Vorlesung Numerische Mathematik 2

Kapitel 10: Fourier-Reihen und Fourier-Transformation

6. Dezember 2017

Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

Gliederung des Kapitels

Einführung

- Die Theorie der Fourier-Reihen und der Fourier-Transformation ermöglicht die Zerlegung eines periodischen Signals in eine unendliche Summe (d.h. eine Reihe) von harmonischen Schwingungen der Form
  - $A\cos(\omega t + \varphi)$ oder $B\sin(\omega t + \varphi)$ (vgl. nachstehende Abb.).
- Wir werden in diesem Kapitel eine kurze Einführung in die Thematik geben und uns dann insbesondere auf die Diskrete Fourier Transformation (DFT) konzentrieren.

Einführung

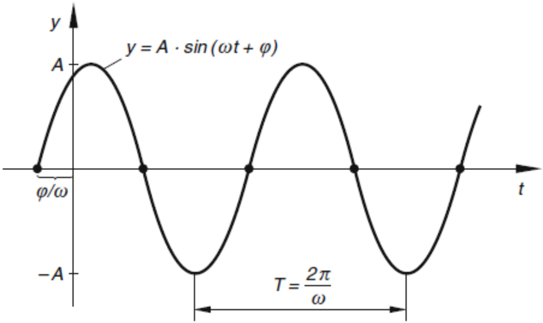


Abbildung: Harmonische (Sinus-) Schwingung mit der Frequenz ν, der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$, der Phasenverschiebung φ und der Periode $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ [8].

Lernziele

Lernziele:

- Sie kennen wichtige Anwendungsfälle der Fourier-Theorie.
- Sie kennen die Definition einer Fourier-Reihe und können deren Koeffizienten berechnen.
- Sie können die Diskrete Fourier-Transformation auf konkrete Problemstellungen anwenden und in MATLAB imnplementieren.

10.1 Zur historischen Entwicklung

Zur historischen Entwicklung

- Die Theorie der Fourier-Reihen geht auf den französichen Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) zurück.
- Er war ein enger Vertrauter Napoleons und begleitete diesen u.a. auf seinem Ägyptenfeldzug als Ägyptologe.
- Er beschäftigte sich intensiv mit Fragestellungen des Wärmetransports.
- In der Einleitung zu seinem Klassiker "Théorie analytique de la chaleur" (1822) führte er aus:
  - "Ich habe mir vorgenommen, in diesem Werke die mathematischen Gesetze, welchen die Verbreitung der Wärme gehorcht, zu entwickeln und glaube, dass die nachfolgende Theorie einen der wichtigsten Zweige der ganzen Physik ausmachen wird."

Zur historischen Entwicklung

- Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Zur historischen Entwicklung

- Damit deutete er bereits die Tragweite an, die seine als Fourier-Analyse bekannte Theorie bis heute in der Wissenschaft und dem Ingeniuerswesen besitzt.
- Der schottische Physiker James Clerk Maxwell (1831-1879), einer der Begründer der Theorie des Elektromagnetismus, bezeichnete sie als "großartiges mathematisches Gedicht".
- Der britische Physiker Lord Kelvin (1824-1907) befand es für außerordentlich schwierig zu entscheiden, ob deren Resultate mehr für ihre "einzigartig originäre Qualität, ihre geradezu metaphysische mathematische Bedeutung oder ihre seitdem in der Physik nicht mehr wegzudenkenden Verfahrensweisen gerühmt werden müssen"[1].

[1] Gemäss "Fouriers Beitrag zur Geschichte der neuen Medien", Martin Donner (2006)

Zur historischen Entwicklung

- Die Kernidee von Fouriers Theorie besteht darin, Funktionen durch trigonometrische Reihen darzustellen.
- Vor Fourier hatten sich bereits in der Mitte des 18. Jahrhunderts Leonhard Euler (1707-1783), Johann Bernoulli (1667-1748) und D'Alembert (1717-1783) im Zusammenhang mit den Schwingungen einer Saite mit dieser Fragestellung beschäftigt.
- So stammt z.B. die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{3}\sin(3x) + \ldots$$

  von Euler.
- Allerdings hatten sie nicht für möglich gehalten, dass sich auch nicht stetige Funktionen so darstellen liessen, was Fourier mit seiner Theorie widerlegte, auch wenn er dabei mit erheblichen Widerständen anderer Mathematiker zu kämpfen hatte.

10.2 Anwendungen

Anwendungen

- Die Fourier-Analyse macht es möglich, ein beliebiges Signal (z.B. in Form einer Schall- od. elektromagnetischen Welle) in seine Frequenzen zu zerlegen bzw. aus einem Frequenzspektrum das ursprüngliche Signal zu rekonstruieren.
- Man kann also mittels den Methoden der Fourier-Analyse beliebig zwischen der räumlichen / zeitlichen Darstellung einer Funktion und ihrer Darstellung im Frequenzbereich hin und her wechseln, siehe folgende Abb. .

Anwendungen

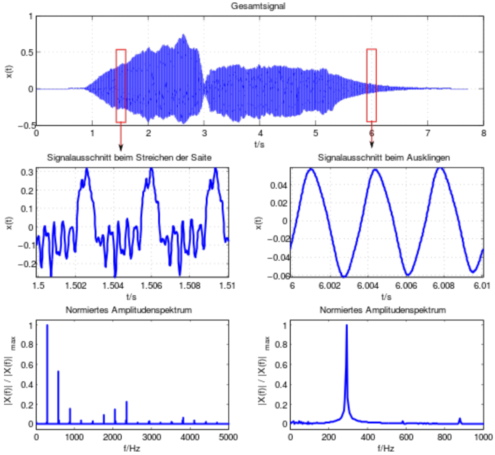


Abbildung: Frequenzspektrum eines Geigentons (Michael Lenz, Wikimedia Commons). Der Ton ist hörbar unter http://de.wikipedia.org/wiki/Frequenzspektrum.

Anwendungen

- Was die Fourier-Analyse so einzigartig macht, ist die Möglichkeit, sie unmittelbar physikalisch zu erfahren.
- So filtert unser Ohr in der Hörschnecke die verschiedenen Frequenzen einer Schallwelle und leitet diese Reize an unser Gehirn weiter, welches diese Informationen dann als Töne interpretiert.
- Oder ein Prisma zerlegt einfallendes weisses Licht in seine Bestandteile, d.h. in Lichtwellen unterschiedlicher Frequenz, was unser Gehirn als unterschiedliche Farben interpretiert.

Anwendungen

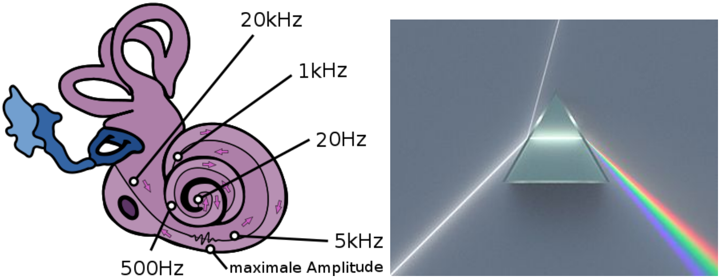


Abbildung: Fourier-Analyse. Links: Frequenzabhängigkeit der Ohrschnecke (Sgbeer, Wikimedia Commons). Rechts: Lichtbrechung im Prisma(„Dispersive Prism Illustration“, Wikimedia Commons).

Anwendungen

- Nun lässt sich eine solche Zerlegung analoger Signale in ihr Frequenzspektrum hervorragend dazu verwenden, diese Signale zu analysieren, zu komprimieren oder zu manipulieren. Einige Beispiele sind:

Anwendungen: (i) Detektion von Frequenzen

- Detektion von Frequenzen ν bzw. Perioden $T = \frac{1}{\nu}$ in der Zeitreihenanalyse, z.B. in Beobachtungen der Sonnenfleckenzahlen.
- Aus der Fourier-Analyse erhält man die Information, dass die Sonnenfleckenzahlen von einer elfjährigen Periode dominiert werden.
- Kennt man die Amplitude und die Frequenz der dominanten Schwingung(en), so lassen sich diese wenigen Informationen speichern, das Signal wurde komprimiert.

Anwendungen: (i) Detektion von Frequenzen

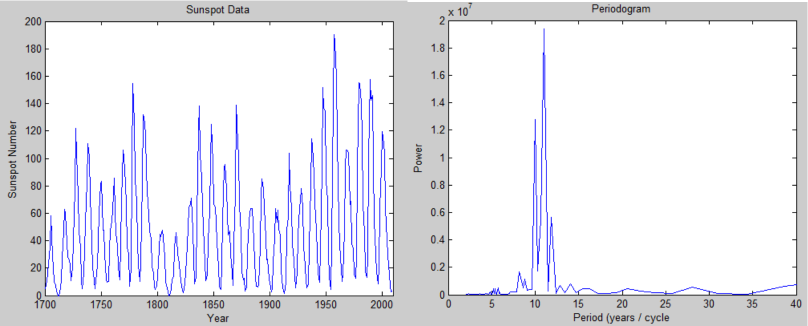
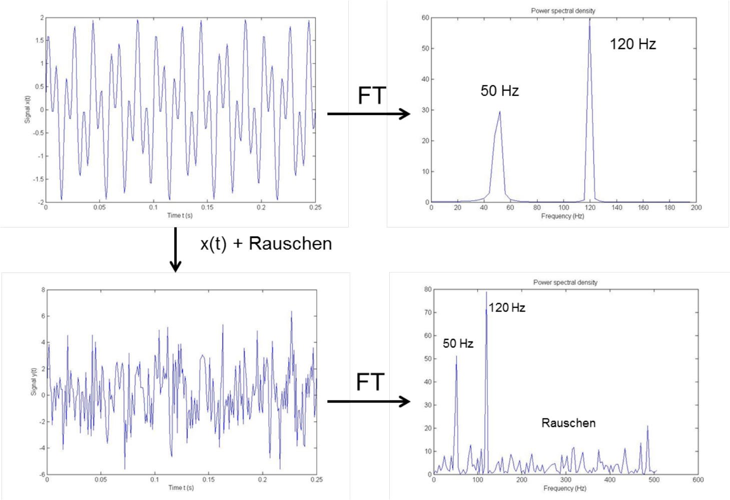


Abbildung: Links: Jährliche Sonnenfleckenzahlen von 1700 - 2009 aus yearssn.dat (Royal Observatory of Belgium). Rechts: Mit der Fourier-Transformation erzeugtes Periodogram der jährlichen Sonnenfleckenzahlen

Anwendungen: (ii) Entrauschen

- Entrauschen von verrauschten Signalen. Ein durch Störungen verrausschtes Signal kann in seine Frequenzen zerlegt werden. Der Anteil des Rauschens lässt sich dann durch Eliminierung (Filterung) unerwünschter Frequenzen verringern.

Anwendungen: (ii) Entrauschen



Anwendungen: (iii) Kompression

- Zum Beispiel MP3-Verfahren zur Komprimierung von Audiodateien.
- Das menschliche Gehör kann zwei Töne erst ab einem gewissen Unterschied in der Frequenz wahrnehmen.
- Nach sehr lauten Geräuschen kann es nachfolgende leisere Geräusche nicht oder nur noch schlecht wahrnehmen.
- Diese 'überflüssigen' Töne kann man also nach festgelegten Regeln aus einem Musikstück entfernen und damit den Speicherbedarf deutlich verringern, ohne dass es das menschliche Ohr merkt.
- Dies passiert wiederum über eine Zerlegung in das Frequenzspektrum.
- Dabei wird das Audiosignal stückweise in den Frequenzraum transformiert und überflüssige Frequenzen eliminiert .

Anwendungen: (iii) Kompression

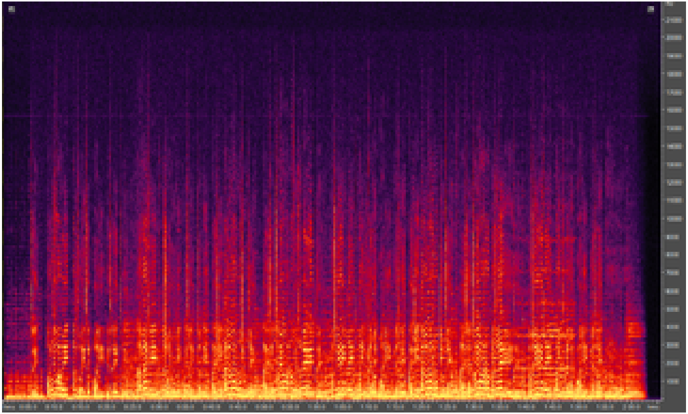


Abbildung: Spektralanalyse des unkomprimierten Beatles-Liedes Yesterday zeigt eine volle Bandbreite bis zu einer Frequenz von 21 kHz. Der Frequenzbereich ist auf der $y-$Achse, die Zeit auf der $x-$Achse, Farben geben die Amplitude des Signals.

Anwendungen: (iii) Kompression

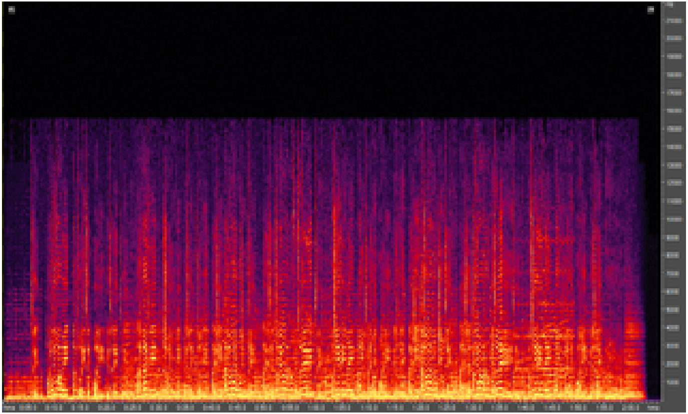
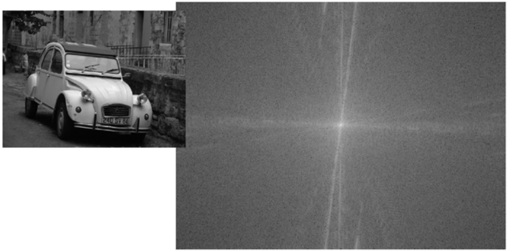
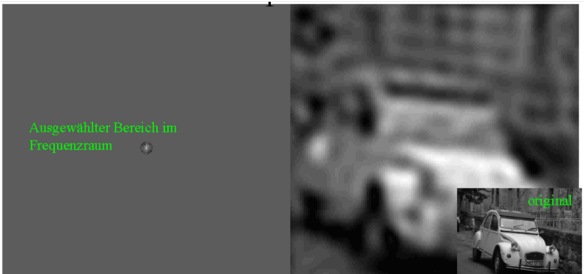


Abbildung: Beim komprimierten Lied wurden Frequenzen oberhalb von 16 kHz (nahe der Hörschwelle des Ohres) eliminiert. Der Frequenzbereich ist auf der $y-$Achse, die Zeit auf der $x-$Achse, Farben geben die Amplitude des Signals.

Anwendungen: (iv) Bildverarbeitung





10.3 Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

- Im Unterschied zur Interpolation versuchen wir bei der Ausgleichsrechnung nicht, eine Funktion f zu finden, die exakt durch sämtliche Wertepaare geht, sondern diese nur möglichst gut approximiert.
- Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn es eine grosse Anzahl von Datenpunkten gibt (die meist zusätzlich noch fehlerbehaftet sind) und die durch eine Funktion mit nur wenigen Parametern beschrieben werden sollen.

Fourier-Reihen

- Wir möchten in diesem Abschnitt zu Beginn das Prinzip der Fourier-Reihen an einem konkreten Beispiel einer periodischen Rechtecksfunktion erläutern und anschliessend auf allgemeine periodische Funktionen erweitern.

Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

- Wir betrachten die Rechteck-Funktion definiert durch

$$y(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

mit der Periode $T = 2\pi$ (bzw. der Kreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$) welche sich einfach periodisch fortsetzen lässt (vgl. nachstehende Abb.)

- Wir wollen diese Funktion nun durch die Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(k \cdot \underbrace{\omega_0}_{=1} \cdot x)$$

approximieren, was sich als lineares Ausgleichsproblem auffassen lässt (vgl. Kap. 9.3).

Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

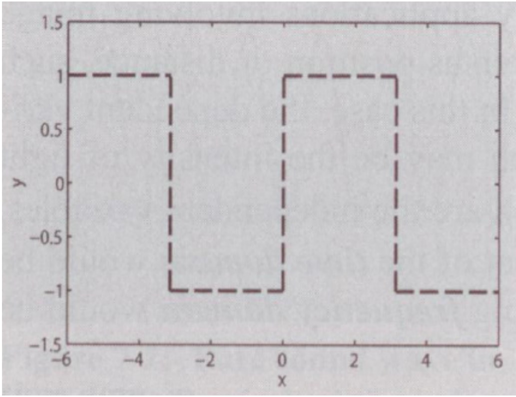


Abbildung: Rechtecksfunktion $y(x)$ mit periodischer Fortsetzung [9].

Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

- Im Gegensatz zu Kap. 9.3 ist hier $y(x)$ nicht als eine Menge diskreter Wertepaare (x_i, y_i) gegeben, sondern als kontinuierliche Funktion.
- Um sicherzustellen, dass $y(x)$ möglichst gut durch $f(x)$ approximiert wird, betrachten wir als Fehlergrösse die Fläche (also das Integral) zwischen den beiden Funktionen und wollen diese minimieren.
- Damit sich positive und negative Anteile des Integrals nicht eliminieren, betrachten wir analog zu Kap. 9.3 nicht einfach $\int (y(x) - f(x))\,dx$ sondern $\int (y(x) - f(x))^2\,dx$.

Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

- Bemerkung:
  - Tatsächlich definiert uns das eine neue Norm, die sogn. L^2-Norm, auf dem Hilbertreaum L^2 der quadratintegrierbaren Funktionen

$$\| f \|_{L^2} := \left(\int_a^b (f(x))^2 \, dx \right)^{1/2}$$

bzw.

$$\| y - f \|_{L^2}^2 := \int_a^b (y(x) - f(x))^2 \, dx$$

Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

- Wir definieren also das Fehlerfunktional

$$E(A_1, A_2, \ldots) := \int_{-\pi}^{\pi} (y(x) - f(x))^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(y(x) - \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx) \right)^2 dx$$

und bestimmen die unbekannten Koeffizienten A_k durch die Minimierung von E, wobei wir wieder die partiellen Ableitungen von E gleich Null setzen:

$$\frac{\partial E}{\partial A_m} = \frac{\partial}{\partial A_m} \int_{-\pi}^{\pi} (y(x) - f(x))^2 \, dx \stackrel{!}{=} 0$$

- Aus dieser Bedingung folgt nach einiger Rechnung (Herleitung s.u.) für die Koeffizienten $m \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
A_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(x)\cdot\sin(mx)dx \\
&= \frac{2}{m\pi}[1-(-1)^m]
\end{aligned}
$$

und $A_0 = 0$.

Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

- Damit erhalten wir für die Ausgleichsfunktion

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}[1-(-1)^k]\cdot\sin(kx) \\
&= \frac{4}{\pi}\sin(x) + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \frac{4}{7\pi}\sin 7x + \ldots \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}
\end{aligned}
$$

Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

- Die Ausgleichsfunktion hat unendlich viele Summanden. Natürlich kann man nicht alle berechnen, sondern bricht nach einer endlichen Anzahl n ab und erhält ein sog. trigonometrisches Polynom

$$f_n(x) := \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}.$$

Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

- Je grösser n, umso besser die Näherung an $y(x)$.
- Beispiele für verschiedene Werte von n sind in der folgenden Abb. gegeben.
- An den Untstetigkeitsstellen der Funktion $y(x)$ sieht man ein Über- bzw. Unterschiessen der Näherung $f_n(x)$ in Form von hochfrequenten Oszillationen.
- iese verschwinden auch für grösser werdende Werte von n nicht vollständig (bekannt als Gibbs-Wilbraham Phänomen).
- Tatsächlich kann eine periodische Funktion im Grenzübergang $n \to \infty$ überall exakt angenähert werden ausser in ihren Unstetigkeitsstellen.

Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

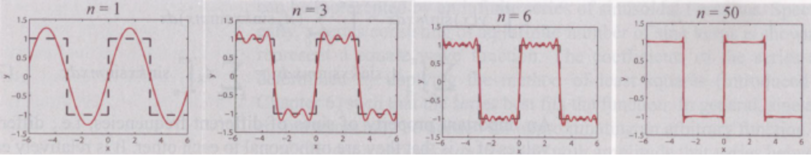


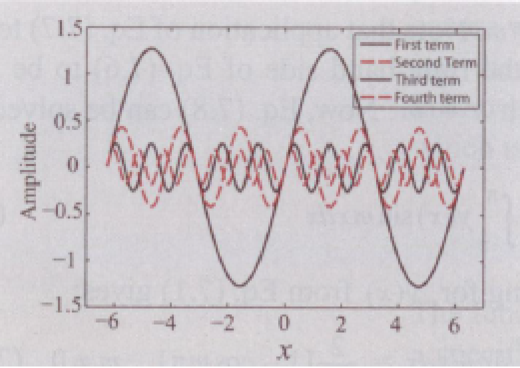
Abbildung: Rechtecksfunktion $y(x)$ und die Näherung $f_n(x)$ für verschiedene Werte von n [9].

Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

- Die einzelnen Sinus-Funktionen

$$\frac{1}{2k-1}\sin((2k-1)x)$$

der Fourier-Reihe sind in der folgenden Abb. dargestellt:



Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

Herleitung der Koeffizienten A_m:
1.) Für die partiellen Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial A_m} &= \frac{\partial}{\partial A_m}\int_{-\pi}^{\pi}(y(x)-f(x))^2\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial A_m}(y(x)-f(x))^2\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial A_m}\left(y(x)-\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin(kx)\right)^2 dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}2\left(y(x)-\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin(kx)\right)\cdot\sin(mx)\,dx \\
&= 2\int_{-\pi}^{\pi}\left(y(x)\cdot\sin(mx)-\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin(kx)\cdot\sin(mx)\right)dx \\
&= 2\int_{-\pi}^{\pi}y(x)\cdot\sin(mx)\,dx-2\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin(kx)\cdot\sin(mx)\,dx \\
&\stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Herleitung der Koeffizienten A_m:

2.) Es folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} y(x)\cdot\sin(mx)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} A_k\sin(kx)\cdot\sin(mx)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cdot\sin(mx)dx\end{aligned}$$

Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

Herleitung der Koeffizienten A_m: 3.) Für die Berechnung des Integrals $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(mx) dx$ machen wir die Fallunterscheidung $m = k$ und $m \neq k$:

- $m = k: \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2mx)}{4m} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$
- $m \neq k:$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(mx) dx = \left[\frac{\sin((k-m)x)}{2(k-m)} - \frac{\sin((k+m)x)}{2(k+m)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$
- Das heisst, dass sämtliche Summanden der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(mx) dx$ verschwinden, ausser derjenige für $m = k$, die Sinus-Terme sind also orthogonal zueinander.

Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

Herleitung der Koeffizienten A_m: 4.) Damit erhalten wir für die Koeffizienten A_m:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} y(x) \cdot \sin(mx) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(mx) dx \\ &= A_m \pi \\ \Rightarrow A_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(x) \cdot \sin(mx) dx \end{aligned}$$

Fourier-Reihen: Rechteckfunktion

Herleitung der Koeffizienten A_m: 5.) Wir setzen nun $y(x) = -1$ für $x \in [-\pi, 0]$ und $y(x) = -1$ für $x \in [-\pi, 0]$ gemäss obiger Definition und erhalten

$$\begin{aligned}
A_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(x)\cdot\sin(mx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\sin(mx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(+1)\cdot\sin(mx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{1}{m}\cos(mx)]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}[-\frac{1}{m}\cos(mx)]_{0}^{\pi} \ m \neq 0 \\
&= \frac{1}{m\pi}[1-(-1)^m] + \frac{1}{m\pi}[-(-1)^m+1] \\
&= \frac{2}{m\pi}[1-(-1)^m]
\end{aligned}$$

wobei $A_0 = 0$.

Allgemeine Fourier-Reihen

Satz 10.1: Fourier-Reihen / Fourier-Koeffizienten [8/11]

- Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit der Kreisfrequenz ω_0 und Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Ferner lasse sich das Periodenintervall in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen $f(x)$ stetig und monoton ist, und in den Unstetigkeitsstellen existiere sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert (Dirichletsche Bedingungen).
- Dann kann $f(x)$ in eine **Fourier-Reihe** der Form

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(k \cdot \omega_0 \cdot x) + B_k \sin(k \cdot \omega_0 \cdot x)\right]$$

entwickelt werden. Dabei bedeuten:

  - $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$: Kreisfrequenz der Grundschwingung
  - $k \cdot \omega_0$: Kreisfrequenz der sogn. $k-$ten harmonischen Oberschwingung

Numerik 2, Kapitel 10

Historische Entwicklung

Andwendungen

Fourier - Reihen

Diskrete Fourier-Transformation

Satz 10.1: (Fortsetzung)

- Die **Fourierkoeffizienten** von f werden dabei aus den Integralformeln

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{T}\int_{(T)} f(x)dx \\ A_k &= \frac{2}{T}\int_{(T)} f(x)\cos(k\omega_0 x)dx \\ B_k &= \frac{2}{T}\int_{(T)} f(x)\sin(k\omega_0 x)dx \end{aligned}$$

berechnet. Das Symbol (T) unter dem Integral bedeutet, dass die Integration über ein beliebiges Intervall der Länge T zu erstrecken ist.

- Die **Amplitude** des $k-$ten Fourierkoeffizienten berechnet sich zu

$$amp_{k=0} := \frac{A_0}{2}$$

Bemerkungen [8/11]:

- An eventuellen Unstetigkeitsstellen t_0 (es kommen nur Sprungunstetigkeiten mit endlichen Sprüngen in Frage) ist der Wert der Fourier-Reihe gleich dem arithmetischen Mittel aus den rechts- und dem linksseitigen Grenzwert, also
$$\frac{f(t_0^+) - f(t_0^-)}{2}$$
- So hat z.B. die 'Kippspannung' in der folgenden Abb. die Funktionswerte $\frac{4+0}{2} = 2$ an den Unstetigkeitsstellen $x + k \cdot 2\pi$.

Allgemeine Fourier-Reihen

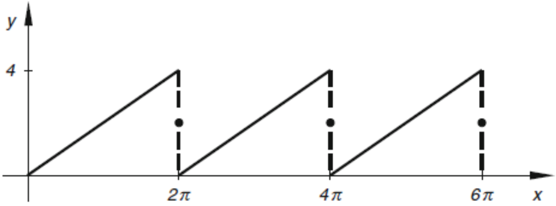


Abbildung: 'Kippspannung' mit dem Funktionswert $f(x + k \cdot 2\pi) = (4 + 0)/2$ in den Unstetigkeitsstellen [8].

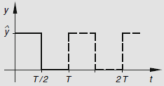
Bemerkungen [8/11]:

- Ist die Funktion f gerade (d.h. spiegelsymmetrisch bzgl. der $y-$Achse, bzw. $f(x) = f(-x)$ für alle x), so sind sämtliche Koeffizienten $B_k = 0$ (da sie ungerade Anteile in die Reihe einbringen würden).
- Ist die Funktion ungerade (d.h. punktsymmetrisch bzgl. dem Nullpunkt, bzw. $f(x) = -f(-x)$ für alle x), so sind sämtliche Koeffizienten $A_k = 0$ (da sie gerade Anteile in die Anteile einbringen würden).

Beispiel 10.1

- Fourier-Reihen einiger relevanter periodischen Funktionen (aus [8]).

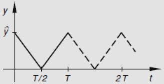
(1) Rechteckkurve



$$y(t) = \begin{cases} \hat{y} & \text{für } 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{2\hat{y}}{\pi}\left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\cdot\sin(5\omega_0 t) + \ldots\right]$$

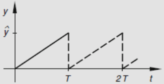
(2) Dreieckskurve



$$y(t) = \begin{cases} -\frac{2\hat{y}}{T}t + \hat{y} & \text{für } 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ \frac{2\hat{y}}{T}t - \hat{y} & \text{für } \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{4\hat{y}}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cdot\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2}\cdot\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2}\cdot\cos(5\omega_0 t) + \ldots\right]$$

(3) Kippschwingung (Sägezahnimpuls)

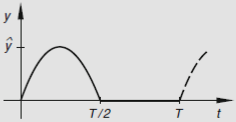


$$y(t) = \frac{\hat{y}}{T}t \qquad (0 \le t < T)$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} - \frac{\hat{y}}{\pi}\left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\cdot\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3\omega_0 t) + \ldots\right]$$

Beispiel 10.1

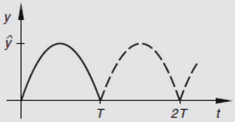
(4) Sinusimpuls (Einweggleichrichtung)



$$y(t) = \begin{cases} \hat{y} \cdot \sin(\omega_0 t) & \text{für} \quad 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{\pi} + \frac{\hat{y}}{2} \cdot \sin(\omega_0 t) - \frac{2\hat{y}}{\pi}\left[\frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdot \cos(6\omega_0 t) + \ldots\right]$$

(5) Sinusimpuls (Zweiweggleichrichtung)

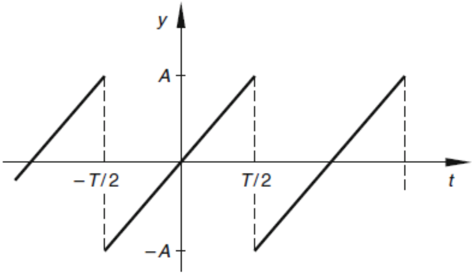


$$y(t) = \hat{y}\,|\sin(\omega_0 t)| \qquad (0 \le t \le T)$$

$$y(t) = \frac{2\hat{y}}{\pi} - \frac{4\hat{y}}{\pi}\left[\frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdot \cos(6\omega_0 t) + \ldots\right]$$

Bsp. 10.2

- Zerlegen Sie die in der untenstehenden Abb. gezeigte "Sägezahnfunktion" in ihre harmonischen Bestandteile (d.h. berechnen Sie die Fourierkoeffizienten).



Bsp. 10.2: Lösung

- Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{2A}{T} \cdot t,\ t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$
- Die Funktion ist ungerade, deshalb kann die Fourier-Reihe nur Sinusglieder enthalten, also $A_k = 0$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Daraus folgt mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(k\omega_0 t)$$

- Berechnung der Fourier-Koeffizienten B_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{2A}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} t \cdot \sin(k\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Bsp. 10.2: Lösung

- Das auftretende Integral können wir mit partieller Integration lösen:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= t \to u'(t) = 1 \\
v'(t) &= \sin(k\omega_0 t) \to v(t) = -\frac{1}{k\omega_0}\cos(k\omega_0 t) \\
\int \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{\sin(k\omega_0 t)dt}_{v'} &= u \cdot v - \int u' \cdot v dt \\
&= -\frac{t}{k\omega_0}\cos(k\omega_0 t) - (-\frac{1}{k\omega_0}) \cdot \underbrace{\int 1 \cdot \cos(k\omega_0 t)dt}_{\frac{1}{k\omega_0}\sin(k\omega_0 t)} \\
&= -\frac{1}{k\omega_0}\left(t\cos(k\omega_0 t) + \frac{1}{k\omega_0}\sin(k\omega_0 t)\right) \\
\Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} t \cdot \sin(k\omega_0 t)dt &= \left[-\frac{1}{k\omega_0}\left(t\cos(k\omega_0 t) + \frac{1}{k\omega_0}\sin(k\omega_0 t)\right)\right]_{-T/2}^{T/2} \\
&= \ldots \\
&= \frac{(-1)^{k+1}T^2}{k \cdot 2\pi}
\end{aligned}
$$

wobei wir $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ verwendet haben.

Bsp. 10.2: Lösung

- Damit erhalten wir die Koeffizienten

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{4A}{T^2} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} t \cdot \sin(k\omega_0 t) dt \\ &= \frac{4A}{T^2} \cdot \frac{(-1)^{k+1} T^2}{k \cdot 2\pi} \\ &= \frac{2A}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

Bsp. 10.2: Lösung

- Die Fourier-Reihe ergibt sich damit zu

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \\
&= \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k} \\
&= \frac{2A}{\pi} \left(\frac{\sin(\omega_0 t)}{1} - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{2} + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} - \dots \right)
\end{aligned}
$$

Bsp. 10.2: Lösung

- Die Abbildung für das endliche trigonometrische Polynom

$$f_n(t) := \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k}$$

sind für $n = 1, 2, 5, 50$ und $A = 1,\ T = 2\pi$ in der folgenden Abb. dargestellt.

Bsp. 10.2: Lösung

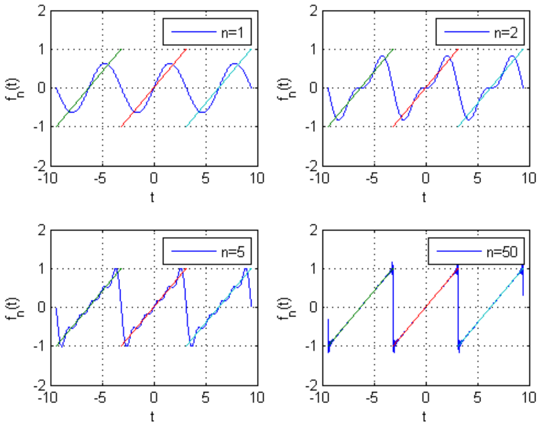
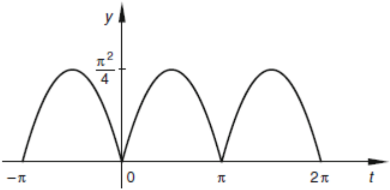


Abbildung: Trigonometrische Polynome $f_n(t)$ zu Bsp. 10.2 für $n = 1, 2, 5, 50$.

Aufgabe 10.1

- Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der unten dargestellten parabelförmigen periodischen Funktion (mit Periode $T = \pi$) :

$$f(t) = -t^2 + \pi t, \ \ t \in [0, \pi]$$



Aufgabe 10.1: Lösung [8]

Aufgabe 10.1: Lösung [8]

Aufgabe 10.1: Lösung [8]

Aufgabe 10.1: Lösung [8]

10.4 Diskrete Fourier-Transformation

Diskrete Fourier-Transformation

- Bisher war die Funktion $f(x)$ in analytischer Form gegeben.
- In der Realität hat man es aber in vielen Anwendungen mit einer endlichen Anzahl von diskreten Datenpunkten zu tun, z.B. bei Messungen, digitalen Bildern, digitalen Tonaufnahmen u.a.
- In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns deshalb mit Fourier-Reihen für Funktionen, die durch eine endliche Menge von **äquidistanten** Punkten gegeben sind.

Diskrete Fourier-Transformation

- Die Forderung nach gleichem Abstand zwischen den Datenpunkten entspricht den heute üblichen Messmethoden, bei denen in fixen (zeitlichen od. örtlichen) Abständen eine Messung vorgenommen oder ein Signal digital gerastert wird.
- Die Fourier-Reihe einer solchen Funktion hat eine endliche Nummer von Sinus- und Cosinus-Termen und wird deshalb auch diskrete Fourier-Reihe genannt.
- Das Berechnen der Koeffizienten der diskreten Fourier-Reihe nennt sich (reelle) diskrete Fourier-Transformation (DFT).

Diskrete Fourier-Transformation

Satz 10.2: Diskrete Fourier-Reihen / Diskrete Fourier-Transformation (DFT) [9]

- Sei $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ defniert durch $2n+1$ äquidistante Punkte $(t_i, f(t_i))$ mit $i = 1,...,2n+1$ und $f(0) = f(T)$. Der Abstand zwischen den Punkten sei konstant $\Delta t = \frac{T}{2n}$, d..h. $t_i = (i-1)\cdot\Delta t$. Dann kann $f(t_i)$ in eine **diskrete Fourier-Reihe** der Form

$$f(t_i) = \sum_{k=0}^{n} \left[A_k \cos(k\cdot\omega_0\cdot t_i) + B_k \sin(k\cdot\omega_0\cdot t_i)\right]$$

  entwickelt werden, auch bekannt als **inverse reelle diskrete Fourier-Tranfsormation**. Der letzte Punkt mit $t_{2n+1} = T$ wird nicht berücksichtigt, da $f(0) = f(T)$. Dabei bedeuten:
  - $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$: Kreisfrequenz der Grundschwingung
  - $k\cdot\omega_0$: Kreisfrequenz der sogn. $k-$ten harmonischen Oberschwingung

Diskrete Fourier-Transformation

Satz 10.2: Diskrete Fourier-Reihen / Diskrete Fourier-Transformation (DFT) [9]

- Die **diskreten Fourierkoeffizienten** von f werden dabei aus

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f(t_i) \\
A_k &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} f(t_i)\cos(k\cdot\omega_0\cdot t_i) \quad k=1,2,\ldots,n-1 \\
A_n &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f(t_i)\cos(n\cdot\omega_0\cdot t_i)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
B_0 &= 0 \\
B_k &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} f(t_i)\sin(k\cdot\omega_0\cdot t_i) \quad k=1,2,\ldots,n-1 \\
B_n &= 0
\end{aligned}
$$

Diskrete Fourier-Transformation

Bemerkungen:

- Die Koeffizienten A_k und B_k beschreiben die Funktion $f(t)$ im Frequenzbereich. Sie erlauben, die Funktion quasi aus der Zeit- (oder Orts-) Domäne in die Frequenzdomäne zu transformieren, deshalb der Begriff 'diskrete Fourier-Transformation'.
- Die Rücktransformation aus der Frequenzdomäne in die Zeit- (oder Orts-) Domäne erfolgt über $f(t_i) = \sum_{k=0}^{n} [A_k \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t_i) + B_k \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t_i)]$, deshalb der Begriff 'inverse diskrete Fourier-Transformation'.

$$\{f(t_1), f(t_2), ..., f(t_{2n})\} \xrightarrow{\text{DFT}} \{A_0, A_1, ..., A_n, B_0, B_1, ..., B_n\} \xrightarrow{\text{inverse DFT}} \{f(t_1), f(t_2), ...$$

- Falls $f(0) \neq f(T)$,ersetzt man üblicherweise $f(0)$ und $f(T)$ mit $\frac{f(0)+f(T)}{2}$.

Bemerkungen:

- Die reelle DFT ist von der Ordnung $O(n^2)$. Für grosse n gibt es den schnelleren Algorithmus der **'Fast Fourier Transform'** (FFT), welche von Cooley and Tukey in 1965[2] entwickelt wurde und die Ordnung $O(n \log n)$ hat. Zur Herleitung des Algorithmus benötigt man die komplexen Zahlen, weshalb wir an dieser Stelle darauf verzichten. In MATLAB existiert dazu die Funktion `fft.m`, welche die komplexen Koeffizienten $C_k = A_k + iB_k$ berechnet (hier bezeichnet i die imaginäre Einheit, definiert durch $i^2 = -1$).

[2] J.W. Cooley and J.W. Tukey, Math. Comp., Vol. 19, p.297, 1965.

Diskrete Fourier-Transformation

- Eine einfache Art, das Frequenzspektrum grafisch darzustellen, ist das sogenannte Leistungsdichte-Spektrum (im Englischen als *power sepctrum*, *energy spectrum* od. *spectral energy* bezeichnet).
- Handelt es sich beim Signal $f(t)$ um eine elektromagnetische Welle, entspricht das Quadrat der Fourierkoeffizienten der Energie dieser Welle bei der k-ten Frequenz.
- Je mehr Energie (d.h. je grösser das Quadrat der Fourier-Koeffizienten) bei einer spezifischen Frequenz, umso dominanter ist die entsprechende harmonische Schwingung.

Numerik 2, Kapitel 10

Historische Entwicklung

Andwendungen

Fourier - Reihen

Diskrete Fourier-Transformation

Defintion 10.1: Leistungsdichte-Spektrum / Power-Spektrum

- Wir definieren das Leistungsdichte-Spektrum / Power-Spektrum für die diskrete Fourier-Transformation als
$$P_k = \frac{1}{4}\frac{\left(A_k^2 + B_k^2\right)}{n} \quad k = 0, \ldots, n$$
für die k-te Frequenz $\nu_k = \frac{k \cdot \omega_0}{2\pi} = \frac{k}{T}$.

Aufgabe 10.2

- Programmieren Sie die DFT in MATLAB als function `[kp Ak Bk] = DFT(t,f)`. Input sind die beiden Vektoren `t` und `f` mit der Anzahl von $2n$ Elementen für die unabhängige Variable t und die abhängige Variable $f = f(t)$. Output sind die Vektoren `[kp Ak Bk]` mit je n Elementen, welche den Index k sowie die Koeffizienten A_k und B_k enthalten.

Aufgabe 10.2: Lösung

Aufgabe 10.3

- Einleitung: Das menschliche Gehör kann Frequenzen bis 20 kHz wahrnehmen (also Töne mit 20'000 Schwingungen pro Sekunde). Um ein analoges Audiosignal zu digitialsieren (z.B. bei der Herstellung einer CD), muss das Signal mit mindestens der doppelten Rate abgetatestet werden(hier also mindestens 40'000 mal pro Sekunde)[3]. Diese sogn. Sampling-Rate beträgt bei der Herstellung einer CD standardmässig 44.1 kHz.

[3]Dies ist das Nyquist-Theorem, welches besagt, dass eine Schwingung mit der Frequenz ν_{Signal} nur dann nachgewiesen werden kann, wenn die Messung mindestens zweimal pro Schwingungsdauer stattfindet, also $\nu_{Messung} \geq 2\nu_{Signal}$. Ansonsten kommt es zu sogn. 'Aliasing'-Effekten, siehe z.B. http://de.wikipedia.org/wiki/Alias-Effekt.

Aufgabe 10.3

- Betrachten wir z.B. das Signal

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sin(2\pi \cdot \nu_0 \cdot t) + 0.5 \cdot \sin(2\pi \cdot 4\nu_0 \cdot t) \\
&\quad + 0.8\cos(2\pi \cdot 2\nu_0 \cdot t) + 0.4\cos(2\pi \cdot 12\nu_0 \cdot t)
\end{aligned}
$$

mit der Frequenz $\nu_0 = 200$ Hz (also $\omega_0 = 2\pi\nu_0$). Verwenden Sie eine Sampling-Rate von 44.1 kHz, um $f(t)$ auf dem Intervall von $t = 0$ bis $t = 0.005$ [s] zu diskretisieren (also mit Zeitschritten von $\Delta t = 1/(44.1 \cdot 10^3)$ [s]) und berechen sie die DFT von $f(t)$. Plotten Sie anschliessend (i) die Funktion, (ii) ihr Power-Spektrum als Funktion der Frequenz und (iii) die Koeffizienten A_k und B_k jeweils separat mittels des MATLAB-Befehls `stem`.

Aufgabe 10.3: Lösung

Aufgabe 10.3: Lösung

Aufgabe 10.3: Lösung