# Reelle Funktionen: Teil 2

Andreas Henrici

MANIT1 IT18ta_ZH

8. Oktober 2018

# Überblick

1. Eigenschaften von Funktionen
2. Operationen mit Funktionen
3. Koordinatentransformationen

## Nullstellen von Funktionen

Repetition:

### Definition

Ein $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst *Nullstelle* von $f$, falls

$$f(x_0) = 0$$

gilt.

### Bemerkung

Graphisch bedeutet dies, dass an der Stelle $x_0$ die Funktionskurve von $f$ die $x$-Achse schneidet.

### Beispiel

Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 9$: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$

## Symmetrie von Funktionen

### Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst

- *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

- *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

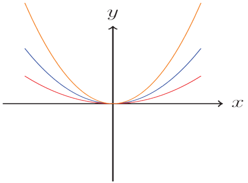
### Beispiel

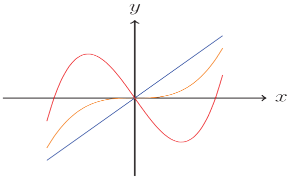
- Die Funktionen $y = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ sind
- Die Funktionen $y = \cos(x)$ ist eine

## Symmetrie von Funktionen: Geometrie

Symmetrie anhand von Graphen:

- Gerade Funktion: Graph *achsensymmetrisch* zur $y$-Achse
- Ungerade Funktion: Graph *punktsymmetrisch* zum Ursprung




**Bemerkung**

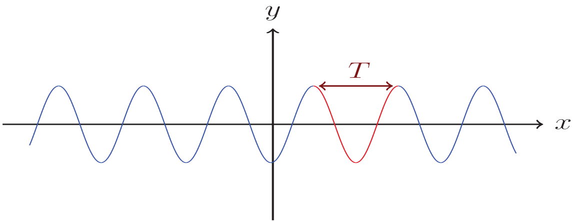
Die meisten Funktionen sind weder gerade noch ungerade!

## Periodische Funktionen

### Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *$T$-periodisch*, wenn gilt:

$$f(x+T) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$




### Beispiel

Die Funktionen $y = \cos(x)$ und $y = \sin(x)$ sind $2\pi$-periodische Funktionen.

# Monotone Funktionen

## Definition

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst

- *monoton wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

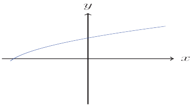
$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

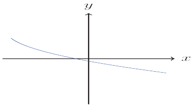
- *monoton fallend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

## Bemerkung

Strenge Monotonie: $<$ / $>$ statt $\leq$ / $\geq$



## Injektiv, surjektiv, bijektiv

**Definition**

Eine Funktion $f : D \to W$ heisst

- *injektiv*, wenn aus $x_1 \neq x_2$ mit $x_1, x_2 \in D$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt.
- *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ gibt mit $f(x) = y$.
- *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

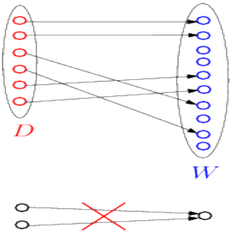



**Abbildung:** Injektiv

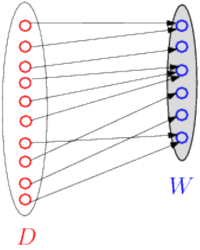



**Abbildung:** Surjektiv

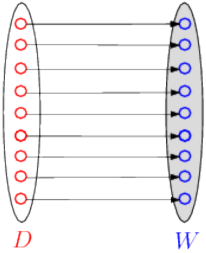



**Abbildung:** Bijektiv

## Grundoperationen mit Funktionen

### Definition

Seien zwei Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ und $g : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x)$ gegeben. Dann können wir die folgenden Operationen definieren:

$$
\begin{array}{lllll}
f+g\colon & D \to \mathbb{R} \quad \text{mit} & x \mapsto & f(x)+g(x) & \\
f-g\colon & D \to \mathbb{R} \quad \text{mit} & x \mapsto & f(x)-g(x) & \\
f\cdot g\colon & D \to \mathbb{R} \quad \text{mit} & x \mapsto & f(x)\cdot g(x) & \\
\dfrac{f}{g}\colon & D \to \mathbb{R} \quad \text{mit} & x \mapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} & \text{falls } g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in D \\
c\cdot f\colon & D \to \mathbb{R} \quad \text{mit} & x \mapsto & c\cdot f(x) & \text{für ein festes } c \in \mathbb{R}.
\end{array}
$$

Graphische Addition von Funktionen: siehe Abbildung im Skript!

### Beispiel

$f(x) = -3x + 4$, $g(x) = x^2$; ...

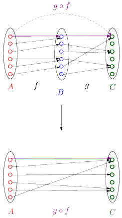
# Komposition von Funktionen

## Definition

Für zwei gegebene Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$, ist die Funktion $g \circ f : A \to C$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Diese neue Funktion heisst *Komposition* von $f$ und $g$. (Andere Bezeichnungen: *Verkettung*, *Hintereinanderschaltung*.)



## Komposition von Funktionen

### Bemerkung

- Bei der Komposition $(g \circ f)(x)$ wird zuerst diejenige Funktion ausgeführt, die *rechts* steht.
- Zudem ist die Operation „Verkettung von Funktionen“ *nicht kommutativ*.
- D.h. $g \circ f \neq f \circ g$!

### Beispiel

$f(x) = 3x + 7$, $g(x) = \sqrt{x}$.

- $(f \circ g)(x) =$
- $(g \circ f)(x) =$

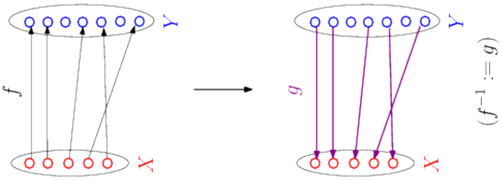
# Umkehrfunktion

## Definition

Sei $f : D \to W$ eine bijektive Funktion. Die *Umkehrfunktion* $g : W \to D$ ist definiert durch

$$g(y) = x, \quad \text{wobei } x \text{ durch } f(x) = y \text{ eindeutig definiert wird.}$$

Diese Funktion $g$ heisst wird auch als $f^{-1}$ bezeichnet; diese Bezeichnung ist aber nicht mit dem Kehrwert zu verwechseln!



# Umkehrfunktion: Rechnerische Bestimmung

## Satz

*Sei $f : D \to W$ eine bijektive Funktion mit Umkehrfunktion $g : W \to D$. Dann gilt*

$$(g \circ f)(x) = x, \qquad (f \circ g)(y) = y \quad \textit{für alle } x \in D,\ y \in W$$

Bestimmung der Umkehrfunktion:

- Gegeben: $y = f(x)$
- $y = f(x)$ nach $x$ auflösen ergibt $x = g(y)$
- Variablen vertauschen ergibt $y = g(x)$
- $g$ ist die Umkehrfunktion von $f$.

## Beispiel

- $y = 0.8x + 3$:
- $y = \frac{3x}{2x-5}$:

## Umkehrfunktion: Graphische Bestimmung

Methode zur graphischen Bestimmung der Umkehrfunktion:
Graph von $y = f(x)$ an der Geraden $y = x$ spiegeln!

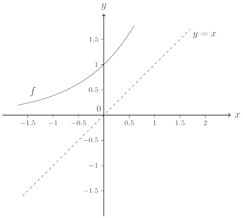



**Abbildung:** Umkehbare Funktion

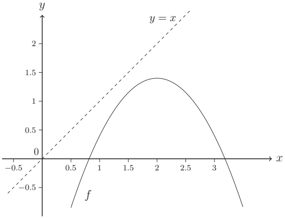
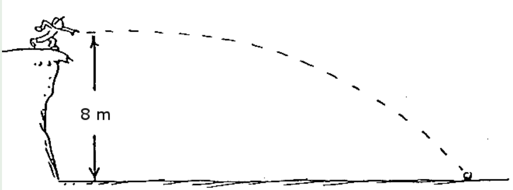



**Abbildung:** Nicht umkehrbare Funktion

# Koordinatentransformation: Beispiel

## Beispiel




Abhängigkeit der Höhe von der Weite:

$$y = f(x) = 8 - \frac{g}{450} \cdot x^2 \quad (g = 9.81\ldots)$$

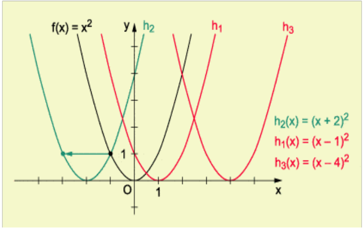
Neue Formel im Fall:

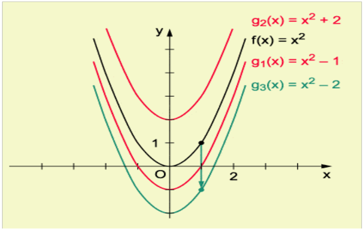
**a)** Abwurf 2 m höher?

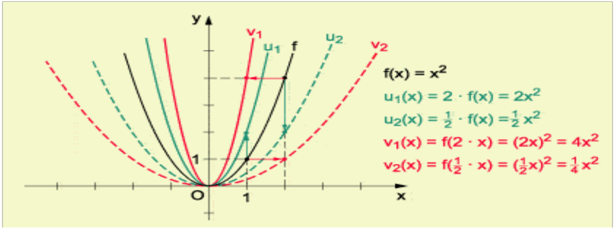
**b)** Abwurf 3 m weiter hinten?

**c)** Angaben auf der $x$-Achse neu in dm statt in m angegeben?

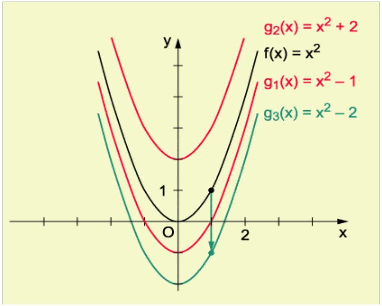
# Koordinatentransformation: Überblick



# Koordinatentransformation: Verschiebung in $y$-Richtung



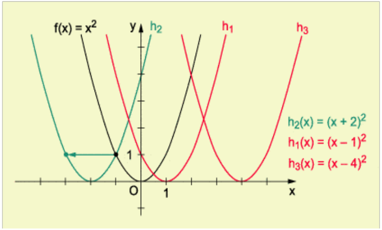

Alte Funktion:

$$y = f(x)$$

Neue Funktion:

$$y = f(x) + c$$

# Koordinatentransformation: Verschiebung in $x$-Richtung




Alte Funktion:

$$y = f(x)$$

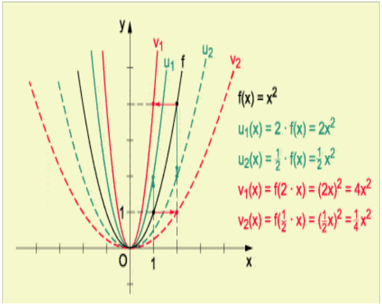
Neue Funktion:

$$y = f(x + c)$$

## Bemerkung

Vorsicht: Die neue Funktion $f(x + c)$ ist um $c$ in die *negative* $x$-Richtung verschoben!

## Koordinatentransformation: Streckung in $y$-Richtung



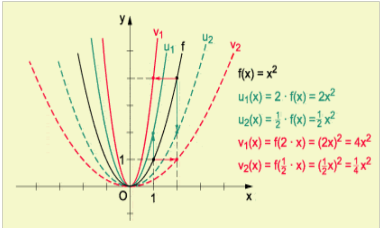

Alte Funktion:

$$y = f(x)$$

Neue Funktion:

$$y = c \cdot f(x)$$

## Koordinatentransformation: Streckung in $x$-Richtung




Alte Funktion:

$$y = f(x)$$

Neue Funktion:

$$y = f(c \cdot x)$$

**Bemerkung**

Vorsicht: Die neue Funktion $f(c \cdot x)$ ist um den Faktor $c$ in $x$-Richtung gestaucht!