Grundlagen: Teil 1

Andreas Henrici

MANIT1 IT18ta_ZH

17. September 2018

Überblick

1 **Einleitung**

2 **Zahlmengen**

3 **Rechnen mit Potenzen, Wurzeln, Logarithmen**
- Rechenregeln für Potenzen
- Rechenregeln für Logarithmen

Themen von MANIT1

1. Grundlagen
   - Zahlmengen
   - Rechnen mit Potenzen, Wurzeln, Logarithmen
   - Gleichungen und Ungleichungen
2. Reelle Funktionen einer Variablen
   - Begriff und Darstellung einer Funktion
   - Eigenschaften von und Operationen mit Funktionen
   - Koordinatentransformationen
   - Wichtige Typen von Funktionen: Polynome, rationale Funktionen
3. Folgen und Reihen
   - Folgen und Reihen: Grundbegriffe
   - Arithmetisch und geometrische Folgen und Reihen
   - Grenzwerte von Folgen und Reihen
4. Differentialrechnung
   - Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen
   - Grundlagen der Differentialrechnung
   - Ableitungsregegln
   - Charakteristische Kurvenpunkte, Kurvendiskussion
   - Extremwertprobleme

Menge: Konzept

- *Menge:* Abstraktes Konzept
- Wir brauchen vor allem Zahlmengen
- Es gibt aber auch Mengen von Funktionen, von Kurven, ...
- Das Konzept „Menge“ ist nicht auf die Mathematik beschränkt!

Definition

Eine *Menge M* ist eine Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte sind untereinander unterscheidbar und heissen die *Elemente* der Menge.

Bemerkung

Ein Element kann nur einmal in einer Menge vorkommen.

Bemerkung

Die einfachste Menge ist ... die leere Menge $\emptyset$ oder $\{\}$.

Zahlmengen

- $\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- $\mathbb{N}^*$: Menge der natürlichen Zahlen ohne 0:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

- $\mathbb{Z}$: Menge der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- $\mathbb{Q}$: Menge der rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

- $\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen: „Vollständige“ Zahlengerade
- $\mathbb{C}$: Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \{p + q \cdot j | p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}\}$

Mengen: Charakterisierung

Mögliche Arten der Darstellung:

- aufzählend:

$$M = \{a_1, a_2, \ldots\}$$

- beschreibend:

$$M = \{x | x \text{ hat die Eigenschaft } \ldots\}$$

Beispiel

- aufzählend:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- beschreibend:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Menge: Zugehörigkeit

Definition

Die Zugehörigkeit von Objekten zu einer Menge wird folgendermassen beschrieben:

- Falls das Objekt p in der Menge M enthalten ist

$$p \in M$$

- Falls das Objekt q in der Menge M nicht enthalten ist:

$$q \notin M$$

Beispiel

- $3 \in \mathbb{N}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
- $j \notin \mathbb{R}$

Mengen: Teilmengen

Definition

Eine Menge A heisst Teilmenge einer Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

$$A \subseteq B \text{ oder } A \subset B$$

Beispiel

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$
- Allgemeiner:
$$\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Q}.$$

Spezielle Teilmengen: „Intervalle“:

Definition

Unter einem *Intervall* verstehen wir eine zusammenhängende Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Mengen: Intervalle

Tyoen von Intervallen:

- *Abgeschlossene* Intervalle:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

- *Offene* Intervalle:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

- *Halboffene* Intervalle, z.B.:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

- *Unendliche* Intervalle, z.B.:

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$$

Mengen: Unendliche Intervalle

Wichtige unendliche Intervalle:

- $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_{>0} = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$
- $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}_{<0} = (-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$
- $\mathbb{R}_{\leq 0} = (-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$

Bemerkung

Vorsicht:

- ∞ ist *keine* reelle Zahl.
- Mit ∞ und $-\infty$ kann man *nicht* gewöhnlich rechnen!

Potenzen: Definition

Basis	**Exponent**	**Definition**
$a \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}^*$	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}$
$a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	0	$a^0 = 1$
$a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$-n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$	$\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
$a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$	$\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$	$b \in \mathbb{R}$	$a^b = e^{b \cdot \ln(a)}$

Potenzen: Rechenregeln

Satz

Für alle $a \geq 0$, $b > 0$ und $m, n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{array}{|llcl|}
\hline
(1) & a^m \cdot a^n & = & a^{m+n} \\
(2) & \dfrac{a^m}{a^n} & = & a^{m-n} \\
\hline
(3) & (a^m)^n & = & a^{m \cdot n} \\
(4) & (a \cdot b)^n & = & a^n \cdot b^n \\
\hline
(5) & \left(\dfrac{a}{b}\right)^n & = & \dfrac{a^n}{b^n} \\
\hline
\end{array}
$$

Logarithmen: Definition und Grundeigenschaften

Definition

Seien $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ (d.h. $a > 0$, $a \neq 1$) sowie $r > 0$. Der Logarithmus von r zur Basis a, $\log_a(r)$, ist die Lösung x der Gleichung

$$r = a^x.$$

- Zusammenhang zwischen Potenzen und Logarithmen:

$$r = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(r)$$

- Natürlicher Logarithmus: falls $a = e = 2.71828\ldots$

$$\ln(a) = \log_e(a).$$

- Satz über die „Umkehrfunktion“:

Satz

Es gilt für alle $a > 0$ mit $a \neq 1$:

$$a^{\log_a(x)} = x \quad (x > 0), \qquad \log_a(a^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Logarithmen: Rechenregeln

Satz

Für alle $a, b > 0$ mit $a, b \neq 1$, $u, v > 0$, $k \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

(1)	$\log_a(u \cdot v)$	$=$	$\log_a(u) + \log_a(v)$
(2)	$\log_a\left(\frac{u}{v}\right)$	$=$	$\log_a(u) - \log_a(v)$
(3)	$\log_a(u^k)$	$=$	$k \cdot \log_a(u)$
(4)	$\log_a\left(\sqrt[n]{u}\right)$	$=$	$\frac{1}{n} \cdot \log_a(u)$
(5)	$\log_a(u)$	$=$	$\dfrac{\log_b(u)}{\log_b(a)}$

Bemerkung

Die Regel $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$ wurde früher dazu verwendet, Multiplikationen in Additionen zu verwandeln!