Differentialgleichungen: Teil 1

Andreas Henrici

MANIT2 IT18ta_ZH

09.04.2019

Überblick

Beispiele zum Einstieg

Beispiel

- Gesucht sind Funktionen mit der Eigenschaft

$$y' = x^3.$$

Die gesuchten Funktionen sind

$$y = \frac{1}{4}x^4 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Gesucht sind Funktionen mit der Eigenschaft

$$y' = y.$$

Die gesuchten Funktionen sind

$$y = C \cdot e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Die Bedingung $y' = y$ ist eine Differentialgleichung!

Grundbegriffe

Definition

- Eine *Differentialgleichung* n-ter Ordnung ist eine Gleichung

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

  für eine gesuchte Funktion $y = y(x)$, in der Ableitungen von $y(x)$ bis zur n-ten Ordnung auftreten.
- Falls die DGL nach $y^{(n)}$ aufgelöst ist, nennt man die DGL *explizit*, ansonsten *implizit*.

Beispiel (Fortsetzung)

- Gegeben ist die explizite Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = y.$$

- Die Lösungen können erraten werden und sind

$$y = Ce^x, \ C \in \mathbb{R}.$$

Beispiel

- Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

- Die Lösungen können hier nicht unmittelbar erraten werden.
- Die Lösungen sind

$$y = \pm\sqrt{K - x^2}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

- Wir können nachrechnen, dass diese Funktionen tatsächlich Lösungen der DGL sind:

Zu Lösungen und Lösungsmengen einer Differentialgleichung:

- Die Lösungsmenge einer DGL ist also nicht eine Zahl, sondern
- eine *Menge von Funktionen*.
- Eine DGL ist eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen; gesucht sind Funktionen, die diese Beziehung erfüllen.
- Die Lösung ist erst dann eindeutig, wenn man zusätzlich zur DGL noch eine oder mehrere *Anfangsbedingungen* vorgibt.
- Eine DGL zusammen mit einer Anfangsbedingung ist ein *Anfangswertproblem*.

Definition

- Ein *Anfangswertproblem* einer DGL n-ter Ordnung ist

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) & = & 0, \quad (x, y, \dots y^{(n)}) \in \Omega \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \\ & \vdots & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1} \end{array} \right.$$

- Anfangswertproblem für explizite DGL 1. Ordnung:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & G(x, y), \quad (x, y, y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) & = & y_0 . \end{array} \right.$$

Für eine DGL n-ter Ordnung müssen also n verschiedene Anfangswerte vorgegeben werden, d.h. für eine DGL 1. Ordnung braucht es einen einzigen Anfangswert.

Beispiel (Fortsetzung)

- Gegeben ist das AWP

$$\begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 3 \end{cases}$$

- Die eindeutige Lösung dieses AWPs ist

$$y = 3e^x.$$

Definition

- Die Menge aller Lösungen einer DGL nennt man die *allgemeine Lösung* der DGL.
- Die Lösung eines Anfangswertproblems nennt man eine *spezielle* bzw. *partikuläre Lösung* der DGL.

Beispiel (Fortsetzung)

- Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = x^3.$$

- Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist die Menge aller Stammfunktionen von x^3, also die Funktionen

$$y = \frac{1}{4}x^4 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

- Es gibt also unendlich viele Lösungen.
- Wir bestimmen die Lösung durch den Punkt $P = (2, 1)$:

Beispiel: Radioaktivität

Beispiel

- Sei $N(t)$ die Konzentration einer radioaktiven Substanz. Physikalische Grundlage:

$$-\dot{N}(t) \sim N(t)$$

  (Zerfallsrate proportional zur Konzentration)
- Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} -\dot{N}(t) & = & k \cdot N(t) \\ N(0) & = & N_0 \end{cases}$$

- Lösung:

$$N(t) = \ldots .$$

Beispiel: Wachstumsprozesse

Beispiel

- Einfachstes Modell: Wachstumsrate proportional zur momentanen Bevölkerung, $\dot{N}(t) \sim N(t)$, also
$$\dot{N}(t) = k \cdot N(t)$$
- Lösung: Exponentielles Wachstum $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$ ohne Schranken; unrealistisch!
- Neue Idee: Es gibt eine obere Schranke $A > 0$, und die Wachstumsrate $\dot{N}(t)$ ist auch proportional zu $A - N(t)$!
- DGL:
$$\dot{N}(t) = k \cdot N(t) \cdot (A - N(t)) \qquad (A > 0,\ k > 0).$$
- Lösung:
$$N(t) = \ldots$$

Beispiel: Wachstumsprozess und Anwendungen

Beispiel

Weitere Anwendungen des Modells

$$\dot{N}(t) = k \cdot N(t) \cdot (A - N(t)) :$$

- *Medizin:* Wachstum von Tumoren
- *Neuronale Netzwerke:* Aktivierung von Neuronen nach dem Eingang von aktivierenden Impulsen
- *Chemie:* Konzentration bestimmter Substanzen in autokatalytischen Reaktionen
- *Physik:* Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung von Fermionen auf die verschiedenen Energieniveaus (Fermi-Dirac-Statistik)
- *Linguistik:* Verbreitung von sprachlichen Neuerungen über die Gesamtheit der Sprecher der betreffenden Sprache
- *Ökonomie/Soziologie:* Verbreitung von Innovationen
- ...

Beispiel: Mechanischer Oszillator

Beispiel

- Allgemeines Modell von Schwingungen in 1D mit Auslenkung $x(t)$:
  - Hooke'sches Gesetz: Rückstellkraft proportional zur Auslenkung, $F \sim -kx(t)$
  - Reibungskraft: proportional zur Geschwindigkeit (?), $F \sim -d\dot{x}(t)$
- DGL aus diesen Annahmen:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - d\dot{x}(t),$$

  bzw. (mit neuen Konstanten)

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

- Im Fall einer äusseren Anregung $F(t)$:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m}F(t).$$

Beispiel: Freier Fall

Beispiel

- Freier Fall ohne Luftwiderstand: Aus $F = m \cdot a = m \cdot \dot{v}$ mit

$$F = F_G = mg :$$

$$\dot{v}(t) = g.$$

- Lösung:

$$v(t) = gt + v_0$$

- Freier Fall mit Luftwiderstand: Reibungskraft proportional zu v^2 (?)
- Aus $F = m \cdot a = m \cdot \dot{v}$ mit

$$F = F_G - F_R = mg - k \cdot v^2 :$$

$$\dot{v}(t) = g - \frac{k}{m} \cdot v(t)^2.$$

- Lösung: ...

Separierbare und autonome DGL

Explizite DGL 1. Ordnung:

$$y' = F(x, y).$$

Definition

- Die DGL heisst *separierbar*, falls $F(x, y)$ also Produkt eines x- und eines y-Anteils geschrieben werden kann, d.h. falls die DGL von der Form
$$y' = g(x) \cdot h(y)$$
ist, für irgendwelche Funktionen $g(x)$ und $h(y)$.
- Die DGL heisst *autonom*, falls $F(x, y)$ nur von y abhängt, d.h. falls die DGL von der Form
$$y' = f(y)$$
ist.

Autonome DGL sind separierbar!

Separierbare DGL: Lösungsmethode am Beispiel

Beispiel

- DGL:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}.$$

- Trennung aller x- und y-Terme:

$$y \cdot \mathrm{d}y = -x \cdot \mathrm{d}x.$$

- Integration auf beiden Seiten:

$$\int y \,\mathrm{d}y = -\int x \,\mathrm{d}x \implies \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Auflösen nach y:

$$y = \pm\sqrt{K - x^2}, \quad K \in \mathbb{R} \quad (\text{wobei } K = 2C).$$

Separierbare DGL: Lösungsmethode allgemein

- DGL:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \cdot h(y).$$
- Falls $h(y_0) = 0$: Dann ist $y = y_0$ eine Lösung der DGL!
- Trennung aller x- und y-Terme:
$$\frac{1}{h(y)} \cdot \mathrm{d}y = g(x) \cdot \mathrm{d}x.$$
- Integration auf beiden Seiten:
$$\int \frac{1}{h(y)}\, \mathrm{d}y = \int g(x)\, \mathrm{d}x.$$
- Auflösen nach y, Anfangsbedingungen einsetzen:
$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)}\, \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Separierbare DGL: Beispiel

Beispiel

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = x \cdot y$$

sowie die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 1$.