Differentialgleichungen: Teil 3

Andreas Henrici

MANIT2 IT18ta_ZH

23.04.2019

Überblick

1. **Differentialgleichungen: Anwendungsbeispiele**
    - Radioaktivität
    - Freier Fall mit Luftwiderstand
    - Wachstumsmodelle

Radioaktiver Zerfall

- Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} -\dot{N}(t) & = & k \cdot N(t) \\ N(0) & = & N_0 \end{cases}$$

- Lösung mit Separation der Variablen: Übung!

Freier Fall mit Luftwiderstand

- DGL:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{k}{m}v^2 = g(1 - \alpha^2 v^2), \quad \alpha = \sqrt{\frac{k}{mg}}$$

- Trennung der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}v}{1 - \alpha^2 v^2} = g\,\mathrm{d}t$$

- Integration:

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{1 - \alpha^2 v^2} = \int g\,\mathrm{d}t$$

  also

$$\frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{1 + \alpha v}{1 - \alpha v} \right| = gt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Freier Fall mit Luftwiderstand: Fortsetzung

- Auflösen nach v:

$$v(t) = \frac{1}{\alpha} \frac{Ke^{2\alpha gt} - 1}{Ke^{2\alpha gt} + 1}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

- Anfangsbedingung $v(0) = 0$ einsetzen:

$$v(t) = \frac{1}{\alpha} \frac{e^{2\alpha gt} - 1}{e^{2\alpha gt} + 1} = \frac{1}{\alpha} \tanh(\alpha gt).$$

- Verhalten für $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{e^{2\alpha gt} - 1}{e^{2\alpha gt} + 1} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{1 - e^{-2\alpha gt}}{1 + e^{-2\alpha gt}} = \frac{1}{\alpha}$$

- Die Konstante $v_0 = \frac{1}{\alpha}$ ist auch eine Lösung der DGL!
- Physikalisch: Die Fallgeschwindigkeit $v(t)$ konvergiert für $t \to \infty$ gegen eine Geschwindigkeit v_0, bei der sich Reibung und Gewichtskraft gegenseitig aufheben.

Wachstumsmodelle

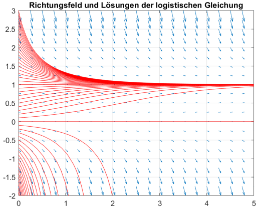
- Unbegrenztes Wachstum:

$$\dot{N}(t) = k \cdot N(t)$$

- Begrenztes Wachstum:

$$\dot{N}(t) = k \cdot N(t) \cdot (A - N(t))$$

- Richtungsfeld mit Lösungskurven:



- Allgemeine Lösung (Übung): “Logistische Funktion”

$$N(t) = \frac{A}{1 + Ce^{-kAt}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$