krümmung):

$$\begin{aligned} S_0''(x_1) &= S_1''(x_1) \\ S_1''(x_2) &= S_2''(x_2) \end{aligned}$$

Jetzt haben wir allerdings erst 10 Bedingungen für die 12 Koeffizienten. Das heisst, wir brauchen noch zwei zusätzliche. Diese können, in Abhängigkeit der Problemstellung, 'frei' gewählt werden und beziehen sich häufig auf die beiden Randstellen, hier x_0 und x_3 .

Beispiel 8.6

Man unterscheidet zum Beispiel:

- die *natürliche kubische Splinefunktion*:
$$\begin{aligned} S_0''(x_0) &= 0 \\ S_2''(x_3) &= 0 \end{aligned}$$
mit einem möglichen Wendepunkt im Anfangs- und Endpunkt.
- die *periodische kubische Splinefunktion*
$$\begin{aligned} S_0'(x_0) &= S_2'(x_3) \\ S_0''(x_0) &= S_2''(x_3) \end{aligned}$$
wenn man die Periode $p = x_3 - x_0$ hat und damit $y_0 = y_3$ bzw. $S_0(x_0) = S_2(x_3)$ gilt.
- die kubische Splinefunktion mit *not-a-knot Bedingung*:
$$\begin{aligned} S_0'''(x_1) &= S_1'''(x_1) \\ S_1'''(x_2) &= S_2'''(x_2) \end{aligned}$$

Algorithmus: natürliche kubische Splinefunktion

- Gegeben seien $n+1$ Stützpunkte (x_i, y_i) mit monoton aufsteigenden Stützstellen (Knoten) $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ $(n \geq 2)$. Gesucht ist die natürliche kubische Splinefunktion $S(x)$, welche in jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ mit $i = 0, 1, \ldots, n-1$ durch ein kubisches Polynom

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

dargestellt wird, also $S(x) = S_i(x)$ mit $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Algorithmus: natürliche kubische Splinefunktion

- Die Koeffizienten a_i, b_i, c_i und d_i der Polynome $S_i(x)$ für $i = 0, 1, ..., n-1$ berechnen sich wie folgt:

  1. $a_i = y_i$
  2. $h_i = x_{i+1} - x_i$
  3. $c_0 = 0,\ c_n = 0$
  4. Berechnung der Koeffizienten $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ aus dem Gleichungssystem
     1. $i = 1:$
        $2(h_0 + h_1)c_1 + h_1 c_2 = 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\frac{y_1 - y_0}{h_0}$
     2. falls $n \geq 4$ gilt für $i = 2, ..., n-2:$
        $h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - 3\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$
     3. $i = n-1:$
        $h_{n-2}c_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})c_{n-1} = 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}}$
  5. $b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i)$
  6. $d_i = \frac{1}{3h_i}(c_{i+1} - c_i)$

Algorithmus: natürliche kubische Splinefunktion

Das Gleichungssystem unter Punkt 4. im obigen Algorithmus hat die Form

$$\boldsymbol{A}c = z$$

mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Algorithmus: natürliche kubische Splinefunktion

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 3\frac{y_2-y_1}{h_1} - 3\frac{y_1-y_0}{h_0} \\ 3\frac{y_3-y_2}{h_2} - 3\frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \vdots \\ 3\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.4

- Zu den folgenden Stützpunkten soll die natürliche kubische Splinefunktion bestimmt werden, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i der kubischen Polynome S_i für $i = 0, 1, 2$:

x_i	0	1	2	3
y_i	2	1	2	2

- Lösung in den Übungen.

Aufgabe 8.5

- Implementieren Sie den obigen Algorithmus in MATLAB für eine beliebige vorgegebene Reihe von Stützpunkten. Ihre Funktion soll die Stützpunkte sowie die natürliche kubische Splinefunktion plotten.
- Testen Sie Ihren Algorithmus an der Zeitreihe der Bevölkerungszahl der USA:

t	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960
p(t)	75.995	91.972	105.711	123.203	131.669	150.697	179.323

- Benutzen Sie die MATLAB-Funktionen
  - spline,
  - splinetool

  um diese Messreihe durch eine Splinefunktion zu interpolieren und vergleichen Sie das Resultat.
- Lösung in den Übungen.