Folgen und Reihen: Teil 2

Andreas Henrici

MANIT1 IT18ta_ZH

29. Oktober 2018

Überblick

Folgen: Begriff und Bildungsgesetze

Definition

Zahlenfolge / *Folge*: Abbildung

$$\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n, \qquad (\text{oder } \mathbb{N} \to \mathbb{R})$$

Darstellung als

$$(a_k) = (a_k)_{k \geq 1} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots).$$

Die Elemente der Folge heissen die *Glieder* der Folge, d.h. a_n ist das n-te Glied der Folge.

a) *Explizites/direktes Bildungsgesetz:* Bildungsgesetz vom Typ $a_k = f(k)$

b) *Rekursives Bildungsgesetz:* Bildungsgesetz vom Typ $a_k = f(a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots)$

Folgen: Arithmetische und geometrische Folgen

Definition

Eine Folge (a_k) heisst *arithmetische Folge*, falls die Differenz zweier benachbarter Glieder immer gleich gross ist, d.h. falls

$$a_{k+1} - a_k = d$$

gilt für ein festes $d \in \mathbb{R}$ und für alle $k \geq 1$.

Definition

Eine Folge (a_k) heisst *geometrische Folge*, falls der Quotient zweier benachbarter Glieder immer gleich gross ist, d.h. falls

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = q$$

gilt für ein festes $q \in \mathbb{R}$ und alle $k \geq 1$.

Arithmetische und geometrische Folgen: Explizites Bildungsgesetz

Satz

Sei (a_k) ein arithmetische Folge mit Differenz d und Anfangsglied $a_1 = A$. Dann gilt

$$a_n = A + (n-1) \cdot d \qquad (n \geq 1).$$

Satz

Sei (a_k) ein geometrische Folge mit Quotient q und Anfangsglied $a_1 = A$. Dann gilt

$$a_n = A \cdot q^{n-1} = \frac{A}{q} \cdot q^n \qquad (n \geq 1).$$

Die Folgenglieder wachsen also exponentiell!

Partialsummen einer Folge

Idee: Glieder einer Folge (a_k) bis zum n-ten Glied aufsummieren!

Definition

Sei (a_k) eine Folge.

a) Die Grösse

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

heisst *n-te Partialsumme* der Folge (a_k).

b) Die Folge

$$(s_n)_{n \geq 1}$$

der Partialsummen heisst die zur Folge (a_k) gehörende *Reihe*.

- Die Reihe (s_n) ist also eine neue Folge, die aus der ursprünglichen Folge (a_k) gebildet wird.
- Das n-te Glied der Reihe (s_n) ist die n-te Partialsumme der ursprünglichen Folge (a_k).

Partialsummen: Beispiel

Beispiel

- *Gegeben:* Folge
$$(a_k) = (1, 2, 3, 4, \ldots),$$
- *Gesucht:* Reihe (s_n), die zu dieser Folge gehört!
  - $s_1 = a_1 = 1$
  - $s_2 = a_1 + a_2 = 3$
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 6$
  - $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$
  - $\ldots$
- Die Reihe (s_n) ist also die neue Folge
$$(s_n) = (1, 3, 6, 10, \ldots)$$

Partialsummen von arithmetischen Folgen: Berechnungsidee an einem Beispiel

Beispiel

- Gesucht: $1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = ?$
- Lösung:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 &= (1 + 100) + (2 + 99) \\ &\qquad + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51) \\ &= 50 \cdot 101 \\ &= 5050 \end{aligned}$$

- Andere Notation der gleichen Idee:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 100) &= 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 \\ &\quad + (100 + 99 + 98 + \ldots + 1) \\ &= (1{+}100) + (2{+}99) + \ldots + (100{+}1) \\ &= 101 \cdot 100 \\ &= 10100 \end{aligned}$$

Partialsummen von arithmetischen Folgen: Berechnungsidee

- Gesucht: $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ für eine arithmetische Folge (a_n)
- *Idee:* s_n zweimal in umgekehrter Reihenfolge notieren:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - d) + a_n \\ s_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + d) + a_1 \end{aligned}$$

- Zeilen addieren:

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

- Also, mit $a_n = A + (n-1) \cdot d$:

Satz

Sei (a_k) eine arithmetische Folge (a_k) mit Anfangsglied A und Differenz d. Dann gilt für die n-te Partialsumme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$:

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \left(A + \frac{n-1}{2} \cdot d \right).$$

Summe der ersten n natürlichen Zahlen

Beispiel (Fortsetzung)

- Gesucht: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = ?$
- Lösung:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n \cdot \left(A + \frac{n-1}{2} \cdot d\right)$$

- Es gilt $A = 1$ und $d = 1$, also:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + n &= n \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot 1\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Partialsummen von geometrischen Folgen: Berechnungsidee

- Gesucht: $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ für eine geometrische Folge (a_n)
- *Idee:* s_n und $q \cdot s_n$ untereinander notieren:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \\ q \cdot s_n &= \qquad a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \end{aligned}$$

- Zeilen subtrahieren:

$$(1-q)s_n = a_1(1-q^n).$$

- Also:

Satz

Sei (a_k) eine geometrische Folge (a_k) mit Anfangsglied $a_1 = A$ und Quotient q. Dann gilt für die n-te Partialsumme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$:

$$s_n = A \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = A \cdot \frac{q^n-1}{q-1}. \qquad (q \neq 1)$$

Partialsummen von geometrischen Folgen: Beispiel

Beispiel

- Geometrische Folge (a_k) mit

$$a_k = \frac{7}{2^{k-1}},$$

d.h.

$$(a_k) = \left(7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \ldots\right).$$

- Formel für die n-te Partialsumme s_n?
- Bestätigung durch explizite Berechnung von s_1, s_2, s_3?
- Summe *aller* Glieder?

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = ?$$

Verhalten der Partialsummen für $n \to \infty$

- Geometrische Reihe zu einer geometrischen Folge $(a_n) = (A, Aq, Aq^2, Aq^3, \ldots)$ gehörende Reihe:

$$A + Aq + Aq^2 + Aq^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} Aq^{k-1}.$$

- Erinnerung: Die n-te Partialsumme ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = A \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

- Verhalten für $n \to \infty$?
- Falls $|q| < 1$, gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{A}{1-q}$$

Summenformel für unendliche geometrische Reihen

Satz

Eine unendliche geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} Aq^{k-1}$ ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$ gilt. In diesem Fall gilt die Summenformel

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} Aq^{k-1} = \frac{A}{1-q} \qquad (|q| < 1).$$

Beispiel (Fortsetzung)

- Geometrische Folge (a_k) mit $a_k = \dfrac{7}{2^{k-1}}$
- Summe der zugehörigen unendlichen geometrischen Reihe?
- Es gilt $q = \frac{1}{2}$, also konvergiert die Reihe, und es gilt

$$s = \frac{A}{1-q} = \frac{7}{1-\frac{1}{2}} = 14.$$