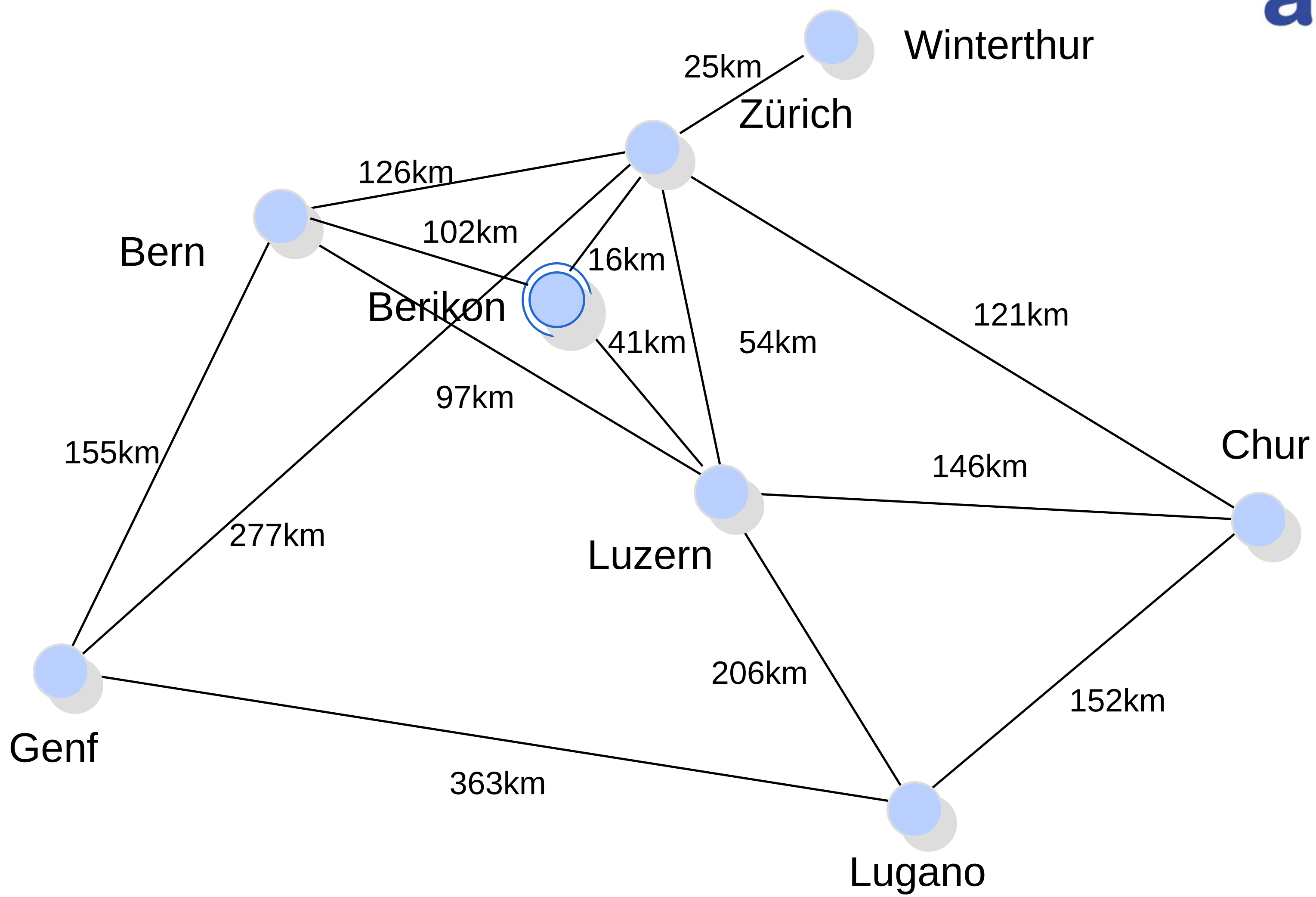
Graphen

Graf = Lord(E)

Im Prinzip richtig, aber:
Graf = D-Titelbezeichnung;
Lord = E-Anrede für u.a. Earl
Bild zeigt nicht Earl sondern King of Rohan

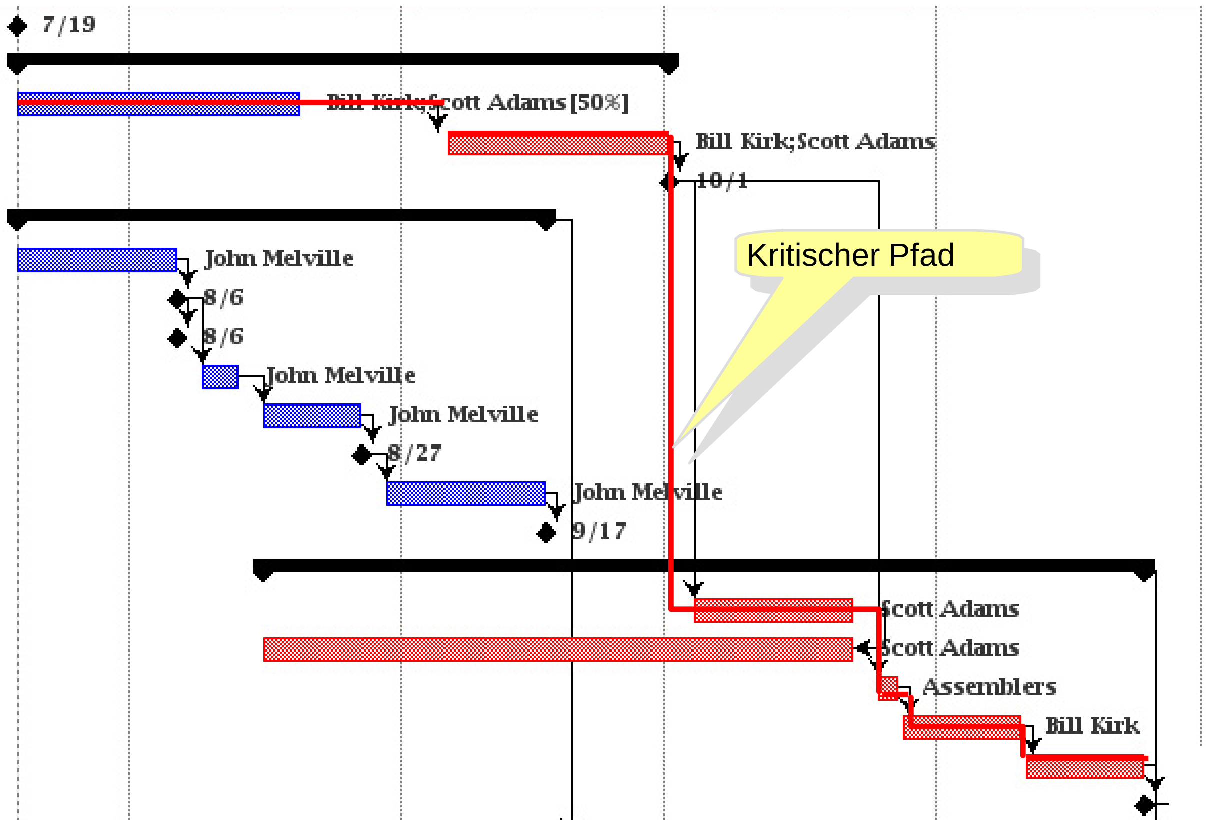
- Sie wissen wie Graphen definiert sind und kennen deren Varianten (nach Duden auch "Graf" Schreibweise erlaubt)
- Sie wissen wofür man sie verwendet
- Sie können Graphen in Java implementieren
- Sie kennen die Algorithmen und können sie auch implementieren: Tiefensuche, Breitensuche, kürzester Pfad, topologisches Sortieren

Beispiel Strassennetz



- Typische Aufgabe: finde kürzeste Verbindung zwischen zwei Orten

Netzplan, Aufgabenliste



- Typische Aufgabe:
  - finde mögliche Reihenfolge der Tätigkeiten
  - finde den kritischen Pfad

Fragestellungen

- Kürzeste Verbindung (Verkehr, Postversand) von A nach B (shortest path)
- Reihenfolge von Tätigkeiten aus einem Netzplan erstellen (topological sort)
- Minimal benötigte Zeit bei optimaler Reihenfolge (critical path)
- Maximaler Durchsatz (Verkehr, Daten) von A nach B (maximal flow)
- kürzester Weg um alle Punkte anzufahren (traveling salesman)

Graph

- Definition

> Ein Graph *G=(V,E)* besteht aus einer endlichen Menge von *Knoten V* und einer Menge von *Kanten* $E \subseteq V \times V$.

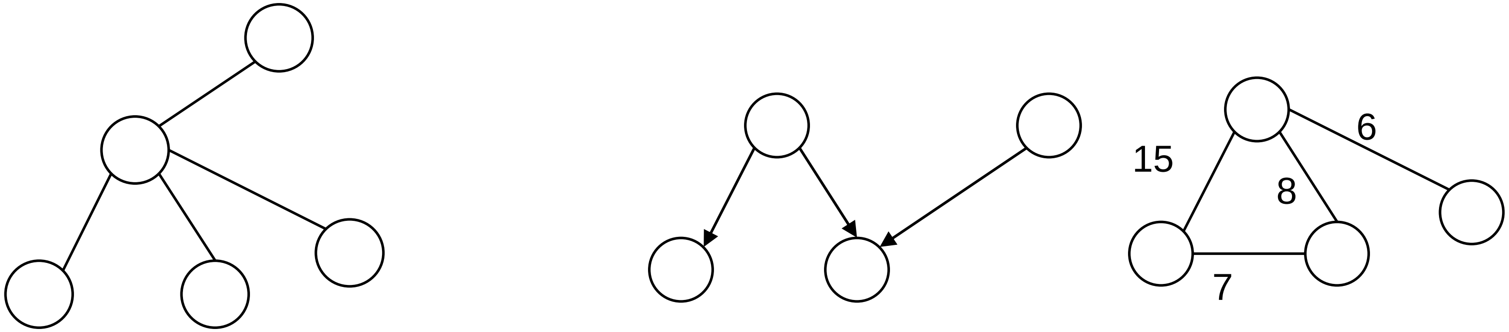
- Implementation
  - Knoten: Objekte mit Namen und anderen Attributen
  - Kanten: Verbindungen zwischen zwei Knoten u.U. mit Attributen

- Hinweise:
  - Knoten werden auch vertices bzw. vertex genannt
  - Kanten heissen auch edges bzw. edge

Grapheigenschaften 1

Knoten verbunden

- Zwei Knoten x und y sind benachbart (***adjacent***), falls es eine Kante e_{xy}= (x,y) gibt.
- **Verbundener Graph** (connected graph) ist jeder Knoten mit jedem anderen Knoten verbunden = existiert eine Pfad
- **Verbundener Teilgraph** Gesamter Graph kann aus Teilgraphen besteht, die aus untereinander nicht unbedingt verbundenen sein müssen.
- **Kanten gerichtet und/oder mit Gewicht**
  - Mehrfachkanten und "Selbstkanten" (Kanten auf sich selber) sind ebenfalls erlaubt



ungerichteter Graph gerichteter Graph gewichteter Graph

Gewichtete Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ kann zu einem **gewichteten Graphen** $G = (V, E, g_w(E))$ erweitert werden, wenn man eine Gewichtsfunktion $g_w: E \rightarrow \text{int}$ (oder $g_w: E \rightarrow \text{double}$) hinzu nimmt, die jeder Kante $e \in E$ ein **Gewicht** $\mathbf{g_w(e)}$ zuordnet.

Eigenschaften

- Gewichtete Graphen haben **Gewichte** an den Kanten. z.B. Kosten
- **Gewichtete gerichtete** Graphen werden auch **Netzwerk** genannt.
- Die **gewichtete Pfadlänge** ist die Summe der Kosten der Kanten auf dem Pfad.
- Beispiel: Längenangabe (in km) zwischen Knoten (siehe einführendes Bsp).

Ungerichtete Graphen

- Sei G = (V,E).
- Falls für jedes e $\in$ E mit e = (v1,v2) gilt: e' = (v2,v1) $\in$ E,
  so heisst G ungerichteter Graph, ansonsten gerichteter Graph.
- Die Relation E ist in diesem Fall symmetrisch.
- Bei einem ungerichteten Graphen gehört zu jedem Pfeil von x nach y auch ein Pfeil von y nach x.
- Daher lässt man Pfeile ganz weg und zeichnet nur ungerichtete Kanten.

Grapheigenschaften 2

Anzahl Kanten

- **Kompletter Graph**: Jeder Knoten ist mit jedem anderen Knoten direkt verbunden.

- **Dichter Graph (dense):** Nur wenige Kanten im Graph (bezogen auf den kompletten Graphen) fehlen,

- **Dünner Graph (sparse)** Nur wenige Kanten im Graph (bezogen auf den kompletten Graphen) sind vorhanden

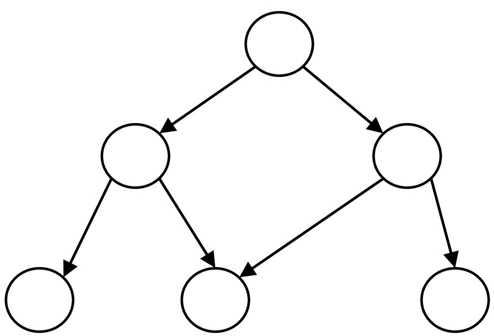
Pfade, Zyklen

- Eine Sequenz von benachbarten Knoten ist ein **einfacher Pfad**, falls kein Knoten zweimal vorkommt z.B. p = (Zürich, Luzern, Lugano).

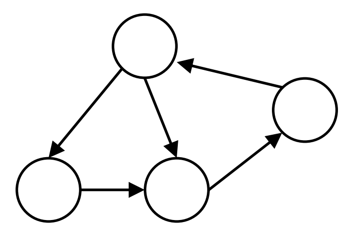
- Die **Pfadlänge** ist die Anzahl der **Kanten** des Pfads.

- Sind Anfangs- und Endknoten bei einem Pfad gleich, dann ist dies ein zyklischer Pfad oder **geschlossener Pfad** bzw. **Zyklus**.

- Graphen mit geschlossenen Pfaden werden **zyklische Graphen** genannt.



gerichteter azyklischer Graph



gerichteter zyklischer Graph

Übung

(B, C, A, D, A) ist ein _____ von B nach A.

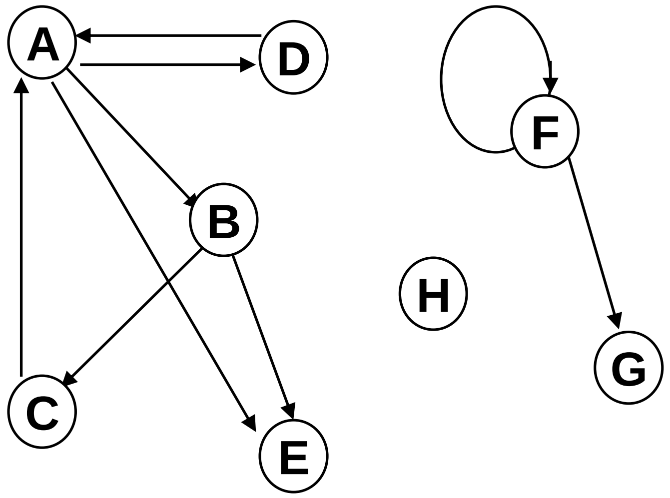
Er enthält einen _____: (A, D, A).

(C, A, B, E) ist einfacher ____ von C nach E.

(F, F, F, G) ist ein _____.

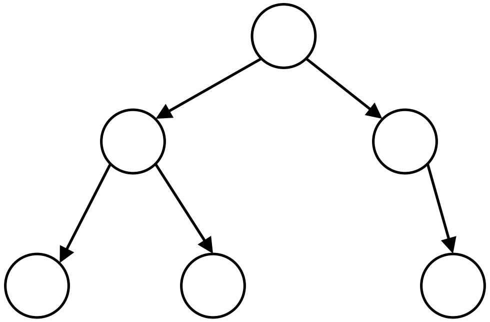
(A, B, C, A) und (A, D, A) und (F, F) sind die einzigen _____.

(A, B, E, A) ist kein ____ und kein _____.

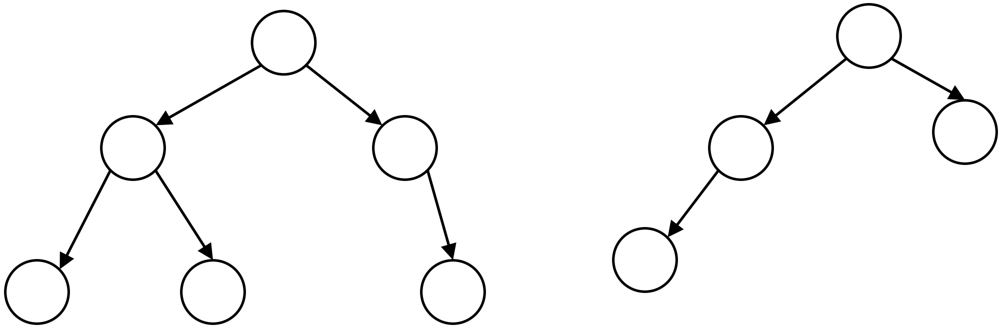


Baum wird zum Spezialfall

- Ein Baum ein gerichteter, zyklenfreier, verbundener Graph bei dem
  - Jeder Knoten genau eine eingehende Verbindung hat
  - Ein Knoten keine eingehenden Kanten hat (die Wurzel ist)

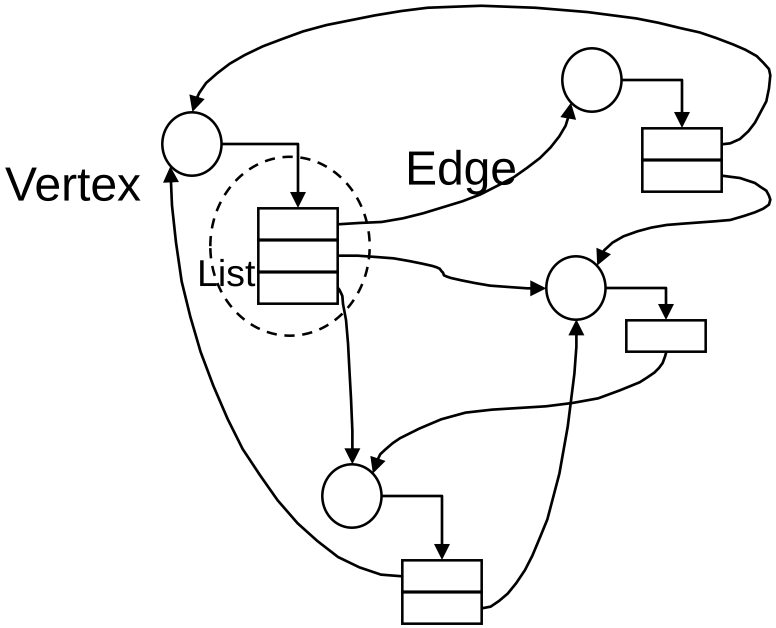


- Eine Gruppe nicht zusammenhängender Bäume heisst **Wald (Forest)**.



Implementation 1 : Adjazenz-Liste

- jeder Knoten führt (Adjazenz-) Liste, welch alle Kanten zu den benachbarten Knoten enthält



Dabei wird für jede Kante ein Eintrag bestehend aus dem Zielknoten und weiteren Attributen (z.B. Gewicht) erstellt. Jeder Knoten führt eine Liste der ausgehenden Kanten.

Das Graph Interface

```
public interface Graph<N,E> {

  // füge Knoten hinzu, tue nichts, falls Knoten schon existiert
  public  N addNode (String name);

  // finde den Knoten anhand seines Namens
  public N findNode(String name);

  // Iterator über alle Knoten des Graphen
  public Iterable<N> getNodes();

  // füge gerichtete und gewichtete Kante hinzu
  public void addEdge(String source, String dest, double weight) throws Throwable;


}
```

Klasse GraphNode definiert einen Knoten

```
public class GraphNode<E>  {
    protected String name;   // Name
    protected List<E> edges;  // Kanten

    public GraphNode(){
       edges  = new LinkedList<E>( );
    }

    public GraphNode(String name){
        this();
        this.name = name;
    }

    public String getName() {
       return name;
    }

    public void setName(String name) {
       this.name = name;
    }

    public Iterable<E> getEdges(){
       return edges;
    }

    public void addEdge(E edge){
       edges.add(edge);
    }
}
```

Die Klasse Edge definiert eine Kante

```
public class Edge<N> {
    protected N dest;  // Zielknoten der Kante
    protected double weight;  // Kantengewicht

    public Edge(N dest, double weight) {
        this.dest = dest;
        this.weight = weight;
    }
   public void setDest(N node) {
        this.dest = node;
   }
   public N getDest() {return dest;}

   public void setWeight(double w) {
        this.weight = w;
    }
    double getWeight() {return weight;}
}
```

AdjListGraph Implementation

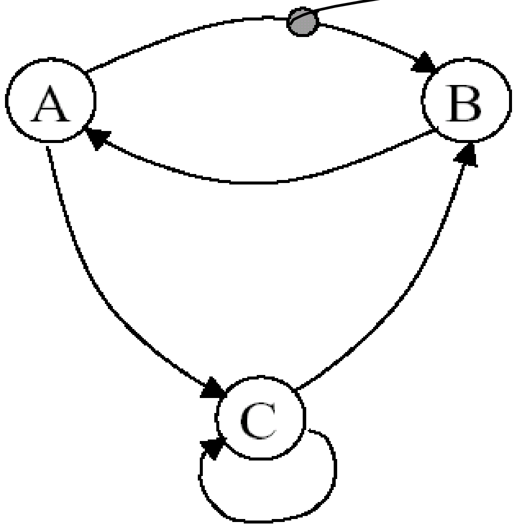
```
public class AdjListGraph<N extends Node,E extends Edge>
    implements Graph<N, E> {
  private final List<N> nodes = new LinkedList<N>();
  private final Class nodeClazz;
  private final Class edgeClazz;

  public AdjListGraph(Class nodeClazz, Class edgeClazz) {
    this.nodeClazz = nodeClazz;
    this.edgeClazz = edgeClazz;
  }
  // füge Knoten hinzu, gebe alten zurück falls Knoten schon existiert
  public N addNode(String name) {
    N node = findNode(name);
    if (node == null) {
      node = (N) nodeClazz.getConstructor(new Class[]{}).newInstance()();
      node.setName(name);
      nodes.add(node);
    }
    return node;
  }
....
```

Klassen der Generischen Typen

Erzeuge Instanz

Implementation 2 : Adjazenzmatrix



	A	B	C
A	**false**	**true**	**true**
B	**true**	**false**	**false**
C	**false**	**true**	**true**

- N x N (N = #Knoten) boolean Matrix; true dort wo Verbindung existiert

Adjazenzmatrix

- falls gewichtete Kanten -> Gewichte (double) statt boolean
- für jede Kante e_{xy}= (x,y) gibt es einen Eintrag
- sämtliche anderen Einträge sind 0 (oder undefined)

- Nachteil:
  - ziemlicher (Speicher-)Overhead

- Vorteil:
  - effizient
  - einfach zu implementieren
  - gut (speichereffizient) falls der Graph dicht

Adjazenzmatrix

- Distanzentabelle ist eine Adjazenzmatrix
- ungerichtet -> symmetrisch zur Diagonalen
- im Prinzip reicht die eine Hälfte -> Dreiecksmatrix

Entfernung in Kilometer	Atlanta	Boston	Chicago	Denver	Houston	Las Vegas	Los Angeles	Miami	New Orleans	New York	Phoenix	Portland	Salt Lake City	San Francisco	Seattle	Washington
Atlanta		1'778	1'166	2'269	1'263	3'279	3'578	1'175	749	1'442	2'993	1'080	3'114	4'117	4'356	1'397
Boston	1'778		1'583	3'155	2'963	4'381	4'800	2'474	2'449	338	4'282	1'205	3'803	4'982	4'909	435
Chicago	1'166	1'583		1'602	1'900	2'827	3'246	2'327	1'496	1'287	2'885	400	2'250	3'429	3'332	1'333
Denver	2'269	3'155	1'602		1'694	1'232	1'650	3'707	2'251	2'858	1'470	1'971	851	2'130	2'144	2'886
Houston	1'263	2'963	1'900	1'694		2'356	2'505	2'017	560	2'627	1'920	2'139	2'653	3'114	3'945	2'609
Las Vegas	3'279	4'381	2'827	1'232	2'356		440	4'401	2'944	4'084	444	3'197	693	920	2'051	4'103
Los Angeles	3'578	4'800	3'246	1'650	2'505	440		4'514	3'057	4'479	607	3'615	1'111	618	1'841	4'471
Miami	1'175	2'474	2'327	3'707	2'017	4'401	4'514		1'486	2'136	3'911	2'202	4'262	5'106	5'503	2'102
New Orleans	749	2'449	1'496	2'251	560	2'944	3'057	1'486		2'112	2'471	1'625	3'102	3'665	4'395	2'095
New York	1'442	338	1'287	2'858	2'627	4'084	4'479	2'136	2'112		3'944	908	3'507	4'686	4'612	99
Phoenix	2'993	4'282	2'885	1'470	1'920	444	607	3'911	2'471	3'944		3'201	1'115	1'215	2'491	3'939
Portland	1'080	1'205	400	1'971	2'139	3'197	3'615	2'202	1'625	908	3'201		2'621	3'800	3'727	954
Salt Lake City	3'114	3'803	2'250	851	2'653	693	1'111	4'262	3'102	3'507	1'115	2'621		1'181	1'366	3'554
San Francisco	4'117	4'982	3'429	2'130	3'114	920	618	5'106	3'665	4'686	1'215	3'800	1'181		1'308	4'731
Seattle	4'356	4'909	3'332	2'144	3'945	2'051	1'841	5'503	4'395	4'612	2'491	3'727	1'366	1'308		4'657
Washington	1'397	435	1'333	2'886	2'609	4'103	4'471	2'102	2'095	99	3'939	954	3'554	4'731	4'657	

Vergleich der Implementierungen

- Alle hier betrachteten Möglichkeiten zur Implementierung von Graphen haben ihre spezifischen Vor- und Nachteile:

	Vorteile	Nachteile
Adjazenzmatrix	Berechnung der Adjazenz sehr effizient	hoher Platzbedarf und teure Initialisierung: wachsen quadratisch mit $O(n^2)$
Adjazenzliste	Platzbedarf ist proportional zu n+m	Effizienz der Kantensuche abhängig von der mittleren Anzahl ausgehender Kanten pro Knoten

- **n** ist dabei die Knotenzahl und **m** die Kantenzahl eines Graphen G.

Graph Algorithmen

Graph Algorithmen

Traversierungen

- Tiefensuche (depth-first search)
- Breitensuche (breadth-first search)

häufige Anwendungen

- Ungewichteter kürzester Pfad (unweighted shortest path)
- Gewichteter kürzester Pfad (positive weighted shortest path)
- Topologische Sortierung (topological sorting)

weitere Algorithmen

- Maximaler Fluss
- Handlungsreisender (traveling salesman)
- ……

Graphentraversierungen

Grundformen: "Suchstrategien"

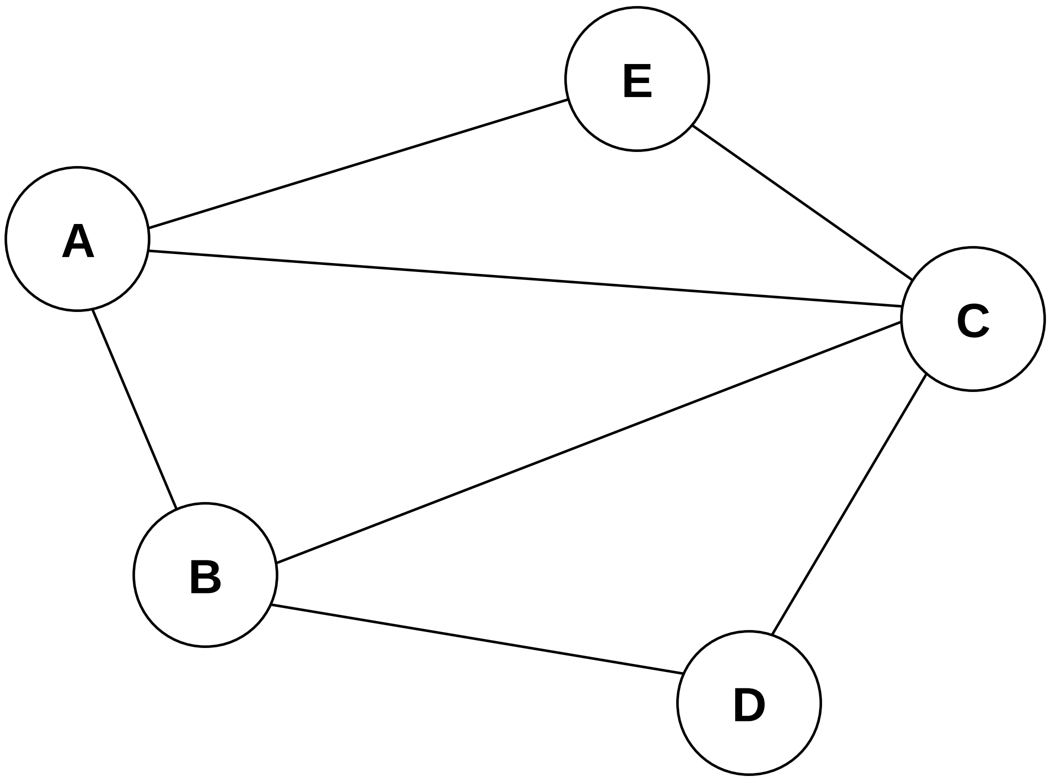
- Genau wie bei den Traversierungen bei Bäumen, sollen bei Graphen die Knoten **systematisch besucht** werden.
- Es werden im Wesentlichen zwei grundlegende "Suchstrategien" unterschieden.

- Tiefensuche: (depth-first)
  - Ausgehend von einem Startknoten geht man **vorwärts (tiefer)** zu einem neuen unbesuchten Knoten, solange einer vorhanden (d.h. erreichbar) ist. Hat es keine weiteren (unbesuchten) Knoten mehr, geht man rückwärts und betrachtet die noch unbesuchten Knoten. Entspricht der **Preorder** Traversierung bei Bäumen.

- Breitensuche: (breadth-first)
  - Ausgehend von einem Startknoten betrachtet man zuerst **alle benachbarten Knoten** (d.h. auf dem gleichen Level), bevor man einen Schritt weitergeht. Entspricht der **Levelorder** Traversierung bei Bäumen.

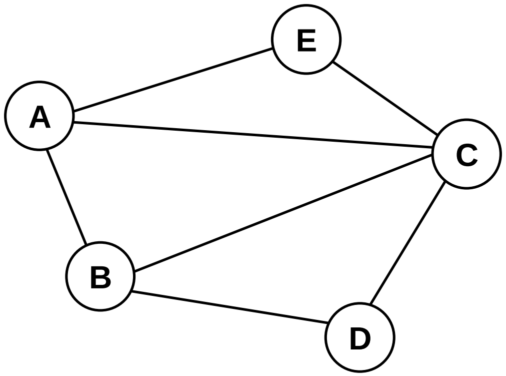
Übung

- Auf welche Arten kann folgender Graph in Tiefensuche durchsucht werden (Start bei A)



Tiefensuche (Pseudo Code)

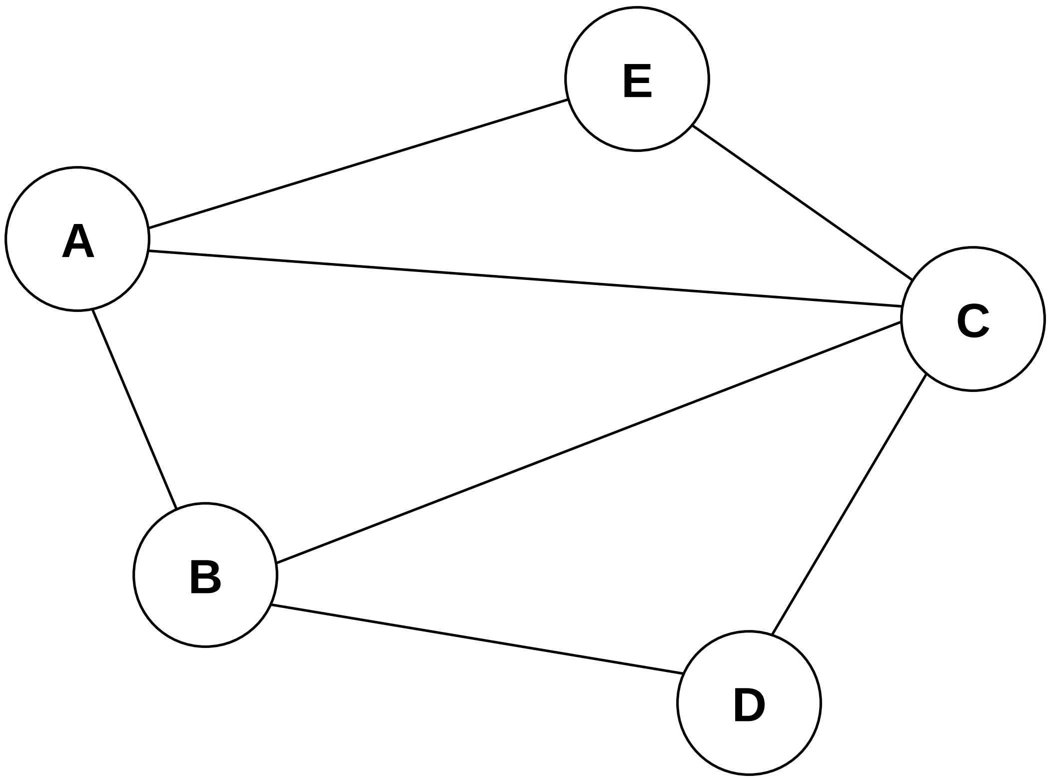
```
void depthFirstSearch()
   s = new Stack();
   mark startNode;
   s.push(startNode)
   while (!s.empty()) {
        currentNode = s.pop()
        print currentNode
        for all nodes n adjacent to currentNode {
           if (!(marked(n)) {
             mark n
             s.push(n)
           }
        }
   }
}
```



- Am Anfang sind alle Knoten nicht markiert. Knoten, die noch nicht besucht wurden, liegen auf dem Stack

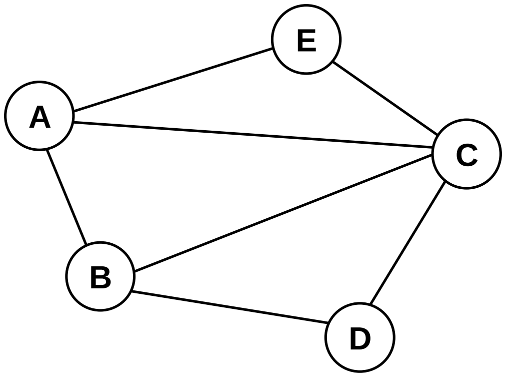
Übung

- Auf welche Arten kann folgender Graph in Breitensuche durchsucht werden



Breitensuche (Pseudo Code)

```
void breadthFirstSearch()
    q = new Queue()
    mark startNode
    q.enqueue(startNode)
    while (!q.empty()) {
         currentNode = q.dequeue()
         print currentNode
         for all nodes n adjacent to currentNode {
              if (!(marked(n)) {
                  mark n
                  q.enqueue(n)
              }
         }
    }
}
```

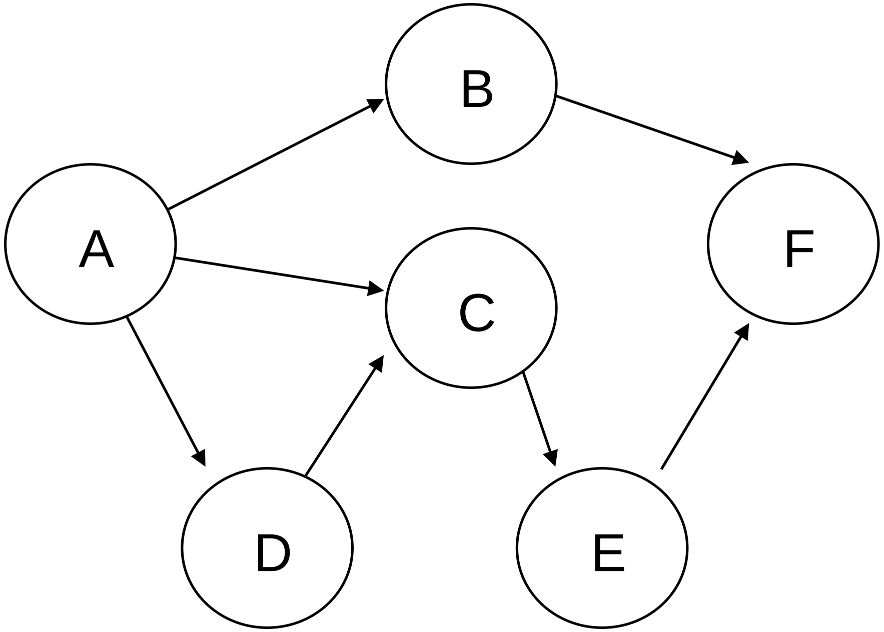


Kürzester Pfad

Nicht kürzester Pfad:
2173 km ~ 1568 Seiten

Kürzester Pfad 1: alle Kanten gleiches Gewicht

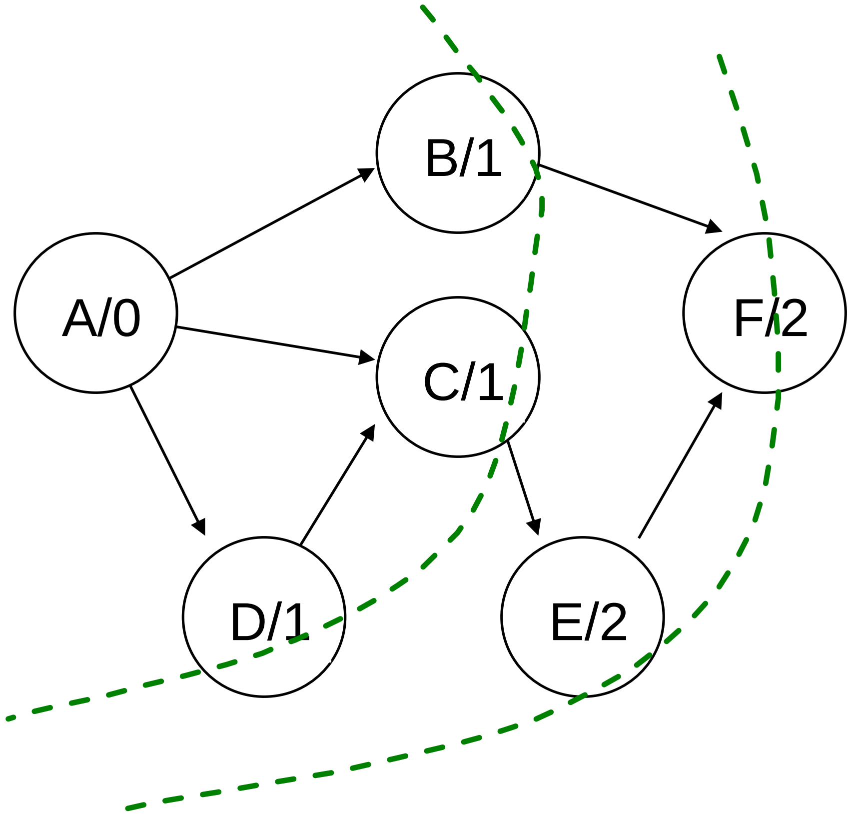
- Gesucht ist der kürzeste Weg von einem bestimmten Knoten aus zu jeweils einem anderen (z.B A nach F)



- Lösung : A nach F über B

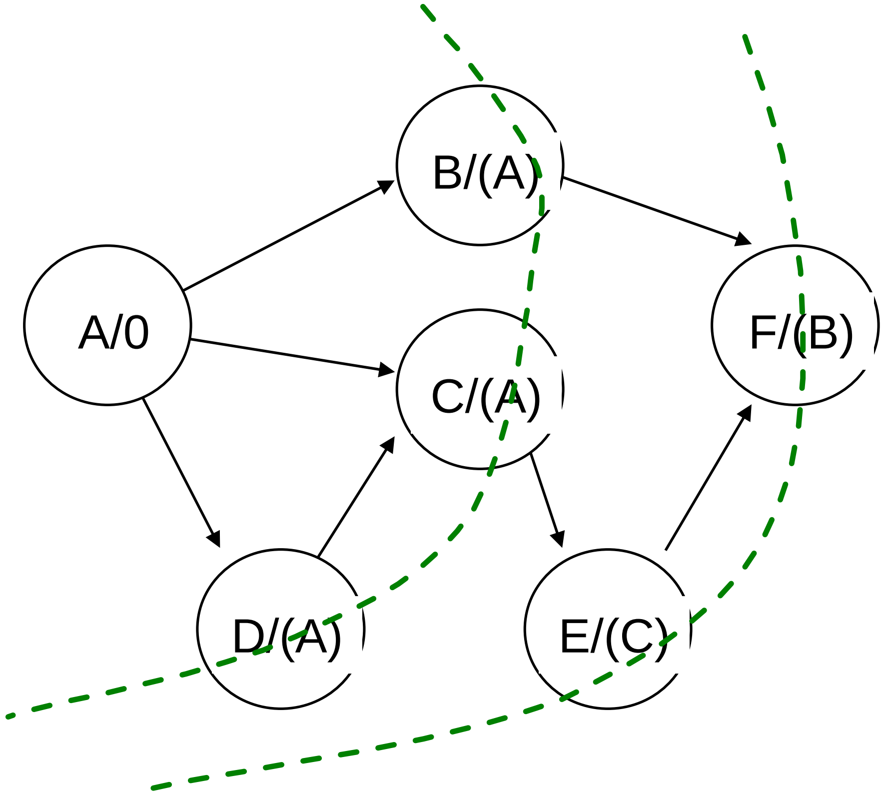
Algorithmus kürzester ungewichteter Pfad

- Vom Startpunkt ausgehend werden die Knoten mit ihrer Distanz markiert.



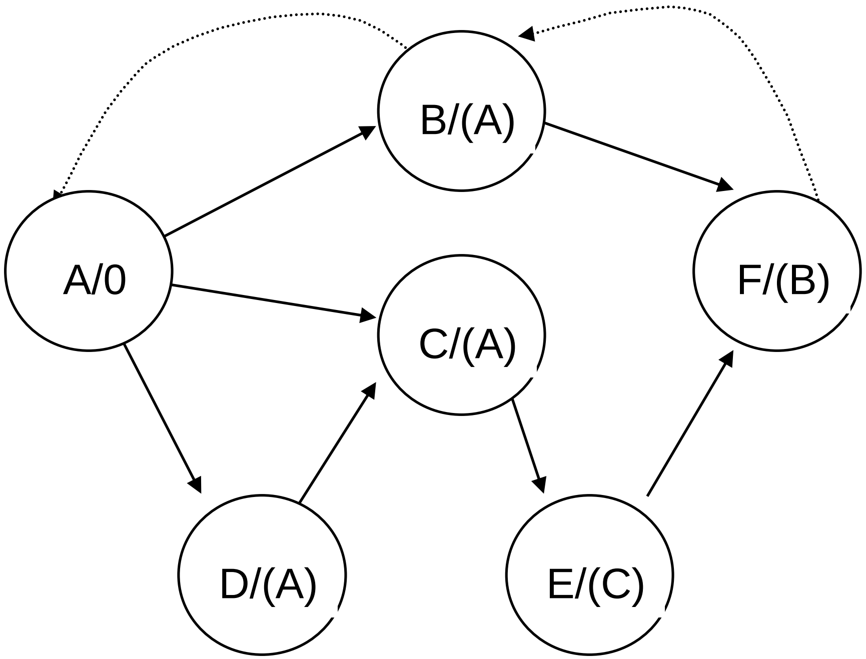
… Algorithmus kürzester ungewichteter Pfad

- Gleichzeitig wird noch eingetragen, von welchem Knoten aus der Knoten erreicht wurde



… Algorithmus kürzester ungewichteter Pfad

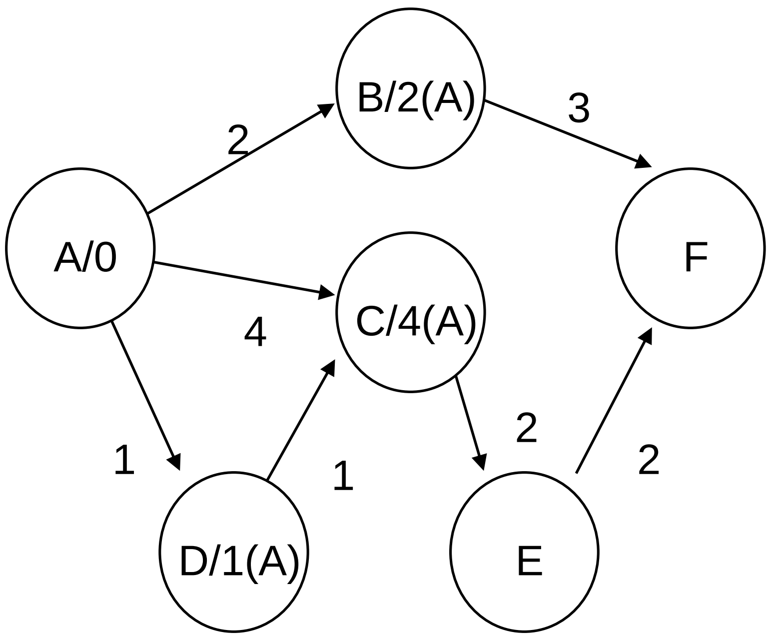
- Vom Endpunkt aus kann dann rückwärts der kürzeste Pfad gebildet werden



2. Kürzester Pfad bei gewichteten Kanten:

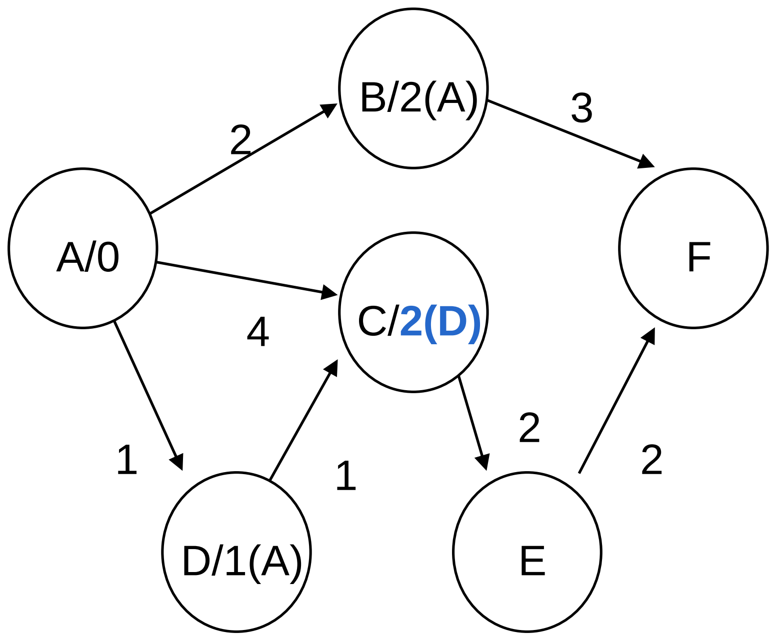
- C ist über D schneller zu erreichen als direkt

Algorithmus: gleich wie vorher, aber **korrigiere Einträge** für Distanzen



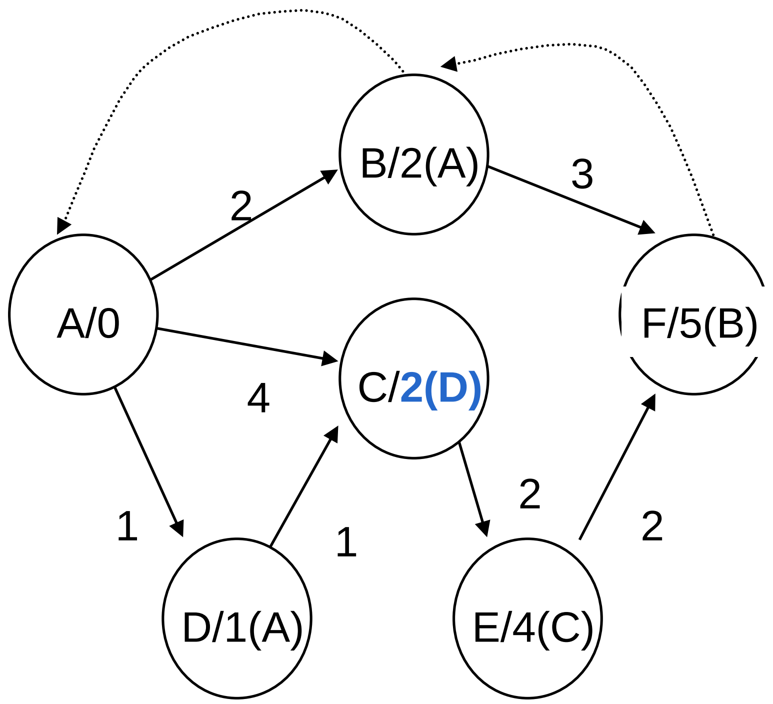
… Kürzester Pfad bei gewichteten Kanten

- Der Eintrag für C wird auf den neuen Wert gesetzt; statt "markiert" gehe so lange weiter, bis der neue Weg länger als der angetroffene ist.



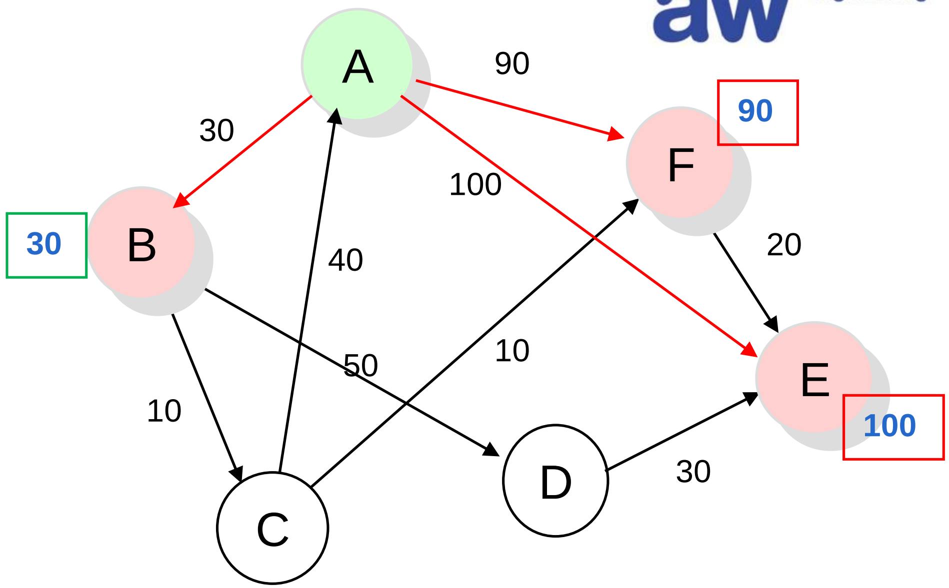
… Kürzester Pfad bei gewichteten Kanten

E und F werden normal behandelt. Der Pfad kann wie vorher rückwärts gebildet werden

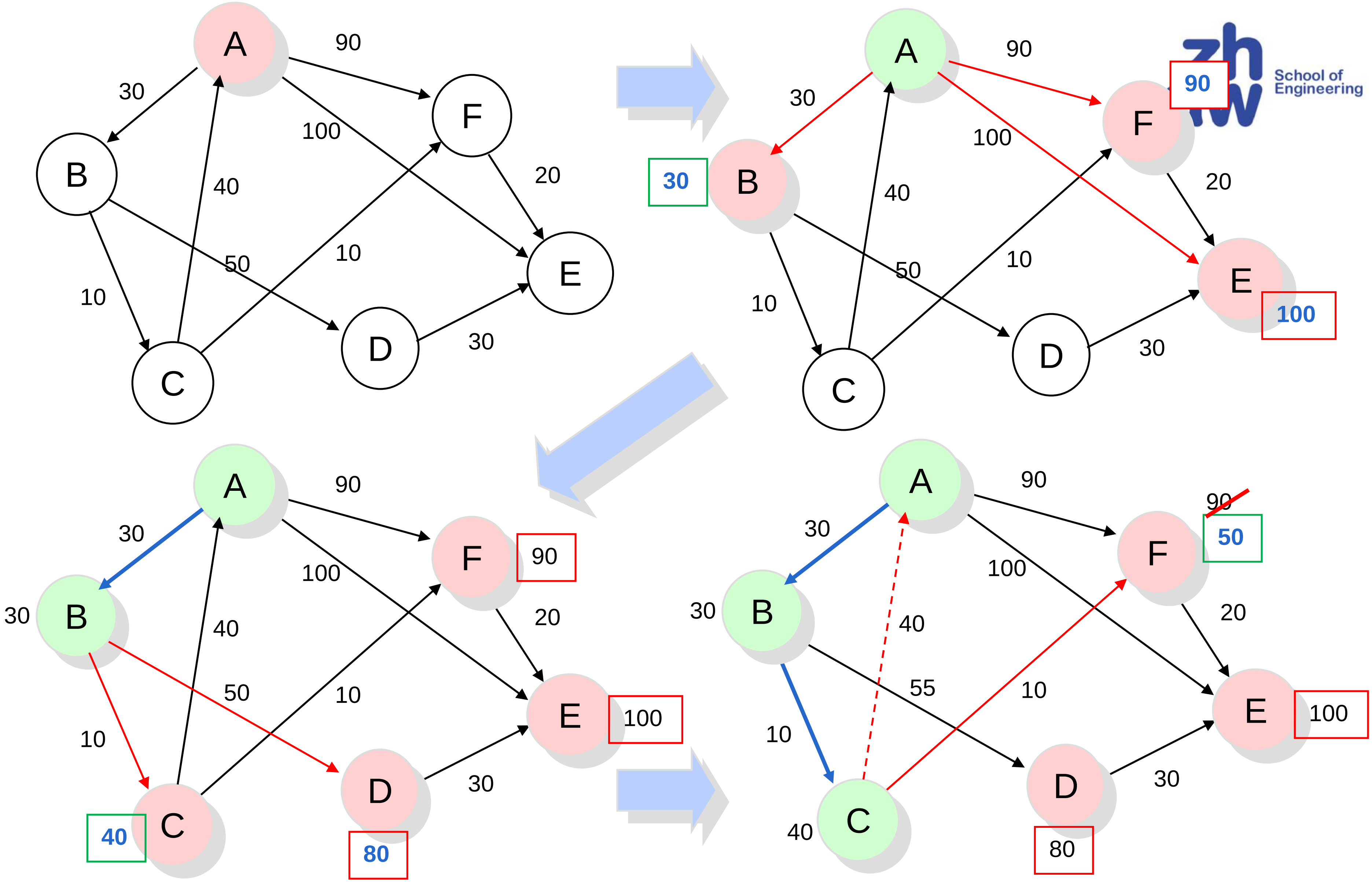


Dijkstras Algorithmus

- Teilt die Knoten in 3 Gruppen auf
  - besuchte Knoten (kleinste Distanz bekannt)
  - benachbart zu allen bereits besuchten Knoten
  - unbesehene Knoten (der Rest)



- Solange (nicht alle Knoten besucht wurden | Zielknoten nicht besucht wurde):
  - Berechne für alle benachbarten Knoten des aktuell besuchten Knotens die neuen Gewichte (rote Pfeile).
  - Suche unter **allen** benachbarten Knoten denjenigen, dessen Pfad zum Startknoten das **kleinste Gewicht** (=kürzeste Distanz) hat (grüner Rahmen um Zahl).
  - Besuche diesen und bestimme für dessen benachbarten Knoten (noch nicht besuchten Knoten) die Gewichte.

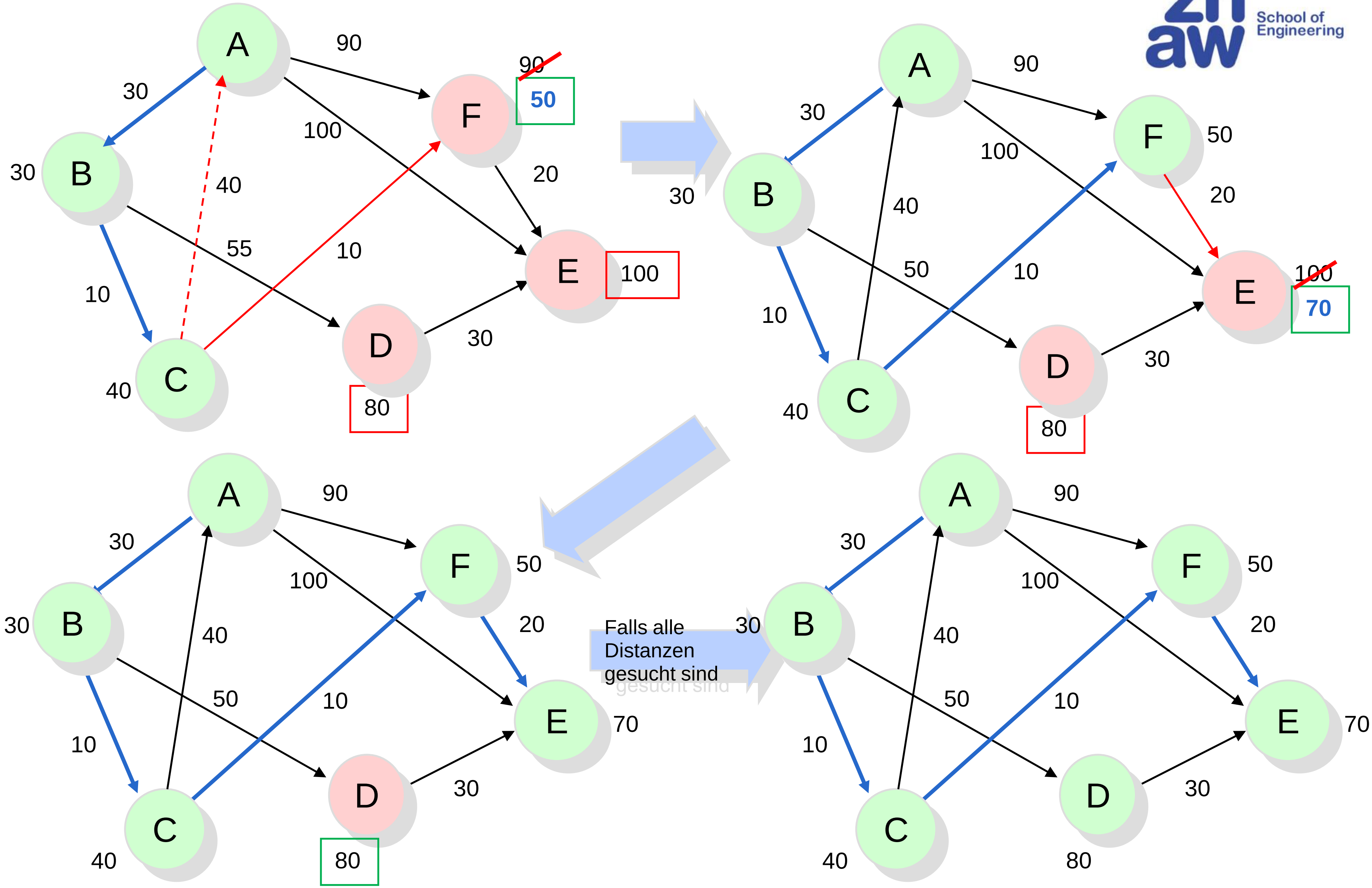


Distanz berechnen

markierte Knoten*)
Knoten in Queue
unbesuchte Knoten

*) wird auf Folie 42 angewendet

letzter Stand



Pseudocode

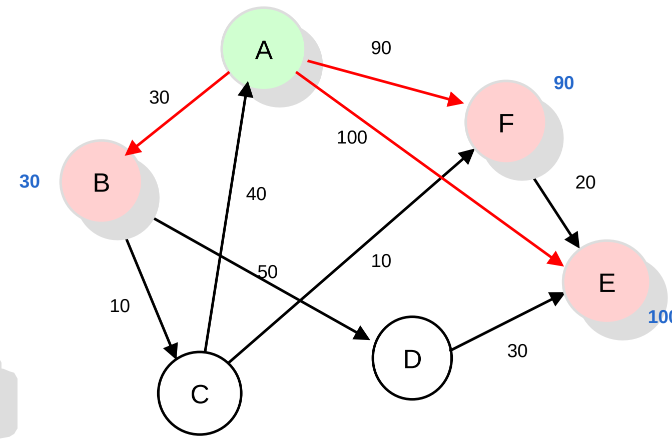
```
for all nodes n in G {
    n.mark = black;         // Knoten noch unbesehen
    n.dist = inf;           // Distanz zum Startknoten - zu Beginn unendlich
    n.prev = null;          // Vorgängerknoten in Richtung Start
}
dist(start) = 0;
current = start;
start.mark = red;
for all nodes in RED {
    current = findNodeWithSmallestDist();
    current.mark = green;
    for all n in successors(current) {
        if (n.mark != green) {
            n.mark = red;
            if (n == goal) return;
            dist = current.dist+edge(current, n);
            if (dist < n.dist) {
                n.dist = dist;
                n.prev = current;
            }
        }
    }
}
```

Schritt 1: Nur der Startknoten ist rot. Hat kleinste Distanz. Grün markiert, d.h. kleinste Distanz gefunden. Alle von ihm ausgehenden Knoten werden rot markiert und die Distanz zum Startknoten eingetragen.
Schritt 2: Der Knoten mit kleinster Distanz kann grün markiert werden. Um auf einem andern Weg zu ihm zu gelangen, müsste man über einen andern roten Knoten mit grösserer Distanz gehen.
Markieren alle von diesem direkt erreichbaren Knoten rot.
Schritt n: In jedem Schritt wird ein weiterer Knoten grün. Dabei kann sich die Distanz der roten Knoten ändern.

Demo-Applet: **https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Dijkstra.html**

Implementation mittels PriorityQueue

Implementation von **`findNodeWithSmallestDist`** mittels PriorityQueue.




```
void breadthFirstSearch()
   q = new PriorityQueue()
   startNode.dist = 0;
   q.enqueue(startNode,0)
   while (!q.empty()) {
        current = q.dequeue() //kürzeste Distanz
        mark current
        if (current == goal) return;
        for all edges e of current {
              successor = e.node;
              if (!(marked(succesor)) {
                  dist = e.dist + current.dist
                  if ((successor.prev == null) || (dist < successor.dist)) {
                        successor.dist = dist;
                        successor.prev = current
                        q.enqueue(successor, successor.dist)
                  }
              }
        }
```

kürzerer Weg gefunden

nicht besucht

alle benachbarten Knoten

unbesehen

Rückweg

Spannbaum

Spannbaum (Spanning Tree)

Definitionen

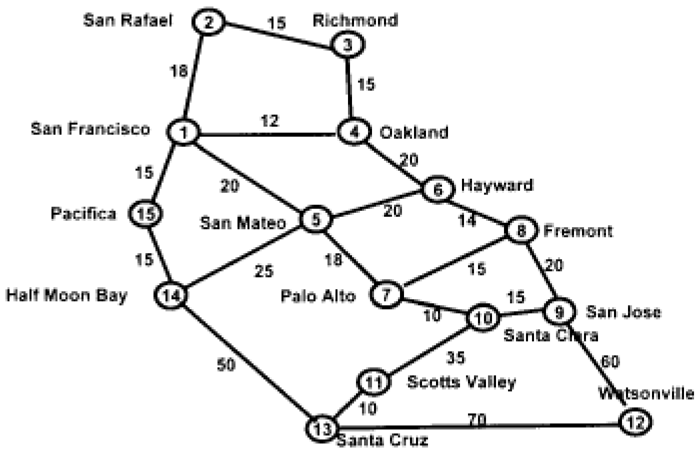
- Ein *Spannbaum* eines Graphen ist ein Baum, der alle Knoten des Graphen enthält.
- Ein minimaler Spannbaum (minimum spanning tree) ist ein Spannbaum eines gewichteten Graphen, sodass die Summe aller Kanten minimal ist.

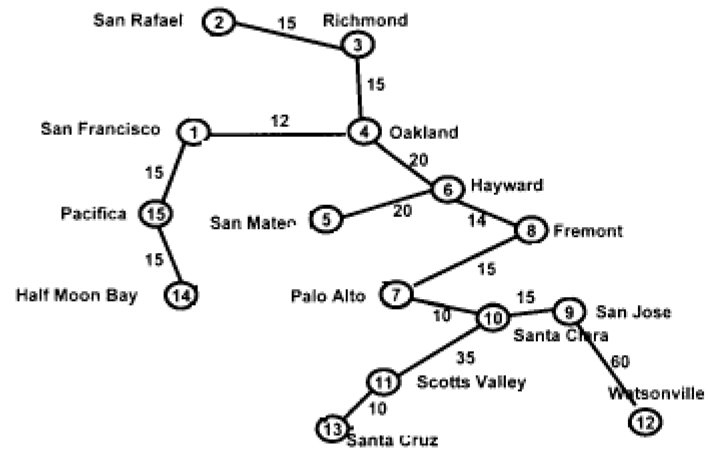
Algorithmus

- z.B. Prim-Jarnik, Prim-Jarnik ist ähnlich wie Dijkstras Algorithmus:
  - Wähle einen beliebigen Knoten v als Startgraph G.
  - Solange G noch nicht alle Knoten enthält:
    - Wähle eine Kante e mit minimalem Gewicht aus, die einen noch nicht in G enthaltenen Knoten v mit G verbindet.
    - Füge e und v dem Graphen G hinzu.

Anwendung

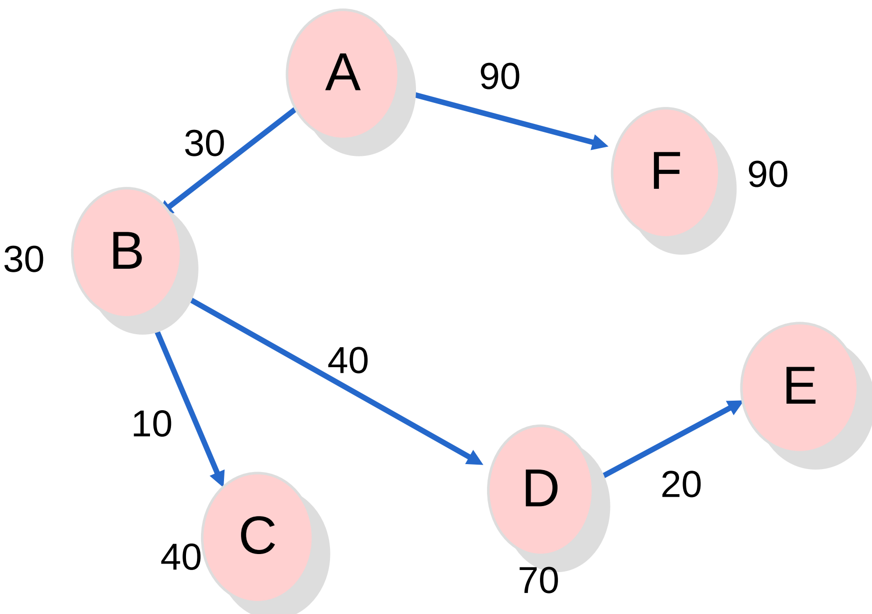
- Gesucht Netz mit minimaler Streckenlänge, das alle Städte verbindet





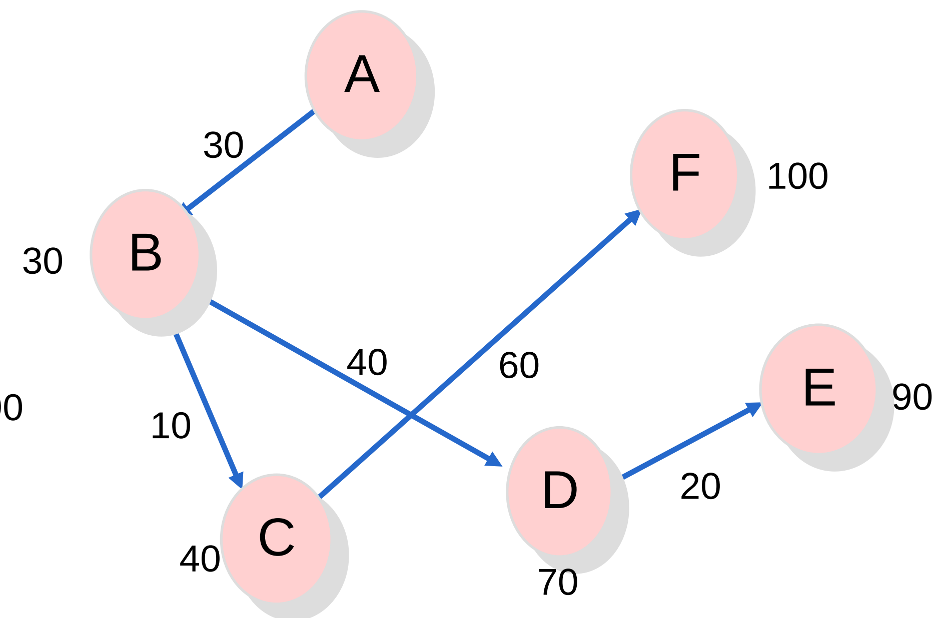
Shortest Path vs. Minimum Spanning Tree

Dijkstra: Shortest path



Total = 190
Path A-F = 90

Prim-Jarnik: Min Spanning Tree

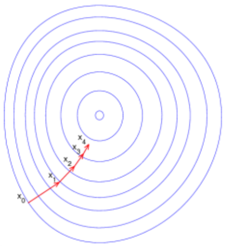


Total = 160
Path A-F = 100

Greedy Algorithms

Gierige Algorithmen (Greedy)

- Spezielle Klasse von Algorithmen
- Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie den Folgezustand auswählen, der zum Zeitpunkt der Wahl den grössten Gewinn bzw. das beste Ergebnis berechnet durch eine (lokale) Bewertungsfunktion verspricht.
- Greedy-Algorithmen
  - sind oft schnell: z.B. Dijkstra Algorithmus
  - können aber in lokalen Maxima stecken bleiben
    - *Lösung: z.B. stochastische Suchverfahren wie z.B. Simulated Annealing (später)*

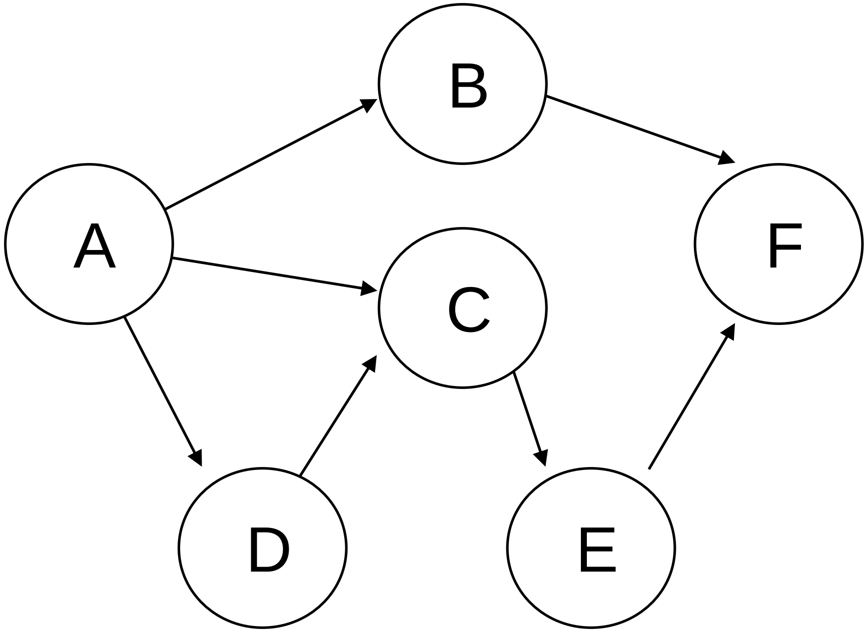


Gradientenverfahren

Topologisches Sortieren

Sortierung eines gerichteten Graphen: topologisches Sortieren

- Die Knoten eines gerichteten, unzyklischen Graphs in einer "natürlichen"* Reihenfolge auflisten



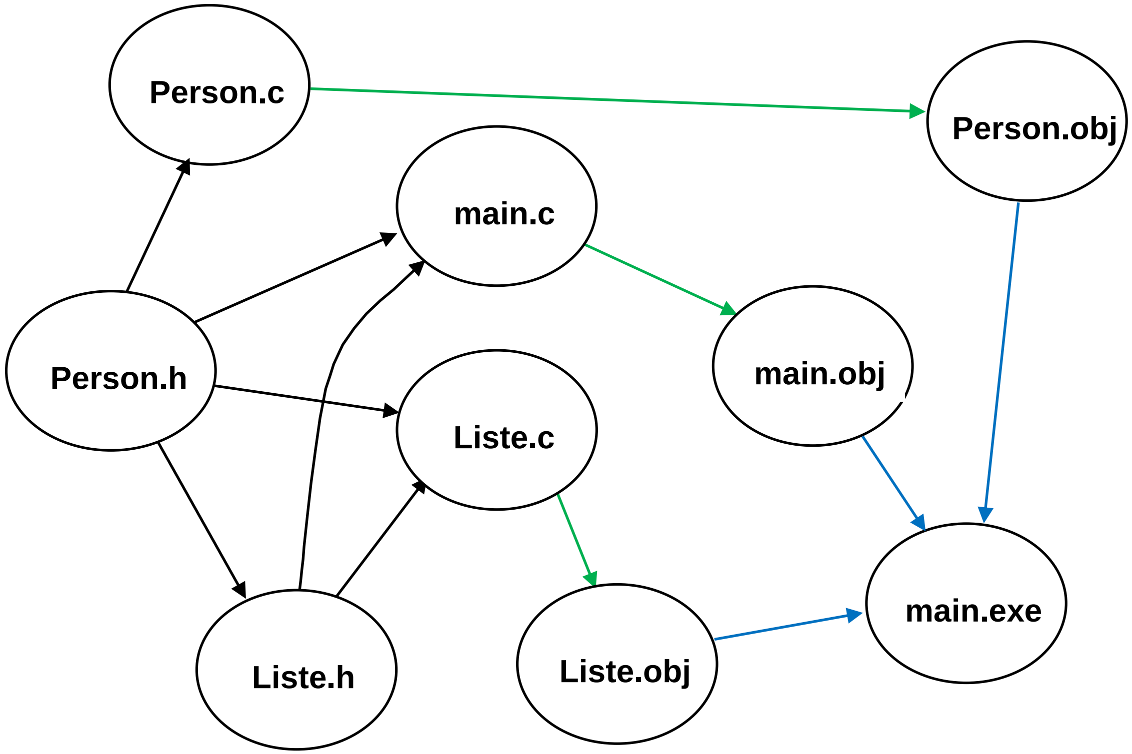
* Beispiel:
Die Kanten geben Abhängigkeiten zwischen Modulen in einem Programm an.

Topologisches Sortieren zeigt eine mögliche Compilationsreihenfolge.

- Lösung : A B D C E F oder A D C E B F

Topologisches Sortieren, Beispiel

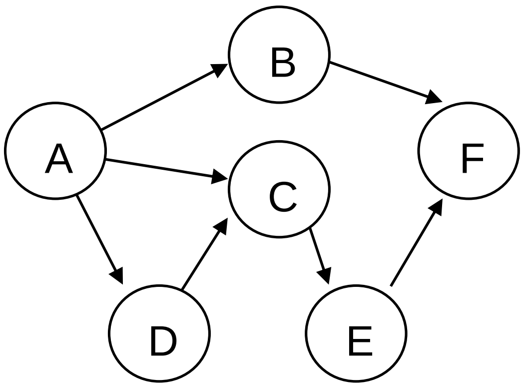
Compilations-Reihenfolge cc: c-> obj; cl: obj->exe



Übung

Beschreiben Sie einen Algorithmus (in Pseudocode), der eine korrekte geordnetete Auflistung eines azyklischen gerichteten Graphen liefert.

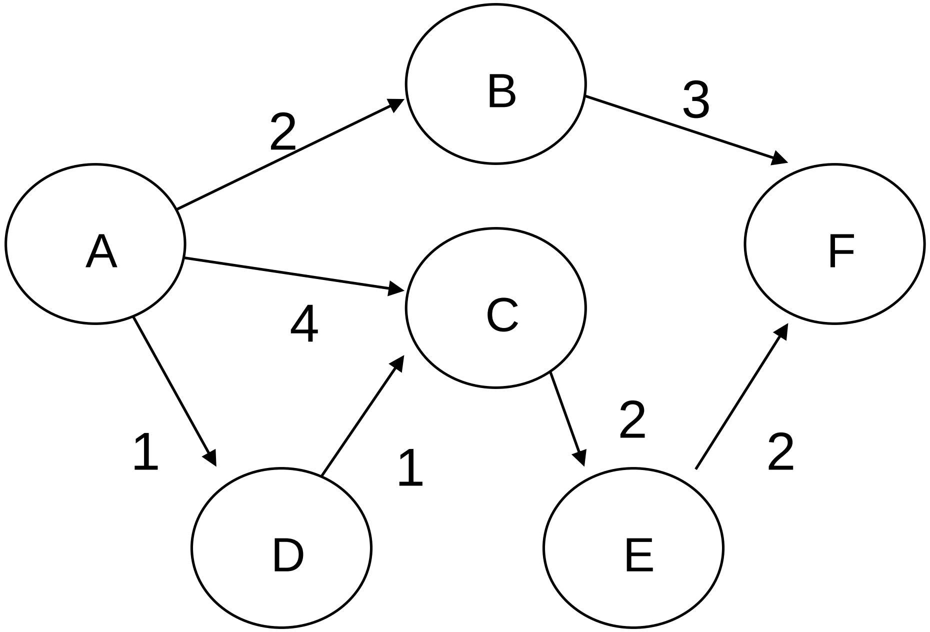
- Hinweis: Zähle die eingehenden Kanten; welche können ausgegeben werden?



Maximaler Fluss

Maximaler Fluss

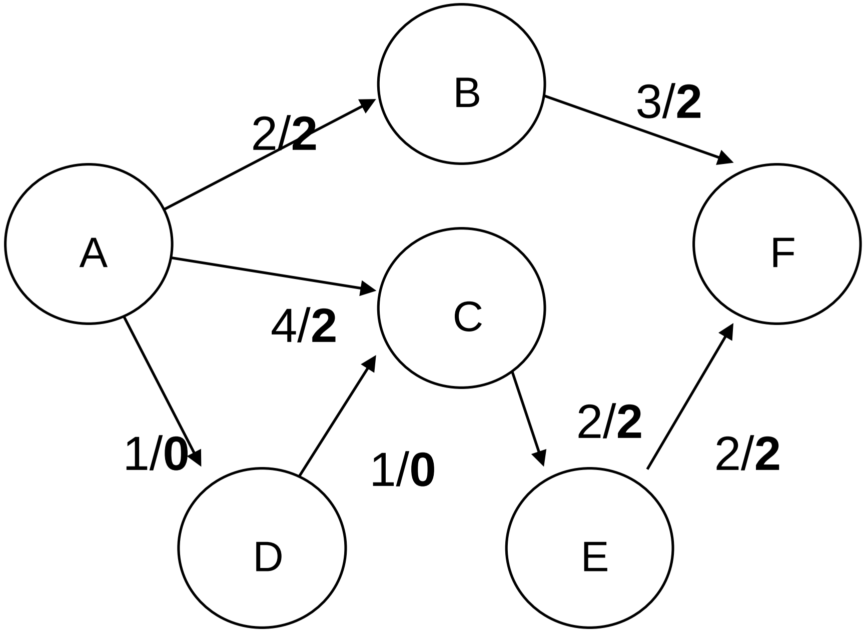
Die Kanten geben den maximalen Fluss zwischen den Knoten an. Wieviel fliesst von A nach F ?



- Hinweis: Was in einen Knoten hinein fliesst, muss auch wieder heraus

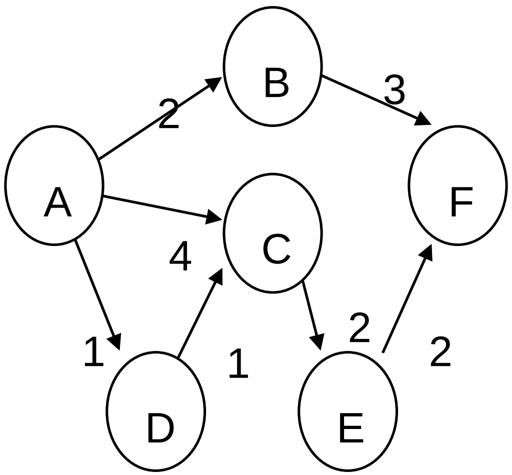
Maximaler Fluss

Resultat : 4

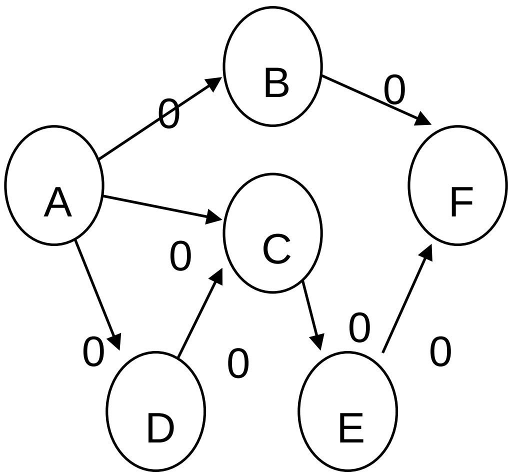


Lösungsidee maximaler Fluss

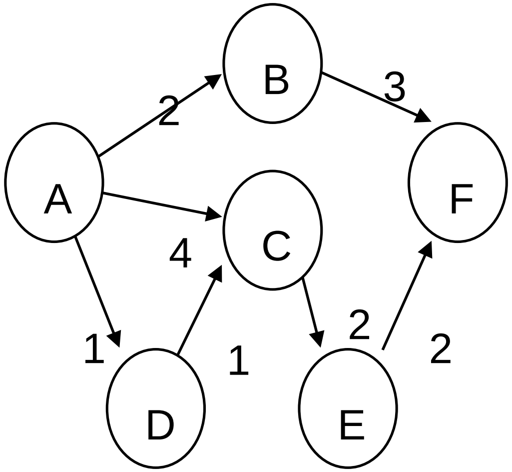
Noch zwei zusätzliche Versionen des Graphen:



Original



Vorläufiger Fluss

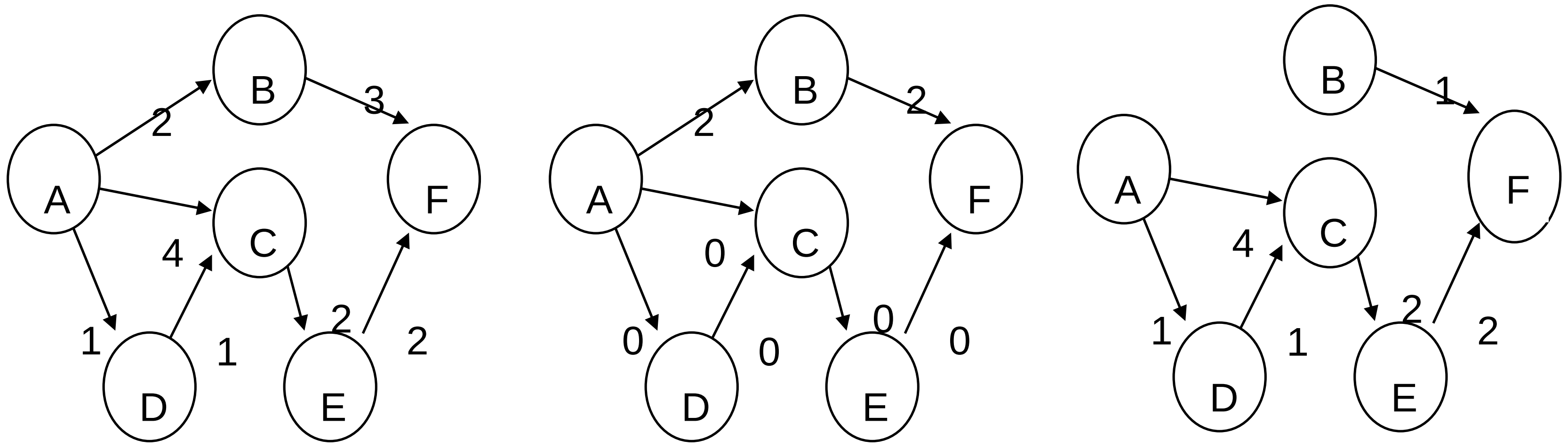


Rest Fluss

Lösungsidee maximaler Fluss

Pfad A B F einfügen: Fluss 2

Pfad A B löschen (da Fluss = 0)



Original

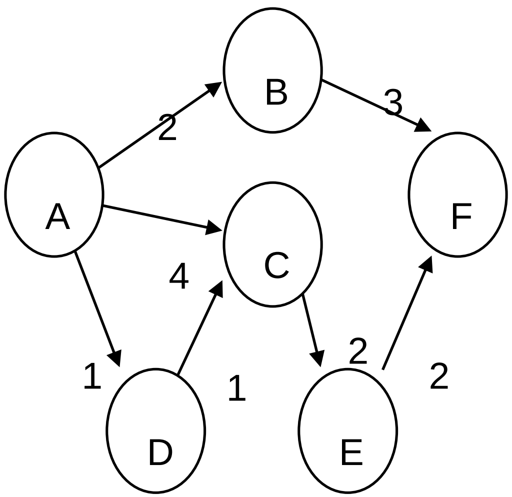
Vorläufiger Fluss

Rest Fluss

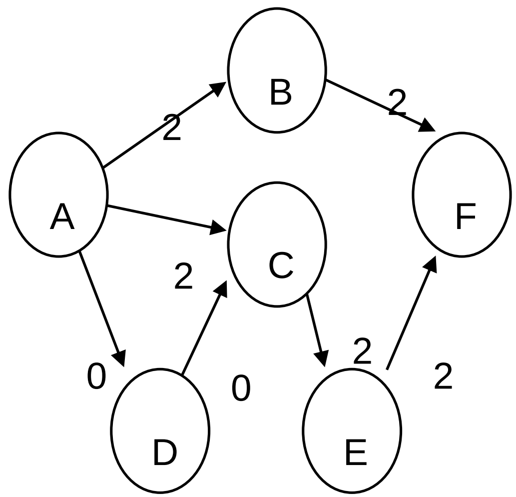
Lösungsidee maximaler Fluss

Pfad A C E F: Fluss 2

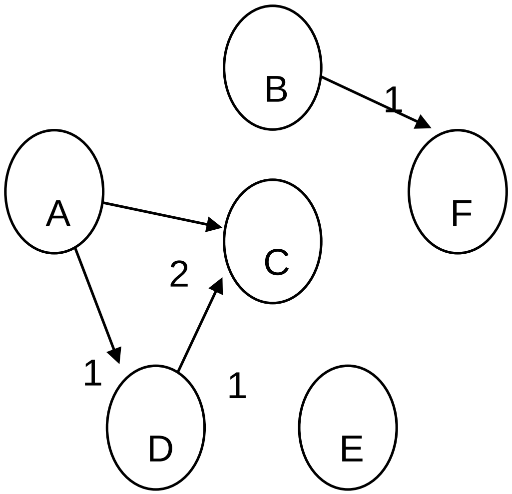
Pfad C E F löschen



Original



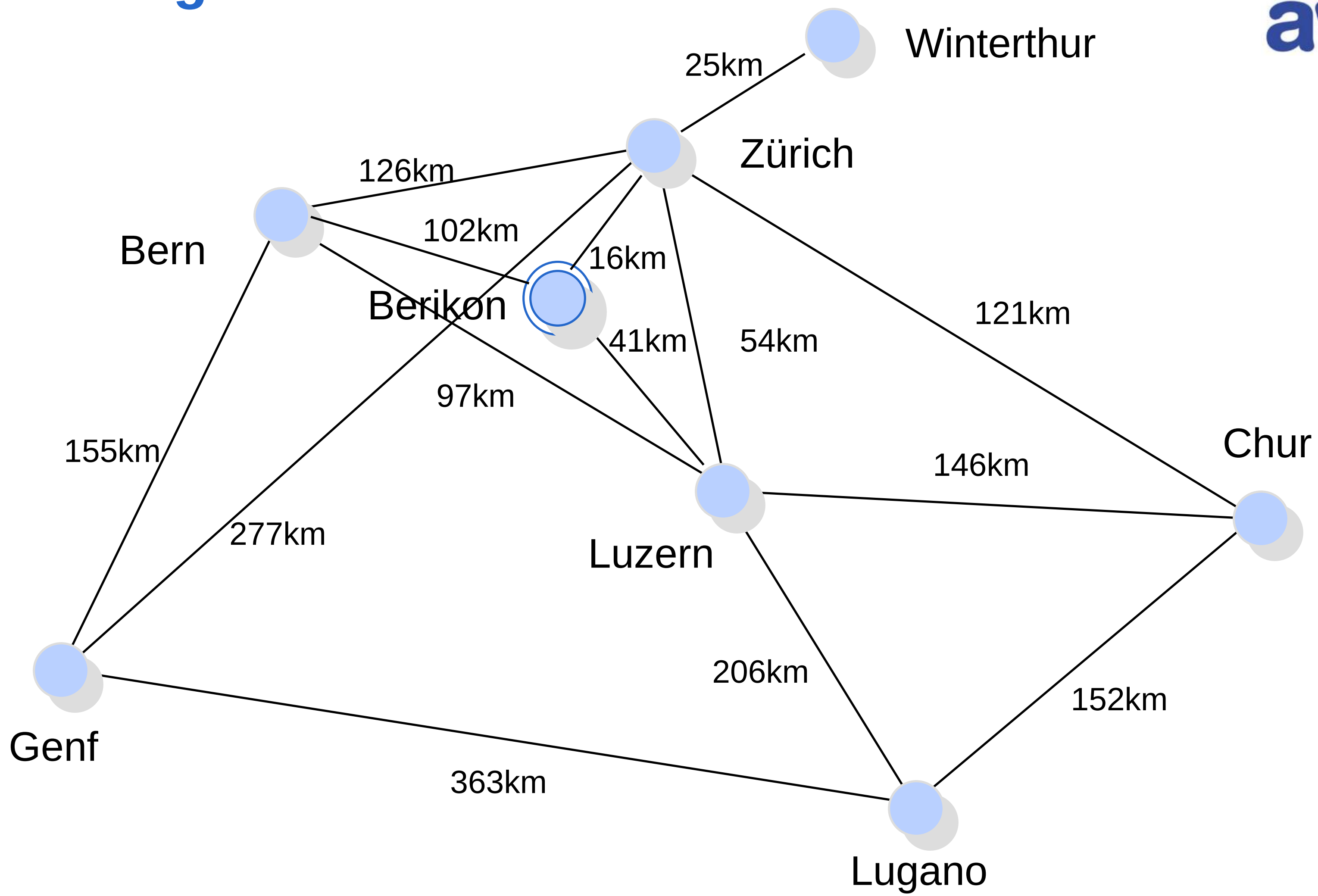
Vorläufiger Fluss



Rest Fluss

Traveling Salesman

*T*raveling *S*alesman *P*roblem: TSP



Finden Sie die kürzeste **Reiseroute**, in der jede Stadt genau einmal besucht wird. Option: am Schluss wieder am Ursprungsort

Eigenschaften des TSP

- Es ist relativ einfach eine Lösung im Beispiel zu finden:
- Aber: manchmal gibt es **überhaupt keine** Lösung. Beispiel: Wenn mehr als eine Stadt nur über einen Weg erreichbar ist.
- Ob es der kürzeste Weg ist, lässt sich nur durch Bestimmen sämtlicher möglicher Wege zeigen -> O(N!). Der Aufwand wächst faktoriell.
(pro Memoria: 50! > 3*10^64)

Lösungen des TSP

Bis heute keine effiziente Lösung des TSP bekannt. Alle bekannten exakten Lösungsverfahren sind von der Art :

Allgemeiner TSP-Algorithmus:

Erzeuge alle möglichen Routen;

Berechne die Kosten (Weglänge) für jede Route;

Wähle die kostengünstigste Route aus.

Um schnell zu brauchbaren Lösungen zu kommen, sind meist durch Heuristiken motivierte Näherungsverfahren notwendig, die aber in der Regel keine Güteabschätzung für die gefundenen Lösungen liefern.

Je nachdem, ob eine Heuristik eine neue Tour konstruiert oder ob sie versucht, eine bestehende Rundreise zu verbessern, wird sie als Eröffnungs- oder Verbesserungsverfahren bezeichnet

Beispiel des TSP

Das folgende Greedy-Algorithmus führt zu einer Näherungslösung:

1. Die Kanten werden nach ihren Kosten sortiert.
2. Wähle billigste Kante unter folgenden Bedingungen (ungültige Kanten aus Liste entfernen):
   - Es darf kein Zyklus entstehen (eventuell am Ende/Rundreise)
   - Kein Knoten darf mit mehr als zwei Kanten verbunden sein

- Laufzeit liegt bei $O(n^2 \log n^2)$.
- Das Verfahren führt nicht immer zu einer optimalen Lösung. Trotzdem wird es in der Praxis erfolgreich eingesetzt

Zusammenfassung

- Graphen
  - gerichtete, ungerichtete
  - zyklische, azyklische
  - gewichtete, ungewichtete
- Implementationen von Graphen
  - Adjazenz-Liste, Adjazenz-Matrix
- Algorithmen
  - Grundformen: Tiefensuche/ Breitensuche
  - kürzester Pfad (ungewichtet/gewichtet)
  - Topologisches Sortieren
  - Maximaler Fluss
  - Traveling Salesman Problem