Differentialrechnung: Teil 5

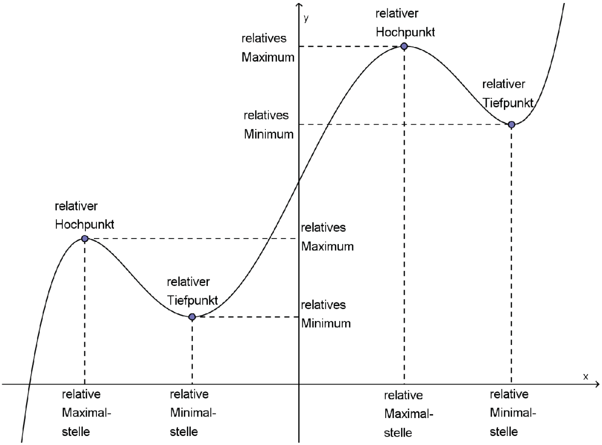
Andreas Henrici

MANIT1 IT18ta_ZH

10. Dezember 2018

Überblick

Relative Extrema: Geometrie



Relative Extrema: Definition

Definition

- Eine Funktion $y = f(x)$ mit Definitionsbereich D besitzt an der Stelle $x_0 \in D$ eine *relative Maximalstelle* bzw. *relative Minimalstelle*, d.h. ein *relative Extremalstelle*, falls in einer Umgebung U von x_0 gilt:

$$\begin{cases} f(x_0) > f(x) & (x \neq x_0, x \in U) \quad \text{(relatives Maximum)} \\ f(x_0) < f(x) & (x \neq x_0, x \in U) \quad \text{(relatives Minimum)} \end{cases}$$

- Die entsprechenden Funktionswerte $y = f(x_0)$ heissten *relatives Maximum*/*relatives Minimum*/*relatives Extremum*.
- Die zugehörigen Kurvenpunkte $(x_0, f(x_0))$ heissen *relativer Hochpunkt*/*relativer Tiefpunkt*/*relativer Extremalpunkt*.

Bemerkung

Was hat das mit Differentialrechnung zu tun?

Relative Extrema: Berechnung

- *Grundprinzip:* Falls $y = f(x)$ differenzierbar ist, kann man die relativen Extrema duch Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$ finden.
- *Notwendige* Bedingung für relative Extrema:

Satz

Sei x_0 eine relative Extremalstelle einer differenzierbaren Funktion $y = f(x)$. Dann gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

- *Hinreichende* Bedingung für relative Extrema:

Satz

Sei $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion. Falls an der Stelle x_0 die Bedingungen

$$f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) \neq 0$$

erfüllt sind,hat $f(x)$ an der Stelle x_0 ein relatives Extremum. Im Fall $f''(x_0) < 0$ handelt es sich dabei um ein relatives Maximum, im Fall $f''(x_0) > 0$ um ein relatives Minimum.

Extrema: Beispiel

Beispiel

Untersuchen Sie, ob $x_0 = 0$ eine relative Extremalstelle der Funktion

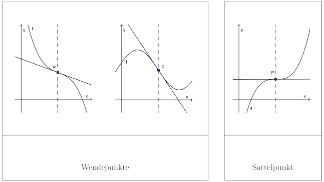
a) $y = x^2$

b) $y = x^3$

c) $y = x^4$

ist.

Wendepunkte: Geometrie und Definition



Definition

- Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 einen *Wendepunkt* $(x_0, f(x_0))$, falls sich an der Stelle x_0 der Drehsinn der Kurve ändert; dabei heisst x_0 die zugehörige *Wendestelle*.
- Wendepunkte mit horizontaler Tangente heissen *Sattelpunkte* oder *Terrassenpunkte*.
- Allgemein heisst die „Tangente" an die Kurve an einem Wendepunkt *Wendetangente*.

Wendepunkte: Berechnung

- *Grundprinzip:* Falls $y = f(x)$ differenzierbar ist, kann man die Wendepunkte duch Lösen der Gleichung $f''(x) = 0$ finden.
- *Notwendige* Bedingung für Wendepunkte:

Satz

Sei $(x_0, f(x_0))$ ein Wendepunkt einer zweimal differenzierbaren Funktion $y = f(x)$. Dann gilt

$$f''(x_0) = 0.$$

- *Hinreichende* Bedingung für Wendepunkte:

Satz

Sei $y = f(x)$ eine dreimal differenzierbare Funktion.

a) *Falls an der Stelle x_0 die Bedingungen $f''(x_0) = 0$, $f^{(3)}(x_0) \neq 0$ erfüllt sind, hat $f(x)$ an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.*

b) *Falls zusätzlich die Bedingung $f'(x_0) = 0$ erfüllt ist, handelt es sich bei diesem Wendepunkt um einen Sattelpunkt bzw. Terrassenpunkt.*

Wendepunkte: Beispiel

Beispiel

Untersuchen Sie, ob $x_0 = 0$ eine Wendestelle der Funktion

a) $y = x^3$

b) $y = x^4$

ist.

Extrema und Wendepunkte: Beispiel

Beispiel

Bestimmen Sie die relativen Extrema (inkl. Typbestimmung) und Wendepunkte der Funktion

$$y = \sin(x).$$

Extrema und Wendepunkte: Präzises Kriterium

Satz

Sei $f(x)$ ein genügend oft differenzierbare Funktion, und es gelte $f'(x_0) = 0$. Sei zudem $n \in \mathbb{N}$ die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0, d.h. es gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

a) *Wenn n gerade ist, hat $f(x)$ an der Stelle x_0 ein relatives Extremum, und zwar ein relatives Maximum im Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$ und ein relatives Minimum im Fall $f^{(n)}(x_0) > 0$.*

b) *Wenn n ungerade ist, hat $f(x)$ an der Stelle x_0 einen Wendepunkt (und damit einen Sattelpunkt).*

Bemerkung

Falls $f^{(n)}(x_0) = 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, müssen zur Typbestimmung andere Methoden verwendet werden.

Kurvendiskussion: Vorgehen

Die Kurvendiskussion für eine Funktion $y = f(x)$ umfasst folgende Elemente:

- Definitionsbereich
- Symmetrie (oder Periodizität)
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen (insbes. Nullstellen)
- Polstellen, hebbare Definitionslücken
- Verhalten für $x \to \pm\infty$, evtl. Asymptoten
- Relative Extrema, inkl. Typbestimmung
- Wendepunkte, insbesondere Sattelpunkte

Kurvendiskussion: Beispiel

Beispiel

Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 5}{x^3}$$

- Definitionsbereich:
- Symmetrie:
- Schnittpunkte mit der Koordinatenachsen:
- Polstellen und hebbare Definitionslücken:
- Verhalten für $x \to \pm\infty$:
- Relative Extrema, inkl. Typbestimmung:
- Wendepunkte:

Kurvendiskussion: Beispiel

Beispiel

Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 5}{x^3}$$

Graph: