Einführung in die Integralrechnung: Teil 3
Integrationsmethoden: Teil 1

Andreas Henrici

MANIT2 IT18ta_ZH

05.03.2019

Überblick

Bestimmte Integrale: Rechenregeln

Satz

Bei bestimmten Integralen gelten folgende Rechenregeln:

a) *Vertauschung der Integrationsgrenzen:*

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

b) *Identische Integrationsgrenzen:*

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

c) *Zerlegung des Integrationsbereichs:*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Zerlegung des Integrationsbereichs: Beispiel

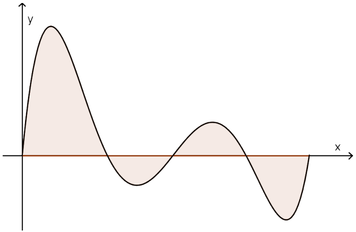
Beispiel

Berechnen Sie $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \leq 1) \\ -x+2 & (x > 1) \end{cases}$$

Flächeninhalte bei beliebigen stetigen Funktionen

- Flächeninhalte bei wechselnden Vorzeichen von $f(x)$



- Grundidee: Nullstellen bestimmen, Flächeninhalte zwischen je zwei Nullstellen separat berechnen
- Als Formel:

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \right| + \ldots + \left| \int_{x_n}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \right|$$

wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Nullstellen von $f(x)$ auf $[a, b]$ sind.

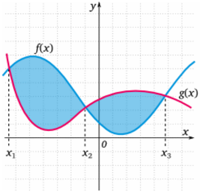
Flächenberechnungen: Beispiel

Beispiel

Bestimmen Sie die Fläche zwischen der Funktionskurve der Funktion $f(x) = x^2 - 3$ und der x-Achse im Intervall $[0, 2]$.

Flächeninhalte zwischen zwei Funktionskurven

- Flächeninhalte zwischen zwei Funktionskurven $f(x)$ und $g(x)$:



- Grundidee: Bestimmtes Integral von $f(x) - g(x)$ über $[a, b]$ berechnen, falls überall $f(x) \geq g(x)$ gilt
- Falls $f(x) - g(x)$ wechselnde Vorzeichen auf $[a, b]$ hat: Unterteilung in Teilbereiche, wie für eine einzelne Funktion:
- Als Formel:

$$A = \left| \int_a^{x_1} (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t \right| + \ldots + \left| \int_{x_n}^{b} (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t \right|$$

wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Nullstellen von $f(x) - g(x)$ auf $[a, b]$ sind.

Flächenberechnungen: Beispiel

Beispiel

Bestimmen Sie die Fläche zwischen den Kurven der Funktionen $f(x) = x - x^3$ und $g(x) = x^3$ im Intervall $[-1, 1]$.

Partielle Integration: Theorie

- Ausgangspunkt: Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ der Differentialrechnung
- Wie kann daraus eine Integrationsregel gewonnen werden?
- Umformung:

$$u'(x) \cdot v(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u(x) \cdot v(x)\right) - u(x) \cdot v'(x).$$

- Integration:

$$\boxed{\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.}$$

- Für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = \left(u(x) \cdot v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Die Regel ist nur nützlich, wenn die Rollen von $u'(x)$ und $v(x)$ geschickt verteilt werden!

Partielle Integration: Beispiel

Beispiel

- Gesucht ist das unbestimmte Integral
$$\int x \cdot e^x \,\mathrm{d}x.$$
- Wir setzen $x = v(x)$ und $e^x = u'(x)$, d.h.
$$\int x \cdot e^x \,\mathrm{d}x = \int \underbrace{x}_{=v(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=u'(x)} \,\mathrm{d}x = \ldots$$
- Dann gilt $u(x) \cdot v(x) = x \cdot e^x$ und $u(x) \cdot v'(x) = 1 \cdot e^x$.
- Es folgt
$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{=v(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=u'(x)} \,\mathrm{d}x &= \underbrace{x}_{=v(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=u(x)} - \int \underbrace{1}_{=v'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=u(x)} \,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot e^x - e^x + C = e^x \cdot (x-1) + C. \end{aligned}$$

Partielle Integration: Beispiel

Beispiel

Gesucht ist das unbestimmte Integral

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

Hinweis: künstlich einen Faktor 1 ins Integral einfügen und dann partiell integrieren!

Partielle Integration: Beispiel

Beispiel

Gesucht ist das unbestimmte Integral

$$\int x^2 \cdot e^x \,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: zweimal partiell integrieren!