Differentialgleichungen: Teil 2

Andreas Henrici

MANIT2 IT18ta_ZH

16.04.2019

Überblick

Beispiel

Beispiel

AWP 1. Ordnung:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t) & = & x^2(1-x) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

Separation der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1-x)} = \mathrm{d}t$$

Integration:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1-x)} = \int \mathrm{d}t$$

führt zu

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|1-x| = t + C$$

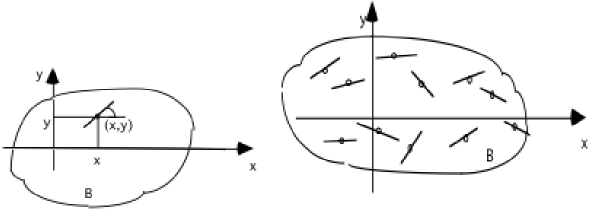
Auflösen nach x: ???

Eine geometrische Betrachtungsweise

Ziel: **Geometrisches** Verständnis von expliziten DGL 1. Ordnung, d.h.

$$y' = f(x, y).$$

Idee: $f(x, y)$ gibt die **Steigung** der Lösungskurve im Punkt (x, y) an!



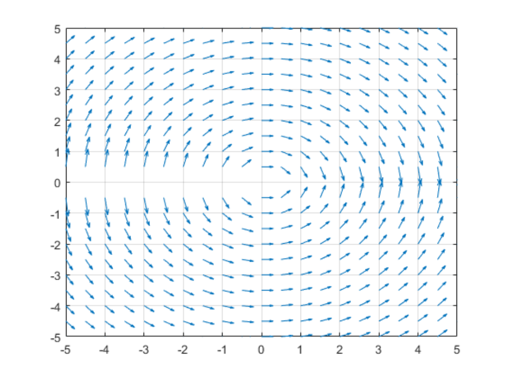
- Alle Steigungen ergeben ein *Vektorfeld* in der Ebene an, das **Richtungsfeld** der DGL $y' = f(x, y)$. Wir erhalten so die **Tangenten** an die Lösungskurven!
- Wir müssen Kurven mit vorgegebenen Tangentenstücken finden. Dies bedeutet "DGL lösen" geometrisch.

Beispiel

- DGL:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

- Richungsfeld dieser DGL:



Beispiel

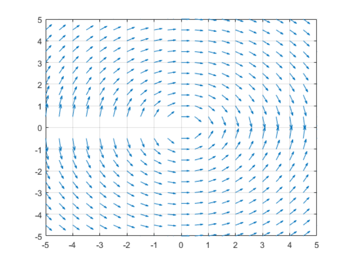
- DGL:

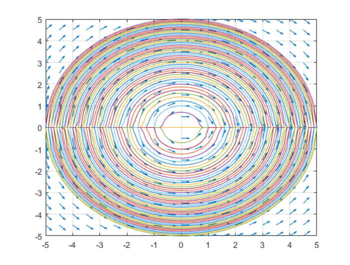
$$y' = -\frac{x}{y}.$$

- Allgemeine Lösung:

$$y = \pm\sqrt{K - x^2}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

- Richungsfeld ohne / mit Lösungen:





Bemerkung: Diese geometrische Betrachungsweise ist die Grundlage der **numerischer Methoden** zur Lösung von DGL.

Spezielle Typen von Richtungsfeld

Spezielle Typen von DGL:

- Unbestimmtes Integral: $y' = f(x)$: Das Richtungsfeld ist unabhängig von y, die verschiedenen Lösungen gehen durch Verschiebung in y-Richtung ineinander über
- Autonome DGL: $y' = g(y)$: Das Richtungsfeld ist unabhängig von x, die verschiedenen Lösungen gehen durch Verschiebung in x-Richtung ineinander über

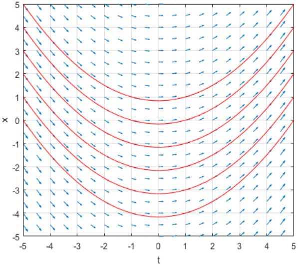


Abbildung: Unbestimmtes Integral

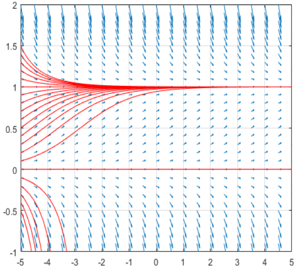


Abbildung: Autonome DGL

Numerische Verfahren: Überblick

Zielsetzung: *AWP 1. Ordnung* lösen, d.h.

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Bemerkungen:

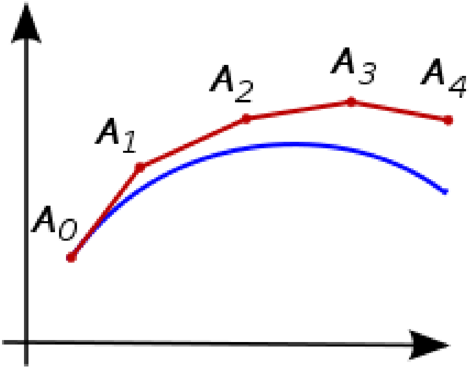
- Wir lösen nur AWPs. Es hat keinen Sinn, die allgemeine Lösung einer DGL numerisch berechnen zu wollen.
- AWP für Systeme von DGL 1. Ordnung
- DGL höherer Ordnung: zuerst als System von DGL 1. Ordnung formulieren!

Kriterien für die *Qualität* eines Verfahrens

- Kleiner Fehler, d.h. die durch das Verfahren berechnete Näherungslösung $\hat{y}(x)$ soll die wahre Lösung $y(x)$ möglichst gut approximieren
- Kleiner Rechenaufwand

Explizites Euler-Verfahren: Geometrische Grundidee

Idee: Approximation der unbekannten Lösung durch einen “Streckenzug” aus Geradenstücken mit den durch die DGL gegebenen Steigungswerten



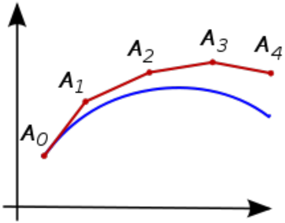
Explizites Euler-Verfahren: Geometrie und Algorithmus

Gleichung der Gerade
mit Steigung m im Punkt (x_0, y_0):

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0)$$

DGL: $y' = f(x, y)$; also erhalten wir mit $m = f(x_0, y_0)$ die Tangente an die Lösungskurve im Punkt (x_0, y_0):

$$y = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$$



Für $x = x_1$:

$$\underbrace{y_1}_{\approx y(x_1)} = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{=h}$$

Algorithmus des expliziten Euler-Verfahrens:

$$\begin{cases} x_k = x_0 + k \cdot h \\ y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \end{cases} \text{bzw.} \begin{cases} t_k = t_0 + k \cdot h \\ x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k) \end{cases}$$

Explizites Euler-Verfahren: Beispiel

Beispiel

- AWP:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -2t \cdot x^2 \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

- Exakte Lösung (Übungen):

$$x(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

- Euler-Verfahren in diesem Fall:

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + k \cdot h \\ x_{k+1} &= x_k + h \cdot (-2t_k \cdot x_k^2) \end{aligned}$$

- Also

$$\begin{aligned} t_k &= k \cdot h \\ x_{k+1} &= x_k(1 - 2ht_k x_k) \end{aligned}$$

Explizites Euler-Verfahren: Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

- Durchführung des Algorithmus

$$\begin{aligned} t_k &= k \cdot h \\ x_{k+1} &= x_k(1 - 2ht_kx_k) \end{aligned}$$

  für $h = 0.1$ und $k = 0, 1, 2, 3$:
- Berechnung der t_k's:

$$t_0 = 0,\ t_1 = 0.1,\ t_2 = 0.2,\ t_3 = 0.3$$

- Berechnung der x_k's:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= x_0(1 - 2ht_0x_0) = 1 \cdot (1 - 2 \cdot 0.1 \cdot 0 \cdot 1) = 1 \\ x_2 &= x_1(1 - 2ht_1x_1) = 1 \cdot (1 - 2 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 1) = 0.98 \\ x_3 &= x_2(1 - 2ht_2x_2) = 0.98 \cdot (1 - 2 \cdot 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.98) = 0.941584 \end{aligned}$$

Explizites Euler-Verfahren: Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

Vergleich der approximierten und der exakten Werte für verschiedene Schrittweiten:

		$h = 0.1$		$h = 0.01$		$h = 0.001$	
t_k	$x(t_k)$	x_k	e_k	x_k	e_k	x_k	e_k
0	1.00000	1.00000	-	1.00000	-	1.00000	-
0.1	0.99010	1.00000	-0.00990	0.99107	-0.00097	0.99020	-0.00010
0.2	0.96154	0.98000	-0.01846	0.96330	-0.00176	0.96171	-0.00018
0.3	0.91743	0.94158	-0.02415	0.91969	-0.00226	0.91766	-0.00022
0.4	0.86207	0.88839	-0.02632	0.86448	-0.00242	0.86231	-0.00024
0.5	0.80000	0.82525	-0.02525	0.80229	-0.00229	0.80023	-0.00023
0.6	0.73529	0.75715	-0.02185	0.73727	-0.00198	0.73549	-0.00020

Beobachtung: Bei Multiplikation von h mit 0.1 wird der Fehler e_k ebenfalls ca. mit 0.1 multipliziert. D.h. der Fehler ist etwa proportional zur Schrittweite h!

Explizites Euler-Verfahren: Beispiel

Beispiel

- AWP:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda \cdot x(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

- Exakte Lösung:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

- Euler-Verfahren in diesem Fall:

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + k \cdot h &&= 0 + kh \\ x_{k+1} &= x_k + h \cdot \underbrace{(\lambda x_k)}_{=f(t_k, x_k)} &&= x_k(1 + h\lambda) \end{aligned}$$

- Geometrische Folge für die x_k's!
- Explizite Formel für x_k ohne Rekursion:

$$x_n = x_0 \cdot (1 + h\lambda)^n = (1 + h\lambda)^n$$

Explizites Euler-Verfahren: Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

- Explizite Formel für x_k ohne Rekursion:

$$x_n = x_0 \cdot (1 + h\lambda)^n = (1 + h\lambda)^n$$

- Für fixiertes t und Schrittweite $h = \frac{t}{n}$:

$$x_n = \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n$$

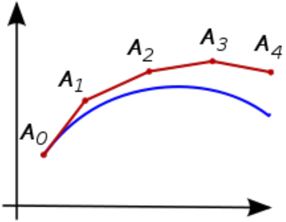
- Im Limes $n \to \infty$ (unendlich feine Unterteilung des Intervalls $[0, t]$):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n = e^{\lambda t}$$

  nach dem Muster $e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.
- D.h. im Limes unendlich feiner Unterteilung des Intervalls ergibt die numerische Lösung genau die exakte Lösung!

Explizites Euler-Verfahren: Problem

- Explizites Euler-Verfahren:



Algorithmus:

$$\begin{cases} t_k = t_0 + k \cdot h \\ x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k) \end{cases}$$

- *Problem:* Die Steigung wird nur am linken Ende des Intervalls $[t_k, t_k + h]$ berücksichtigt!
- *Lösung:* Verbesserte numerische Verfahren!