Differentialrechnung: Teil 4

Andreas Henrici

MANIT1 IT18ta_ZH

3. Dezember 2018

Überblick

1. **Ableitungsregeln**
   - Repetition
   - Logarithmische Ableitung
   - Ableitung der Umkehrfunktion

2. **Anwendungen der Ableitung**
   - Linearisierung einer Funktion
   - Monotonie
   - Krümmung

Ableitungsregeln: Repetition

- Ableitung der Grundfunktionen:
  - $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$
  - $f(x) = a^x$, $a > 0$: $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
  - $f(x) = \log_a(x)$: $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
  - $f(x) = \sin(x)$: $f'(x) = \cos(x)$
  - $f(x) = \cos(x)$: $f'(x) = -\sin(x)$
- Ableitung von zusammengesetzten Funktionen:
  - $f(x) = \lambda_1 u(x) + \lambda_2 v(x)$: $f'(x) = \lambda_1 u'(x) + \lambda_2 v'(x)$
  - $f(x) = u(x) \cdot v(x)$: $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
  - $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$: $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
  - $f(x) = u(v(x))$: $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Logarithmische Ableitung: Beispiel

Beispiel

Problemstellung:

- Ableitung der Funktion $y = x^x$?
- Regeln über Ableitung von Potenzfunktion und Exponentialfunktionen sind nicht direkt anwendbar, da sowohl die Basis als auch der Exponent variabel sind!
- Andere Notation: $y = x^x = e^{x \cdot \ln(x)}$
- Ableiten mit Kettenregel und Produktregel:

$$y' = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + \frac{x}{x} \right) = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

Andere Herleitung des gleichen Resultats:

- Logarithmieren: Aus $y = x^x$ folgt $\ln(y) = x \cdot \ln(x)$
- Ableiten mit Kettenregel und Produktregel: $\frac{y'}{y} = \ln(x) + 1$
- Auflösen nach y':

$$y' = y \cdot (\ln(x) + 1) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

Logarithmische Ableitung: Allgemeines Vorgehen

- Gesucht: Ableitung von $y = u(x)^{v(x)}$
- Logarithmieren: Aus $y = u(x)^{v(x)}$ folgt $\ln(y) = v(x) \cdot \ln(u(x))$
- Ableiten mit Kettenregel:

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$$

- Auflösen nach y':

$$\begin{aligned} y' &= f(x) \cdot \left(v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right) \\ &= u(x)^{v(x)} \cdot \left(v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right). \end{aligned}$$

Beispiel

Ableitung von $y = x^{\sin(x)}$?

Ableitung der Umkehrfunktion: Ausgangslage

- *Ziel:* Ableitung von Funktionen wie z.B.
  - $y = \arctan(x)$
  - $y = \arccos(x)$
  - $y = \arcsin(x)$
  - $y = \ln(x)$
- *Wir wissen:* Diese Funktionen sind die Umkehrfunktionen von
  - $y = \tan(x)$
  - $y = \cos(x)$
  - $y = \sin(x)$
  - $y = e^x$
- Wir kennen die Ableitungen dieser Grundfunktionen:
  - $y' = 1 + \tan^2(x)$
  - $y' = -\sin(x)$
  - $y' = \cos(x)$
  - $y' = e^x$
- Wie können wir daraus die Ableitungen der Umkehrfunktionen finden?

Ableitung der Umkehrfunktion: Umsetzung

- Ausgangspunkt: Funktion $f(x)$ mit Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$
- *Idee:* Wir leiten die Gleichung

$$\underbrace{f^{-1}(f(x))}_{=(f^{-1}\circ f)(x)} = x$$

  ab und verwenden dazu die *Kettenregel*.
- Wir erhalten:

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1.$$

- Einsetzen von $y = f(x)$ bzw. $x = f^{-1}(y)$ und Auflösen nach $f^{-1}(y)$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

- Also (Vertauschen von x und y):

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Ableitung der Umkehrfunktion: Resultat

Hauptresultat:

Satz

Sei $y = f(x)$ eine umkehrbare und differenzierbare Funktion. Die Ableitung der Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$ ist

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Wichtige Anwendungen:

Satz

Es gelten folgende Ableitungsregeln:

a) $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

b) $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

d) $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Ableitung der Umkehrfunktion: Wichtige Beispiele

Beispiel

- Wir betrachten $f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \ln(x)$
- $f'(x) = e^x$; $(f^{-1})'(x) = ?$
- Anwenden der Formel:

Beispiel

- Wir betrachten $f(x) = \tan(x)$, $f^{-1}(x) = \arctan(x)$
- $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$; $(f^{-1})'(x) = ?$
- Anwenden der Formel:

Überblick

Überblick über die Anwendungen der Differentialrechnung:

- Wir verwenden die Ableitung einer Funktion, um verschiedene Aspekte der Funktion selbst besser zu verstehen.
- Wir bestimmen nicht nur die Steigung, sondern die Geradengleichung der Tangente an die Funktionskurve an einer bestimmten Stelle.
- Wir verwenden das Vorzeichen der Ableitung, um herauszufinden, ob die Funktionskurve ansteigt oder abfällt.
- Wir verwenden das Vorzeichen der *zweiten* Ableitung, um herauszufinden, ob die Funktionskurve eine Links- oder Rechtskurve beschreibt.
- Wir suchen Nullstellen der ersten Ableitung, um Hoch- und Tiefpunkte der Funktionskurve zu finden.
- Wir suchen Nullstellen der *zweiten* Ableitung, um Punkte zu finden, an denen die Funktionskurve ihren Drehsinn ändert.
- ...

Tangentengleichung

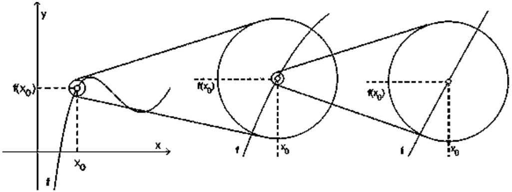
- Wir wissen: Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$.
- Gleichung der Tangente:

Satz

Sei $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion mit Definitionsbereich D und $x_0 \in D$. Die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f(x)$ an der Stelle x_0 ist

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

- „Unter dem Mikroskop sieht jede Funktion lokal wie eine Gerade aus"



Tangentengleichung: Beispiel

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $y = e^x$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Funktionsgraphen von $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

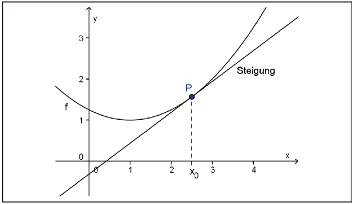
b) Vergleichen Sie für $x = 0.01$ die Funktionswerte auf der Funktionskurve und auf der Tangenten.

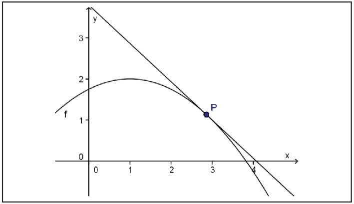
Monotonie: Allgemeines

Satz

Sei $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion mit Definitionsbereich D und Ableitung $y' = f'(x)$, und sei $x_0 \in D$. Dann gilt:

- *Ist $f'(x_0) > 0$, so wächst die Kurve streng monoton in einer Umgebung des Kurvenpunktes $P = (x_0, f(x_0))$.*
- *Ist $f'(x_0) < 0$, so fällt die Kurve streng monoton in einer Umgebung des Kurvenpunktes $P = (x_0, f(x_0))$.*
- *Ist $f'(x_0) = 0$, so hat die Funktionskurve im Kurvenpunkt $P = (x_0, f(x_0))$ eine horizontale Tangente.*





Monotonie: Beispiel

Beispiel

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen $y = f(x)$ anhand des Vorzeichens ihrer Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$:

a) $y = e^x$

b) $y = e^{-x}$

c) $y = \ln(x)$

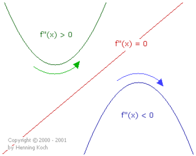
d) $y = (2 - 2x - x^2) \cdot e^{1-x}$

Krümmung: Allgemeines

Satz

Zusammenhang zwischen 2. Ableitung und Krümmung:

- *Ist* $f''(x_0) > 0$*, so ist die Kurve in einer Umgebung des Kurvenpunktes* $P = (x_0, f(x_0))$ *nach links gekrümmt, bzw. sie ist konvex.*
- *Ist* $f''(x_0) < 0$*, so ist die Kurve in einer Umgebung des Kurvenpunktes* $P = (x_0, f(x_0))$ *nach rechts gekrümmt, bzw. sie ist konkav.*
- *Ist* $f''(x_0) = 0$*, so ist die Kurve im Kurvenpunkt* $P = (x_0, f(x_0))$ *nicht eindeutig gekrümmt.*



Krümmung: Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten der folgenden Funktionen $y = f(x)$ anhand des Vorzeichens ihrer Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$:

a) $y = e^x$

b) $y = e^{-x}$

c) $y = \ln(x)$