Taylorreihen: Teil 1

Andreas Henrici

MANIT2 IT18ta_ZH

30.04.2019

Überblick

Zur Einführung

Erinnerung: Die Tangente $t(x)$ an eine Funktionskurve $y = f(x)$ an der Stelle x_0 hat die Eigenschaften:

$$t(x_0) = f(x_0), \quad t'(x_0) = f'(x_0)$$

Verallgemeinerung: Können wir eine Funktion $p_2(x)$ finden mit den Eigenschaften

$$p_2(x_0) = f(x_0), \quad p_2'(x_0) = f'(x_0), \quad p_2''(x_0) = f''(x_0)\ ?$$

Beispiel

Bestimmen Sie ein Polynom $p_2(x)$ vom Grad $n = 2$, das mit der Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ in den Ableitungen bis zur Ordnung 2 übereinstimmt.

Potenzreihen: Idee/Motivation

- Zur Lösung von solchen Approximationsproblemen brauchen wir Polynome von beliebig hohem Grad.
- Im Grenzfall brauchen wir Polynome “vom Grad unendlich”: *Potenzreihen*
- Mit solchen Potenzreihen lassen sich viele Eigenschaften von komplizierten Funktionen besser verstehen als mit den ursprünglich gegebenen Funktionen.
- Z.B. ist diese Technik die Grundlage der numerischen Berechnung gewisser Integrale bei Funktionen, die keine analytisch darstellbare Stammfunktion besitzen.
- Auch gewisse Differentialgleichungen werden oft erst dann verständlich, wenn man eine Potenzreihe als Lösung annimmt oder wenn die Differentialgleichung durch den Einsatz von Polynomen/Potenzreihen vereinfacht wird.
- Wir betrachten hauptsächlich das Problem, eine gegebene Funktion durch eine Potenzreihe zu approximieren; dies ist dann die *Taylorreihe* der gegebenen Funktion.

Potenzreihen: Definition

Definition

- *Spezielle Potenzreihe:* Eine *Potenzreihe* ist eine unendliche Reihe vom Typ

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

  Die reellen Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ sind die *Koeffizienten* der Potenzreihe.

- *Allgemeine Potenzreihe:* Eine allgemeinere Form von Potenzreihen entsteht durch Verschiebung um x_0, man spricht dann von einer *Potenzreihe mit Zentrum* x_0:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Potenzreihen: Beispiele

Beispiel

Koeffizienten a_k und Entwicklungszentrum x_0 verschiedener Potenzreihen:

a) $1 + x + x^2 + \ldots$:

$$a_k = 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}, \quad x_0 = 0$$

b) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$:

$$a_k = \frac{1}{k!}, \quad x_0 = 0$$

c) $(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \pm \ldots$:

$$a_k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}, \quad x_0 = 1$$

Potenzreihen: Konvergenz

- Erinnerung: Konstante Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$: konvergent oder divergent
- Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$: ist für jeden Wert von x eine andere konstante Reihe, die je nach x konvergiert oder divergiert.
- Die Menge
$$\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ ist konvergent} \right\}$$
heisst *Konvergenzbereich* der Potenzreihe.
- Bestimmung des Konvergenzbereichs: später

Taylorreihe: Definition

Definition

Die *Taylorreihe* oder *Taylorentwicklung* einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 ist die Potenzreihe

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

deren Ableitungen an der Stelle x_0 für alle $k \in \mathbb{N}$ mit den Ableitungen von $f(x)$ an der Stelle x_0 übereinstimmen.

D.h. die Taylorreihe $t_f(x)$ erfüllt die Bedingungen

$$f^{(k)}(x_0) = t_f^{(k)}(x_0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sind die *Taylorkoeffizienten* von $f(x)$.

Taylorpolynom: Definition

Definition

Wenn die Taylorreihe $t_f(x)$ nach dem Term n-ter Ordnung abgebrochen wird, erhält man das *Taylorpolynom n-ter Ordnung* von $f(x)$ an der Stelle x_0:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k,$$

Dementsprechend gilt dann die Gleichheit

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

nur für $k = 0, \ldots, n$.

Bemerkung: Die Tangente an eine Funktionskurve $y = f(x)$ an der Stelle x_0 ist also exakt das Taylorpolynom 1. Ordnung von $f(x)$ an der Stelle x_0!

Taylorreihe: Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

Bestimmen Sie die Taylorreihe $t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ der Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$. (Das Taylorpolynom 2. Ordnung wurde schon früher bestimmt!)

Taylorkoeffizienten: Zielsetzung/Vorgehen

- *Ziel:* Berechnung der Koeffizienten a_k, $k \in \mathbb{N}$ der Taylorreihe $t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ einer Funktion $y = f(x)$
- *Methode:* Wir nützen die Bedingung

$$\underbrace{f^{(k)}(x_0)}_{\text{gegeben}} = \underbrace{t_f^{(k)}(x_0)}_{\text{da versteckt sich } a_k}$$

  zur Bestimmung des k-ten Koeffizienten a_k.
- Dazu müssen wir $t_f^{(k)}(x_0)$ berechnen für beliebige $k \in \mathbb{N}$ und noch unbekannte a_k's.
- Wir beschränken uns in der Herleitung auf den Fall $x_0 = 0$; der Fall $x_0 \neq 0$ funktioniert genauso.
- Berechnung der Ableitungen $t_f^{(k)}$ von $t_f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ durch gliedweise Ableitung und Einsetzen von $x = 0$; dabei bleibt von den unendlich vielen Termen jeweils nur einer übrig, und dieser enthält gerade das gesuchte a_k!

Taylorkoeffizienten: Detaillierte Berechnung

- $k = 0$: Aus $t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ folgt
$$t_f(0) = a_0 + \underbrace{a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \ldots}_{=0} = a_0$$
- $k = 1$: Die 1. Ableitung von $t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist $t_f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1}$, also erhalten wir durch Einsetzen von $x_0 = 0$
$$t_f'(0) = a_1 + \underbrace{2 \cdot a_2 \cdot 0 + 3 \cdot a_3 \cdot 0^2 + \ldots}_{=0} = a_1$$
- $k = 2$: Die 2. Ableitung von $t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist $t_f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot a_k x^{k-2}$, also erhalten wir durch Einsetzen von $x_0 = 0$
$$t_f''(0) = 2a_2 + \underbrace{3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot a_4 \cdot 0^2 + \ldots}_{=0} = 2a_2$$
- $k = 3$: Ebenso erhält man
$$t_f^{(3)}(0) = 3 \cdot 2a_3 = 6a_3$$

Taylorkoeffizienten: Detaillierte Berechnung (Fortsetzung)

- $k \in \mathbb{N}$ beliebig: Die k-te Ableitung von $t_f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ ist

$$t_f^{(k)}(x) = \sum_{m=k}^{\infty} m(m-1)\ldots(m-k+1) \cdot a_m x^{m-k},$$

- also erhalten wir durch Einsetzen von $x_0 = 0$

$$t_f^{(k)}(0) = k \cdot (k-1) \ldots \cdot 1 \cdot a_k = k! \cdot a_k$$

- Es muss gelten: $t_f^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$
- Also erhalten wir aus $t_f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$ die folgende Formel für die a_k's:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Taylorkoeffizienten: Resultat

Satz

Die Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} t_f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \end{aligned}$$

Bemerkung: In günstigen Fällen sind die Funktion $f(x)$ und die auf diese Art erhaltene Taylorreihe $t_f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ identisch. Dies aber nicht immer der Fall.

Taylorreihe: Beispiele

Beispiel (Fortsetzung)

Die Taylorreihe $t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ der Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ ist (vgl. früher)

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots .$$

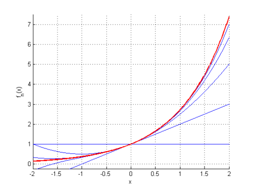

Abbildung: Exponentialfunktion mit verschiedenen Taylor-Polynomen

Taylorreihe: Beispiele

Beispiel

Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Beispiel

Bestimmen Sie die Taylorreihen der Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Taylorreihe: Beispiele

Beispiel

Taylorreihen von $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} t_{\cos}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ t_{\sin}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$