Anwendungen der Integralrechnung: Teil 2
Uneigentliche Integrale: Teil 1

Andreas Henrici

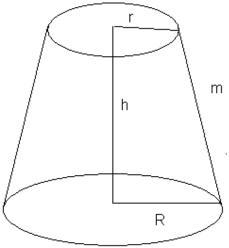
MANIT2 IT18ta_ZH

26.03.2019

Überblick

Mantelfläche: Konzept

Vorbereitung: *Kegelstumpf*



Idee zur Berechnung der Mantelfläche:

- Approximation des Körpers durch Kegelstümpfe
- Approximative Mantelfläche als Summe der Mantelflächen aller Kegelstümpfe
- Exakte Mantelfläche im Limes unendlich feiner Unterteilung
- Kombination von Elementen der Berechnung von Rotationsvolumina und Bogenlängen

Mantelfläche: Berechnung

- Zerlegung in n Kegelstümpfe (Zylinderstücke genügt nicht); Mantelfläche m_k des k-ten Kegelstumpfs:

$$m_k = \pi \cdot (f(x_k) + f(x_{k+1})) \cdot l_k,$$

wobei l_k die Länge der Mantellinie des k-ten Kegelstumpfs ist.

- Mit

$$l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta f_k^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_k}{\Delta x_k}\right)^2}$$

ergibt sich daraus

$$m_k = \pi \cdot (f(x_k) + f(x_{k+1})) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k$$

- Approximation für die ganze Mantelfläche:

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

Mantelfläche: Berechnung [Fortsetzung]

- Exakte Formel im Limes $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} M &= \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m_k \\ &= \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) + f(x_{k+1})) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k. \end{aligned}$$

- Notation als Integral:

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Mantelfläche: Resultat

Satz

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Die Mantelfläche des durch Rotation von $f(x)$ um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers ist

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Mantelfläche: Beispiel

Beispiel

Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers der Funktion

$$f(x) = 3x + 2$$

im Intervall $I = [0, 2]$

i) mit der elementargeometrischen Formel,

ii) mit der Integralformel.

Mantelfläche: Beispiel

Beispiel

Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x}$$

im Intervall $I = [0, 1]$.

Uneigentliches Integral: Motivation

Beispiel

- Gewichtskraft auf einen Körper im Gravitationsfeld:

$$F_G(r) = \frac{k}{r^2}, \quad k \text{ konstant.}$$

- Notwendige Arbeit, um den Körper auf die Höhe h über Meereshöhe anzuheben:

$$W = \int_R^{R+h} \mathrm{d}W = \int_R^{R+h} F_G(r)\,\mathrm{d}r$$

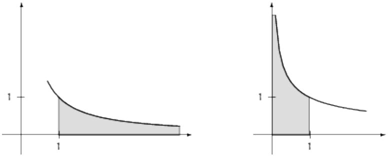
- Einsetzen der Formel für die Gewichtskraft:

$$W = \int_R^{R+h} F_G(r)\,\mathrm{d}r = \int_R^{R+h} \frac{k}{r^2}\,\mathrm{d}r = \left(-\frac{k}{r}\right)\Bigg|_R^{R+h} = \frac{k}{R} - \frac{k}{R+h}$$

- Notwendige Arbeit, um den Körper unendlich weit anzuheben?

Uneigentliches Integral: Definition

Geometrische Problemstellung:



Definition

Ein *uneigentliches Integral* ist ein Integral vom Typ

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (f(x) \text{ ist stetig})$$

oder vom Typ

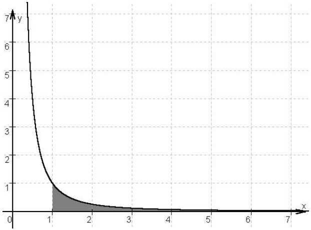
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (f(x) \text{ hat einen Pol im Intervall } [a, b])$$

Uneigentliche Integrale erster Art: Problemstellung

- Uneigentliche Integrale mit einem unendlichen Integrationsintervall, vom Typ

$$I = \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Geometrisch:



Uneigentliche Integrale erster Art: Berechnung

Vorgehen zur Berechnung eines uneigentlichen Integrals erster Art:

- Statt über das *unendliche* Intervall $[a, \infty)$ integrieren wir über das *endliche* Intervall $[a, \lambda]$ für beliebige $\lambda \geq a$:

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Das gesuchte Integral über dem unendlichen Intervall $[a, \infty)$ ergibt sich als *Grenzwert* $\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \left(\int_a^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

Definition

Falls der Grenzwert $\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$ existiert, heisst das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent*, andernfalls *divergent*.

Uneigentliche Integrale erster Art: Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

Wir berechnen die Arbeit, die notwendig ist, um den Körper „ganz“ aus dem Gravitationsfeld der Erde zu entfernen, d.h. wir berechnen das Integral $W = \int_R^\infty \frac{k}{r^2}\,\mathrm{d}r$:

- Integration über $[R, \lambda]$:

$$I(\lambda) = k \int_R^\lambda \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \left(-\frac{k}{r}\right)\Big|_R^\lambda = -\frac{k}{\lambda} + \frac{k}{R}$$

- Grenzübergang $\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_R^\infty f(r)\,\mathrm{d}r = \lim_{\lambda\to\infty}\left(-\frac{k}{\lambda} + \frac{k}{R}\right) = \frac{k}{R}$$

Wir sehen also, dass die zum vollständigen Entfernen eines Körpers aus dem Gravitationsfeld der Erde notwendige Arbeit einen *endlichen* Wert hat; d.h. das Integral $\int_R^\infty \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r$ ist konvergent.

Uneigentliche Integrale erster Art: Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

Wir berechnen die Arbeit, die notwendig ist, um den Körper „ganz“ aus dem Gravitationsfeld der Erde zu entfernen, d.h. wir berechnen das Integral $W = \int_R^\infty \frac{k}{r^2}\,\mathrm{d}r$:

- Kann man auch direkt die “Zahl” ∞ als obere Grenze einsetzen?
- Im mathematischen strengen Sinn: Nein. Denn mit ∞ kann man nicht rechnen wie mit gewöhnlichen Zahlen
- In vielen praktischen Fällen ist es aber trotzdem möglich, wenn man $\frac{1}{\infty} = 0$ setzt:

$$I = \int_R^\infty \frac{k}{r^2}\,\mathrm{d}r = \left(-\frac{k}{r}\right)\Big|_R^\infty = 0 + \frac{k}{R} = \frac{k}{R}$$

- Ohne Garantie!

Uneigentliche Integrale erster Art: Weitere Beispiele

Beispiel

Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Uneigentliche Integrale erster Art: Variante

Uneigentliche Integrale mit einem unendlichen Integrationsintervall, vom Typ

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vorgehen zur Berechnung eines solchen Integrals:

- Statt über das *unendliche* Intervall $[-\infty, b)$ integrieren wir über das *endliche* Intervall $[\lambda, b]$ für beliebige $\lambda \leq b$:

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Das gesuchte Integral über dem unendlichen Intervall $[-\infty, b)$ ergibt sich als *Grenzwert* $\lim_{\lambda\to-\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to-\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty} \left(\int_{\lambda}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

Uneigentliche Integrale erster Art: Variante

Definition

Falls der Grenzwert $\lim_{\lambda \to -\infty} I(\lambda)$ existiert, heisst das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent*, andernfalls *divergent*.

Beispiel

Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \,\mathrm{d}x.$$