Vorlesung Numerische Mathematik 1
Kapitel 1: Einführung
Studiengang Informatik

8. Februar 2017

Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

Aufbau der Vorlesung

- Diese Vorlesung soll die Grundlagen der Numerik vermitteln.
- Darin enthalten ist die Programmierung einfacher Algorithmen. Die verwendete Programmier-Sprache ist MATLAB.
- Der behandelte Unterrichts-Stoff im Skript folgt vorwiegend den Büchern
    - 'Numerische Mathematik: Eine beispielorientierte Einführung', Michael Knorrenschild, 5. Auflage, Carl-Hanser Verlag, 2013
    - 'Numerische Methoden', Huckle, Schneider, Springer, 2006
    - 'Numerik Algorithmen', G. Englen-Müllges, K. Niederdrenk, R. Wodicka, Springer, 10. Auflage, 2011
    - ‚Numerical Methods for Engineers and Scientists', 3rd Edition, A. Gilat, V. Subramaniam, Wiley, 2014
- Der im Skript behandelte Stoff wird geprüft.

Übungen

- In den Übungen wird jeweils eine Übungsserie verteilt.
- Sie haben eine Woche Zeit, diese Serie in Zweierteams (allenfalls Dreierteams, falls vom Dozenten akzeptiert) zu lösen und abzugeben.
- Eine Stichprobe von drei abgegebenen Serien pro Team wird durch die Dozierenden detailliert bewertet.
- Die aus den Serien gebildete Note fliesst zu 20% in die Modulnote ein.

Übungen

- Jede abgegebene Serie erhält 1 Punkt, sofern ein ernsthafter Lösungsversuch vorliegt (liegt im Ermessen der Dozierenden).
- Dieser Punkt wird vergeben unabhängig davon, ob die Serie anschliesssend noch detailliert korrigert wird oder nicht.
- Für jede der korrigierten Serien werden durch die Dozierenden zusätzlich die folgenden Bewertungen vergeben:
  - Sehr gut (+3 Punkte)
  - Gut (+2 Punkte)
  - Genügend (+1 Punkt)
  - Ungenügend (+0 Punkte)
- Bei 11 Serien ist das Punktemaximum also $11 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 20$ Punkte, welches mit einer 6 bewertet wird.
- Bei Ausfällen von Serien (z.B. durch Feiertage) wird das Punktemaximum entsprechend reduziert.

Semesterendprüfung

- Die Semesterendprüfung dauert 120 Minuten.
- Sie fliesst zu 80% in die Modulnote ein.

Gliederung des Kapitels 1

Lernziele

- Sie kennen die Defintion der Numerischen Mathematik sowie die wichtigsten Anknüpfungspunkte zur Informatik.
- Sie kennen den geschichtlichen Hintergrund der Entwicklung der Numerischen Mathematik.
- Sie kennen einige der typischen Fragestellungen der Numerischen Mathematik.

Was ist Numerische Mathematik?

- Die numerische Mathematik (kurz Numerik), beschäftigt sich als Teilgebiet der Mathematik mit der Konstruktion und Analyse von Algorithmen für kontinuierliche mathematische Probleme.
- Hauptanwendung ist die Berechnung von Lösungen mit Hilfe von Computer.
- Im Gegensatz zur analytischen Rechnung will man bei der Numerik keine geschlossenen Formeln oder algebraische Ausdrücke erhalten, sondern numerische Resultate.
- Unter einem Algorithmus verstehen wir dabei "eine endliche Menge genau beschriebener Anweisungen (arithmetische und logische Operationen und Ausführungshinweise), die in einer bestimmten Reihenfolge auszuführen sind, um mit Hilfe der eingegebenen Daten die gesuchten Ausgabedaten zu ermitteln" (gemäss [6])

Was ist Numerische Mathematik?

- Interesse an solchen Algorithmen besteht meist aus einem der folgenden Gründe:
  1. Es gibt zu dem Problem keine explizite Lösungsdarstellung (so zum Beispiel bei den Navier-Stokes-Gleichungen oder dem Dreikörperproblem) oder
  2. die Lösungsdarstellung existiert, ist jedoch nicht geeignet, um die Lösung schnell zu berechnen oder liegt in einer Form vor, in der Rechenfehler sich stark bemerkbar machen (zum Beispiel bei vielen Potenzreihen).

Was ist Numerische Mathematik?

- Unterschieden werden zwei Typen von Verfahren:
  1. Direkte Verfahren, die nach endlicher Zeit bei unendlicher Rechnergenauigkeit die exakte Lösung eines Problems liefern.
  2. Näherungsverfahren, die (meist iterativ) mit einer begrenzten Zahl von Rechenschritten eine Approximation der exakten Lösung liefen.

Was ist Numerische Mathematik?

- Die Verbindung der Numerik mit der Informatik ist offensichtlich, ist doch die effiziente Berechnung numerischer Algorithmen ohne Computer meist nicht möglich.
- Umgekehrt kommt man bei der täglichen Arbeit mit dem Computer zwingend auf direkte oder indirekte Art mit Grundverfahren der Numerik in Berührung, z.B.:
  - Zahldarstellung und -arithmetik
  - Implementierung mathematischer Funktionen
  - Computergraphik (Darstellung von Objekten)
  - Bildverarbeitung (Kompression, Analyse, Bearbeitung)
  - Neuronale Netze (Lernverfahren)
  - Information Retrieval (Vektorraummodell)
  - Chip Design (Algebraische Differentialgleichungen)
  - stochastische Automaten und Markov-Ketten (Prozessverwaltung, Warteschlangen)

Historische Entwicklung

- Die Anfänge der (numerischen) Mathematik reichen zurück bis zu den frühen Hochkulturen.
- Das erste logisch aufgebaute Zahlensystem, ein Additionssystem, dürfte auf die Ägypter zurückgehen (ca. 3000 v. Chr.).
- Die Babylonier kannten zu Beginn des 2. Jahrtausends vor Christus bereits ein Zahlensystem mit der Basis 60. Eine Näherung der Quadratwurzel $\sqrt{2}$ aus dieser Zeit ist in der folgenden Abbildung dargestellt: [1]

[1] "Ybc7289-bw". Licensed under Creative Commons Attribution 2.5 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ybc7289-bw.jpg#mediaviewer/File:Ybc7289-bw.jpg

Historische Entwicklung

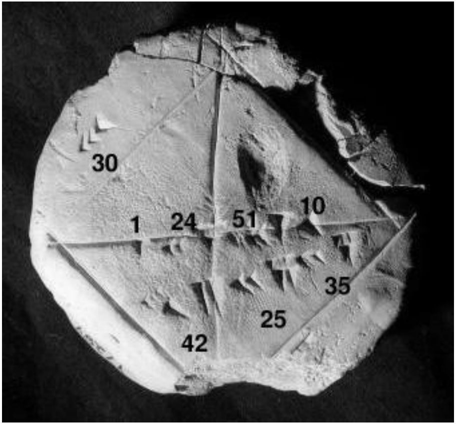
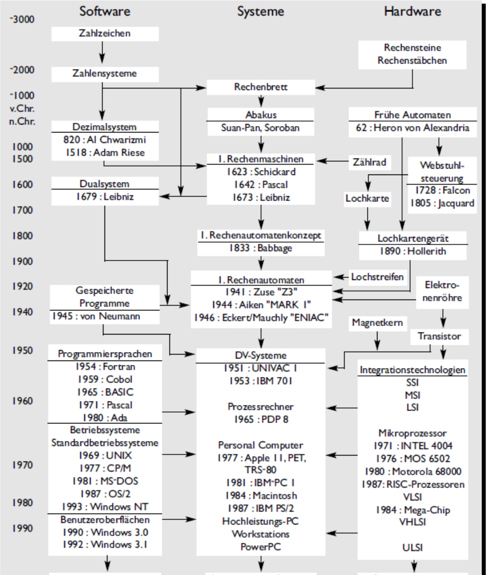


Abbildung: Babylonische Tontafel YBC 7289 von ca. 1800-1600 v.Chr. Die Näherung von $\sqrt{2}$ ist in der Diagonale eines Quadrates dargestellt mit den Symbolen für $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.41421296...$

Historische Entwicklung



Typische Fragestellungen

- Die Numerische Mathematik erscheint manchmal als eine nicht sehr übersichtliche Sammlung von Rezepten für eine Vielzahl von numerischen Problemen.
- Dies ist irreführend. Definiert man die Informatik wie im englischen Sprachgebrauch als die "Wissenschaft vom Computer" (Computer Science), so ist die Numerische Mathematik in natürlicher Weise darin enthalten (vgl. [7])
- In einem ersten Schritt wollen wir uns einen Überblick über die typischen Fragestellungen verschaffen.

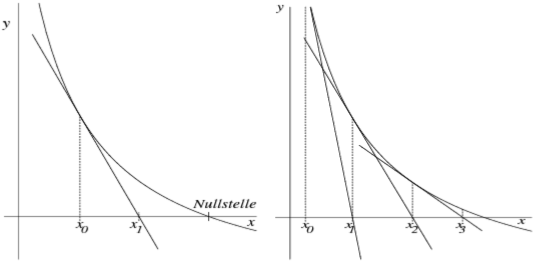
Numerische Lösung von Nullstellenproblemen

- Sei f :$\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$: Suche $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$.
- Für die quadratische Gleichung $f(x) = x^2 + px + q$ sind die Nullstellen bekannt:

$$x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}.$$

- Aber wie bestimmt man Nullstellen von komplizierteren Fuktionen wie $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ oder $f(x) = \exp(x) - \sin(x)$?

- Beispiel: Iteratives Tangenten Verfahren nach Newton (aus Knorrenschild).



Numerische Lösung von Nullstellenproblemen

- Die Funktion $f(x)$ kann in der Umgebung von x_0 durch ihre Tangente angenähert werden: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Der Schnittpunkt x_1 der Tangenten mit der x-Achse ist eine erste Näherung für die Nullstelle, dort gilt $0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$ *und* daraus ergibt sich $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
- Durch wiederholen des Verfahrens erhält man nach n Schritten die Iterationsformel

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Numerische Lösung von linearen Gleichungssystemen

- Beispiel: $A(n,n)$ sei eine Matrix reller Zahlen und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor.
- Gesucht ist der Vektor $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, so dass $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.
- Dieses Problem kann gemäss der linearen Algebra gelöst werden (sofern $\det(A) \neq 0$) mit $\overrightarrow{x} = A^{-1} \cdot \overrightarrow{b}$, doch ist diese Lösung so nicht effizient berechenbar.

Lösung von nicht linearen Gleichungssystemen

- Dies ist im Prinzip eine Erweiterung des Nullstellenproblems oben auf weitere Dimensionen. Zu lösen ist zum Beispiel das Problem:

$$f(x_1,x_2) := \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 8x_2^3 + 4x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Am term x_2^3 sieht man, dass das System nicht linear ist.
- Das vorher vorgestellte Newton Verfahren lässt sich auf diese Fragestellung erweitern und für die Lösung solcher Systeme verwenden.

Numerische Differentiation ($\rightarrow$Numerik 2)

- In vielen Anwendungen werden Werte von Ableitungen von Funktionen benötigt.
- In den seltensten Fällen steht aber die Ableitung f' als Funktion, die man nur noch auswerten müsste, zur Verfügung.
- Es müssen also Näherungen für die Werte der Ableitung berechnet werden, z.B. gilt in der ersten Ordnung (für genügend kleines h):

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: D_1 f(x_0, h)$$

Numerische Integration (→Numerik 2)

- Gegeben ist f: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist ein Näherungswert von

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

- Beispiel: Mittelpunkts- oder Trapezregel.

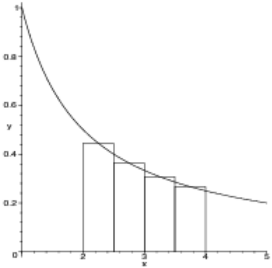


Bild 7.4 Summierte Mittelpunktsregel für $\int_2^4 x^{-1}\,dx$ und $n = 4$

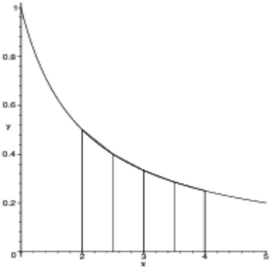
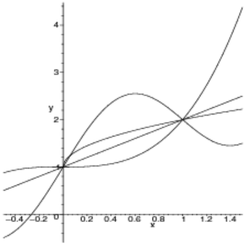


Bild 7.5 Summierte Trapezregel für $\int_2^4 x^{-1}\,dx$ und $n = 4$

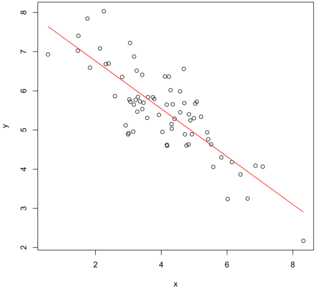
Interpolation (→Numerik 2)

- Beim typischen Interpolationsproblem sind n diskrete Wertepaare (x_i, f_i) gegeben und gesucht ist eine stetige Funktion f mit der Eigenschaft $f(x_i) = f_i$ für alle x_i.
- Beispiel: Es soll eine interpolierende Funktion für die beiden Werte (0,1) und (1,2) gefunden werden.
  - Eine mögliche Lösung ist $f(x) = x + 1$, aber auch $f(x) = \sqrt{x} + 1$ oder $f(x) = \sin(\pi x) + x + 1$ kommen in Frage.
  - Tatsächlich lösen unendlich viele Funktionen dieses Problem.



Regression (auch 'Ausgleichprobleme' →Numerik 2).

- Häufig sind n Wertepaare (x_i, y_i) das Resultat von Messungen und deshalb mit gewissen Unsicherheiten behaftet, welche sich z.B. als Streuung manifestieren können.



- Offenbar gibt es einen Trend, welcher sich als Gerade *f(x)* mittels der Methode der kleinsten Quadrate berechnen lässt, so dass der Fehler $\sum(y_i - f(x_i))^2$minimal wird.

Differentialgleichungen (→Numerik 2)

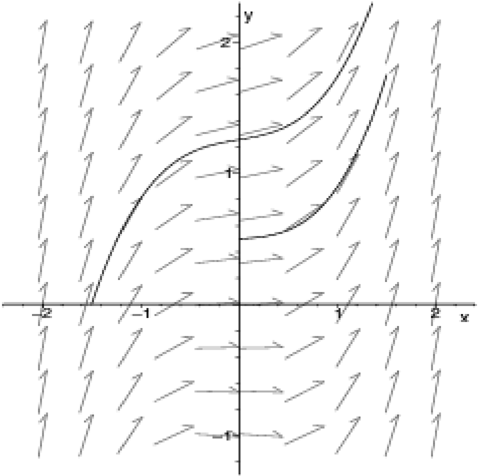
- Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ein Intervall [a,b] und ein Anfangswert y_0.
- Gesucht ist eine Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

  für alle $t \in [a, b]$ und $y(a) = y_0$.
- Das Anfangswertproblem besteht also darin, eine Lösung y der gewöhnlichen Differenzialgleichung zu finden, die an der Stelle $t = a$ den vorgegebenen Wert y_0 annimmt.

Differentialgleichungen (→Numerik 2)

- Die Lösungen lassen sich anhand sogenannter Richtungsfelder veranschaulichen (aus Knorrenschild).



Fouriertransformation ($\rightarrow$Numerik 2)

- Eine periodische Funktion $f(t)$ mit der Periode $T > 0$, also $f(t + k \cdot T) = f(t)$, kann unter gewissen Bedingungen in ihre harmonischen Schwingungen, d.h. in Sinus und Kosinusfunktionen, zerlegt werden, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ sind:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\frac{2\pi}{T} \cdot t) + b_1 \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t) \\ &\quad + a_2 \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) + b_2 \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) + \ldots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \end{aligned}$$

Fouriertransformation (→Numerik 2)

- Die Koeffizienten ergeben sich zu

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(k\omega t)\,dt$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(k\omega t)\,dt$$

- Einfacher kann dies mit komplexen Zahlen dargestellt werden:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{jn\omega t}$$
$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot \mathrm{e}^{-jn\omega t}\,dt$$

- Die Koeffizienten enthalten dann die Information über die Frequenz. Durch den Plot von c_n^2 erhält man dann ein sogenanntes Powerspektrum.

Fouriertransformation (→Numerik 2)